

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

*На правах рукописи*



**Ермаков Иван Сергеевич**

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТЯГИВАЕМЫХ КОМПОЗИТНЫХ  
ПЛАСТИН С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВИДЕ КРУГОВЫХ  
ОТВЕРСТИЙ**

Специальность 1.1.8. – «Механика деформируемого твёрдого тела»

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание учёной степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

д.т.н., профессор

Григорьев Валерий Георгиевич

Москва – 2024

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ .....	4
ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ И ПРОЧНОСТИ РАСТЯГИВАЕМЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВИДЕ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ. ФОРМУЛИРОВКА ПОДХОДА К ПОСТРОЕНИЮ МЕТОДИКИ ИХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ .....	12
1.1 Постановки задач о напряжённо-деформированном состоянии и прочности растягиваемых композитных пластин с круговыми отверстиями .....	12
1.2 Методы решения задач о напряжённо-деформированном состоянии и прочности растягиваемых композитных пластин с круговыми отверстиями ....	23
1.3 Формулировка подхода к построению методики численного решения задач о напряжённо-деформированном состоянии и прочности растягиваемых композитных пластин с круговыми отверстиями .....	30
ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТЯГИВАЕМЫХ ТОНКИХ КОМПОЗИТНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН, ОСЛАБЛЕННЫХ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ.....	36
2.1 Вариационно-разностная и конечно-элементная вычислительные модели для исследования напряжённого состояния растягиваемых тонких композитных пластин с круговыми отверстиями.....	36
2.2 Численный анализ распределения напряжений вокруг круговых отверстий в тонких ортотропных пластинах при одноосном растяжении.....	43
2.3. Численное моделирование растягиваемых композитных полос, ослабленных набором круговых отверстий .....	49
ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТЯГИВАЕМЫХ ТОЛСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ОСЛАБЛЕННЫХ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ .....	62
3.1 Вычислительные модели для исследования напряжённого состояния растягиваемых толстых композитных ортотропных пластин с круговым отверстием.....	62
3.2. Численное моделирование растягиваемых толстых изотропных и ортотропных (на основе стеклоткани) композитных пластин с круговым отверстием.....	71
3.3 Численное моделирование растягиваемых толстых ортотропных композитных (на основе однонаправленных систем армирующих волокон) пластин с круговым отверстием .....	78

ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАЯВЛЕННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕТОДИКИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ РАСТЯГИВАЕМЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВИДЕ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ .....	90
4.1. Расчётный анализ прочности растягиваемых композитных полос с одним круговым отверстием (в сопоставлении с экспериментом).....	90
4.2. Расчётный анализ прочности растягиваемых композитных (на основе однаправленной системы углеволокон) полос, ослабленных набором круговых отверстий, в сопоставлении с экспериментом .....	101
4.3. Расчётный анализ прочности растягиваемых композитных (на основе однаправленной системы стекловолокон) полос, ослабленных набором круговых отверстий, в сопоставлении с экспериментом .....	106
4.4. Исследование влияния физико-механических характеристик композитных материалов на прочность растягиваемых выполненных из этих материалов полос с набором круговых отверстий .....	110
4.5 Расчётно-экспериментальное исследование прочности растягиваемых стеклотекстолитовых образцов с круговыми отверстиями .....	118
ВЫВОДЫ .....	128
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	130
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	142

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.** Распространёнными элементами различного рода силовых конструкций, изготавливаемых на основе композиционных материалов таких, как стекло- и углепластики, являются композитные пластины, работающие в условиях растягивающих нагрузок. Зачастую по конструктивным и технологическим соображениям в отмеченных пластинах предусматривается наличие одного или нескольких отверстий (во многих случаях круговых). Вблизи указанных отверстий напряжения, обусловленные приложенными растягивающими нагрузками, могут достигать опасно высоких значений и приводить к разрушению подобного типа пластин. Отсюда запрос, выдвигаемый практикой проектирования, на разработку расчётных моделей, способных адекватно предсказывать напряжённое состояние обозначенных (ослабленных круговыми отверстиями) композитных пластин и давать обоснованный прогноз по их прочности.

Обсуждаемые композитные пластины имеют слоистую структуру, в которой каждый элементарный слой представляет собой полимер малой толщины, армированный либо однонаправленной, либо переплетённой (в виде ткани) системой стекло- или угле-волокон. Во многих важных для практики случаях подобные композитные пластины формируются из большого числа указанного типа элементарных слоёв и могут при расчёте рассматриваться по схеме пластины, выполненной из ортотропного материала, обладающего линейно упругими свойствами вплоть до момента разрушения. Кроме того, в случаях, когда размеры такой пластины (по длине и ширине), а также диаметры выполненных в ней отверстий значительно больше её толщины, соответствующие расчёты допустимо проводить в рамках предположения о плоском напряжённом состоянии, считая пластину тонкой. Такие случаи являются наиболее распространёнными на практике. Но приходится иметь дело и с ситуациями, когда диаметр выполненного в пластине отверстия либо сопоставим с её толщиной, либо меньше толщины. Такие случаи (случаи толстых пластин)

требуют расчётов в рамках трёхмерной постановки соответствующей задачи о напряжённом состоянии обсуждаемого типа пластин.

Анализ опубликованных в литературе исследований, касающихся напряжённого состояния и прочности растягиваемых композитных пластин, ослабленных круговыми отверстиями, позволяет сделать вывод о том, что большинство полученных в указанном направлении результатов (в том числе по вопросам прочности) относится к случаю тонких пластин с одним круговым отверстием. Что касается вопросов, связанных с напряжённым состоянием и прочностью в важных для практики случаях растяжения тонких композитных пластин, имеющих несколько круговых отверстий, а также случаях толстых (по сравнению с диаметром отверстия) пластин, то они к настоящему времени не достаточно изучены. Эти вопросы до сих пор сохраняют свою актуальность.

**Степень разработанности темы.** Обращаясь к проблеме расчёта напряжённого состояния обсуждаемого типа композитных пластин, отметим, что имеющиеся для этих целей точные аналитические решения построены применительно к случаям бесконечно протяжённых пластин. Между тем, на практике часто приходится иметь дело с ситуацией, когда ширина пластины сопоставима с диаметром выполненных в ней отверстий и расчёты необходимо проводить с учётом конечных размеров пластины. Наиболее исследованным аналитическими методами применительно к этой ситуации является случай растяжения тонких композитных пластин с одним круговым отверстием. При этом приближённые аналитические решения соответствующей задачи о концентрации напряжений различными авторами строятся путём введения в известное решение С.Г. Лехницкого для бесконечной ортотропной пластины корректирующих факторов, позволяющих адаптировать это решение к случаю пластины конечных размеров. К настоящему времени в литературе представлен целый ряд подобного типа приближённых решений, с использованием которых выполнено множество расчётно-экспериментальных исследований как по напряжённому состоянию растягиваемых композитных образцов с одним круговым отверстием, так и по предельному (на момент разрушения) значению

приложенной к таким образцам растягивающей нагрузки. Соответствующие прочностные оценки при этом выполнялись с использованием различных критериев разрушения, что позволило выделить наиболее эффективные варианты таких критериев применительно к рассматриваемому случаю растягиваемых композитных пластин с концентратором напряжений в виде кругового отверстия. Анализ результатов указанных приближённых решений позволяет заключить, что для надёжного прогноза предельного значения растягивающей нагрузки (в рамках отмеченных критериев разрушения) необходимо, чтобы получаемые расчётом приближённые значения напряжений в зоне опасного сечения во всех точках окрестности кромки отверстия были близки к точному решению соответствующей задачи о напряжённом состоянии. Заметные отклонения от указанного точного решения приводят к неверным прогнозам по разрушающей нагрузке.

Представленные в литературе расчётные исследования по напряжённому состоянию растягиваемых композитных образцов с несколькими круговыми отверстиями выполнены с использованием конечно-элементных вычислительных моделей. Как и в отмеченной выше ситуации с приближёнными аналитическими решениями подобного рода задач, при конечно-элементном их решении важным остаётся вопрос с обеспечением надёжности соответствующих расчётных результатов, которая в свою очередь важна и в плане обеспечения достоверности получаемых расчётом прогнозов по разрушающей нагрузке. В связи с высокой степенью изменчивости напряжённого состояния вблизи кромок отверстий, необходимо мельчить в этой области расчётную сетку для получения результатов, близких к точному решению рассматриваемой задачи. В отсутствие чёткого критерия сходимости результатов численного моделирования к упомянутому точному решению, достоверным применительно к рассматриваемой задаче о растяжении ослабленной круговыми отверстиями композитной пластины представляется тот результат её численного решения, который может быть подтверждён решением этой же задачи на основе какого-либо другого численного метода.

С учётом сказанного, в качестве **цели диссертационной работы** определяем разработку методики численного решения задач о растяжении ослабленных круговыми отверстиями композитных пластин, которая способна обеспечить получение надёжных числовых результатов как по параметрам напряженного состояния вблизи контуров отверстий, так и по предельному (в рамках выбранного критерия разрушения) значению приложенной растягивающей нагрузки.

### **Задачи диссертационной работы.**

1. Формулировка подхода к численному решению задач о растяжении ослабленных круговыми отверстиями композитных пластин, который включает: использование соотношений плоской теории упругости применительно к случаю тонких ортотропных пластин и трёхмерных соотношений теории упругости применительно к случаю толстых ортотропных пластин; построение для каждого из указанных случаев двух (альтернативных) вычислительных моделей, одна из которых основана на методе конечных элементов (КЭ), другая – либо на вариационно-разностном (ВР) методе, либо методе численного интегрирования (ЧИ); подтверждение факта достоверности получаемого таким образом численного решения при условии совпадения решений, полученных на основе альтернативных вычислительных моделей; выбор критерия разрушения, позволяющего по рассчитанному напряжённому состоянию рассматриваемой композитной пластины определить предельное (на момент разрушения) значение приложенной растягивающей нагрузки.

2. Разработка и программная реализация указанных ВР и ЧИ вычислительных моделей. Построение на основе программного комплекса «*Abaqus*» вычислительных КЭ моделей для решения обозначенного типа задач.

3. Проведение с использованием заявленной методики (с одновременным применением построенных альтернативных вычислительных моделей) исследований, касающихся напряженного состояния и прочности растягиваемых ослабленных круговыми отверстиями композитных пластин.

**Научная новизна диссертационной работы** заключается в следующем.

Построены альтернативные вычислительные модели на основе различных методов для решения задач о напряжённо-деформированном состоянии одноосно растягиваемых тонких и толстых ортотропных пластин ослабленных круговыми отверстиями.

Разработана методика получения (с подтверждённой достоверностью) численного решения задачи о напряжённо-деформированном состоянии одноосно растягиваемых тонких и толстых ортотропных пластин, ослабленных круговыми отверстиями. Подтверждение достоверности получаемого численного решения в рамках указанной методики осуществляется по факту совпадения расчётных результатов по напряжениям вблизи отверстий на основе альтернативных моделей.

С применением этой методики впервые для задач об одноосном растяжении тонких и толстых композитных ортотропных пластин, ослабленных круговыми отверстиями, выполнены исследования по влиянию на уровень напряжений в зонах, близких к кромке отверстия:

- физико-механических характеристик материалов;
- размеров пластины;
- расположения отверстий в пластине;
- радиусов отверстий;

Также были проведены исследования вышеуказанных факторов на предельные значения приложенных растягивающих нагрузок (с принятием «критерия напряжений в точке» в качестве критерия разрушения).

**Теоретическая и практическая значимость работы заключается:**

– в разработке альтернативных вычислительных моделей для решения задач о напряжённо-деформированном состоянии одноосно растягиваемых тонких и толстых ортотропных композитных пластин ослабленных круговыми отверстиями, а также построение методики (с применением указанных моделей) в целях получения (с подтверждённой достоверностью) численного решения соответствующих задач о напряжённом состоянии с выдачей (опираясь на это



решение и «критерий напряжений в точке) прогноза по предельному значению приложенной растягивающей нагрузки (указанные разработки и полученные результаты исследований могут быть использованы в расчётной практике организаций, связанных с проектированием обозначенного типа конструктивных элементов);

– во внедрении указанных разработок в расчетную практику Центра прикладных исследований АО «ЦНИИмаш» (см. Приложение).

**Методология и методы исследования.** В работе использованы:

– соотношения плоской теории упругости применительно к случаю тонких ортотропных пластин и трёхмерных соотношений теории упругости применительно к случаю толстых ортотропных пластин;

– методы численного решения поставленных задач о напряжённом состоянии, среди которых: ВР метод, ЧИ метод в варианте ортогональной прогонки и КЭ метод с использованием программного комплекса SIMULIA «*Abaqus*» (лицензия пользователя № LKO0576571);

– методика подтверждения достоверности получаемого численного решения по факту совпадения результатов, получаемых на основе альтернативных вычислительных моделей;

– сравнения с экспериментом и известными расчётными результатами.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Разработанные ВР и ЧИ модели для решения задач о напряжённо-деформированном состоянии одноосно растягиваемых тонких и толстых ортотропных композитных пластин, ослабленных круговыми отверстиями;

2. Построенные на основе комплекса «*Abaqus*» расчётные КЭ модели для решения тех же задач об одноосном растяжении композитных пластин с отверстиями;

3. Методика получения решения (с подтверждённой достоверностью) поставленной задачи с использованием построенных альтернативных вычислительных моделей;

4. Получаемые в рамках обозначенной методики результаты численного решения задач о напряжённо-деформированном состоянии одноосно растягиваемых тонких и толстых ортотропных композитных пластин, ослабленных круговыми отверстиями;

5. Получаемые на основе отмеченных решений с использованием «критерия напряжений в точке» расчётные прогнозы по предельным значениям растягивающих нагрузок, приложенных к рассматриваемым композитным пластинам.

6. Выявленные эффекты и закономерности по влиянию физико-механических характеристик, размеров пластины, размеров отверстий в ней, а также их расположения, на напряжённое состояние вблизи отверстий и на предельное значение приложенной к пластине растягивающей нагрузки.

**Апробация работы.** Основные результаты проведённых исследований докладывались на:

– 18-ая Международная конференция «Авиация и космонавтика» (МАИ (НИУ), г. Москва, 18-22 ноября 2019 г.)

– XLVI Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» (МАИ (НИУ), г. Москва, 27-28 марта 2020 г.)

– Международный молодёжный научный форум «Ломоносов-2020» (МГУ им. М.В. Ломоносова), г. Москва, 10-27 ноября 2020 г.)

– 20-ая Международная конференция «Авиация и космонавтика» (МАИ (НИУ), г. Москва, 22-26 ноября 2021 г.)

– XLVIII Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» (МАИ (НИУ), г. Москва, 12-25 апреля 2022 г.)

**Публикации.** Основные результаты диссертации отражены в 7 [1, 18-23], научных статьях, входящих в Перечень российских рецензируемых научных изданий ВАК РФ.

**Личный вклад соискателя.** Все исследования, результаты которых изложены в диссертационной работе, получены лично соискателем в процессе научной деятельности. Заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, выводов, списка использованных источников и приложения. Работа изложена на 142 страницах, содержит 60 рисунков, 21 таблицу, приложение. Список использованных источников включает в себя 112 наименований.

# **ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ И ПРОЧНОСТИ РАСТЯГИВАЕМЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВИДЕ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ. ФОРМУЛИРОВКА ПОДХОДА К ПОСТРОЕНИЮ МЕТОДИКИ ИХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ**

## **1.1 Постановки задач о напряжённо-деформированном состоянии и прочности растягиваемых композитных пластин с круговыми отверстиями**

Принятые к рассмотрению композитные пластины по своей структуре представляют собой жёсткие пластмассы, армированные стекло- или угле-волокнами. Такие пластины могут, в частности, производиться на тканевой основе по технологии, при которой осуществляется послойное наложение друг на друга пропитанных полимерным связующим различного рода стекло- или угле-тканей. Вместо тканей при указанной послойной укладке могут использоваться также однонаправленные наборы стекло- или угле-волокон. Образованный в результате композитный материал способен линейно-упруго сопротивляться приложенным нагрузкам вплоть до момента разрушения. Пластина, выполненная из такого материала, представляет собой многослойную, анизотропную и неоднородную упругую систему. При постановке задач, связанных с поведением подобного типа структурно-неоднородных слоистых пластин под нагрузкой, приходится вводить упрощающие гипотезы. Наиболее распространённым и проверенным практикой является подход, при котором осуществляется приведение исходной неоднородной по своей структуре композитной пластины к схеме однородной пластины с некоторыми эффективными упругими характеристиками [14,33,36,42].

Действуя в рамках такого подхода, рассматриваем тонкую прямоугольную слоистую пластину длиной  $L$ , шириной  $W$  и толщиной  $h$ . Считаем, что срединная поверхность пластины лежит в плоскости  $Oxy$  прямоугольной системы координат

$Oxyz$ , при этом ось  $Ox$  ориентирована по длине пластины. Считаем также, что слои пластины являются однородными и ортотропными (в осях  $Oxyz$ ) и что слоистый пакет пластины симметричен относительно её срединной поверхности. Последнее означает, что симметрично расположенные слои имеют одинаковые толщины и одинаковые физико-механические свойства.

При принятых предположениях, согласно теории тонких слоистых оболочек и пластин [3], задача о растяжении рассматриваемой слоистой пластины вдоль оси  $Ox$  нагрузками, приложенными к её кромкам размером  $W$ , может быть сформулирована в виде набора соотношений, включающих:

- геометрические соотношения

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (1.1)$$

- физические соотношения

$$T_{xx} = B_{11}\varepsilon_{xx} + B_{12}\varepsilon_{yy}, \quad T_{yy} = B_{12}\varepsilon_{xx} + B_{22}\varepsilon_{yy}, \quad T_{xy} = B_{33}\gamma_{xy}. \quad (1.2)$$

- уравнения равновесия

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $u_x$ ,  $u_y$  - перемещения точек пластины вдоль соответствующих координатных осей,  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\gamma_{xy}$  - деформации (относительные удлинения и сдвиг),  $T_{xx}$ ,  $T_{yy}$ ,  $T_{xy}$  - усилия растяжения-сжатия и сдвига в пластине,  $B_{11}$ ,  $B_{22}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{33}$  - жёсткости пластины.

К соотношениям (1.1)-(1.3) необходимо добавить граничные условия, сводящиеся к тому, что одна из кромок пластины размером  $W$  закреплена, а к другой такой же кромке приложена равномерно распределённая нагрузка с интенсивностью  $T$ . Соответствующее силовое условие для этой кромки записывается в виде:  $T_{xx} = T$ . Все остальные кромки (включая кромки отверстий) считаем свободными от нагрузок.

Введём в рассмотрение (осреднённые по толщине) напряжения в пластине, определяемые выражениями

$$\sigma_{xx} = T_{xx} / h, \quad \sigma_{yy} = T_{yy} / h, \quad \sigma_{xy} = T_{xy} / h. \quad (1.4)$$

С использованием связей (1.4) физические соотношения (1.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_{xx} + \nu_{21}\varepsilon_{yy}) \quad (1 \leftrightarrow 2), (x \leftrightarrow y), \\ \sigma_{xy} &= G_{12}\gamma_{xy}, \quad (E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}),\end{aligned}\tag{1.5}$$

где

$$E_1 = \frac{B_{11}B_{22} - (B_{12})^2}{B_{22}h}, \quad E_2 = \frac{B_{11}B_{22} - (B_{12})^2}{B_{11}h}, \quad \nu_{12} = \frac{B_{12}}{B_{22}}, \quad \nu_{21} = \frac{B_{12}}{B_{11}}, \quad G_{12} = \frac{B_{33}}{h},\tag{1.6}$$

а уравнения равновесия (1.3) выразить в напряжениях

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = 0.\tag{1.7}$$

Физические соотношения в форме (1.5) представляют собой соотношения упругости для тонкой однородной ортотропной пластины в условиях плоского напряжённого состояния. Значения параметров упругости такого однородного аналога исходной слоистой композитной пластины можно вычислить по формулам (1.6), где жёсткости  $B_{11}$ ,  $B_{22}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{33}$  определяются на основе суммирования соответствующих жесткостей её ортотропных слоёв [3, 14]. Отметим, что те же «эффективные» значения параметров упругости могут быть также определены из экспериментов по одноосному растяжению образцов, вырезанных из обсуждаемой композитной пластины.

Итак, первоначально сформулированная задача о растяжении (усилием  $T$ ) рассматриваемой слоистой пластины вдоль оси  $Ox$  оказывается сведённой к задаче о напряжённо-деформированном состоянии аналогичным образом растягиваемого ортотропного аналога данной пластины. Формулировку такой задачи составляют соотношения (1.1), (1.5), (1.7) с условием нагружения вида  $\sigma_{xx} = \sigma$ , где  $\sigma = T/h$ . Это типичная постановка задачи для большинства из представленных в литературе исследований, связанных с прочностью растягиваемых композитных пластин с отверстиями [4, 14, 33].

Перейдём теперь к рассмотрению той же задачи в рамках предположения, что растягиваемая ортотропная пластина является толстой. Соответствующая

трёхмерная формулировка [39, 58] такой задачи (аналогично предыдущей формулировке) включает следующий набор соотношений.

### 1. Геометрические соотношения.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

### 2. Физические соотношения.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{yy} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{zz}, \quad (E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}), \\ \varepsilon_{yy} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{xx} + \frac{1}{E_2} \sigma_{yy} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_{zz}, \quad (E_1 \nu_{31} = E_3 \nu_{13}), \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{yy} + \frac{1}{E_3} \sigma_{zz}, \quad (E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_{xy}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G_{13}} \sigma_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G_{23}} \sigma_{yz}.\end{aligned}\tag{1.9}$$

В случае изотропной пластины вместо входящих в запись (1.9) параметров упругости, помеченных нижними индексами, следует использовать заменяющие их характеристики  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$ , имея при этом в виду, что  $G=0,5E/(1+\nu)$ .

### 3. Уравнения равновесия.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{1.10}$$

К этому набору соотношений необходимо добавить (аналогично случаю тонкой пластины) граничные условия вместе с условием нагружения вида  $\sigma_{xx}=\sigma$  на соответствующей грани пластины.

Изложенная выше формулировка обсуждаемой задачи (как для случая тонкой, так и толстой пластины) является традиционной для теории упругости.

Существует и целый ряд других вариантов формулировок, которые могут оказаться более предпочтительными в плане удобства получения решений рассматриваемых задач. Ниже дадим краткий комментарий, касающийся наиболее распространённых вариантов таких формулировок.

Применительно к обсуждаемому случаю тонкой ортотропной пластины выделяется вариант, связанный с введением функции напряжений, который состоит в следующем [35, 54, 38]. С использованием связей (1.1) получают так называемое уравнение совместности деформаций, содержащее частные производные второго порядка от компонент тензора деформаций. Для удовлетворения уравнениям равновесия (1.7) вводят функцию напряжений Эри, что позволяет представить напряжения в виде частных производных второго порядка от этой функции. Эти выражения для напряжений затем подставляются в физические соотношения (1.5), из которых получают выражения для компонент тензора деформаций через производные второго порядка от функции Эри. Эти выражения окончательно подставляют в уравнение совместности деформаций с получением для искомой функции Эри разрешающего дифференциального уравнения в частных производных четвёртого порядка.

Следующий вариант формулировки задачи для тонкой ортотропной пластины связан с переходом к использованию комплексных переменных [35, 54, 38]. Проводя операции по преобразованию соотношений, полученных в рамках рассмотренного первого варианта формулировки, можно свести поставленную задачу к отысканию двух функций (комплексных потенциалов)  $\Phi_j(z_j)$  ( $j=1,2$ ), аналитических в областях  $S_j$ , получающихся из области  $S$ , занимаемой пластиной, путём определённых аффинных преобразований. После нахождения указанных двух функций остаётся определить (используя соответствующие формулы) искомые параметры напряжённо-деформированного состояния (напряжения и перемещения) в точках пластины.

Формулировку обсуждаемой задачи (как в двумерном, так и в трёхмерном случае) можно осуществить также в терминах перемещений [39, 58, 46]. Для этого нужно, используя физические соотношения, выразить напряжения через



деформации, которые в свою очередь (с использованием геометрических соотношений) выразить через перемещения. Далее остаётся во всех оставшихся соотношениях (это уравнения равновесия и граничные условия) заменить напряжения на их выражения через перемещения.

Следует также указать на возможность вариационной формулировки поставленной задачи [2, 13, 58, 46]. Здесь возможны различные варианты, связанные с использованием известных вариационных принципов. Мы ограничимся лишь обсуждением варианта, связанного с использованием принципа возможных перемещений. Применительно к деформируемому телу [58, 46] этот принцип утверждает, что в состоянии равновесия работа приложенных к точкам тела сил на вариациях перемещений этих точек равна работе напряжений на соответствующих вариациях деформаций. Из этого вариационного уравнения непосредственно вытекают уравнения равновесия и заданные силовые граничные условия. Таким образом, в формулировку рассматриваемой задачи в данном варианте следует наряду с этим вариационным уравнением включить геометрические соотношения, физические соотношения и заданные кинематические граничные условия.

Наконец, укажем на возможность формулировок поставленной задачи с использованием интегральных уравнений [9, 11, 59, 61]. Это могут быть формулировки, основанные на применении как комплексных, так и вещественных переменных. В частности, применяется формулировка следующего типа. Строится интегральное уравнение, обеспечивающее получение перемещений внутренних точек рассматриваемого тела на основе заданных (распределённых по всей его границе) нагрузок. Строится также граничное интегральное уравнение, устанавливающее связь между перемещениями граничных точек тела и интенсивностями приложенных в этих точках нагрузок. Здесь следует обратить внимание на то, что в тех точках границы, где заданы перемещения, неизвестными являются приложенные нагрузки. И, наоборот, в точках, где заданы нагрузки, неизвестными являются перемещения. Определив с использованием этого граничного интегрального уравнения значения приложенных нагрузок во

всех точках границы тела, можно с использованием первого из указанных интегральных уравнений определить перемещения во всех внутренних точках тела.

Перейдём далее к рассмотрению вопросов, связанных с критериями разрушения применительно к обозначенному случаю одноосно растягиваемых тонких композитных пластин с концентратором напряжений в виде кругового отверстия. Мировая литература по этим вопросам чрезвычайно обширна. Имеющиеся обзорные материалы [50, 57, 65, 87, 105, 32, 41] позволяют получить достаточно полное представление о положении дел в этой области исследований. В кратком изложении ситуация здесь выглядит следующим образом.

В начале семидесятых годов прошлого века, в связи с резко возросшим применением обсуждаемого типа слоистых композитов в различных технических приложениях, обозначилась острая необходимость в оценке влияния отверстий на их прочность. Вследствие наблюдавшегося квазихрупкого характера разрушения подобных композитов, возникла идея применить при разработке соответствующего критерия прочности аппарат линейной механики разрушения [60]. Модели разрушения первоначально разрабатывались применительно к случаю квазиизотропного композита, что позволяло заимствовать результаты линейной механики разрушения, полученные применительно к одноосно растягиваемой пластине с круговым отверстием. Принималось также во внимание, что разрабатываемая модель разрушения должна учитывать так называемый «масштабный» эффект [73, 82, 68, 110, 77, 69]. Прежде всего этот эффект в экспериментах по одноосному растяжению композитных пластин с центральным круговым отверстием проявлялся в том, что разрыв пластины с отверстием большего размера происходил при меньшем значении растягивающей нагрузки. Это наталкивало на мысль, что формулировка искомого критерия разрушения должна включать некоторую (характерную для данного композита) константу, имеющую размерность длины. Waddoups и его соавторы [107] обратили внимание на полученное Bowie [72] в рамках линейной механики разрушения решение, устанавливающее величину коэффициента интенсивности

напряжений для случая одноосного растяжения бесконечной изотропной пластины с двумя трещинами, исходящими в разные стороны от кромки отверстия перпендикулярно направлению действующей нагрузки. Полученная в [72] формула для указанного коэффициента включала функцию (которую обозначим как  $f(a,R)$ ), зависящую от двух параметров: длины трещины  $a$  и радиуса отверстия  $R$ . Используя результаты работы [72], Waddoups и его соавторы пришли к формуле  $\sigma_s = \sigma / f(a,R)$ , устанавливающей связь между пределом прочности  $\sigma$  одноосно растягиваемой композитной пластины без отверстия с пределом прочности  $\sigma_s$  такой же пластины с отверстием. Сформулированный критерий разрушения включал два определяемых в испытаниях на одноосное растяжение параметра:  $\sigma$  и  $a$ . При этом константа  $a$ , характеризующая прочность при растяжении ослабленной отверстием композитной пластины, имела размерность длины. Тем самым данный критерий соответствовал требованию, связанному с учётом масштабного эффекта. Проведённые с различными ослабленными отверстием квазиизотропными композитными пластинами эксперименты показали, что применение обсуждаемого критерия позволяет получить удовлетворительные результаты по прогнозу разрушения таких пластин в ситуации одноосного растяжения. Следует отметить, что при детальном исследовании, проводившихся в рамках указанных экспериментов, не были установлены факты наличия вблизи кромок соответствующих отверстий трещин, на предположении о присутствии которых был сформулирован данный критерий. Поэтому в дальнейших интерпретациях данного критерия стали говорить о присутствии вблизи кромок отверстий энергетических зон размером  $a$ , где на этапе предразрушения происходит процесс интенсивного высвобождения энергии.

Направление, связанное с использованием аппарата линейной механики разрушения при выработке критерия прочности растягиваемых слоисто-волоконистых композитов с отверстием, получило в дальнейшем развитие в работах многих исследователей. В качестве примеров здесь можно указать на работы [88, 66, 78, 63, 64, 89, 70, 71]. Представленные в этих работах результаты

исследований показывают, что получаемые с помощью предложенных критериев прогнозы по разрушению растягиваемых композитных образцов с отверстием хорошо согласуются с экспериментом. В то же время, как отмечается в самих этих публикациях, это не означает, что указанные критерии описывают реальную картину физического процесса разрушения рассматриваемого композита с отверстием, хотя и представляются основанными на использовании аппарата линейной механики разрушения. Хорошее согласование с экспериментом в данном случае следует относить к тому, что входящие в представленные критерии параметры, которые заимствованы из линейной механики разрушения, не измеряются в результате независимых экспериментов, а подбираются таким образом, чтобы удовлетворять результатам экспериментов по разрыву принятых к исследованию композитных образцов с отверстием.

На это обстоятельство обратили внимание в своих работах [108, 92] такие исследователи, как Whitney и Nuismer. Они указали на то, что главным фактором в критериях, основанных на использовании аппарата линейной механики разрушения, является не сама включённая в модель разрушения “фиктивная” трещина, а её размер  $a$ , характерный для каждого принимаемого к рассмотрению композита. Также они заострили внимание на том, что введение в модель параметра, имеющего размерность длины, соответствует учёту масштабного эффекта (отмечавшегося выше). В результате ими был предложен (в двух вариантах) другой тип критерия разрушения применительно к растягиваемым слоистым композитам с отверстием. Первый вариант такого типа критерия ими был назван критерием «средних напряжений». Согласно этому критерию, разрушение растягиваемого композитного образца с отверстием соответствует моменту, когда осреднённое (по участку размером  $a$ , отсчитываемого от кромки отверстия вдоль опасного на разрыв сечения образца) напряжение достигает значения, соответствующего пределу прочности такого же растягиваемого образца без отверстия. Второй вариант критерия вытекает из описанного первого варианта, если осреднённое по указанному участку размером  $a$  напряжение определять как напряжение в некоторой «средней» точке этого участка,

находящейся на расстоянии  $d$  от кромки отверстия. Такой вариант критерия был назван авторами критерием «напряжений в точке». Проведённые исследования показали, что эти критерии хорошо согласуются с результатами экспериментов по разрушению растягиваемых композитных образцов с отверстием. Эти критерии в настоящее время широко применяются в расчётной практике. Этому способствует достаточная простота, с которой можно экспериментально определить числовые значения двух параметров, входящих в формулировку указанных критериев: размера  $a$  (или  $d$ ) и напряжения  $\sigma$ , соответствующего разрыву образца без отверстия.

Отметим, что рассмотренные выше критерии прошли расчётно-экспериментальную проверку применительно к случаю растяжения ослабленных отверстием композитных образцов с самой разнообразной укладкой армирующих волокон по толщине слоистого пакета. Это и однонаправленные волокна, укладываемые под разными углами, и переплетённые в виде ткани волокна [73, 93, 97, 89, 87, 70, 71, 90, 99, 111, 31, 66, 104, 94, 95, 78, 5, 10]. Результаты прогнозов по пределу прочности на разрыв исследуемых композитных образцов с применением различных типов критериев разрушения сравнивались между собой и не продемонстрировали существенного преимущества того или иного критерия относительно точности такого прогноза. Поэтому вопрос о выборе того или иного критерия главным образом определяется простотой, с которой он может быть реализован в практических расчётах.

Отметим также, что представленный в работах [50, 55, 56, 57] анализ имеющихся подходов к выработке критериев прочности применительно к телам из квазихрупких материалов с концентраторами напряжений в виде всевозможных вырезов показывает, что обсуждённые выше критерии средних напряжений и напряжений в точке следует относить к так называемым нелокальным критериям разрушения. Основы подобного рода критериев были заложены в работах К. Wieghardt [109], Н. Neuber [91] и В.В. Новожилова [47], согласно которым разрушение обсуждаемого типа тел следует рассматривать как физический процесс, происходящий в некоторой малой зоне (зоне

предразрушения) вблизи границы имеющегося в теле выреза. Критерии данного направления предполагают введение внутреннего размера материала тела, характеризующего его структуру (что позволяет учесть масштабный эффект в ситуациях с концентраторами напряжений). Если, например, напряжённое состояние в точках указанной зоны (размером  $a$ ) характеризуется некоторым эквивалентным напряжением  $\sigma_e$ , то простейший вариант нелокального критерия прочности (соответствующий критерию средних напряжений) можно представить в виде

$$\left(\int_0^a \sigma_e(y)dy\right)/a < \sigma_0. \quad (1.11)$$

где интеграл берётся по опасному сечению (в пределах отмеченной зоны), а координата  $y$  отсчитывается от кромки выреза. Здесь  $\sigma_0$  - напряжение, характеризующее прочность материала в отсутствие выреза, которое принимается за константу материала. В качестве второй константы материала принимается размер  $a$  обсуждаемой зоны.

Если теперь в сформулированном интегральном варианте нелокального критерия разрушения заменить вычисляемое в левой части неравенства среднее на отрезке  $[0,a]$  значение параметра  $\sigma_e(y)$  на среднее значение этого параметра, имеющего место в некоторой точке  $y=d$  данного отрезка, то приходим к ещё одному простейшему варианту нелокального критерия прочности для рассматриваемого материала в виде

$$\sigma_e(d) < \sigma_0. \quad (1.12)$$

что соответствует критерию напряжений в точке, рассмотренному выше. Здесь  $d$  и  $\sigma_0$  принимаются в качестве констант рассматриваемого материала.

Укажем ещё на одно интенсивно развивающееся направление исследований, нацеленное на решение задач прочности слоистых композитов с концентраторами напряжений в виде отверстий. В качестве первых публикаций по этому направлению можно отметить работы [74, 103]. Это направление связано с разработкой алгоритмов (реализуемых в виде конечно-элементных вычислительных моделей), в рамках которых осуществляется расчёт

напряжённого состояния во всех точках каждого слоя исследуемого композитного образца на каждом шаге рассматриваемого процесса его пошагового нагружения. При этом с использованием принятого для данной модели критерия разрушения (часто это критерий [83]) на каждом таком шаге решается вопрос либо о сохранении (в случае не превышения пределов прочности) значений соответствующих характеристик упругости, либо об уменьшении (по определённому правилу) этих значений перед переходом к следующему шагу нагружения. Подобные модели обозначают как модели прогрессирующего (или развивающегося) повреждения. Обзорный анализ имеющихся публикаций по моделям указанного типа содержится в работах [105, 10, 32, 34]. При применении подобных инкрементальных алгоритмов с изменяющимися физико-механическими характеристиками требуется уделять повышенное внимание к обеспечению устойчивой работы встроенных в них вычислительных процессов и надёжности получаемых расчётных результатов. Следует также иметь в виду, что для получения с помощью таких моделей достоверных прогнозов по прочности растягиваемых слоистых композитов с отверстиями требуется проведение множества экспериментов для определения необходимых значений характеристик упругости и прочности структурных компонентов соответствующего композита. Зачастую это не представляется возможным. В этом плане рассмотренные выше критерии (в частности, нелокальные) обладают теми преимуществами, что не требуют больших вычислительных ресурсов и большого набора экспериментальных данных для осуществления прочностного прогноза применительно к растягиваемым композитам с отверстиями.

## **1.2 Методы решения задач о напряжённо-деформированном состоянии и прочности растягиваемых композитных пластин с круговыми отверстиями**

Как уже отмечалось выше, во многих важных для практики случаях решение обсуждаемого класса задач допустимо проводить в рамках расчётной схемы, предполагающей, что рассматриваемые композитные пластины являются достаточно тонкими и что их напряжённое состояние является плоским. И здесь,

прежде всего, необходимо обсудить возможности применения аналитических подходов к решению подобного рода задач.

Литература по вопросам аналитического решения задач о напряжениях вокруг отверстий в тонких изотропных и анизотропных упругих пластинах к настоящему времени насчитывает огромное количество публикаций. Общее представление об этих публикациях позволяют получить обзорные материалы, представленные в монографиях [35, 54]. Укажем здесь на большой вклад в решение указанного класса задач таких отечественных и зарубежных ученых, как Г.В. Колосов, Н.И. Мухелишвили, С.Г. Михлин, Д.И. Шерман, С.Г. Лехницкий, Г.Н. Савин, Д.В. Вайнберг, А.С. Космодамианский, А.Г. Угодчиков, М.П. Шереметьев, Л.А. Фильштинский, G. Kirsch, С.Е. Inglis, L.N.G. Filon, G.B. Jeffery, A.A. Griffith, Н. Neuber, R.C.J. Howland, W.T. Koiter, R.D.Mindlin, M.Isida, M. Kikukawa и др.

Как было отмечено во введении, точные решения задач о напряжённом состоянии растягиваемых пластин с отверстиями к настоящему времени удалось получить лишь применительно к ситуации бесконечно протяжённых пластин. На практике же зачастую приходится иметь дело с ситуацией, когда ширина пластины сопоставима с диаметром выполненных в ней отверстий. Во многих из упоминавшихся выше разработок по вопросам прочности растягиваемых композитных образцов с концентратором напряжений в виде кругового отверстия при оценке напряжённого состояния вблизи отверстия использовалось приближённое аналитическое решение, учитывающее реальные размеры исследуемого образца. Такое приближённое решение строилось путём введения точное аналитическое решение С.Г. Лехницкого [38] для одноосно растягиваемой бесконечной ортотропной пластины с круговым отверстием корректирующего фактора, позволяющего адаптировать это решение к случаю пластины конечных размеров. Различные варианты таких приближённых аналогов решения С.Г. Лехницкого были предложены авторами работ [108, 92, 93, 86, 102, 97, 99]. Остаётся отметить, что большинство из представленных в литературе результатов расчётно-экспериментальных исследований по оценке прочности растягиваемых



композитных образцов с одним круговым отверстием (в частности, это работы [73, 108, 92, 97, 89, 70, 71, 90, 99, 111, 66, 104, 94, 95]) получены с использованием описанного типа приближённых решений.

Russo и Zuccarello в своей работе [97] с использованием основанной на методе граничных элементов вычислительной модели, предназначенной для решения задач о напряжённом состоянии растягиваемых слоистых ортотропных конечных размеров пластин с круговым отверстием, провели исследование по оценке точности результатов расчётов с применением обсуждаемых приближённых аналитических решений. Было установлено, что подобные приближённые решения могут приводить к завышенной на 50% (по сравнению с предполагаемым точным решением) оценке напряжений в опасном на разрыв сечении пластины вблизи кромки отверстия. А ведь на основе закономерности в распределении этих напряжений определяется в рамках обсуждённых выше нелокальных критериев предел прочности растягиваемой композитной пластины с отверстием. Этим во многом объясняются представленные в упомянутых расчётно-экспериментальных исследованиях комментарии о том, что какие-то расчётные прогнозы хуже, а какие-то лучше согласуются с экспериментом. Такие суждения в ряде случаев высказывались и в отношении точности прочностных прогнозов, осуществляемых на основе таких нелокальных критериев, как критерий средних напряжений и критерий напряжений в точке. Выполненная в работе [97] серия экспериментальных и расчётных (с использованием критерия напряжений в точке) исследований применительно к растягиваемым имеющим круговое отверстие образцам из слоистых стекло- и угле-пластиков с различной схемой укладки однонаправленных систем волокон в слоистом пакете показала, что при обеспечении необходимой близости расчётных результатов по напряжениям вблизи отверстия к соответствующему точному решению можно добиться хорошего согласования с экспериментом расчётных прогнозов по пределу прочности указанных образцов. Следует подчеркнуть, что такое хорошее согласование продемонстрировано в работе [97] на образцах, у которых параметр  $W/D$  ( $W$  – ширина образца,  $D$  – диаметр отверстия) изменялся в диапазоне от 2 до

20. В связи со сказанным, представляется целесообразным в отсутствие точного аналитического решения задачи о напряжениях вокруг отверстия в растягиваемом композитном образце обращаться к численным методам, способным с требуемой точностью реализовать решение такой задачи.

Перейдём теперь к анализу ситуации с расчётом напряжённого состояния одноосно растягиваемых толстых композитных пластин (толщиной  $h$ ) с круговым отверстием (радиусом  $r$ ). Как уже отмечалось, здесь следует исходить из трёхмерной постановки соответствующей задачи теории упругости.

Большинство из полученных в такой постановке задачи расчётных результатов (с анализом влияния параметра  $r/h$  на распределение напряжений в зоне отверстия) относится к случаю изотропного материала. Первое из указанного типа решений, которое ограничивалось случаем  $r/h=1$ , было получено в работе Green [81]. Приближённые решения были получены Sternberg и Sadowsky [101], а также Reiss [96]. Последнее соответствовало случаю  $r/h>0,5$ . Наконец, Folias и Wang в работе [79] получили аналитическое решение, справедливое для любых значений параметра  $r/h$ . Представленные в [79] числовые результаты параметрических исследований, проведённых на основе полученного авторами решения, в частности, демонстрируют при  $r/h=0,25$  эффект существенного уменьшения значения коэффициента концентрации напряжений в точках цилиндрической поверхности отверстия, близких к его кромке, по сравнению с тем, что имеет место в средней части указанной поверхности. Продемонстрирован также эффект влияния значения коэффициента Пуассона на получаемые результаты. В работе [79] также указывается на трудности вычислительного характера, которые пришлось преодолевать авторам для получения расчётных результатов. Трудности вычислительной реализации оказались сопоставимыми с трудностями, связанными с выводом самого аналитического решения. Компьютерные вычисления для обеспечения надёжности расчётных результатов проводились в режиме двойной точности. Пришлось использовать специальный (достаточно сложный) алгоритм для обеспечения высокой точности вычисления значений модифицированных бесселевых функций второго рода. Это говорит о

том, что в подобных задачах, характеризуемых наличием в растягиваемой ослабленной отверстием толстой пластине зон с резкими изменениями напряжённого состояния (типа погранслоя), требуется предпринимать необходимые меры для обеспечения надёжности получаемых числовых результатов. Укажем, что параметрические исследования, дополняющие представленные в работе [79] результаты, проведены также авторами работ [112, 98, 106], но уже с применением трёхмерных конечно-элементных моделей.

Отметим также, что аналогичных исследований по влиянию параметра  $r/h$  на картину распределения коэффициента концентрации напряжений вдоль цилиндрической поверхности, ограничивающей круговое отверстие, применительно к случаю одноосно растягиваемой толстой композитной (ортотропной) пластины в литературе к настоящему времени не представлено. На это, в частности, указывают материалы обзорного анализа, представленного в статье [75]. В то же время имеются публикации с исследованиями другой направленности. Примером в этом отношении является работа [67], где в рассмотрении были включены ортотропные пластины с  $r/h=1$ . Однако целью исследований в [67] являлось установление картины распределения значений коэффициента концентрации напряжений вдоль поверхности пластины. Это даёт основание констатировать, что вопрос о решении задачи теории упругости об одноосном растяжении толстой ослабленной круговым отверстием ортотропной композитной пластины (с установлением картины распределения напряжений вдоль цилиндрической поверхности, ограничивающей отверстие) остаётся открытым.

Далее, кратко остановимся на обсуждении имеющихся численных методов и возможностях получения с их применением надёжных расчётных результатов при решении рассматриваемого типа задач. Внимание сосредоточим на таких методах, как методы численного интегрирования, конечных разностей, конечных и граничных элементов, которые широко применяются при решении различного рода задач механики деформируемого твёрдого тела [51, 29, 58, 14, 30, 59].

При конечно-разностном подходе [52, 16, 12] производные, которые входят

в формулировку краевой задачи в виде системы дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями, приближённо заменяются разностными выражениями, которые строятся на основе значений искомых функций в узлах покрывающей исследуемую область координатной сетки. В результате формируется система алгебраических уравнений, которая решается с использованием того или иного численного метода. Трудности, с которыми приходится сталкиваться при применении описанного подхода (особенно, когда соответствующие границы криволинейны), связаны с разностной аппроксимацией краевых условий, которые формулируются в терминах производных искомых функций. Таким образом, применение такого подхода для решения рассматриваемого класса задач с круговыми отверстиями представляется проблематичным.

Указанная проблема снимается, если конечно-разностное решение реализуется на основе описанной выше вариационной формулировки рассматриваемой задачи. При ВР подходе интегралы, описывающие работу напряжений и приложенных нагрузок в уравнении принципа возможных перемещений, сводятся к сумме (приближённо вычисляемых) интегралов по отдельным ячейкам расчётной сетки. Значения частных производных от перемещений внутри каждой такой ячейки приближённо заменяются разностными выражениями, строящимися на основе значений перемещений в узловых точках ячейки. Из полученного дискретного аналога вариационного уравнения принципа возможных перемещений непосредственно вытекает разрешающая система линейных алгебраических уравнений относительно искомых узловых перемещений. Найдя эти перемещения, можно вычислить деформации и напряжения внутри каждой ячейки принятой расчётной сетки. Требуемой точности получаемых результатов можно добиться путём сгущения ячеек сетки в наиболее напряжённых зонах исследуемого тела. Теоретические основы ВР методов развиты в работах [45, 49, 43, 44, 12]. К настоящему времени имеется множество публикаций по этому направлению исследований. Укажем лишь на работы [2, 6], где обсуждаются возможные способы реализации ВР

процедур применительно к решению различных задач теории упругости и рассматриваются возникающие при этом проблемы.

КЭ метод [53, 48, 7, 29], занимает в настоящее время ведущие позиции в качестве инструмента численного решения самых разнообразных научных и прикладных задач. Вариационно-сеточный характер этого метода делает его во многом похожим на описанный выше ВР метод. Во многих случаях реализация этого метода также основана на выборе узловых перемещений в качестве определяющих параметров строящейся дискретной модели деформируемого тела. Принципиальное отличие этого метода состоит лишь в том, что внутри каждой ячейки принятой расчётной сетки осуществляется приближённое описание перемещений в виде функций, получаемых на основе выбранной схемы интерполяции с использованием узловых перемещений. Это позволяет в соответствующем вариационном уравнении осуществлять вычисление производных от перемещений во внутренних точках каждой сеточной ячейки, основываясь на принятом описании перемещений в виде интерполяционных функций. Вычисления соответствующих интегралов в рамках каждой ячейки при этом осуществляется на основе зависимостей, получаемых для подынтегральных выражений с применением отмеченной процедуры интерполяции. Требуемая точность результатов численного решения в данном методе также обеспечивается путём измельчения расчётной сетки.

Численная реализация решения задач теории упругости, сформулированных в виде граничных интегральных уравнений, может быть осуществлена на основе так называемого метода граничных элементов [9, 11, 59]. Применительно к представленному выше варианту такой формулировки схема реализации указанного метода описывается следующим образом. Граница области, занимаемой исследуемым телом, разбивается на ряд достаточно малых элементов. На каждом из таких элементарных участков функции, описывающие распределение нагрузок и перемещений вдоль границы, определяются на основе выбранной схемы интерполяции с использованием значений указанных функций в узловых точках. Интегральное уравнение записывается в дискретной форме для

каждой точки границы. Соответствующие интегралы по каждому из граничных элементов вычисляются либо аналитически, либо с использованием схем численного интегрирования. В результате всё сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных на границе узловых значений перемещений и нагрузок. Далее с использованием интегральной зависимости между распределёнными вдоль границы тела нагрузками и перемещениями внутренних точек тела определяются (с использованием схем численного интегрирования) значения перемещений в выбранных узловых точках тела. По ним (с использованием схем численного дифференцирования) определяются значения частных производных от перемещений в указанных точках, опираясь на которые окончательно вычисляются соответствующие деформации и напряжения.

В тех случаях, когда принятая к рассмотрению задача механики деформируемого тела может быть сведена к краевой задаче для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, эффективным в плане численного решения [8, 17, 30] зарекомендовал себя подход, основанный на использовании метода ЧИ в варианте ортогональной прогонки С.К. Годунова [15]. Преимущество такого подхода состоит в простоте реализации соответствующей вычислительной процедуры, а также в том, что при использовании высокоточных схем численного интегрирования (типа Рунге-Кутты) он позволяет получать результаты, совпадающие с соответствующими аналитическими решениями с точностью до многих значащих цифр.

### **1.3 Формулировка подхода к построению методики численного решения задач о напряжённо-деформированном состоянии и прочности растягиваемых композитных пластин с круговыми отверстиями**

На основе представленного выше обсуждения можно сделать следующие выводы.

Ослабленные круговыми отверстиями композитные (из стекло- и углепластиков) пластины, являющиеся распространёнными элементами

различного рода силовых конструкций, зачастую оказываются подверженными действию высокого уровня растягивающих нагрузок. Отсюда запрос, выдвигаемый практикой проектирования, на разработку расчётных моделей, способных адекватно предсказывать напряжённое состояние растягиваемых композитных пластин с отверстиями и давать обоснованный прогноз по их прочности.

Во многих важных для практики случаях подобные композитные пластины могут при расчёте рассматриваться по схеме пластины, выполненной из ортотропного материала, обладающего линейно упругими свойствами вплоть до момента разрушения. Кроме того, в случаях, когда размеры такой пластины (по длине и ширине), а также диаметры выполненных в ней отверстий значительно больше её толщины, соответствующие расчёты допустимо проводить в рамках предположения о плоском напряжённом состоянии, считая пластину тонкой. Такие случаи являются наиболее распространёнными на практике. Но приходится иметь дело и с ситуациями, когда диаметр выполненного в пластине отверстия либо сопоставим с её толщиной, либо меньше толщины. Такие случаи (случаи толстых пластин) требуют расчётов в рамках трёхмерной постановки соответствующей задачи о напряжённом состоянии обсуждаемого типа пластин.

Анализ ситуации с расчётом тонких ортотропных ослабленных круговыми отверстиями пластин показывает, что точные аналитические решения здесь построены в предположении о бесконечной протяжённости пластин. Между тем, на практике зачастую приходится иметь дело с ситуацией, когда расчёты необходимо проводить с учётом конечных размеров пластины. Наиболее исследованным в этом плане является случай растяжения композитных пластин конечных размеров, имеющих одно круговое отверстие. Применительно к этому случаю расчёт напряжённого состояния различными исследователями в основном осуществлялся с использованием приближённых формул, получаемых путём введения в известное решение С.Г. Лехницкого для бесконечной ортотропной пластины корректирующих факторов, позволяющих адаптировать это решение к случаю пластины конечных размеров. Соответствующие прочностные оценки при

этом выполнялись с использованием различных критериев разрушения, что позволило (путём сравнения с экспериментом) выделить ряд эффективных вариантов таких критериев применительно к рассматриваемому случаю растяжения композитных пластин с концентратором напряжений в виде кругового отверстия. Анализ результатов указанных приближённых подходов показывает, что для надёжного прогноза предельного значения растягивающей нагрузки (в рамках отмеченных критериев разрушения) необходимо, чтобы получаемые расчётом приближённые значения напряжений в зоне опасного сечения во всех точках окрестности кромки отверстия были близки к предполагаемому точному решению соответствующей задачи о напряжённом состоянии. Заметные отклонения от такого предполагаемого точного решения (отклонения отмечались порядка 50%) приводят к неверным прогнозам по разрушающей нагрузке.

Представленные в литературе расчётные исследования по напряжённому состоянию растягиваемых композитных образцов с несколькими круговыми отверстиями выполнялись с использованием КЭ моделей. Как и в отмеченной выше ситуации с приближёнными аналитическими решениями подобного рода задач, при КЭ их решении важным остаётся вопрос с обеспечением надёжности соответствующих расчётных результатов, которая в свою очередь важна и в плане обеспечения достоверности получаемых расчётом прогнозов по разрушающей нагрузке. В связи с высокой степенью изменяемости напряжённого состояния вблизи кромок отверстий, необходимо мельчить в этой области расчётную сетку для получения результатов, близких к точному решению рассматриваемой задачи. В отсутствие чёткого критерия сходимости результатов численного моделирования к предполагаемому точному решению, достоверным применительно к рассматриваемой задаче о растяжении ослабленной круговыми отверстиями композитной пластины представляется тот результат её численного решения, который может быть подтверждён решением этой же задачи на основе какого-либо другого численного метода.



Сказанное по поводу подтверждения надёжности получаемых численным моделированием расчётных результатов относится и к случаю численного (в трёхмерной постановке) решения задачи о напряжённом состоянии растягиваемой толстой ортотропной композитной пластины с круговым отверстием. Точного аналитического решения для такого случая нет. Нет также для такого случая и численных решений, содержащих результаты по распределению напряжений вдоль цилиндрической поверхности, ограничивающей отверстие. В такой ситуации также представляется эффективным для подтверждения надёжности получаемых результатов численного решения использовать две альтернативные вычислительные модели.

Одну из указанных моделей (как для тонкой, так и для толстой пластины) целесообразно строить в рамках какого-либо из известных программных конечно-элементных комплексов. Альтернативную вычислительную модель целесообразно строить с использованием такого из рассмотренных выше численных методов, который допускает наиболее простую программную реализацию применительно к рассматриваемому типу задач. К таким методам можно отнести ВР метод и метод ЧИ в варианте ортогональной прогонки. Еще стоит отметить, что в ранее проведенных исследованиях пластин с глухим несквозным отверстием, была замечена некоторая особенность ВР модели. В процессе этих параметрических исследований было выявлено, что модель, имеющая значение модуля упругости материала, заключенного в области отверстия (включения), сниженного до значения близкого к нулю, дает результаты весьма близкие к случаю пластины со свободным отверстием. Возможность применения настроенной таким образом модели, также подтверждают исследования, представленные в работе [40], где результаты расчетов подобной модели хорошо согласуются с результатами точного аналитического решения.

По вопросу выбора критерия разрушения при прогнозировании пределов прочности растягиваемых ослабленных отверстиями композитных пластин можно отметить следующее. Все из рассмотренных выше критериев прошли расчётно-

экспериментальную апробацию применительно к случаю растягиваемых композитных образцов с одним круговым отверстием. Во всех случаях расчёт напряжённого состояния основывался на использовании описанных выше приближённых (разной степени точности) формул. Такой подход обеспечивал удобство выполнения прочностных расчётов при использовании любого из указанных критериев. Вопрос оставался только к точности выполненного расчётного прогноза по прочности исследуемого образца с отверстием.

Из сказанного можно заключить, что выбор критерия разрушения для использования при численном решении соответствующей задачи о напряжённом состоянии и прочности композитной пластины с отверстиями, целесообразно осуществлять, принимая во внимание: подтверждённую практикой его надёжность в прочностных прогнозах, удобство получения на основе экспериментов с образцами значений характеристик, входящих в его формулировку, а также удобство его встраивания в вычислительную модель. Наиболее предпочтительным вариантом в этом плане представляется критерий напряжений в точке.

Учитывая сказанное, предполагаемую методику расчёта напряжённого состояния и расчётного прогноза предела прочности растягиваемой композитной пластины с одним или несколькими круговыми отверстиями будем строить в рамках следующего подхода:

- в качестве объекта моделирования принимаем одноосно растягиваемую композитную пластину (конечных размеров, с наличием в ней круговых отверстий), считая допустимым рассматривать её как выполненную из упругого ортотропного материала;

- для решения задачи о напряжённом состоянии рассматриваемой пластины в ситуациях, когда её можно считать тонкой, строим соответствующую вычислительную КЭ модель в среде программного комплекса ABAQUS; и программно (на языке Фортран) для решения той же задачи реализуем ВР модель, отверстие в которой представлено в виде некоторого включения с заниженной величиной модуля упругости; также строим ЧИ модель основанную на решении

плоской задачи теории упругости, сводящейся к постановке в виде краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой реализуется на методе ортогональной прогонки С.К.Годунова и схем численного интегрирования Кутты-Мерсона;

- достоверность получаемого численного решения задачи о напряжённом состоянии (ослабленной одним или несколькими круговыми отверстиями) растягиваемой тонкой ортотропной пластины подтверждаем фактом совпадения результатов расчётов на основе построенных альтернативных вычислительных моделей;

- для решения в трёхмерной постановке задачи о напряжённом состоянии растягиваемой толстой ортотропной композитной пластины с круговым отверстием строим соответствующую объёмную КЭ модель в среде программного комплекса ABAQUS; также программно (на языке Фортран) для решения той же задачи реализуем альтернативную ВР модель; достоверность получаемого численного решения рассматриваемой задачи подтверждаем фактом совпадения расчётных результатов альтернативных вычислительных;

- полученные (с подтверждённой достоверностью) расчётные результаты по напряжённому состоянию в окрестности кромки отверстия используем при решении задачи о пределе прочности растягиваемой композитной (с одним или несколькими круговыми отверстиями) пластины, принимая в качестве критерия разрушения критерий напряжений в точке.

## **ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТЯГИВАЕМЫХ ТОНКИХ КОМПОЗИТНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН, ОСЛАБЛЕННЫХ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ**

Здесь будет представлено описание ВР вычислительной модели (реализованной на языке Fortran) для решения задачи о растяжении тонкой композитной ортотропной пластины с круговыми отверстиями. За основу принимается ВР схема [40], апробированная на решении задач плоской теории упругости о концентрации напряжений в изотропных средах. Будет представлена также краткая характеристика плоского элемента программного комплекса ABAQUS, используемого при построении КЭ модели, альтернативной указанной ВР модели. Будут также представлены результаты исследований напряжённого состояния вокруг отверстий в растягиваемых ортотропных композитных пластинах, проводимых в рамках сформулированной выше методики с использованием указанных двух альтернативных вычислительных моделей. Отмеченные результаты описаны в публикациях [18, 20].

### **2.1 Вариационно-разностная и конечно-элементная вычислительные модели для исследования напряжённого состояния растягиваемых тонких композитных пластин с круговыми отверстиями**

Рассматриваем прямоугольную пластину (см. рисунке 2.1), растягиваемую в направлении оси  $Ox$ , считая заданными равномерно распределённые по её торцам (при  $x=a$  и  $x=-a$ ) напряжения  $\sigma_{xx}=q$ . Пластину считаем выполненной из ортотропного материала с параметрами упругости  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{12}$ . В формулировку соответствующей задачи о напряжённо-деформированном состоянии пластины включаем геометрические соотношения (1.1) и физические соотношения (1.5).

Случай свободного кругового отверстия радиуса  $R$  в пластине моделируем отверстием, заполненным изотропным материалом включения, значение модуля

Юнга которого, приближено к нулю. Далее описаны граничные условия по пунктам соответствующим пронумерованным участкам пластины (рисунок 2.1).

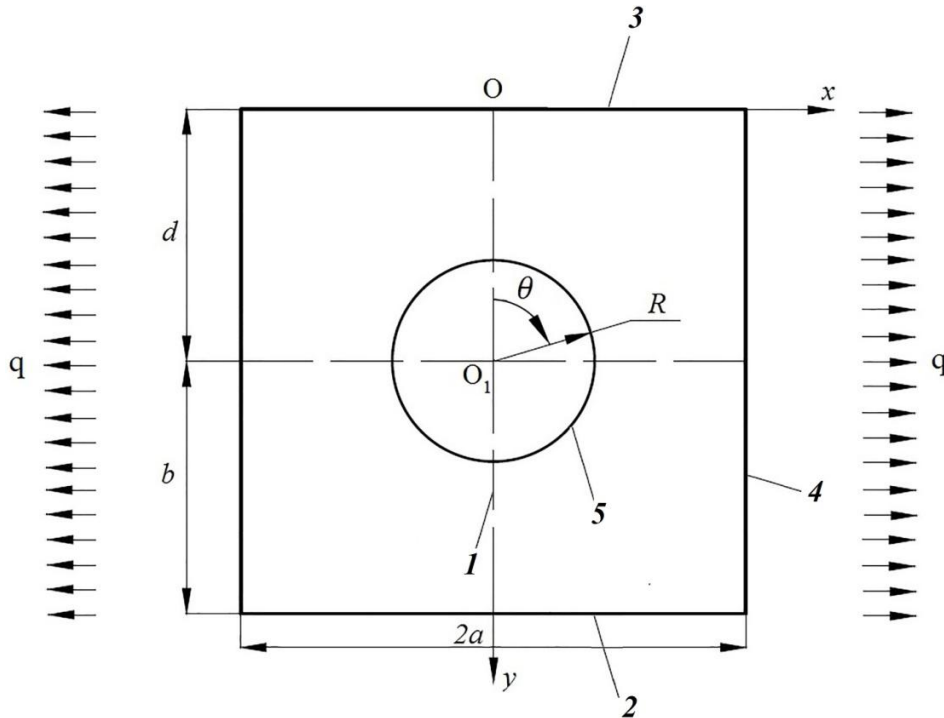


Рисунок 2.1 – Расчётная схема растягиваемой пластины

1) С учётом симметрии принятой расчётной схемы относительно оси  $Oy$ , численное моделирование проводим лишь для половины пластины (вместе с половиной включения). На участке границы моделируемой половины, лежащем на оси  $Oy$ , формулируем условия  $u_x=0$ ,  $\sigma_{xy}=0$ , соответствующие условиям упомянутой симметрии.

2) Для исключения перемещений пластины как жесткого целого (в направлении оси  $Oy$ ) формулируем на участке ее границы, параллельном оси  $Ox$ , условия  $u_y=0$ ,  $\sigma_{xy}=0$ . Эти условия также представляют собой условия симметрии. Принимаемая таким образом расчётная модель соответствует случаю пластины с двумя одинаковыми отверстиями радиуса  $R$ , центры которых расположены на оси  $Oy$  и находятся на расстоянии  $2b$  друг от друга. В случае, когда отрезок  $b$  существенно больше радиуса  $R$ , указанные отверстия практически не оказывают влияния друг на друга.

3) Верхняя кромка пластины (на оси  $Ox$ ) является свободной, поэтому условия имеют вид  $\sigma_y=0$ ,  $\sigma_{xy}=0$ .

4) Условия на кромке параллельной оси  $Ox$ , к которой приложена растягивающая нагрузка, имеют вид  $\sigma_x=q$ ,  $\sigma_{xy}=0$ .

5) Граничные условия на контуре отверстия записываем в следующем виде:

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y = 0, \quad \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y = 0. \quad (2.1)$$

где  $n_x, n_y$  проекции на оси  $Ox, Oy$  единичного вектора нормали к границе контура отверстия

$$n_x = -\sin \theta, \quad n_y = -\cos \theta. \quad (2.2)$$

Формулировку условий равновесия принятой модели пластины осуществляем на основе принципа возможных перемещений. Применительно к деформируемому телу этот принцип утверждает, что в состоянии равновесия работа приложенных к точкам тела сил на вариациях перемещений этих точек равна работе напряжений на соответствующих вариациях деформаций. В рассматриваемом плоском случае имеем:

$$\iint_S (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dS = \int_{\Gamma_q} q \delta u_x dy. \quad (2.3)$$

Интегрирование в левой части равенства (2.3) осуществляется по прямоугольной области  $S$ , занимаемой выделенной правой половиной пластины, а интегрирование справа осуществляется по правой стороне этой области (вдоль правого нагруженного края пластины).

Разбиваем лежащие на осях  $Ox$  и  $Oy$  стороны области  $S$  соответственно на  $M$  и  $N$  малых отрезков, и через концы этих отрезков проводим прямые, параллельные соответствующим координатным осям. Тем самым осуществляем разбиение области  $S$  на  $M \times N$  прямоугольных ячеек  $S^{(i,j)}$  ( $i=1,2,\dots,M; j=1,2,\dots,N$ ). Учитывая принятую малость размеров участков разбиения рассматриваемой области, вместо равенства (2.3) будем использовать его приближенный аналог вида

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [\tilde{\sigma}_{xx}^{(i,j)} \delta \tilde{\varepsilon}_{xx}^{(i,j)} + \tilde{\sigma}_{yy}^{(i,j)} \delta \tilde{\varepsilon}_{yy}^{(i,j)} + \tilde{\sigma}_{xy}^{(i,j)} \delta \tilde{\gamma}_{xy}^{(i,j)}] l_x^{(i)} l_y^{(j)} = \sum_{j=1}^N q \delta \tilde{u}_x^{(j)} l_y^{(j)}. \quad (2.4)$$

Здесь «волной» отмечены величины, определяемые в серединах соответствующих элементарных участков интегрирования, а величины  $l_x^{(i)} = x_{i+1} - x_i$

и  $l_y^{(j)} = y_{j+1} - y_j$  ( $i=1,2,\dots,M; j=1,2,\dots,N$ ) представляют собой длины соответствующих элементарных отрезков разбиений вдоль координатных осей.

Далее используем обозначения  $u_x^{i,j}$ ,  $u_y^{i,j}$  для значений перемещений в узловых точках с координатами  $x_i$ ,  $y_j$  ( $i=1,2,\dots,M+1; j=1,2,\dots,N+1$ ) рассматриваемой прямоугольной сетки. Входящие в вариационное уравнение (2.4) деформации, относящиеся к середине ячейки  $S^{(i,j)}$ , определяем на основе соотношений (1.1), вычисляя при этом соответствующие частные производные с применением центрально-разностных схем. В результате имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{xx}^{(i,j)} &= 0,5(u_x^{i+1,j} + u_x^{i+1,j+1} - u_x^{i,j} - u_x^{i,j+1}) / l_x^{(i)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{yy}^{(i,j)} &= 0,5(u_y^{i,j+1} + u_y^{i+1,j+1} - u_y^{i,j} - u_y^{i+1,j}) / l_y^{(j)}, \\ \tilde{\gamma}_{xy}^{(i,j)} &= 0,5(u_x^{i,j+1} + u_x^{i+1,j+1} - u_x^{i,j} - u_x^{i+1,j}) / l_y^{(j)} + \\ &+ 0,5(u_y^{i+1,j} + u_y^{i+1,j+1} - u_y^{i,j} - u_y^{i,j+1}) / l_x^{(i)}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Вычисление перемещений в серединах прямоугольных ячеек проводим по схеме

$$\tilde{u}_x^{(i,j)} = 0,25(u_x^{i,j} + u_x^{i+1,j} + u_x^{i,j+1} + u_x^{i+1,j+1}) \quad (x \Leftrightarrow y), \quad (2.6)$$

а перемещений  $\tilde{u}_x^{(j)}$  в равенстве (2.4) - по схеме

$$\tilde{u}_x^{(j)} = 0,5(u_x^{M+1,j} + u_x^{M+1,j+1}), \quad (2.7)$$

Переходя в вариационном уравнении (2.4) от напряжений к деформациям с использованием связей (1.5), а затем с использованием связей (2.5), (2.7) к узловым перемещениям, окончательно приходим к формулировке вариационного уравнения (2.4) в терминах узловых перемещений принятой прямоугольной сетки.

Осуществляем коррекцию этого уравнения, учитывая равенства

$$u_x^{1,j} = 0, \quad u_y^{i,N+1} = 0 \quad (i=1,2,\dots,M+1; j=1,2,\dots,N+1). \quad (2.8)$$

отражающие заданные граничные условия в перемещениях. Приравнявая коэффициенты при вариациях неизвестных узловых перемещений в левой и правой части сформированного вариационного уравнения, получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых перемещений. Решаем эту систему методом Гаусса, а затем

определяем параметры напряженно-деформированного состояния в средних точках ячеек расчетной модели с использованием связей (2.6), (2.8), (2.5), (1.5).

В фортран-программе, реализующей представленную ВР процедуру, была применена схема генерации расчётной прямоугольной сетки в зоне отверстия в соответствии с уже апробированной методикой, описанной в работе [40].

Поскольку напряжения в данной дискретной модели определяются исключительно в серединах прямоугольных ячеек, разбиение моделируемой области на подобные ячейки следует проводить так, чтобы середины ячеек, граничащих с имеющимся в пластине отверстием, оказывались на кромке отверстия. Чтобы получить отвечающую этому требованию сетку из прямоугольных ячеек, равномерно разбиваем моделируемую половину контура отверстия (по углу  $\theta$  от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ ) на некоторое количество  $n$  элементарных дуг (достаточно малых размеров). Таким образом, каждая точка разбиения является началом и концом полученных дуг. Далее, зная координату каждой точки по углу  $\theta$ , вычисляем их координаты в осях  $Ox$  и  $Oy$ . Проведя через концы указанных дуг прямые, параллельные по указанным осям получаем сетку с требуемым свойством. На рисунке 2.2 представлено схематичное построение указанной сетки.

Расчётная практика показала, что при выборе  $n=200$  обеспечивается хорошее согласование получаемых расчётных результатов с имеющимися аналитическими решениями.

Разбиение областей лежащих не на контуре отверстия проводится следующими образом: отрезок  $R \leq x \leq 10R$  на оси  $Ox$ , а также отрезки  $0 \leq y \leq 9R$  и  $11R \leq y \leq 20R$  на оси  $Oy$  разбиваем (направляясь от центра  $O_1$  к кромке пластины) на участки с размерами  $0,2R$ ;  $0,2R$ ;  $0,6R$ ;  $2R$ ;  $2R$ ,  $4R$ , далее разбиваем уже их на 30, 20, 30, 20, 15, 20 одинаковых отрезков соответственно. Через концы образованных элементарных отрезков проводим прямые, параллельные осям  $Ox$  и  $Oy$ , таким образом, заканчивая построение сетки расчетной модели.



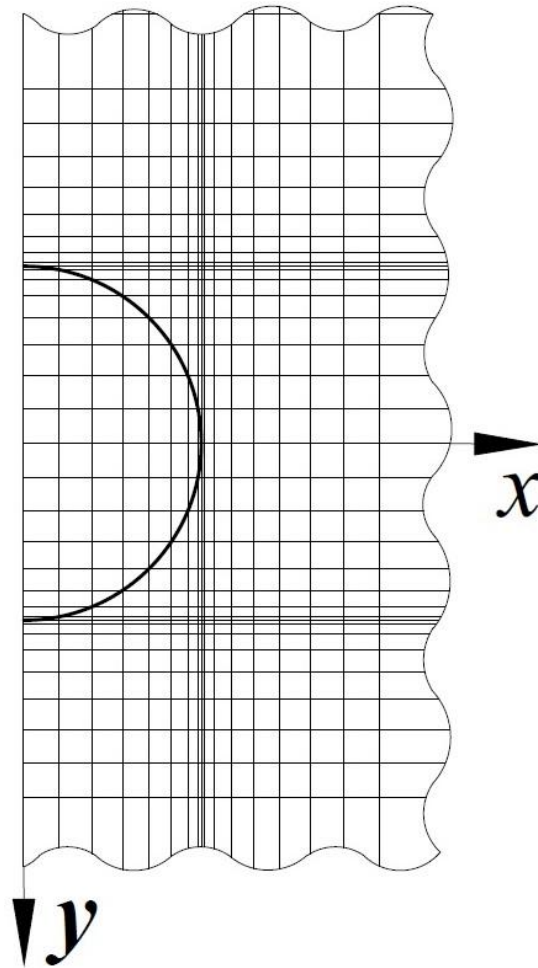


Рисунок 2.2 – Схема построения сетки ВР модели пластины с отверстием

К сказанному добавим, что при выполнении операций с каждой из элементарных ячеек образованной сетки алгоритм численного решения проверяет: попадает ли середина ячейки внутрь круговой зоны, соответствующей отверстию. Если да, то используются значения параметров упругости, соответствующие материалу «фиктивного» включения, если нет, то – материалу пластины. Отметим, что в используемом варианте программы материал «фиктивного» включения принят изотропным с модулем Юнга в 10000 раз заниженным по сравнению с аналогичным параметром материала пластины.

На завершающем этапе работы программы по полученным в точках пластины напряжениям (в осях  $Oxy$ ) вычисляются значения напряжений в полярной системе координат (с началом в центре отверстия). В частности, вычисляются напряжения  $\sigma_\theta$  вдоль контура отверстия.

Реализация КЭ модели проводилась в среде программного комплекса ABAQUS. Для построения сетки был использован четырехугольный оболочечный элемент S4. Элементы, опоясывающие контур отверстия имели размер  $0,02R$ , а на расстоянии  $0,5R$  их размер постепенно увеличивался до  $0,2R$  (рисунок 2.3).

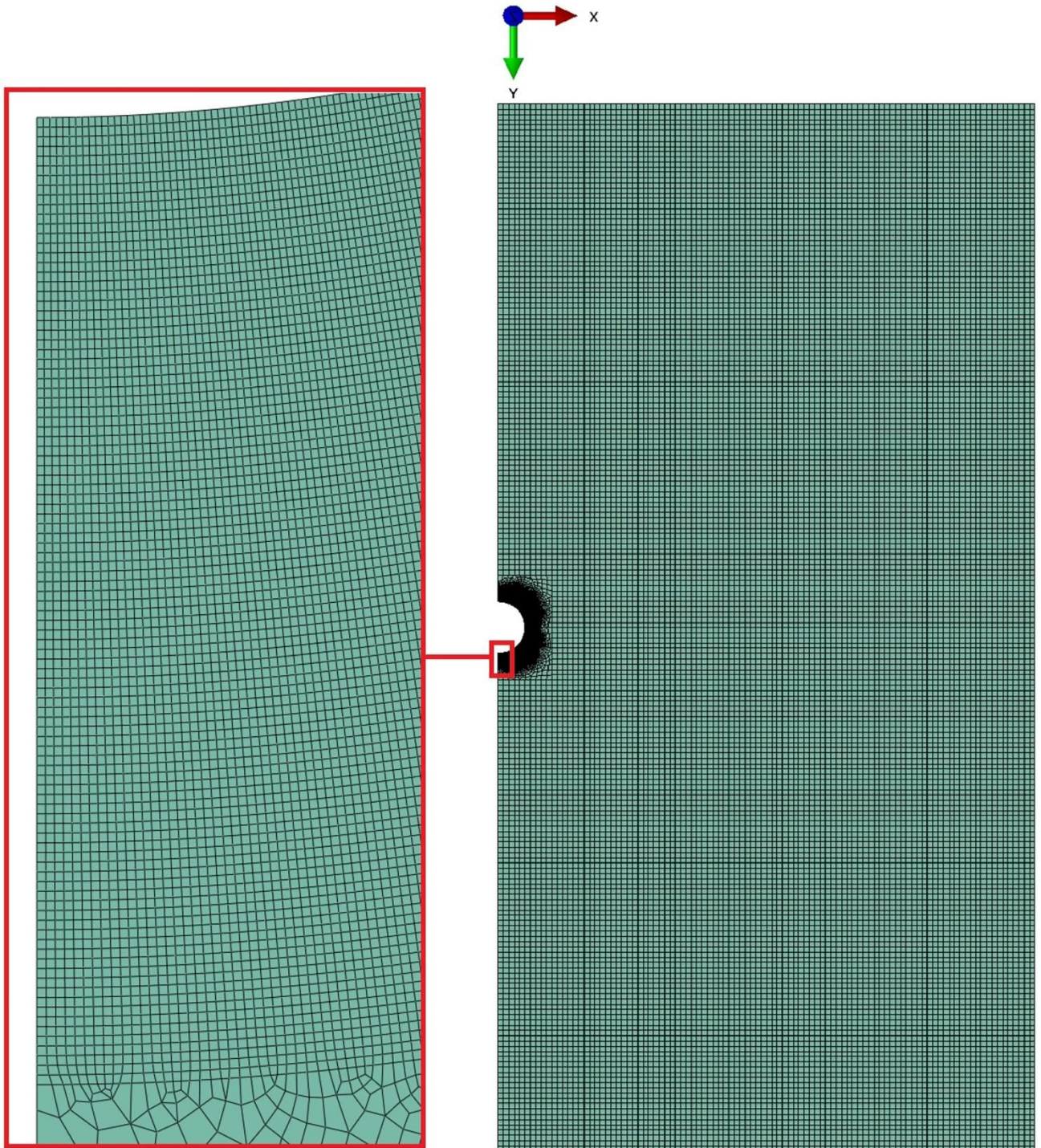


Рисунок 2.3 – Сетка КЭ модели пластины с отверстием

Отметим, что  $S4$  – это четырёхугольный (четырёхузловой) изопараметрический (с интерполяцией билинейного типа) элемент [62]. Интегрирования по элементу  $S4$  осуществляются с использованием четырёх точечной схемы, что обеспечивает высокую вычислительную надёжность построенных на его основе расчётных моделей оболочек. Укажем, что упрощенная версия  $S4R$  обсуждаемого элемента построена с использованием сокращенной (одноточечной) схемы интегрирования. Также укажем, что при использовании элемента  $S4R$  и размером ячейки  $0,05R$  результаты по напряжениям могли быть занижены на 6% по сравнению со случаем элемента  $S4$  и размером ячейки  $0,02R$ .

Также отметим, что при построении соответствующей КЭ модели отверстие считается свободным от описанного «фиктивного» включения.

## **2.2 Численный анализ распределения напряжений вокруг круговых отверстий в тонких ортотропных пластинах при одноосном растяжении**

Исследования в рамках сформулированной выше вычислительной методики будем проводить здесь для следующих трёх расчётных случаев растягиваемой ортотропной пластины с круговым отверстием:

- отверстие расположено вдали от краёв пластины (случай плоскости с одним отверстием);
- отверстие расположено вблизи ненагруженного края пластины (случай полуплоскости с отверстием вблизи границы);
- два одинаковых близко расположенных отверстия находятся вдали от краёв пластины (случай плоскости с двумя одинаковыми близко расположенными отверстиями).

Переходя к намеченным исследованиям с использованием обозначенных КЭ и ВР вычислительных моделей, принимаем, что указанным выше трём расчётным случаям соответствуют следующие значения геометрических



параметров (см. рисунок 2.1):

$$\text{I. } d=b=a=mR; \quad \text{II. } d=1,54R, b=a=mR; \quad \text{III. } b=1,25R, d=a=mR.$$

Это означает, что в расчётном случае II рассматривается ситуация, когда кромка отверстия находится на расстоянии  $0,54R$  от ненагруженного края пластины, а в случае III – когда кромки двух отверстий находятся на расстоянии  $0,5R$  друг от друга. Для всех расчётных случаев соответствующие КЭ модели строятся с выбором  $m=20$ , а соответствующие ВР модели - с выбором  $m=10$ .

На рисунке 2.4 представлены полученные численным моделированием результаты по распределению напряжений  $\sigma_{\theta}/q$  вдоль контура отверстия для указанных трёх расчётных случаев в предположении, что материал пластины изотропный. Сплошные линии соответствуют КЭ моделированию, а точки (различной конфигурации) - ВР моделированию.

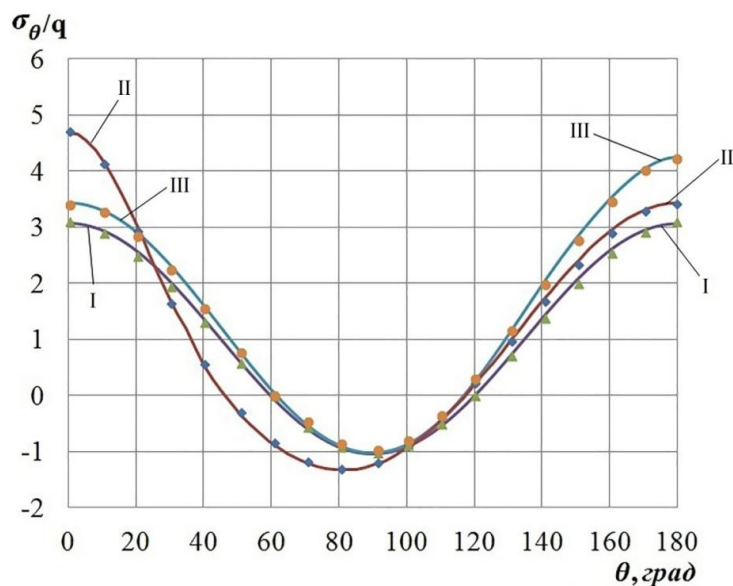


Рисунок 2.4 – Ситуация изотропной пластины. Графики распределения напряжений вдоль контура отверстия в рассматриваемых трёх расчётных случаях

Как видно, обе модели приводят к практически совпадающим для каждого из расчётных случаев результатам, что подтверждает достоверность полученных численных решений применительно к изотропному варианту материала пластины. Эти результаты также хорошо согласуются и с известными аналитическими решениями (решения Г. Кирша, G.B. Jeffery, A.C. Космодамианского, см. [54]).

На рисунках 2.5, 2.6, 2.7 представлены полученные численным моделированием результаты по распределению напряжений вдоль контура отверстия для рассматриваемых I, II, III расчётных случаев в предположении, что материал пластины ортотропный. Помеченные цифрами 1-8 кривые соответствуют приведённым в таблице 2.1 вариантам задаваемых значений параметров упругости пластины. Как видно, для всех выбранных вариантов результаты КЭ и ВР моделирований практически совпадают, что говорит о достоверности полученных численных решений.

Таблица 2.1 – Варианты значений параметров упругости пластины

№	$E_2/ E_1$	$G_{12}/ E_1$	$\nu_{12}$	$\nu_{21}$
1	0,305	0,03	0,917	0,28
2	3,277	0,098	0,28	0,917
3	0,305	0,03	1,311	0,4
4	3,277	0,098	0,4	1,311
5	1,278	0,233	0,102	0,13
6	0,783	0,183	0,13	0,102
7	2,643	0,414	0,068	0,18
8	0,378	0,157	0,18	0,068

Отметим также, что значения упругих постоянных, соответствующие вариантам 1-4 (см. таблицу 2.1), характерны для стеклопластиков на основе однонаправленных волокон, а значения, соответствующие вариантам 5-8, характерны для стеклопластиков на тканевой основе. В дополнение к вопросу о достоверности полученных численных решений укажем, что проведённые сравнения с соответствующими результатами аналитического решения С.Г. Лехницкого [39] показали, что указанные результаты хорошо согласуются с представленными на рисунке 2.5 графиками для вариантов 1, 2.

Переходя к анализу представленных результатов по распределению напряжений вдоль контура отверстия, обратим внимание на то, что максимальные значения этих напряжений имеют место либо в точке с координатой  $\theta=0^\circ$  (случай

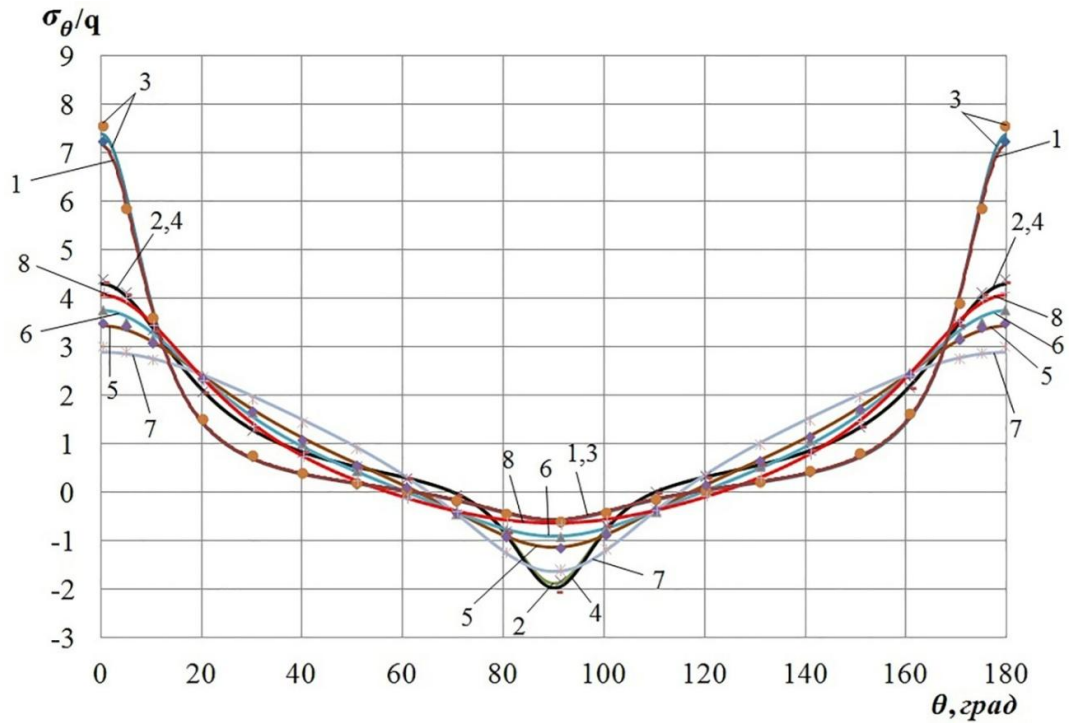


Рисунок 2.5 – Расчётный случай I. Графики распределения напряжений вдоль контура отверстия для принятых 8 вариантов значений параметров упругости пластины

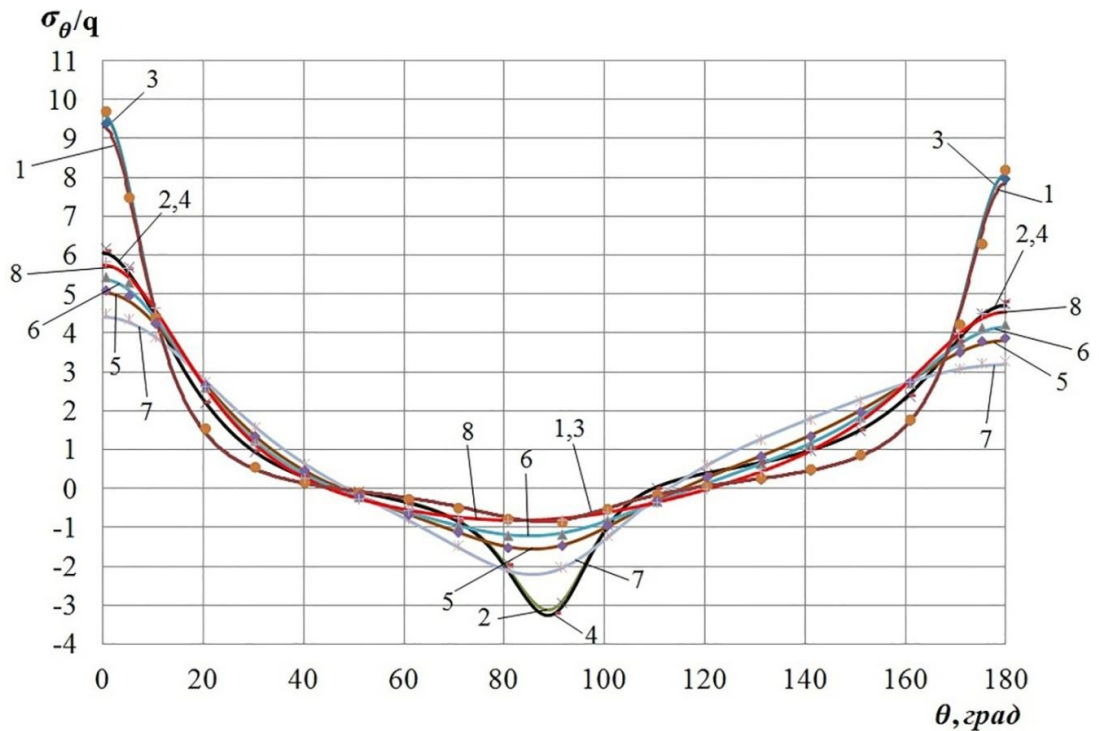


Рисунок 2.6 – Расчётный случай II. Графики распределения напряжений вдоль контура отверстия для принятых 8 вариантов значений параметров упругости пластины

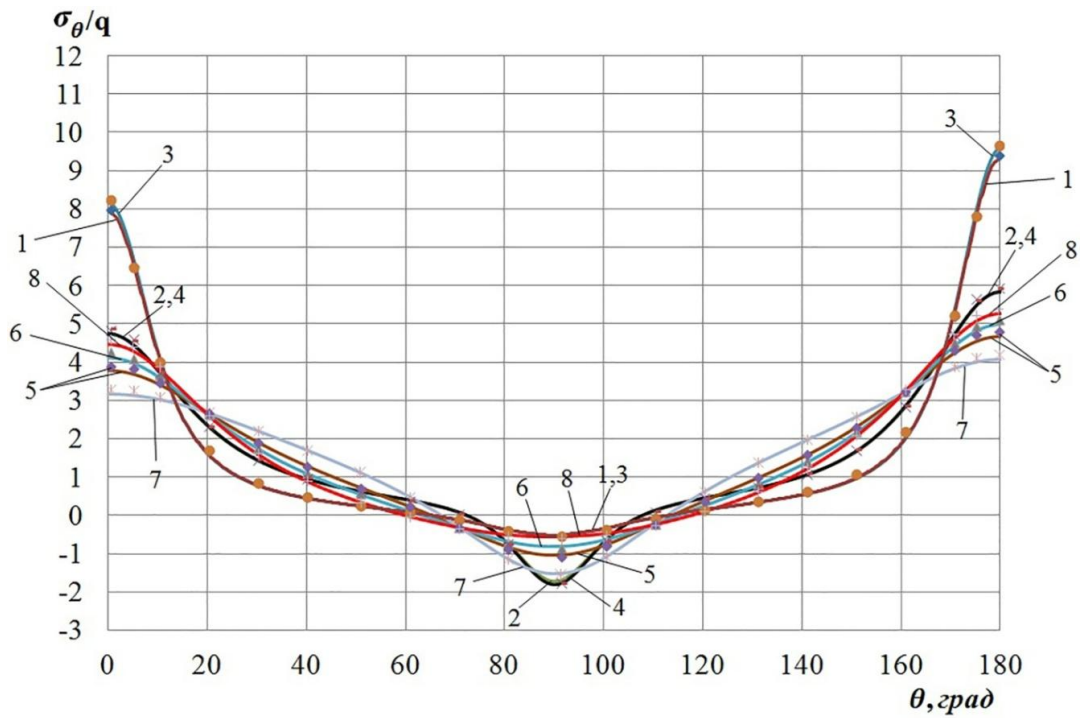


Рисунок 2.7 – Расчётный случай III. Графики распределения напряжений вдоль контура отверстия для принятых 8 вариантов значений параметров упругости пластины

II), либо в точке с координатой  $\theta=180^\circ$  (случай III), либо в обеих этих точках (случай I). На основе указанных максимальных значений определяем коэффициент концентрации напряжений  $k = \sigma_{\theta, \max} / q$ . Вводим обозначения  $k_I$ ,  $k_{II}$ ,  $k_{III}$  для коэффициентов концентрации напряжений, относящихся к первому, второму и третьему из рассматриваемых случаев.

Используя представленные на рисунке 2.4 зависимости для ситуации с изотропной пластиной (где  $k_I=3$ ), получаем:  $k_{II} / k_I \approx 1,5$ ;  $k_{III} / k_I \approx 1,4$ . Это даёт количественную оценку влияния фактора близости отверстия к ненагруженному краю пластины или к другому такому же отверстию на коэффициент концентрации напряжений в данной ситуации.

Переходя к рисунку 2.5, относящемуся к расчётному случаю I (применительно к ситуации с ортотропным материалом пластины), обращаем внимание на широкий диапазон изменения значений коэффициента  $k_I$  в зависимости от принятого варианта значений параметров упругости материала, а именно:  $2,9 \leq k_I \leq 7,5$ . Замечая практическое совпадение кривых 1 и 3, а также

кривых 2 и 4, соответствующих вариантам с существенно различающимися значениями коэффициентов Пуассона, приходим к выводу о практическом не влиянии этих значений на результаты по напряжениям на контуре отверстия. Далее замечаем, что максимумы кривых с номерами 1, 2, 8, 6, 5, 7 убывают (следуя отмеченной последовательности номеров) в соответствии с увеличением параметра  $G_{12}/E_1$  (см. таблицу 2.1). Тем самым убеждаемся, что величина этого параметра оказывает определяющее влияние на коэффициент  $k_I$  в рассматриваемых вариантах ортотропного материала пластины.

Обращаясь теперь к анализу представленных на рисунках 2.6, 2.7 аналогичных результатов, относящихся к расчётным случаям II и III, убеждаемся в справедливости этого вывода применительно к коэффициентам  $k_{II}$  и  $k_{III}$ . Чтобы оценить совместное влияние параметра  $G_{12}/E_1$  и фактора близости отверстия по отношению к ненагруженному краю пластины или к другому отверстию, определяем по максимумам кривых с номерами 1, 2, 8, 6, 5, 7 (рисунки 2.5, 2.6, 2.7) соответствующие значения  $k_{II} / k_I$  в виде набора чисел (1,3; 1,4; 1,4; 1,5; 1,5; 1,6), а также соответствующие значения  $k_{III} / k_I$  в виде набора чисел (1,3; 1,3; 1,3; 1,4; 1,4; 1,5). Сравнивая полученные числовые наборы, замечаем, что при  $G_{12}/E_1=0,03$  эффекты, связанные с близостью отверстия к границе пластины и с близостью к другому отверстию, в количественном выражении одинаковы. При достижении параметром  $G_{12}/E_1$  значения 0,098 и дальнейшем его увеличении эффект, связанный с близостью отверстия к краю пластины, в количественном выражении становится несколько превосходящим по сравнению с эффектом, обусловленным близостью к другому отверстию. При  $G_{12}/E_1=0,183$  количественные показатели по рассматриваемым эффектам достигают тех же уровней, что и в ситуации с изотропным материалом, а затем (при  $G_{12}/E_1=0,414$ ) несколько превосходят их.

Итак, на основе ВР метода (с прямоугольной сеткой) и КЭ метода (комплекс ABAQUS, оболочечный элемент S4) построены вычислительные модели, предназначенные для решения задачи об одноосном растяжении прямоугольной ортотропной пластины с круговыми отверстиями. С использованием этих моделей



проведены исследования по влиянию значений параметров упругости материала пластины, а также положения отверстия в пластине на распределение напряжений вдоль контура отверстия. В соответствии с принятой расчётной методикой, достоверность полученных численных решений подтверждена фактом практического совпадения результатов расчётов с применением двух указанных моделей, а также хорошим согласованием с известными аналитическими решениями. Обращено внимание на то, что в рассмотренных вариантах значений характеристик упругости определяющее влияние на коэффициент концентрации напряжений в случае ослабленной круговым отверстием ортотропной пластины оказывает значение параметра  $G_{12}/E_1$ . Даны количественные оценки эффектов, связанных с близостью отверстия к ненагруженному краю пластины, а также близостью к другому отверстию.

### **2.3. Численное моделирование растягиваемых композитных полос, ослабленных набором круговых отверстий**

Как отмечалось выше, вопросы напряжённого состояния и прочности, работающих на растяжение плоских композитных элементов различного рода силовых конструкций, ослабленных наборами круговых отверстий, к настоящему времени недостаточно изучены. Особенно это относится к случаям, когда размеры исследуемой пластины сопоставимы с диаметром выполненных в ней отверстий. Можно указать лишь на небольшое число работ (в частности, [80, 76, 105, 100, 84]), где выполнены экспериментальные и расчётные исследования по данной проблеме. Объектами исследования в отмеченных работах являются одноосно растягиваемые плоские композитные образцы (заданной ширины) с набором круговых отверстий. Преимущество той или иной схемы расположения отверстий в смысле прочности исследуемого композитного образца оценивается при этом по величине коэффициента концентрации напряжений, рассчитываемой путём решения соответствующей задачи о напряжённо-деформированном состоянии. В каждой из работ [80, 76, 105, 100, 84, 85] исследования по влиянию схемы расположения отверстий в образце на величину коэффициента концентрации напряжений

выполнены применительно к конкретному композитному материалу. Это оставляет открытым вопрос о влиянии упругих характеристик композитного материала на получаемые отмеченным образом результаты. В данном подразделе, принимая в качестве объекта численного моделирования растягиваемую композитную полосу с различным расположением выполненных в ней двух отверстий, подобного типа исследования проводятся применительно к шести вариантам композитов с существенно различающимися значениями характеристик упругости. Задаваемые характеристики соответствуют трём принятым к рассмотрению типам слоистых стеклопластиков и углепластиков с различной схемой укладки армирующих волокон в слоистом пакете. В таблице 2.2 представлены взятые из работ [105, 97] данные по упругим характеристикам и выкладкам слоёв принимаемых к рассмотрению шести вариантов слоистых композитов. Отметим, что представленные здесь «эффективные» значения параметров упругости композитов получены в работах [105, 97] непосредственно из экспериментов. Приведённые в таблице безразмерные характеристики  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{G}_{12}$  каждого из композитов получены в результате деления его модулей  $E_1, E_2, G_{12}$  на модуль  $E_1$ . На рисунке 2.8 представлены принимаемые к рассмотрению схемы растягиваемых композитных полос с одним отверстием и двумя одинаковыми продольно и поперечно расположенными отверстиями.

Предполагается, что диаметр  $D$  отверстия сопоставим с шириной полосы  $W$ , которая в свою очередь существенно меньше её длины  $L$ . Для определённости принимаем:  $L=10W$ .

Обращаем внимание на то, что точного аналитического решения задачи о напряжённом состоянии одноосно растягиваемой пластины конечных размеров даже при наличии в ней только одного кругового отверстия к настоящему времени не получено [107, 63].

Для случая бесконечной ортотропной пластины с одним круговым отверстием имеется точное аналитическое решение С.Г. Лехницкого [38]. Из

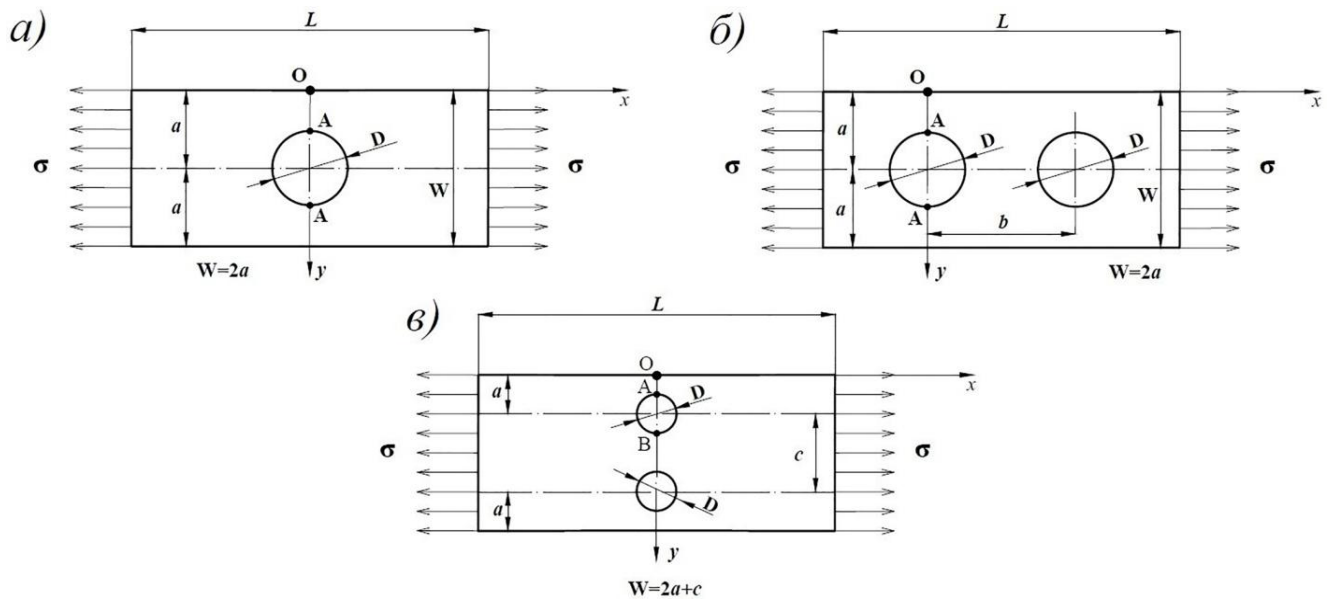


Рисунок 2.8 – Схемы растягиваемых композитных полос с одним отверстием (а), с двумя продольно (б) и двумя поперечно (в) расположенными отверстиями

Таблица 2.2 – Значения упругих характеристик принятых к рассмотрению шести вариантов слоистых композитов

	№ композита	Структура композита	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$
			$\tilde{E}_1$	$\tilde{E}_2$	$\tilde{G}_{12}$	
Стеклопласт	1	[0 <sub>8</sub> ]	22120 МПа	4980 МПа	2500 МПа	0,285
			1	0,225	0,113	
	2	[(0/90) <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>	14050 МПа	14050 МПа	1955 МПа	0,109
Углепластик	3	[(0 <sub>2</sub> /±45/0) <sub>s</sub> ]	16200 МПа	6850 МПа	3150 МПа	0,469
			1	0,422	0,194	
	4	[0 <sub>6</sub> ]	81900 МПа	6150 МПа	2770 МПа	0,34
Углепластик	5	[(0/90) <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>	51440 МПа	51440 МПа	2816 МПа	0,054
			1	1	0,0547	
	6	[(0/±45/90) <sub>s</sub> ]	45660 МПа	45660 МПа	14356 МПа	0,329
			1	1	0,314	

этого решения, в частности, следует выражение для коэффициента концентрации напряжений в одноосно растягиваемой ослабленной круговым отверстием бесконечной ортотропной пластине, которое может быть представлено в виде (см. [80, 97, 38])

$$K^\infty = 1 + (2(\tilde{E}_2)^{-0,5} - 2\nu_{12} + (\tilde{G}_{12})^{-1})^{-0,5}. \quad (2.9)$$

В случае изотропной пластины формула (2.9) даёт хорошо известную величину  $K=3$ . С помощью этой формулы можно также выполнить предварительную оценку значений коэффициентов концентрации напряжений применительно к принятым к рассмотрению композитам. Судя по приведённым в таблице 2.2 значениям параметров  $\tilde{E}_2$ ,  $\tilde{G}_{12}$ ,  $\nu_{12}$ , наибольшее значение коэффициента  $K$  должно иметь место в случае композита с номером 4, а наименьшее - в случае композита с номером 6. Записывая номера рассматриваемых композитов в порядке возрастания значений коэффициента  $K$ , получаем последовательность вида: 6, 3, 2, 1, 5, 4. Композитам с этими номерами соответствуют значения коэффициента  $K^\infty$  вида: 3,13; 3,70; 4,00; 4,53; 5,49; 7,02. Как видно, вариант композита с номером 6 даёт по коэффициенту концентрации напряжений результат, близкий к изотропному случаю.

Существенно завышенные значения коэффициента  $K$  означают, что в подобных случаях имеет место высокая степень изменчивости напряжений вблизи кромки отверстия. А это в свою очередь означает, что при численном решении соответствующей задачи о напряжённом состоянии требуется выбирать расчётную сетку с достаточно мелкими ячейками вблизи кромки отверстия, чтобы обеспечить необходимую точность получаемых расчётных результатов. Для подтверждения надёжности таких результатов будем (как и выше) осуществлять решение поставленной задачи с использованием двух альтернативных КЭ и ВР вычислительных моделей.

Обращаясь к представленным на рисунке 2.8 схемам растягиваемых композитных полос, отмечаем, что наибольшие напряжения ( $\sigma_{xx}$ ) должны иметь место в точках  $A$  и  $B$  кромок соответствующих отверстий. Коэффициенты концентрации напряжений в этих точках определяются по формуле  $K = \sigma_{xx} / \sigma$ .

Представленные на рисунке 2.9 - 2.12 результаты численного моделирования напряжённого состояния полос с одним и двумя отверстиями призваны продемонстрировать достоверность получаемых на основе изложенной расчётной методики данных по параметру  $K$ . Здесь приведены полученные

численным моделированием (применительно к композиту с номером 4) графики распределения напряжений  $\sigma_{xx}$  вдоль оси  $Oy$  в окрестностях точек  $A$  и  $B$  для полос с одним и двумя отверстиями. Как видно, результаты используемых КЭ и ВР

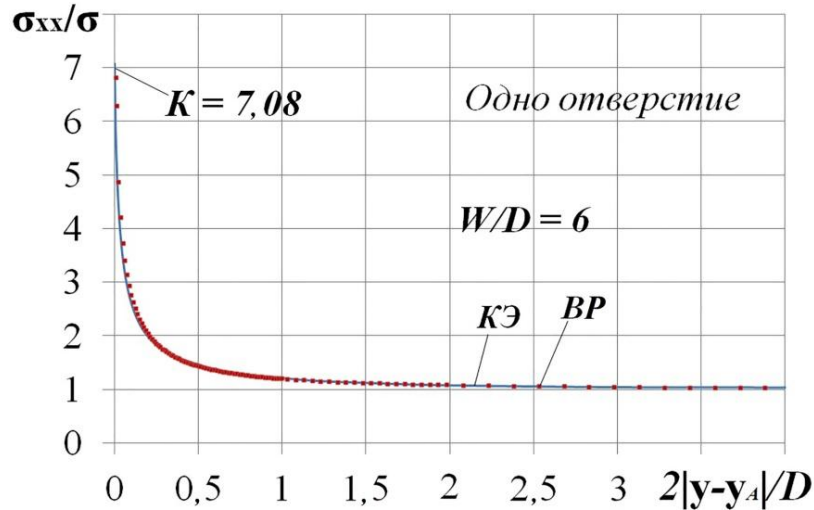


Рисунок 2.9 – График распределения напряжений  $\sigma_{xx}$  вдоль оси  $Oy$  в окрестности точки  $A$  для полосы из композита 4 с одним отверстием

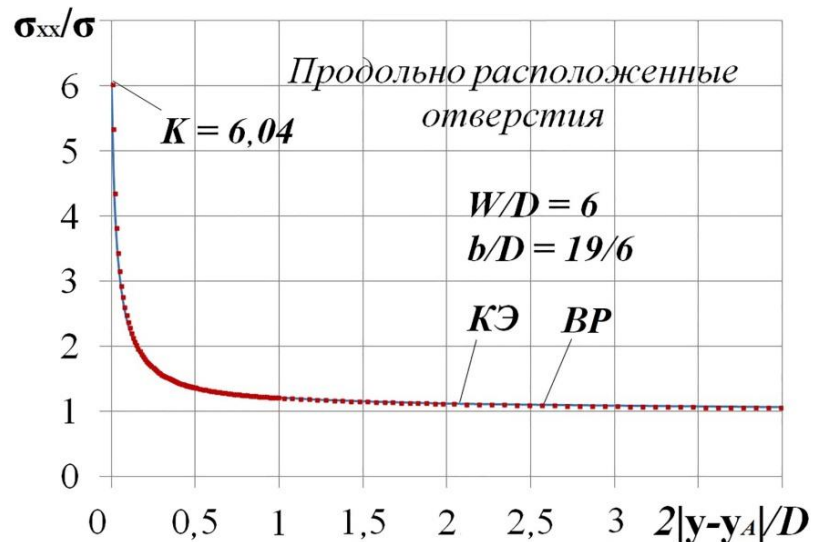


Рисунок 2.10 – График распределения напряжений  $\sigma_{xx}$  вдоль оси  $Oy$  в окрестности точки  $A$  для полосы из композита 4 с двумя продольными отверстиями

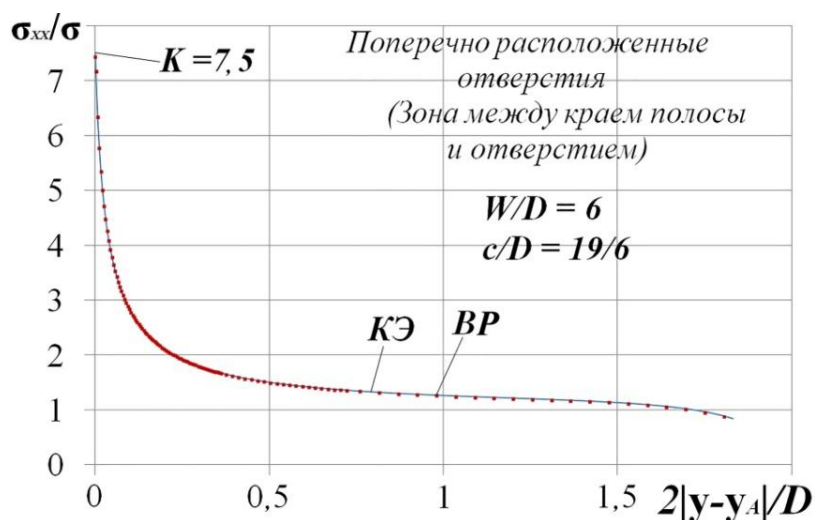


Рисунок 2.11 – График распределения напряжений  $\sigma_{xx}$  вдоль оси  $Oy$  в окрестности точки  $A$  для полосы из композита 4 с двумя поперечно расположенными отверстиями

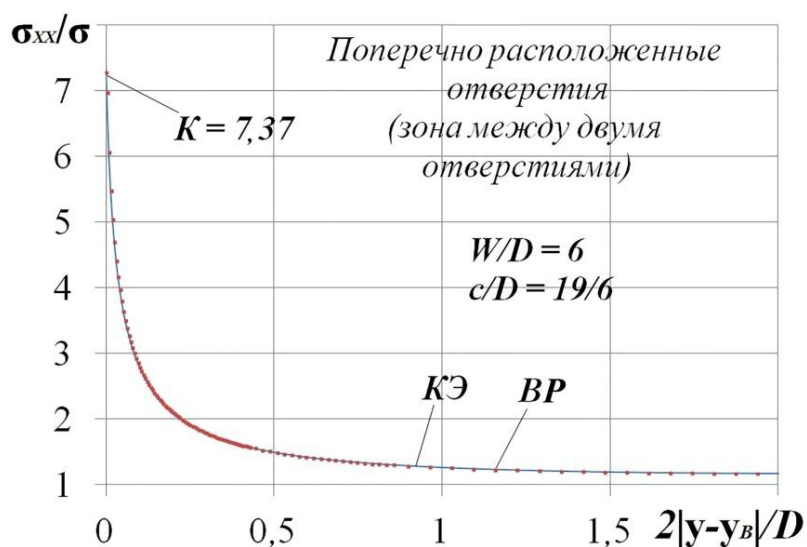


Рисунок 2.12 – График распределения напряжений  $\sigma_{xx}$  вдоль оси  $Oy$  в окрестности точки  $B$  для полосы из композита 4 с двумя поперечно расположенными отверстиями

вычислительных моделей практически совпадают всюду, включая точки  $A$  и  $B$  кромок отверстий. Пример с композитом №4 в этом плане наиболее показателен, поскольку, как указывалось выше, для обеспечения необходимой точности получаемых расчётных результатов здесь требуется существенным образом измельчать расчётную сетку. Выбранная сетка будет обеспечивать надёжные результаты и для остальных из рассматриваемых вариантов композита. Обращаем

внимание на то, что расчётные КЭ модели исследуемых полос строились, исходя из расчётных схем в том виде, как они представлены на рисунке 2.9.

Вариационно-разностное моделирование тех же объектов осуществлялось по упрощённой процедуре, основанной на использовании условий симметрии для рассматриваемых расчётных схем.

В столбцах таблицы 2.3 приведены полученные численным моделированием значения коэффициентов концентрации напряжений ( $K$ ) для полос с одним отверстием, выполненных из композитов с номерами 1,2,3,4,5,6, при различных значениях отношения  $W/D$ .

На рисунке 2.13 представлены соответствующие графики, построенные на основе данных таблицы 2.3. Сравнивая указанные значения  $K$ , относящиеся к случаю  $W/D=6$ , с представленными выше значениями для коэффициента  $K^\infty$ ,

Таблица 2.3 – Случай полос с одним отверстием. Значения коэффициентов концентрации напряжений для полос, выполненных из композитов с номерами 1,2,3,4,5,6, при различных значениях отношения  $W/D$

$W/D$	1	2	3	4	5	6
2	5,95	5,40	5,07	8,60	7,02	4,48
3	5,04	4,50	4,19	7,56	6,04	3,61
4	4,80	4,25	3,96	7,28	5,77	3,38
6	4,66	4,10	3,81	7,08	5,59	3,23

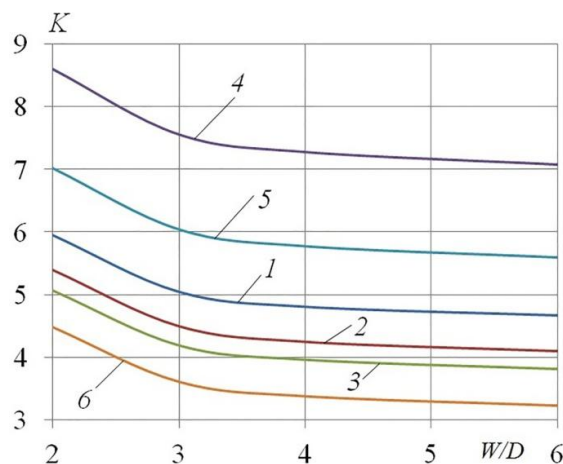


Рисунок 2.13 – Графики зависимостей коэффициентов концентрации

отмечаем несущественное различие соответствующих значений  $K^\infty$  и  $K$ . Если проводить такое сравнение в порядке возрастания значений этих коэффициентов (в порядке следования номеров 6, 3, 2, 1, 5, 4 композитов), то в процентном отношении степень такого различия изменяется в пределах от 3% до 1%.

Как видно из представленных табличных и графических данных, с увеличением диаметра отверстия в полосе (с уменьшением параметра  $W/D$ ) различие значений коэффициентов  $K^\infty$  и  $K$  становится существенным. В частности, при  $W/D=2$  значения  $K$  превышают значения  $K^\infty$  (в порядке следования номеров 6, 3, 2, 1, 5, 4 композитов) соответственно на 43%, 37%, 35%, 31%, 28%, 23%.

В столбцах таблицы 2.4 приведены полученные численным моделированием значения коэффициентов концентрации напряжений ( $K$ ) для полос с двумя продольно расположенными отверстиями (при различных значениях рассматриваемых параметров). Графическая иллюстрация данных таблицы 2.4 представлена на рисунке 2.14.

Таблица 2.4 – Случай полос с двумя продольно расположенными отверстиями. Значения коэффициентов концентрации напряжений для полос, выполненных из композитов с номерами 1,2,3,4,5,6, при различных значениях отношений  $W/D$  и  $b/D$

$W/D$	$b/D$	1	2	3	4	5	6
6	1,5	3,92	3,51	3,30	5,75	4,64	2,86
	2	4,00	3,60	3,38	5,82	4,73	2,93
	2,5	4,10	3,68	3,46	5,96	4,84	2,99
	19/6	4,21	3,78	3,55	6,04	4,94	3,07
3	1,5	4,28	3,87	3,63	6,17	5,05	3,18
	2	4,39	4	3,74	6,27	5,18	3,30
	2,5	4,52	4,13	3,86	6,44	5,33	3,42
	19/6	4,67	4,26	4	6,59	5,48	3,53
2	1,5	5,10	4,76	4,45	7,10	5,99	4,05
	2	5,34	4,98	4,69	7,35	6,22	4,27
	2,5	5,55	5,15	4,87	7,57	6,42	4,41
	19/6	5,75	5,28	5,00	7,84	6,62	4,47



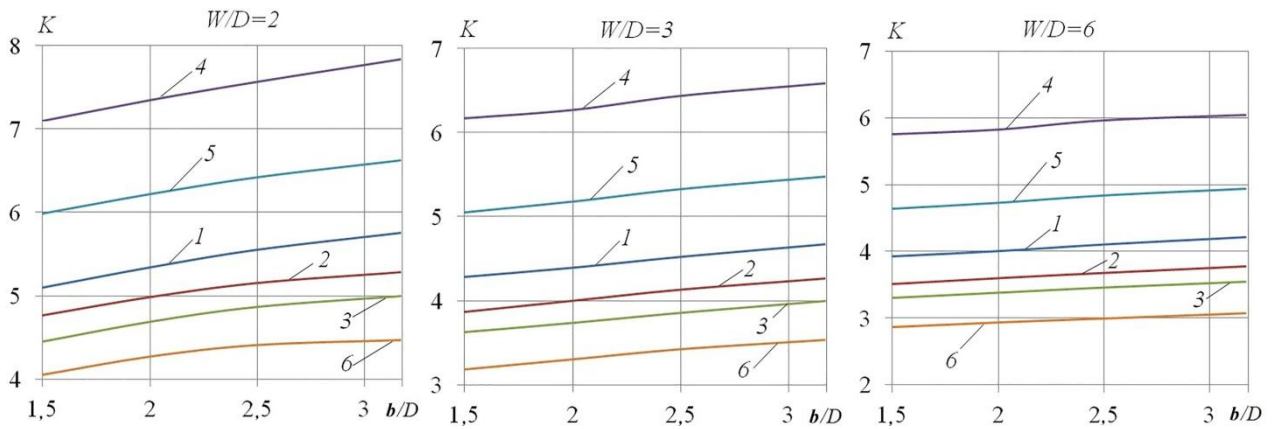


Рисунок 2.14 – Графики зависимостей коэффициентов концентрации напряжений от параметра  $b/D$  для композитов 1,2,3,4,5,6, построенные на основе данных таблицы 2.4

Сравнивая (в порядке следования номеров 6, 3, 2, 1, 5, 4 композитов) данные таблицы 2.4 (при  $W/D=6$  и  $b/D=1,5$ ) с соответствующими данными таблицы 2.3, приходим к выводу, что в принятой к рассмотрению ситуации, характеризуемой наличием двух продольно расположенных (достаточно близко друг к другу) отверстий в широкой полосе, значение коэффициента  $K$  снижается по сравнению с ситуацией одного отверстия соответственно на 12%, 14%, 14%, 16%, 17%, 19%. Проводя такое же сравнение с принятием  $b/D=19/6$  (существенно удалённые друг от друга отверстия), приходим к набору результатов (5%, 7%, 8%, 10%, 12%, 15%), указывающему на заметное уменьшение эффекта, наблюдаемого в случае  $b/D=1,5$ .

Как уже отмечалось, композит с номером 6 по своим упругим характеристикам близок к изотропному материалу. Обращаем внимание на то, что для случая растяжения бесконечной изотропной пластины с двумя одинаковыми продольно расположенными круговыми отверстиями имеется аналитическое решение, полученное А.С. Космодамианским. Приведённые в книге [54] числовые результаты этого решения показывают, что при  $b/D=1,25$  значение коэффициента концентрации напряжений в таком случае на 14% ниже, чем в случае растяжения полосы с одним отверстием. Как видно, этот результат хорошо согласуется с полученным численным моделированием показателем (12%) для композита с

номером 6 при  $W/D=6$  и  $b/D=1,5$ .

Продолжая начатый выше сравнительный анализ данных таблиц 2.3 и 2.4, отмечаем, что обсуждаемый эффект снижения значений коэффициента концентрации напряжений при ( $W/D=3, b/D=1,5$ ) и ( $W/D=2, b/D=1,5$ ) описывается числовыми наборами вида (11%, 13%, 14%, 15%, 16%, 18%) и (10%, 12%, 12%, 14%, 15%, 17%). С увеличением отношения  $b/D$  до значения 19/6 обсуждаемый эффект у композитных образцов с номерами 6, 3, 2, 1 (при  $W/D=3$  и  $W/D=2$ ) практически исчезает. Что касается композитов с номерами 5, 4, то для них этот эффект при ( $W/D=3, b/D=19/6$ ) и ( $W/D=2, b/D=19/6$ ) описывается числовыми наборами вида (10%, 13%) и (6%, 9%).

В столбцах таблицы 2.5 приведены полученные численным моделированием значения коэффициентов концентрации напряжений  $K$  (в точках  $A$  и  $B$ ) для полос с двумя поперечно расположенными отверстиями применительно к случаю  $W/D=6$ . Указанные числовые данные соответствуют номерам 1,2,3,4,5,6 композитов и различным значениям отношения  $c/D$ . Графическая иллюстрация данных таблицы 2.5 представлена на рисунке 2.15. Видно, что для всех рассматриваемых композитов в случае достаточно близко расположенных по отношению друг к другу отверстий (при  $c/D=1,5$ ) наибольшее значение  $K$  имеет место в точке  $B$ .

Таблица 2.5 – Случай полос с двумя поперечно расположенными отверстиями. Значения коэффициентов концентрации напряжений в точках  $A$  и  $B$  полос, выполненных из композитов с номерами 1,2,3,4,5,6, при  $W/D=6$  и различных значениях отношения  $c/D$ .

$W/D$	$c/D$	1		2		3		4		5		6	
		$A$	$B$	$A$	$B$	$A$	$B$	$A$	$B$	$A$	$B$	$A$	$B$
6	1,5	5,03	5,14	4,47	4,66	4,14	4,22	7,65	7,94	6,08	6,40	3,54	3,63
	2	4,92	4,86	4,37	4,29	4,05	3,97	7,49	7,48	5,95	5,90	3,46	3,35
	2,5	4,91	4,82	4,37	4,23	4,05	3,95	7,46	7,38	5,94	5,79	3,46	3,33
	19/6	4,99	4,83	4,47	4,25	4,13	3,96	7,50	7,37	6,03	5,77	3,55	3,35
	4	5,38	4,92	4,88	4,34	4,51	4,04	7,96	7,50	6,49	5,89	3,93	3,42

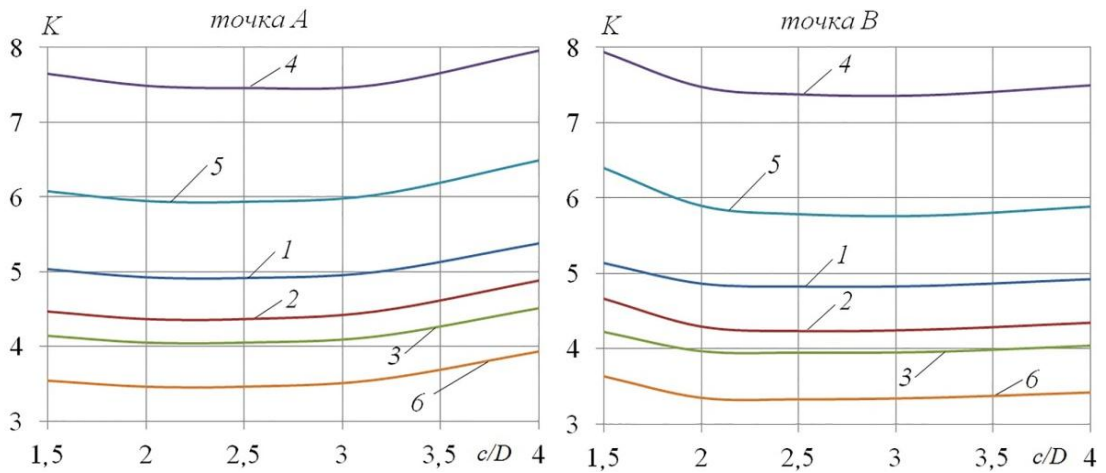


Рисунок 2.15 – Графики зависимостей коэффициентов концентрации напряжений от параметра  $c/D$  для композитов 1,2,3,4,5,6, построенные на основе данных таблицы 2.5

С увеличением расстояния между отверстиями (при  $c/D > 1,5$ ) наибольшее значение  $K$  реализуется в точке А, близкой к свободной продольной кромке растягиваемой полосы. Видно также, что для всех рассматриваемых вариантов композитов при увеличении  $c/D$  в диапазоне от 1,5 до 4 значение коэффициента концентрации напряжений в обсуждаемом случае полосы с двумя отверстиями сначала уменьшается, а затем возрастает. При этом оптимальный (в обсуждаемом случае) вариант взаимного расположения отверстий, обеспечивающий минимальное значение коэффициента концентрации напряжений для всех из рассматриваемого набора композитов, реализуется примерно при  $c/D = 2,5$ .

В дополнение к проведённому анализу рассмотрим ещё одну оптимизационную задачу, решаемую с помощью данных, представленных в таблицах 2.3 и 2.5. Предположим, что возникает необходимость заменить вариант композитной полосы с одним отверстием, диаметр которого сопоставим с шириной полосы, на вариант с двумя поперечно расположенными отверстиями несколько меньшего диаметра. Сравнивая данные таблицы 2.3, относящиеся к случаям  $W/D = 4$  и  $W/D = 3$ , с данными таблицы 2.5 (при  $W/D = 6$ ), мы видим, что замена варианта полосы с одним отверстием, имеющим диаметр  $D = W/4$ , на вариант с двумя поперечно расположенными отверстиями, имеющими диаметр

$D=W/6$ , не эффективна, поскольку ведёт к повышению уровня напряжений в растягиваемой полосе. В то же время, переход от варианта с одним отверстием диаметром  $D=W/3$  к варианту с двумя поперечно расположенными отверстиями диаметром  $D=W/6$  (при выборе расстояния между их центрами в диапазоне  $2D < c < 19D/6$ ) приводит к снижению напряжений в полосе. И этот эффект имеет место для всех из рассматриваемых шести типов композитов.

По материалам, представленным в настоящем подразделе, можно сделать следующие выводы.

На основе ВР метода (с прямоугольной сеткой) и КЭ метода (комплекс ABAQUS, оболочечный элемент S4) построены вычислительные модели, предназначенные для решения задачи о напряжённом состоянии растягиваемой композитной полосы с одним и двумя одинаковыми круговыми отверстиями, расположенными либо вдоль, либо поперёк направления действия нагрузки. Достоверность полученных численных решений подтверждена фактом практического совпадения результатов расчётов с применением двух указанных моделей. С использованием этих моделей проведены исследования по влиянию расположения отверстий в полосе на величину коэффициента ( $K$ ) концентрации напряжений в ней (применительно к трём вариантам слоистых стеклопластиков и трём вариантам слоистых углепластиков с существенно различающимися значениями параметров упругости). В процессе исследований варьированию подвергались параметры  $W/D$ ,  $b/D$ ,  $c/D$  (где  $W$  – ширина полосы,  $D$  – диаметр отверстия,  $b$  и  $c$  – расстояния между центрами двух отверстий при их продольном и поперечном расположении в полосе).

Применительно к случаю одного центрального отверстия в полосе установлено, что при  $W/D=6$  для всех из указанных шести вариантов композитов вычисления коэффициентов  $K$  (с погрешностью в пределах 3%) можно проводить по формуле С.Г. Лехницкого для бесконечной ортотропной пластины. Для каждого из данных композитов установлен вид зависимости коэффициента  $K$  от параметра  $W/D$ . Эти зависимости показывают, что при  $W/D=2$  имеют место

существенные (в диапазоне 23% - 43%) отклонения полученных расчётом значений коэффициента  $K$  от того, что даёт указанная формула.

При рассмотрении случая двух продольно расположенных отверстий в полосе установлен вид зависимостей коэффициента  $K$  от параметров  $W/D$  и  $b/D$  для каждого из заданного набора композитов. Проведённым анализом, в частности, установлено, что при  $W/D=6$  и  $b/D=1,5$  (широкая полоса, близко расположенные отверстия) значение коэффициента  $K$  снижается по сравнению с ситуацией одного отверстия на 12% - 19% в зависимости от упругих характеристик композитного материала полосы. Продемонстрировано также существенное уменьшение этого эффекта в связи с уменьшением параметра  $W/D$  и увеличением параметра  $b/D$ .

При рассмотрении случая двух поперечно расположенных отверстий в полосе установлен вид зависимостей коэффициента  $K$  от параметра  $c/D$  (при фиксированном значении  $W/D=6$ ) для каждого из заданного набора композитов. Проведённым анализом установлен вариант взаимного расположения отверстий, обеспечивающий минимальное значение коэффициента концентрации напряжений для всех из рассматриваемого набора композитов. Установлено также, что переход от варианта полосы с одним отверстием диаметром  $D=W/3$  к варианту с двумя поперечно расположенными отверстиями диаметром  $D=W/6$  (при выборе расстояния между их центрами в диапазоне  $2D < c < 19D/6$ ) приводит к снижению напряжений в полосе.

### **ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТЯГИВАЕМЫХ ТОЛСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ОСЛАБЛЕННЫХ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ**

Здесь будет представлено описание ВР вычислительной модели (реализованной на языке Fortran) для решения в трёхмерной постановке задачи о растяжении толстой композитной ортотропной пластины с круговым отверстием, а также описание основанной на ЧИ методе вычислительной модели применительно к случаю, когда эта пластина может рассматриваться как тонкая. Будет дана также краткая характеристика объёмного элемента программного комплекса ABAQUS, используемого при построении КЭ модели, альтернативной указанной ВР модели. Будут также представлены результаты исследований напряжённого состояния вокруг отверстия в растягиваемых ортотропных композитных пластинах, проводимых в рамках сформулированной выше методики с использованием двух альтернативных вычислительных моделей. Отмеченные результаты описаны в публикациях [19, 21]

#### **3.1 Вычислительные модели для исследования напряжённого состояния растягиваемых толстых композитных ортотропных пластин с круговым отверстием**

На рисунке 3.1 представлена расчётная схема растягиваемой вдоль оси  $Ox$  толстой круглой пластины (радиусом  $b$  и толщиной  $h$ ) с центральным круговым отверстием (радиусом  $a$ ), на основе которой (с выбором  $b=10a$ ) далее будут строиться различные вычислительные модели, способные обеспечить получение (с подтверждённой достоверностью) численного решения рассматриваемой задачи о концентрации напряжений. В качестве начала координат прямоугольной системы  $Oxuz$ , принята центральная точка  $O$  пластины. Модуль вектора напряжения, приложенного к боковой поверхности пластины и направленного параллельно оси  $Ox$ , обозначен здесь как  $q$ . Помимо прямоугольной системы  $Oxuz$

будем использовать также цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ . Введём также в рассмотрение прямоугольную область, образуемую сечением пластины плоскостью  $Oxz$ . Половину этой области (при  $z > 0$ ) будем обозначать как  $S$ .

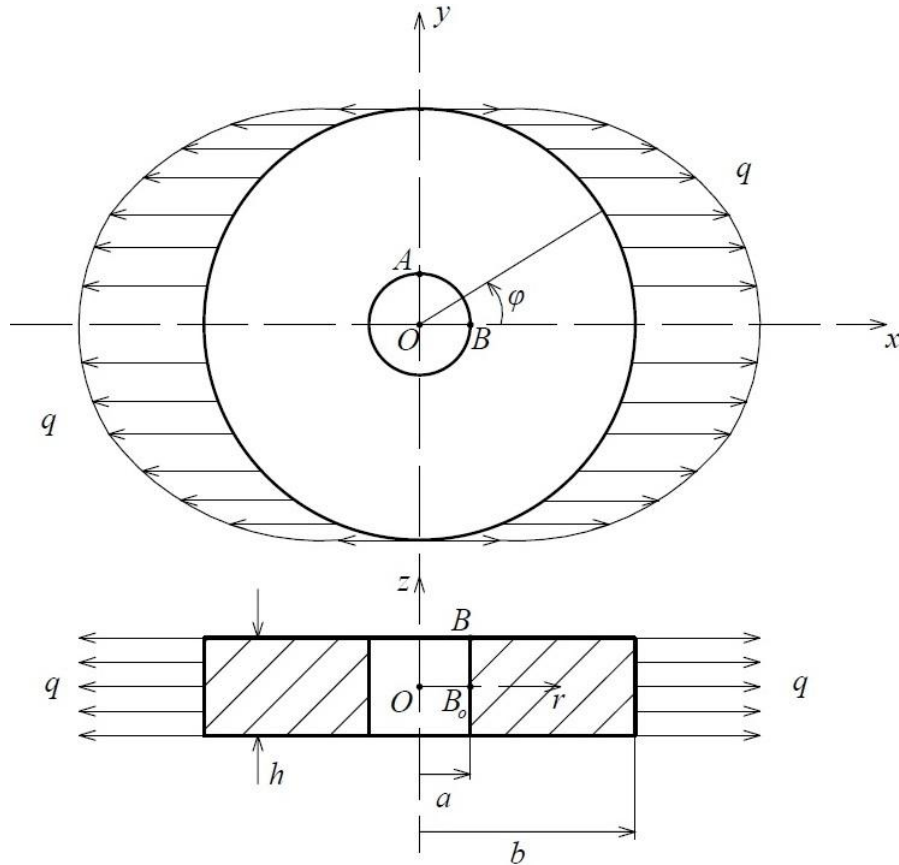


Рисунок 3.1 – Расчётная схема растягиваемой пластины

Параметр  $q$  представляем функцией вида

$$q = q_0 \cos \varphi, \quad (3.1)$$

где  $q_0$  – заданная постоянная величина. Для радиальной и окружной компонент введённого в рассмотрение вектора напряжения при этом имеем

$$\begin{aligned} q_r &= q \cos \varphi = q_0 \cos^2 \varphi = 0,5q_0 + 0,5q_0 \cos 2\varphi = 0,5q_0 \sum_{n=0,2} \cos n\varphi, \\ q_\varphi &= -q \sin \varphi = -0,5q_0 \sin 2\varphi = -0,5q_0 \sum_{n=0,2} \sin n\varphi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Постановка задачи теории упругости для рассматриваемой пластины (как ортотропного тела с цилиндрической анизотропией) в цилиндрической системе координат выглядит следующим образом (см. [39]).

## 1. Геометрические соотношения.

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}, \gamma_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

2. Физические соотношения (соотношения упругости применительно к случаю ортотропии в осях  $r, \varphi, z$ ).

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E_1} \sigma_r - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_\varphi - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_z, \quad (E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}), \\ \varepsilon_\varphi &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_r + \frac{1}{E_2} \sigma_\varphi - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_z, \quad (E_1 \nu_{31} = E_3 \nu_{13}), \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_r - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_\varphi + \frac{1}{E_3} \sigma_z, \quad (E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}), \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_{r\varphi}, \quad \gamma_{rz} = \frac{1}{G_{13}} \sigma_{rz}, \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{1}{G_{23}} \sigma_{\varphi z}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Здесь индексы 1,2,3 соответствуют параметрам  $r, \varphi, z$ . В случае изотропной пластины вместо входящих в запись (3.4) параметров упругости, помеченных нижними индексами, следует использовать заменяющие их характеристики  $E, G, \nu$ , имея при этом в виду, что  $G=0,5E/(1+\nu)$ .

## 3. Уравнения равновесия.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= 0.\end{aligned}\quad (3.5)$$

## 4. Граничные условия.

Исходя из наличия в рассматриваемой расчётной схеме пластины плоскости симметрии ( $z=0$ ), задачу расчёта будем формулировать только для верхней половины пластины (при  $0 \leq z \leq 0,5h$ ). На цилиндрических и плоских частях поверхности моделируемой половины пластины принимаем:



$$\begin{aligned} \sigma_r = q_r, \quad \sigma_{r\varphi} = q_\varphi, \quad \sigma_{rz} = 0 \quad (\text{при } r = b); \quad \sigma_r = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0 \quad (\text{при } r = a); \\ u_z = 0, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = 0 \quad (\text{при } z = 0); \quad \sigma_z = \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = 0 \quad (\text{при } z = 0,5h). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Учитывая, что в поставленной таким образом задаче приложенные к пластине нагрузки, согласно (3.2), представлены в виде отрезков рядов Фурье по координате  $\varphi$ , в аналогичном виде будем представлять и искомые параметры напряженно-деформированного состояния. Итак, строим решение в виде

$$X = \sum_{n=0,2} X_{(n)} \cos n\varphi, \quad Y = \sum_{n=0,2} Y_{(n)} \sin n\varphi, \quad (3.7)$$

где

$$X = \{u_r, u_z, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \gamma_{rz}, \sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \sigma_{rz}\}, \quad Y = \{u_\varphi, \gamma_{r\varphi}, \gamma_{\varphi z}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi z}\}. \quad (3.8)$$

Подставляя разложения (3.2), (3.7), (3.8) в равенства (3.3) - (3.6), приходим к соответствующим соотношениям для амплитудных значений параметров напряженно-деформированного состояния (с индексом  $n$ ;  $n=0, 2$ ) рассматриваемой пластины. Эти соотношения содержат частные производные лишь по координатам  $(r, z)$  и применительно к равенствам (3.3), (3.4) представимы в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{n}{r} u_\varphi + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \gamma_{r\varphi} = -\frac{n}{r} u_r + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \\ \gamma_{\varphi z} = -\frac{n}{r} u_z + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{n}{r} \sigma_{r\varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} - \frac{n}{r} \sigma_\varphi + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{n}{r} \sigma_{\varphi z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

(Обращаем внимание на то, что индекс « $n$ » у амплитудных значений соответствующих параметров напряженно-деформированного состояния здесь и далее для простоты опущен). Физические соотношения для указанных амплитудных значений параметров сохраняют вид (3.4). Сохраняется для

амплитудных факторов и вид равенств, входящих в запись граничных условий (3.6), за исключением двух равенств, которые предстают в виде

$$\sigma_r = 0,5q_0 \quad (\text{при } r=b), \quad \sigma_{r\varphi} = -0,25nq_0 \quad (\text{при } r=b). \quad (3.11)$$

Покажем теперь, что уравнения равновесия (3.10) и соответствующие граничные условия в терминах амплитуд напряжений могут быть получены из вариационного уравнения вида

$$\begin{aligned} \iint_S (\sigma_r \delta\varepsilon_r + \sigma_\varphi \delta\varepsilon_\varphi + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \sigma_{r\varphi} \delta\gamma_{r\varphi} + \sigma_{rz} \delta\gamma_{rz} + \sigma_{\varphi z} \delta\gamma_{\varphi z}) r dr dz = \\ = b \int_0^{0,5h} (0,5q_0 \delta u_r - 0,25nq_0 \delta u_\varphi) dz. \end{aligned} \quad (3.12)$$

представляющего собой уравнение принципа возможных перемещений в терминах амплитуд соответствующих параметров. (Здесь имеется в виду, что параметры  $\delta u_r, \delta u_\varphi$  в правой части равенства (3.12) относятся к точкам пластины с координатами  $r=b$ ).

Используя в (3.12) связи (3.9), получим

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5h} \int_a^b (r\sigma_r \frac{\partial \delta u_r}{\partial r} + n\sigma_\varphi \delta u_\varphi + \sigma_\varphi \delta u_r + r\sigma_z \frac{\partial \delta u_z}{\partial z} - n\sigma_{r\varphi} \delta u_r + \\ + r\sigma_{r\varphi} \frac{\partial \delta u_\varphi}{\partial r} - \sigma_{r\varphi} \delta u_\varphi + r\sigma_{rz} \frac{\partial \delta u_z}{\partial r} + r\sigma_{rz} \frac{\partial \delta u_r}{\partial z} - n\sigma_{\varphi z} \delta u_z + \\ + r\sigma_{\varphi z} \frac{\partial \delta u_\varphi}{\partial z}) dr dz = b \int_0^{0,5h} (0,5q_0 \delta u_r - 0,25nq_0 \delta u_\varphi) dz. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Далее проводим преобразование соотношения (3.13) с использованием процедуры интегрирования по частям, получая вариационное уравнение

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5h} (r\sigma_r \delta u_r|_a^b) dz + \int_a^b (r\sigma_z \delta u_z|_a^{0,5h}) dr + \int_0^{0,5h} (r\sigma_{r\varphi} \delta u_\varphi|_a^b) dz + \\ \int_0^{0,5h} (r\sigma_{rz} \delta u_z|_a^b) dz + \int_a^b (r\sigma_{rz} \delta u_r|_a^{0,5h}) dr + \int_a^b (r\sigma_{\varphi z} \delta u_\varphi|_a^{0,5h}) dr + \\ + \int_0^{0,5h} \int_a^b [-\frac{\partial(\sigma_r r)}{\partial r} \delta u_r + n\sigma_\varphi \delta u_\varphi + \sigma_\varphi \delta u_r - r \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \delta u_z - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -n\sigma_{r\varphi}\delta u_r - \frac{\partial(\sigma_{r\varphi}r)}{\partial r}\delta u_\varphi - \sigma_{r\varphi}\delta u_\varphi - \frac{\partial(\sigma_{rz}r)}{\partial r}\delta u_z - \\
& -r\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}\delta u_r - n\sigma_{\varphi z}\delta u_z - r\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial z}\delta u_\varphi]drdz = \\
& = b \int_0^{0,5h} (0,5q_0\delta u_r - 0,25nq_0\delta u_\varphi)dz.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Приравнивая соответствующие факторы, стоящие при одноименных (ненулевых) вариациях перемещений в левой и правой частях этого равенства, приходим к уравнениям равновесия вида

$$\begin{aligned}
& -r\frac{d\sigma_{rz}}{dz} - r\frac{d\sigma_r}{dr} - \sigma_r + \sigma_\varphi - n\sigma_{r\varphi} = 0, \\
& n\sigma_\varphi - r\frac{d\sigma_{r\varphi}}{dr} - \sigma_{r\varphi} - \sigma_{r\varphi} - r\frac{d\sigma_{\varphi z}}{dz} = 0, \\
& -r\frac{d\sigma_z}{dz} - r\frac{d\sigma_{rz}}{dr} - \sigma_{rz} - n\sigma_{\varphi z} = 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

и граничным условиям в напряжениях, которые соответствуют равенствам (3.6), (3.11). Как видно, полученные равенства (3.15) представляют собой другую форму записи уравнений (3.10). Таким образом, заявленное утверждение, касающееся вариационного уравнения (3.12), доказано.

Итак, констатируем, что решение исходной трёхмерной задачи для рассматриваемой толстой с круговым отверстием пластины сводится к решению двух (при  $n=0, 2$ ) двумерных краевых задач для прямоугольной области  $S$ , определяемой неравенствами  $\{a \leq r \leq b; 0 \leq z \leq 0,5h\}$ . Численное решение этих задач будем осуществлять, используя ВР процедуру, аналогично тому, как это было реализовано в предыдущем разделе применительно к ситуации растягиваемой тонкой пластины.

Разбиваем лежащие на осях  $Or$  и  $Oz$  стороны области  $S$  соответственно на  $M$  и  $N$  малых отрезков, и через концы этих отрезков проводим прямые, параллельные соответствующим координатным осям. Тем самым осуществляем разбиение области  $S$  на  $M \times N$  прямоугольных ячеек  $S^{(i,j)} (i=1,2,\dots,M; j=1,2,\dots,N)$ . Учитывая принятую малость размеров участков разбиения рассматриваемой области, вместо равенства (3.12) будем использовать его приближенный аналог вида

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [\tilde{\sigma}_r^{(i,j)} \delta \tilde{\varepsilon}_r^{(i,j)} + \tilde{\sigma}_\varphi^{(i,j)} \delta \tilde{\varepsilon}_\varphi^{(i,j)} + \tilde{\sigma}_z^{(i,j)} \delta \tilde{\varepsilon}_z^{(i,j)} + \\
& + \tilde{\sigma}_{r\varphi}^{(i,j)} \delta \tilde{\gamma}_{r\varphi}^{(i,j)} + \tilde{\sigma}_{rz}^{(i,j)} \delta \tilde{\gamma}_{rz}^{(i,j)} + \tilde{\sigma}_{\varphi z}^{(i,j)} \delta \tilde{\gamma}_{\varphi z}^{(i,j)}] \tilde{r}^{(i)} l_r^{(i)} l_z^{(j)} = \\
& = b \sum_{j=1}^N [0,5 q_0 l_z^{(j)} \delta \tilde{u}_r^{(j)} - 0,25 n q_0 l_z^{(j)} \delta \tilde{u}_\varphi^{(j)}].
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Здесь «волной» отмечены величины, определяемые в серединах соответствующих элементарных участков интегрирования. Величины  $l_r^{(i)} = r_{i+1} - r_i$  и  $l_z^{(j)} = z_{j+1} - z_j$  ( $i=1,2,\dots,M; j=1,2,\dots,N$ ) представляют собой длины соответствующих элементарных отрезков разбиений вдоль координатных осей, а  $\tilde{r}^{(i)} = (r_{i+1} + r_i)/2$ .

Далее используем обозначения  $u_r^{i,j}$ ,  $u_z^{i,j}$ ,  $u_\varphi^{i,j}$  для значений перемещений в узловых точках с координатами  $r_i$ ,  $z_j$  ( $i=1,2,\dots,M+1; j=1,2,\dots,N+1$ ) рассматриваемой прямоугольной сетки. Входящие в вариационное уравнение (3.16) деформации, относящиеся к середине ячейки  $S^{(i,j)}$ , определяем на основе соотношений (3.9), вычисляя при этом соответствующие частные производные с применением центрально-разностных схем. В результате имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_r^{(i,j)} &= 0,5(u_r^{i+1,j} + u_r^{i+1,j+1} - u_r^{i,j} - u_r^{i,j+1}) / l_r^{(i)}, \\
\tilde{\varepsilon}_z^{(i,j)} &= 0,5(u_z^{i,j+1} + u_z^{i+1,j+1} - u_z^{i,j} - u_z^{i+1,j}) / l_z^{(j)}, \\
\tilde{\gamma}_{rz}^{(i,j)} &= 0,5(u_r^{i,j+1} + u_r^{i+1,j+1} - u_r^{i,j} - u_r^{i+1,j}) / l_z^{(j)} + \\
& + 0,5(u_z^{i+1,j} + u_z^{i+1,j+1} - u_z^{i,j} - u_z^{i,j+1}) / l_r^{(i)}, \\
\tilde{\varepsilon}_\varphi^{(i,j)} &= n \tilde{u}_\varphi^{i,j} / \tilde{r}^{(i)} + \tilde{u}_r^{i,j} / \tilde{r}^{(i)}, \\
\tilde{\gamma}_{r\varphi}^{(i,j)} &= 0,5(u_\varphi^{i+1,j} + u_\varphi^{i+1,j+1} - u_\varphi^{i,j} - u_\varphi^{i,j+1}) / l_r^{(i)} - n \tilde{u}_r^{i,j} / \tilde{r}^{(i)} - \tilde{u}_\varphi^{i,j} / \tilde{r}^{(i)}, \\
\tilde{\gamma}_{\varphi z}^{(i,j)} &= 0,5(u_\varphi^{i,j+1} + u_\varphi^{i+1,j+1} - u_\varphi^{i,j} - u_\varphi^{i+1,j}) / l_z^{(j)} - n \tilde{u}_z^{i,j} / \tilde{r}^{(i)}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Вычисление перемещений в серединах прямоугольных ячеек проводим по схеме

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r^{(i,j)} &= 0,25(u_r^{i,j} + u_r^{i+1,j} + u_r^{i,j+1} + u_r^{i+1,j+1}), \\
\tilde{u}_z^{(i,j)} &= 0,25(u_z^{i,j} + u_z^{i+1,j} + u_z^{i,j+1} + u_z^{i+1,j+1}), \\
\tilde{u}_\varphi^{(i,j)} &= 0,25(u_\varphi^{i,j} + u_\varphi^{i+1,j} + u_\varphi^{i,j+1} + u_\varphi^{i+1,j+1}),
\end{aligned} \tag{3.18}$$

а перемещений  $\tilde{u}_r^{(j)}$ ,  $\tilde{u}_\varphi^{(j)}$  в равенстве (3.16) - по схеме

$$\tilde{u}_r^{(j)} = 0,5(u_r^{M+1,j} + u_r^{M+1,j+1}), \quad \tilde{u}_\varphi^{(j)} = 0,5(u_\varphi^{M+1,j} + u_\varphi^{M+1,j+1}). \tag{3.19}$$

Переходя в вариационном уравнении (3.16) от напряжений к деформациям с использованием связей (3.4), а затем с использованием связей (3.17)-(3.19) к узловым перемещениям, окончательно приходим к формулировке вариационного уравнения (3.16) в терминах узловых перемещений принятой прямоугольной сетки. Осуществляем коррекцию этого уравнения, учитывая заданные граничные условия в перемещениях:

$$u_z^{i,1} = 0 \quad (i=1,2,\dots,M+1); \quad u_\varphi^{1,j} = 0 \quad (n=0; \quad j=1,2,\dots,N+1). \quad (3.20)$$

Приравнявая коэффициенты при вариациях неизвестных узловых перемещений в левой и правой части сформированного вариационного уравнения, получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых перемещений. Решаем эту систему методом Гаусса, а затем определяем относящиеся к заданному номеру  $n$  амплитудные значения параметров напряженно-деформированного состояния в средних точках ячеек расчётной модели с использованием связей (3.18), (3.17), (3.4). Окончательное решение задачи о напряжённом состоянии рассматриваемой толстой пластины получаем путём суммирования (согласно схеме (3.7)-(3.8)) результатов решений, относящихся к гармоникам с  $n=0$  и  $n=2$ . Описанный алгоритм реализован в виде вычислительной программы на языке Fortran.

Кроме описанной ВР вычислительной модели, ориентированной на толстую пластину, строим также вычислительную модель, основанную на методе ЧИ, применительно к случаю тонкой пластины (в рамках плоской постановки рассматриваемой задачи). В таком случае на основе соотношений (3.9), (3.10), (3.4) для амплитудных значений параметров напряженно-деформированного состояния (при  $n=0, 2$ ) получаем систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{n}{r}u_\varphi + \frac{u_r}{r}, \quad \gamma_{r\varphi} = -\frac{n}{r}u_r + \frac{du_\varphi}{dr} - \frac{u_\varphi}{r}, \\ \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{n}{r}\sigma_{r\varphi} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) &= 0, \quad \frac{d\sigma_{r\varphi}}{dr} - \frac{n}{r}\sigma_\varphi + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} = 0, \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E_1}\sigma_r - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_\varphi, \quad \varepsilon_\varphi = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_r + \frac{1}{E_2}\sigma_\varphi, \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{G_{12}}\sigma_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Соотношения (3.21) сводятся к разрешающей системе из четырёх линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно параметров  $y_1 = \sigma_r$ ,  $y_2 = \sigma_{r\varphi}$ ,  $y_3 = u_r$ ,  $y_4 = u_\varphi$ . Эту систему запишем в виде

$$\frac{dy_i}{dr} = f_i(r, n, y_1, y_2, y_3, y_4) \quad (i=1,2,3,4). \quad (3.22)$$

Здесь принято

$$\begin{aligned} f_1 &= -ny_2 / r - (y_1 - \sigma_\varphi) / r, \\ f_2 &= -n\sigma_\varphi / r - 2y_2 / r, \\ f_3 &= \varepsilon_r, \quad f_4 = \gamma_{r\varphi} + ny_3 / r + y_4 / r, \\ \sigma_\varphi &= E_2(\varepsilon_\varphi + \nu_{12}y_1 / E_1), \quad \varepsilon_\varphi = (ny_4 + y_3) / r, \\ \varepsilon_r &= y_1 / E_1 + \nu_{21}\sigma_\varphi / E_2, \quad \gamma_{r\varphi} = y_2 / G_{12}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Искомое решение системы (3.22) должно удовлетворять граничным условиям вида:

$$\begin{aligned} \text{при } r=a: \quad & y_1=0, \quad ny_2 + (n-2)y_4 = 0; \\ \text{при } r=b: \quad & y_1 = 0,5q_0, \quad y_2 = -0,25nq_0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Численное решение поставленной таким образом краевой задачи (3.22)-(3.24) при  $n=0$  и  $n=2$  строим с использованием изложенной в книге [30] процедуры ортогональной прогонки, основанной на методе С.К. Годунова [15], с численным интегрированием по методу Кутты-Мерсона [37]. Окончательное решение задачи о напряжённом состоянии рассматриваемой тонкой пластины получаем путём суммирования (согласно схеме (3.7)-(3.8)) результатов решений, относящихся к гармоникам с  $n=0$  и  $n=2$ . Соответствующая вычислительная программа реализована на языке Fortran.

В качестве альтернативных для описанных ВР и ЧИ расчётных моделей строим в среде программного комплекса Abaqus две КЭ модели. Это трёхмерная модель (КЭ-1) на основе объёмного двадцати узлового элемента C3D20 и плоская модель (КЭ-2) на основе четырёхузлового элемента S4. (Элемент C3D20 представляет собой объёмный двадцати узловой шестигранный изопараметрический с квадратичной функцией формы элемент [67], позволяющий строить вычислительные модели применительно к упругим ортотропным телам.)

С учётом того, что в рассматриваемой расчётной схеме пластины плоскости  $Oxz$  и  $Oyz$  являются плоскостями симметрии, КЭ моделирование осуществляем лишь для части пластины в границах  $0 \leq \varphi \leq 0,5\pi$ . При этом для выделенного таким образом объекта моделирования формулируем соответствующие граничные условия, отражающие указанную симметрию. Для обеспечения необходимой точности получаемых результатов КЭ моделирования размеры элементов вблизи отверстия принимаем порядка  $0,02a$ .

Далее при проведении анализа расчётных результатов будет осуществляться ссылка на точки  $A$ ,  $A_0$ ,  $B$ ,  $B_0$  (см. рисунке 3.1) имеющие, соответственно, координаты  $(0, a, h/2)$ ,  $(0, a, 0)$ ,  $(a, 0, h/2)$ ,  $(a, 0, 0)$  в осях  $Oxyz$ . Отметим, что наибольшие по величине напряжения (растягивающие)  $\sigma_\varphi$  в рассматриваемом расчётном случае реализуются на отрезке  $[A_0, A]$ , принадлежащем цилиндрической поверхности, ограничивающей отверстие. В точках отрезка  $[B, B_0]$  реализуются напряжения  $\sigma_\varphi$  (сжимающие) меньшей величины.

### **3.2. Численное моделирование растягиваемых толстых изотропных и ортотропных (на основе стеклоткани) композитных пластин с круговым отверстием**

На рисунке 3.2 представлены (применительно к ситуации изотропной пластины с  $\nu=0,3$ ) результаты численного решения рассматриваемой задачи в виде графиков распределения напряжений  $\sigma_\varphi$  вдоль отрезка  $[A_0, A]$  при различных значениях параметра  $h/2a$ . Здесь кривые, изображаемые точками различной конфигурации, соответствуют результатам КЭ-1 моделирования, а кривые сплошного начертания – результатам ВР моделирования. Прямая, изображённая (квадратными) точками, соответствует результату ЧИ моделирования применительно к случаю плоской постановки данной задачи. Результаты, полученные при  $h/2a = 2; 1; 0,5; 0,25; 0,125$ , отмечены здесь цифрами 1, 2, 3, 4, 5,

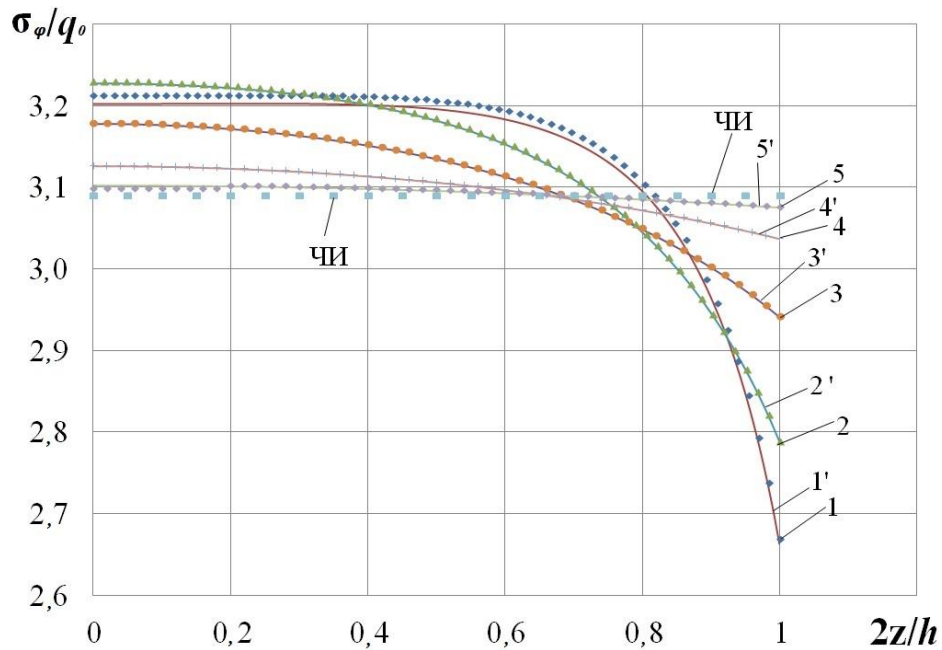


Рисунок 3.2 – Распределение напряжений  $\sigma_\varphi$  по отрезку  $[A_0, A]$  в случае изотропной пластины

соответственно. При этом цифры со штрихами относятся к результатам ВР моделирования. Практическое совпадение соответствующих результатов КЭ-1 и ВР моделирования (с одинаковыми цифровыми обозначениями) подтверждает достоверность полученных численных решений данной задачи. Видно, что в случае достаточно тонкой пластины (при  $h/2a=0,125$ ) указанные объёмные модели приводят к результатам, близким к тому, что даёт плоская расчётная модель. По представленным результатам, эффект спада напряжений  $\sigma_\varphi$  при переходе от точки  $A_0$  к точке  $A$  применительно к вариантам  $h/2a=2; 1; 0,5; 0,25$  в процентном отношении оценивается величинами 17%; 14%; 7,4%; 2,6%, соответственно. Аналогичные показатели для случая  $\nu=0,33$  (по данным работы [79]) оцениваются величинами вида: 19%; 15%; 8%; 3,2%, а для случая  $\nu=0,3$  (по данным работы [112]) - величинами вида: 16%; 14%; 7,5%. Таким образом, отмечаем хорошее согласование представленных на рисунке 3.2 результатов с известными решениями для растягиваемой толстой изотропной пластины с круговым отверстием.

Переходим теперь к рассмотрению результатов численного решения поставленной задачи применительно к ситуации ортотропной пластины. В



рассмотрение включаем случай ортотропии в осях  $r, \varphi, z$ , и случай ортотропии в осях  $x, y, z$ . В таблице 3.1 представлены используемые при проведении расчётов варианты ( $v.1$ ,  $v.2$ ,  $v.3$ ,  $v.4$ ) значений параметров упругости исследуемой пластины. (Это типичные значения для стеклопластиков на тканевой основе). Здесь индексы 1,2,3 соответствуют либо осям  $r, \varphi, z$ , либо осям  $x, y, z$ . Значение модуля  $E_3$  в этих вариантах существенно меньше (как это имеет место на практике) значений модулей  $E_1$  и  $E_2$ . Введены также варианты  $v.1^*$ ,  $v.2^*$ ,  $v.3^*$ ,  $v.4^*$  (с увеличенным значением модуля  $E_3$ ) для оценки влияния этого параметра на результаты расчётов.

Таблица 3.1 – Принимаемые варианты значений параметров упругости пластины

Вар.№	$E1$ (ГПа)	$E2$ (ГПа)	$E3$ (ГПа)	$G12$ (ГПа)	$G23$ (ГПа)	$G13$ (ГПа)	$\nu12$	$\nu21$	$\nu23$	$\nu32$	$\nu13$	$\nu31$
$v.1$	23	18	9	4,2	4,2	4,2	0,13	0,102	0,26	0,13	0,332	0,13
$v.1^*$	23	18	18	4,2	4,2	4,2	0,13	0,102	0,13	0,13	0,166	0,13
$v.2$	18	23	9	4,2	4,2	4,2	0,102	0,13	0,332	0,13	0,26	0,13
$v.2^*$	18	23	18	4,2	4,2	4,2	0,102	0,13	0,166	0,13	0,13	0,13
$v.3$	37	14	9	5,8	5,8	5,8	0,18	0,068	0,106	0,068	0,28	0,068
$v.3^*$	37	14	14	5,8	5,8	5,8	0,18	0,068	0,068	0,068	0,18	0,068
$v.4$	14	37	9	5,8	5,8	5,8	0,068	0,18	0,28	0,068	0,106	0,068
$v.4^*$	14	37	14	5,8	5,8	5,8	0,068	0,18	0,18	0,068	0,068	0,068

Расчёты осуществляем в следующем порядке. Для каждого из выбранных вариантов значения толщины пластины и значений параметров упругости находим (с одновременным использованием ВР и КЭ-1 моделей) решение рассматриваемой задачи, считая материал пластины ортотропным относительно осей  $r, \varphi, z$ . Если для каждого из указанных вариантов соответствующие ВР и КЭ-1 результаты совпадают, делаем вывод о достоверности полученного таким образом численного решения. Аналогичные операции проводим также с использованием ЧИ и КЭ-2 моделей, ориентированных на случай тонких пластин, убеждаясь в совпадении соответствующих результатов. Далее, решение задачи применительно к ситуации ортотропии в осях  $x, y, z$ , осуществляем с использованием моделей КЭ-1 и КЭ-2. Соответствующая настройка этих (с уже подтверждённой вычислительной надёжностью) ортотропных моделей осуществляется простым указанием (в комплексе Abaqus) на замену осей ортотропии  $r, \varphi, z$ , принятых в

предыдущих расчётных вариантах, на оси  $x, y, z$ .

Полученные таким образом результаты на основе объёмных (ВР и КЭ-1) и плоских (ЧИ и КЭ-2) моделей в виде напряжений  $\sigma_\varphi$  в точках ( $A_0, A, B_0, B$ ) в зависимости от значения её толщины и варианта принятых значений параметров упругости, сведены в таблицы 3.2 и 3.3 (Числовые данные таблицы 3.2, расположенные в верхней и нижней части каждой из строк с номерами  $v.1, v.2, v.3, v.4$ , получены с применением ВР и КЭ-1 моделей, соответственно). Как видно, для каждого из выбранных вариантов результаты расчётов на основе альтернативных моделей (ВР и КЭ-1), (ЧИ и КЭ-2) применительно к случаю ортотропии в осях  $r, \varphi, z$  практически совпадают. Это говорит о достоверности полученных численных решений. Следует также отметить, что представленные в таблице 3.3 результаты для случая ортотропии в осях  $x, y, z$ , хорошо согласуются с аналогичными результатами, представленными на рисунке 2.3, которые получены при решении задачи о растяжении тонкой прямоугольной ортотропной пластины с круговым отверстием. (Добавим, что рассматриваемые здесь варианты  $v.1, v.2, v.3, v.4$  обозначены на рисунке 2.3 цифрами 6, 5, 8, 7, соответственно).

На рисунках 3.3, 3.4 представлены полученные на основе объёмных (ВР и КЭ-1) и плоских (ЧИ и КЭ-2) моделей применительно к двум рассматриваемым типам ортотропии результаты расчётов пластины с толщиной  $h=4a$ , демонстрирующие распределение напряжений  $\sigma_\varphi$  вдоль отрезка  $[A_0, A]$  в зависимости от варианта принимаемых значений параметров упругости. Принятые здесь цифровые обозначения соответствуют вариантам  $v.1, v.2, v.3, v.4$ . Представленные на рисунках кривые соответствуют расчётам на основе объёмных моделей, а прямые (со штрихованными номерами) – расчётам на основе плоских моделей. Как видно, при переходе от ситуации ортотропии в осях  $x, y, z$ , (рисунке 3.4) к ситуации цилиндрической ортотропии (рисунок 3.3) уровень напряжений в исследуемой пластине заметно повышается. По представленным для случая цилиндрически ортотропной пластины (с толщиной  $h=4a$ ) результатам, эффект спада напряжений  $\sigma_\varphi$  при переходе от точки  $A_0$  к точке  $A$  применительно к вариантам  $v.1, v.2, v.3, v.4$  в процентном отношении оценивается величинами

(9,3%; 11%; 4%; 7%), соответственно. Аналогичные показатели применительно к ситуации ортотропии в осях  $x, y, z$  оцениваются величинами (11,7%; 10,3%; 7,2%; 5,2%).

Проведённые расчёты с завышенными (в соответствии с вариантами  $v.1^*$ ,  $v.2^*$ ,  $v.3^*$ ,  $v.4^*$ ) значениями модуля  $E_3$  применительно к ситуации цилиндрической

Таблица 3.2 – Результаты расчётов ортотропной пластины на основе ВР и КЭ-1 моделей рассмотренной выше ситуацией толстой (с толщиной  $h=4a$ )

$h/2a$	Вар. №	Ортотропия в осях ( $r, \varphi, z$ )				Ортотропия в осях ( $x, y, z$ )			
		$\sigma_\varphi/q_0$ ( $m. A_o$ )	$\sigma_\varphi/q_0$ ( $m. A$ )	$\sigma_\varphi/q_0$ ( $m. B_o$ )	$\sigma_\varphi/q_0$ ( $m. B$ )	$\sigma_\varphi/q_0$ ( $m. A_o$ )	$\sigma_\varphi/q_0$ ( $m. A$ )	$\sigma_\varphi/q_0$ ( $m. B_o$ )	$\sigma_\varphi/q_0$ ( $m. B$ )
2	v.1	4,806	4,355	-2,449	-2,026	3,947	3,487	-1,004	-0,667
		4,806	4,354	-2,450	-2,025				
	v.2	4,690	4,179	-3,016	-2,475	3,583	3,215	-1,286	-0,869
		4,690	4,177	-3,016	-2,473				
v.3	4,432	4,254	-1,247	-1,113	4,254	3,948	-0,682	-0,548	
	4,432	4,254	-1,247	-1,112					
v.4	3,755	3,482	-3,003	-2,670	2,962	2,825	-1,795	-1,504	
	3,757	3,481	-3,004	-2,669					
1	v.1	4,837	4,424	-2,487	-2,083	3,968	3,568	-1,030	-0,743
		4,838	4,424	-2,487	-2,082				
	v.2	4,731	4,240	-3,051	-2,549	3,603	3,288	-1,313	-0,954
		4,732	4,239	-3,052	-2,548				
v.3	4,442	4,289	-1,266	-1,129	4,268	3,992	-0,694	-0,580	
	4,442	4,289	-1,266	-1,128					
v.4	3,780	3,503	-3,018	-2,718	2,973	2,855	-1,811	-1,549	
	3,782	3,503	-3,019	-2,717					
0,5	v.1	4,823	4,552	-2,475	-2,206	3,952	3,682	-1,012	-0,851
		4,824	4,553	-2,476	-2,207				
	v.2	4,725	4,378	-3,042	-2,693	3,587	3,389	-1,297	-1,075
		4,725	4,378	-3,042	-2,692				
v.3	4,434	4,344	-1,262	-1,176	4,265	4,062	-0,685	-0,628	
	4,435	4,344	-1,262	-1,175					
v.4	3,789	3,572	-3,021	-2,798	2,965	2,902	-1,808	-1,622	
	3,790	3,573	-3,022	-2,798					
0,25	v.1	4,780	4,658	-2,432	-2,311	3,917	3,773	-0,981	-0,920
		4,781	4,658	-2,433	-2,311				
	v.2	4,673	4,507	-2,990	-2,823	3,557	3,462	-1,261	-1,162
		4,674	4,507	-2,990	-2,823				
v.3	4,420	4,383	-1,249	-1,213	4,248	4,129	-0,672	-0,655	
	4,420	4,383	-1,249	-1,213					
v.4	3,767	3,653	-2,997	-2,882	2,953	2,930	-1,789	-1,689	
	3,768	3,653	-2,997	-2,882					

ортотропии привели к оценкам (6%; 7%; 3%; 6%), указывающим на ослабление отмеченного эффекта в подобных вариантах. Сравнивая полученные оценки с изотропной пластины, приходим к выводу, что в рамках рассмотренных вариантов значений параметров упругости (соответствующих стеклопластику на тканевой основе) обсуждаемый эффект спада напряжений  $\sigma_\varphi$  при переходе от точки  $A_0$  к точке  $A$ , хотя и заметен, но проявляется в меньшей степени, чем в изотропном случае. Тем не менее, возможность подобной (порядка 10%) величины спада напряжений  $\sigma_\varphi$  при переходе от точки  $A_0$  (в средней части

Таблица 3.3 – Результаты расчетов ортотропной пластины на основе ЧИ и КЭ-2 моделей

Вар.№	Ортотропия в осях ( $r, \varphi, z$ )				Ортотропия в осях ( $x, y, z$ )	
	$\sigma_\varphi/q_0$ (т. А)		$\sigma_\varphi/q_0$ (т. В)		$\sigma_\varphi/q_0$ (т. А)	$\sigma_\varphi/q_0$ (т. В)
	КЭ-2	ЧИ	КЭ-2	ЧИ		
v.1	4,729	4,734	-2,380	2,387	3,856	-0,953
v.2	4,605	4,609	-2,919	-2,926	3,515	-1,218
v.3	4,402	4,408	-1,231	-1,237	4,205	-0,663
v.4	3,727	3,728	-2,955	-2,958	2,941	-1,751

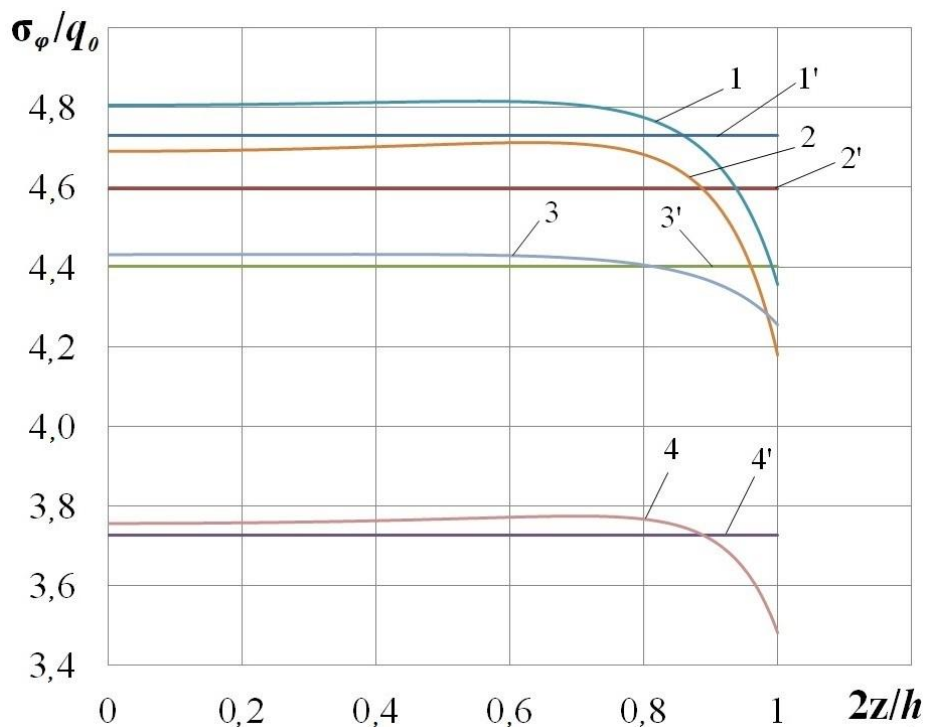


Рисунок 3.3 – Результаты расчётов ортотропной (в осях  $r, \varphi, z$ ) пластины

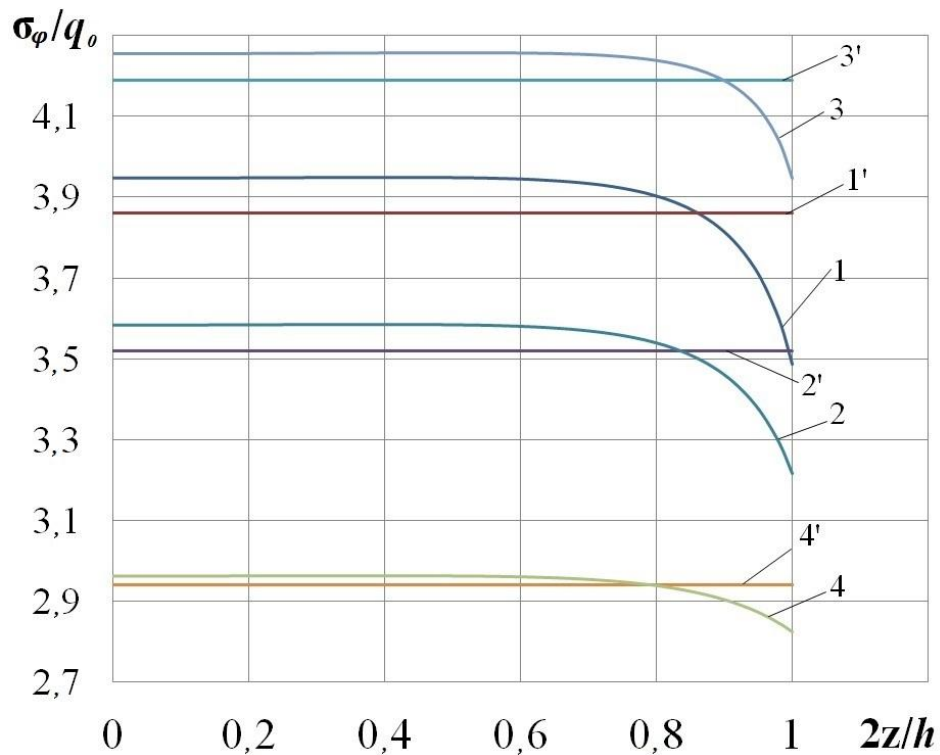


Рисунок 3.4 – Результаты расчётов ортотропной (в осях  $x, y, z$ ) пластины

ограничивающего отверстие цилиндрического участка поверхности пластины) к точке  $A$  на кромке отверстия, следует учитывать при проведении экспериментальных исследований по растяжению рассматриваемого типа «толстых» стеклопластиковых пластин с круговым отверстием. Расчёт уровня напряжений в таких экспериментах, как правило, осуществляется по замеренным деформациям на плоском участке поверхности пластины в зоне кромки отверстия. И, значит, реально достигнутый уровень напряжений в зоне отверстия в таких экспериментах может быть (на величину порядка 10%) недооценён.

Проводя далее такой же анализ с использованием данных таблицы 3.2, можно получить для рассматриваемых вариантов значений параметров упругости ( $\nu.1, \nu.2, \nu.3, \nu.4$ ) при каждом из трёх значений (1; 0,5; 0,25) параметра толщины  $h/2a$  наборы оценок вида (8,5%; 10,4%; 3,4%; 7,3%), (5,6%; 7,3%; 2%; 5,7%), (2,5%; 3,5%; 0,8%; 3%), характеризующих обсуждаемый эффект спада напряжений  $\sigma_\varphi$  применительно к ситуации ортотропии в осях  $r, \varphi, z$ . Аналогичные показатели применительно к ситуации ортотропии в осях  $x, y, z$ , при этом имеют вид (10%; 8,7%; 6,5%; 4%), (6,8%; 5,5%; 4,8%; 2,1%), (3,7%; 2,7%; 2,8%; 0,8%).

Как видно, в случае достаточно тонкой пластины ( $h/2a=0,25$ ) при всех рассмотренных вариантах значений её параметров упругости обсуждаемый эффект становится мало заметным.

Теперь обратимся к вопросу о границах применимости плоских расчётных моделей в рассматриваемом классе задач о концентрации напряжений применительно к толстым пластинам. Как видно из сравнения представленных на рисунках 3.3, 3.4 и в таблицах 3.2, 3.3 расчётных результатов на основе объёмных и плоских вычислительных моделей, различия в результатах по коэффициенту концентрации напряжений, получаемых по этим моделям, не превышают 3% для всех рассмотренных значений толщины пластины и вариантов значений её параметров упругости. Таким образом, для подобного типа ортотропных пластин расчёт коэффициента концентрации напряжений допустимо проводить на основе плоской модели даже при толщине пластины порядка двух диаметров отверстия.

### **3.3 Численное моделирование растягиваемых толстых ортотропных композитных (на основе однонаправленных систем армирующих волокон) пластин с круговым отверстием**

Переходим теперь к рассмотрению результатов численного решения поставленной задачи применительно к ситуации ортотропной слоистой композитной (на основе однонаправленных систем армирующих волокон) пластины. В рассмотрение, как и выше, включаем случай ортотропии в осях  $r, \varphi, z$ , и случай ортотропии в осях  $x, y, z$ . В таблице 3.4 представлены используемые при проведении расчётов варианты ( $v.1, v.2, v.3$ ) значений параметров упругости исследуемой пластины. Входящие в обозначения параметров упругости индексы 1,2,3 соответствуют либо осям  $r, \varphi, z$ , либо осям  $x, y, z$ . Варианты  $v.1$  и  $v.2$  соответствуют углепластику и стеклопластику с укладкой волокон по схеме  $[(0)]_s$ , а вариант  $v.3$  соответствует углепластику со схемой укладки волокон вида  $[(0/90)_2]_s$ . Укажем на качественное отличие упругих характеристик варианта  $v.3$  от соответствующих характеристик вариантов  $v.1$  и  $v.2$ , состоящее в том, что в этом варианте модули  $E_1$  и  $E_2$  имеют одинаковые (достаточно высокие) значения, а

коэффициенты Пуассона близки к нулю.

Таблица 3.4 – Принимаемые варианты значений параметров упругости пластины

Вар.№	$E1$ (ГПа)	$E2$ (ГПа)	$E3$ (ГПа)	$G12$ (ГПа)	$G23$ (ГПа)	$G13$ (ГПа)	$\nu12$	$\nu21$	$\nu23$	$\nu32$	$\nu13$	$\nu31$
$\nu.1$	81,9	6,1	6,1	2,7	2	2,7	0,34	0,025	0,5	0,5	0,34	0,025
$\nu.2$	22,1	5	5	2,5	1,8	2,5	0,285	0,064	0,418	0,418	0,285	0,064
$\nu.3$	51,4	51,4	3,9	2,8	2	2	0,054	0,054	0,079	0,022	0,079	0,022

Расчёты осуществляем в том же порядке, что и выше. Для каждого из принимаемых к рассмотрению вариантов толщины пластины и параметров упругости находим (с одновременным использованием ВР и КЭ-1 моделей) решение рассматриваемой задачи, считая материал пластины ортотропным относительно осей  $r, \varphi, z$  (имея при этом в виду, что индексы 1,2,3 в обозначениях упругих характеристик соответствуют осям  $r, \varphi, z$ ). Если соответствующие ВР и КЭ-1 результаты совпадают, делаем вывод о достоверности полученного таким образом численного решения. Аналогичные операции проводим также с использованием ЧИ и КЭ-2 моделей, ориентированных на случай тонких пластин, убеждаясь в совпадении соответствующих результатов. Далее, решение задачи применительно к ситуации ортотропии в осях  $x, y, z$  осуществляем с использованием уже отлаженных КЭ-1 и КЭ-2 моделей (имея при этом в виду, что индексы 1,2,3 в обозначениях упругих характеристик соответствуют осям  $x, y, z$ ). Соответствующая настройка этих (с подтверждённой вычислительной надёжностью) ортотропных моделей осуществляется простым указанием (в комплексе Abaqus) на замену осей ортотропии  $r, \varphi, z$ , принятых в предыдущих расчётных вариантах, на оси  $x, y, z$ .

Полученные таким образом результаты на основе объёмных (ВР и КЭ-1) и плоских (ЧИ и КЭ-2) моделей в виде напряжений  $\sigma_\varphi$  в точках ( $A_0, A, B_0, B$ ) в зависимости от значения параметра толщины пластины ( $h/2a$ ) и варианта принятых значений параметров упругости сведены в таблицы 3.5 и 3.6.

Таблица 3.5 – Результаты расчётов ортотропной пластины на основе ВР и КЭ-1 моделей

$h/2a$	Вар. №	Ортотропия в осях ( $r, \varphi, z$ )				Ортотропия в осях ( $x, y, z$ )			
		$\sigma_{\varphi}/q_0$ ( $m. A_0$ )	$\sigma_{\varphi}/q_0$ ( $m. A$ )	$\sigma_{\varphi}/q_0$ ( $m. B_0$ )	$\sigma_{\varphi}/q_0$ ( $m. B$ )	$\sigma_{\varphi}/q_0$ ( $m. A_0$ )	$\sigma_{\varphi}/q_0$ ( $m. A$ )	$\sigma_{\varphi}/q_0$ ( $m. B_0$ )	$\sigma_{\varphi}/q_0$ ( $m. B$ )
2	v.1	5,93 5,93	4,10 4,08	-1,33 -1,33	-0,36 -0,34	7,59	6,93	-0,39	-0,2
	v.2	4,94 4,94	3,68 3,67	-1,06 -1,06	-0,37 -0,37	4,77	4,27	-0,60	-0,35
	v.3	9,47	9,39	-7,45	-7,37	5,77	5,71	-1,14	-1,09
1	v.1	5,82 5,82	4,45 4,44	-1,44 -1,44	-0,53 -0,53	7,66	7,06	-0,39	-0,24
	v.2	4,88 4,88	3,95 3,95	-1,13 -1,13	-0,50 -0,50	4,82	4,38	-0,61	-0,40
	v.3	9,47	9,40	-7,46	-7,38	5,77	5,72	-1,14	-1,10
0,5	v.1	5,58 5,58	4,79 4,78	-1,36 -1,37	-0,78 -0,78	7,72	7,30	-0,37	-0,27
	v.2	4,73 4,73	4,22 4,22	-1,07 -1,07	-0,69 -0,68	4,83	4,54	-0,57	-0,45
	v.3	9,48	9,42	-7,46	-7,40	5,78	5,74	-1,15	-1,12
0,25	v.1	5,35 5,35	4,99 4,99	-1,22 -1,23	-0,95 -0,95	7,70	7,48	-0,34	-0,30
	v.2	4,59 4,60	4,38 4,38	-0,98 -0,98	-0,81 -0,81	4,8	4,67	-0,54	-0,49
	v.3	9,48	9,44	-7,46	-7,42	5,78	5,76	-1,14	-1,13

Таблица 3.6. – Результаты расчётов ортотропной пластины на основе ЧИ и КЭ-2 моделей

Вар. №	Ортотропия в осях ( $r, \varphi, z$ )				Ортотропия в осях ( $x, y, z$ )	
	$\sigma_{\varphi}/q_0$ ( $m. A$ )		$\sigma_{\varphi}/q_0$ ( $m. B$ )		$\sigma_{\varphi}/q_0$ ( $m. A$ )	$\sigma_{\varphi}/q_0$ ( $m. B$ )
	КЭ-2	ЧИ	КЭ-2	ЧИ		
v.1	5,12	5,12	-1,05	-1,06	7,59	-0,31
v.2	4,47	4,48	-0,89	-0,89	4,75	-0,52
v.3	9,46	–	-7,44	–	5,75	-1,13

Числовые данные таблицы 3.5, расположенные в верхней и нижней части каждой из строк с номерами  $v.1, v.2, v.3$ , получены с применением ВР и КЭ-1 моделей, соответственно). Как видно, для каждого из выбранных вариантов результаты расчётов на основе альтернативных моделей (ВР и КЭ-1), (ЧИ и КЭ-2)



применительно к случаю ортотропии в осях  $r, \varphi, z$ , практически совпадают. Это говорит о достоверности полученных численных решений. Следует также отметить, что представленные в таблице 3.6 результаты для случая ортотропии в осях  $x, y, z$  хорошо согласуются с аналогичными результатами, представленными в таблице 2.3, которые получены при решении задачи о растяжении тонкой ортотропной полосы с круговым отверстием. (Добавим, что рассматриваемые здесь варианты  $v.1$ ,  $v.2$ ,  $v.3$ , обозначены в таблице 2.3 цифрами 4, 1, 5, соответственно).

Анализ результатов, представленных в таблицах 3.5, 3.6, позволяет указать на следующие эффекты, которые будем комментировать, принимая  $q_0=1$ . Отмечаем, что в случае варианта  $v.3$  композита напряжения  $\sigma_\varphi$  практически не изменяются по толщине пластины и при любых из рассмотренных вариантов толщин практически совпадают с тем, что даёт расчёт на основе плоской модели пластины. Отличительной особенностью этого варианта композита является также то, что при переходе от ситуации ортотропии в осях  $x, y, z$ , к ситуации цилиндрической ортотропии уровень обсуждаемых напряжений  $\sigma_\varphi$  существенно повышается (в противоположность этому, в случае вариантов  $v.1$  и  $v.2$  композита указанный уровень понижается, либо практически не изменяется). Кроме того, в ситуации цилиндрической ортотропии в случае варианта  $v.3$  композита уровень напряжений растяжения и сжатия в рассматриваемой пластине оказывается одинаково высоким. В случае вариантов  $v.1$  и  $v.2$  композита такого эффекта в рассматриваемых двух ситуациях ортотропии не наблюдается (в этих вариантах уровень напряжений растяжения существенно превышает уровень напряжений сжатия).

На рисунках 3.5-3.10 представлены полученные на основе объёмных (ВР и КЭ-1) и плоских (ЧИ и КЭ-2) моделей применительно к двум рассматриваемым типам ортотропии результаты расчётов пластины, демонстрирующие распределение напряжений  $\sigma_\varphi$  вдоль отрезка  $[A_0, A]$  в зависимости от варианта ( $v.1$ ,  $v.2$ ,  $v.3$ ) принимаемых значений параметров упругости и принимаемых

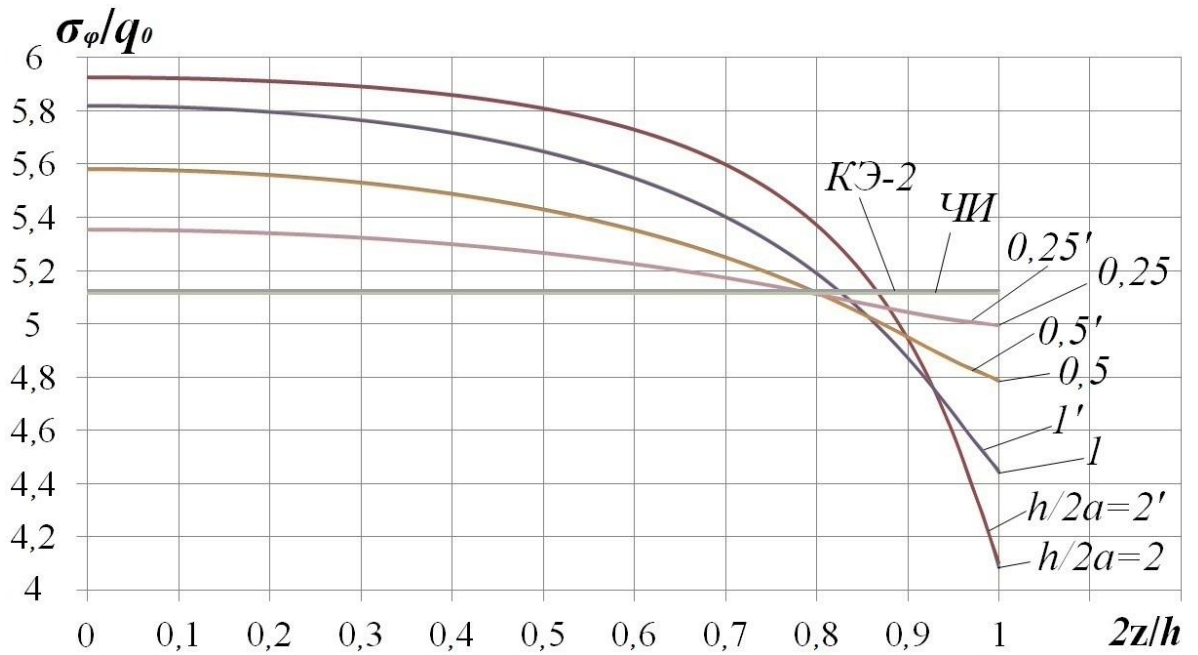


Рисунок 3.5 – Распределение напряжений  $\sigma_\varphi$  по отрезку  $[A_0, A]$  в случае ортотропной (в осях  $r, \varphi, z$ ; вариант v.1) пластины в зависимости от параметра  $h/2a$

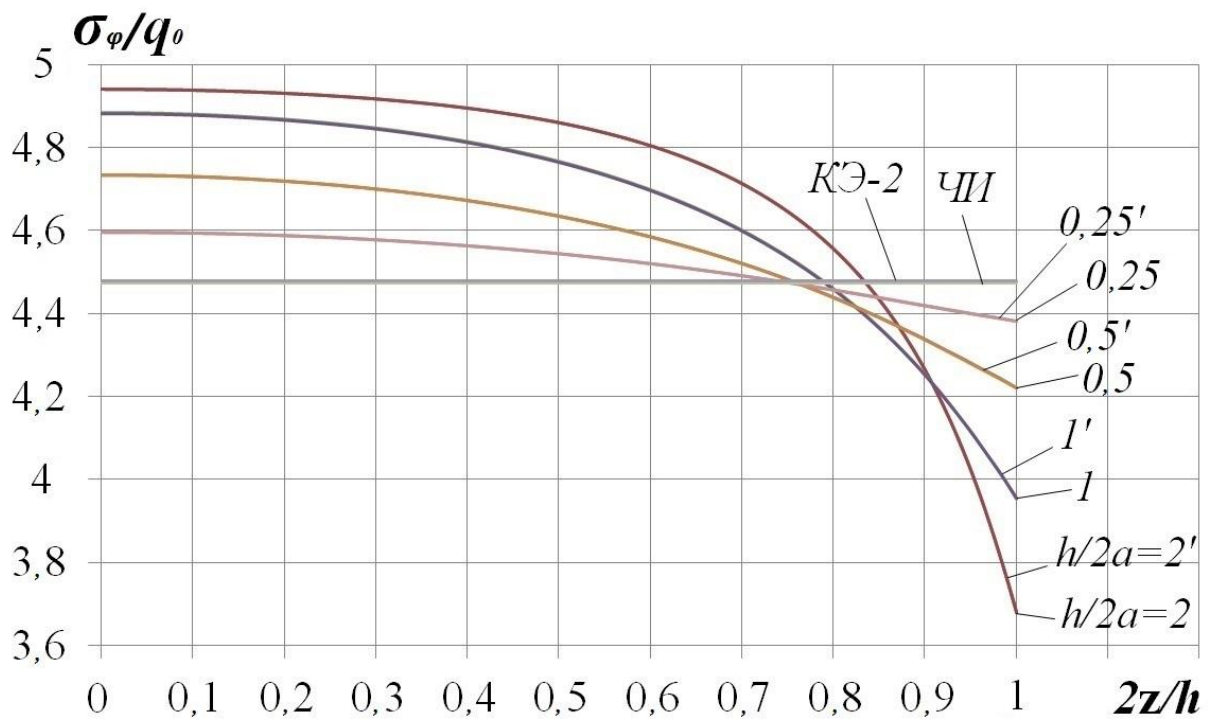


Рисунок 3.6 – Распределение напряжений  $\sigma_\varphi$  по отрезку  $[A_0, A]$  в случае ортотропной (в осях  $r, \varphi, z$ ; вариант v.2) пластины в зависимости от параметра  $h/2a$

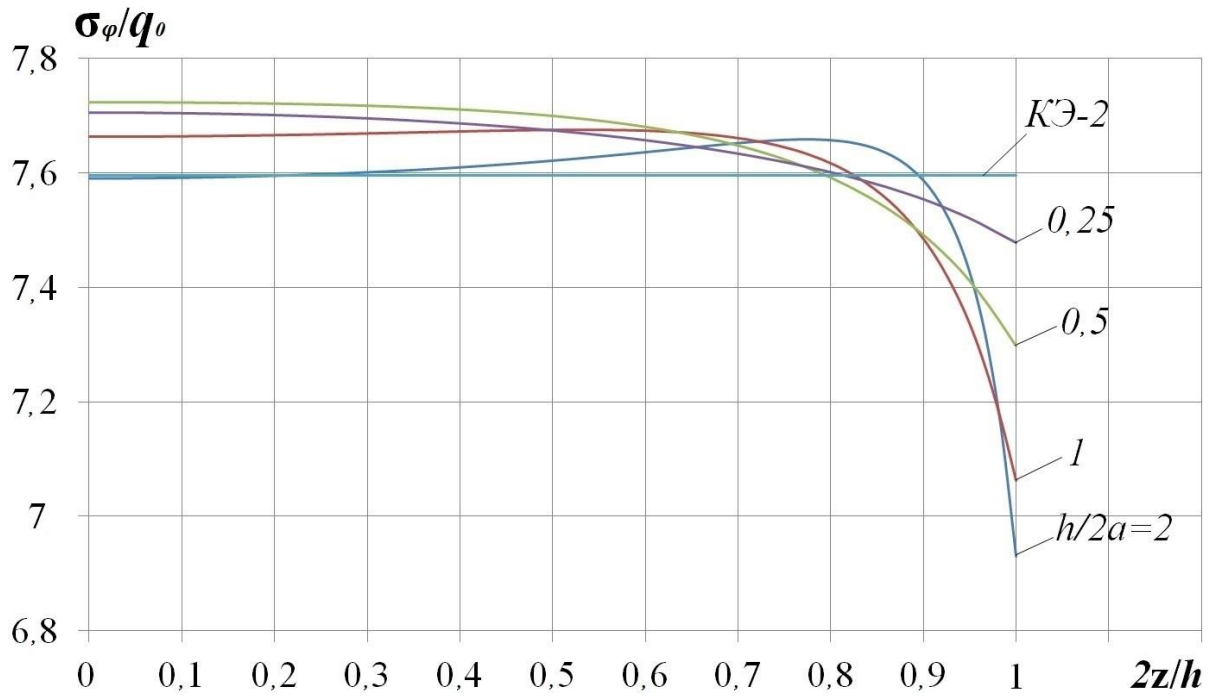


Рисунок 3.7 – Распределение напряжений  $\sigma_\varphi$  по отрезку  $[A_0, A]$  в случае ортотропной (в осях  $x, y, z$ ; вариант  $v.1$ ) пластины в зависимости от параметра  $h/2a$

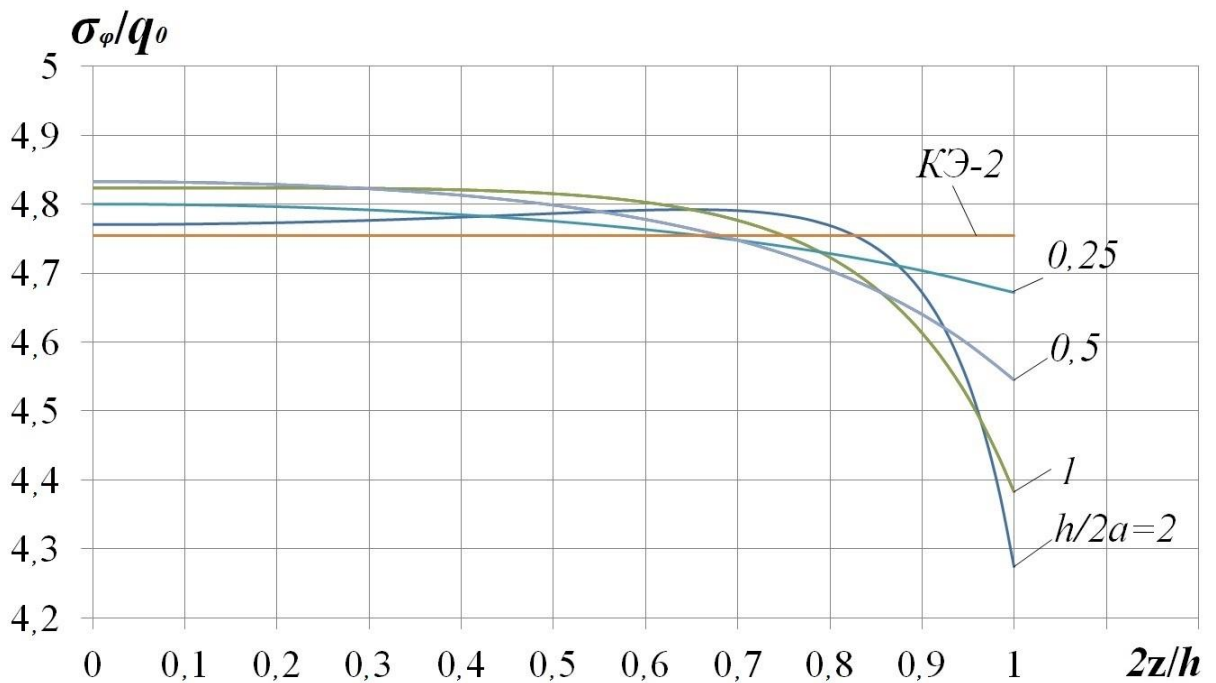


Рисунок 3.8 – Распределение напряжений  $\sigma_\varphi$  по отрезку  $[A_0, A]$  в случае ортотропной (в осях  $x, y, z$ ; вариант  $v.2$ ) пластины в зависимости от параметра  $h/2a$

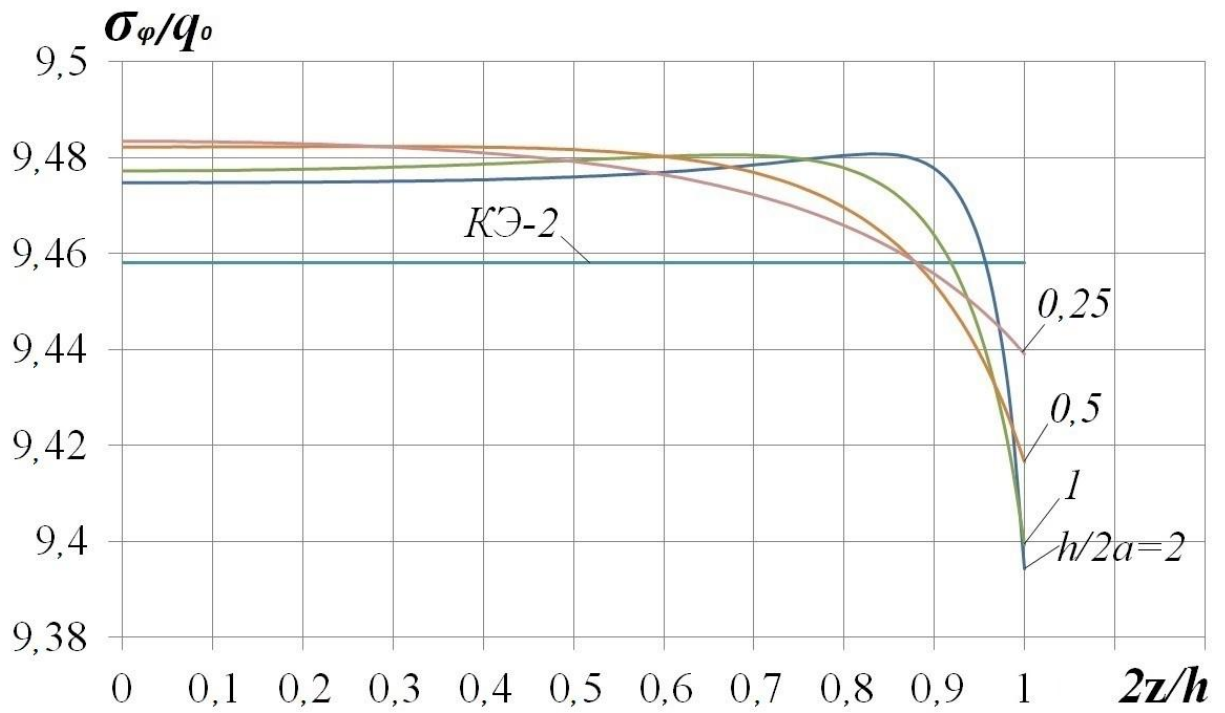


Рисунок 3.9 – Распределение напряжений  $\sigma_\varphi$  по отрезку  $[A_0, A]$  в случае ортотропной (в осях  $r, \varphi, z$ ; вариант v.3) пластины в зависимости от параметра  $h/2a$

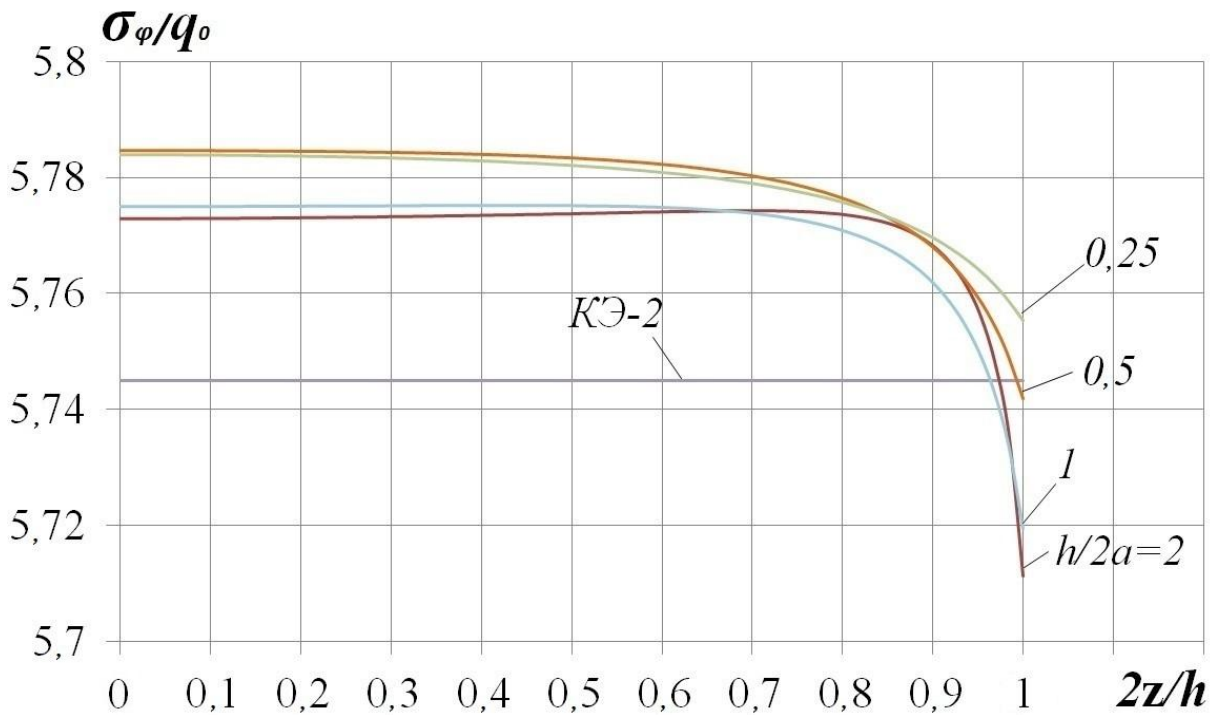


Рисунок 3.10 – Распределение напряжений  $\sigma_\varphi$  по отрезку  $[A_0, A]$  в случае ортотропной (в осях  $x, y, z$ ; вариант v.3) пластины в зависимости от параметра  $h/2a$

значений параметра  $h/2a$ . Отмеченные штрихами на рисунках 3.5, 3.6 числовые данные, относящиеся к параметру  $h/2a$ , указывают на то, что соответствующие им графики получены на основе ВР модели. Такие же числовые данные без штрихов соответствуют графикам, полученным на основе КЭ-1 модели. Представленные на рисунках 3.5, 3.6 графические результаты наглядно демонстрируют полное совпадение получаемых с применением обозначенных альтернативных вычислительных моделей решений поставленной задачи, подтверждая тем самым достоверность обсуждаемых результатов численного моделирования.

Относящиеся к ситуации цилиндрической ортотропии и случаям  $\nu.1$  и  $\nu.2$  композитного материала пластины графические данные, представленные на рисунках 3.5, 3.6, позволяют сделать следующие выводы. В качественном отношении графики распределения напряжений для указанных случаев (в указанной ситуации) похожи друг на друга. Для этих графиков характерен плавный спад от максимального значения в точке  $A_0$ , до минимального значения в точке  $A$ . Для варианта  $\nu.1$  материала пластины величина этого спада (в процентном выражении) в зависимости от значений параметра  $h/2a$  (2; 1; 0,5; 0,25) характеризуется числовым набором вида (31%; 24%; 14%; 4,6%). Аналогичный числовой набор в случае варианта  $\nu.2$  материала пластины имеет вид (26%; 19%; 11%; 4,6%). С уменьшением толщины пластины значения напряжений становятся всё ближе к расчётным результатам, получаемым на основе плоской вычислительной модели.

Переходя к анализу тех же вариантов  $\nu.1$  и  $\nu.2$  в ситуации, характеризуемой ортотропией материала пластины в осях  $x, y, z$  (см. рисунки 3.7, 3.8), обнаруживаем качественное изменение картины распределения (вдоль отрезка  $[A_0, A]$ ) напряжений  $\sigma_\varphi$  по сравнению с тем, что изображено на рисунках 3.5, 3.6. Резкий (в случае достаточно толстой пластины) спад напряжений здесь локализуется (подобно краевому эффекту) в окрестности точки  $A$ . С увеличением толщины пластины напряжения в окрестности точки  $A_0$  уменьшаются и положение максимума напряжений смещается к точке, расположенной в окрестности точки  $A$ . Этот эффект особенно заметен в случае варианта  $\nu.1$  материала пластины. Для

варианта  $\nu.1$  материала пластины величина описанного спада напряжений (в процентном выражении) в зависимости от значений параметра  $h/2a$  (2; 1; 0,5; 0,25) характеризуется числовым набором вида (10%; 8%; 5,4%; 3%). Аналогичный числовой набор в случае варианта  $\nu.2$  материала пластины имеет вид (11%; 9%; 6%; 3%).

В случае варианта  $\nu.3$  материала пластины (см. рисунки 3.10, 3.11) можно наблюдать те же из рассмотренных выше эффектов, только теперь они проявляются в порядке перехода от ситуации с ортотропией пластины в осях  $x, y, z$ , к ситуации с цилиндрической ортотропией. В числовом выражении эти эффекты здесь пренебрежимо малы. Это соответствует тому, что в данном случае результаты расчётов такой пластины на основе трёхмерной модели даже при значительной её толщине практически совпадают с тем, что даёт расчёт на основе плоской модели.

Чтобы продемонстрировать, как изменяется напряжённое состояние в опасном на разрыв сечении рассматриваемой композитной пластины, на рисунках 3.11, 3.12 представлены полученные на основе КЭ-1 и КЭ-2 вычислительных моделей (для вариантов  $\nu.1$  и  $\nu.2$  композитного материала) графики распределения напряжений  $\sigma_\varphi$  вдоль осей  $(A_0, y)$  и  $(A, y)$  в зависимости от параметра  $h/2a$ . Видно, что графики распределения указанных напряжений вдоль оси  $(A_0, y)$ , полученные на основе трёхмерной вычислительной модели КЭ-1, для всех рассмотренных вариантов толщин пластины практически совпадают как между собой, так и с тем, что даёт расчёт на основе плоской КЭ-2 модели. В то же время аналогичные графические (КЭ-1) результаты, полученные для оси  $(A, y)$ , расположенной на поверхности пластины, заметно различаются между собой. В частности, такое различие между вариантами  $h/2a=0,25$  и  $h/2a=2$  может достигать величины порядка 16%.

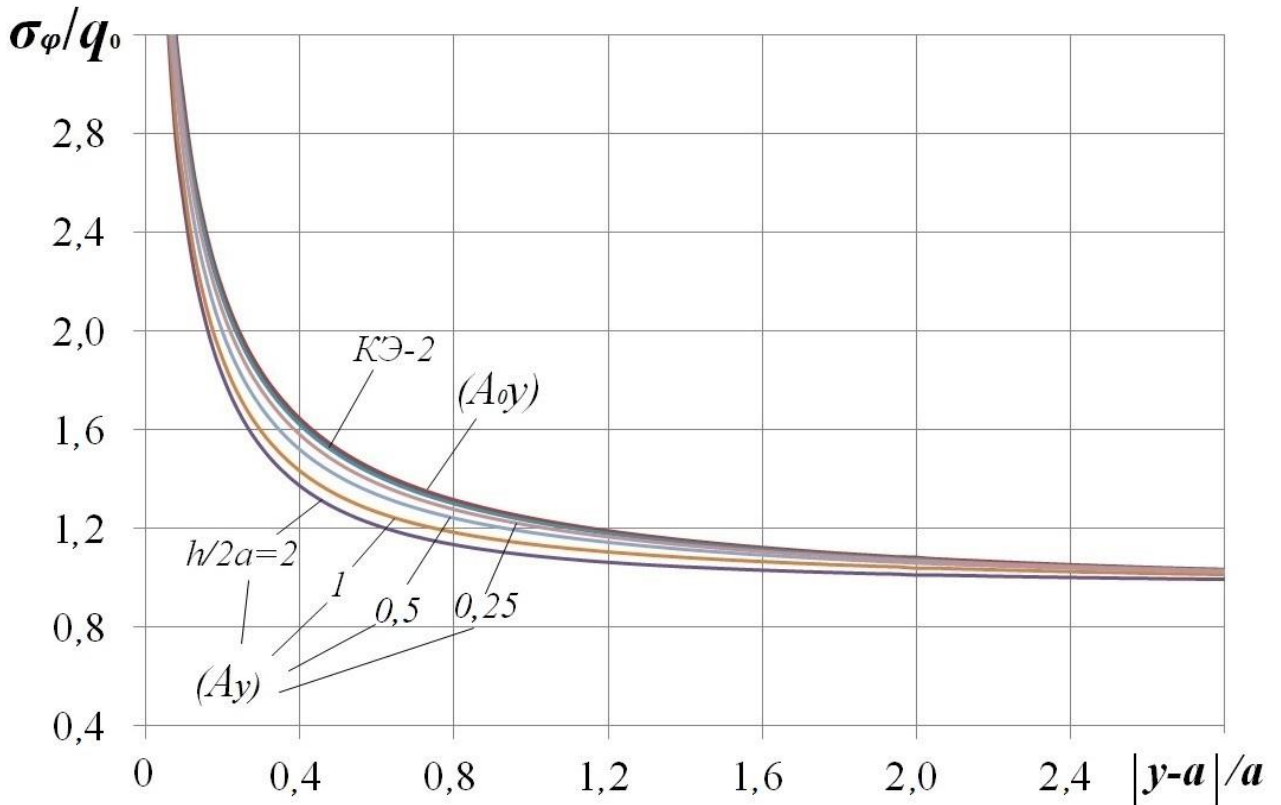


Рисунок 3.11 – Распределение напряжений  $\sigma_\varphi$  вдоль осей  $(A_0, y)$  и  $(A, y)$  в случае ортотропной (в осях  $x, y, z$ ; вариант v.1) пластины в зависимости от параметра  $h/2a$

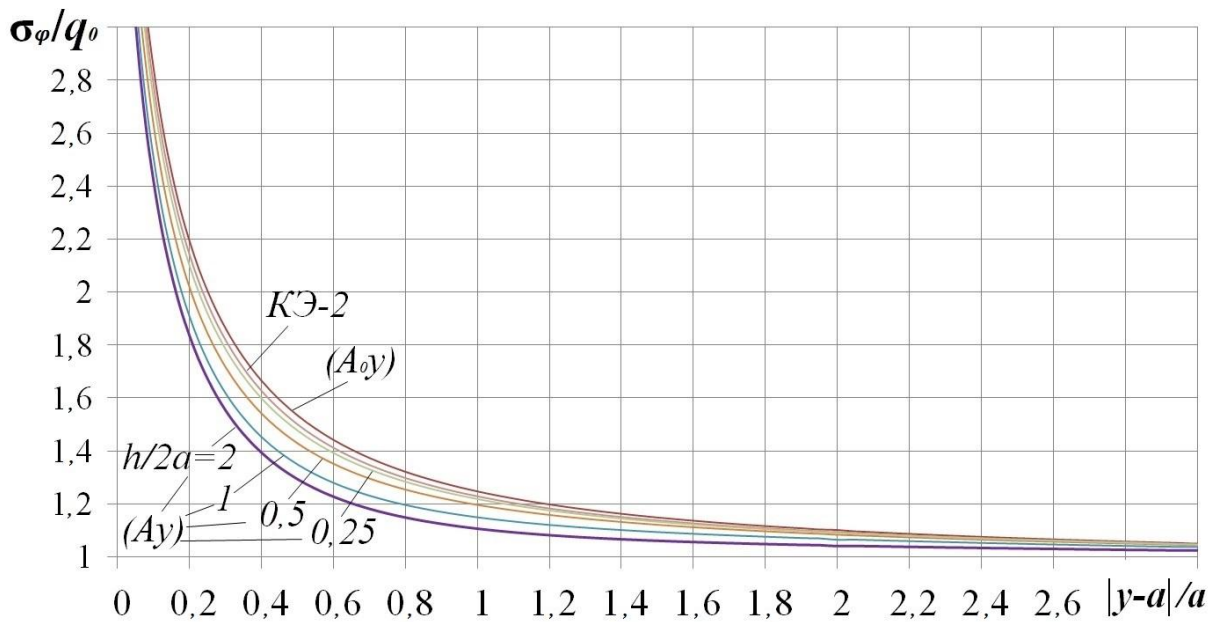


Рисунок 3.12 – Распределение напряжений  $\sigma_\varphi$  вдоль осей  $(A_0, y)$  и  $(A, y)$  в случае ортотропной (в осях  $x, y, z$ ; вариант v.2) пластины в зависимости от параметра  $h/2a$

Обратим теперь внимание на поведение представленных на рисунках 3.11, 3.12 графиков в точках существенно удалённых от кромки отверстия (при  $y > 4a$ ). Видно, что при всех рассматриваемых вариантах значений параметров пластины для точек, принадлежащих сечению пластины плоскостью  $Oyz$ , имеет место стремление параметра  $\sigma_\varphi/q_0$  к единице при значительной удалённости этих точек от кромки отверстия. Это говорит о том, что применительно к рассматриваемому случаю растяжения композитной ортотропной пластины с круговым отверстием параметр  $\sigma_\varphi/q_0$  представляет собой коэффициент концентрации напряжений.

В этой связи, результаты по распределению напряжений, представленные на рисунках 3.7, 3.8, позволяют заключить, что в случае растягиваемой пластины из композита на основе однонаправленной (в осях  $x, y, z$ ) системы угле- или стекловолокон даже при толщине пластины порядка двух диаметров отверстия максимальное значение коэффициента концентрации напряжений может быть определено (с погрешностью в пределах 2%) путём расчёта с использованием плоской вычислительной модели. В то же время нужно учитывать, что при указанной толщине пластины значение коэффициента концентрации напряжений в точках её поверхности примерно на 10% ниже отмеченного максимального его значения. Поэтому при экспериментальном способе определения указанного значения, который основан на замере деформаций на плоском участке поверхности пластины в зоне кромки отверстия, искомый результат по коэффициенту концентрации напряжений может быть (на величину порядка 10%) недооценён.

По материалам, представленным в настоящем разделе, можно сделать следующие выводы.

На основе КЭ метода (комплекс *Abaqus*, объёмный элемент C3D20 и оболочечный элемент S4), ВР метода и ЧИ метода построены вычислительные модели, предназначенные для решения задачи теории упругости (в трёхмерной и двумерной формулировках) о концентрации напряжений в толстых ортотропных упругих пластинах с круговым отверстием при одноосном растяжении. С использованием этих моделей проведены исследования влияния значений



параметров упругости материала пластины и её толщины на уровень напряжений в зоне отверстия. Достоверность полученных численных решений подтверждена совпадением результатов расчётов с применением альтернативных вычислительных моделей. На основе проведённых с применением построенных моделей параметрических исследований дана числовая оценка эффекта спада значения коэффициента концентрации напряжений при переходе от точки  $A_0$  (в средней части ограничивающего отверстие цилиндрического участка поверхности пластины) к точке  $A$  на кромке отверстия. Установлено, что для пластин с упругими характеристиками, типичными для стеклопластиков на тканевой основе, а также угле- и стекло-пластиков на основе однонаправленной (по схеме  $[(0)]_s$ ) системы волокон, при толщине пластин, сравнимой с диаметром отверстия, указанный эффект оценивается величиной порядка 10%. Также установлено, что для подобного типа ортотропных пластин оценку максимального значения коэффициента концентрации напряжений допустимо проводить (с погрешностью не более 3%) на основе плоской модели даже при толщине пластины порядка двух диаметров отверстия. В случае же пластины из углепластика со схемой укладки волокон вида  $[(0/90)_2]_s$ , имеющего близкие к нулю значения коэффициентов Пуассона, эффект влияния толщины на напряжённое состояние практически отсутствует.

## **ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАЯВЛЕННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕТОДИКИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ РАСТЯГИВАЕМЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВИДЕ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ**

Здесь будет дано описание расчётной процедуры, предназначенной для решения задач прочности растягиваемых композитных пластин с концентраторами напряжений в виде круговых отверстий. (В рамках указанной процедуры проводится расчёт напряжённого состояния обозначенного типа пластины (с использованием альтернативных вычислительных моделей для подтверждения достоверности получаемых результатов) и на основе критерия напряжений в точке осуществляется прогноз по пределу прочности на разрыв такой пластины). Будут представлены результаты расчётов на прочность при одноосном растяжении композитных (с различными схемами укладки армирующих волокон) пластин, ослабленных одним или несколькими круговыми отверстиями. Будут также представлены экспериментальные данные, подтверждающие достоверность прочностных прогнозов, осуществляемых с применением отмеченной процедуры. Описанные результаты представлены в публикации [1, 22, 23].

### **4.1. Расчётный анализ прочности растягиваемых композитных полос с одним круговым отверстием (в сопоставлении с экспериментом)**

В работе [97] представлены результаты обширных экспериментальных исследований по определению пределов прочности на разрыв композитных (с различной схемой укладки армирующих стекло- и угле-волокон) полос при наличии в них одного центрального кругового отверстия. Растяжение испытуемых полос в экспериментах осуществлялось согласно схеме, изображенной на рисунке 2.9а. Опираясь на эту схему и экспериментальные данные работы [97], далее излагаются результаты проведённых исследований, направленных на подтверждение достоверности расчётного прогноза прочности

растягиваемых композитных пластин с одним отверстием, выполняемого с использованием предлагаемой вычислительной методики.

Итак, в соответствии с работой [97], рассматриваем (в осях  $Oxy$ ) протяжённую композитную полосу длиной  $L$  и шириной  $W=30$  мм, имеющую круговое отверстие радиуса  $r$  и растягиваемую в направлении оси  $Ox$  нагрузкой, характеризуемой напряжением  $\sigma$ . Эксперименты в [97] проводились с образцами композитов, имеющих существенно различающиеся физико-механические характеристики (см. таблицу 4.1). Параметр  $\sigma_0$  в указанной таблице соответствует растягивающему напряжению  $\sigma$ , при котором имеет место разрыв образца

Таблица 4.1 – Значения физико-механических характеристик принятых к рассмотрению семи вариантов слоистых композитов

	Композит №	Структура композита	$E_1$ $\tilde{E}_1$	$E_2$ $\tilde{E}_2$	$G_{12}$ $\tilde{G}_{12}$	$\nu_{12}$	$\sigma_0$
Стеклопластик	1	[0 <sub>8</sub> ]	22120 МПа	4980 МПа	2500 МПа	0,285	503 МПа
			1	0,225	0,113		
	2	[(0/90) <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>	14050 МПа	14050 МПа	1955 МПа	0,109	300 МПа
			1	1	0,139		
3	[(0/±45/90) <sub>s</sub> ]	10190 МПа	10190 МПа	3900 МПа	0,303	216 МПа	
		1	1	0,382			
4	[(0 <sub>2</sub> /±45/0) <sub>s</sub> ]	16200 МПа	6850 МПа	3150 МПа	0,469	370 МПа	
		1	0,422	0,194			
Углепластик	5	[0 <sub>6</sub> ]	80660 МПа	7620 МПа	2258 МПа	0,324	1150 МПа
			1	0,0944	0,028		
	6	[(0/90) <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>	51440 МПа	51440 МПа	2816 МПа	0,054	610 МПа
			1	1	0,0547		
	7	[(0/±45/90) <sub>s</sub> ]	45660 МПа	45660 МПа	14356 МПа	0,329	385 МПа
1			1	0,314			

из соответствующего композита в условиях отсутствия в нём отверстия (случай разрыва образца без отверстия). Индексы 1 и 2 у параметров упругости соответствуют осям  $Ox$  и  $Oy$ . Параметры, отмеченные волной, представляют собой обезразмеренные модули упругости (получаемые делением исходных значений этих модулей на модуль  $E_1$ ). Для каждого из семи вариантов принятых к рассмотрению композитов (см. таблицу 4.1) авторами работы [97] проводились

испытания на растяжение набора образцов, имеющих соответственно отверстие радиуса  $r$  (мм) = 1,5; 2,5; 3,75; 5; 6; 7,5. В процессе этих испытаний для каждого образца с отверстием заданного радиуса  $r$  определялось значение  $\sigma_s$  растягивающего напряжения  $\sigma$ , при котором имеет место разрыв испытуемого образца. Экспериментально полученные значения  $\sigma_s$  для каждого из принятых к рассмотрению композитов в зависимости от радиуса выполненного в образце отверстия представлены в виде таблицы в работе [97].

Расчётные исследования по прогнозу пределов прочности на разрыв одноосно растягиваемых композитных пластин с отверстиями мы будем проводить с использованием вычислительных моделей, основанных на предположении о плоском напряжённом состоянии исследуемой пластины. При этом будем использовать формулировку критерия напряжений в точке в виде записи (1.12), относя этот критерий к классу нелокальных критериев разрушения. В качестве эквивалентного напряжения  $\sigma_e$ , входящего в запись (1.12), будем принимать (как это традиционно делается) нормальное растягивающее напряжение  $\sigma_{xx}$  в опасном на разрыв сечении пластины (вдоль оси  $Oy$ , см. рисунок 2.9а). Согласно используемому критерию, разрыв пластины с отверстием будет иметь место при таком значении растягивающего напряжения  $\sigma = \sigma_s$ , при котором напряжение  $\sigma_e$  в точке, находящейся на расстоянии  $d$  от кромки отверстия, достигнет значения  $\sigma_0$ , соответствующего разрыву образца без отверстия. Другими словами, ситуация разрыва растягиваемой пластины с отверстием соответствует выполнению равенств

$$\sigma_e(d) = \sigma_0, \quad \sigma = \sigma_s. \quad (4.1)$$

Расчётную процедуру применительно к каждому из рассматриваемых вариантов композитных полос с отверстием радиуса  $r$  строим следующим образом. Полагая  $\sigma = 1$  и  $L = 40r$ , осуществляем численное решение задачи о напряжённом состоянии растягиваемой композитной полосы с отверстием. Достоверность получаемого решения подтверждаем фактом совпадения

расчётных результатов на основе КЭ модели и ВР модели. По результатам численного моделирования для каждого из рассматриваемых вариантов строим график зависимости вида  $\tilde{\sigma}_e = \tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , где  $\tilde{\sigma}_e = \sigma_e / \sigma$ ,  $\tilde{y} = |y - y^*| / r$ . (Здесь  $y^*$  - координата лежащей на оси  $Oy$  точки кромки отверстия. Параметры  $\tilde{\sigma}_e$  и  $\tilde{y}$  представляют собой, соответственно, обезразмеренное напряжение в точке на оси  $Oy$  и обезразмеренное расстояние этой точки от кромки отверстия). Вводя в рассмотрение безразмерный параметр  $\tilde{d} = d/r$ , ищем на построенном графике точку с координатой  $\tilde{y}_s = \tilde{d}$  и определяем значение  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ . В момент разрыва полосы, в соответствии с формулировкой (4.1), для указанного значения должно выполняться равенство

$$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0 / \sigma_s. \quad (4.2)$$

Используя это равенство и построенные графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e = \tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , можно решать следующие задачи.

Решение 1. Предположим, что в эксперименте по растяжению композитного образца с отверстием заданного радиуса  $r$  установлено значение  $\sigma_s$  растягивающего напряжения  $\sigma$ , при котором имеет место разрыв образца. Известно также напряжение  $\sigma_0$ , при котором имеет место разрыв аналогичного образца без отверстия. Необходимо определить значение константы  $d$  для данного композита. Используя числовые данные, входящие в правую часть равенства (4.2), определяем значение  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ . По этому значению с использованием графика зависимости  $\tilde{\sigma}_e = \tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$  определяем соответствующее значение  $\tilde{y} = \tilde{y}_s = \tilde{d}$ , откуда находим  $d = \tilde{d} \cdot r$ .

Решение 2. Теперь исходим из того, что значения констант  $d$  и  $\sigma_0$  для данного композита известны. Необходимо определить значение  $\sigma_s$  растягивающего напряжения  $\sigma$ , при котором имеет место разрыв образца с отверстием заданного радиуса  $r$ . На основе имеющихся данных вычисляем  $\tilde{y}_s = \tilde{d} = d/r$ . По полученному значению  $\tilde{y} = \tilde{y}_s$  с использованием графика зависимости  $\tilde{\sigma}_e = \tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$  определяем соответствующее значение  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ . Используя равенство (4.2), окончательно находим  $\sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ .

Обозначенные расчётные исследования с использованием приведённых в работе [97] экспериментальных данных проводим следующим образом. Для каждого варианта композита и каждого варианта значения радиуса  $r$  отверстия, выполненного в испытуемом на растяжение композитном образце, по результатам численного моделирования строим соответствующий график зависимости  $\tilde{\sigma}_e = \tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ . Соответствующие расчётные результаты по всем указанным вариантам представлены в числовом виде в таблице 4.2 и в виде графиков на рисунках 4.1-4.7. Обращаем внимание на то, что все из представленных графиков демонстрируют полное совпадение результатов, получаемых на основе используемых альтернативных КЭ и ВР вычислительных моделей, подтверждая тем самым достоверность этих расчётных результатов.

Таблица 4.2 – Получаемые с использованием заявленной методики расчёта на прочность результаты применительно к семи рассматриваемым вариантам композитов и принятым вариантам значений радиуса  $r$  отверстия в композитном образце

Композит №1				$\sigma_0 = 503$ МПа	
Рис. 4.1 График №	$r_{\text{мм}}$	$d = \tilde{d} \cdot r$	$\tilde{d} = d/r = \tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0 / \sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
1	1,5	1,83	1,22	1,17	429,9
2	2,5	1,83	0,732	1,31	383,97
3	3,75	1,83	0,488	1,52	330,9
4	5	1,83	0,366	1,76	285,8
5	6	1,83	0,305	1,972	255
6	7,5	1,83	0,244	2,34	214,9
Композит №2				$\sigma_0 = 300$ МПа	
Рис. 4.2 График №	$r_{\text{мм}}$	$d = \tilde{d} \cdot r$	$\tilde{d} = d/r = \tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0 / \sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
1	1,5	1,8	1,2	1,172	255,97
2	2,5	1,8	0,72	1,346	222,88
3	3,75	1,8	0,48	1,55	193
4	5	1,8	0,36	1,79	167,6
5	6	1,8	0,3	2	150
6	7,5	1,8	0,24	2,38	126

Композит №3				$\sigma_0 = 216$ МПа	
Рис. 4.3 График №	$r_{\text{мм}}$	$d = \tilde{d} \cdot r$	$\tilde{d} = d/r = \tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0/\sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0/\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
1	1,5	1,912	1,275	1,18	183
2	2,5	1,912	0,765	1,36	158,82
3	3,75	1,912	0,5	1,609	134,24
4	5	1,912	0,382	1,867	115,69
5	6	1,912	0,318	2,105	102,61
6	7,5	1,912	0,255	2,5	86,4
Композит №4				$\sigma_0 = 370$ МПа	
Рис. 4.4 График №	$r_{\text{мм}}$	$d = \tilde{d} \cdot r$	$\tilde{d} = d/r = \tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0/\sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0/\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
1	1,5	1,95	1,3	1,169	316,5
2	2,5	1,95	0,78	1,317	280,94
3	3,75	1,95	0,52	1,528	242,14
4	5	1,95	0,39	1,777	208,21
5	6	1,95	0,325	1,997	185,27
6	7,5	1,95	0,26	2,387	155
Композит №5				$\sigma_0 = 1150$ МПа	
Рис. 4.5 График №	$r_{\text{мм}}$	$d = \tilde{d} \cdot r$	$\tilde{d} = d/r = \tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0/\sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0/\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
1	2,5	1,703	0,682	1,29	891,47
2	3,75	1,703	0,454	1,497	768,2
3	5	1,703	0,341	1,705	674,48
4	6	1,703	0,284	1,835	626,7
5	7,5	1,703	0,227	2,224	517
Композит №6				$\sigma_0 = 610$ МПа	
Рис. 4.6 График №	$r_{\text{мм}}$	$d = \tilde{d} \cdot r$	$\tilde{d} = d/r = \tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0/\sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0/\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
1	2,5	1,875	0,75	1,3	469,2
2	3,75	1,875	0,5	1,48	412
3	5	1,875	0,375	1,69	361
4	6	1,875	0,312	1,87	326,2
5	7,5	1,875	0,25	2,218	275
Композит №7				$\sigma_0 = 385$ МПа	
Рис. 4.7 График №	$r_{\text{мм}}$	$d = \tilde{d} \cdot r$	$\tilde{d} = d/r = \tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0/\sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0/\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
1	2,5	1,875	0,75	1,365	282
2	3,75	1,875	0,5	1,595	241
3	5	1,875	0,375	1,86	207
4	6	1,875	0,312	2,095	183,77
5	7,5	1,875	0,25	2,5	154

В таблице 4.2 для каждого из композитов с номерами 1-7 указано соответствующее значение параметра  $\sigma_0$ , а также указаны значения радиуса  $r$  отверстия, выполненного в испытуемом на растяжение образце из

рассматриваемого композита. В левом столбце таблицы указаны номера (1-6 или 1-5) графиков, соответствующих рассматриваемым значениям радиуса  $r$  отверстия для каждого из композитов с номерами 1-7. Здесь же указаны номера рисунков (4.1-4.7), на которых представлены графики с упомянутыми номерами (1-6 или 1-5), отражающие соответствующие зависимости  $\tilde{\sigma}_e = \tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$  для каждого из семи вариантов композитов. В третьем, четвертом, пятом и шестом столбце таблицы для каждого варианта композита представлены значения параметров  $d$ ,  $\tilde{d}$ ,  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ ,  $\sigma_s$  в соответствии с указанными во втором столбце значениями радиуса  $r$  отверстия в композитном образце. Представлены и формулы, по которым эти параметры могут быть определены.

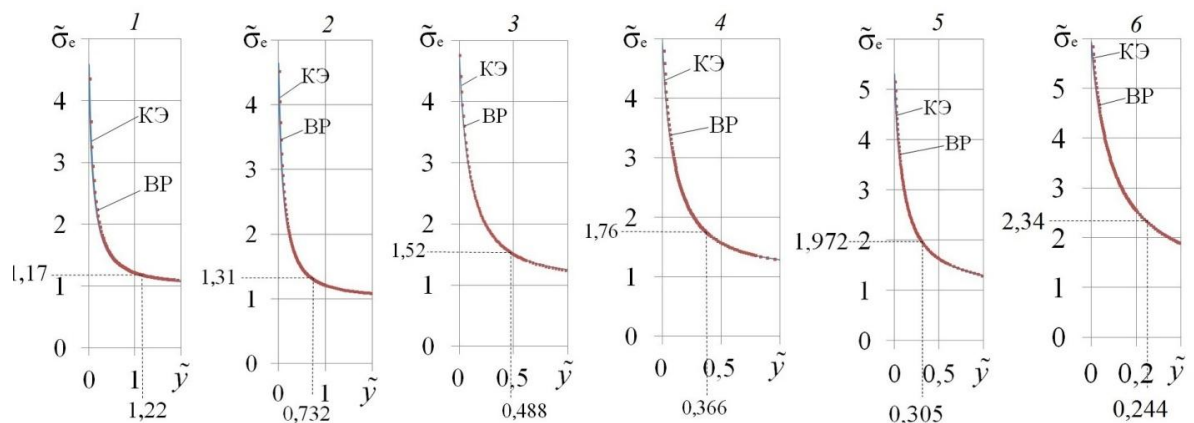


Рисунок 4.1 – Композит №1. Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие шести значениям радиуса  $r$  отверстия в композитном образце

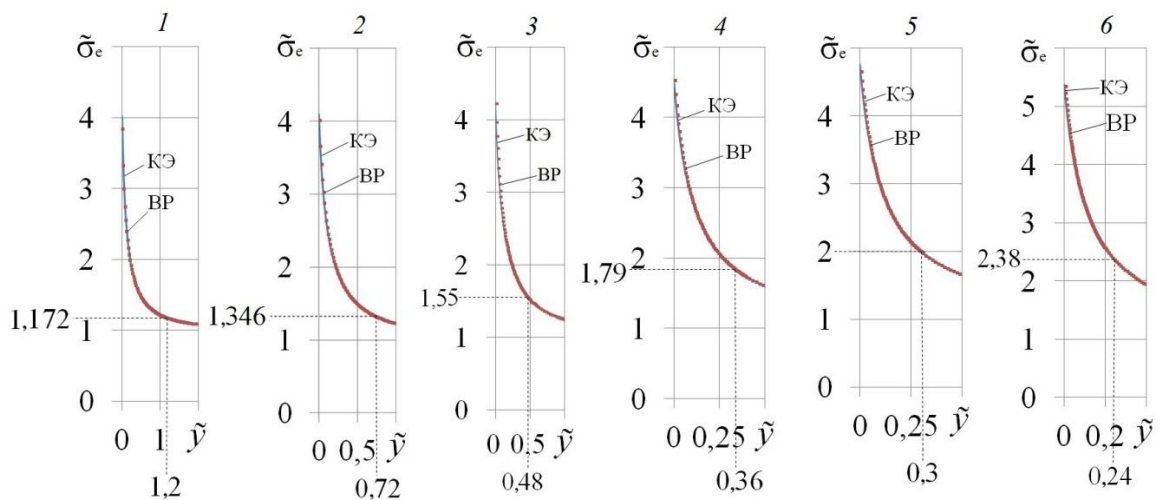


Рисунок 4.2 – Композит №2. Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие шести значениям радиуса  $r$  отверстия в композитном образце



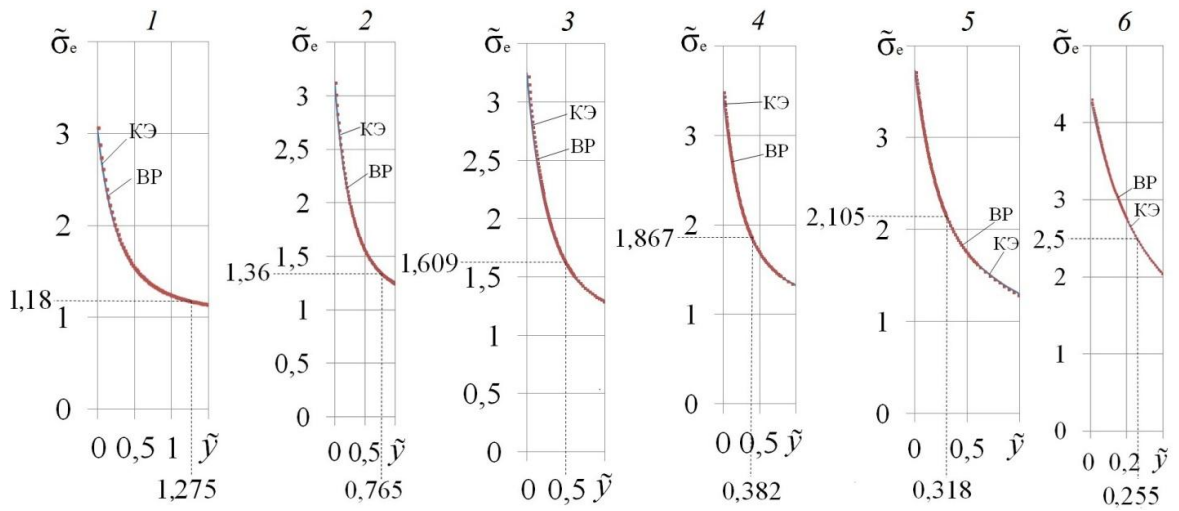


Рисунок 4.3 – Композит №3. Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие шести значениям радиуса  $r$  отверстия в композитном образце

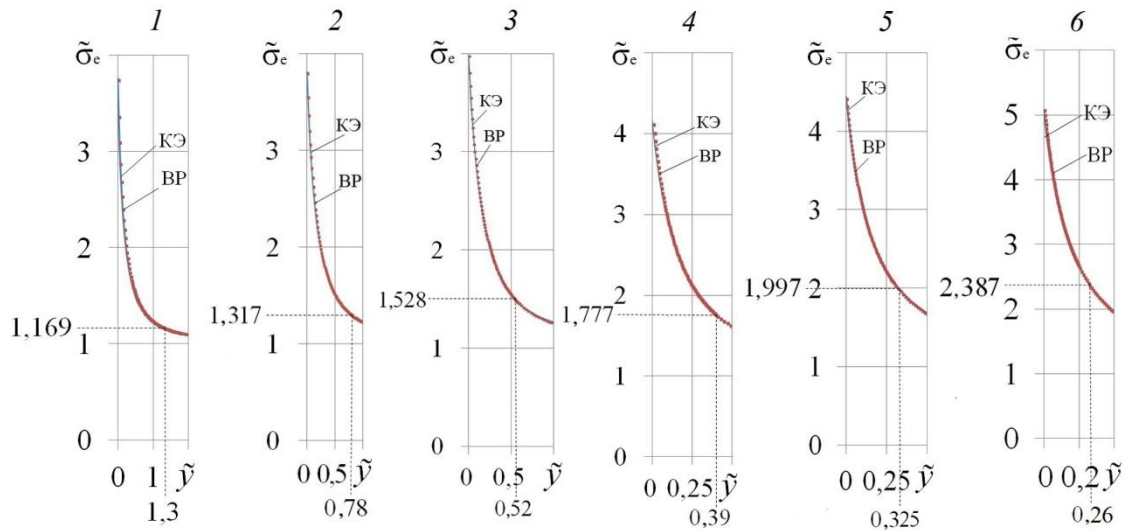


Рисунок 4.4 – Композит №4. Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие шести значениям радиуса  $r$  отверстия в композитном образце

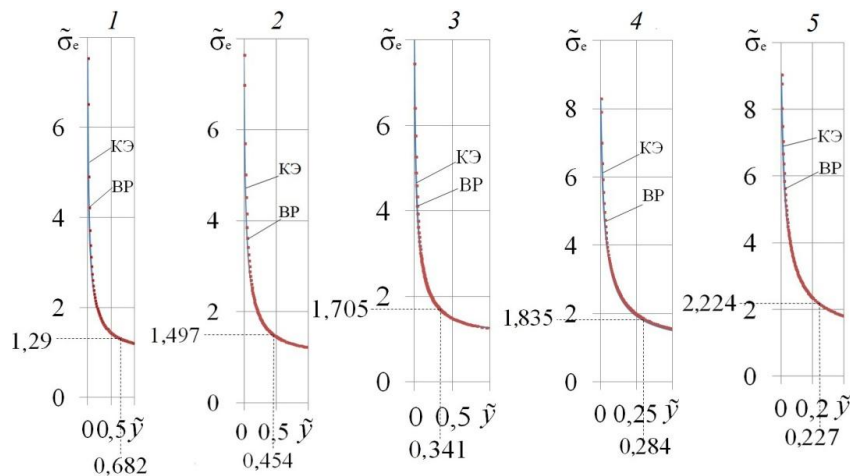


Рисунок 4.5 – Композит №5. Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие пяти значениям радиуса  $r$  отверстия в композитном образце

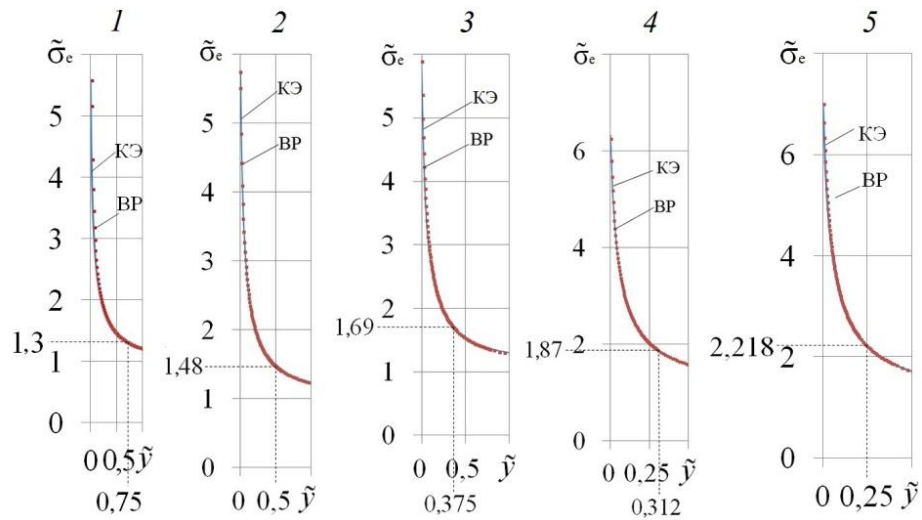


Рисунок 4.6 – Композит №6. Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие пяти значениям радиуса  $r$  отверстия в композитном образце

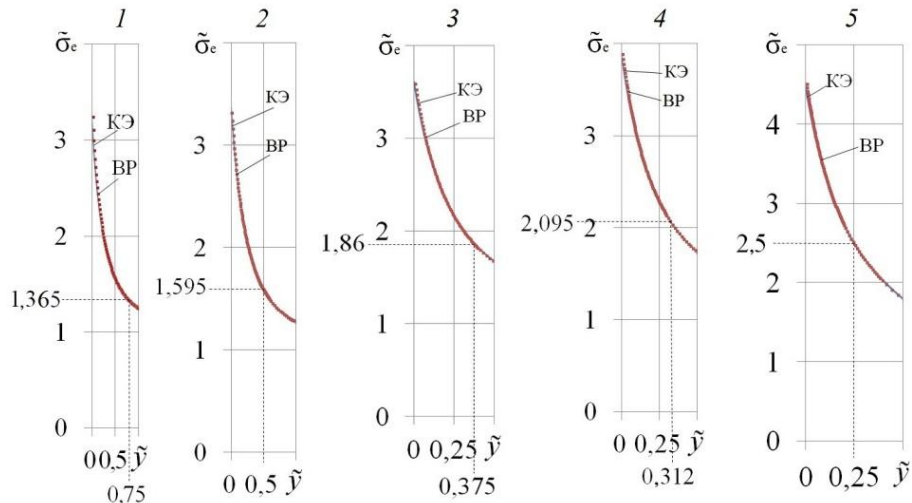


Рисунок 4.7 – Композит №7. Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие пяти значениям радиуса  $r$  отверстия в композитном образце

Процедуру заполнения таблицы 4.2 расчётными результатами продемонстрируем на примере варианта композита с номером 1. Начальным этапом расчёта является определение значения константы  $d$  для принятого к рассмотрению композита. Здесь будем действовать в соответствии с изложенным выше решением 1. Возьмём, например, за основу результаты испытаний на разрыв образца из данного композита, ослабленного отверстием радиусом  $r=6$  мм. Строка в таблице 4.2 (применительно к композиту №1) с указанным значением радиуса выделена жирными линиями. Заполнение этой строки числовыми

результатами осуществляем в направлении справа-налево. Указываем относящееся к выделенному случаю экспериментально полученное значение  $\sigma_s=255$  МПа. Принимая во внимание, что для данного композита  $\sigma_0=503$  МПа, заносим в выделенную строку результат  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)=\sigma_0/\sigma_s=503/255=1,972$ . На указанном в этой строке графике номер 5 рисунка 4.1 по значению  $\tilde{\sigma}_e=1,972$  устанавливаем значение  $\tilde{y}_s=\tilde{d}=0,305$  и заносим его в таблицу. Окончательно вычисляем искомое значение  $d=\tilde{d}\cdot r=0,305\cdot 6=1,83$  и указываем его в таблице. Для всех остальных значений радиуса отверстия в образце из данного композита заполнение соответствующей строки таблицы 4.2 расчётными результатами осуществляется в направлении слева-направо. В качестве примера рассмотрим порядок вычислений для случая  $r=2,5$  мм. Действуем при этом в соответствии с изложенным выше решением 2. Исходим из уже установленного значения  $d=1,83$  и определяем значение  $\tilde{y}_s=\tilde{d}=d/r=1,83/2,5=0,732$  (с занесением его в строку таблицы). На указанном в этой строке графике номер 2 рисунка 4.1 по значению  $\tilde{y}_s=0,732$  устанавливаем значение  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)=1,31$  и заносим его в таблицу. Окончательно вычисляем искомое значение  $\sigma_s=\sigma_0/\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)=503/1,31=383,97$  и указываем его в таблице.

По изложенной процедуре проведены вычисления для всех принятых к рассмотрению вариантов композитов и значений радиусов отверстия в испытуемом на растяжение композитном образце. При этом вычисления, относящиеся к строкам, выделенным жирными линиями, сводились к определению константы  $d$  для соответствующего композита, исходя из заданного значения напряжения  $\sigma_s$ , найденного из эксперимента по растяжению композитного образца с отверстием заданного радиуса  $r$ . Остальные строки заполнялись результатами вычислений, связанных с определением значения напряжения  $\sigma_s$  для соответствующего композитного образца с отверстием заданного радиуса  $r$ , исходя из известного значения константы  $d$  композита.

Полученные расчётные результаты по прогнозу предельного значения  $\sigma_s$

растягивающего напряжения  $\sigma$  для ослабленных круговым отверстием образцов, выполненных из композитов рассматриваемых семи вариантов, представлены на рисунке 4.8 в виде графиков зависимости величины  $\sigma_s/\sigma_0$  от радиуса  $r$  отверстия. Точки на графиках соответствуют экспериментально полученным в работе [97] результатам.

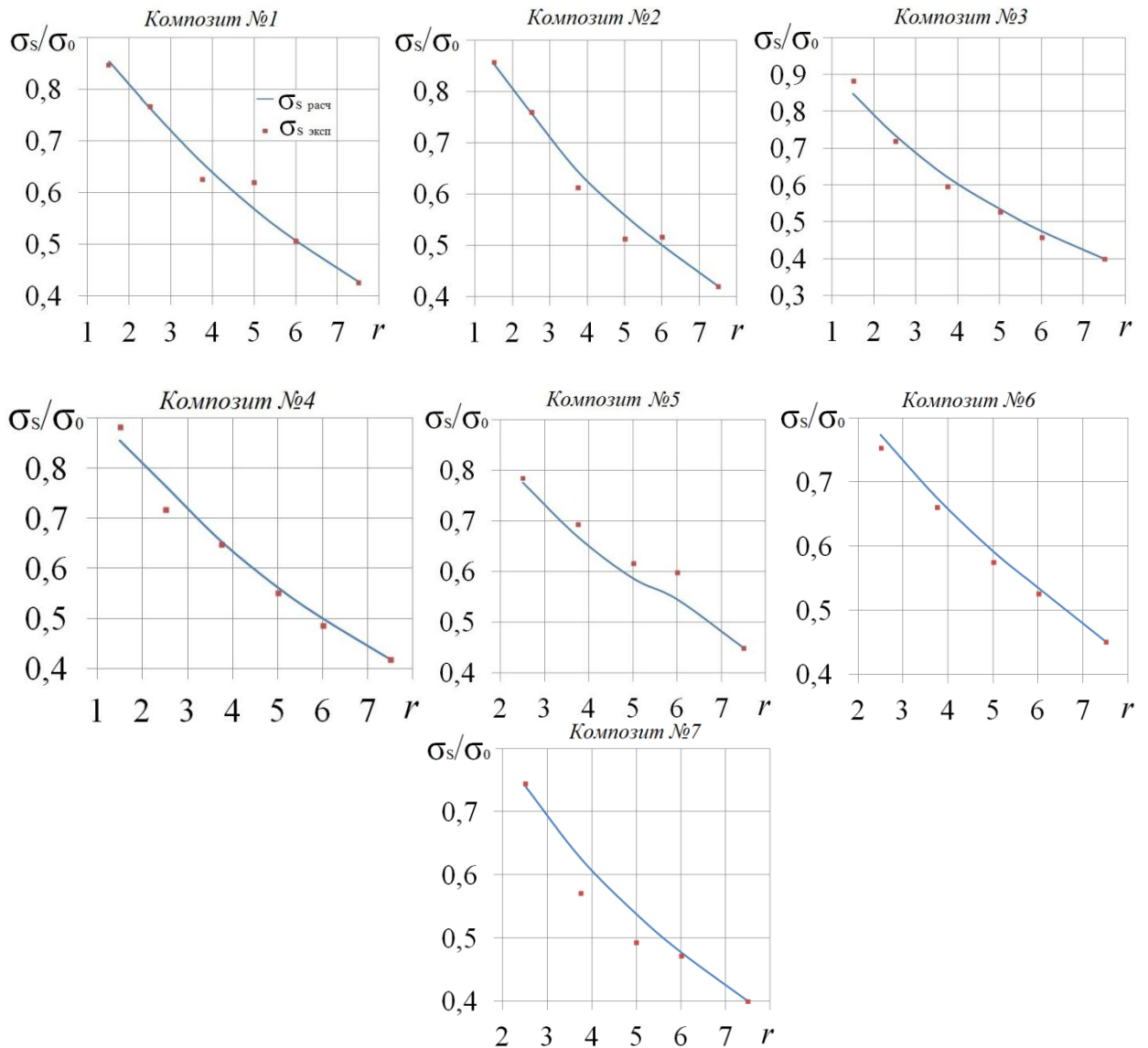


Рисунок 4.8 – Графики зависимости величины  $\sigma_s/\sigma_0$  от радиуса  $r$  (мм) отверстия для семи рассматриваемых вариантов композитов

Видно, что для всех принятых к рассмотрению композитов выполненный на основе заявленной методики расчётный прогноз по прочности растягиваемых образцов с отверстием (различного радиуса), изготовленных из этих композитов,

хорошо согласуется с экспериментом. Отдельные отклонения расчёта от эксперимента находятся в пределах 9%. Представленные графики хорошо иллюстрируют характерный для растягиваемых композитов с отверстием масштабный эффект (обсуждавшийся в первом разделе), а именно с уменьшением радиуса  $r$  отверстия значение параметра  $\sigma_s$  становится всё ближе к значению  $\sigma_0$ . Другими словами, предел прочности на разрыв образца с достаточно малым отверстием становится мало отличимым от предела прочности такого же образца без отверстия.

#### **4.2. Расчётный анализ прочности растягиваемых композитных (на основе однонаправленной системы углеволокон) полос, ослабленных набором круговых отверстий, в сопоставлении с экспериментом**

Проводимый ниже анализ опирается на представленные в работе [105] результаты экспериментальных исследований по определению пределов прочности на разрыв композитных (на основе однонаправленной системы углеволокон) полос, ослабленных набором круговых отверстий. При этом используется методика расчёта на прочность (с оформлением расчётных результатов в удобном для анализа табличном и графическом виде), продемонстрированная выше на примере одноосного растяжения композитов с одним отверстием. Соответствующие (взятые из работы [105]) исходные данные, а также результаты выполненных в рамках используемой методики расчётов приведены в таблицах 4.3, 4.4 и представлены в виде графиков на рисунке 4.9.

Укажем, что испытываемые в работе [105] углепластиковые образцы имели физико-механические характеристики (см. таблицу 4.3), близкие по значениям к характеристикам варианта №5 углепластика, отмеченного в таблице 4.1. Укажем также, что испытываемые полосовые образцы имели толщину  $t=1,2$  мм, ширину  $W=36$  мм, а выполненные в них отверстия имели радиус  $r=3$  мм. При проводимых с использованием обозначенной методики расчётных исследованиях были рассмотрены пять вариантов расположения отверстий в растягиваемой

композитной полосе, отмеченных в таблице 4.4 и изображённых на рисунке 4.9.

Таблица 4.3 – Значения физико-механических характеристик рассматриваемого композита на основе однонаправленной системы угле- волокон

$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$\sigma_0$
81900 МПа	6150 МПа	2770 МПа	0,34	1300 МПа

Описание этих вариантов проведём, опираясь на схемы растягиваемых полос с отверстиями, представленные на рисунке 2.9. Варианты с номерами 1 и 2 соответствуют ситуациям двух поперечно ( $a=8,5\text{мм}$ ,  $c=19\text{мм}$ , см. рисунок 2.9.в) и двух продольно ( $a=18\text{мм}$ ,  $b=19\text{мм}$ , см. рисунок 2.9.б) расположенных отверстий в полосе. Вариант номер 5 расположения отверстий получается из варианта с номером 1, если одно из отверстий переместить вдоль полосы на расстояние 19 мм от своего исходного положения. Вариант номер 4 соответствует вариантам с номерами 1 и 5 при условии отсутствия в них одного из отверстий. Вариант номер 3 соответствует ситуации одного центрального отверстия в полосе. Ось  $Ox$  системы координат  $Oxy$  (см. рисунок 2.9), выбрана (как и в предыдущих исследованиях) в направлении вдоль полосы. Ось  $Oy$  (вдоль которой проходит опасное на разрыв сечение полос) представлена на схемах растяжения полосы (рисунок 4.9) в виде отрезка, проходящего от края полосы до кромки отверстия.

Эксперименты по разрыву рассматриваемых углепластиковых образцов с отверстиями проведены в работе [105] применительно к случаям расположения отверстий в них в соответствии с вариантами 1, 2, 5. Разрыв образцов, относящихся к этим вариантам, зафиксирован при значениях растягивающего напряжения  $\sigma_s(\text{МПа})=815, 1048, 812$ , соответственно. Результатов испытаний на разрыв образцов с одним центральным отверстием (вариант номер 3) в работе [105] не было представлено. В отсутствие таких результатов оценку значения константы  $d$  для данного углепластика (в варианте с номером 3), которая необходима для проведения расчётных прогнозов прочности рассматриваемых образцов с отверстиями, проведём следующим образом.

Таблица 4.4 – Получаемые с использованием заявленной методики расчёта на прочность результаты применительно к пяти рассматриваемым вариантам расположения отверстий в композитном образце

$r=3$ мм				
Вариант расположения отверстий в полосе и его номер $N$	$d = \tilde{d} \cdot r$ (мм)	$\tilde{d} = d / r =$ $= \tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0 / \sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
Два поперечных отверстия ( $N = 1$ )	1,5	0,5	1,505	863,78
Два продольных отверстия, ( $N = 2$ )	1,5	0,5	1,365	952,38
Одно центральное отверстие, ( $N = 3$ )	1,5	0,5	1,432	907,82
Одно краевое отверстие, ( $N = 4$ )	1,5	0,5	1,519	855,82
Два диагональных отверстия, ( $N = 5$ )	1,5	0,5	1,510	860,92

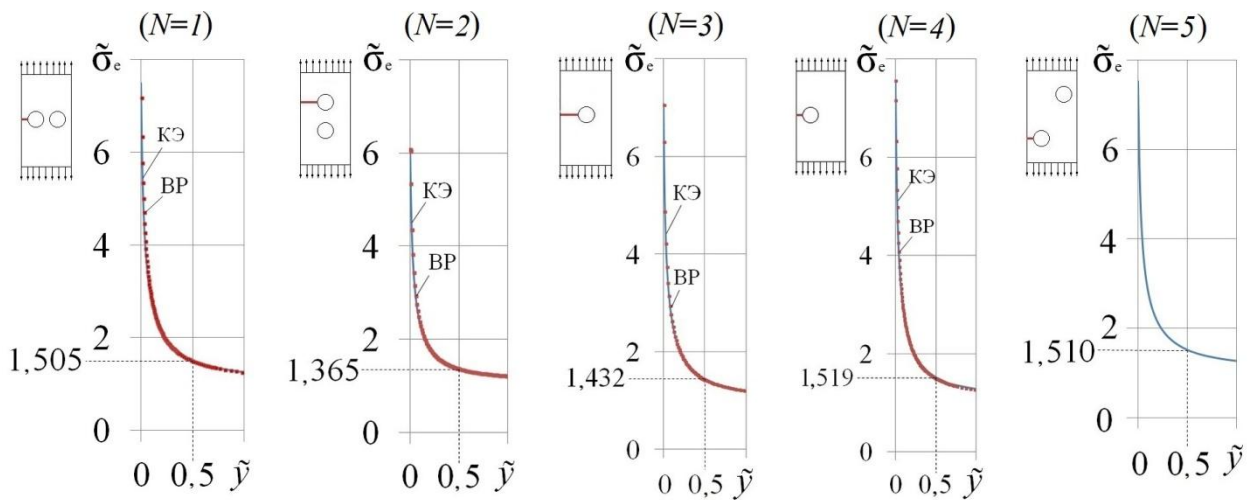


Рисунок 4.9 – Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие пяти рассматриваемым вариантам расположения отверстий в растягиваемой композитной полосе

Судя по имеющимся данным, значение параметра  $\sigma_s$  для обозначенной ситуации с образцом в варианте с номером 3 должно быть порядка 900 МПа. Примерно такое же значение имеет место и в случае близкого по геометрическим и физико-механическим характеристикам образца из композита №5, имеющего отверстие радиуса  $r=2,5$  мм (см. таблицы 4.1, 4.2). Отмеченная близость даёт основание к использованию при проведении оценочных расчётов графика 1 (рисунок 4.5), изображающего соответствующую зависимость  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ . Поскольку

для данного углепластика имеет место  $\sigma_0=1300$  МПа (см. таблицу 4.3), получаем оценку  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)=\sigma_0/\sigma_s=1300/900=1,4$ . Откуда с использованием графика 1, представленного на рисунке 4.5, можно получить оценку  $\tilde{y}_s=\tilde{d}=0,5$ . Применительно к рассматриваемому случаю образца в варианте с номером 3 окончательно получаем  $d=\tilde{d}\cdot r=0,5\cdot 3=1,5$  (мм). Заносим это значение в соответствующий столбец таблицы 4.4 и для указанных в этой таблице вариантов образцов с отверстиями проводим расчёты по описанной выше процедуре с использованием графиков зависимостей  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , представленных на рисунке 4.9, с определением (и занесением в таблицу) соответствующих значений  $\sigma_s$ .

На рисунке 4.10 представлена полученная на основе указанных расчётных значений  $\sigma_s$  диаграмма, иллюстрирующая зависимость величины  $\sigma_s/\sigma_0$  от выбора варианта (с номером  $N$ ) расположения отверстий в рассматриваемой композитной полосе. Здесь же представлены и имеющиеся экспериментальные данные. Как видно, отклонения результатов расчётов от эксперимента находятся в пределах 9%. Сравнивая расчётные результаты для вариантов с номерами 1, 2, 3, отмечаем, что переход от ситуации одного центрального отверстия в рассматриваемой композитной полосе к ситуации с двумя одинаковыми продольно расположенными отверстиями приводит к заметному (пятипроцентному) увеличению прочности на разрыв полосы. Аналогичный переход к случаю с

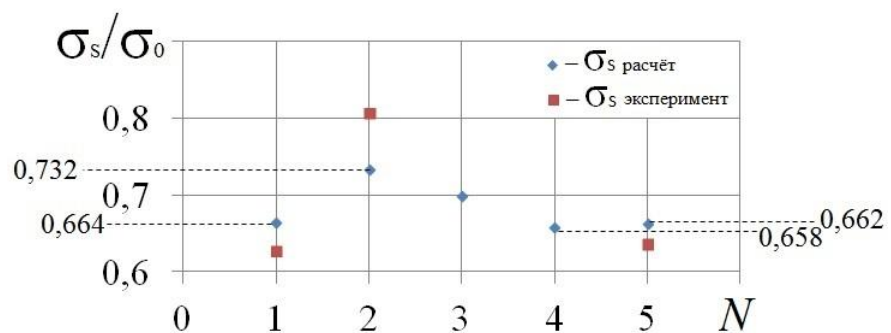


Рисунок 4.10 – Диаграмма, иллюстрирующая зависимость величины  $\sigma_s/\sigma_0$  от выбора варианта (с номером  $N$ ) расположения отверстий в рассматриваемой композитной полосе



поперечно расположенными отверстиями приводит к заметному (пятипроцентному) уменьшению прочности на разрыв полосы. Сравнивая расчётные результаты для вариантов с номерами 1, 4, 5, отмечаем, что при наличии в рассматриваемой полосе одного отверстия, приближенного к её краю, наличие такого же отверстия у другого края не приводит к заметному изменению прочности на разрыв полосы.

В целях сравнения, обратимся теперь к результатам численного моделирования по определению коэффициентов концентрации напряжений применительно к случаю растяжения композитных полос с набором круговых отверстий, представленным в подразделе 2.3. Сравнивая данные таблиц 4.3 и 2.2, отмечаем, что принятый в текущем подразделе углепластик обозначен в подразделе 2.3 как композит с номером 4. Применительно к случаю растяжения полосы (шириной  $W=36$  мм) из такого композита, имеющей отверстие радиусом  $r=3$  мм, численным моделированием получено значение коэффициента концентрации напряжений в виде  $K=7,08$  (см. таблицу 2.3). В случае двух продольно расположенных таких же отверстий (при  $b=19$  мм) получено  $K=6,04$  (см. таблицу 2.4), а в случае двух поперечно расположенных отверстий (при  $c=19$  мм) получено  $K=7,50$  (см. таблицу 2.5). На основе этих данных приходим к выводу, что уровень напряжений в рассматриваемой полосе при переходе от случая одного отверстия к случаю двух продольно расположенных отверстий понижается на 15%, а при переходе к случаю двух поперечно расположенных отверстий повышается на 6%. Сравнивая эти оценки с тем, что получено на основе выполненных прочностных расчётов (с отмеченным выше увеличением прочности на 5% в первом случае и отмеченным её уменьшением на 5% во втором случае), заключаем, что в качественном отношении полученные оценки на основе данных по коэффициентам концентрации напряжений с одной стороны и на основе прочностных расчётов с другой стороны хорошо согласуются друг с другом, но существенно различаются в числовом выражении.

### 4.3. Расчётный анализ прочности растягиваемых композитных (на основе однонаправленной системы стекловолокон) полос, ослабленных набором круговых отверстий, в сопоставлении с экспериментом

В работе [84] представлены результаты экспериментальных исследований по определению пределов прочности на разрыв композитных (на основе однонаправленной системы стекловолокон) полос, ослабленных одним круговым отверстием, а также набором из трёх продольно расположенных (как показано на рисунке 4.11) круговых отверстий. При этом в указанном наборе отверстий центральное отверстие имело радиус  $r$  больший, чем  $r_1$  у двух соседних отверстий. Проводимый ниже расчётный анализ прочности, опирающийся на указанные результаты экспериментальных исследований, осуществляется в рамках той же расчётной методики, что и выше (с оформлением расчётных результатов в удобном для анализа табличном и графическом виде). Соответствующие (взяты из работы [84]) исходные данные, а также результаты выполненных расчётов приведены в таблицах 4.5, 4.6, 4.7 и представлены в виде графиков на рисунках 4.12-4.15.

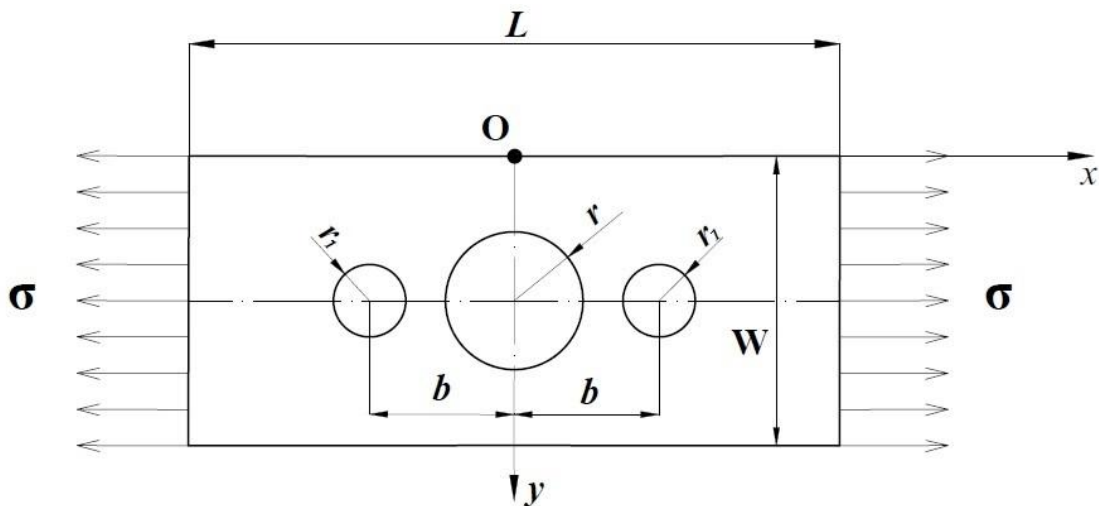


Рисунок 4.11 – Схема растягиваемой композитной полосы с тремя продольно расположенными отверстиями

Укажем, что испытуемые в работе [84] полосовые стеклопластиковые образцы с физико-механическими характеристиками, представленными в таблице 4.5, имели толщину  $t=2$  мм и ширину  $W=25$  мм. Испытания применительно к

случаю полосы, ослабленной одним (центральным) отверстием, проводились с четырьмя видами образцов, имеющих отверстие с радиусом  $r$  (мм) = 1,25; 2,5; 3,75; 5 (соответственно). Экспериментально полученные для этих образцов значения растягивающих напряжений в момент разрыва имеют вид:  $\sigma_s$ (МПа)=427,57; 353,54; 314,93; 274,86 (соответственно). Полученные с применением заявленной расчётной методики значения напряжения  $\sigma_s$  для обсуждаемых четырёх образцов представлены в таблице 4.6.

Таблица 4.5 – Значения физико-механических характеристик рассматриваемого композита на основе однонаправленной системы стекло-волокон

$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$\sigma_0$
22540 МПа	10940 МПа	3540 МПа	0,3	527,04 МПа

Таблица 4.6 – Получаемые с использованием заявленной методики расчёта на прочность результаты применительно к четырём рассматриваемым вариантам значения радиуса  $r$  отверстия в композитной полосе

Рис. 4.12 График №	$r$ (мм)	$d = \tilde{d} \cdot r$ (мм)	$\tilde{d} = d/r = \tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0 / \sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
1	1,25	1,575	1,26	1,166	452
2	2,5	1,575	0,63	1,4	376
3	3,75	1,575	0,42	1,674	314,93
4	5	1,575	0,315	1,988	265

Как видно, значение  $\sigma_s=314,93$  МПа в случае образца с отверстием радиуса  $r=3,75$  мм было использовано для нахождения значения константы  $d=1,575$  мм, соответствующего рассматриваемому композиту. Для удобства сравнения, полученные расчётные и соответствующие экспериментальные результаты по параметру  $\sigma_s$  представлены в графическом виде на рисунке 4.13. Как видно, отклонения расчётных результатов по этому параметру от эксперимента находятся в пределах 6%.

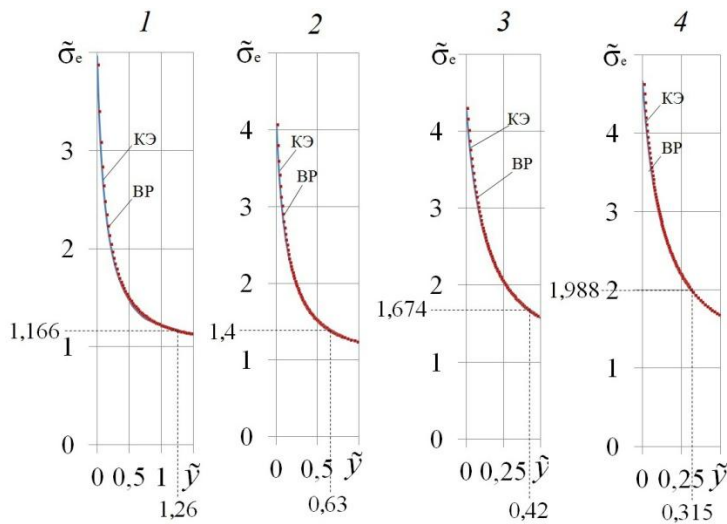


Рисунок 4.12 – Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие четырём значениям радиуса  $r$  отверстия, в композитной полосе

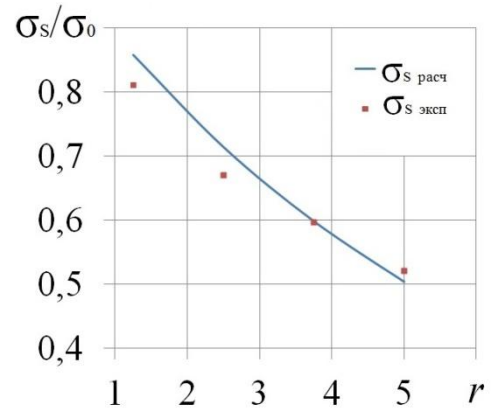


Рисунок 4.13 – График зависимости величины  $\sigma_s/\sigma_0$  от радиуса отверстия  $r_{(мм)}$  в рассматриваемой композитной полосе

При проводимых далее расчётных исследованиях были рассмотрены четыре варианта значений характеристик отверстий ( $r, r_l, b$ ; см. рисунок 4.11) в данной композитной полосе, которые представлены в таблице 4.7. Расчёты по определению значения растягивающего напряжения  $\sigma_s$  в момент разрыва стеклопластиковой полосы для каждого из указанных четырёх вариантов отверстий в ней проводились с применением заявленной методики, исходя из установленного значения  $d=1,575$  мм. При проведении расчётов использовались полученные численным моделированием графики зависимостей  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , приведённые на рисунке 4.14. Полученные расчётом напряжения  $\sigma_s$  представлены в таблице 4.7. Укажем, что экспериментально полученные в работе [84] предельные значения растягивающих напряжений для отмеченных четырёх вариантов отверстий в данной композитной полосе имеют вид:  $\sigma_s(\text{МПа})=413,17; 412,39; 386,34; 348,57$  (соответственно). Для удобства сравнения, полученные расчётные и соответствующие экспериментальные результаты по параметру  $\sigma_s$  для рассматриваемых четырёх вариантов представлены в виде диаграммы на рисунке 4.15.

Таблица 4.7 – Получаемые с использованием заявленной методики расчёта на прочность результаты применительно к рассматриваемым вариантам четырёх продольно расположенных отверстий в композитной полосе

$\sigma_0 = 527,04 \text{ МПа}$							
Вариант номер $N$	$r$ (мм)	$r_1$ (мм)	$b$ (мм)	$d = \tilde{d} \cdot r$ (мм)	$\tilde{d} = d/r = \tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0 / \sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
1	2,5	2,25	6	1,575	0,63	1,35	390
2	2,5	2,25	7	1,575	0,63	1,323	398,33
3	2,5	2	6	1,575	0,63	1,363	386,64
4	2,5	1,25	6	1,575	0,63	1,387	379,95

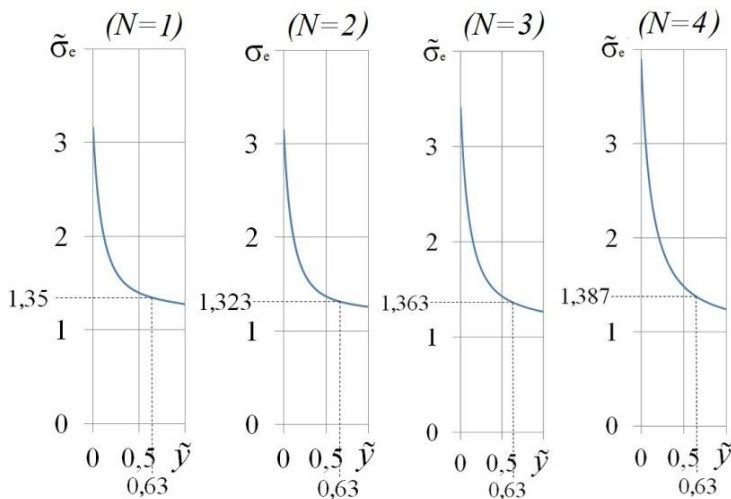


Рисунок 4.14 – Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие четырём рассматриваемым вариантам отверстий в композитной полосе

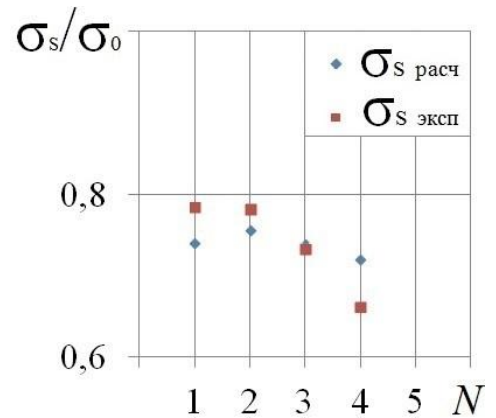


Рисунок 4.15 – Диаграмма, иллюстрирующая зависимость величины  $\sigma_s/\sigma_0$  от номера  $N$  варианта набора отверстий в композитной полосе

со значением радиуса  $r_1$  не меньше толщины композитной полосы. Видно также, что наиболее благоприятным (в смысле прочности) является второй из рассматриваемых вариантов набора отверстий в данной композитной полосе (с  $\sigma_s = 398,33 \text{ МПа}$ ). Сравнивая данные второй строки таблицы 4.6 (где  $\sigma_s = 376 \text{ МПа}$ ) с данными второй строки таблицы 4.7 (где  $\sigma_s = 398,33 \text{ МПа}$ ), заключаем, что переход от ситуации одного центрального отверстия в данной композитной полосе к ситуации с добавочными двумя отверстиями (в соответствии со вторым

из рассматриваемых вариантов набора отверстий) сопровождается шестипроцентным увеличением прочности на разрыв полосы. Если сравнивать значения коэффициентов концентрации напряжений, относящиеся к этим двум ситуациям ( $K=4,1$ ; см. график 2 на рисунке 4.12 и  $K=3,2$ ; см. график 2 на рисунке 4.14), то можно заметить, что уровень напряжений при указанном переходе от одной ситуации к другой уменьшается на 22%. Как видно, подобная оценка в качественном отношении подтверждает преимущество (в смысле прочности) второй из обсуждаемых ситуаций, но является существенно завышенной по сравнению с оценкой 6%, получаемой на основе прочностного расчёта.

#### **4.4. Исследование влияния физико-механических характеристик композитных материалов на прочность растягиваемых выполненных из этих материалов полос с набором круговых отверстий**

В данном подразделе рассматриваются те же конфигурации растягиваемых композитных полос с набором круговых отверстий, что и в двух предыдущих подразделах. Варьированию при этом подвергаются значения физико-механических характеристик композитного материала исследуемых полос. При анализе используется та же, что и выше, методика расчёта на прочность (с оформлением расчётных результатов в соответствующем табличном и графическом виде).

Итак, рассматриваем (как и в подразделе 4.2) варианты с номерами  $N = 1, 2, 3, 4, 5$  растягиваемых композитных полос с одним и двумя различным образом расположенными отверстиями. В качестве вариантов материала исследуемых полос принимаем квазиизотропные (со структурой  $[(0/90)_2]_s$ ) на основе стекло- и угле-волокон композиты, отмеченные номерами №2 и №6 в таблице 4.1, где представлены их физико-механические характеристики. Соответствующие результаты расчётов на прочность при одноосном растяжении рассматриваемых композитных полос в случае варианта №2 композита представлены числовыми данными, оформленными в виде таблицы 4.8, а также в виде графических иллюстраций на рисунках 4.16, 4.17.

Аналогичные результаты расчётов в случае варианта №6 композита оформлены в виде таблицы 4.9, а также в виде графических иллюстраций на рисунках 4.18, 4.19.

Обращаясь к диаграммам, представленным на рисунках 4.10 и 4.19, отмечаем, что значения  $\sigma_s/\sigma_0$  для вариантов с номерами  $N=1,2,3,4,5$  расположения отверстий в композитной (на основе однонаправленной системы углеволокон) полосе и квазиизотропной (на основе ортогональной системы углеволокон) полосе описываются числовыми наборами вида

Таблица 4.8 – Получаемые с использованием заявленной методики расчёта на прочность результаты применительно к пяти рассматриваемым вариантам расположения отверстий в квазиизотропном композитном образце на основе стекловолокон

$r=3$ мм				
Вариант расположения отверстий в полосе и его номер $N$	$d = \tilde{d} \cdot r$ (мм)	$\tilde{d} = d/r = \tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0/\sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
Два поперченных отверстия ( $N = 1$ )	1,8	0,6	1,488	201,61
Два продольных отверстия, ( $N = 2$ )	1,8	0,6	1,341	223,71
Одно центральное отверстие, ( $N = 3$ )	1,8	0,6	1,396	214,9
Одно краевое отверстие, ( $N = 4$ )	1,8	0,6	1,505	199,33
Два диагональных отверстия, ( $N = 5$ )	1,8	0,6	1,504	199,46

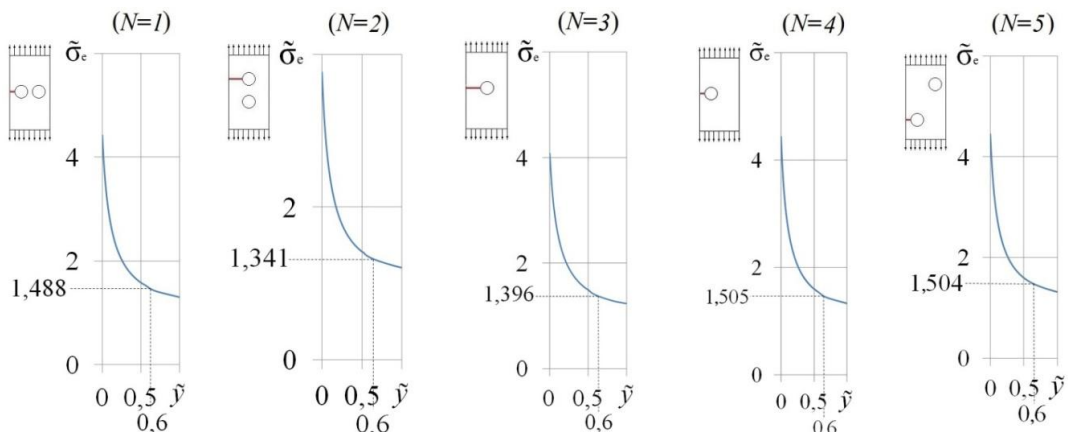


Рисунок 4.16 – Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие пяти рассматриваемым вариантам расположения отверстий в растягиваемом квазиизотропном композитном образце на основе стекловолокон

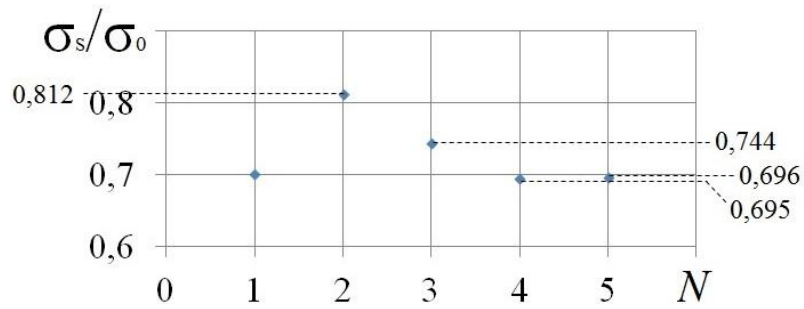


Рисунок 4.17 – Диаграмма, иллюстрирующая зависимость величины  $\sigma_s/\sigma_0$  от выбора варианта (с номером  $N$ ) расположения отверстий в рассматриваемом квазиизотропном композитном образце на основе стекловолокон

Таблица 4.9 – Получаемые с использованием заявленной методики расчёта на прочность результаты применительно к пяти рассматриваемым вариантам расположения отверстий в квазиизотропном композитном образце на основе углеволокон

$r=3$ мм				
Вариант расположения отверстий в полосе и его номер $N$	$d = \tilde{d} \cdot r$ (мм)	$\tilde{d} = d/r =$ $= \tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0/\sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
Два поперченных отверстия ( $N=1$ )	1,875	0,625	1,426	427,76
Два продольных отверстия, ( $N=2$ )	1,875	0,625	1,231	495,5
Одно центральное отверстие, ( $N=3$ )	1,875	0,625	1,343	454,2
Одно краевое отверстие, ( $N=4$ )	1,875	0,625	1,438	424,2
Два диагональных отверстия, ( $N=5$ )	1,875	0,625	1,436	424,8

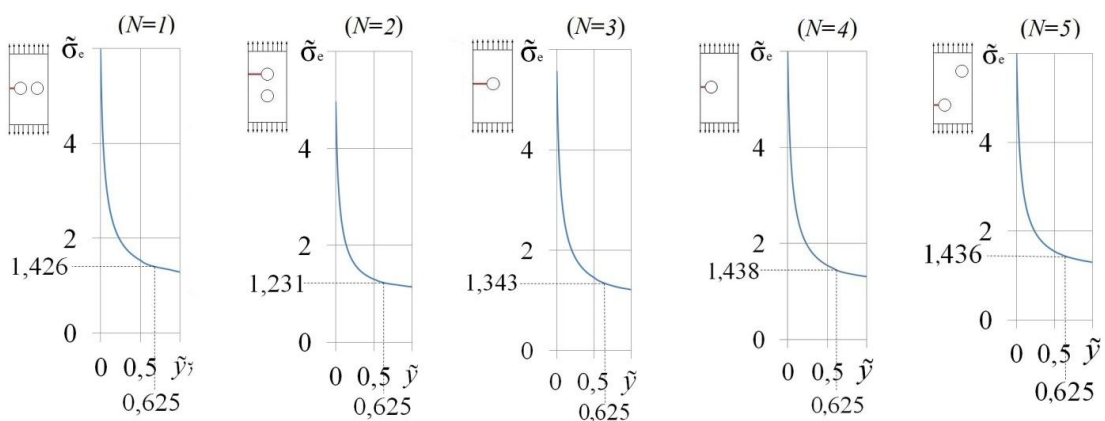


Рисунок 4.18 – Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ , соответствующие пяти рассматриваемым вариантам расположения отверстий в растягиваемом квазиизотропном композитном образце на основе углеволокон



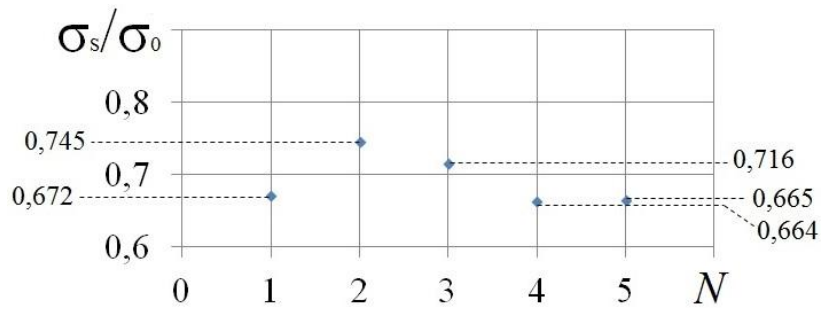


Рисунок 4.19 – Диаграмма, иллюстрирующая зависимость величины  $\sigma_s/\sigma_0$  от выбора варианта (с номером  $N$ ) расположения отверстий в рассматриваемом квазиизотропном композитном образце на основе углеволокон

(0,664; 0,732; 0,698; 0,658; 0,662) и (0,672; 0,745; 0,716; 0,664; 0,665), соответственно. Как видно, существенных изменений в значениях  $\sigma_s/\sigma_0$  в связи с переходом от одного из сравниваемых типов углепластика к другому не происходит.

Аналогичным образом сравним диаграммы, представленные на рисунках 4.10 и 4.17, которые характеризуются числовыми (по параметру  $\sigma_s/\sigma_0$ ) наборами (0,664; 0,732; 0,698; 0,658; 0,662) и (0,7; 0,812; 0,744; 0,695; 0,696), соответственно. Как видно, в данном случае переход от углепластика на основе однонаправленной системы волокон к квазиизотропному стеклопластику с ортогональной системой волокон ведёт к увеличению рассматриваемых показателей (по параметру  $\sigma_s/\sigma_0$ ) на (5,4%;11%;6,6%;5,6%;5,1%), соответственно. По представленным числовым данным, относящимся к вариантам с номерами ( $N=2$  и  $N=3$ ) расположения отверстий в растягиваемой композитной полосе, также видно, что в случае первого из сравниваемых композитов переход от ситуации одного центрального отверстия в композитной полосе к ситуации двух одинаковых продольно расположенных отверстий в ней приводит к увеличению её прочности на 5%, а в случае второго из рассматриваемых композитов отмеченный эффект оценивается величиной 9%.

Теперь перейдём к рассмотрению (как и в подразделе 4.3) вариантов (с номерами  $N = 1, 2, 3, 4$ ) растягиваемых композитных полос с набором из трёх

продольно расположенных (как показано на рисунке 4.11) круговых отверстий, а также с одним круговым отверстием ( $N=5$ ). В качестве вариантов материала исследуемых полос принимаем композиты, отмеченные номерами №2, №3, №4, №6, №7 в таблице 4.1, где представлены их физико-механические характеристики. Соответствующие результаты расчётов на прочность при одноосном растяжении рассматриваемых полос, выполненных из композитов с перечисленными номерами, применительно к принятым пяти случаям ( $N=1, 2, 3, 4, 5$ ) расположения отверстий в полосе представлены числовыми данными, оформленными в виде таблицы 4.10, а также в виде графических иллюстраций на рисунках 4.20-4.25.

Представленные на рисунке 4.25 в виде диаграмм итоговые результаты проведённых расчётов на прочность растягиваемых композитных полос с тремя отверстиями, а также с одним отверстием позволяют сделать следующие выводы.

Как видно из диаграмм, относящихся к композитам №2 и №4, добавление к одному имеющемуся в соответствующей композитной полосе отверстию двух соседних отверстий не приводит к понижению её прочности на разрыв. Наблюдается даже некоторое повышение прочности в случае расположения отверстий по схеме, обозначенной номером  $N=2$ .

Таблица 4.10 – Получаемые с использованием заявленной методики расчёта на прочность результаты применительно к рассматриваемым случаям (с номерами  $N=1,2,3,4$ ) трёх продольно расположенных отверстий и одного отверстия ( $N=5$ ) в полосе, выполненной из композита с заданным номером №

Композит №2							
Случай номер $N$	$r$ (мм)	$r_1$ (мм)	$b$ (мм)	$d = \tilde{d} \cdot r$ (мм)	$\tilde{d} = d / r =$ $= \tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0 / \sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
1	2,5	2,25	6	1,8	0,72	1,332	225,22
2	2,5	2,25	7			1,318	227,61
3	2,5	2	6			1,335	224,7
4	2,5	1,25	6			1,342	223,54
5	2,5	–	–			1,346	222,88

Композит №3							
Случай номер $N$	$r$ (мм)	$r_1$ (мм)	$b$ (мм)	$d = \tilde{d} \cdot r$ (мм)	$\tilde{d} = d/r =$ $\tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0 / \sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
1	2,5	2,25	6	1,912	0,765	1,283	168,35
2	2,5	2,25	7			1,307	165,26
3	2,5	2	6			1,303	165,7
4	2,5	1,25	6			1,343	160,83
5	2,5	–	–			1,36	158,82
Композит №4							
Случай номер $N$	$r$ (мм)	$r_1$ (мм)	$b$ (мм)	$d = \tilde{d} \cdot r$ (мм)	$\tilde{d} = d/r =$ $\tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0 / \sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
1	2,5	2,25	6	1,95	0,78	1,306	283,3
2	2,5	2,25	7			1,286	287,7
3	2,5	2	6			1,309	282,6
4	2,5	1,25	6			1,315	281,4
5	2,5	–	–			1,317	280,9
Композит №6							
Случай номер $N$	$r$ (мм)	$r_1$ (мм)	$b$ (мм)	$d = \tilde{d} \cdot r$ (мм)	$\tilde{d} = d/r =$ $\tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0 /$ $\sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
1	2,5	2,25	6	1,875	0,75	1,338	455,9
2	2,5	2,25	7			1,332	458
3	2,5	2	6			1,323	461,4
4	2,5	1,25	6			1,305	467,5
5	2,5	–	–			1,3	469,2
Композит №7							
Случай номер $N$	$r$ (мм)	$r_1$ (мм)	$b$ (мм)	$d = \tilde{d} \cdot r$ (мм)	$\tilde{d} = d/r =$ $\tilde{y}_s$	$\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0 /$ $\sigma_s$	$\sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ (МПа)
1	2,5	2,25	6	1,875	0,75	1,293	297,75
2	2,5	2,25	7			1,279	301
3	2,5	2	6			1,311	293,66
4	2,5	1,25	6			1,347	285,82
5	2,5	–	–			1,365	282

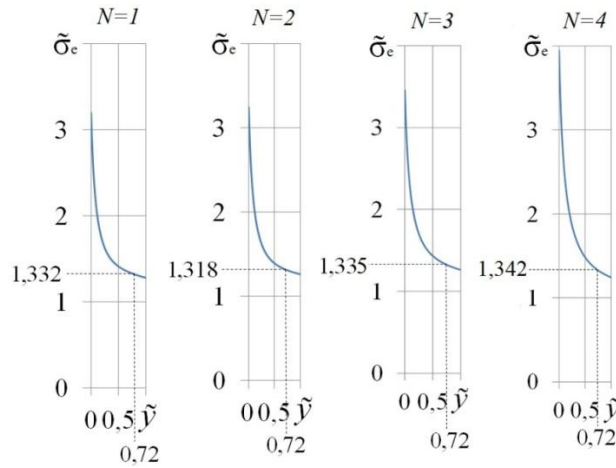


Рисунок 4.20 – Композит №2. Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие четырём случаям ( $N=1, 2, 3, 4$ ) расположения отверстий в композитной полосе

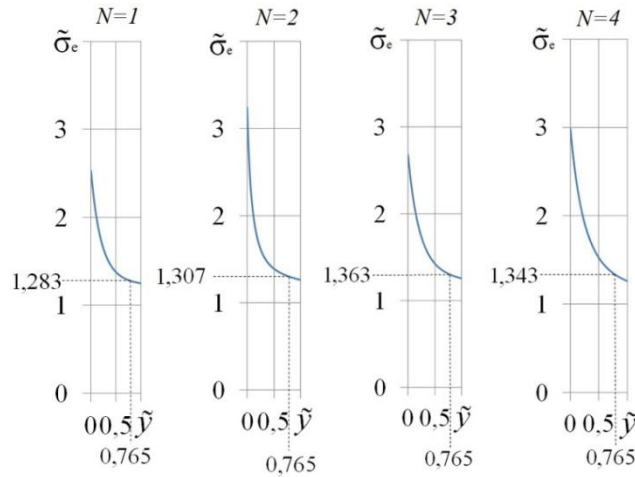


Рисунок 4.21 – Композит №3. Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие четырём случаям ( $N=1, 2, 3, 4$ ) расположения отверстий в композитной полосе

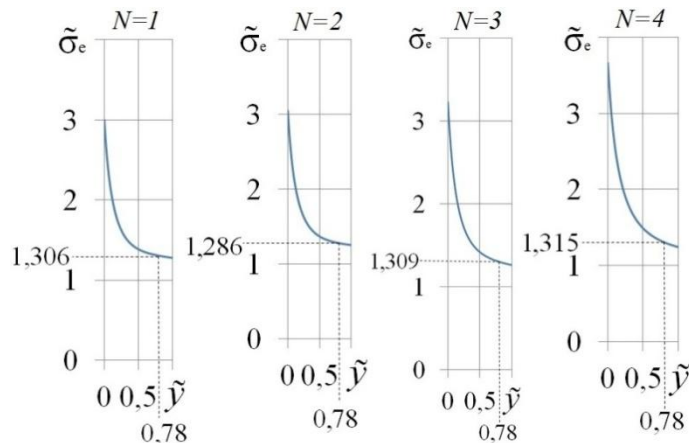


Рисунок 4.22 – Композит №4. Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие четырём случаям ( $N=1, 2, 3, 4$ ) расположения отверстий в композитной полосе

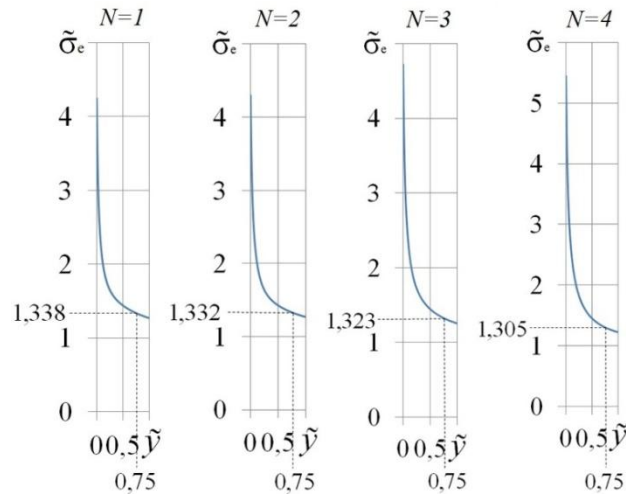


Рисунок 4.23 – Композит №6. Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие четырём случаям ( $N=1, 2, 3, 4$ ) расположения отверстий в композитной полосе

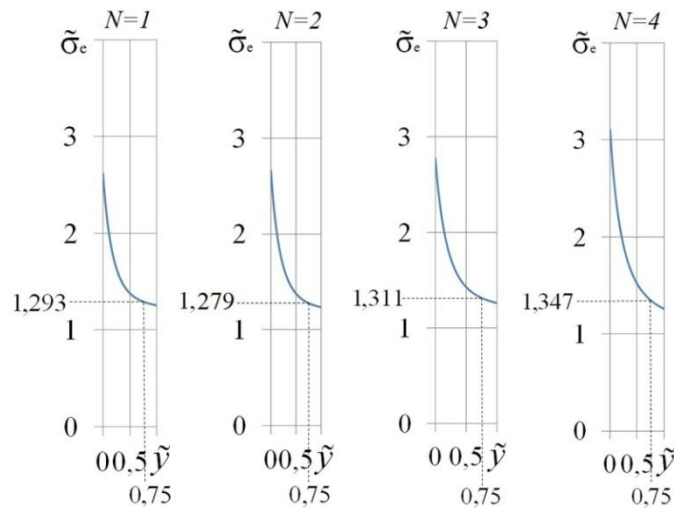


Рисунок 4.24 – Композит №7. Графики зависимости  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y})$ , соответствующие четырём случаям ( $N=1, 2, 3, 4$ ) расположения отверстий в композитной полосе

Судя по диаграмме, относящейся к композиту №6, отмеченное добавление к одному отверстию двух соседних отверстий понижает прочность на разрыв соответствующей полосы. Лишь в случае схемы расположения отверстий в соответствии с номером  $N=4$  указанное понижение прочности оказывается несущественным.

Наконец, диаграммы, относящиеся к композитам №3 и №7, демонстрируют эффект повышения прочности на разрыв соответствующей композитной полосы при добавлении к одному отверстию двух соседних отверстий. Применительно к

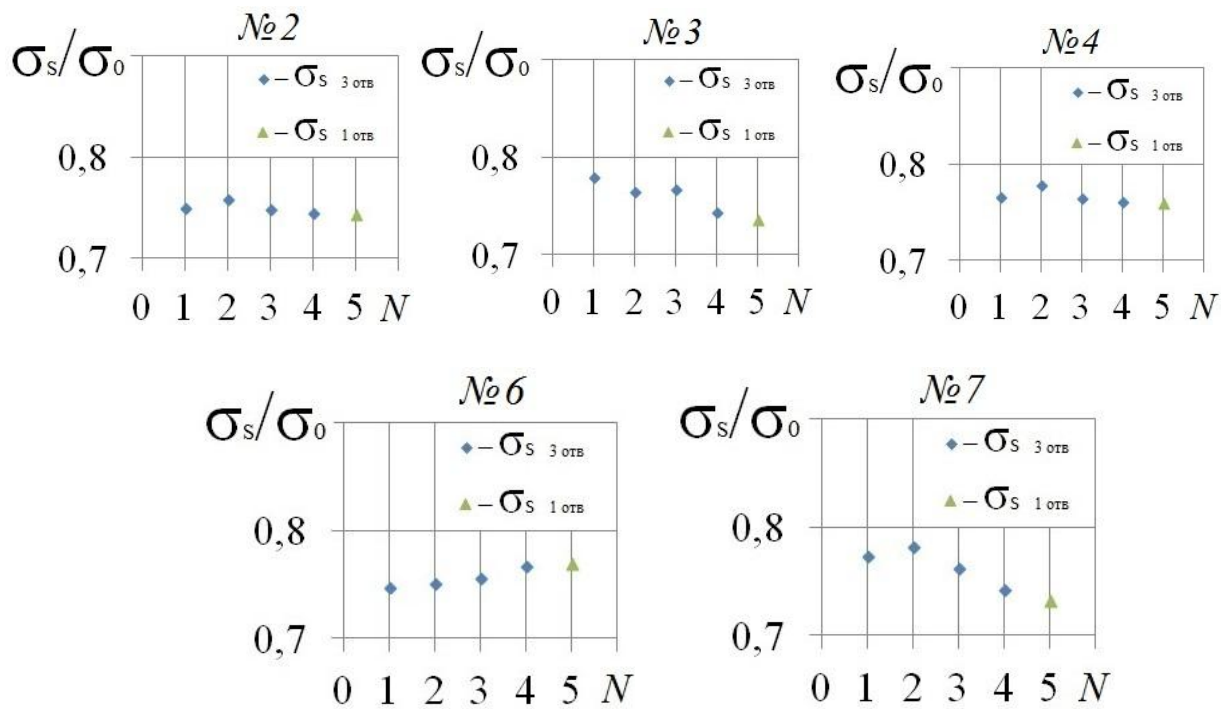


Рисунок 4.25 – Диаграмма, иллюстрирующая зависимость величины  $\sigma_s/\sigma_0$  от номера  $N$  ( $N=1,2,3,4,5$ ) случая расположения отверстий в полосе, выполненной из композита с указанным номером №

схемам расположения отверстий, отвечающих случаю с  $N=1$  (композит №3) и случаю с  $N=2$  (композит №7) указанный эффект оценивается величиной 6% и 7%, соответственно.

#### 4.5 Расчётно-экспериментальное исследование прочности растягиваемых стеклотекстолитовых образцов с круговыми отверстиями

Отметим, что разрушение рассмотренных выше угле- и стеклопластиков в условиях одноосного растяжения имело отчётливо выраженный хрупкий характер с резким спадом значения растягивающей нагрузки в момент разрыва. Для подобного типа разрушения характерен обсуждавшийся выше «масштабный эффект». Именно на такой тип разрушения ориентирован принятый при расчёте на прочность «критерий напряжений в точке». Но возможны и ситуации квазихрупкого характера разрушения отмеченного типа композитов, когда в момент разрыва обнаруживаются проявления эффектов вязкости в зоне разрушения растягиваемого композитного образца. В таких ситуациях

масштабный эффект может проявляться в существенно меньшей степени [57]. Если исходить из того, что масштабный эффект для какого-либо из рассматриваемых типов композитов (с квазихрупким характером разрушения) практически отсутствует, можно предположить, что в случае такого композита прочностной расчёт с применением «критерия напряжений в точке» допустимо проводить, принимая в качестве константы материала безразмерный параметр  $\tilde{d} = d/r$  (вместо используемого в предыдущих исследованиях параметра  $d$ ). Укажем, что в процессе проведения лабораторных испытаний по одноосному растяжению различной структуры композитных образцов был обнаружен стеклотекстолит с отмеченным квазихрупким характером разрушения. Ниже излагаются результаты выполненных с указанным стеклотекстолитом расчётно-экспериментальных исследований в подтверждение применимости обозначенной модификации критерия напряжений в точке для оценки прочности на разрыв подобного типа композитных образцов с круговыми отверстиями. Эксперименты осуществлялись с использованием гидравлической машины EUS-20, предназначенной для проведения испытаний материалов на прочность при растяжении, сжатии и изгибе в режиме статического нагружения. Машина оснащена программно-аппаратным комплексом регистрации параметров нагружения с возможностью подключения к любому из 8 измерительных каналов любого датчика тензометрического типа.

Для измерения нагрузки, прикладываемой к образцу, с помощью датчика, связанного с регистрирующей аппаратурой, замерялось давление в цилиндре испытательной машины, которое пропорционально прикладываемой нагрузке. Система регистрации параметров нагружения основана на модульных преобразователях фирмы National Instruments и разработанном на базе аппаратного комплекса LabView программном обеспечении. Кроме того в процессе эксперимента с регистрирующей аппаратуры подавался выходной сигнал (до 10 В), пропорциональный нагрузке, на систему корреляции цифровых изображений Vic-3D с целью синхронизации деформированного состояния образца с параметрами нагружения.

Укажем, что система Vic-3D состоит из компьютера, цифровых камер, набора объективов, программного обеспечения, в котором реализованы соответствующая математическая база и алгоритмы автоматизированной обработки фотографий. В основу системы Vic-3D положен оптико-геометрический метод, подразумевающий наличие бесконтактной связи между исследуемым объектом и оптическим устройством, регистрирующим отдельные геометрические элементы объекта. Регистрация осуществлялась с помощью видеокамеры. Запись нагрузки и перемещений производилась модульной системой сбора и обработки результатов National Instruments и Vic3D.

В проводимых экспериментах использовались образцы (толщиной 10 мм), вырезанные (в направлениях осей ортотропии) из стеклотекстолита, изготовленного на основе стеклоткани с эпоксидным связующим. Таким образом, растяжению в экспериментах подвергались два типа образцов, различающихся физико-механическими характеристиками. Расчётно-экспериментальные исследования осуществлялись с выбором прямоугольной системы координат  $Oxyz$ , оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  которой соответствуют направлениям по длине, ширине и толщине рассматриваемых образцов.

На основе предварительно выполненных испытаний определены значения параметров упругости рассматриваемого стеклотекстолита. Согласно этим данным, значения параметров упругости для каждого из указанных двух типов (I и II) образцов имеют вид:

$$(I): E_1=18000 \text{ МПа}; E_2=27000 \text{ МПа}; G_{12}=4200 \text{ МПа}; \nu_{12}=0,12; \nu_{21}=0,18;$$

$$(II): E_1=27000 \text{ МПа}; E_2=18000 \text{ МПа}; G_{12}=4200 \text{ МПа}; \nu_{12}=0,18; \nu_{21}=0,12;$$

Здесь индексы 1 и 2 соответствуют осям  $Ox$  и  $Oy$ .

В сериях из трёх испытаний для каждого из рассматриваемых двух типов (I и II) образцов (без отверстий) определены значения параметра  $\sigma_0$ .

Полученные результаты имеют вид:

$$(I): \sigma_0=241 \text{ МПа}, 242 \text{ МПа}, 267 \text{ МПа}; \quad \text{среднее значение } \sigma_0=250 \text{ МПа};$$

$$(II): \sigma_0=377 \text{ МПа}, 385 \text{ МПа}, 437 \text{ МПа}; \quad \text{среднее значение } \sigma_0=400 \text{ МПа}.$$

Ряд иллюстративных материалов по этому виду испытаний применительно



к образцам типа  $\Gamma'$  (имеющих, в отличие от образцов типа  $\Gamma$ , толщину 20 мм) представлен на рисунке 4.26. Наблюдаемое здесь (на стадии предразрушения образца  $\Gamma'$ -3) явление локализации деформации (рисунок 4.26.а), характеризуемое появлением узкого красно-жёлтого участка с высоким уровнем деформаций  $\varepsilon_x$ , свидетельствует о вязком характере деформирования в зоне разрушения исследуемых стеклотекстолитовых образцов. Об этом же свидетельствует и диаграмма растяжения образца  $\Gamma'$ -3 (рисунок 4.26.б) с чётко выраженным участком текучести в момент разрушения.

На рисунке 4.27 представлены схемы исследуемых образцов (с одним, двумя и восемью малыми круговыми отверстиями), нагруженных равномерно распределёнными по торцам растягивающими напряжениями  $\sigma$ . Опасным на разрыв сечением в рассматриваемых случаях является сечение, проходящее вдоль оси  $Oy$ . Численное решение каждой из рассматриваемых линейно-упругих задач о напряжённо-деформированном состоянии сведено к определению нормальных (растягивающих) напряжений в указанном сечении (обозначенных выше как  $\sigma_e$ ), полагая  $\sigma=1$ .

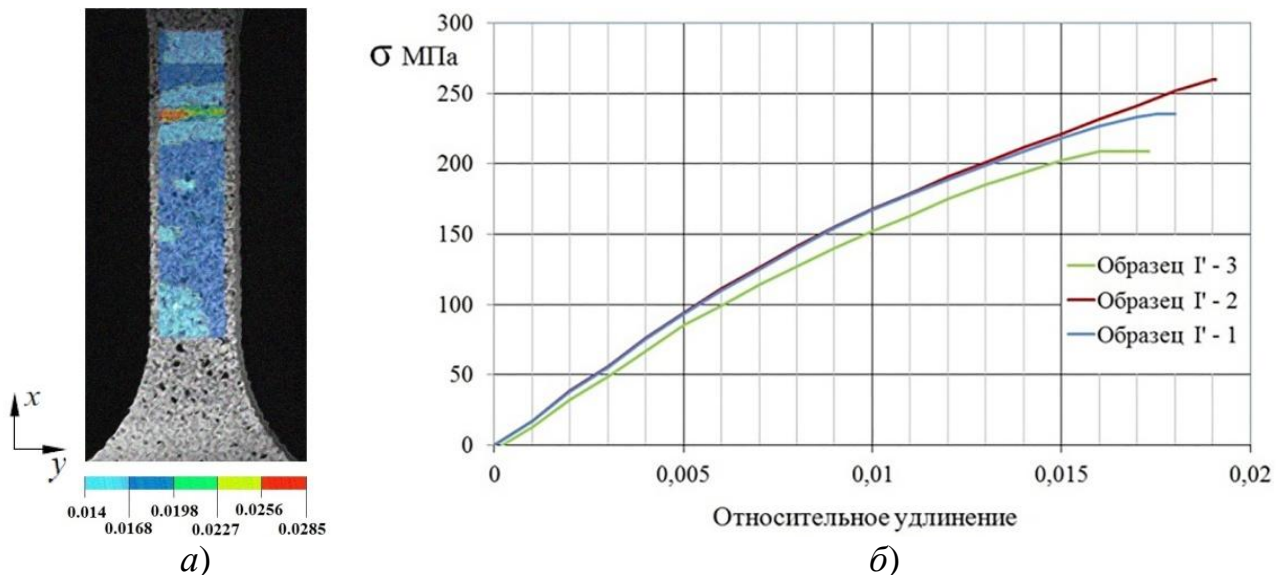


Рисунок 4.26 – Картограмма распределения деформаций  $\varepsilon_x$  поверхности образца  $\Gamma'$ -3 перед разрушением (а) и зависимости растягивающих напряжений  $\sigma$  от относительных удлинений для трёх образцов данного типа (б)

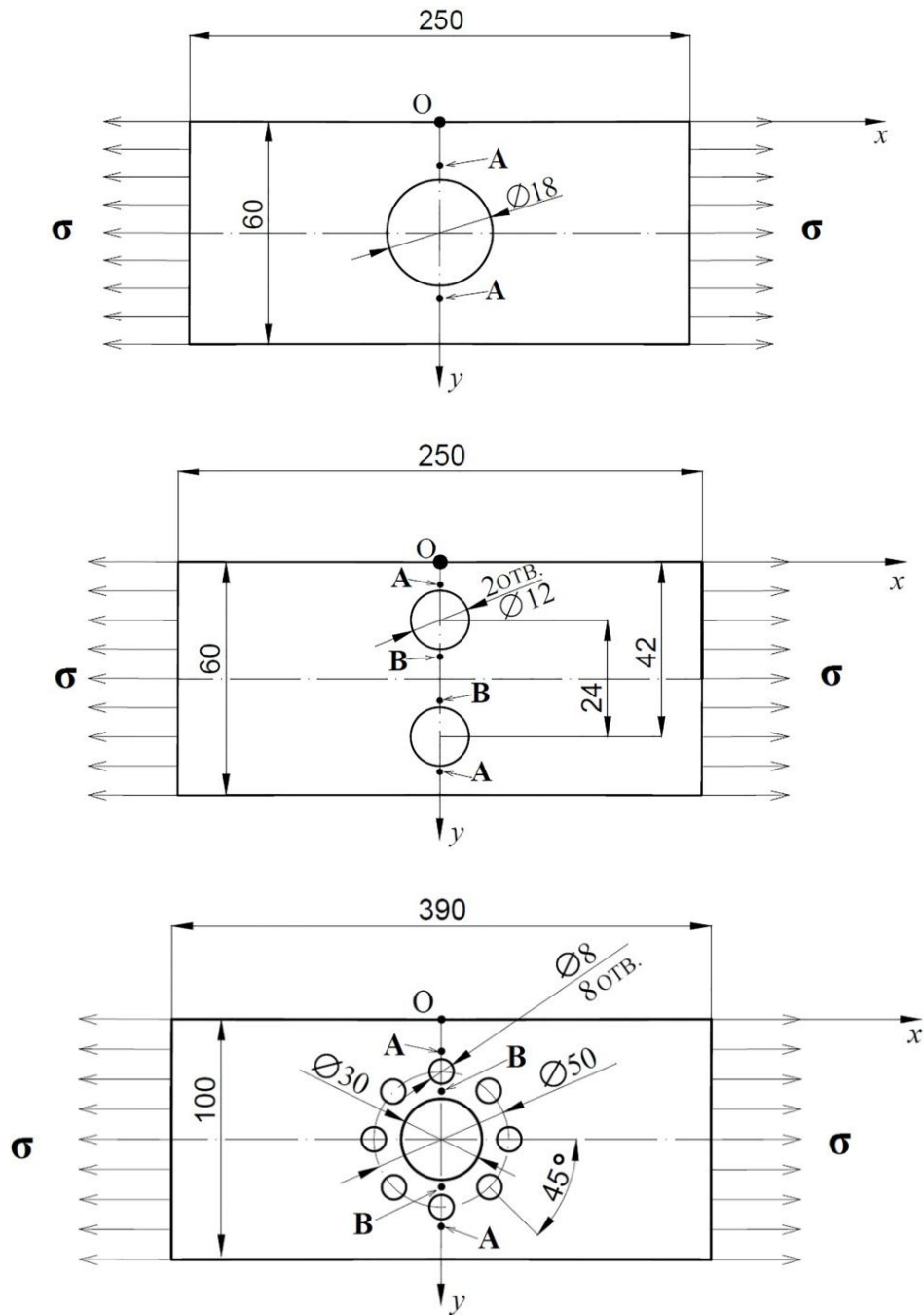


Рисунок 4.27 – Схемы одноосно растягиваемых стеклотекстолитовых образцов с одним, двумя и восемью малыми отверстиями

Для всех случаев в результате расчётов получены отмеченные выше зависимости  $\tilde{\sigma}_e = \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$ . Часть из них представлена на рисунках 4.28-4.30. Достоверность полученных решений подтверждается совпадением соответствующих расчётных результатов на основе альтернативных вычислительных моделей.

В сериях из трёх испытаний для каждого из рассматриваемых двух типов (I

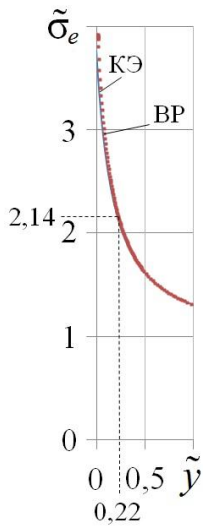


Рисунок 4.28 –

Распределение напряжений  $\sigma_e$  вдоль оси  $Oy$  в случае растяжения образца типа I с одним отверстием

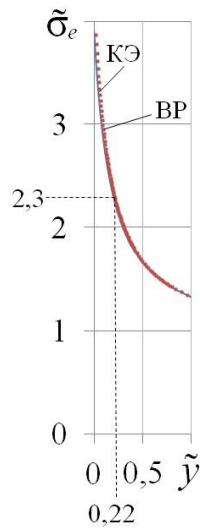


Рисунок 4.29 –

Распределение напряжений  $\sigma_e$  вдоль оси  $Oy$  в случае растяжения образца типа I с двумя отверстиями

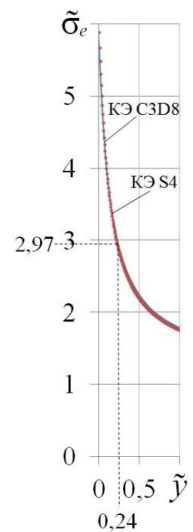


Рисунок 4.30 –

Распределение напряжений  $\sigma_e$  вдоль оси  $Oy$  в случае растяжения образца типа II с восемью отверстиями

и II) образцов с одним отверстием определены значения параметра нагружения  $\sigma = \sigma_s$ , при которых имеет место разрыв соответствующего образца. Полученные результаты имеют вид:

(I):  $\sigma_s = 113 \text{ МПа}, 114 \text{ МПа}, 124 \text{ МПа}$ ; среднее значение  $\sigma_s = 117 \text{ МПа}$ ;

(II):  $\sigma_s = 192 \text{ МПа}, 197 \text{ МПа}, 199 \text{ МПа}$ ; среднее значение  $\sigma_s = 196 \text{ МПа}$ .

С использованием этих данных для образцов типа I и II с одним отверстием имеем:

(I):  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0 / \sigma_s = 250 / 117 = 2,14$ ; отсюда следует (см. рисунок 4.28), что  $\tilde{d} = 0,22$ ;

(II):  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = \sigma_0 / \sigma_s = 400 / 196 = 2,04$ ; отсюда (аналогично I) получаем  $\tilde{d} = 0,24$ .

При рассмотрении далее случая растяжения образцов типа I и II с двумя отверстиями исходим из уже установленных значений константы  $\tilde{d}$  и по описанной выше процедуре определяем с использованием полученных

численным моделированием зависимостей  $\tilde{\sigma}_e = \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s)$  прогнозируемые значения параметра нагружения  $\sigma = \sigma_s$ , при которых должен иметь место разрыв соответствующих образцов. В результате для случая растяжения образцов типа I и II с двумя отверстиями имеем

(I): точка A:  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = 2,3$  (см. рисунок 4.29); точка B:  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = 2,24$ ; отсюда следует, что

$$(A): \sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = 250 / 2,3 = 108,7 \text{ МПа} \text{ или } (B): \sigma_s = 250 / 2,24 = 111,6 \text{ МПа};$$

(II): точка A:  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = 2,13$ ; точка B:  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = 2,16$ ; отсюда следует, что

$$(A): \sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = 400 / 2,13 = 187,8 \text{ МПа} \text{ или } (B): \sigma_s = 400 / 2,17 = 184,3 \text{ МПа}.$$

В сериях из трёх испытаний образцов типа I и II с двумя отверстиями для напряжений  $\sigma_s$  в момент разрыва получено:

$$(I): \sigma_s = 109 \text{ МПа}, 111 \text{ МПа}, 114 \text{ МПа}; (II): \sigma_s = 177 \text{ МПа}, 186 \text{ МПа}, 199 \text{ МПа}.$$

Как видно, в рассматриваемом случае образцов с двумя отверстиями расчётный прогноз по напряжениям  $\sigma_s$  хорошо согласуется с экспериментом. При этом полученные применительно к данному случаю расчётные значения по напряжениям  $\sigma_s$  (при сравнении ситуаций (A) и (B)) дают основания полагать, что в процессе растяжения образцов благоприятствующие разрыву условия в точках B (см. рисунок 4.27) реализуются несколько раньше, чем в точках A.

Испытания на разрыв в случае восьми малых отверстий проводились только на образцах типа II. При этом в серии из трёх испытаний зафиксированы следующие результаты по напряжениям  $\sigma_s$ :

$$(II): \sigma_s = 151 \text{ МПа}, 154 \text{ МПа}, 160 \text{ МПа}.$$

Расчётами применительно к этому случаю (при  $\tilde{d} = 0,24$ ) получено:

(II): точка A:  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = 2,97$  (см. рисунок 4.30); точка B:  $\tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = 2,84$ ; отсюда следует, что

$$(A): \sigma_s = \sigma_0 / \tilde{\sigma}_e(\tilde{y}_s) = 400 / 2,97 = 134,6 \text{ МПа} \text{ или } (B): \sigma_s = 400 / 2,84 = 141 \text{ МПа}.$$

Как видно, и здесь расчётный прогноз по напряжениям  $\sigma_s$  хорошо (с отклонением порядка 10%) согласуется с экспериментом (расчётная оценка идёт в

запас). В данном случае при сравнении расчётных ситуаций (А) и (В) можно сделать вывод, что благоприятствующие разрыву условия в точках А (см. рисунок 4.27) реализуются несколько раньше, чем в точках В.

На рисунках 4.31 - 4.33 представлены полученные при испытаниях картограммы распределения деформаций  $\varepsilon_x$  по поверхности некоторых из образцов на стадии предразрушения вместе с картинками разрушения этих образцов. Видно, что указанные деформации интенсивно развиваются в зонах,

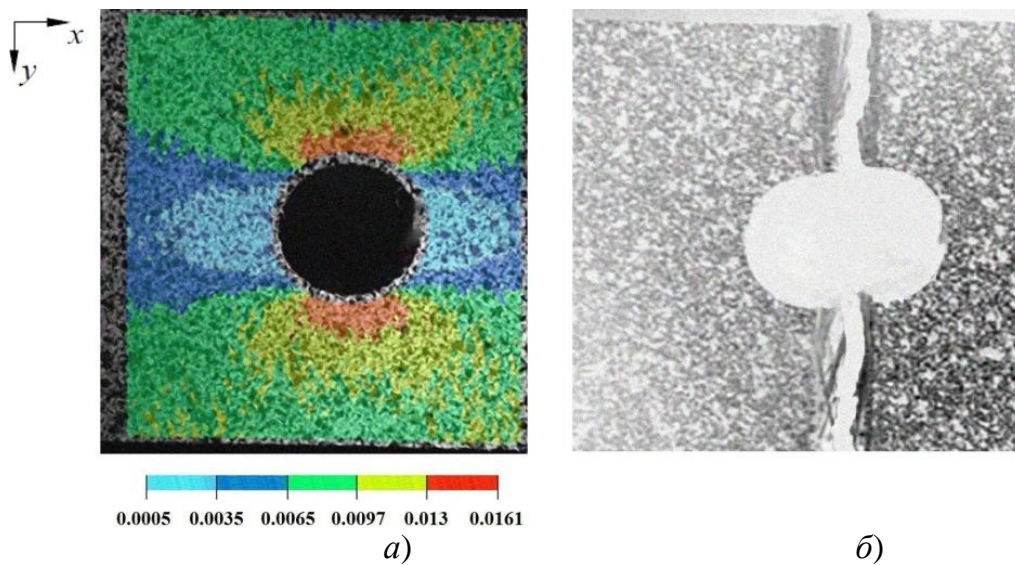


Рисунок 4.31 – Картограмма деформаций  $\varepsilon_x$  поверхности образца типа I с одним отверстием перед разрушением (а) и картина его разрушения (б)

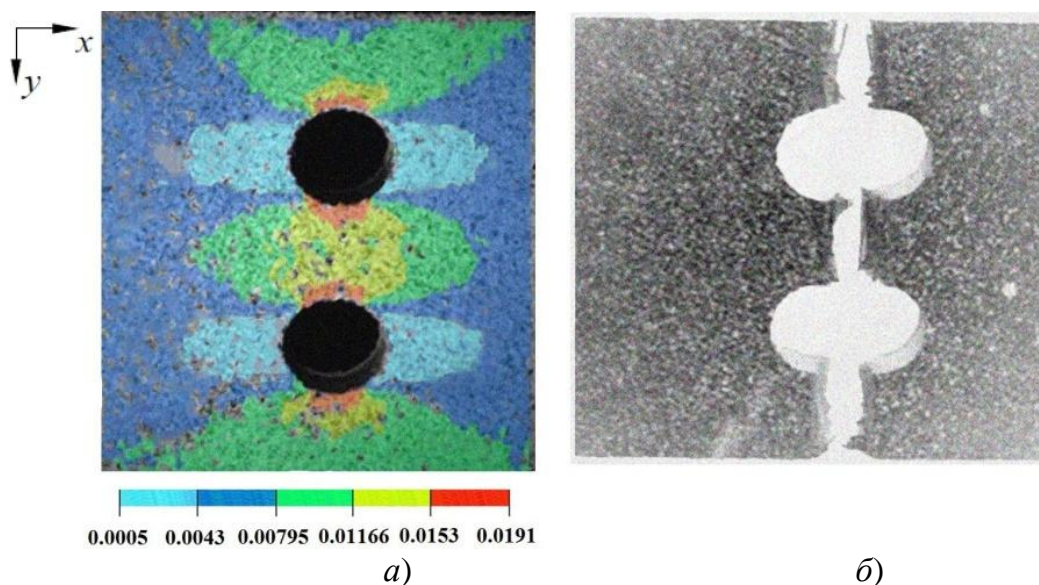


Рисунок 4.32 – Картограмма деформаций  $\varepsilon_x$  поверхности образца типа I с двумя отверстиями перед разрушением (а) и картина его разрушения (б)



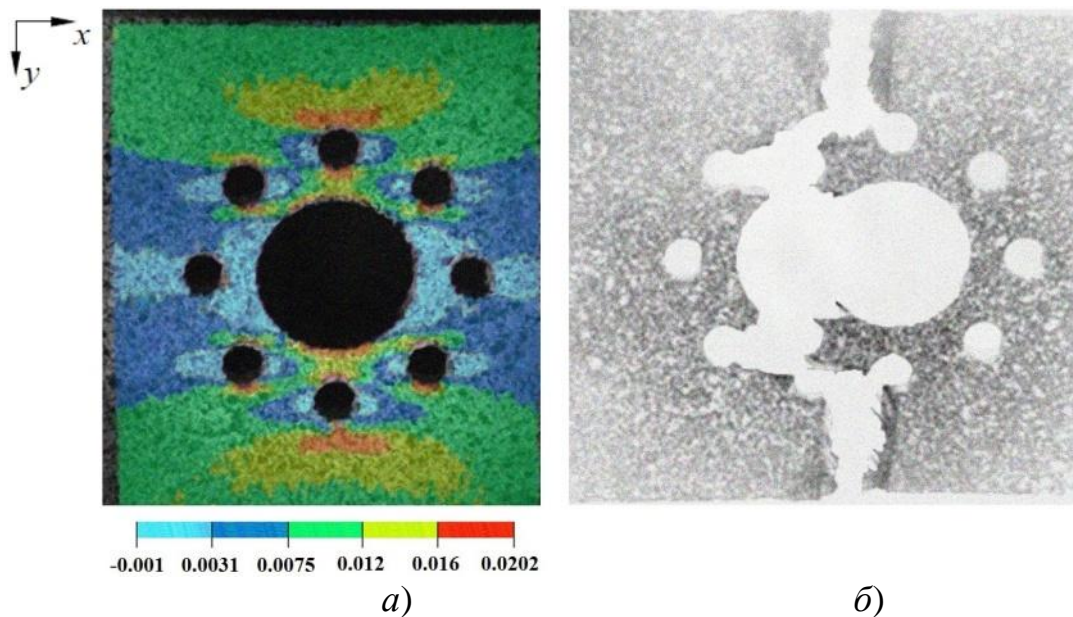


Рисунок 4.33 – Картограмма деформаций  $\varepsilon_x$  поверхности образца типа II с восемью отверстиями перед разрушением (а) и картина его разрушения (б)

несколько отстоящих от кромок малых отверстий. При этом линия разрыва образца с восемью отверстиями (см. рисунок 4.33) проходит через точки А, но не включает участки с точками В. Это согласуется с отмеченным расчётным прогнозом о том, что разрыв данных образцов инициируется в окрестностях точек А.

Итак, при испытаниях на разрыв принятых к рассмотрению стеклотекстолитовых образцов установлено, что имеет место квазихрупкий характер их разрушения. Расчёт на прочность применительно к такому случаю разрушения растягиваемых композитных образцов с концентраторами напряжений в виде круговых отверстий осуществлён на основе модификации известного «критерия напряжений в точке», ориентированного на случай хрупкого разрушения. При этом вместо характерного расстояния  $d$ , принимаемого в качестве константы композитного материала в традиционном варианте указанного критерия, за подобную константу принят безразмерный параметр  $\tilde{d} = d/r$ . Достоверность получаемых расчётных результатов по напряжениям около отверстий в рассматриваемых образцах подтверждена практическим совпадением решений поставленной задачи прочности на основе альтернативных

вычислительных моделей. Проведёнными расчётно-экспериментальными исследованиями показано, что выполняемый в рамках принятого критерия расчётный прогноз по разрушению рассматриваемых композитных образцов с круговыми отверстиями хорошо согласуется с экспериментом.

## ВЫВОДЫ

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Разработаны альтернативные вычислительные модели для решения задач о напряжённо-деформированном состоянии одноосно растягиваемых тонких и толстых ортотропных композитных пластин ослабленных круговыми отверстиями.

2. С применением разработанных моделей проведены параметрические исследования, на основании которых установлены эффекты и закономерности, связанные с влиянием геометрических и физико-механических характеристик композитных пластин, а также расположения и размеров круговых отверстий в них на величину коэффициента концентрации напряжений.

В частности, установлено, что:

– в случае широкой полосы с двумя продольно расположенными (на небольшом расстоянии друг от друга) одинаковыми отверстиями значение коэффициента концентрации напряжений снижается по сравнению с ситуацией одного отверстия на 12% - 19% в зависимости от упругих характеристик композитных материалов;

– в случае двух поперечно расположенных отверстий в композитной полосе установлен вариант взаимного их расположения, обеспечивающий минимальное значение коэффициента концентрации напряжений;

– в случае растягиваемой толстой композитной пластины на участке, проходящем по цилиндрической поверхности отверстия (участок заключен между срединной и внешней плоскостями пластины) эффект спада значения коэффициента концентрации напряжений оценивается величиной порядка 10% при толщине пластины, сравнимой с диаметром отверстия.

3. Разработана методика численного решения задач о напряжённо-деформированном состоянии одноосно растягиваемых тонких и толстых ортотропных композитных пластин ослабленных круговыми отверстиями. Суть методики заключается в получении решения рассматриваемой задачи на основе



каждой из альтернативных вычислительных моделей, после чего при условии совпадения этих решений делается вывод о достоверности полученных расчётных результатов.

4. С применением обозначенной методики и «критерия напряжений в точке» в качестве критерия разрушения, выполнены исследования по определению предельных значений растягивающих нагрузок, приложенных к композитным пластинам, имеющим одно, два, три и более отверстий.

5. Установлено, что отклонения выполненных расчётных прогнозов от имеющихся экспериментальных данных, а также от результатов специально выполненных экспериментов оцениваются величиной порядка 6%-10%.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Абашев Д.Р. Применение критерия напряжений в точке при расчёте пределов прочности на разрыв ослабленных малыми круговыми отверстиями стеклотекстолитовых элементов конструкций / Д.Р. Абашев, И.С. Ермаков, Л.Г. Сухомлинов, М.В. Шиврин // Космонавтика и ракетостроение. – 2021, – вып. 6(123), – С. 49-57.
2. Абовский Н.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. / Н.П. Абовский, Н.П. Андреев, Деруга А.П. // М.: Наука, 1978. – 288 с.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. / С.А. Амбарцумян // М.: Физматгиз, 1961. – 384 с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. / С.А. Амбарцумян // М.: Наука, 1967. – 268 с.
5. Аннин Б.Д. Оценка разрушения пластин из композитных материалов с отверстиями / Б.Д. Аннин, В.Н. Максименко // Механика композитных материалов. – 1989. – №2. – С. 284-290.
6. Баженов В.Г. Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек. / В.Г.Баженов, Д.Т. Чекмарев // Н.Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та. –1992. – 159 с.
7. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов. / К. Бате, Е. Вилсон // М.: Стройиздат. – 1982. – 448 с.
8. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). / Н.С. Бахвалов // М.: Наука. – 1973. – 631 с.
9. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках. / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд // М.: Мир, – 1984. – 494 с.
10. Беспалов В.А. Использование модели развивающегося повреждения при оценке прочности слоистых углепластиков с различными концентраторами напряжений / В.А. Беспалов, Т.Б. Гоцелюк, Н.А. Коваленко, И.П. Олегин // Омский научный вестник. – 2015. – 3(143). – С. 329-333.
11. Бребия К. Методы граничных элементов. / К. Бребия, Ж. Теллес, Л.

Вроубел // М.: Мир. – 1987. – 525 с.

12. Вазов В. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. / В. Вазов, Дж. Форсайт // М.: ИЛ. – 1963. – 487 с.

13. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. / К. Васидзу // М.: Мир. – 1987. – 544 с.

14. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. / В.В. Васильев // М.: Машиностроение. – 1988. – 269 с.

15. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // Успехи математических наук. – 1961. – Т. XVI. – Вып. 3. – С. 171-174.

16. Годунов С.К. Разностные схемы. Введение в теорию. / С.К. Годунов, В.С. Рябенский // М.: Наука. – 1977. – 439 с.

17. Григоренко Я.М. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко // М.: Наука. – 1992. – 332 с.

18. Ермаков И.С. Численный анализ распределения напряжений вокруг круговых отверстий в тонких ортотропных упругих пластинах при одноосном растяжении / И.С. Ермаков, Л.Г. Сухомлинов, М.В. Шиврин // Космонавтика и ракетостроение. – 2020. – 1(112). – С. 59-68.

19. Ермаков И.С. Концентрация напряжений в толстых анизотропных упругих пластинах с круговым отверстием при одноосном растяжении / И.С. Ермаков, Л.Г. Сухомлинов, М.В. Шиврин // Космонавтика и ракетостроение. – 2020. – вып. 4(115), – С. 33-44.

20. Ермаков И.С. Численное моделирование растягиваемых плоских элементов композитных конструкций, ослабленных набором круговых отверстий / И.С. Ермаков, Л.Г. Сухомлинов, М.В. Шиврин // Машиностроение и инженерное образование. – 2022. – вып. 1(68). – С. 3-12.

21. Ермаков И.С. Численное моделирование одноосно растягиваемой толстой ортотропной композитной пластины с круговым отверстием / И.С. Ермаков // Машиностроение и инженерное образование. – 2022. – вып. 2(69). – С. 3-14.

22. Ермаков И.С. Расчётный прогноз прочности растягиваемых композитных образцов с круговым отверстием в сопоставлении с результатами эксперимента / И.С. Ермаков, Л.Г. Сухомлинов // Космонавтика и ракетостроение. – 2023. – вып. 1(130), – С. 79-87.

23. Ермаков И.С. Расчётный прогноз прочности растягиваемых композитных образцов с набором круговых отверстий в сопоставлении с результатами эксперимента / И.С. Ермаков, Л.Г. Сухомлинов // Космонавтика и ракетостроение. – 2023. – вып. 1(130), – С. 88-97.

24. Ермаков И.С. Численное решение задач о концентрации напряжений в тонких, ослабленных круговыми отверстиями, стеклопластиковых пластинах при одноосном растяжении / И.С. Ермаков // Международная конференция «Авиация и космонавтика». 18-22 ноября 2019. – М. изд-во МАИ. – С. 189.

25. Ермаков И.С. Численное решение задач о концентрации напряжений в толстых ортотропных пластинах с круговыми отверстиями при одноосном растяжении / И.С. Ермаков // XLVI Международная молодежная конференция «Гагаринские чтения». 27-28 марта 2020. – М. изд-во МАИ. – С. 873.

26. Ермаков И.С. Численное решение трёхмерной задачи теории упругости о концентрации напряжений в одноосно растягиваемой толстой анизотропной пластине с круговым отверстием / И.С. Ермаков // Международный молодёжный научный форум «Ломоносов-2020» Место проведения МГУ им. М.В. Ломоносова 10-27 ноября 2020 [https://lomonosovmsu.ru/archive/Lomonosov\\_2020\\_2/data/section\\_20\\_19369.htm](https://lomonosovmsu.ru/archive/Lomonosov_2020_2/data/section_20_19369.htm)

27. Ермаков И.С. Определение пределов прочности с использованием критерия напряжений в точке, пластин на стеклотекстолитовой основе, имеющих включения в виде малых отверстий / И.С. Ермаков // Международная конференция «Авиация и космонавтика». 12-26 ноября 2021. – М. изд-во МАИ. – С. 424.

28. Ермаков И.С. Численное моделирование растягиваемых композитных плоских полос, ослабленных круговыми отверстиями / И.С. Ермаков // XLVIII Международная молодежная конференция «Гагаринские чтения». 12-25 апреля

2022. – М. изд-во МАИ. – С. 440.

29. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган // М.: Мир. – 1986. – 318 с.

30. Кармишин А.В. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А.В. Кармишин, В.А. Лясковец, В.И. Мяченков, А.Н. Фролов. // М.: Машиностроение. – 1975. – 376 с.

31. Коваленко Н.А. Численно-экспериментальное исследование прочности элементов конструкций из слоистых углепластиков / Н.А. Коваленко, И.П. Олегин, Т.Б. Гоцелюк, В.Н. Чаплыгин, П.М. Петров // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты, материаловедение). – 2014. – 1(62) – С. 69-75.

32. Козлов М.В. Моделирование прогрессирующего разрушения слоистых композитов / М.В. Козлов, С.В. Шешенин // Механика композитных материалов. – 2015. – Т. 51. - №6. – С. 991-1008.

33. Королёв В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс / В.И. Королёв // М.: Машиностроение. – 1965. – 272 с.

34. Косарев В.А. Методика решения задач прогрессирующего разрушения конструкций из КМ / В.А. Косарев // Авиационная промышленность. – 2016.- №1. – С. 46-52.

35. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А.С. Космодамианский // Киев-Донецк: Вища школа. – 1976. – 200 с.

36. (3.) Кристенсен Р. Введение в механику композитов / Р. Кристенсен // М.: Мир. – 1982. – 333 с.

37. Ланс Дж.Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин / Дж.Н. Ланс // М.: ИЛ. – 1962. – 208 с.

38. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий // М.: Гостехиздат. – 1957. – 463 с.

39. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий // М.: Наука. – 1977. – 416 с.

40. Мазин В.А. Вариационно-разностная процедура численного решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области с включениями и отверстиями / В.А. Мазин, В.Л. Михайлова, Л.Г. Сухомлинов // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2010. – №2. – С. 53-62.
41. Максименко В.Н. Прогнозирование прочности композитных элементов с концентраторами напряжений. Обзор методов / В.Н. Максименко // Вопр. авиац. науки и техн. Сер. Аэродинам. и прочность летат. аппаратов. – 1995. – №1. – С. 45-77.
42. Максименко В.Н. Методы расчёта на прочность и жёсткость элементов конструкций из композитов / В.Н. Максименко, И.П. Олегин, Н.В. Пустовой // – Новосибирск: Из-во НГТУ. – 2015. – 424 с.
43. Марчук Г.И. Вариационно-разностные методы в математической физике /Сб. научных трудов Под ред. акад. Г.И. Марчука // Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР. –1974. – 158 с.
44. Марчук Г.И. Введение в проекционно сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агошков // М.: Наука. – 1981. – 416 с.
45. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин // М.: Наука. –1970. – 512 с.
46. Новожилов В.В. Теория упругости / В.В. Новожилов // Л.: Судпромгиз. – 1958. – 370 с.
47. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности / В.В. Новожилов // ПММ. – 1969. –Т. 33. – № 2. – С. 212-222.
48. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. Фриз // М.: Мир. – 1981. – 304 с.
49. Оганесян Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец // Ереван: АН Армянской ССР. – 1979. – 235 с.
50. Полилов А.Н. Механизмы уменьшения концентрации напряжений в волокнистых композитах / А.Н. Полилов // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55, №1. – С. 187-197.

51. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности / Б.Е. Победря // М.: Изд-во МГУ. – 1981. – 344 с.
52. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон // М.: Мир. – 1972. – 418 с.
53. Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения / Л.А. Розин // Спб.: Изд-во СПбГУ. – 1998. – 532 с.
54. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. / Г.Н. Савин // Киев: Наукова думка. – 1968. – 888 с.
55. Сукнёв С.В. Нелокальные критерии разрушения. Критерий средних напряжений / С.В. Сукнёв // Наука и образование. – 2007. – №1. – С. 28-33.
56. Сукнёв С.В. Нелокальные критерии разрушения. Критерий напряжений в точке / С.В. Сукнёв // Наука и образование. – 2008. – №1. – С. 27-32.
57. Сукнёв С.В. Нелокальные и градиентные критерии разрушения квазихрупких материалов при сжатии / С.В. Сукнёв // Физическая мезомеханика. – 2018. – Т.21. – №4. – С. 22-32. – DOI: 10.24411/1683-805X-2018-14003.
58. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер // М.: Наука. – 1979. – 560с.
59. Угодчиков А.Г. (ред.) Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела / А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский // Казань: Изд-во КГУ. – 1986. – 296 с.
60. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов // М.: Наука. – 1974. – 640 с.
61. Шерман Д.И. Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости / Д.И. Шерман // Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. – М.-Л.: Изд. АН СССР. – 1962. – С. 405-467.
62. Abaqus/CAE User`s Manual - Abaqus 6.12 Documentation.
63. Afaghi-Khatibi A. Notched strength and effective crack growth in woven fabric laminates with circular holes / A. Afaghi-Khatibi, L. Ye // J. Reinf. Pl. & Comp.

– 1996. – 15. – P. 344-358. – DOI: [10.1177/073168449601500401](https://doi.org/10.1177/073168449601500401).

64. Afaghi-Khatibi A. An effective crack growth model for residual strength evaluation of composite laminates with circular holes / A. Afaghi-Khatibi, L. Ye, Y.W. Mai // *J. Comp. Mater.* – 1996. – 30. – P. 142-163. – DOI: [10.1177/00219983960300020](https://doi.org/10.1177/00219983960300020).

65. Awerbuch J. Notched strength of composite laminates: predictions and experiments – a review / J. Awerbuch, M.S. Madhukar // *J. Reinf. Plastics Compos.* – 1985. – 4. – P. 3-159. – DOI: [10.1177/073168448500400102](https://doi.org/10.1177/073168448500400102)

66. Azevedo Soriano E. Notch sensitivity of carbon/epoxy fabric laminates / E. Azevedo Soriano, S.F.M. Almeida // *Compos. Sci. Technol.* – 1999. – 59. – P. 1143-1151. – DOI: [10.1016/S0266-3538\(98\)00154-7](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(98)00154-7)

67. Bakhshandeh K. Investigation of stress concentration factor for finite-width orthotropic rectangular plates with a circular opening using three-dimensional finite element model / K. Bakhshandeh, I. Rajabi, F. Rahimi // *Journal of Mechanical Engineering.* – 2008. – 54(2). – P. 140-147.

68. Bazant Z.P. Size effect and fracture characteristics of composite laminates / Z.P. Bazant, I.M. Daniel, Z. Li // *J. Eng. Mater. Technol.* – 1996. – 118. – P. 317-323. DOI: [10.1115/1.2806812](https://doi.org/10.1115/1.2806812).

69. Bazant Z.P. Size effect / Z.P. Bazant // *Int. J. Solids Struct.* – 2000. – 37. – P. 69-80. – DOI: [10.1007/s004190050252](https://doi.org/10.1007/s004190050252)

70. Belmonte H.M.S. Characterisation and modelling of the notched tensile fracture of woven quasi-isotropic GFRP laminates / H.M.S. Belmonte, C.I.C. Manger, S.L. Ogin, P.A. Smith, R. Lewin // *Compos. Sci. Technol.* – 2001. – 61. – P. 585-597. – DOI: [10.1016/S0266-3538\(00\)00238-4](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(00)00238-4).

71. Belmonte H.M.S. A physically-based model for the notched strength of woven quasi-isotropic CFRP laminates / H.M.S. Belmonte, C.I.C. Manger, S.L. Ogin, P.A. Smith, R. Lewin // *Composites.* – 2004. – Pt. A. – 35. – P. 763-778. – DOI: [10.1016/j.compositesa.2004.01.006](https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2004.01.006).

72. Bowie O.L. Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundaries of an internal circular hole / O.L. Bowie // *J. Math. Phys.* –



1956. – 35. – P. 60-71. – DOI: [10.1002/SAPMI195635160](https://doi.org/10.1002/SAPMI195635160).

73. Camanho P.P. Prediction of size effects in notched laminates using continuum damage mechanics / P.P. Camanho, P. Maimi, C.G. Davila // *Compos. Sci. Technol.* – 2007. – 67. – P. 2715-2727. – DOI: [10.1016/j.compscitech.2007.02.005](https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2007.02.005).

74. Chang F.K. A progressive damage model for laminated composites containing stress concentrations / F.K. Chang , K.Y. Chang // *J. Compos. Mater.* – 1987. – 21(9). – P. 834-855. – DOI: [10.1177/002199838702100](https://doi.org/10.1177/002199838702100).

75. Chawla K. Stress and strain concentration factors in orthotropic composites with hole under uniaxial tension / K. Chawla, S. Ray-Chaudhuri // *Curved and Layered Structures.* – 2018. – 5. – P. 213-231. – DOI: [10.1515/cls-2018-0016](https://doi.org/10.1515/cls-2018-0016)

76. Dan-Jumbo E. Strength of composite laminate with multiple holes / E. Dan-Jumbo, R. Keller, W.S. Chan, S. Selvaraj // In: 17th international conference on composite materials, Edinburg, UK, 27 July-31 July 2009. – P. 1-9.

77. Dvorak G.J. Size effect in fracture of unidirectional composite plates / G.J. Dvorak , A.P. Suvorov // *Int. J. Fract.* – 1999. – 95. – P. 89-101. – DOI: [10.1023/A:1018687931394](https://doi.org/10.1023/A:1018687931394)

78. Eriksson I. Strength of tensile loaded graphite/epoxy laminates containing cracks, open and filled holes / I. Eriksson, C.G. Aronsson // *J. Compos. Mater.* – 1990. – 24. – P. 456-482. – DOI: [10.1177/002199839002400501](https://doi.org/10.1177/002199839002400501).

79. Folias E.S. On the three-dimensional stress field around a circular hole in a plate of arbitrary thickness / E.S. Folias, J.J. Wang // *Comput. Mech.* – 1990. – 6. – P. 379-391. – DOI: [10.1007/BF00350419](https://doi.org/10.1007/BF00350419)

80. Ghezzi F. Numerical and experimental analysis of the interaction between two notches in carbon fibre laminates / F. Ghezzi, G. Giannini, F. Cesari, G. Caligiana // *Compos. Sci. Technol.* – 2008. – 68. – P. 1057-1072. – DOI: [10.1016/j.compscitech.2007.07.023](https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2007.07.023).

81. Green A.E. The elastic equilibrium of isotropic plates and cylinders / A.E. Green // *Proc. R. Soc. London. Ser. A.* – 1949. – Vol. 195. – No. 1043. – P. 533-552. – DOI: [10.1098/rspa.1949.0008](https://doi.org/10.1098/rspa.1949.0008).

82. Green B.G. An experimental investigation into the tensile strength scaling

of notched composites / B.G. Green, M.R. Wisnom, S.R. Hallett // *Composites: Part A*. – 2007. – 38. – P. 867-878. – DOI: [10.1016/j.compositesa.2006.07.008](https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2006.07.008).

83. Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites / Z. Hashin // *J. Appl. Mech.* – 1980. – 47. – P. 329-334. – DOI: [10.1115/1.3153664](https://doi.org/10.1115/1.3153664).

84. Khechai A. Strength improvement and stress analysis of E-glass laminated plates with circular notches using digital image correlation / A. Khechai, P.M. Mohite, A. Tati, M.-O. Belarbi // *IntechOpen*. – October 2019. – P. 1-10. – DOI: [10.5772/intechopen.87089](https://doi.org/10.5772/intechopen.87089).

85. Khemchandani A.A. Determination of tensile strength of composite laminates with multiple holes / A.A. Khemchandani, Kameshwaran, J. Vasanth // *International Journal of Applied Engineering Research*. – 2019. – Vol.14. – No. 19. – P. 3749-3755.

86. Konish H.J. Approximate stresses in an orthotropic plate containing a circular hole / H.J. Konish, J.M. Whitney // *J. Compos. Mater.* – 1975. – 9. – P. 157-166. – DOI: [10.1177/002199837500900206](https://doi.org/10.1177/002199837500900206).

87. Liu P.F., Zheng J.Y. Recent developments on damage modeling and finite element analysis for composite laminates: A review / P.F. Liu, J.Y. Zheng // *Materials and Design*. – 2010. – 31. – P. 3825-3834. – DOI: [10.1016/j.matdes.2010.03.031](https://doi.org/10.1016/j.matdes.2010.03.031).

88. Mar J.W. Fracture of boron/aluminum composite with discontinuities / J.W. Mar, K.Y. Lin // *J. Compos. Mater.* – 1977. – 11. – P. 405-421. – DOI: [10.1177/0021998377011004](https://doi.org/10.1177/0021998377011004).

89. Morais A.B. Open-hole tensile strength of quasi-isotropic laminates / A.B. Morais // *Compos. Sci. Technol.* – 2000. – 60. – P. 1997-2004. – DOI: [10.1016/S0266-3538\(00\)00089-0](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(00)00089-0).

90. Naik N.K., Shembekar P.S. Notched strength of fabric laminates I: prediction / N.K. Naik, P.S. Shembekar // *Compos. Sci. Technol.* – 1992. – 44. – P. 1-12. – DOI: [10.1016/0266-3538\(92\)90020-4](https://doi.org/10.1016/0266-3538(92)90020-4).

91. Neuber H. Kerbspannungslehre. Grundlagen für eine genaue Spannungsrechnung / H. Neuber // – Berlin: Springer-Verlag, – 1937.

92. Nuismer R.J. Uniaxial failure of composite laminates containing stress

concentrations / R.J. Nuismer, J.M. Whitney // *Fracture Mechanics of Composites*. – ASTM STP 593. – 1975. – P. 117-142. – DOI: [10.1520/STP34795S](https://doi.org/10.1520/STP34795S).

93. Nuismer R.J. Applications of the average stress failure criterion: part I - tension / R.J. Nuismer, J.D. Labor // *J. Compos. Mater.* – 1979. – Vol. 12. – P. 238-249. – DOI: [10.1177/002199837801200302](https://doi.org/10.1177/002199837801200302).

94. Pipes R.B. Notched strength of composite materials / R.B. Pipes, R.C. Wetherhold, Jr. JW. Gillespie // *J. Compos. Mater.* – 1979. – 13. – P. 148-160. . – DOI: [10.1177/002199837901300206](https://doi.org/10.1177/002199837901300206).

95. Pipes R.B. Macroscopic fracture of fibrous composites / R.B. Pipes, R.C. Wetherhold, Jr. JW. Gillespie // *Mat. Sci. Eng.* – 1980. – 45. – P. 247-253. – DOI: [10.1016/0025-5416\(80\)90153-6](https://doi.org/10.1016/0025-5416(80)90153-6).

96. Reiss E.L. Extension of an infinite plate with a circular hole / E.L. Reiss // *J. Soc. Ind. Appl. Math.* – 1963. – Vol. 11. – No. 4. – P. 840-854. – DOI: [10.1137/0111062](https://doi.org/10.1137/0111062).

97. Russo A. An accurate method to predict the stress concentration in composite laminates with a circular hole under tensile loading / A. Russo, B. Zuccarello // *Mechanics of Composite Materials* – 2007. – Vol. 43. – No. 4. – P. 359-376. – DOI: [10.1007/s11029-007-0033-z](https://doi.org/10.1007/s11029-007-0033-z).

98. She C.M. Three-dimensional stress concentrations at elliptic holes in elastic isotropic plates subjected to tensile stress / C.M. She, W.L. Guo // *Int. J. Fatigue*. – 2007. – P. 330-335. – DOI: [10.1016/j.ijfatigue.2006.03.012](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2006.03.012)

99. Shembekar P.S. Notched strength of fabric laminates II: effect of stacking sequence / P.S. Shembekar, N.K. Naik // *Compos. Sci. Technol.* – 1992. – 44. – P. 13-20. – DOI: [10.1016/0266-3538\(92\)90021-T](https://doi.org/10.1016/0266-3538(92)90021-T)

100. SreeSastha Ram T.R. Influence of hole-hole distance and orientation on strength of composite laminae / T.R. SreeSastha Ram, S.A. Kumar // *International Journal of Scientific and Engineering Research*. – 2014. – Vol. 5. – No. 7. – P. 698-703.

101. Sternberg E. Three dimensional solution of the stress concentration around a circular hole in a plate of arbitrary thickness / E. Sternberg, M.A. Sadovsky // *J. Appl.*

Mech. – 1949. – 16. – P. 27-38. – DOI: [10.1115/1.4009891](https://doi.org/10.1115/1.4009891).

102. Tan S.C. Finite-width correction factors for anisotropic plates containing a central opening / S.C. Tan // J. Compos. Mater. – 1988. – 22. – No.11. – P. 1080-1097. – DOI: [10.1177/002199838802201105](https://doi.org/10.1177/002199838802201105).

103. Tan S.C. A progressive failure model for composite laminates containing openings / S.C. Tan // J. Compos. Mater. – 1991. – 25. – P. 556-577. – DOI: [10.1177/002199839102500505](https://doi.org/10.1177/002199839102500505).

104. Toubal L. Stress concentration in a circular hole in composite plate / L. Toubal, M. Karama, B. Lorrain // Comp. Struct. – 2005. – 68. – P. 31-36. – DOI: [10.1016/j.compstruct.2004.02.016](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.02.016).

105. Ubaid J. Strength prediction and progressive failure analysis of carbon fiber reinforced polymer laminate with multiple interacting holes involving three dimensional finite element analysis and digital image correlation / J. Ubaid, M. Kashfuddoja, M. Ramji // International Journal of Damage Mechanics. – 2013. – 23(5). – P. 609-635. – DOI: [10.1177/1056789513504123](https://doi.org/10.1177/1056789513504123).

106. Vaz M.A., Cyrino J.C.R., da Silva G.G. Three-dimensional stress concentration factor in finite width plates with a circular hole / M.A. Vaz, J.C.R. Cyrino, G.G. da Silva // World Journal of Mechanics. – 2013. – 3. – P. 153-159. – DOI: [10.4236/wjm.2013.33013](https://doi.org/10.4236/wjm.2013.33013).

107. Waddoups M.E. Macroscopic fracture mechanics of advanced composite materials / M.E. Waddoups, J.R. Eisenmann, B.E. Kaminski // Journal of Composite Materials – 1971. – 5. – P. 446-454. – DOI: [10.1177/002199837100500402](https://doi.org/10.1177/002199837100500402).

108. Whitney J.M. Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations / J.M. Whitney, R.J. Nuismer // J. Compos. Mater. – 1974. – Vol. 8. – No. 4. – P. 253-265. – DOI: [10.1177/002199837400800303](https://doi.org/10.1177/002199837400800303).

109. Wieghardt K. Uber das Spalten und Zerreißen elastischer Körper / K. Wieghardt // Zeitschrift für Mathematik und Physik. – 1907. – V. 55. – No. 1-2. – P. 60-103.

110. Wisnom M.R. Size effects in the testing of fibre-reinforced composites / M.R. Wisnom // Compos. Sci. Technol. – 1999. – 59. – P. 1937-1957.

111. Xiao J.Y. Strength prediction and damage mechanisms of glass/epoxy woven laminates with circular holes / J.Y. Xiao, C. Bathias // Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. – 1994. – Vol. 17. – No. 4. – P. 411-428. . – DOI: [10.1111/j.1460-2695.1994.tb00241.x](https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.1994.tb00241.x)

112. Yang Z. The concentration of stress and strain in finite thickness elastic plate containing a circular hole / Z. Yang, C.B. Kim, C. Cho, H.G. Beom // Int. J. Solids Struct. – 2008. – 45. – P. 713-731. – DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2007.08.030](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.08.030).

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель генерального директора  
по прикладным исследованиям,  
испытаниям и экспериментальной базе-  
начальник Центра прикладных  
исследований АО «ЦНИИмаш»



*Титов*  
В.А. Титов  
« 28 » 03 2023 г.

**Акт**

**внедрения в рабочий процесс отдела статической прочности Центра прикладных исследований АО «ЦНИИмаш» результатов диссертации Ермакова Ивана Сергеевича на тему «Численное моделирование растягиваемых композитных пластин с концентраторами напряжений в виде круговых отверстий»**

Настоящий акт составлен о том, что результаты диссертационной работы Ермакова И.С. внедрены в расчётную практику отдела статической прочности Центра прикладных исследований АО «ЦНИИмаш» и используются при проведении прочностных расчётов композитных пластин ослабленных круговыми отверстиями.

Заместитель начальника  
Цentra прикладных исследований –  
начальник Комплекса прочности

И.С. Комаров

Начальник отдела статической прочности

С.А. Владимиров