

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи

Николаев Илья Витальевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ ШЛИЦЕВЫХ СОЕДИНЕНИЙ РОТОРОВ ПРИ
НАЛИЧИИ НЕСООСНОСТИ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ДИНАМИЧЕСКОЕ
ПОВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ**

Специальность 2.5.15 – «Тепловые, электроракетные двигатели и энергоустановки
летательных аппаратов»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Леонтьев Михаил Константинович

Москва – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. Особенности динамического поведения систем со шлицевыми соединениями	10
1.1 Введение	10
1.2 Существующие методы расчёта параметров в шлицевых соединениях	15
1.3 Влияние сил трения в шлицевом соединении	29
1.4 Выводы по главе	44
2. Разработка модели для исследования динамики эвольвентного шлицевого соединения	46
2.1 Уравнение движения и кинематическое описание шлицевого соединения ..	46
2.2 Определение упругой энергии соединения. Расчёт коэффициентов жесткости и вектора внутренних сил	53
2.3 Определение матрицы масс и моментов инерции для уравнения динамики	58
2.4 Выводы по главе	66
3. Исследование поведения шлицевого соединения с учетом зазоров и перекосов при действии различных нагрузок	68
3.1 Исследование конечно-элементной модели шлицевого соединения при различных видах нагружения	68
3.2 Исследование шлицевого соединения при наличии перекоса	74
3.3 Верификация математической модели по результатам конечно-элементного анализа	81
3.4 Выводы по главе	84
4. Анализ влияния шлицевого соединения на динамические характеристики роторной системы	85
4.1 Введение	85
4.2 Шлицевое соединение в составе динамической модели ГТД	86
4.3 Влияние жесткости шлицевого соединения на критические частоты	90

4.4 Влияние жесткости на амплитудно-частотные характеристики и нагрузки на опоры	92
4.5 Выводы по главе.....	97
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	98
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	99
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	107

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

В конструкциях серийно выпускаемых и разрабатываемых перспективных авиационных газотурбинных двигателей (ГТД) широко применяются шлицевые соединения (ШС) для передачи вращения от одного ротора к другому. Особенностью шлицевых соединений авиационных двигателей является то, что величина нагрузки, условия работы и условия сочленения в процессе работы изменяются в широких пределах, что в ряде случаев может приводить к значительному влиянию на частотные характеристики и вибрационные показатели системы. Большое влияние на работоспособность шлицевого соединения оказывает возникновение радиальной и угловой несоосностей.

В связи с вышесказанным можно утверждать, что динамические процессы в шлицевых соединениях во многом определяют надежность и долговечность двигателя в целом. В свою очередь для обеспечения требуемой надежности и долговечности двигателя необходимо проводить исследование динамики роторов с учетом шлицевых соединений. Однако, несмотря на то, что шлицевые соединения относятся к числу наиболее ответственных элементов машин, выбор их параметров при разработке конструкции двигателя в подавляющем большинстве случаев проводится на основании условного расчета. Практика эксплуатации машин и экспериментальные исследования показывают, что сложившийся метод расчета, не учитывающий реальных условий нагружения и конфигурацию соединений в эксплуатации, не может обеспечить необходимую надежность и долговечность соединения.

Такое несоответствие с современным уровнем расчета деталей машин объясняется сложностью описания реального динамического процесса рабочих поверхностей соединения. Метод конечных элементов (МКЭ) в прямой постановке, как основной метод исследования задач механики деформированного твердого тела, тяжело применить к задачам динамики шлицевых соединений

авиационных роторов в связи со значительными временными и вычислительными затратами. Поэтому рациональным является подход разработки редуцированной математической модели шлицевого соединения, учитывающей нелинейное поведение и обладающей значительно меньшей размерностью, а использование МКЭ в прямой постановке можно использовать как аппарат уточнения и/или верификации. С учётом вышеизложенного разработка математического аппарата для определения жёсткостных характеристик шлицевого соединения и его последующего влияния на систему является актуальной.

Степень разработанности темы исследования

В существующей литературе для описания жесткости шлицевого соединения зачастую используется метод конечных элементов. Данный подход трудоёмкий и требует достаточных компетенций для выбора таких параметров модели, как размерность сетки, учёт зазоров по боковым поверхностям, задание типов контакта, учёт сил трения. Также в литературе существуют математические модели шлицевого соединения, позволяющие определить его жесткостные характеристики. Однако, данные работы в большинстве используют представление шлица в виде балочного элемента, не учитывают зазоры по боковым поверхностям и описывают линейный тип контакта. Также все подобные модели можно найти лишь в зарубежных источниках – в отечественной литературе данное направление не представлено. Все перечисленное указывает на актуальность исследования.

Объект исследования – эвольвентное шлицевое соединение ГТД с учётом зазоров по боковым поверхностям.

Предмет исследования – методы учёта влияния шлицевого соединения на динамические параметры системы.

Цель работы – исследование шлицевых соединений (ШС) в условиях несоосности и их влияние на динамику поведения роторных систем авиационных двигателей для повышения эффективности процессов их создания.

Задачи работы:

1. Анализ существующих источников по тематике работы.

2. Разработка численной модели для расчета жесткостных характеристик шлицевого соединения в условиях перекоса соединяемых валов с учетом нелинейности жесткостных характеристик.

3. Исследование работы шлицевого соединения в КЭ программе с различными нагрузочными характеристиками в стационарной постановке с учетом влияния податливости валов и трения в шлицевой паре.

4. Верификация численной модели шлицевого соединения по результатам КЭ анализа.

5. Разработка общей методики и алгоритма учета характеристик ШС в задачах динамики роторов.

6. Моделирование работы шлицевого соединения в роторной системе ГТД.

Научная новизна результатов исследований:

1. Разработана пространственная численная модель шлицевого соединения, обладающая наименьшим количеством степеней свободы, что обеспечивает существенное сокращение временных и вычислительных затрат при решении нелинейных задач динамики;

2. Создана новая методика для учета шлицевых соединений в динамике роторных систем ГТД;

3. Получены феноменологические результаты на основе КЭ решения, демонстрирующие особенности работы ШС.

Практическая значимость результатов исследований:

Разработанная численная модель позволяет учитывать динамические характеристики шлицевых соединений в расчетах и анализе нелинейной динамики роторных систем ГТД;

Разработанная методика и средства анализа могут быть использованы для анализа роторных систем любой сложности, находящихся в различных условиях эксплуатации, в том числе составных роторов ГТД.

Методология и методы исследования:

В работе использовались аналитические и численные методы исследования. Для описания математической модели шлицевого соединения использовались метод Ньютона-Рафсона для решения нелинейных уравнений равновесия, метод Ньюмарка для решения неявных уравнений динамики механических систем, а также итерационные методы решения систем алгебраических уравнений для определения различных параметров в разрабатываемой модели. Для проведения верификационных расчётов использовался метод конечного элемента, реализованный в комплексе ANSYS.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Численная модели шлицевого соединения, учитывающая зазоры и упругие характеристики с использованием инкрементального представления больших поворотов.
2. Методика определения жесткости шлицевого соединения и её верификация.
3. Результаты численных расчетов динамического поведения роторной системы ГТД со шлицевым соединением в условиях перекоса.

Достоверность результатов исследования основывается на:

- строгостью использованных математических методов;
- верификации разработанных алгоритмов по результатам других авторов и моделировании с использованием метода конечных элементов.

Апробация работы

Основные положения диссертационной работы были доложены и обсуждены на:

- 18-й Международной конференции "Авиация и космонавтика - 2019" (Москва, 2019 г.);
- Международной инновационной конференции молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения «МИКМУС-2019» (Москва, 2019 г.);

- Международной инновационной конференции молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения «МИКМУС-2020» (Москва, 2020 г.);

- XLVIII Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения» (Москва, 2022 г.);

- XXIII Всероссийской научно-технической конференции «Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации» (Пермь, 2022 г.)

Публикации по теме диссертации

По теме диссертации опубликовано 10 научных работ, из них в рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК и приравненных к ним опубликовано 3 работы.

Внедрение результатов работы

Разработанная модель шлицевого соединения и методика определения его характеристик были реализованы в программном продукте DYNAMICS R4 для решения задач роторной динамики турбомашин различного назначения, разработанном научно-техническим центром роторной динамики «Альфа-Транзит», и используемом на предприятиях ОДК.

Вклад автора в проведённое исследование

1. Исследование особенностей моделирования шлицевых соединений, определения их характеристик и влияние на динамические системы.

2. Разработка численной модели шлицевого соединения, позволяющей определять жёсткостные характеристики с учётом зазоров и упругости шлицев в нелинейной постановке с использованием инкрементального представления больших поворотов.

3. Проведение исследования работы шлицевого соединения с учётом перекосов в динамической системе с использованием метода конечных элементов. Верификация разработанной численной модели по полученным в конечно-элементом анализе данным.

4. Подтверждение влияние шлицевого соединения в составе ГТД на динамические характеристики системы – критические скорости, амплитуды

вибраций, нагрузки на опоры – с использованием разработанной численной модели.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы из 70 наименований и списка условных обозначений. Содержание работы изложено на 107 страницах и включает 64 рисунка и 4 таблицы.

Благодарности

Автор выражает благодарность за помощь и содействие всему коллективу инженерно-консультационного центра по роторной динамике ООО «Альфа-Транзит».

1. ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМ СО ШЛИЦЕВЫМИ СОЕДИНЕНИЯМИ

1.1 Введение

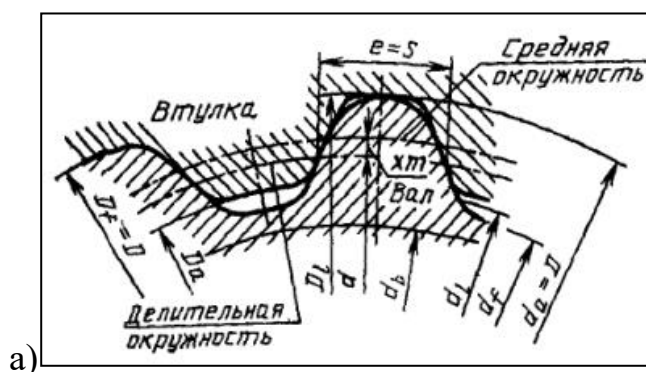
Шлицевое соединение представляет собой конструкцию, образуемую выступами-зубьями на валу входящими во впадины-шлицы соответствующей формы на ответной детали. Основное назначение - передача крутящего момента от вала к ступице. Подобные соединения получили большое распространение в машиностроении благодаря большой несущей способности, высокой точности центрирования соединяемых деталей, высокой надёжности и долговечности.

Различают следующие основные виды шлицевых соединений - прямобочное, эвольвентное и треугольное.

Эвольвентные шлицевые соединения обладают более высокой технологичностью по сравнению с прямобочными, имеют высокую прочность и точность. Соединения с треугольными зубьями применяют при небольших радиальных размерах конструкций.

Также шлицевые соединения различают по системе центрирования, рисунок 1.1, [1]:

- По наружному диаметру;
- По внутреннему диаметру;
- По боковым граням или по вспомогательным цилиндрическим или коническим поверхностям.



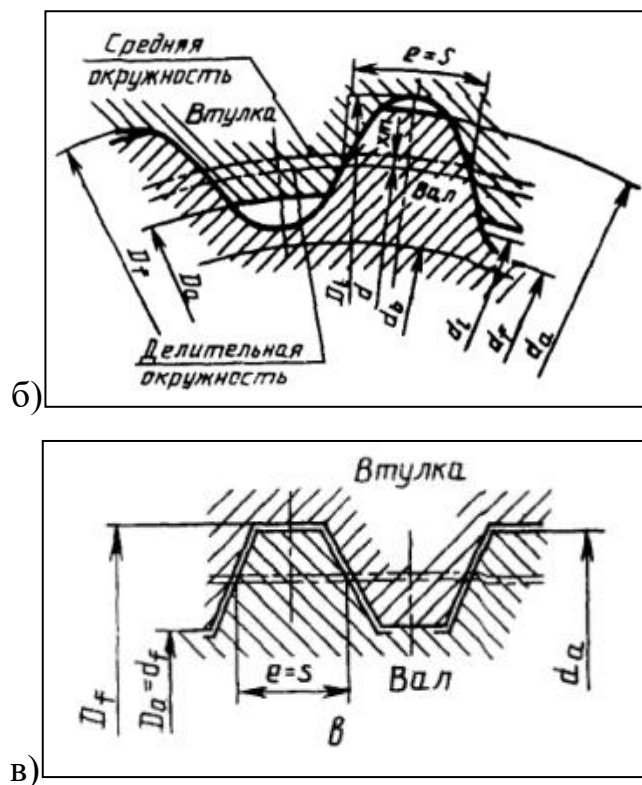


Рисунок 1.1 - Виды центрирования шлицевых соединений: а) – по наружному диаметру; б) – по боковым поверхностям; в) – по внутреннему диаметру

Центрирование по наружному или внутреннему диаметру применяется для обеспечения высокой точности. Центрирование по боковым граням весьма эффективно при больших радиальных нагрузках.

Наибольшее распространение в авиационных двигателях получило применение эвольвентных шлицевых соединений. Эвольвентный профиль имеет повышенную прочность и технологичность. Повышенная прочность достигается благодаря большому количеству зубьев и утолщению зубьев к основанию, а коэффициенты концентрации напряжений при кручении в 1.5 раза ниже, чем у прямобочного соединения.

При анализе динамического поведения роторных систем ГТД эвольвентные шлицевые соединения зачастую рассматриваются как абсолютно жёсткие. Такой подход оправдан при анализе систем с небольшими скоростями вращения, однако при высокоскоростном вращении шлицевые соединения могут быть источниками различного влияния на динамические параметры системы. Решение таких задач с жестким шлицевым соединением является некорректным и нуждается в более полном анализе. Целесообразность подобного анализа

обусловлена возможностью на ранних этапах проектирования произвести прогнозирование влияния соединений на работу двигателя. Особенно большой интерес представляет вопрос исследования шлицевых конструкций типа «шлицевая втулка». Подобные конструкции применяются во многих двигателях, и поэтому вопрос их анализа является важной задачей.

Примером такого соединения может являться шлицевая муфта двигателя ПС-90, осуществляющая передачу крутящего момента от ротора ТВД к ротору КВД, рисунок 1.2. Появление перекосов в таком соединении может приводить к изменению жёсткостных характеристик детали, увеличению нагрузок на опорные узлы, возникновению дополнительных сил и моментов, оказывающих влияние на прочностные характеристики шлицев (изменение пятна контакта и силы зацепления, уменьшение прочности) вплоть до разрушения вследствие автоколебательных процессов.

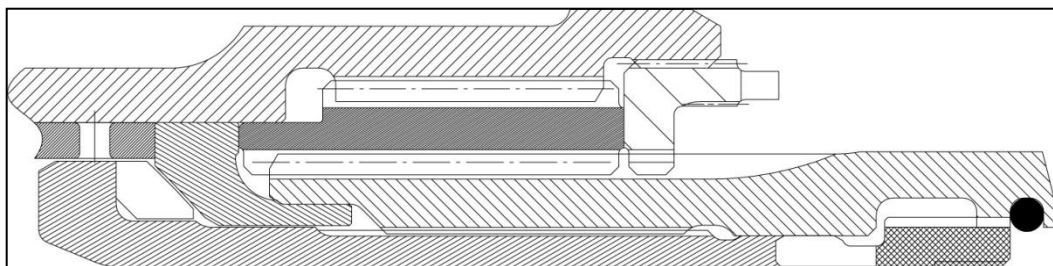


Рисунок 1.2 - Шлицевая муфта в соединении роторов КВД и ТВД двигателя ПС-90

Изменение прочностных и жесткостных характеристик, а также динамического поведения роторной системы, может происходить при появлении перекосов не только в шлицевых муфтах, но и в обычных шлицевых соединениях, участвующих в передаче крутящего момента, рисунок 1.3. Различные виды несоосности приводят к возникновению перекоса и, как следствие, появлению дополнительных сил и нагрузок. Обобщенная величина перекоса соединяемых деталей определяется углом относительно их некоторого идеального соосного положения. Основными причинами появления несоосности могут являться:

- Допуски на геометрию шлицев;
- Допуски на эксцентриситеты валов, корпусов, подшипников;

- Наличие зазоров в подшипниках;
- Смещение из-за разности температур наружного кольца подшипника и корпуса.

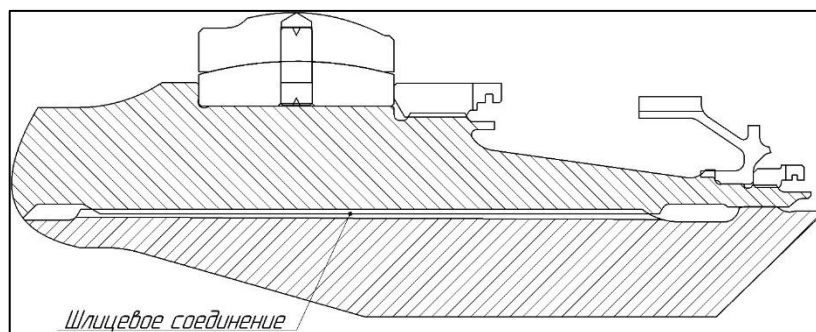


Рисунок 1.3 - Шлицевое соединение роторов КНД и ТНД двигателя GE 90

Поскольку каждая из соединяемых деталей испытывает различные внешние нагрузки, направление смещения каждого может быть различным. Результирующее направление может быть определено путём суммирования векторов смещения каждого из валов.

Рассмотрим шлицевую муфту, соединяющую два вала, рисунок 1.4, [2].

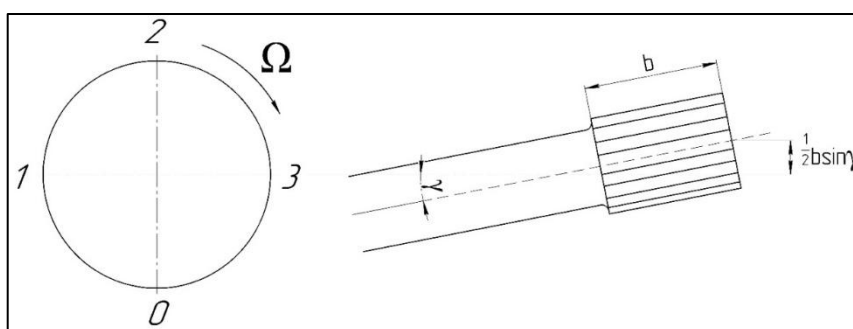


Рисунок 1.4 - Шлицевая муфта

Валы, соединяемые муфтой, вращаются с некоторой угловой скоростью Ω , их оси пересекаются по некоторым углом γ . Вследствие перекоса осей в зубьях шлицев происходит продольное проскальзывание, что приводит к росту действующих сил трения в зубьях. В точках 0 и 2 зубья находятся в крайних положениях – наиболее выдвинуты и наиболее углублены; скорости трения-скольжения здесь равны нулю. На участке 0-1-2 зубья вдвигаются, а на участке 2-3-0 – выдвигаются. Соответственно этому движению, силы трения имеют одно направление на левой половине окружности и противоположное – на правой.

Окружные нагрузки, вследствие смещения в осевом направлении, создают вращающий момент вокруг плоскости перекоса, рисунок 1.5. Силы трения создают момент в плоскости, расположенной под углом 90° к плоскости перекоса.

Усилия, возникающие при подобном контакте, согласно работе [2], можно определить следующими соотношениями:

Сила, действующая на зуб:

$$F = \frac{T}{D \cos \varphi}; \quad (1.1)$$

Сила трения зуба:

$$F_{\text{тр}} = \mu F; \quad (1.2)$$

Вращающий момент:

$$M_t = F * b = \frac{b}{D \cos \varphi} * T; \quad (1.3)$$

Момент трения:

$$M_f = \mu F * D = \frac{\mu}{\cos \varphi} * T, \quad (1.4)$$

где D – делительный диаметр шлицев, T – внешний вращающий момент, φ – угол контакта, b – ширина боковой поверхности шлица, μ – коэффициент трения.

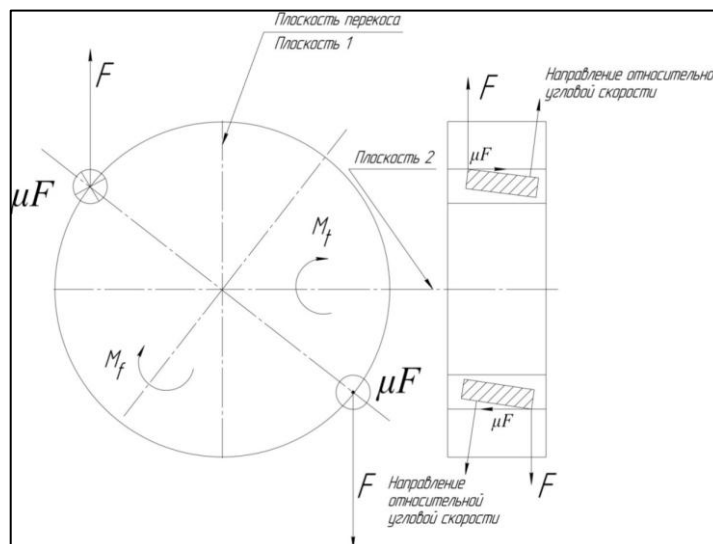


Рисунок 1.5 - Направление сил и моментов в шлицевой муфте

Эти соотношения полезны при оценке верхнего предела моментов, возникающих из-за перекоса в соединении. Также, они позволяют оценить максимально возможную величину нагрузки на подшипники.

Векторная сумма вращающего момента и момента трения представляет собой результирующий момент перекоса M_r . Поскольку плоскости действия этих моментов расположены под углом, отличающимся от 90° , следует их разложить на составляющие по двум перпендикулярным плоскостям.

Момент, действующий в плоскости 1:

$$M_1 = M_t + M_f \sin \varphi = \{F_0 D_0 + \sum 2 F_n \cos(n\theta) d_n\} \pm \{\mu F_0 D \sin \varphi + \sum \mu F_n D [\sin(\varphi + n\theta) + \sin(\varphi - n\theta)]\} \quad (1.5)$$

Момент в плоскости 2, нормальной к плоскости перекоса:

$$M_2 = M_f \cos \varphi = F_0 D \cos \varphi + \sum \mu F_n D [\cos(\varphi + n\theta) + \cos(\varphi - n\theta)] \quad (1.6)$$

Результирующий момент от перекоса в соединении:

$$M_r = \sqrt{(M_1)^2 + (M_2)^2} \quad (1.7)$$

Необходимо отметить, что приведенные выше выражения справедливы для систем, не учитывающих характер зависимости сил трения от скорости скольжения.

Из вышеизложенных положений можно заключить, что появление перекоса в шлицевом соединении оказывает влияние не только на динамическое поведение системы в целом, но и на характер работы соединения в частности. На сегодняшний день во многих странах вопросы исследования шлицевых соединений и их работы имеют важное значение.

1.2 Существующие методы расчёта параметров в шлицевых соединениях

Одна из первых работ, посвящённых методу расчёта шлицевых муфт, была представлена D.W. Dudley [3]. В своей работе автором описывается метод расчёта шлица как балочного элемента, используя формулы изгиба балки для определения деформаций. Контакт между поверхностями шлицев описывается теорией Герца, что позволяет определять касательные напряжения и напряжения сжатия простым методом. Подобные модели не обладают высокой точностью, однако предоставляют возможность предварительной оценки нагрузок и напряжений в соединении без использования значительных вычислительных ресурсов.

Результаты работы [3] в дальнейшем использовались во многих исследованиях. Так, авторы исследования [4] предлагают методы оценки распределения усилий и зазоров между шлицами, используя аналитические модели муфт, разработанные на основе балочной теории. Отмечается, что возникающие в соединении нагрузки зависят от величины перекоса и коэффициента трения. Также представленные результаты позволяют сделать вывод о важности учёта податливости шлицев, поскольку в случае описания как абсолютно жёсткого тела нагрузка в соединении будет передаваться лишь одной парой шлиц, в то время как учет деформаций шлица приводит к распределению передаваемых нагрузок. Это формирует определённые условия к создаваемым математическим моделям динамических систем с подобными соединениями.

На сегодняшний день наиболее распространённым методом исследования шлицев является использование аналитического подхода с представлением зуба в виде балки с описанием его упругой деформации как суммы деформаций изгиба, сдвига и упругого основания.

Подобные модели используются авторами в работах [5] и [6]. В [5] исследуется система со шлицевым соединением при различных величинах угловой и радиальной несоосности. Рассмотрено влияние перекоса на силы в зацеплении, рисунок 1.6, представлены орбиты системы, рисунок 1.7. Авторами отмечается изменение жёсткости шлицевого соединения совместно с изменением величины несоосности.

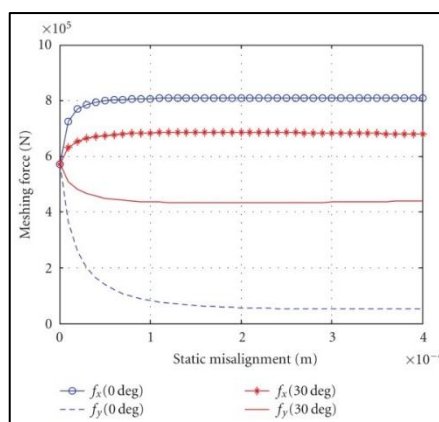


Рисунок 1.6 - Изменение сил зацепления при перекосе

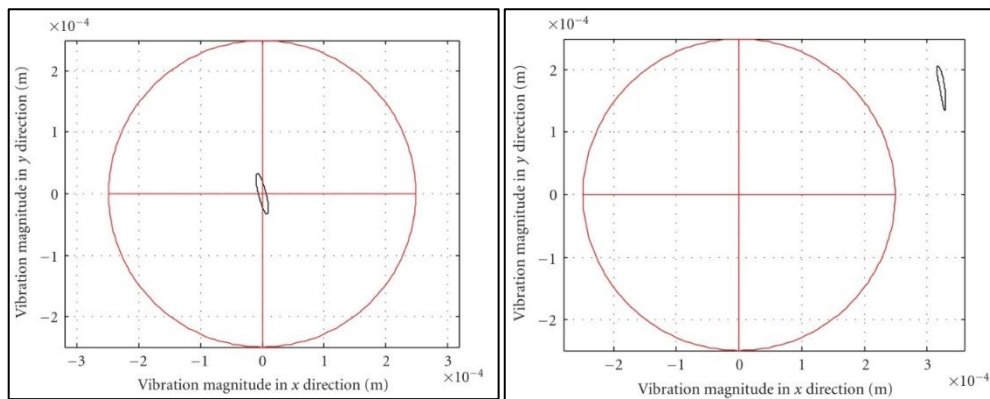


Рисунок 1.7 - Орбита исследуемого ротора при наличии несоосности (справа) и без неё (слева)

Более сложные модели представляют собой конечные элементы с набором допущений, предназначенных для ускорения расчёта без потери в точности результатов. Для таких моделей характерно отдельное описание внешней и внутренней части шлицев, жёсткости и деформации зубьев. Также в подобных работах представлено описание профиля и учитывается влияние на деформации.

Например, в исследовании [7] представлено сравнение аналитической модели авторов с результатами из литературы. Разработанная модель примечательна алгоритмом учёта контакта в шлицах и определением угла поворота, которые рассматриваются для двух торцевых поверхностей соединения. Валидация проведена путём сравнения усилий, возникающих на зубьях, из которой можно увидеть хорошее совпадение результатов двух численных экспериментов. Стоит отметить, что для определения жёсткости шлица авторы используют три компоненты – жёсткость основания, контактная жёсткость, определяемая по теории Герца, и изгибная и сдвиговая жёсткость. При этом авторы рассматривают жёсткостную характеристику как не зависящую от положения на зубе. Для сравнения представлены результаты распределения усилий в соединении, нагруженном крутящим моментом, а также имеющим угловой перекося. Авторами отмечается хорошая корреляция между полученными данными.

В работе [8] проводится анализ динамического поведения шлицевой муфты под действием дисбаланса и различной величины перекося. Авторы отмечают рост сил, действующих в зацеплении вместе с ростом величины

перекоса, а также увеличение динамического коэффициента нагрузки. Также можно отметить изменение спектра частот - с ростом перекоса в спектре появляется еще одна критическая частота.

Помимо изменения сил зацепления, динамического коэффициента нагрузки и спектра частот авторы указывают на изменение самого характера зацепления. С увеличением несоосности меняются зубья, находящиеся в зацеплении, а величина нагрузки на эти зубья возрастает.

В статье [9] рассматривается влияние радиального перекоса на вибрационные характеристики эвольвентной шлицевой муфты. Авторы анализируют относительную скорость одной пары зубьев при скорости вращения 4000 об/мин и изменении перекоса в плоскости X (перекос в плоскости Y постоянный и равен $1 \cdot 10^{-5}$ м, рисунок 1.8).

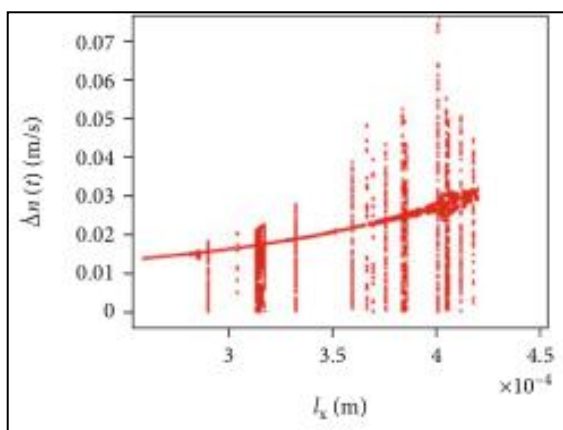


Рисунок 1.8 - Зависимость виброскорости от величины перекоса

Исследование процесса приводится с отображением круговых орбит движения, что позволяет делать выводы о различных состояниях системы - квазипериодических, мультипериодических и хаотических. При росте несоосности наблюдается переход к квазипериодическому состоянию системы с последующим переходом к мультипериодическому и хаотическому состояниям, что делает систему весьма неустойчивой и подверженной высоким нагрузкам.

Также авторы приводят результаты поведения шлицевой муфты при постоянном перекосе в плоскости X и Y (величина перекоса $2.7 \cdot 10^{-4}$ м и $2.4 \cdot 10^{-4}$ м соответственно) с изменением частоты вращения. На рисунках 1.9, 1.10 представлена относительная скорость движения. С увеличением скорости

вращения система переходит к квазипериодическому состоянию (рисунок 1.10), превращаясь в хаотическую на частоту 4800 об/мин. На частоте 5600 об/мин система вновь превращается в квазипериодическую.

С увеличением величины перекоса возрастает и то, как часто система превращается в квазипериодическую или хаотическую, что приводит к большим вибрациям и высоким нагрузкам.

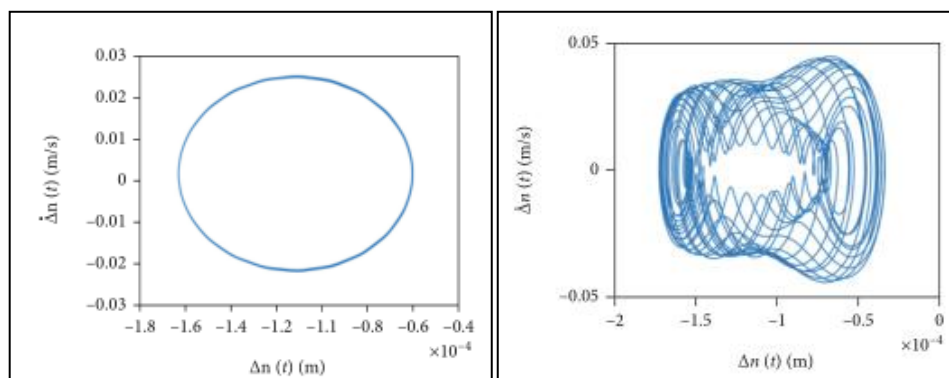


Рисунок 1.9 – Орбиты движения на частоте вращения: 4300 об/мин слева, 4600 об/мин справа

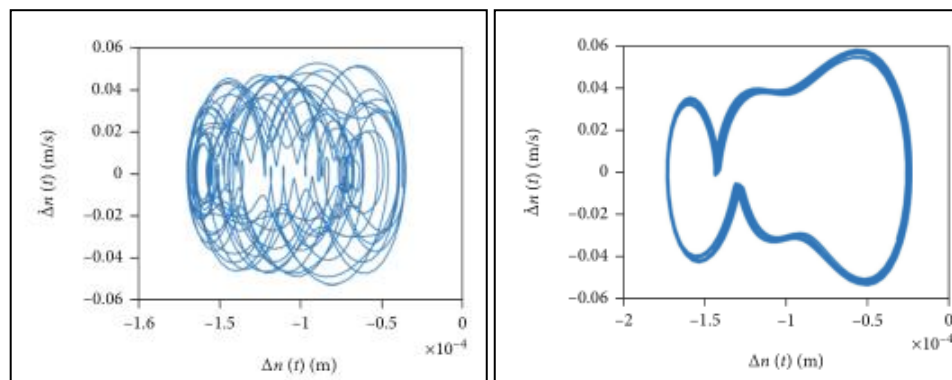


Рисунок 1.10 - Орбиты движения на частоте вращения: 4800 об/мин слева, 5600 об/мин справа

Авторы исследований, проведённых в работе [10], представляют модель шлицевого соединения в виде полной матрицы жёсткости, учитывающей перемещения по двум ортогональным осям и повороты по трем. Рассматриваемая модель представляет перемещения и повороты внешней и внутренней части шлицев в виде отдельных матриц, позволяя рассматривать контакт каждого шлица в отдельности, включая его взаимное проникновение. Отмечается, что определение матрицы жёсткости возможно как аналитическим, так и численными методами. Из результатов, предоставленных авторами можно отметить, что

разница в коэффициентах главной диагонали матрицы жёсткости, полученных данными метода, незначительна.

Проведённые в работе параметрические исследования влияние величины углового перекося на жёсткость соединения показывают уменьшение радиальной жёсткости с ростом величины перекося. Однако, для моментных жёсткостей характер изменения выглядит иначе - при малых значениях крутящего момента чем выше будет значение угловой несоосности, тем выше моментная жёсткость.

Рассматривая распределение контакта и нагрузок по зубьям в шлицевом соединении, стоит отметить исследования, посвящённые анализу шлицев с различными видами центрирования. Например, в работе [11] рассматривается соединение с центрированием по боковым поверхностям, по наружному диаметру и по внутреннему диаметру. Для получения результатов авторы используют численную модель, учитывающую зазоры между зубьями. Состояние контакта для каждого шлица рассматривается отдельно и определяется исходя из суммы упругих деформаций обоих контактирующих поверхностей.

Из анализа результатов авторами отмечаются значительные возможности самоцентрирования при посадках по внешнему и внутреннему диаметрам, а распределение нагрузок по шлицам происходит равномернее. Также описывается влияние радиального зазора при посадке по внешнему диаметру и указывается на улучшение самоцентрирования при меньших величинах зазора.

В статье [12] авторы рассматривают влияние величины зазора по боковым поверхностям на нагрузку зубьев шлицев. Авторы отмечают, что первая пара зубьев в зацеплении испытывает нагрузки в 2.53 раза больше, чем при беззазорном случае. Шлицы, находящиеся диаметрально противоположно первой паре, являются разгруженными.

Отмечается, что рост величины зазора приводит к росту коэффициента нагрузки на зубья и изменению количества зубьев в зацеплении. Авторами указывается на то, что при достижении зазора ~ 0.18 мм в контакте остаётся лишь половина шлицев в соединении.

Обращается внимание на то, что в осевом направлении эффект кручения представляется существенным параметром, влияющим на распределение нагрузки по длине шлица. Можно заметить существенную неравномерность нагрузки от 0 в начале зуба до 2.51 в конце. Также отмечается влияние освинцовывания, которое делает распределение нагрузок более равномерным.

Немаловажное влияние имеет сравнение аналитических моделей с результатами конечно-элементного моделирования. Подобные исследования широко представлены в зарубежной литературе, что говорит об их актуальности, а также о качестве разрабатываемых аналитических решений. Наиболее рассматриваемыми задачами при проведении подобных сравнений является анализ контакта в зацеплении. Появление несоосности может приводить к изменению зазоров между зубьями, перераспределению нагрузок, изменению типа контакта и т.д. Помимо этого, конечно-элементные методы позволяют весьма точно моделировать саму зону контакта зубьев - определять тип контакта, площадь, давление в контакте и его распределение по длине зуба, выделять наиболее нагруженные области и определять величину деформаций зубьев.

Так, например, в статье [13] анализируется распределение нагрузок в шлицевой паре для различных значений нагружения и несоосности. Рассматриваются аналитическая и конечно-элементная модели шлицев, рисунок 1.11. Аналитическая модель в данной работе примечательна реализацией учета различных параметров по высоте зуба. Исследование зацепления проводится для нескольких вариантов передаваемого крутящего момента (200 Нм, 1000 Нм и 5000 Нм) и различных величин перекоса - 0.02 мм, 0.05 мм и 0.08 мм.

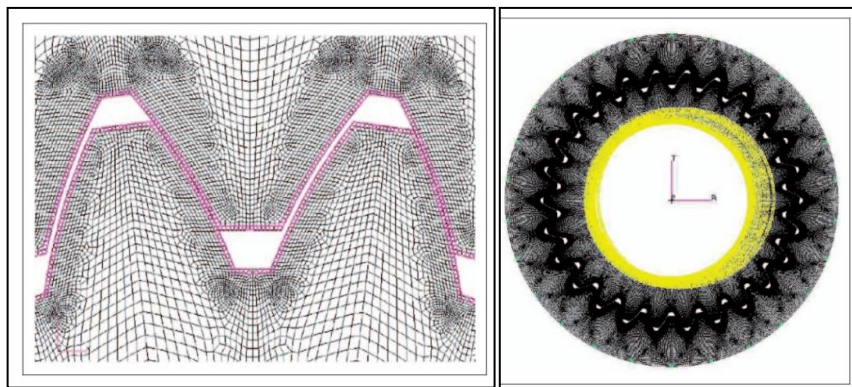


Рисунок 1.11 - Вид конечно-элементной модели шлицев

В результатах расчётов конечно-элементная модель показывает менее равномерно распределённый профиль давления на зубья, увеличивая нагрузку на зубья с 6 по 22 с ростом величины несоосности. Для теоретической модели отмечается увеличение неравномерности распределения нагрузки по шлицам как с ростом величины крутящего момента, так и с ростом несоосности.

Подобное сравнение аналитической и конечно-элементной моделей проводится авторами работы [14]. Проводя сравнения сил зацепления в моделях шлицевой муфты при различных величинах радиального перекоса (0.02 мм, 0.04 мм и 0.06 мм), авторы указывают на различие полученных результатов. Причиной несовпадений действующих сил зацепления может являться допущение аналитической модели о том, что зацепление зубьев осуществляется одновременно и угловые смещения, создаваемые деформацией зубьев, равны. Авторами предлагается соотношение, позволяющее оценить величину зазора при возникновении радиального перекоса:

$$\eta_j = \eta_0 - e \cos(\varphi_j - \frac{\pi}{2} + \beta) \quad (1.8)$$

где η_0 - зазор со стороны зуба при нормальном состоянии, φ_j - угол между зубом j положительным направлением оси X, β - угол давления.

В исследовании [15] проводится исследование влияние величины перекоса на шлицевое соединения, промоделированное с использованием МКЭ. Используя различные величины радиального перекоса, отмечается перераспределение контактирующих шлицев и рост напряжений в контакте с ростом величины несоосности (174.8 МПа, 215.6 МПа и 276 МПа для 0.02 мм, 0.04 мм и 0.08 мм соответственно). С ростом углового перекоса наблюдается рост виброускорений в системе.

В статье [16] авторы сравнивают влияние перекоса на нагрузку зубьев в конечно-элементной двухмерной модели шлицевого соединения и теоретической модели. На рисунке 1.12 представлено изменения диаметра, к которому прикладывается нагрузка, а также распределение усилий при перекосе 0.02 мм и 0.08 мм. Авторы отмечают, что при перекосе 0.02 мм (слева) диаметр приложения нагрузки уменьшается, а при перекосе 0.08 мм распределение нагрузок на зубья

имеет менее упорядоченный характер. Также авторы приводят сравнение жёсткости зубьев в зависимости от диаметра прилагаемой нагрузки. Сравнение жёсткости проведено для нормализованной жёсткости зуба (нормализованной относительно номинального значения жесткости, полученной с теоретической точкой приложения нагрузки на делительном диаметре). Жёсткость зуба была рассчитана как жёсткость консольной балки, деформация которой складывалась из изгиба, сдвига и деформации корня.

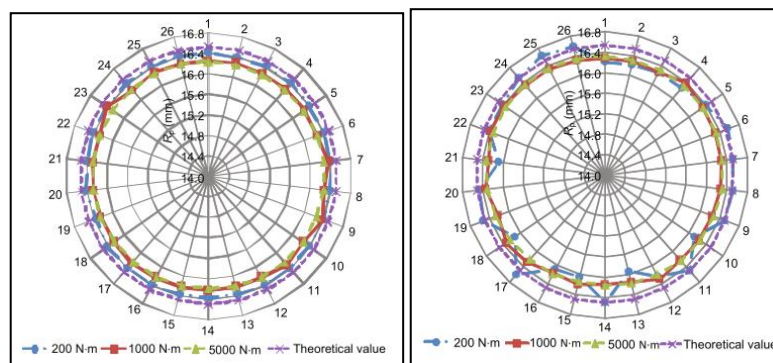


Рисунок 1.12 - Сравнение распределения нагрузки по шлицам при различном крутящем моменте

В рассмотренных работах наблюдается неравномерность распределения нагрузок при перекосе - причем, чем больше величина перекоса, тем неравномернее распределение. Авторами отмечается, что данный эффект может быть связан как с изменением зубьев, первыми входящих в контакт, так и с точкой приложения нагрузки.

В некоторых исследованиях шлицевых соединений под действием перекоса рассматривается эффект самоцентрирования. Данный процесс происходит при действии крутящего момента, приводящего к возникновению центрирующего момента между поверхностями шлицев, находящихся в контакте. Например, в работе [17] авторами проводится сравнение результатов аналитической, численной и экспериментальной моделей на предмет величины центрирующего момента в перекосенном шлицевом соединении. Разработанная численная модель отличается от аналитических формул, доступных в литературе итерационным вычислением контактной площадки зуба, а также учетом его жёсткости и угла смещения. По результатам проведённого сравнения авторы

отмечают значительное расхождение между аналитическими и экспериментальными исследованиями. Данные же численной модели более близки к экспериментальной, однако также имеют несовпадение - авторы связывают это с учетом лишь одной пары зубьев в зацеплении. Улучшение результатов может быть достигнуто путем учёта фактического количества контактирующих зубьев.

Особый интерес представляют исследования, связанные с влиянием шлицевой муфты с перекосом на спектр возбуждаемых частот системы. В исследовании [18] авторами рассматривается двухвальная система на шариковых подшипниках, соединённая шлицевой муфтой. Возникновение радиального перекоса позволяет увидеть в спектре возбуждаемых частот гармоники x_1 , x_2 в горизонтальном направлении и x_1 и $x_{2.5}$, а также частоту в 70 Гц, близкую к четвёртой критической скорости системы (69 Гц) в вертикальном направлении, рисунок 1.13. При возникновении углового перекоса на спектре частот присутствуют лишь гармоники x_1 (в обоих направлениях) и x_2 (в вертикальном направлении), а при действии одновременного двух видов несоосности в вертикальном направлении также возбуждается частота 34 Гц, рисунок 1.14.

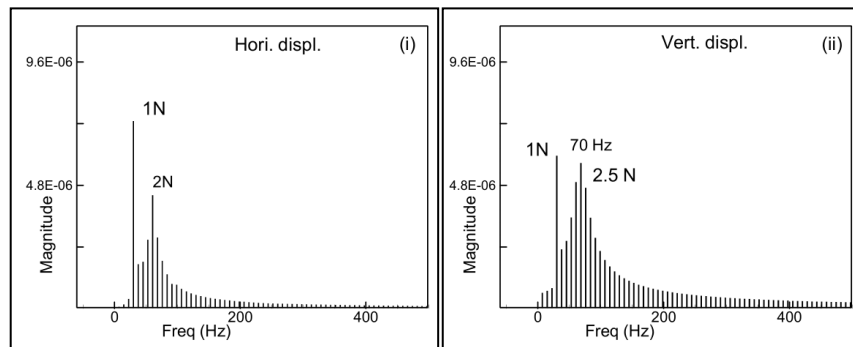


Рисунок 1.13 - Спектры возбуждаемых частот при радиальном перекосе

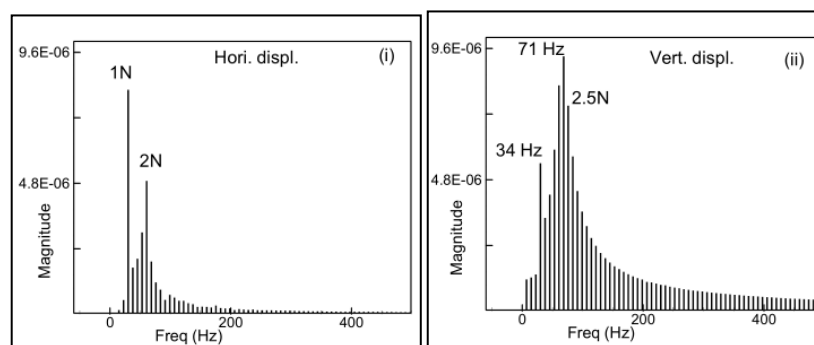


Рисунок 1.14 - Спектры возбуждаемых частот при угловом перекосе

Стоит отметить работы, посвящённые экспериментальным исследованиям шлицевых соединений, широко представленные в зарубежных источниках. Рассматривая различные аналитические и конечно-элементные модели, остаётся необходимость их верификации и подтверждения полученных результатов с использованием конструкций и условий, применяемых в реальных системах. Как правило, экспериментальные модели состоят из двух роторов, соединенных между собой шлицевой муфтой, имеющих две опоры (для каждого вала) и приводящимися во вращение электромотором. В некоторых работах установка состоит из электромотора и вала, соединенных между собой шлицами, которые являются объектом исследования. Помимо верификации таких параметров, как распределение давления по длине шлицев, величина давления в зацеплении при перекосе и распределение нагружения по зубьям авторами нередко рассматривается влияние перекоса на положение критических частот системы, что позволяет говорить об его влиянии на динамические параметры - резонансы, амплитуды, собственные частоты, жесткость.

Авторами работы [19] проводится сравнение модели, созданной с использованием метода WTMMR (метод матриц перехода Риккати) с экспериментом путём сопоставления первых четырёх собственных частот системы. Следует заметить, что используемая модель отличается учётом различных видов деформаций шлица, а также подходами к определению длины контакта при соосном положении и при перекосе. Отмечается высокое совпадение полученных частот, что позволяет сделать вывод о верификации и её точности.

Для верификации модели шлицевого соединения в исследовании [20] проводилось сопоставление результатов, полученных в КЭ-модели, эксперименте и аналитически. В анализе использовались различные виды посадок в соединении - натяги величиной 0.05 и 0.03 мм, зазоры величиной 0.03, 0.05 мм и 0 мм, а также исследовалось влияние усилий предварительной затяжки на жесткость соединения. По результатам верификации аналитическая модель показывала значительные расхождения с результатами конечно-элементного моделирования и эксперимента. Авторы связывают данный эффект с потерей жёсткости шлицевого

соединения, обусловленной скольжением контактных поверхностей и предлагают использовать параметрическую КЭ-модель при моделировании динамики ротора.

В статье [21] рассматривается распределение контактного давления по длине шлицев для аналитической модели, КЭ модели и экспериментального образца. Для анализа модели рассматривались под действием нагружения крутящим моментом величиной 16.4 Нм и 26.2 Нм. Авторы отмечают, что согласно полученным результатам по распределению давления можно выделить две характерные зоны: зона повышенного давления (ближе к концу соединения) и зона низкого давления. Также можно увидеть, что, несмотря на достаточно хорошее совпадение, существуют достаточно противоречивые зоны между экспериментом и математическими моделями. Приближение результатов аналитической модели к экспериментальной авторы добивались с использованием корректирующих коэффициентов. Подбор величин коэффициентов осуществлялся путём выбора значения, минимизирующего как среднюю абсолютную ошибку, так и стандартное отклонение.

В работе [22] авторы рассматривают влияние углового перекоса на величину деформаций и жёсткость зубьев шлицевого соединения. На рисунке 1.15 показано сравнение результатов деформаций зубьев для аналитической модели, КЭ-модели и эксперимента. В результатах отмечается хорошее совпадение полученных зависимостей - разница между результатами эксперимента и КЭ-модели составляет 7.6%, а между аналитической моделью и экспериментом - 8.5%.

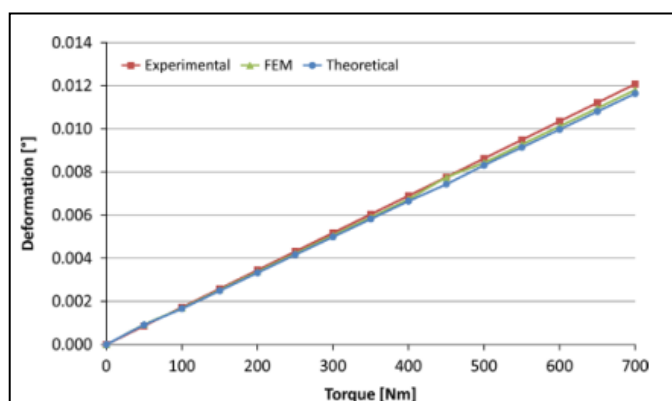


Рисунок 1.15 - Сравнение деформации шлицев для трёх моделей

Авторы исследования [23] рассматривают влияние возникновения перекоса на спектр возбуждения системы, сравнивая результаты моделирования с экспериментом. Аналитическая модель в данной работе представляет особый интерес поскольку учитывает не только стандартные деформации зуба (изгиб, сдвиг и упругая деформация корня), но и деформацию осевого сжатия и локальные контактные деформации.

По результатам расчётов можно заключить, что возникновение перекоса приводит к возбуждению еще трёх частот, а также к значительному росту амплитуд по первой и второй частотам. Для подтверждения результатов расчёта авторами было проведено экспериментальное исследование влияния несоосности на динамическое поведение роторной системы. Исследования проводились при аналогичном выборе величин углового и радиального перекосов. По результатам эксперимента можно сделать вывод о достаточной степени достоверности математической модели. Наблюдаемый рост вибраций при увеличении радиальной несоосности в эксперименте несколько отличается от математической модели. Авторы связывают данные эффекты с упрощением модели, а также учетом процессов трения.

Исследование динамической системы со шлицевым соединением при появлении эксцентриситета представлено в [24]. Рассматриваемая система подвергается нагрузкам от эксцентриситета, варьирующегося в диапазоне от 0 до $4.5 \cdot 10^{-4}$ м. Авторами отмечается, что амплитудно-частотная характеристика остаётся достаточно стабильной вплоть до величины эксцентриситета $3.5 \cdot 10^{-4}$ м. Дальнейший рост до значений $4.5 \cdot 10^{-4}$ м приводит к тому, что система постоянно переходит между хаотическими и квазипериодическими состояниями – это можно наблюдать по диаграммам Пуанкаре или фазовому портрету. В этих состояниях помимо главной частоты (109.4 Гц) на АЧХ можно наблюдать возбуждение еще нескольких частот – 218.7 Гц, 320.3 Гц, 421.9 Гц и 531.2 Гц.

Для сравнения с экспериментом использовались частотные спектры, полученные для следующих величин эксцентриситета - $2.031 \cdot 10^{-4}$ м, $3.4426 \cdot 10^{-4}$ м и $4.4221 \cdot 10^{-4}$ м. Для значения $2.031 \cdot 10^{-4}$ в спектре теоретической модели

выделяются две частоты – 280.3 Гц и 599.6 Гц, которые также можно наблюдать и в спектре эксперимента. Увеличение эксцентриситета до $3.4426 \cdot 10^{-4}$ м приводит к увеличению амплитуд виброускорений в теоретической модели; в спектрах эксперимента можно отметить смещение частотного диапазона к значениям 253.91 - 405.27 Гц и 522.46 - 922.85 Гц. Дальнейший рост до значения $4.4221 \cdot 10^{-4}$ м закономерно увеличивает амплитуды вибраций, а также сдвигает частоты в результатах эксперимента до значений 351.56 Гц, 546.88 Гц и 981.44 Гц. Авторами отмечается согласование совпадение результатов математической модели и эксперимента по пикам вибраций и их положению. Несовпадение в части точного положения частот и переходными процессами между двумя пиками авторы связывают с отсутствием учёта смазки в модели.

При верификации аналитических моделей и полученных в процессе их расчёта данных также часто проводят анализ роторных систем с исследованием типа посадки шлицев на динамику системы. Как правило, рассматриваются три качественных типа посадки - с зазором, с натягом и переходная. Изменение критических частот и амплитуд вибраций являются основными факторами, зависящими от посадки соединения. На сегодняшний день в литературе данная проблема часто подвергается исследованию, что говорит о важности её учета при расчёте и проектировании роторных систем со шлицевым соединением.

Так например в работе [25] экспериментально подтверждается влияние типа посадки на положение критической скорости системы. Сравнивая результаты численного моделирования и экспериментальные данные, авторы показывают, что критическая скорость динамической системы с шлицевой муфтой увеличивается при посадке с натягом или при свободной посадке.

В статье [26] рассматриваются различные типы посадок в шлицевом соединении при различных условиях смазывания. Проводится анализ для трёх видов посадки - натяг, зазор и переходная - при различном давлении подачи масла в демпфер, а также при условии отсутствия смазки. В работе используется коэффициент соотношения амплитуд полуоктавной частоты и частоты вращения,

называемый соотношением полуоктавных частот. При одной и той же скорости чем выше данное соотношение, тем более нестабильна система.

Авторы отмечают, что при посадке с натягом соотношение частот шлиц без смазки при давлении масла в демпфере 0.15 МПа и 0.35 МПа меньше, чем при переходной посадке. Такие результаты указывают на уменьшение вибраций при жёсткой посадке относительно переходной. Однако, при наличии смазывающего материала в соединении, для величины давления масла 0.15 МПа величина вибраций для случая натяга выше, чем для случая переходной посадки. Это указывает на вариативность последствий, вызванных жёсткой посадкой.

В то же время соединение с посадкой с зазором будет показывать меньшие вибрации при давлении в демпфере в 0.5 МПа по сравнению со случаем переходной посадки для давлений 0.35 МПа или 0.8 МПа. Это указывает на целесообразное использование посадки с зазором при больших величинах внешнего демпфирования. В результатах исследований указывается на улучшение стабильности системы при посадке с зазором, однако отмечают единовременный рост вибраций. Также отмечается, что для давления масла в демпфере 0.35 МПа шлицы с жёсткой посадкой показывают меньшие амплитуды вибраций по сравнению с переходной посадкой. Однако, для давления масла в 0.15 МПа ситуация противоположная.

Следует заметить, что при несмазывающемся шлицевом соединении стабильность системы увеличивается при посадке с натягом. При условии смазывания шлицев, влияние типа посадки на динамику системы нелинейно и зависит от величины давления масла в демпфере.

1.3 Влияние сил трения в шлицевом соединении

Рассматривая динамические системы со шлицевыми соединениями нельзя не отметить важность учёта и анализа воздействия силы трения на динамику шлицевого соединения. Изучение данного вопроса включает в себя рассмотрение различных моделей трения, их влияние на положение критических частот и

амплитуду вибраций, а также возможность возникновения автоколебательных процессов.

Процесс трения и его эффекты интересовал различных учёных и исследователей на протяжении многих лет. Первые важные заключения сформировал еще Леонардо да Винчи основываясь на своих экспериментах [27]:

- Влияние веса прямо пропорционально трению и не зависит от площади контакта;
- Трение зависит от природы контактирующих поверхностей: чем более гладкая поверхность, тем меньше трение.

Впоследствии данные выводы были подтверждены такими исследователями, как Гийомом Амонтоном, Филлипом де ла Ир и Антуаном Пэрентом. Теория о независимости трения от площади контакта была подтверждена Филлипом де ла Иром в экспериментах по скольжению дерева по дереву и мрамора по мрамору. Согласно работе де ла Иру [28], сопротивление возникает из-за текстуры поверхностей, которые, если они гибкие, должны изгибаться или лежать плоско, а если твердые, то должны расцепляться и могут отделиться. Эта концепция смогла объяснить независимость трения от площади контакта, поскольку возможность отрыва ввела концепцию остаточной деформации поверхности и сдвига, которая подразумевает, что сопротивление будет зависеть от количества неровностей и, следовательно, размера поверхностей. Было замечено, что в случае упругих неровностей прогиб обратно пропорционален их количеству (т. е. чем больше неровностей, тем труднее вызвать отклонение каждой отдельной неровности), в то время как общая реакция оставалась постоянной, давая сопротивление, не зависящее от площади. В случае жестких неровностей сопротивление возникало из-за силы, необходимой для поднятия гребней поверхности друг над другом, что давало прямую зависимость от нагрузки, но не зависело от кажущейся площади контакта.

Различают два вида трения: внешнее трение (трение в опорах, сопротивление среды) и внутреннее трение (трение в материале). В дальнейшем будет рассматриваться только внешнее трение.

В классическом понимании трения есть тангентная составляющая реакции между двумя контактирующими поверхностями. Физически эта составляющая является результатом различных эффектов, зависящих от топологии контакта, свойств поверхности материала, относительной скорости и наличия смазки. В зависимости от вида движения контактирующих тел трение можно классифицировать как по характеру фрикционного взаимодействия - сухое, граничное, смешанное, жидкое, вязкоупругое - так и на трение качения, скольжения, покоя, вращения.

Наиболее простым случаем трения является сухое, представляющее собой скольжение двух поверхностей и моделирующееся как силы упругой и пластической деформаций контактирующих поверхностей. Остальные типы фрикционного взаимодействия появляются при наличии в системе смазки.

Первоначально в любом процессе движение в начальный момент времени трение рассматривается как статическое - трение при прилипании. Для преодоления статического трения необходима сила, называемая силой отрыва, инициирующая начальные движения. Исследования, посвящённые природе статического трения и силе отрыва, широко представлены в литературе. Например, в работе [29] автор исследует процессы перехода между прилипанием и скольжением. Рассматривая трение как функцию от перемещения было обнаружено, что момент возникновения силы отрыва определяется пиком, отображённым на рисунке 1.16.

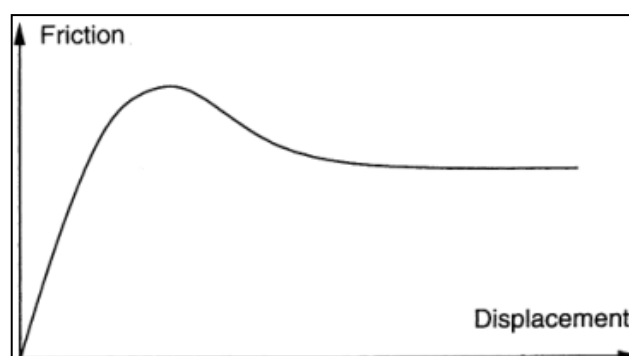


Рисунок 1.16 - Характеристика трения от перемещения

Первые количественные результаты исследования влияния сил трения на движение тел было обнаружены Кулоном. Между двумя телами,

сдавливающимися нормальной силой, действует сила трения, имеющая следующие простейшие свойства:

1. Трение покоя. Зависит от материалов контактирующих поверхностей и практически не зависит от площади контакта и шероховатости поверхностей;
2. Трение скольжения. Пропорциональна силе прижима. Не зависит от площади контакта и шероховатости и слабо зависит от скорости скольжения.

Модель трения Кулона является считается простейшей моделью трения. Характеристика этой модели представлена на рисунке 1.17.

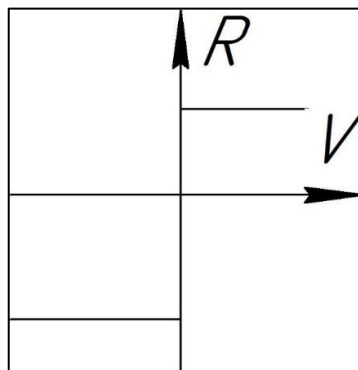


Рисунок 1.17 - Модель трения Кулона

В дальнейшем исследованию процессов трения было посвящено множество работ [30 - 34]. Из существующих на сегодняшний день моделей трения можно выделить следующие основные:

- Модель Кулона;
- Вязкое трение;
- Упруго-пластическая модель;
- Модель Stribeck;
- Модель Dahl;
- Модель LuGre;
- Модель Leuven;
- Модель GMS.

Влияние типа трения на динамическое поведение роторных систем рассматривается, как правило, в противопоставлении шлицевого соединения со смазкой и без. Так в работе [35] авторами рассматривается влияние смазки в шлицах на величину вибраций и возбуждение резонансных частот на примере

сравнения аналитической модели и экспериментальной установки. Результаты, полученные на экспериментальной установке, представлены на рисунке 1.18. Авторы отмечают, что в случае с сухим трением в шлицевом соединении наблюдается два резонанса - 2400 об/мин и 4200 об/мин. При частоте 4200 об/мин амплитуды растут очень резко. Согласно частотной диаграмме, в потере устойчивости ротора при 4210 об/мин наибольший вклад вносят три гармоники - 4200 об/мин (1х), 2690 об/мин (0.64х) и 8420 об/мин (2х). Система с вязким трением имеет резонанс лишь на частоте 2400 об/мин.

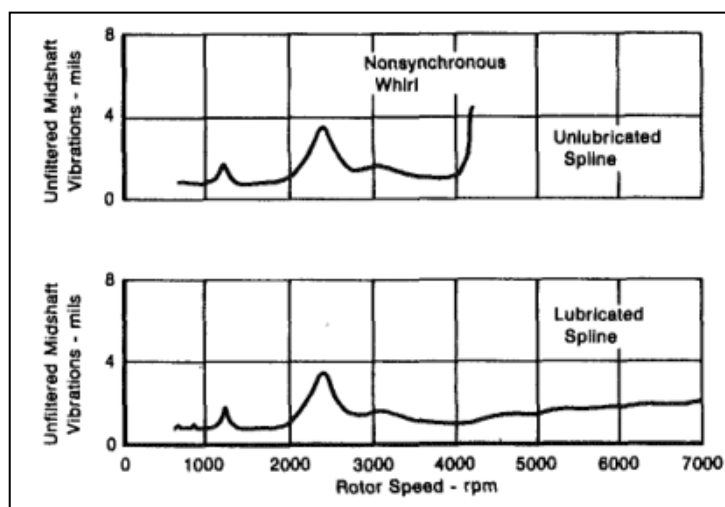


Рисунок 1.18 - Амплитуды вибраций в зависимости от условий смазывания шлицев

Вместе с этим, аналитическая модель, используемая авторами, прогнозирует резонанс на частоте 2376 об/мин. Данное значение хорошо совпадает с полученным в эксперименте. Однако, воспроизведение эффекта потери устойчивости при сухом законе трения авторы не исследуют.

В статье [26] сравнивается поведение динамической системы с учётом смазывания шлицев и без. Положение критических скоростей для этих случаев 3391 об/мин и 3414 об/мин соответственно. Авторы отмечают снижение амплитуд вибраций для первой критической частоты системы при использовании смазки и более устойчивое поведение системы. Из результатов можно заметить, что в обоих случаях в спектре имеется субгармоника, равная 0.5 от основной. Однако, в случае вязкого трения в соединении, амплитуды преобладают у основной гармоники, в то время как система с сухим трением имеет не только

доминирующей по амплитудам гармонику $0.5x$, но и более высокие значения вибраций.

Данные исследования показывают, что разница между различными видами трения в шлицевом соединении может оказывать значительное влияние на величину амплитуд вибраций системы.

Однако, действие сил трения может воздействовать не только на амплитуды вибраций системы. Рассмотрим линейную систему гармонического осциллятора с линейной характеристикой трения [36]. Уравнение движения при сделанном предположении о законе трения запишется так:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (1.9)$$

Где b – коэффициент трения.

Обозначив $\frac{b}{m} = 2h$; $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, получим следующее решение:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad | /m \quad (1.10)$$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.11)$$

Решение этого уравнения в общем случае имеет вид:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (1.12)$$

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1.13)$$

Сила трения в данной системе выступает в роли диссипативной силы, рассеивающей возникающую энергию колебаний - колебательный процесс такой системы является затухающим.

Рассматривая уравнение движения в некотором промежутке времени от 0 до τ , можно привести уравнение к следующему виду:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad | * \frac{dx}{dt} \quad (1.14)$$

$$m \int_0^\tau \frac{d^2 x}{dt^2} * \frac{dx}{dt} dt + \int_0^\tau b \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt + \int_0^\tau kx \frac{dx}{dt} dt = 0 \quad (1.15)$$

Произведя интегрирование, получим:

$$\left| \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right|_0^\tau + \left| \frac{kx^2}{2} \right|_0^\tau = - \int_0^\tau b \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt \quad (1.16)$$

Левая часть получившегося выражения представляет собой изменение полной энергии системы за время от 0 до t . Член, стоящий справа, определяет потери энергии на трение.

Если бы b было отрицательным, то энергия системы возрастала, и «трение» являлось бы источником энергии. В системе, не обладающей собственным источником энергии, такой процесс невозможен. Однако если допустить, что система обладает собственным резервуаром энергии, то можно допустить и наличие отрицательного коэффициента b . В таком случае можно говорить об «отрицательном трении», поскольку оно характеризуется тем же членом дифференциального уравнения, что и обычное трение.

Простейшим примером подобного явления может служить следующая механическая система, рисунок 1.19, [37]. Масса m , укрепленная пружинами k_1 и k_2 , лежит на движущейся равномерно со скоростью v_0 ленте.

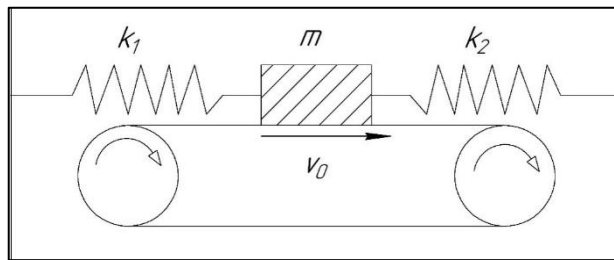


Рисунок 1.19 - Механическая система с отрицательным трением

Обозначив смещение груза через x а его скорость через x' , запишем силу трения как функцию относительной скорости в виде $F(v) = F(v_0 - x')$. Обозначив результирующий коэффициент упругости через k , уравнение движения массы m запишется следующим образом:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(v_0 - \dot{x}) \quad (1.17)$$

Ограничим рассмотрение области решения областью, в которой $|\dot{x}| \ll v_0$. Разложив в этой области функцию F в ряд Тейлора вблизи значений v_0 и ограничившись первым членом ряда, получим:

$$F(v_0 - \dot{x}) = F(v_0) - \dot{x}F'(v_0) \quad (1.18)$$

Тогда уравнение движения примет вид:

$$m\ddot{x} + [b + F'(v_0)]\dot{x} + kx = F(v_0) \quad (1.19)$$

Величина и знак коэффициента $b + F'(v_0)$ зависят от характеристики трения; величина $F'(v_0)$ представляет собой угол наклона характеристики в точке v_0 и в случае падающей характеристики $F'(v_0) < 0$. Если имеется достаточно сильное падение характеристики, то коэффициент $b + F'(v_0)$ будет отрицательным, и уравнение (1.25) описывает систему с отрицательным трением.

Часто характеристики трения имеют качественную зависимость, изображённую на рисунке 1.20. При малых скоростях скольжения практически всегда будет значительный участок падения. В этой области система будет иметь эффект «отрицательного демпфирования».

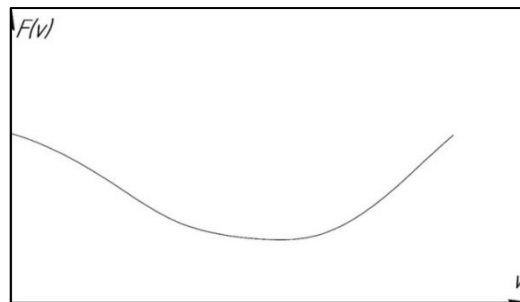


Рисунок 1.20 - Качественная зависимость силы трения от скорости скольжения в случае «сухого» трения

Другим примером механической системы с отрицательным трением может являться маятник Фроуда, рисунок 1.21. На равномерно вращающемся с угловой скоростью Ω вала подвешен обычный маятник с некоторым трением. В уравнении движения этого маятника необходимо учесть момент силы трения вращающегося вала о подшипник, на котором подвешен маятник. Так как сила трения зависит от относительной скорости трущихся поверхностей, то момент силы трения можно записать в виде $F(\Omega - \dot{\varphi})$.

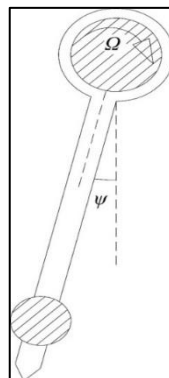


Рисунок 1.21 - Маятник Фроуда

Помимо трения маятника о вал, необходимо учитывать сопротивление воздуха. Считая, что оно пропорционально скорости $\dot{\varphi}$, получим уравнение движения маятника в следующем виде:

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi = F(\Omega - \dot{\varphi}) \quad (1.20)$$

Состояние равновесия ($\varphi = \varphi_0, \dot{\varphi} = 0$) определяется уравнением

$$mgl\sin\varphi_0 = F(\Omega) \quad (1.21)$$

Рассматривая движение маятника вблизи состояния равновесия и полагая $\varphi = \varphi_0 + \psi, \dot{\psi} = \dot{\varphi}$ разложим функции $\sin(\varphi)$ и $F(\Omega - \dot{\varphi})$ в ряд Тейлора по степеням ψ и $\dot{\psi}$. Ограничиваясь линейными членами, мы получим линеаризованное уравнение малых колебаний маятника:

$$I\ddot{\psi} + [b + F'(\Omega)]\dot{\psi} + mgl\cos\varphi_0 \cdot \psi = 0 \quad (1.22)$$

Если $F'(\Omega) < 0$ и по модулю больше b , то коэффициент при $\dot{\psi}$ будет отрицателен. В некоторой области значений Ω , где характеристика трения имеет достаточно крутое падение, при малом b можно получить отрицательные значения коэффициента $b + F'(\Omega)$. В этом случае получается уравнение, аналогичное уравнению обычной системы с трением:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.23)$$

В данном уравнении коэффициент h будет отрицателен. Таким образом, мы получаем линейную систему с наличием «отрицательного» трения.

На примере рассмотренных простых механических систем можно сделать вывод о том, что сила трения не всегда выступает в роли демпфирующей силы. Приводя к увеличению энергии в системе, данная сила может выступать как возбуждающая, способствуя появлению новых колебаний. Подобные процессы называются автоколебательными.

Во многих источниках (например [37 - 40]) под автоколебаниями понимают незатухающие колебания, поддерживаемые за счёт энергии из источника, не обладающего колебательными свойствами. Наиболее частым примером автоколебаний являются системы с сухим трением.

Рассмотрим простейшую модель пары трения, рисунок 1.22, [41]. Блок массой m тянут по поверхности со скоростью v_0 . Упругость системы

моделируется пружиной с жёсткостью c . Примем, что сила трения в области контакта является функцией скорости скольжения $F(\dot{x})$. Тогда, уравнение движения блока можно записать в следующем виде:

$$m\ddot{x} + F(\dot{x}) + \eta\dot{x} + cx = cv_0t + \eta v_0 \quad (1.24)$$

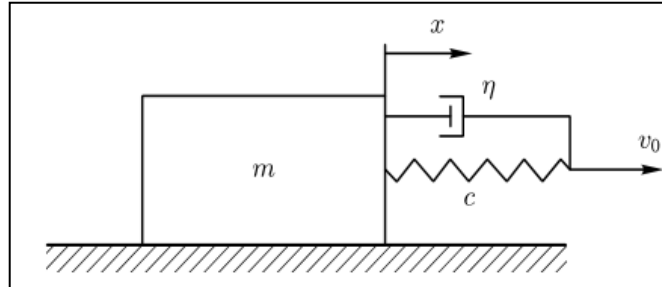


Рисунок 1.22 - Простая модель пары трения

Стационарное решение данного уравнения выглядит следующим образом:

$$x = x_0 + v_0t, \text{ где } x_0 = \frac{F(v_0)}{c} \quad (1.25)$$

Реализация данного решения зависит от устойчивости относительно всегда имеющихся возмущений. Добавляя малое возмущение δx к стационарному решению, уравнение возмущения примет вид:

$$m\delta\ddot{x} + \left(\eta + \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \Big|_{\dot{x}=v_0} \right) \delta\dot{x} + c\delta x = 0 \quad (1.26)$$

Полученное уравнение описывает колебание тела массы m на пружине жёсткостью c в присутствии пропорциональной скорости вязкой силы с коэффициентом сопротивления $\alpha = \eta + \frac{dF(\dot{x})}{d\dot{x}} \Big|_{\dot{x}=v_0}$. При условии положительного коэффициента сопротивления уравнение описывает затухающие колебания, а стационарное движение устойчиво. В противоположном случае коэффициент сопротивления будет отрицательный, стационарное движение будет неустойчиво и амплитуда колебаний будет возрастать.

Из вышеизложенного можно сделать следующие предположения:

1. В системе без затухания ($\eta = 0$) условие устойчивости определяется только зависимостью силы трения от скорости: при росте силы трения со скоростью скольжения само скольжение является устойчивым, при уменьшении силы трения со скоростью скольжения - неустойчивым.

2. Подобную неустойчивость можно подавить введением в систему достаточного затухания - условие устойчивости будет выполняться, даже если производная $dF/d\dot{x}$ имеет отрицательное значение.

Поскольку силы трения могут вызывать автоколебательные процессы, особый интерес представляет вопрос о возникновении автоколебаний динамических систем, вызванных шлицевым соединением с перекосом. Например, в [42] рассматривается возникновение автоколебательных процессов на примере задачи об устойчивости быстровращающегося ротора, валы которого соединены шлицевой втулкой.

При отсутствии перекоса осей в шлицевом соединении не возникает дополнительного момента от сил трения и ротор не имеет вибраций. Если вывести ротор из равновесия и заставить прецессировать с некоторой угловой скоростью $\Omega < \omega$, появится перекос осей в шлицевой муфте и возникнет момент трения в плоскости, перпендикулярной плоскости изгиба ротора.

На рисунке 1.23 представлены инерционные силы и моменты трения в шлицевой муфте в проекциях на оси, вращающиеся со скоростью прецессирования Ω .

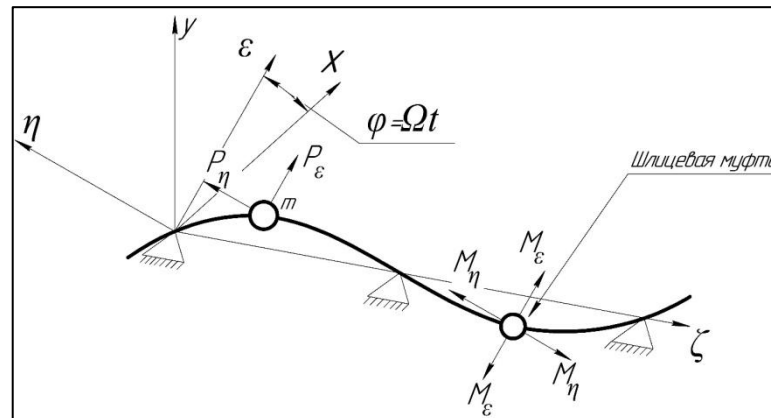


Рисунок 1.23 - Инерционные силы и моменты трения в роторе

Проекции инерционной силы в общем случае равны:

$$P_{\varepsilon} = m\varepsilon\Omega^2 - m\ddot{\varepsilon} - m\eta\dot{\Omega} + 2m\Omega\dot{\eta} \quad (1.27)$$

$$P_{\eta} = m\eta\Omega^2 - m\ddot{\eta} - m\varepsilon\dot{\Omega} - 2m\Omega\dot{\varepsilon} \quad (1.28)$$

Члены этих формул представляют собой соответственно центробежные силы, силы радиального ускорения, окружные силы, связанные с угловым ускорением, и силы, вызванные кориолисовым ускорением.

Координаты массы m во вращающихся осях связаны с инерционными силами и моментом трения в муфте следующими соотношениями:

$$\varepsilon = \alpha_{11}P_\varepsilon - \alpha_{12}M_\eta \quad (1.29)$$

$$\eta = \alpha_{11}P_\eta + \alpha_{12}M_\varepsilon \quad (1.30)$$

Осуществив подстановку (1.27) и (1.28) в данные выражения, получим следующую систему уравнений:

$$\varepsilon = \alpha_{11}m\varepsilon\Omega^2 - \alpha_{11}m\ddot{\varepsilon} - \alpha_{11}m\eta\dot{\Omega} + 2\alpha_{11}m\Omega\dot{\eta} - \alpha_{12}M_\eta \quad (1.31)$$

$$\eta = \alpha_{11}m\eta\Omega^2 - \alpha_{11}m\ddot{\eta} - \alpha_{11}m\varepsilon\dot{\Omega} - 2\alpha_{11}m\Omega\dot{\varepsilon} + \alpha_{12}M_\varepsilon \quad (1.32)$$

Умножив уравнение (1.32) на i и сложив полученные выражения, получим уравнение в комплексном виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon + i\eta = \\ \alpha_{11}m\Omega^2(\varepsilon + i\eta) - \alpha_{11}m(\ddot{\varepsilon} + i\ddot{\eta}) - \alpha_{11}m\dot{\Omega}(\eta + i\varepsilon) + 2\alpha_{11}m\Omega(\dot{\eta} - i\dot{\varepsilon}) - \\ \alpha_{12}(M_\eta - iM_\varepsilon) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Обозначив $z = \varepsilon + i\eta$, $M_T = M_\varepsilon + iM_\eta$ и проведя необходимые преобразования, получим дифференциальное уравнение относительно z :

$$z = \alpha_{11}m\Omega^2z - \alpha_{11}m\ddot{z} - \alpha_{11}m\dot{\Omega}iz - 2\alpha_{11}m\Omega i\dot{z} + i\alpha_{12}M_T \quad (1.34)$$

Разделив действительную и мнимую части, получим следующую систему:

$$\alpha_{11}m\ddot{z} - \alpha_{11}m\Omega^2z + z = 0 \quad (1.35)$$

$$-\alpha_{11}mi\dot{\Omega}z - 2\alpha_{11}m\Omega i\dot{z} + i\alpha_{12}M_T = 0 \quad (1.36)$$

Разделив оба уравнения на $\alpha_{11}m$ и обозначив $k^2 = \frac{1}{\alpha_{11}m}$, получим:

$$\ddot{z} + (k^2 - \Omega^2)z = 0 \quad (1.37)$$

$$\dot{\Omega}z + 2\Omega\dot{z} - k^2\alpha_{12}M_T = 0 \quad (1.38)$$

Первое из уравнений удовлетворяет решениям $\dot{z} = const; \ddot{z} = 0; \Omega = k; \dot{\Omega} = 0$. Тогда второе уравнение при постоянном моменте трения M_T даёт решение:

$$z = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\Omega} \alpha_{12} M_T t + z_0 \quad (1.39)$$

Полученные решения показывают, что скорость Ω возмущённого прецессирования равна частоте собственных колебаний вала k и прогиб z нарастает с течением времени. При скорости вращения ротора выше критической ($\omega > \Omega$) прямолинейное положение его оси неустойчиво. Под действием сил терния в шлицевой муфте возникают фрикционные автоколебания, что влечёт нарастание прогибов, сил инерции, усилий на опорах и вибраций. Частота колебаний сохраняется равной k , независимо от скорости собственного вращения ω . Чем больше силы трения в соединении, тем больше тенденция к потере устойчивости.

Работа [43] посвящена рассмотрению возникновения автоколебательных процессов в динамической системе с муфтой на примере простейшей колебательной системы с трением. Авторами рассматривается проблема значительного разброса наработки шлицевых муфт трансмиссии хвостового винта вертолётa, причиной которой может являться возникновение автоколебательных процессов. Для описания эффекта рассматривается колебательная модель, состоящая из груза на пружинке, имеющего некоторые перемещения и учитывающего силу трения. Примечательно, что сила трения в данной модели описывается как ломаная линия, имеющая участки подъема-падения. Также авторы отмечают, что для соответствия такой системы процессам в реальной муфте скорость внешнего возмущения должна быть значительно меньше собственной частоты колебаний модели.

Представленные результаты показывают развитие автоколебаний с собственной частотой и нарастающей амплитудой, которые резко затухают к окончанию полупериода. Авторы указывают на то, что необходимым условием появления автоколебаний является наличие характеристики терния, отличной от Кулоновской. Также предложены различные методы по стабилизации системы – модификация контактирующих поверхностей или оптимизация смазочного материала.

В статье [44] авторы исследуют поведение роторной системы с различными типами муфт - жёсткой, шлицевой и податливой. Также авторы сравнивают результаты математического моделирования и эксперимента.

Согласно результатам математической модели, пороговая частота вращения ротора находится в окрестности 3450 об/мин. Потеря устойчивости при вращении выше данной частоты может быть вызвана эффектом "масляного вихря" подшипника скольжения №2 или автоколебательным процессом от шлицевой муфты.

В результатах проведённого эксперимента авторы отмечают, что при увеличении частоты вращения от 3050 об/мин до 3300 об/мин потеря устойчивости ротора связана с возникновением масляного вихря в подшипнике №2. При дальнейшем увеличении частоты вращения вибрации ротора 1 остаются прежними, в то время как для ротора 2 наблюдается рост вибраций по частоте, равной 0.6875 от частоты вращения. При уменьшении частоты вращения амплитуда данной формы колебаний может достигать больших значений.

По результатам проведённых исследований авторы отмечают, что первая критическая частота, связанная с большими вибрациями ротора 1, равна 1650 об/мин, а вторая, связанная с вибрациями ротора 2 - 2280 об/мин. Следовательно, потеря устойчивости ротора на частоте 3302 об/мин обусловлена появлением автоколебаний шлицевой муфты.

Связь между величиной трения и автоколебательными процессами исследована в работе [45]. Авторами исследуется численная модель роторной системы из двух валов, соединенных между собой шлицевой втулкой и имеющих три опоры в виде подшипников. Жёсткость и демпфирование опор представлено в виде матриц с коэффициентами радиальных и угловых значений по радиальным осям (x и y). Само шлицевое соединение описывается как матрица жёсткости и демпфирования также с коэффициентами по радиальным осям. Жёсткость шлицевой пары принимается как величина жёсткости контактирующей пары, поскольку величина зазора между зубьями не учитывается и нагрузка на каждую

пару одинакова. Демпфирование оценивается как отношение крутящего момента, амплитуд вибраций и коэффициента трения-скольжения.

Используя каскадные диаграммы, авторы показывают, что в случае вязкого трения (коэффициент трения 0.05) присутствует лишь частота вращения. Однако с увеличением трения (рост коэффициента от 0.1 до 0.3) появляется ещё одна частота колебаний. При этом, амплитуды вибраций по данной частоте и её положение на каскадной диаграмме напрямую зависели от величины трения. Авторы связывают данный эффект автоколебательного процесса в системе с вращением модели выше критической частоты и достаточной величиной силы трения. Однако, при работе ниже критической скорости, система остается устойчивой и трение мало влияет на амплитудно-частотные характеристики. Отмечается, что несмотря на реализацию данного эффекта, его исследование не было достаточным ввиду простоты модели и нуждается в экспериментальном подтверждении.

Исследование [46] посвящено анализу возникновения автоколебательного процесса вследствие перекоса из-за различных посадок на центрирующих поверхностях. Разработанная авторами численная модель, учитывающая силу трения между поверхностями зубьев, позволяет определять коэффициент трения и его влияние на частоты системы. Используя для решения метод β -Ньюмарка, авторы реализуют трение между шлицами и как компоненту матрицы демпфирования, и как компоненту матрицы жёсткости, что позволяет смоделировать прямое влияние на спектр частот.

Полученные при моделировании амплитудно-частотные характеристики указывают на увеличение неустойчивости по мере приближения к частоте 4500 об/мин. Из полученных диаграмм видно, что при 2500 об/мин существует лишь частота 41.8 Гц и стабильная амплитудно-временная характеристика; при 4200 об/мин амплитудно-временная характеристика более неустойчива, а в спектре имеются две частоты - 70 Гц и 33.4 Гц; при 4500 об/мин амплитуды системы бесконечно нарастают, в спектре есть лишь частота 33.4 Гц а система находится в неустойчивости.

В экспериментальном исследовании рассматривается система, состоящая из вала, соединённого с электромотором через шлицевую муфту. Исследуется влияние трёх вариантов посадки - с натягом величиной 0.02 мм по обоим центрирующим поверхностям; с зазором 0.02 мм под одной поверхности и натягом по другой; с зазором 0.02 мм по обеим поверхностям.

При посадках с натягом на каскадной диаграмме системы присутствует лишь роторная гармоника. Отмечается, что критическая скорость системы равняется 1978 об/мин.

При посадке с зазором по одной поверхности и натягом по другой поведение системы имеет значительный нелинейный характер. При разгоне до 4246 об/мин рост амплитуд происходит постепенно. в спектре возбуждения нет субгармонических компонентов. После увеличения скорости выше 4246 об/мин амплитуды вибраций резко уменьшаются, а в спектре появляется субгармоническая частота 33.4 Гц. Дальнейшее увеличение скорости до 4946 об/мин показывает значительный рост вибраций. Уровень вибраций сохраняется при нахождении на постоянном режиме 4946 об/мин, в спектре возбуждения также присутствует частота 33.4 Гц. Сброс скорости вращения приводит к резкому падению амплитуд, и система возвращается в устойчивое положение.

При посадках с зазором по обеим поверхностям рост скорости вращения вплоть до 3943 об/мин приводит к плавному росту амплитуд. При разгоне выше 3943 об/мин вибрации резко увеличиваются и в спектре возбуждения появляется частота 33.4 Гц, но доминирующей остается роторная гармоника.

1.4 Выводы по главе

1. В результате проведения обзора литературы по проблематике исследования шлицевых соединений было проанализировано большое количество математических моделей шлицевых соединений. Из проведённого обзора также были сформулированы основные требования к учёту различных факторов при разработке модели эвольвентного шлицевого соединения.

2. Анализ шлицевых соединений включает в себя необходимую оценку жёсткостных характеристик. Однако, из существующих численных моделей методики определения жёсткости разработаны в основном для прямозубых соединений, либо используется МКЭ для прямого моделирования, что значительно увеличивает время проведения анализа.

3. Также показано, что шлицевое соединение может служить источником неустойчивости вибраций, приводить к возбуждению субгармонических частот, являться источником автоколебательных процессов. Такое влияние происходит в основном при совместном учёте действия сил трения и перекосов.

2. РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ЭВОЛЬВЕНТНОГО ШЛИЦЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ

2.1 Уравнение движения и кинематическое описание шлицевого соединения

Движение механической системы описывается с использованием принципа Остроградского-Гамильтона [47]. Вследствие этого, данное движение можно описать уравнением Лагранжа второго рода.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{damp} + \mathbf{F}_{fric}, \quad (2.1)$$

где $L = T - U$ – лагранжиан механической системы (разница между кинетической и потенциальной энергиями); t — время; $\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}$ – векторы обобщенных координат и их первых производных по времени; \mathbf{F}_{ext} – вектор обобщенных внешних сил, \mathbf{F}_{damp} – вектор диссипативных сил; \mathbf{F}_{fric} – вектор сил трения. При раскрытии лагранжиана уравнение переписывается в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{y}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{damp} + \mathbf{F}_{fric}. \quad (2.2)$$

Поскольку потенциальная энергия в системе зависит от \mathbf{y} , слагаемое $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) = 0$. В результате получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{damp} + \mathbf{F}_{fric} \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) описывает систему в динамическом равновесии. С учётом этого, левую часть можно представить как сумму инерционных и внутренних сил:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{inerc} + \mathbf{F}_{inner} &= \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{damp} + \mathbf{F}_{fric} \\ \mathbf{F}_{inerc} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{y}} \\ \mathbf{F}_{inner} &= \frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Если в начальный момент времени векторы обобщённых координат и их производные имеют вид $\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}$, а в следующий момент они получают приращения $\Delta \mathbf{y}, \Delta \dot{\mathbf{y}}, \Delta \ddot{\mathbf{y}}$, то можно провести линеаризацию левой части уравнения (2.4) в момент существования $\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}$. С учётом этого, общее уравнение движения примет вид:

$$\mathbf{F}_{inerc} + \frac{\partial \mathbf{F}_{inerc}}{\partial \mathbf{y}} \Delta \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{F}_{inerc}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \Delta \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{F}_{inerc}}{\partial \ddot{\mathbf{y}}} \Delta \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{F}_{inner} + \frac{\partial \mathbf{F}_{inner}}{\partial \mathbf{y}} \Delta \mathbf{y} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{damp} - \frac{\partial \mathbf{F}_{damp}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \Delta \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{F}_{fric}, \quad (2.5)$$

Обозначим как $[\mathbf{M}] = \frac{\partial \mathbf{F}_{inerc}}{\partial \ddot{\mathbf{y}}}$ – матрица масс; $[\mathbf{G}] = \frac{\partial \mathbf{F}_{inerc}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}$ – матрица инерционных и гироскопических эффектов; $[\mathbf{C}] = \frac{\partial \mathbf{F}_{damp}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}$ – матрица демпфирования; $[\mathbf{K}] = \frac{\partial \mathbf{F}_{inner}}{\partial \mathbf{y}}$ – матрица жесткости. Тогда уравнение (2.5) переписется в следующем виде:

$$[\mathbf{M}] \Delta \ddot{\mathbf{y}} + ([\mathbf{C}] + [\mathbf{G}]) \Delta \dot{\mathbf{y}} + [\mathbf{K}] \Delta \mathbf{y} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{inner} - \mathbf{F}_{inerc} - \mathbf{F}_{damp} + \mathbf{F}_{fric}, \quad (2.6)$$

где $\Delta \mathbf{y}, \Delta \dot{\mathbf{y}}, \Delta \ddot{\mathbf{y}}$ – векторы приращений обобщенных координат и их первых и вторых производных по времени; \mathbf{F}_{ext} – вектор обобщенных внешних сил; \mathbf{F}_{inner} – вектор внутренних сил; \mathbf{F}_{inerc} – вектор инерционных сил; \mathbf{F}_{damp} – вектор диссипативных сил; \mathbf{F}_{fric} – вектор сил трения. Матрицы и векторы, описывающие инерционные и диссипативные свойства соединения, могут быть вычислены так же, как в работах [48, 49]. Данное уравнение является исходным для применения неявных методов интегрирования – таких, как метод Ньюмарка [50].

Рассмотрим схему движения шлицевой пары с точки зрения кинематики. Исходное положение каждой части (втулки и вала) шлицев описывается тройками

взаимно перпендикулярных ортов \mathbf{e}_1^A , \mathbf{e}_2^A , \mathbf{e}_3^A , и \mathbf{e}_1^B , \mathbf{e}_2^B , \mathbf{e}_3^B соответственно, рисунок 2.1. Орты \mathbf{e}_3^A и \mathbf{e}_3^B сонаправлены с осями втулки и вала соответственно. В начальный момент времени считаем, что каждые пары ортов из троек векторов сонаправлены между собой.

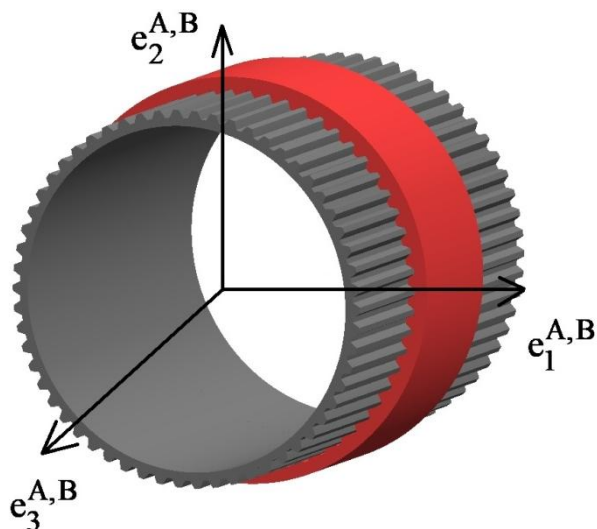


Рисунок 2.1 - Исходное положение шлицевого положения

Движение системы происходит вследствие воздействия внешних нагрузок, задаваемых вектором сил \mathbf{F}_{ext} . Кинематика шлицевой пары описывается с помощью векторов линейных перемещений центров втулки и вала (\mathbf{u}_A и \mathbf{u}_B), тензоров больших накопленных поворотов \mathbf{R}_A , \mathbf{R}_B и вектор Эйлера малых дополнительных поворотов \mathfrak{D}_A и \mathfrak{D}_B . Использование вектора Эйлера как инструмента для описания больших поворотов приводит к ограничению, обусловленному вырождением тензора, связывающего угловые скорости с производной вектора Эйлера (тензор П.А. Жилина), [51, 55]. Для учёта данного ограничения в диссертационной работе применяется инкрементальный способ описания вращения путём разделения полного поворота на большой накопленный и малый дополнительный. Используемый метод позволяет описывать неограниченно большие повороты, причем базовый способ описания поворотов может быть любым. Данная модификация основана на малости величин приращения поворотов как в задачах статики, так и в задачах динамики. В задачах статики большие приращения поворотов могут вызвать расходимость

итерационного процесса, а в задачах динамики малые приращения поворотов обусловлены тем, что на одном полном обороте должно укладываться не менее 20 шагов интегрирования. В связи с этим предлагается хранить большую и малую часть поворота отдельно: большую в виде тензора (или матрицы), а малую – в виде вектора Эйлера.

Стоит отметить, что и тензор поворота, и вектор Эйлера дают равноправное и полноценное геометрически нелинейное описание поворотов. Тензор поворота связан с вектором Эйлера следующими соотношениями, которые можно рассматривать как тензорную функцию векторного аргумента [53]:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A &= \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_A); \mathbf{R}_B = \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_B) \\ \mathbf{L}(\boldsymbol{\vartheta}) &= \mathbf{E} \cos(|\boldsymbol{\vartheta}|) + \frac{1 - \cos(|\boldsymbol{\vartheta}|)}{|\boldsymbol{\vartheta}|^2} \boldsymbol{\vartheta} \otimes \boldsymbol{\vartheta} + \frac{\sin(|\boldsymbol{\vartheta}|)}{|\boldsymbol{\vartheta}|} \boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\boldsymbol{\vartheta}$ - вектор Эйлера; $\mathbf{L}(\boldsymbol{\vartheta})$ – функция, вычисляющая тензор поворота по заданному вектору Эйлера; \mathbf{E} – единичный тензор; $\boldsymbol{\vartheta} \otimes \boldsymbol{\vartheta}$ – диадное произведение векторов $\boldsymbol{\vartheta}$; $\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{E}$ – кососимметричный тензор с сопутствующим вектором $\boldsymbol{\vartheta}$.

В начальный момент итерационного процесса либо шага интегрирования по времени задано положение и повороты всей конструкции – известны тензоры поворота всех узлов. В процессе итераций (либо интегрирования) накопленная часть поворота узла в виде тензора \mathbf{R}_0 остается неизменной, а изменяется только дополнительная часть в виде вектора Эйлера $\boldsymbol{\vartheta}$. При окончании шага вектор Эйлера с помощью выражений (2.7) превращается в тензор дополнительного поворота и перемножается с тензором накопленного поворота. Данный алгоритм удобно представить в виде следующей схемы, рисунок 2.2.

В начале шага вектор Эйлера всегда равен нулю. После выполнения шага малый поворот припасовывается к большому, а следующий шаг опять начинается с нулевого значения вектора Эйлера.

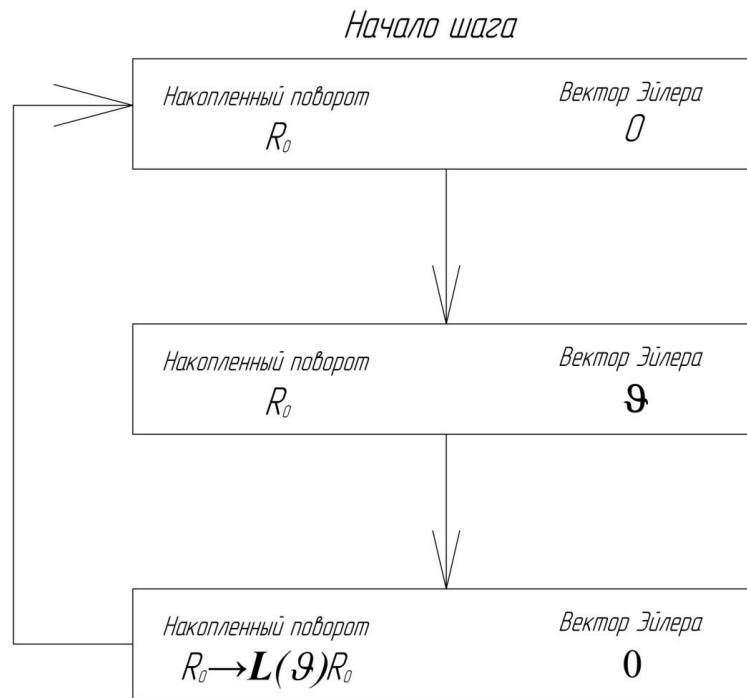


Рисунок 2.2 - Алгоритм припасовывания малого поворота к большому

Дополнительный поворот не имеет значительных изменений за шаг численного метода. Традиционным ограничением в задачах динамики являются значения в диапазоне 10° - 20° за шаг интегрирования. Более того, припасовывание дополнительного поворота к накопленному повороту может производиться даже на итерациях неявного метода интегрирования (метод Ньюмарка и др.). В этом случае дополнительный поворот \mathfrak{G} играет роль невязки и всегда по модулю близок к нулю, а его малые значения обеспечивают отсутствие особых точек.

Стоит отметить, что необходимость корректного описания больших поворотов заключается в особенностях поведения пространственных механических систем [52].

Таким образом, вектор состояние шлицевой пары содержит 12 степеней свободы - по 3 линейных перемещения и 3 компонента вектора малых дополнительных поворотов отдельно для вала и втулки.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathfrak{G}_a \\ \mathbf{u}_b \\ \mathfrak{G}_b \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

В процессе движения, вследствие упругости зацепления, на переднем и заднем торцах соединения образуются линейные смещения центра втулки относительно вала, а также угловое смещение между ортами \mathbf{e}_1^A и \mathbf{e}_1^B

$$\Delta \mathbf{u}^f = \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A) + \frac{l}{2} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_3^B, \quad (2.9)$$

$$\Delta \mathbf{u}^b = \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A) - \frac{l}{2} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_3^B, \quad (2.10)$$

$$\Delta \varphi = \arccos \left(\frac{\mathbf{e}_3^A \cdot (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_1^B)}{|\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e}_1^B|} \right), \quad (2.11)$$

где $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} - \mathbf{e}_3^A \otimes \mathbf{e}_3^A$ — плоский единичный тензор; l — длина шлицов.

Для получившихся смещений втулки и вала на торцах восстанавливается текущая конфигурация эвольвентного профиля шлица для каждой пары. Эвольвентные профили описываются следующим геометрическим соотношением:

$$\begin{cases} x_e = r(\sin \varphi - \varphi \cos \alpha \cos(\alpha + \varphi)) \\ y_e = r(\cos \varphi + \varphi \cos \alpha \sin(\alpha + \varphi)) \end{cases} \quad (2.12)$$

Здесь x_e, y_e — координаты профиля; r — радиус делительной окружности шлицев; α — угол давления; φ — параметр эвольвенты, принимающий значения $\varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}$. Система координат для профилей, а также границы параметра эвольвенты представлены на рисунке 2.3.

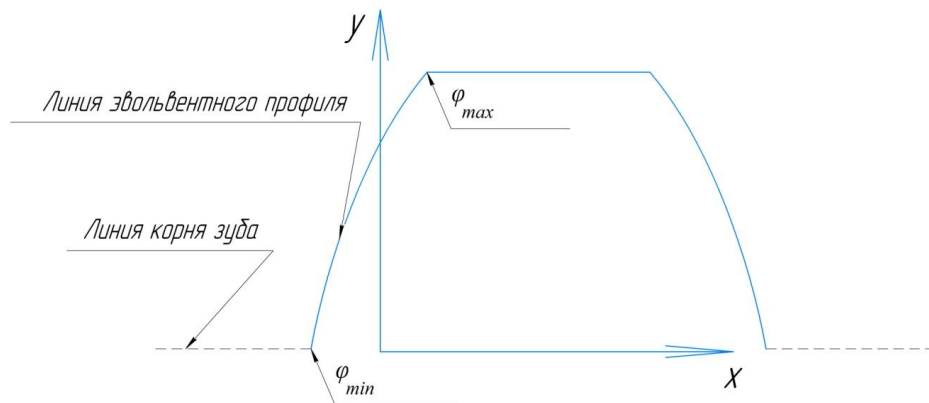


Рисунок 2.3 - Схема профиля в системе координат

Смещение профилей в результате может привести к контакту пары шлиц. Для описания факта контактирования двух поверхностей используется величина взаимного проникновения, представляющая собой величину внедрение одного профиля в ответный.

В виду особенности взаимного расположения эвольвентных профилей максимальное проникновение будет всегда соответствовать длине отрезка минимального расстояния между вершиной зуба и до профиля углубления. При этом контакт между зубьями может осуществляться по 4 схемам: проникновение верхушки зуба вала в муфту слева, проникновение верхушки зуба вала в муфту справа, проникновение вершины муфты в шлиц вала слева и проникновение вершины муфты в шлиц вала справа, рисунок 2.4. Также для определения величины взаимного проникновения необходимо знать угловую координату профиля в точке контакта, которая определяется следующим образом:

$$\varphi_m = \arctan \left(\frac{rx_0^2 \cos \alpha + y_0 \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - r^2 \cos^2 \alpha}}{rx_0 y_0 \cos \alpha - x_0^2 \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - r^2 \cos^2 \alpha}} \right) + \alpha. \quad (2.13)$$

Здесь x_0, y_0 - координаты эвольвентного профиля в системе координат, начало которой находится в центре шлицевого соединения, рисунок 2.5.

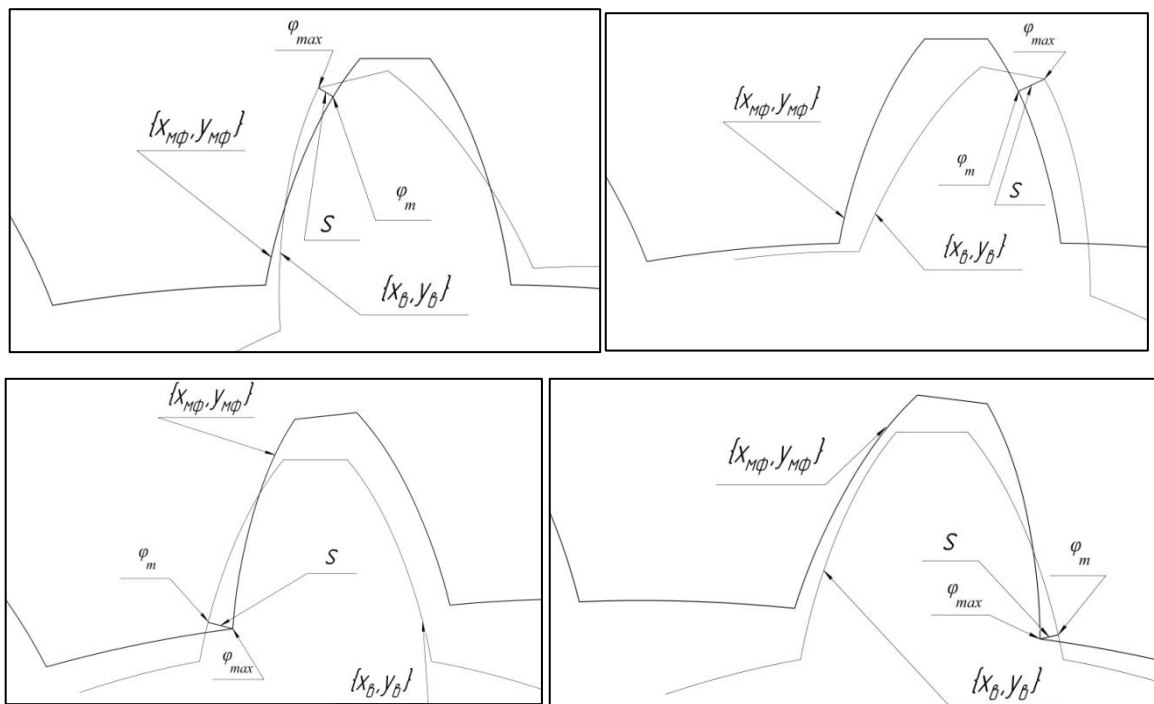


Рисунок 2.4 - Схемы возможного контакта между шлицами втулки и вала

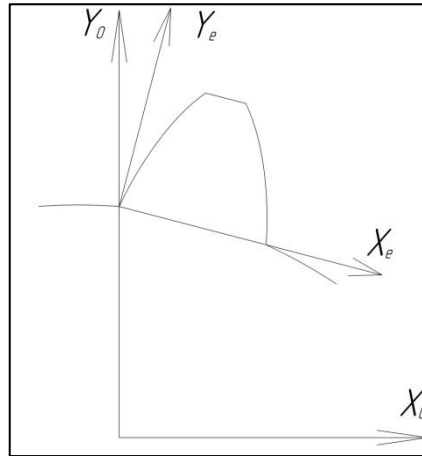


Рисунок 2.5 - Схема профиля в системе координат

В результате контакта пара шлиц имеет величину взаимного проникновения s , определяющуюся следующим образом:

$$s = \left| L_0(\Delta\varphi) \cdot L_0\left(\frac{2\pi i}{z}\right) \cdot L_0(\psi) \cdot \begin{Bmatrix} x_e(\varphi_{\max}) \\ y_e(\varphi_{\max}) \end{Bmatrix} + \Delta u \right| - \left| L_0\left(\frac{2\pi i}{z}\right) \cdot L_0\left(\psi + \frac{\Delta}{r}\right) \cdot \begin{Bmatrix} x_e(\varphi_m) \\ y_e(\varphi_m) \end{Bmatrix} \right| \quad (2.14)$$

Здесь L_0 - матрица поворота, z - количество шлицев, i - номер шлица, для которого определяется взаимопроникновение, ψ - угол, соответствующий половине толщины зуба на делительной окружности, Δ - зазор по боковым поверхностям между шлицами, Δu — относительное смещение.

Необходимо отметить, что контакт между парой шлиц осуществляется только при параметре $s < 0$. В противном случае, данный параметр характеризует зазор между поверхностями шлиц внутренней и внешней части.

2.2 Определение упругой энергии соединения. Расчёт коэффициентов жесткости и вектора внутренних сил

В результате взаимопроникновения, каждая пара зуб-углубление приобретает упругую энергию равную:

$$U_{ш.п} = \begin{cases} 0, & s > 0; \\ \frac{k_{ш.п}(-s)^2}{2}, & s < 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

где $k_{ш.п}$ — жесткость шлицевой пары, определяемая как величина, обратная сумме податливостей изгиба зубьев вала, втулки, а также контактной деформации.

$$k_{шп} = \frac{1}{\delta_{конт} + \delta_{изг.А} + \delta_{изг.В}}. \quad (2.16)$$

Здесь $\delta_{конт}$ - податливость контактного взаимодействия шлицев вала и втулки, $\delta_{изг.А}$, $\delta_{изг.В}$ - изгибная податливость шлицев вала и втулки.

Контактное взаимодействие между двумя шлицами можно представить в виде расчётной схемы контакта двух упругих цилиндров с параллельными осями по образующей. При этом шероховатость, влияние смазки и другие аспекты принимаются незначимыми.

$$\delta_{конт} = \frac{4l}{\pi \left(\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}, \quad (2.17)$$

где μ_1, μ_2 - коэффициенты Пуассона внутренней и внешней части шлицев; E_1, E_2 - модуль упругости внутренней и внешней части шлицев.

Для прямозубых зацеплений наиболее распространённым методом определения изгибной податливости является балочная модель и взятие интеграла Мора [54, 55]. Данный подход имеет определённые ограничения, основанные на применимости балочной модели – если длина зуба превышает его высоту, то перемещения в точках линии контакта будут неодинаковыми. В таком случае определение жёсткости с использованием такой модели приведёт к значительному завышению характеристики.

В связи с вышесказанным, а также тем, что в эвольвентном шлицевом соединении линия зацепления в общем случае не сонаправлена с осью шлицев и действует не по всей ширине шлица, корректнее рассматривать эвольвентный шлиц как пластину переменного сечения с учетом сдвиговых деформаций, рисунок 2.6.

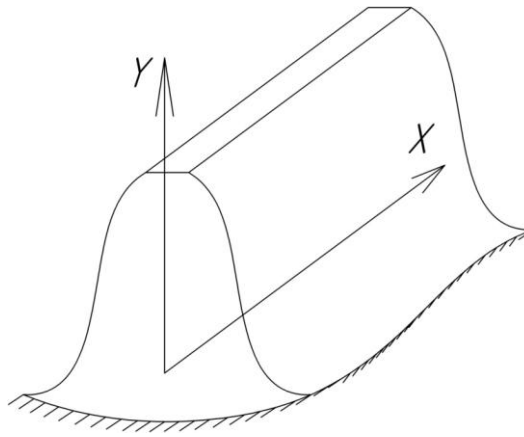


Рисунок 2.6 - Схема шлица как толстостенной пластины

Толщина зуба рассчитывается следующим образом:

$$h = 2(y_e \sin \psi - x_e \cos \psi), \quad (2.18)$$

В классической теории изгиба тонких пластин, построенной на гипотезах Кирхгофа, упругая энергия пластины записывается следующим образом [55]:

$$U = \frac{1}{2} \iint (M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) dx dy \quad (2.19)$$

Поскольку шлиц рассматривается как толстостенная пластина, в упругую энергию необходимо также ввести учёт компонентов, отвечающих за поперечные сдвиговые деформации. В случае двухосного нагружения эти компоненты можно выразить через работу касательных напряжений:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} k \iint h w \tau dx dy \\ w &= \gamma(x, y); \tau = G \gamma(x, y) \\ A &= \frac{1}{2} \iint k G h \gamma^2(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (2.20)$$

где G — модуль сдвига; γ — деформация поперечного сдвига; k — геометрический коэффициент для сдвига.

В теории толстых пластин, построенных на гипотезе Тимошенко, упругая энергия является комбинацией (2.19) и (2.20) с учетом сдвиговых добавок в углах поворота. В итоге, упругая энергия деформации изгиба пластины с учетом сдвиговых добавок запишется следующим образом:

$$U_n = \frac{1}{2} \int_0^{y_{\max}} \int_0^l (k_{xz} Gh \gamma_{xz}^2 + k_{xy} Gh \gamma_{xy}^2 + D(\chi_x^2 + 2\mu\chi_x\chi_y + \chi_y^2 + 2(1-\mu)\chi_{xy}^2)) dx dy. \quad (2.21)$$

Здесь $\chi_x = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}$, $\chi_y = \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}$, $\chi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right)$ – кривизны, отвечающие

за изгиб пластины, $\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \vartheta_x$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \vartheta_y$ – осреднённые деформации

трансверсального сдвига, k_{xz} и k_{xy} – геометрические коэффициенты для сдвига (оба принимаются 6/5), G – модуль сдвига, μ – коэффициент Пуассона,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \text{ – цилиндрическая жесткость.}$$

Для решения задачи воспользуемся методом Ритца. Перемещения и повороты разыскиваются в виде полиномов от координат:

$$\begin{aligned} w &= \alpha_0 y + \alpha_1 ux + \alpha_2 ux^2 + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 y^2 x + \alpha_5 y^2 x^2 \\ \vartheta_x &= \alpha_6 y + \alpha_7 ux + \alpha_8 ux^2 + \alpha_9 y^2 + \alpha_{10} y^2 x + \alpha_{11} y^2 x^2 \\ \vartheta_y &= \alpha_{12} y + \alpha_{13} ux + \alpha_{14} ux^2 + \alpha_{15} y^2 + \alpha_{16} y^2 x + \alpha_{17} y^2 x^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $\alpha_0, \dots, \alpha_{17}$ — искомые коэффициенты полиномов.

После подстановки (2.22) в (2.21) для взятия интеграла необходимо произвести замену переменных:

$$\begin{aligned} y &= y_e(\varphi) - y_e(\varphi_{\min}) \\ dy &= y_e'(\varphi) d\varphi \\ \varphi_{\min} &\leq \varphi \leq \varphi_{\max} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Для реализации метода Ритца кроме энергии деформаций U_n необходим еще потенциал внешних сил V_n , который вычисляется следующим образом. Для каждого шлица зона контакта определяется путём линейного соединения точек взаимопроникновения профилей. В результате на боковой поверхности шлица образуется линия контакта. Зона контакта разделяется на n участков ($n=10$), для

которых записывается потенциал внешних сил F_j , действующих на шлиц (рисунок 2.7) в точке контакта с номером j :

$$V_{\Pi} = - \sum_{j=1}^n F_j w(x_j, y_j). \quad (2.24)$$

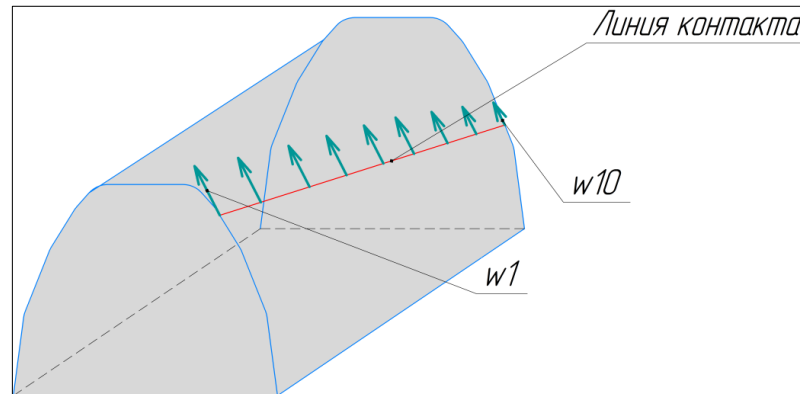


Рисунок 2.7 - Схема линии контакта и распределения перемещений

Величина сил в (2.24) F_j получается делением суммарной силы на количество интервалов n . Решение задачи об изгибе шлица как толстой пластины получается путем минимизации суммы (2.21) и (2.24) относительно коэффициентов $\alpha_0, \dots, \alpha_{17}$ с помощью метода Ньютона. Каждая из приложенных сил соотносится к своему перемещению для определения изгибной жёсткости в точке действия силы и суммируется в общую жёсткость. Изгибная податливость определяется как обратная от жёсткости величина.

$$k_{изг} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{w(x_i, \varphi_i)}; \quad \delta_{изг} = \frac{1}{k_{изг}}. \quad (2.25)$$

Общая упругая энергия шлицевого соединения равняется сумме упругих энергий на каждой паре:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i. \quad (2.26)$$

Численно дифференцируя упругую энергию в зацеплении U по компонентам вектора состояний \mathbf{y} , получаем выражение для компонент матрицы жесткости и вектора внутренних сил зубчатого зацепления:

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_j}; F_{inner\ i} = \frac{\partial U}{\partial y_i}. \quad (2.27)$$

где y_i, y_j — компоненты вектора обобщенных координат y .

Учет сил трения в контакте проводится на основе оценки относительной скорости скольжения профилей друг относительно друга, рисунок 2.8.

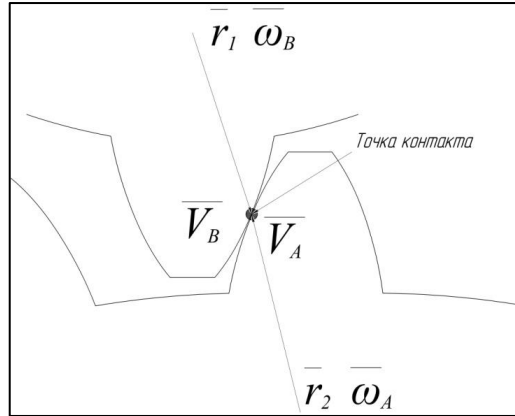


Рисунок 2.8 - Кинематическая схема для расчёта относительной скорости скольжения

Вектор сил трения имеет вид:

$$\bar{F}_{mp\ i} = -f_{mp} N_i \frac{(\bar{V}_2^A - \bar{V}_2^B)}{|\bar{V}_2^A - \bar{V}_2^B|}. \quad (2.28)$$

Здесь f_{mp} - коэффициент трения, N_i - нормальная сила,

$\bar{V}_2^A = \bar{V}_A + \bar{\omega}_A \times \bar{r}_2$, $\bar{V}_2^B = \bar{V}_B + \bar{\omega}_B \times \bar{r}_1$ — скорость скольжения в точке контакта,

\bar{V}_A, \bar{V}_B — скорость в центре масс внешней и внутренней части, \bar{r}_1, \bar{r}_2 — радиус-вектор от центра масс до точки определения силы трения, $\bar{\omega}_A, \bar{\omega}_B$ — угловые скорости внешней и внутренней части шлицев.

2.3 Определение матрицы масс и моментов инерции для уравнения динамики

Для использования шлицевого соединения в общем уравнении движения динамической системы (2.6), записанном через приращения, необходимо

определить матрицу масс и моментов инерции в замкнутом виде. Для этого используются следующие преобразования, [56].

Исходная матрица масс шлицевого соединения в локальной системе координат известна и имеет вид:

$$[\mathbf{M}_0] = \begin{bmatrix} m_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_x^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_y^b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z^b \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

где m_a и m_b – масса внутренней A и внешней B частей соответственно, I_x^a , I_y^a , I_z^a , I_x^b , I_y^b , I_z^b – моменты инерции частей A и B соответственно относительно осей X , Y , Z .

Кинетическая энергия T записывается как квадратичная форма линейных и угловых скоростей. Матрицей квадратичной формы является матрица масс (2.29), повернутая до актуального положения:

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_a \\ \boldsymbol{\omega}_a \\ \mathbf{v}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{pmatrix}^T [\mathbf{R}_{all}] [\mathbf{M}_0] [\mathbf{R}_{all}]^T \begin{pmatrix} \mathbf{v}_a \\ \boldsymbol{\omega}_a \\ \mathbf{v}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{pmatrix}; [\mathbf{R}_{all}] = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_a & & & \\ & \mathbf{L}_a & & \\ & & \mathbf{L}_b & \\ & & & \mathbf{L}_b \end{bmatrix} [\mathbf{R}_I]; \quad (2.30)$$

$$[\mathbf{R}_I] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_a \mathbf{R}_0 & & & \\ & \mathbf{R}_a \mathbf{R}_0 & & \\ & & \mathbf{R}_b \mathbf{R}_0 & \\ & & & \mathbf{R}_b \mathbf{R}_0 \end{bmatrix}; \mathbf{L}_a = \mathbf{L}(\boldsymbol{\vartheta}_a); \mathbf{L}_b = \mathbf{L}(\boldsymbol{\vartheta}_b);$$

где $\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b$ – малые дополнительные повороты (векторы Эйлера) частей A и B , рисунок 2.1; $\mathbf{L}_a, \mathbf{L}_b$ – тензоры малых дополнительных поворотов частей A и B ; $[\mathbf{R}_{all}]$ – глобальная матрица поворота (12×12); $[\mathbf{R}_I]$ – та же матрица, но без учета малых поворотов; \mathbf{R}_0 – тензор поворота от декартовых координат к исходному состоянию; $\mathbf{R}_a, \mathbf{R}_b$ – тензоры больших накопленных поворотов первого и второго узлов; $\mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b$ – поступательные скорости центров колес, $\boldsymbol{\omega}_a, \boldsymbol{\omega}_b$ – угловые скорости колес.

В формуле (2.30) и далее используются комбинации тензорной и матричной символики, при этом тензорам всегда соответствуют матрицы 3×3 и для перехода от тензоров к матрицам используется глобальная система координат XYZ . Матрицы размером 12×12 выделены квадратными скобками.

Поступательные и угловые скорости связаны с производными обобщенных перемещений следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_a \\ \boldsymbol{\omega}_a \\ \mathbf{v}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & & & \\ & \mathbf{B}_a & & \\ & & \mathbf{E} & \\ & & & \mathbf{B}_b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_a \\ \dot{\mathfrak{g}}_a \\ \dot{\mathbf{u}}_b \\ \dot{\mathfrak{g}}_b \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{B}_a = \mathbf{B}(\mathfrak{g}_a)$$

$$\mathbf{B}_b = \mathbf{B}(\mathfrak{g}_b)$$

$$\mathbf{B}(\mathfrak{g}) = \mathbf{E} \frac{\sin(|\mathfrak{g}|)}{|\mathfrak{g}|} + \frac{|\mathfrak{g}| - \sin(|\mathfrak{g}|)}{|\mathfrak{g}|^3} \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} + \frac{1 - \cos(|\mathfrak{g}|)}{|\mathfrak{g}|^2} \mathfrak{g} \times \mathbf{E}$$

где $\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b$ – поступательные перемещения центров шлицевого соединения; $\mathbf{B}(\mathfrak{g})$ – тензор П.А. Жилина (в [50] тензор \mathbf{B}^T , точнее матрицу компонентов этого тензора, называют *tangent operator*).

Подстановка (2.31) в (2.30) с учетом легко проверяемого тождества $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{B}$ приводит к следующей записи кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_a \\ \dot{\mathfrak{g}}_a \\ \dot{\mathbf{u}}_b \\ \dot{\mathfrak{g}}_b \end{pmatrix}^T [\mathbf{N}] [\mathbf{M}_{stat}] [\mathbf{N}]^T \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_a \\ \dot{\mathfrak{g}}_a \\ \dot{\mathbf{u}}_b \\ \dot{\mathfrak{g}}_b \end{pmatrix}; [\mathbf{M}_{stat}] = [\mathbf{R}_I] [\mathbf{M}_0] [\mathbf{R}_I]^T; [\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_a & & & \\ & \mathbf{B}_a & & \\ & & \mathbf{L}_b & \\ & & & \mathbf{B}_b \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

где матрица $[\mathbf{M}_{stat}]$ не зависит от поворотов на данном инкрементном шаге; $[\mathbf{N}]$ – матрица, аккумулирующая функции, зависящие от малых поворотов ϑ_a, ϑ_b .

Здесь и далее под инкрементным шагом понимается этап расчета, на котором тензоры накопленных поворотов $\mathbf{R}_a, \mathbf{R}_b$ не изменяются, а изменения поворотов учитываются векторами ϑ_a, ϑ_b . В зависимости от реализации инкрементным может быть не только шаг интегрирования, но и шаг итерационного процесса в методе Ньюмарка. Последний вариант осуществления численного решения является более предпочтительным, т.к. обеспечивает лучшую сходимость итераций.

Согласно соотношению (2.32) и обычным положениям аналитической механики искомой матрицей обобщенных масс текущего положения шлицевого соединения является следующее произведение матриц

$$[\mathbf{M}] = [\mathbf{N}][\mathbf{M}_{stat}][\mathbf{N}]^T \quad (2.33)$$

Последующие выкладки первоначально целесообразно производить в индексной форме, так как дифференцирование матрицы по вектору приводит к объектам более сложным, чем матрица (трехиндексные матрицы). В индексной форме уравнение Лагранжа 2-го рода для шлицевого соединения имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} = F_{ext\ i} - F_{inner\ i} - F_{damp\ i} + F_{fric\ i} \quad (2.34)$$

где y_i – обобщенные координаты КЭ, т.е. элементы вектора $\mathbf{y} = (u_{ax}, u_{ay}, u_{az}, \vartheta_{ax}, \vartheta_{ay}, \vartheta_{az}, u_{bx}, u_{by}, u_{bz}, \vartheta_{bx}, \vartheta_{by}, \vartheta_{bz})^T$; $F_{ext\ i}$, $F_{inner\ i}$, $F_{damp\ i}$, $F_{fric\ i}$ – элементы векторов внешних, упругих, диссипативных сил и сил трения соответственно.

Кинетическая энергия, представленная через обобщенные скорости, имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \dot{y}_i M_{ij} \dot{y}_j \quad (2.35)$$

где M_{ij} – элементы матрицы $[\mathbf{M}]$; индексы i и j принимают значения от 1 до 12 (суммирование по повторяющемуся индексам).

Подстановка (2.35) в (2.34) с учетом (2.4) дает:

$$M_{ij}\ddot{y}_j + \dot{y}_k \frac{\partial M_{ij}}{\partial y_k} \dot{y}_j - \frac{1}{2} \dot{y}_k \frac{\partial M_{kj}}{\partial y_i} \dot{y}_j = F_{ext\ i} - F_{inner\ i} - F_{damp\ i} + F_{fric\ i} \quad (2.36)$$

Второе и третье слагаемое в левой части (2.36) после их переноса в правую часть можно рассматривать как компоненты части вектора динамических нагрузок \mathbf{F}_{inerc} :

$$F_i = \dot{y}_k \frac{\partial M_{ij}}{\partial y_k} \dot{y}_j - \frac{1}{2} \dot{y}_k \frac{\partial M_{kj}}{\partial y_i} \dot{y}_j \quad (2.37)$$

С учетом (2.37) уравнения движения соединения принимают следующий вид:

$$M_{ij} \frac{d^2 y_j}{dt^2} = F_{ext\ i} - F_{inner\ i} - F_{damp\ i} - F_i + F_{fric\ i}. \quad (2.38)$$

При использовании неявных методов интегрирования [46] необходимо провести линеаризацию нелинейных уравнений движения. Рассматривая (2.38) в 2 момента времени t и $t+\Delta t$ и отбрасывая малые слагаемые второго и последующих порядков, приходим к линеаризованным уравнениям движения:

$$M_{ij} \Delta \dot{y}_j + (C_{ij} + G_{ij}) \Delta \dot{y}_j + K_{ij} \Delta y_j = -F_{ext\ i} - F_{inner\ i} - F_{damp\ i} - F_{inerc\ i} + F_{fric\ i}. \quad (2.39)$$

$$F_{inerc\ i} = M_{ij} \dot{y}_j + F_i,$$

Здесь величины без Δ соответствуют моменту времени t .

При завершении итерационного процесса метода Ньюмарка левая часть (2.39) становится пренебрежимо малой и решение системы (2.39) на одном шаге сходится к решению исходных уравнений (2.38) (подробнее см. в [57]).

В случае отсутствия движения выражение (2.39) превращается в линеаризованные уравнения равновесия, поэтому K_{ij} соответствует матрице $[\mathbf{K}]$, компоненты которой находятся по (2.27). Элементы матрицы масс M_{ij} определяются формулами (2.33). Таким образом, для формирования левой части уравнений (2.39) остается найти только элементы матрицы гироскопических и инерционных эффектов G_{ij} . Проще всего это достигается формальной линеаризацией, слагаемых, содержащих скорости в (2.38):

$$G_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \dot{y}_j} = \dot{y}_k \frac{\partial M_{ij}}{\partial y_k} + \frac{\partial M_{in}}{\partial y_j} \dot{y}_n - \frac{1}{2} \left(\dot{y}_k \frac{\partial M_{kj}}{\partial y_i} + \frac{\partial M_{jn}}{\partial y_i} \dot{y}_n \right) \quad (2.40)$$

С учетом симметрии матрицы обобщенных масс окончательное выражение для элементов гироскопической матрицы принимает вид:

$$G_{ij} = \frac{\partial M_{ij}}{\partial y_k} \dot{y}_k + (W_{ji} - W_{ij}); \quad (2.41)$$

$$W_{ij} = \frac{\partial M_{jk}}{\partial y_i} \dot{y}_k.$$

С гироскопическими эффектами обычно связывают кососимметричную часть этого выражения, т.е. $(W_{ji} - W_{ij})$. При формальной линеаризации получается еще симметричная часть (первое слагаемое в (2.41)). Как показывают численные эксперименты, все слагаемые в (2.41) существенны и их следует сохранить.

Заметим, что во многих случаях при вычислении промежуточных величин, входящих в (2.41), могут оказаться удобными следующие соотношения:

$$W_{ij} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}_j} \left(\frac{\partial T}{\partial y_i} \right); \quad \frac{\partial M_{ij}}{\partial y_k} \dot{y}_k = \frac{dM_{ij}}{dt}. \quad (2.42)$$

Индексная форма записи удобна при рассмотрении теоретических вопросов, но при численной реализации полученные формулы для F_i и G_{ij} оказываются трудоёмкими для вычисления, поскольку численное дифференцирование значительно замедляет процесс вычисления. В связи с этим были разработаны инвариантные (в прямом тензорном представлении) аналоги формул (2.37) и (2.41). С этой целью были введены дополнительные обозначения

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathfrak{g}_a \\ \mathbf{u}_b \\ \mathfrak{g}_b \end{pmatrix}; \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_a \\ \dot{\mathfrak{g}}_a \\ \dot{\mathbf{u}}_b \\ \dot{\mathfrak{g}}_b \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \mathbf{v}_a^* \\ \boldsymbol{\omega}_a^* \\ \mathbf{v}_b^* \\ \boldsymbol{\omega}_b^* \end{pmatrix} = [\mathbf{N}]^T \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_a \\ \dot{\mathfrak{g}}_a \\ \dot{\mathbf{u}}_b \\ \dot{\mathfrak{g}}_b \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{m}_a \\ \mathbf{f}_b \\ \mathbf{m}_b \end{pmatrix} = [\mathbf{M}_{stat}] \begin{pmatrix} \mathbf{v}_a^* \\ \boldsymbol{\omega}_a^* \\ \mathbf{v}_b^* \\ \boldsymbol{\omega}_b^* \end{pmatrix}; \quad (2.43)$$

где \mathbf{f}_a , \mathbf{m}_a , \mathbf{f}_b , \mathbf{m}_b – промежуточные величины, аналогичные обобщенным импульсам (квазиимпульсы); звездочки добавлены, чтобы отличить векторы в (2.43) от обычных линейной и угловой скоростей.

С учетом (2.43) кинетическую энергию шлицевого соединения можно представить следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_a^* \cdot \mathbf{f}_a + \boldsymbol{\omega}_a^* \cdot \mathbf{m}_a + \mathbf{v}_b^* \cdot \mathbf{f}_b + \boldsymbol{\omega}_b^* \cdot \mathbf{m}_b) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_a^* \\ \boldsymbol{\omega}_a^* \\ \mathbf{v}_b^* \\ \boldsymbol{\omega}_b^* \end{pmatrix}^T [\mathbf{M}_{stat}] \begin{pmatrix} \mathbf{v}_a^* \\ \boldsymbol{\omega}_a^* \\ \mathbf{v}_b^* \\ \boldsymbol{\omega}_b^* \end{pmatrix}; \quad (2.44)$$

При дифференцировании кинетической энергии по векторам $\boldsymbol{\vartheta}_a$, $\boldsymbol{\vartheta}_b$ под знак производной будут попадать тензоры \mathbf{L} , \mathbf{B} , \mathbf{L}^T , \mathbf{B}^T . Такие операции приводят к тензорам 3-го ранга:

$$\mathbf{Z} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}}; \quad \mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \boldsymbol{\vartheta}}; \quad \mathbf{Z}^* = \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial \boldsymbol{\vartheta}}; \quad \mathbf{J}^* = \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \boldsymbol{\vartheta}}. \quad (2.45)$$

Производная тензора по вектору определяется таким образом, чтобы формулам (2.45) соответствовали следующие индексные аналоги:

$$Z_{kij} = \frac{\partial L_{ij}}{\partial \vartheta_k}; \quad J_{kij} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial \vartheta_k}; \quad Z^*_{kij} = \frac{\partial L_{ji}}{\partial \vartheta_k}; \quad J^*_{kij} = \frac{\partial B_{ji}}{\partial \vartheta_k}. \quad (2.46)$$

Тензоры \mathbf{Z} и \mathbf{Z}^* представляются в виде векторных произведений тензоров второго ранга:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}^T \times \mathbf{L}; \quad \mathbf{Z}^* = -\mathbf{B} \times \mathbf{L}^T \quad (2.47)$$

Выражения для \mathbf{J} и \mathbf{J}^* более громоздки и при их вычислении требуется больше тензорных операций:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{1}{|\boldsymbol{\vartheta}|^2} (\mathbf{e}_n \boldsymbol{\vartheta} \mathbf{e}_n + \mathbf{E} \boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{B}^T \boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\vartheta} \mathbf{B} - \mathbf{Z} \times \boldsymbol{\vartheta}); & \mathbf{J}|_{|\boldsymbol{\vartheta}|=0} &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{E}; \\ \mathbf{J}^* &= \frac{1}{|\boldsymbol{\vartheta}|^2} (\mathbf{e}_n \boldsymbol{\vartheta} \mathbf{e}_n + \mathbf{E} \boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{B} \boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\vartheta} \mathbf{B}^T + \mathbf{Z}^* \times \boldsymbol{\vartheta}); & \mathbf{J}^*|_{|\boldsymbol{\vartheta}|=0} &= -\frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

где \mathbf{e}_n – орт координатной оси с номером n ($n=1, 2, 3$).

Отметим, что для экономии вычислительных ресурсов из четырех тензоров третьего ранга, представленных соотношениями (2.45), достаточно вычислить только два тензора \mathbf{Z} и \mathbf{J} , тогда тензоры \mathbf{Z}^* и \mathbf{J}^* получаются из \mathbf{Z} и \mathbf{J} перестановкой двух последних индексов, что легко реализуется при программировании.

С учетом обозначений (2.45), производные кинетической энергии (2.44) по обобщенным перемещениям определяются так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_a} &= \mathbf{0}; \\ \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{Q}_a} &= \frac{\partial \mathbf{v}_a^*}{\partial \mathfrak{Q}_a} \cdot \mathbf{f}_a + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_a^*}{\partial \mathfrak{Q}_a} \cdot \mathbf{m}_a = (\mathbf{Z}_a^* \cdot \dot{\mathbf{u}}_a) \cdot \mathbf{f}_a + (\mathbf{J}_a^* \cdot \dot{\mathfrak{Q}}_a) \cdot \mathbf{m}_a; \\ \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_b} &= \mathbf{0}; \\ \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{Q}_b} &= \frac{\partial \mathbf{v}_b^*}{\partial \mathfrak{Q}_b} \cdot \mathbf{f}_b + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_b^*}{\partial \mathfrak{Q}_b} \cdot \mathbf{m}_b = (\mathbf{Z}_b^* \cdot \dot{\mathbf{u}}_b) \cdot \mathbf{f}_b + (\mathbf{J}_b^* \cdot \dot{\mathfrak{Q}}_b) \cdot \mathbf{m}_b, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где двойки сокращаются ввиду симметрии матрицы $[\mathbf{M}_{stat}]$.

Подстановка выражений для обобщённых импульсов из (2.43) в (2.49) дает полный вектор производных кинетической энергии по обобщенным перемещениям:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_a^* \cdot \dot{\mathbf{u}}_a & \mathbf{J}_a^* \cdot \dot{\mathfrak{Q}}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_b^* \cdot \dot{\mathbf{u}}_b & \mathbf{J}_b^* \cdot \dot{\mathfrak{Q}}_b \end{pmatrix} [\mathbf{M}_{stat}] [\mathbf{N}]^T \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_a \\ \dot{\mathfrak{Q}}_a \\ \dot{\mathbf{u}}_b \\ \dot{\mathfrak{Q}}_b \end{pmatrix}; \quad (2.50)$$

Производная матрицы обобщенных масс из (2.33) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d[\mathbf{M}]}{dt} &= \frac{d[\mathbf{N}]}{dt} [\mathbf{M}_{stat}] [\mathbf{N}]^T + [\mathbf{N}] [\mathbf{M}_{stat}] \left(\frac{d[\mathbf{N}]}{dt} \right)^T; \\ \frac{d[\mathbf{N}]}{dt} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathfrak{Q}}_a \cdot \mathbf{Z}_a & & & \\ & \dot{\mathfrak{Q}}_a \cdot \mathbf{J}_a & & \\ & & \dot{\mathfrak{Q}}_b \cdot \mathbf{Z}_b & \\ & & & \dot{\mathfrak{Q}}_b \cdot \mathbf{J}_b \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

При линеаризации слагаемого $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{y}}$ из (2.50) по скоростям получаем аналог

W_{ij} из (2.41):

$$[\mathbf{W}] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_a^* \cdot \dot{\mathbf{u}}_a & \mathbf{J}_a^* \cdot \dot{\mathbf{q}}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_b^* \cdot \dot{\mathbf{u}}_b & \mathbf{J}_b^* \cdot \dot{\mathbf{q}}_b \end{pmatrix} [\mathbf{M}_{stat}] [\mathbf{N}]^T + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_a \cdot \mathbf{f}_a & \mathbf{J}_a \cdot \mathbf{m}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{f}_b & \mathbf{J}_b \cdot \mathbf{m}_b \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

При выводе соотношения (2.52) учитывались следующие свойства тензоров 3-го ранга, которые следуют из (2.46):

$$(\mathbf{Z}^* \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}; \quad (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a},$$

где \mathbf{a} , \mathbf{b} – произвольные векторы.

По результатам вычислений (2.49) - (2.52) и в соответствии с индексным представлением (2.37), (2.41) формируется вектор инерционных нагрузок и гироскопическая матрица:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{inerc} &= [\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{y}} + \frac{d[\mathbf{M}]}{dt} \dot{\mathbf{y}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{y}}; \\ [\mathbf{G}] &= \frac{d[\mathbf{M}]}{dt} + [\mathbf{W}]^T - [\mathbf{W}]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Таким образом, все матрицы и векторы, вошедшие в (2.6), представляются в замкнутом аналитическом виде.

2.4 Выводы по главе

1. Представлена пространственная математическая модель эвольвентного шлицевого соединения на основе принципов лагранжевой механики. В модели выведены выражения для упругой энергии деформаций, используется нелинейное представление жёсткости, проводится учёт сил трения и бокового зазора.

2. В модели используется инкрементальный подход представления поворотов, основанный на разделении конечного поворота на малый накопленный и большой дополненный.

3. Все компоненты уравнения динамики в приращениях для шлицевого соединения получены в замкнутом аналитическом виде.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ШЛИЦЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ С УЧЁТОМ ЗАЗОРОВ И ПЕРЕКОСОВ ПРИ ДЕЙСТВИИ РАЗЛИЧНЫХ НАГРУЗОК.

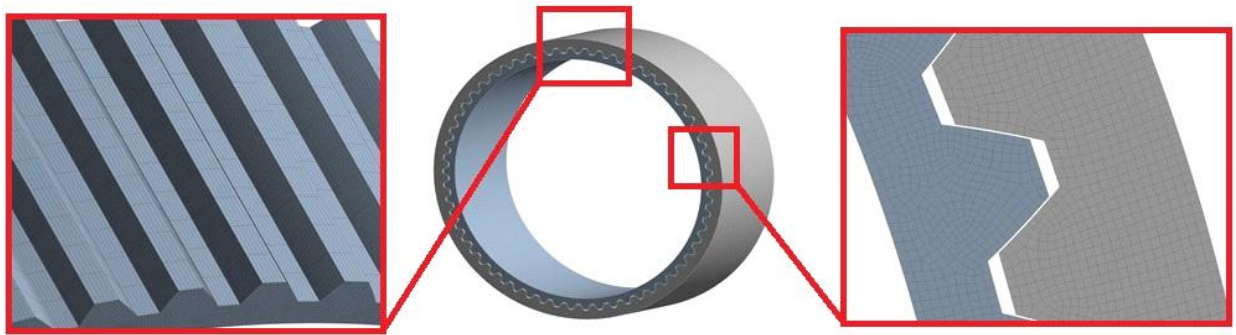
3.1 Исследование конечно-элементной модели шлицевого соединения при различных видах нагружения

Для исследования шлицевого соединения и основных принципов его работы была создана конечно-элементная модель шлицевой муфты в расчётном комплексе ANSYS [58]. Целью исследования являются различные эффекты в шлицевом соединении под действием разного типа нагрузок. Геометрические параметры модели представлены в таблице 3.1. Общий вид модели показан на рисунок 3.1.

Таблица 3.1 - Параметры модели шлицев

Параметр	Величина	Размерность
Модуль упругости E	210000	МПа
Коэффициент Пуассона μ	0,3	–
Плотность ρ	$7,850 \cdot 10^{-9}$	т/мм ³
Модуль шлицев t	2,5	мм
Число шлицев z	52	–
Длина шлицев l	55	мм

Модель разработана с учётом зазоров по боковым поверхностям зубьев. Конечно-элементная сетка модели состоит из гексагональных и призматических элементов. Количество элементов – 431230, количество узлов – 507166. В качестве метрики сетки использовался Jacobian Ratio (MAPDL), рисунок 3.1. Между боковыми поверхностями зубьев шлицевой пары задается контакт с коэффициентом трения равным 0,01.



Mesh Metric	Jacobian Ratio (MAPDL)
<input type="checkbox"/> Min	1,
<input type="checkbox"/> Max	6,9323
<input type="checkbox"/> Average	1,4231
<input type="checkbox"/> Standard Deviation	0,4725

Рисунок 3.1 - Общий вид геометрической и конечно-элементной модели шлицевого соединения

Кинематические и силовые граничные условия модели представлены на рисунке 3.2. Поверхность закрепления фиксируется абсолютно жёстко по всем степеням свободы, нагружение системы происходит по внутренней поверхности шлицев через центральный узел, соединённый с узлами поверхности нагружения интерполяционным элементом (RBE3).

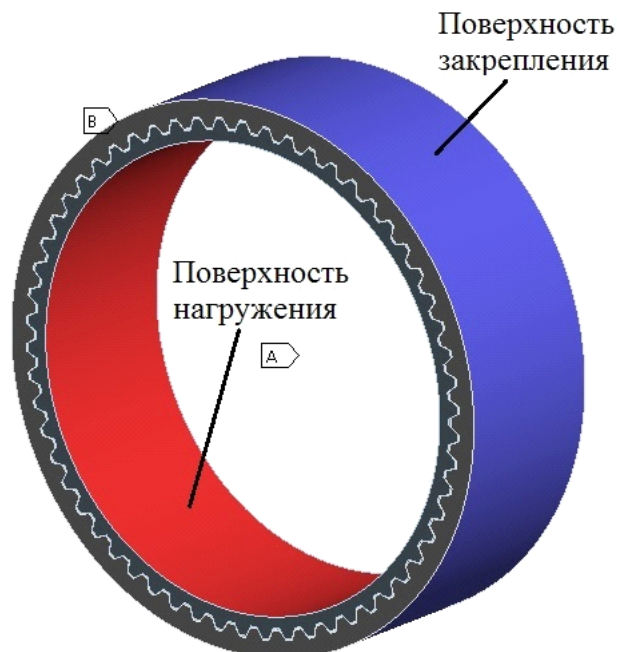


Рисунок 3.2 - Кинематические и силовые граничные условия модели

Первым этапом в анализе модели является оценка влияния учёта зазоров по боковым поверхностям на распределение контакта между шлицами и на

жёсткость шлицевого соединения. Для этого в работе рассматривались следующие расчётные случаи:

1. Модель без зазора, нагруженная радиальной силой $F_x = 1000 \text{ Н}$;
2. Модель без зазора, нагруженная изгибающим моментом $M_y = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$;
3. Модель с боковым зазором 160 мкм (80 мкм с каждой стороны), нагруженная радиальной силой $F_x = 1000 \text{ Н}$;
4. Модель с боковым зазором 160 мкм (80 мкм с каждой стороны), нагруженная изгибающим моментом $M_y = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$;
5. Модель с боковым зазором 160 мкм (80 мкм с каждой стороны), нагруженная радиальной силой $F_x = 1000 \text{ Н}$ и крутящим моментом $M_{кр} = 30900 \text{ Н}\cdot\text{м}$;
6. Модель с боковым зазором 160 мкм (80 мкм с каждой стороны), нагруженная изгибающим моментом $M_y = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и крутящим моментом $M_{кр} = 30900 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

На рисунках 3.3, 3.4 показаны поля контактных давлений для расчетных случаев 1 и 3 и 2 и 4 соответственно.

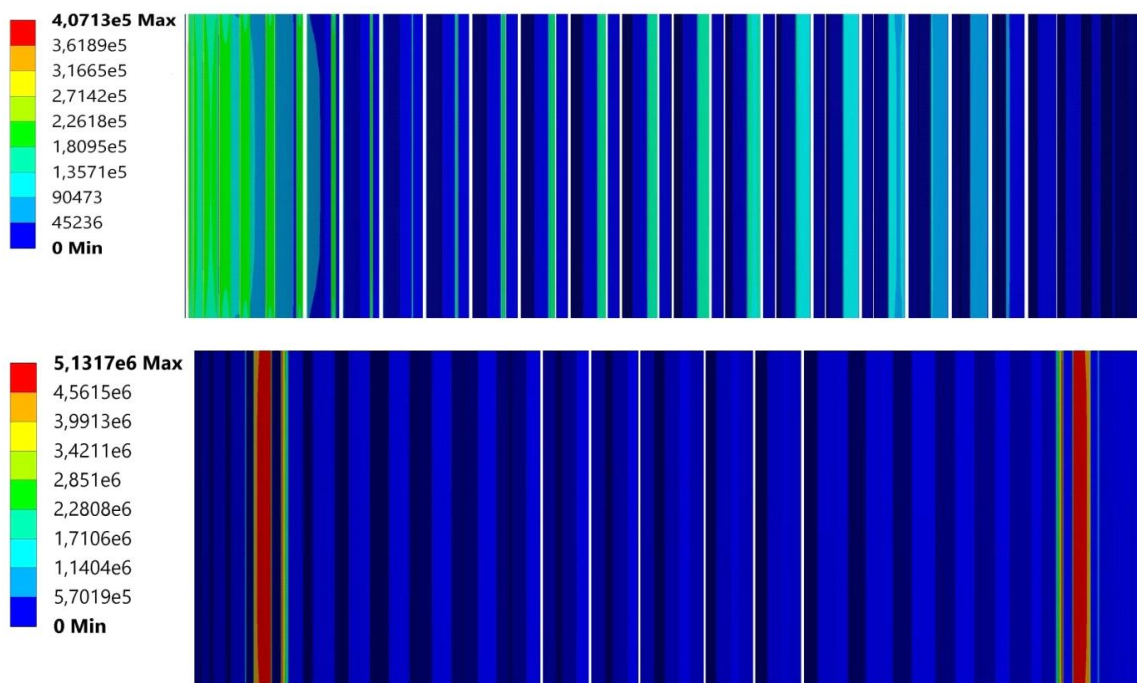


Рисунок 3.3 - Поля контактных давлений для расчетных случаев 1 (сверху) и 3 (снизу)

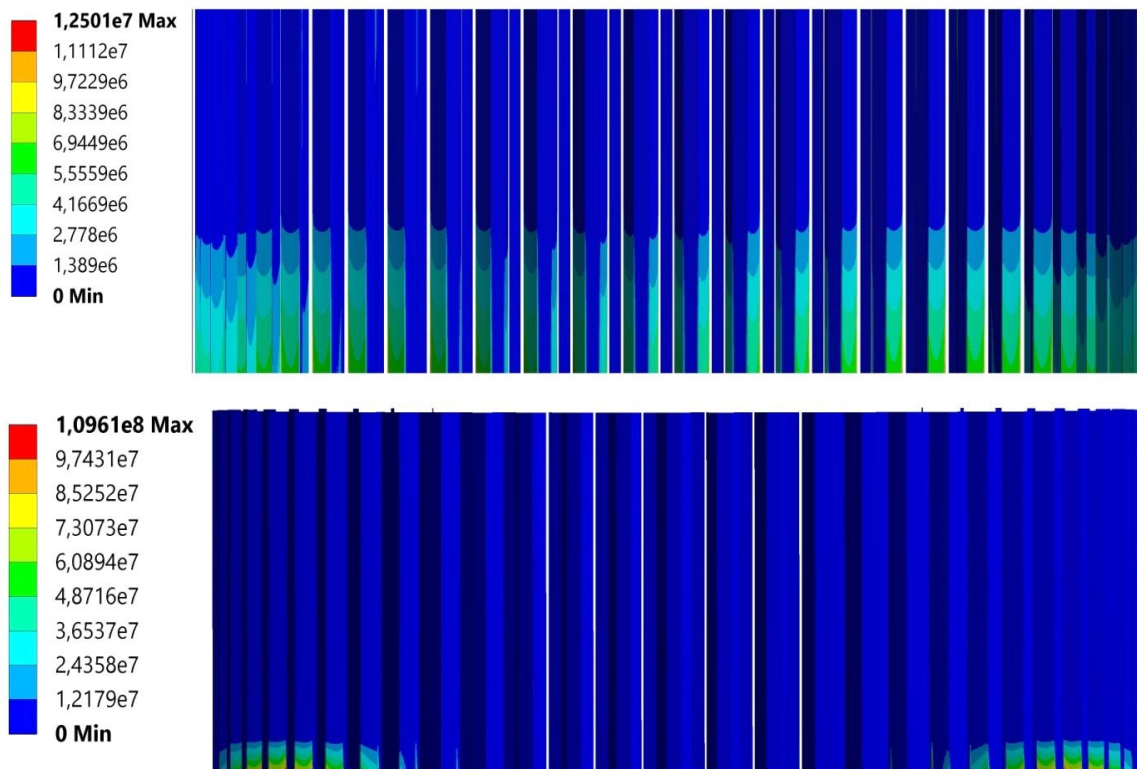


Рисунок 3.4 - Поля контактных давлений для расчетных случаев 2 (сверху) и 4 (снизу)

Из полученных результатов можно заключить, что учёт зазора в системе приводит к перераспределению типов контакта для зубьев в соответствии с направлением действующей силы или момента, а также увеличению на порядок максимального значения контактного давления.

На рисунке 3.5 показаны поля контактных давлений для расчетных случаев 5 и 6 соответственно. По результатам можно заключить, что действие крутящего момента компенсирует наличие зазора в модели и более равномерно загружает все зубья шлицов.

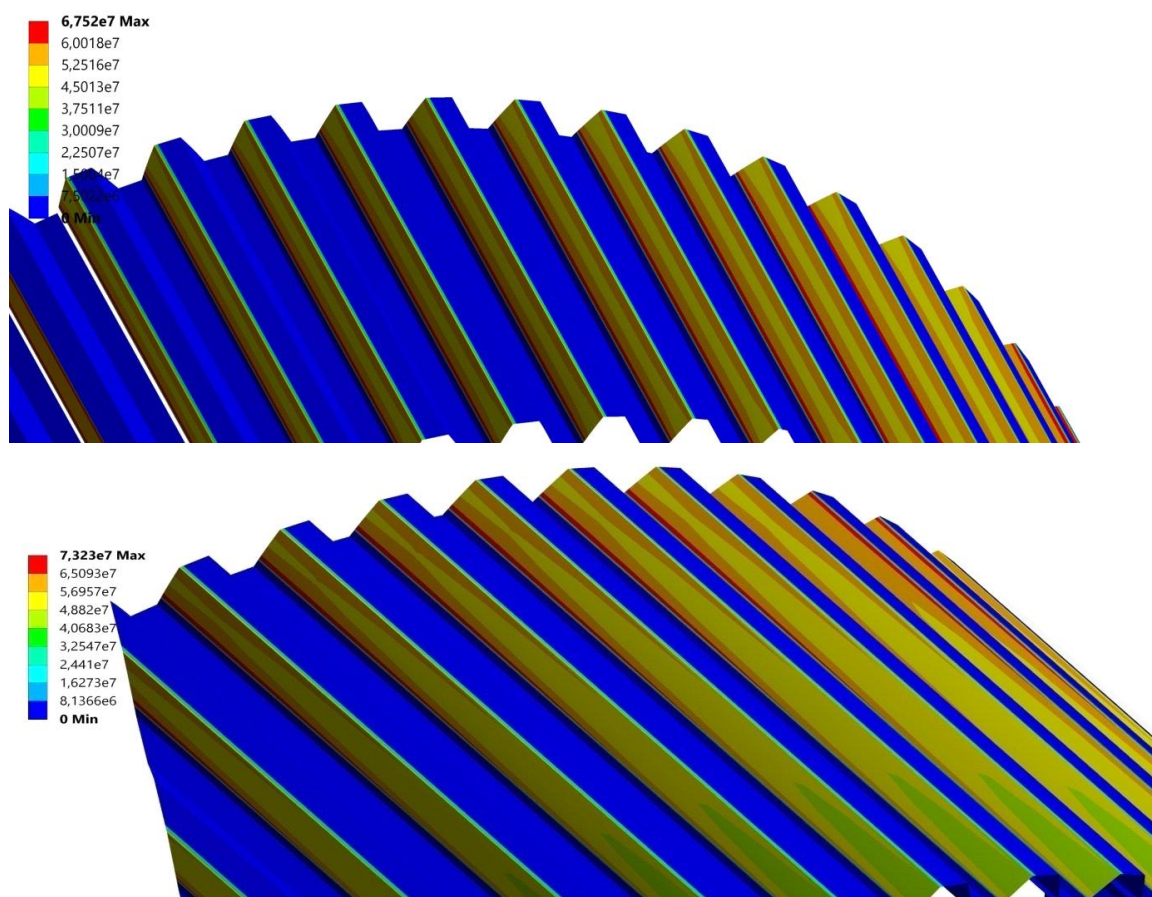


Рисунок 3.5 - Поля контактных давлений для расчетных случаев 5 (сверху) и 6 (снизу)

На рисунках 3.6 и 3.7 показаны нагрузочные характеристики для расчетных случаев 1, 3, 5 и 2, 4, 6 соответственно. Из полученных данных можно заключить, что учёт зазора в шлицевом соединении оказывает значительное влияние на жёсткость соединения. Для радиальных коэффициентов жёсткости разница между вариантами с учётом зазора и без составляет более порядка – $3.58 \cdot 10^9$ Н/м (при учёте зазора) и $6.06 \cdot 10^{10}$ Н/м (без учёта зазора) при нагрузке в 600 Н. Аналогичная разница наблюдается и для моментной жёсткости – $1.16 \cdot 10^6$ Н·м/рад (при учёте зазора) и $1.4 \cdot 10^7$ Н·м/рад (без учёта зазора) при нагрузке 240 Н·м. Полученные результаты показывают важность учёта зазоров в шлицах и их влияние при определении жёсткости соединения.

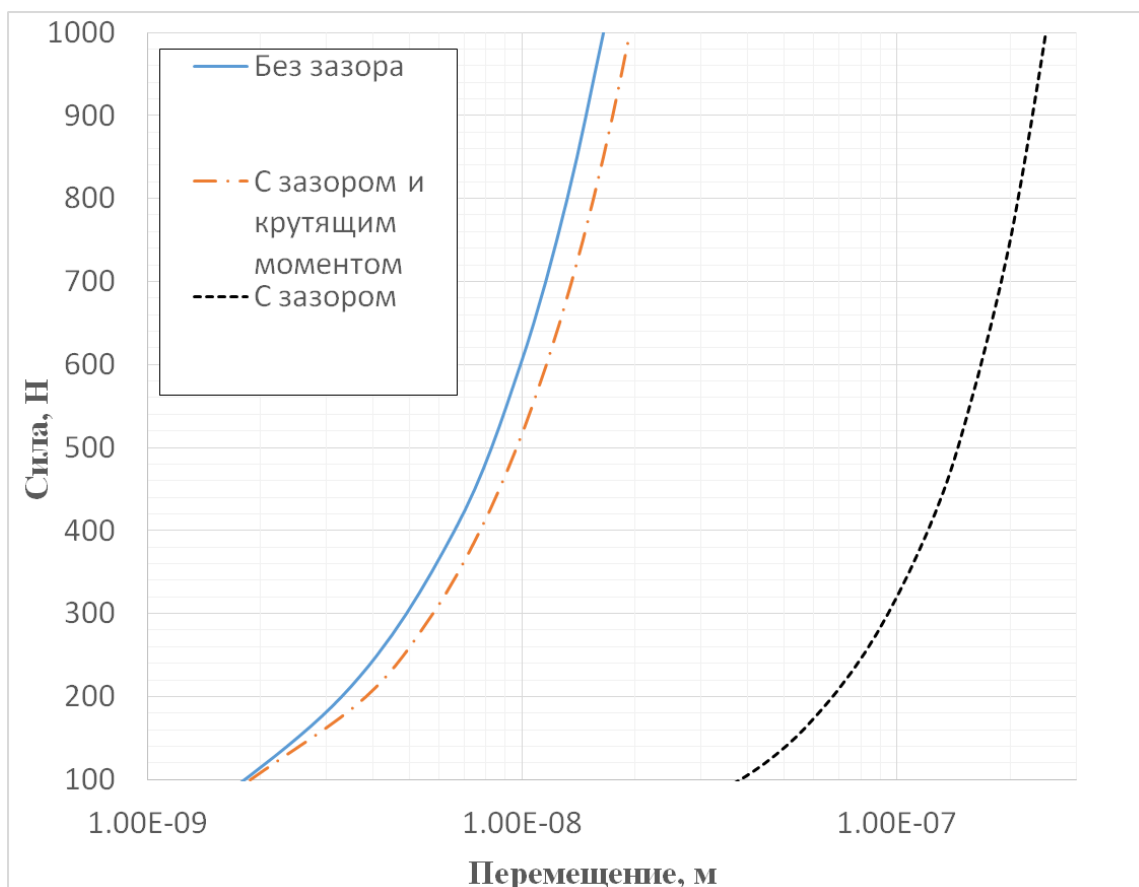


Рисунок 3.6 - Нагрузочные характеристики для расчетных случаев 1, 3 и 5

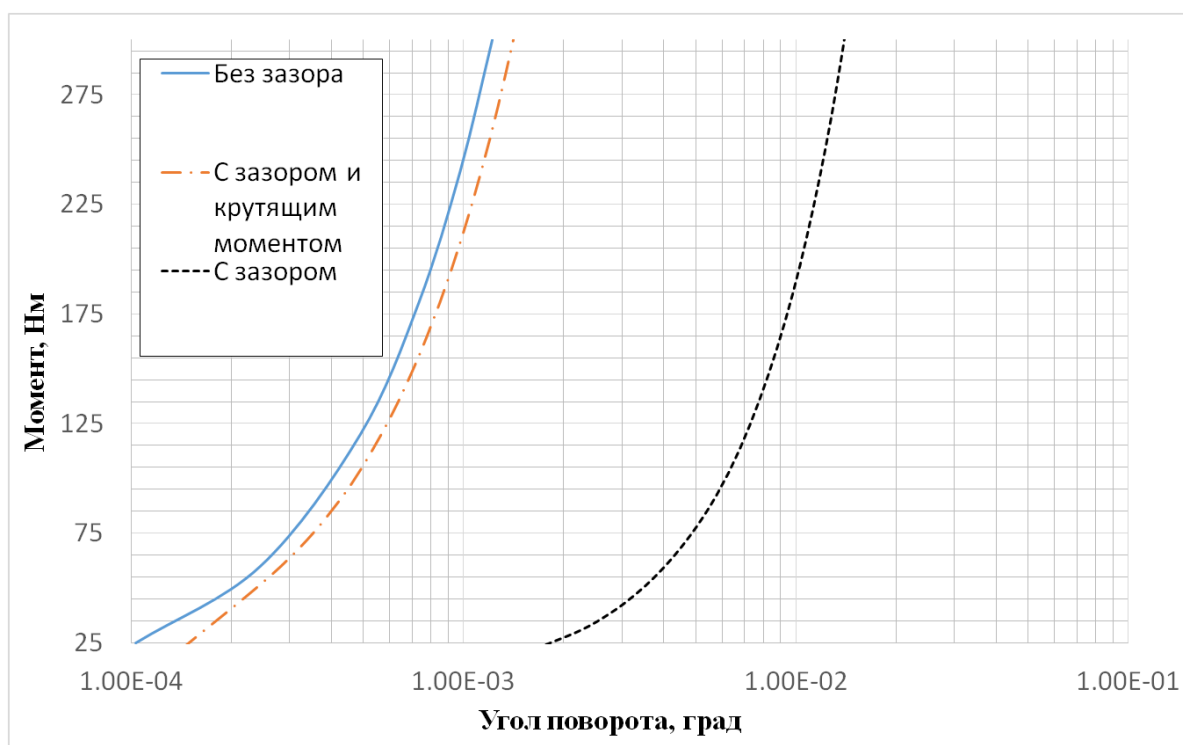


Рисунок 3.7 - Нагрузочные характеристики для расчетных случаев 2, 4 и 6

При дополнительном действии крутящего момента влияние зазоров на жёсткость соединения становится менее значимым. Для радиальных

коэффициентов отличие составляет 15% ($6.06 \cdot 10^{10}$ Н/м без учёта зазора и $5.15 \cdot 10^{10}$ Н/м при его учёте), для моментных – 13% ($1.4 \cdot 10^7$ Н·м/рад без учёта зазора и $1.21 \cdot 10^7$ Н·м/рад при учёте).

На основе полученных результатов можно заключить, что учёт зазора в соединении приводит к изменению реакции и делает его более податливым, а действие крутящего момента одновременно значительно уменьшает разницу между беззазорным вариантом и моделью с зазором. Данный эффект обусловлен вхождением увеличения количества зубьев в контакте и, как следствие, быстрым ростом жёсткости шлицевого соединения.

3.2 Исследование шлицевого соединения при наличии перекоса

В данном разделе проводится анализ поведения шлицевого соединения из предыдущего раздела при радиальном или угловом перекосе под действием крутящего момента. Рассматриваются следующие расчётные случаи:

А. Модель соединения с радиальным перекосом 69 мкм при воздействии крутящего момента $M_{кр} = 64$ Н·м;

В. Модель соединения с угловым перекосом 0.16° при воздействии крутящего момента $M_{кр} = 64$ Н·м;

С. Модель соединения с дополнительными участками вала при действии радиальной силы $F_x = 500$ Н и крутящего момента $M_{кр} = 100$ Н·м.

Для моделирования заданных значений перекосов в расчётных случаях 1 и 2 модели изначально нагружались радиальной силой $F_x = 1000$ Н и изгибающим моментом $M_y = 100$ Н·м соответственно.

На рисунках 3.8 и 3.9 показаны изменения конфигураций шлицевого соединения для случаев А и В из начального состояния (т.е. при наличии перекоса) по мере возрастания крутящего момента. Для лучшего визуального эффекта относительные перемещения в модели продемонстрированы в масштабе. С увеличением нагрузки от крутящего момента соединение происходит постепенное уменьшение величины перекоса вплоть до центрирования внутреннего кольца относительно внешнего. Аналогичный эффект проявляется

при моделировании углового перекося под действием крутящего момента, рисунок 3.10.

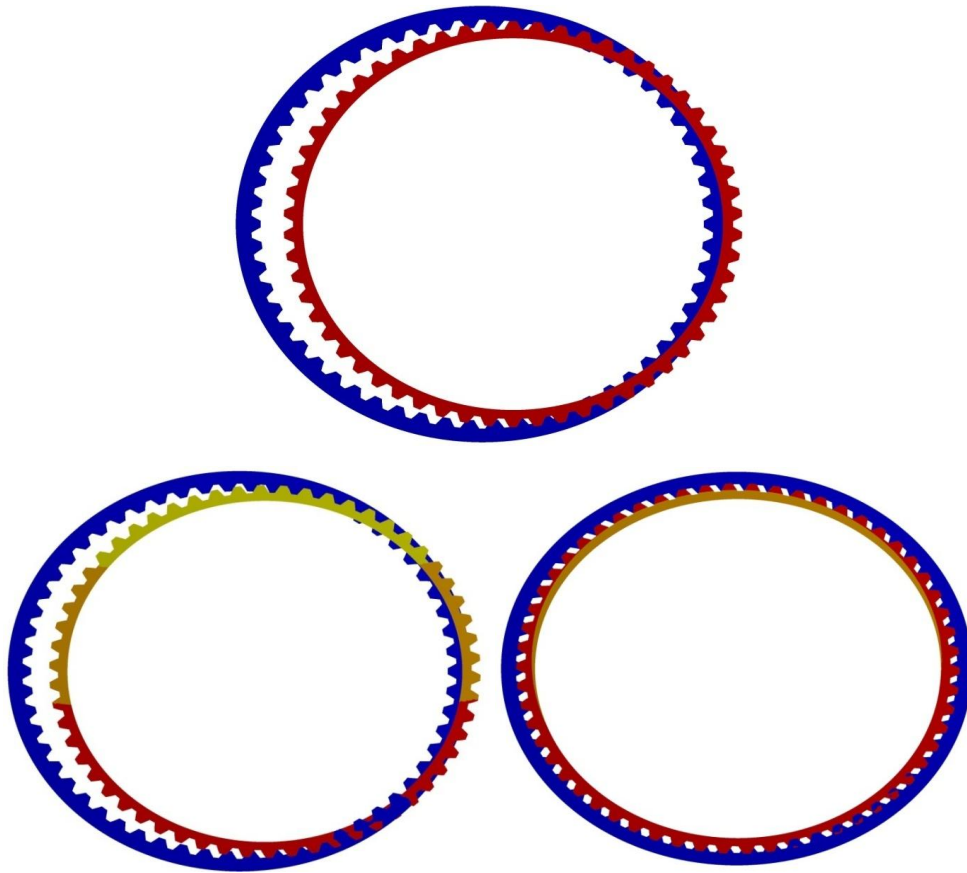


Рисунок 3.8 - Конфигурация шлицевого соединения в случае А по мере возрастания крутящего момента

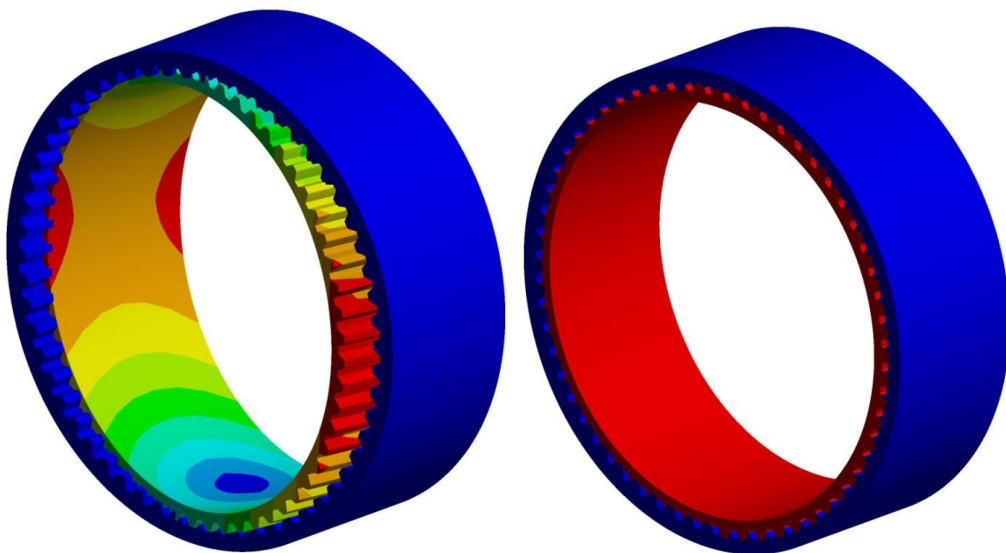


Рисунок 3.9 - Конфигурация шлицевого соединения в случае В по мере возрастания крутящего момента

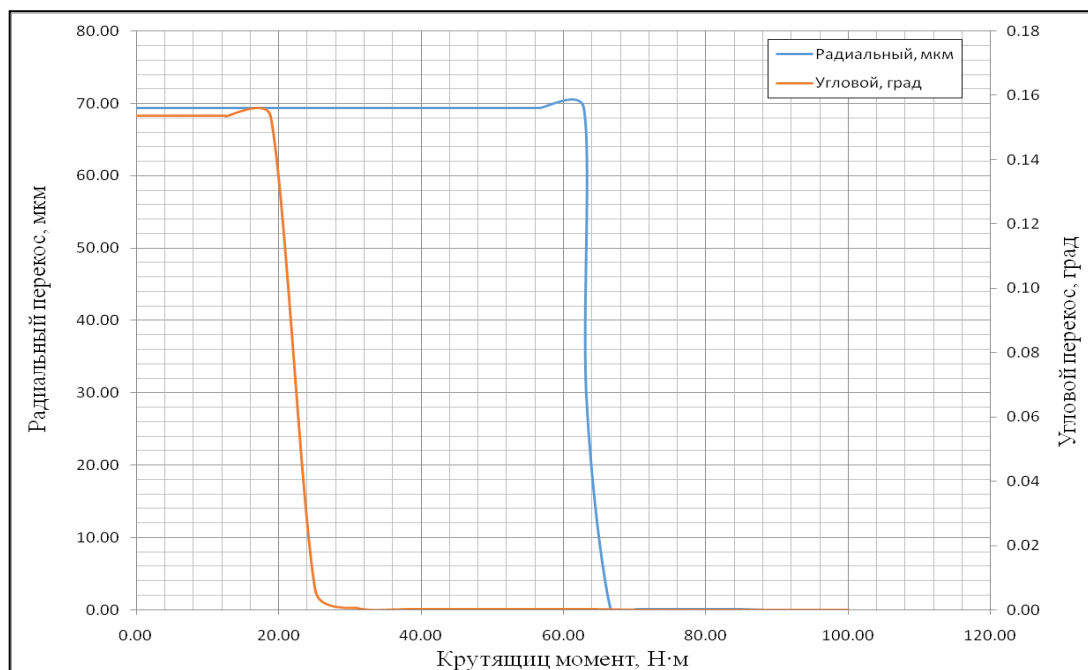


Рисунок 3.10 - Кривые центрирования под действием крутящего момента

При анализе модели С рассматривается модель с дополнительными участками вала, рисунок 3.11. Для создания дополнительных участков, имитирующих вал, использовались балочные элементы. Схема граничных условий представлена на рисунке 3.11. Система опирается на две шарнирные опоры, расположенные на концах валов и имеющие радиальные жесткости $k_x = k_y = 2 \cdot 10^7$ Н/м. В осевом направлении одна из опор имеет жесткость равную $k_z = 1 \cdot 10^9$ Н/м, другая $k_z = 1 \cdot 10^3$ Н/м. Радиальная сила $F_x = 500$ Н прикладываются к внутренней поверхности шлицевого соединения через центральный узел.

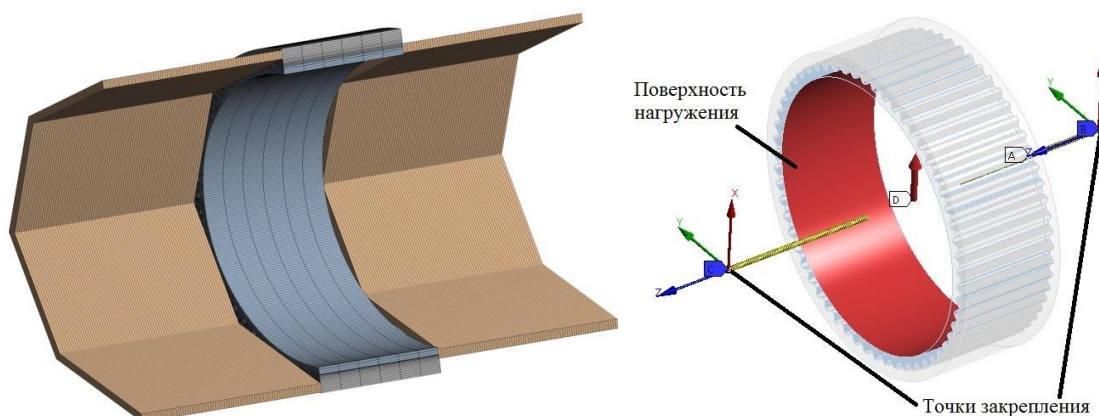


Рисунок 3.11 - Модель шлицевого соединения с участками вала

Под действием радиальной силы величиной в 500 Н в модели с участками вала наблюдается возникновение как радиального, так и углового перекоса,

рисунок 3.12. Под действием крутящего момента, увеличивающегося линейно $M_k = 0 \dots 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$, перекосы исчезают, и соединение возвращается к центрированному состоянию, рисунки 3.13, 3.14.

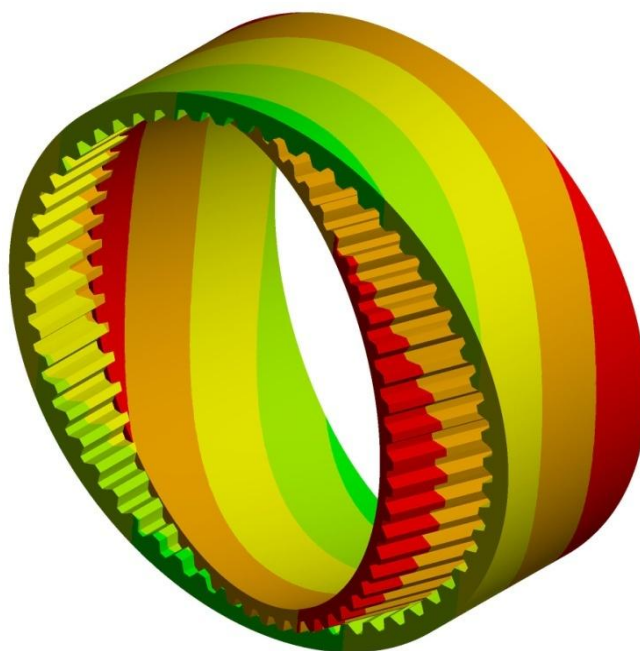


Рисунок 3.12 - Шлицевое соединение под действием комбинированного перекоса

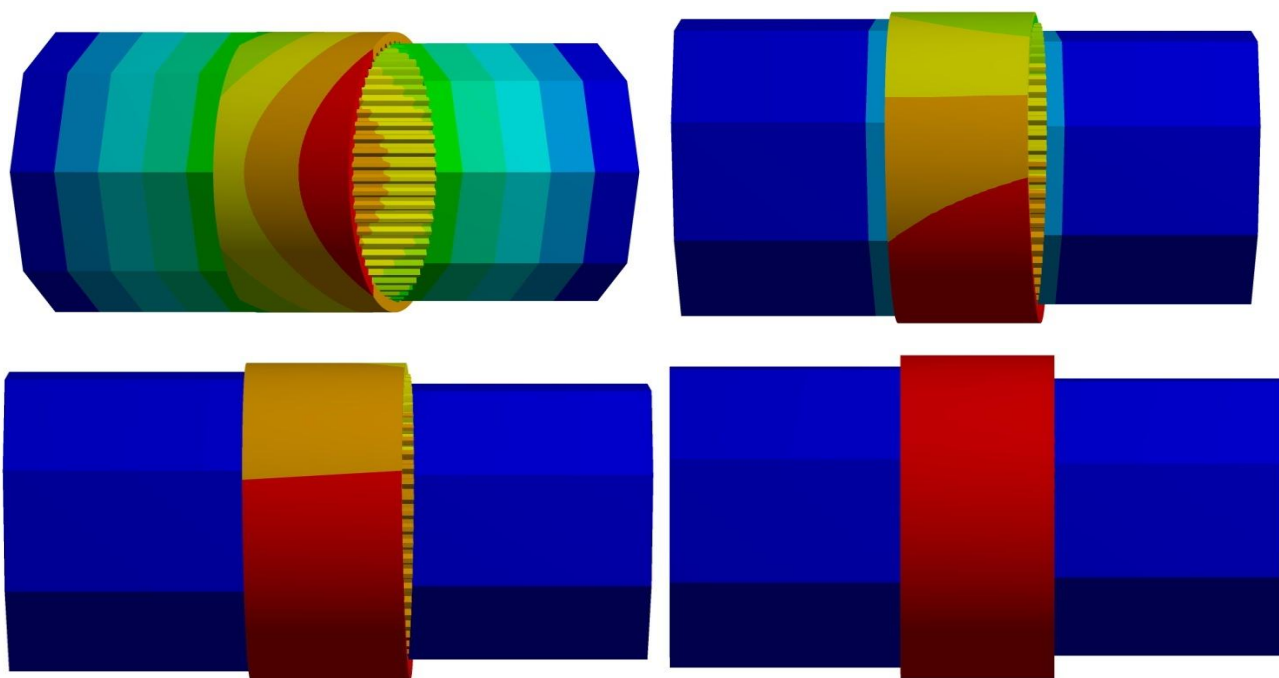


Рисунок 3.13 - Процесс центрирования перекошенной системы под действием крутящего момента

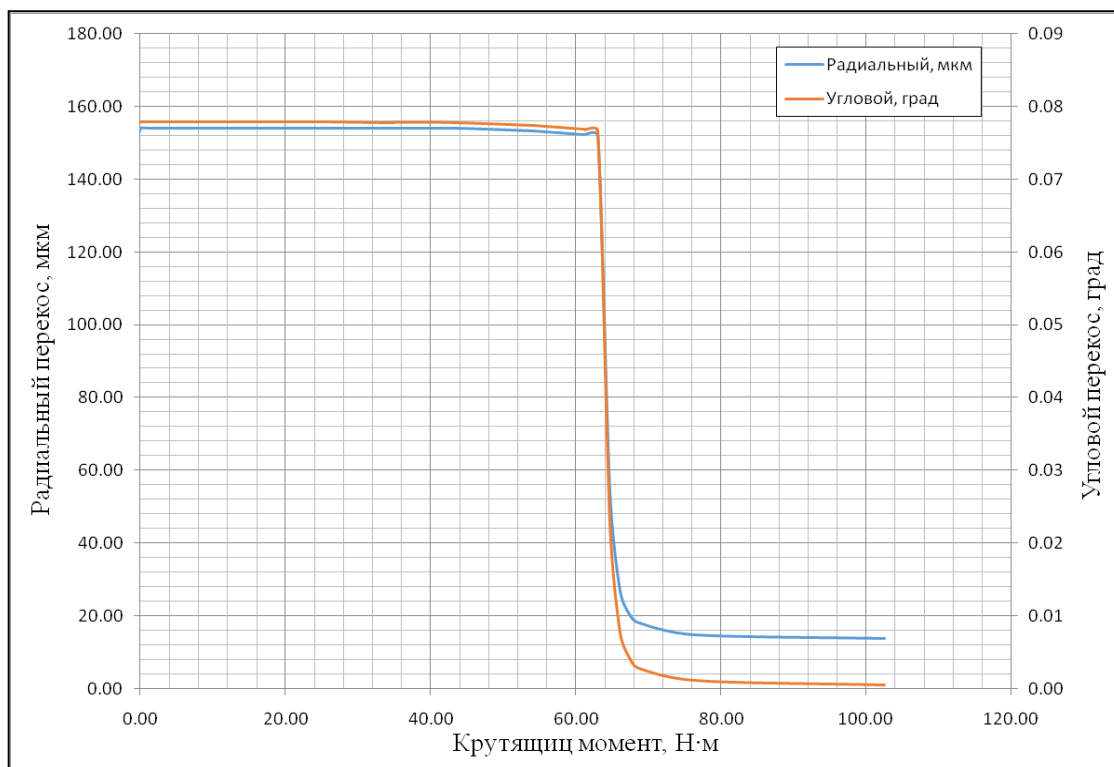


Рисунок 3.14 - Кривые центрирования под действием крутящего момента для модели с участками вала

Из полученных результатов можно заключить, что действие крутящего момента в соединении с перекосом приводит к процессу самоцентрирования. Данный эффект отслеживается как на модели изолированного шлицевого соединения, так и на модели с участками вала.

Подтверждение результатов модели шлицевого соединения с балочными участками вала наблюдается при сравнении с системой, где вал смоделирован твёрдотельными элементами типа SOLID. Общий вид модели представлен на рисунке 3.15. Количество элементов сетки 1250336, количество узлов – 1420702. В качестве метрики также использовался Jacobian Ratio (MAPDL). Параметры закрепления-нагрузки использовались аналогичные системе с балочными элементами, рисунок 3.11.

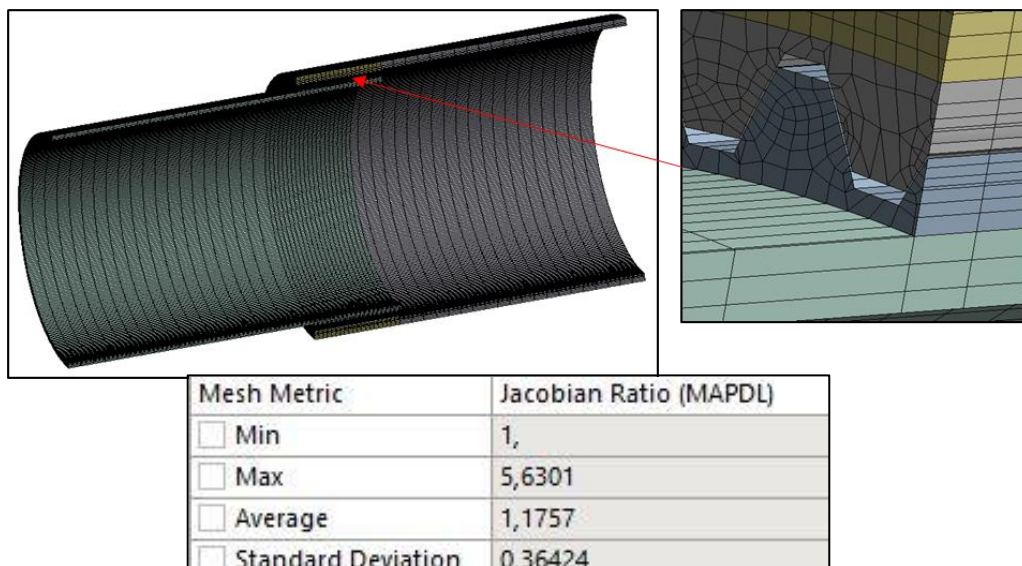


Рисунок 3.15 - Общий вид КЭ модели с твёрдотельными участками валов

На рисунках 3.16, 3.17 представлен процесс центрирования от действия крутящего момента для твёрдотельной модели и сравнение кривых центрирования. Из результатов можно заключить, что модели имеют незначительное различие в процессе центрирования при действии крутящего момента от 50 Н·м до 60 Н·м. В остальном кривые центрирования схожи между собой, что подтверждает правильность результатов, полученных при использовании модели с beam-элементами.

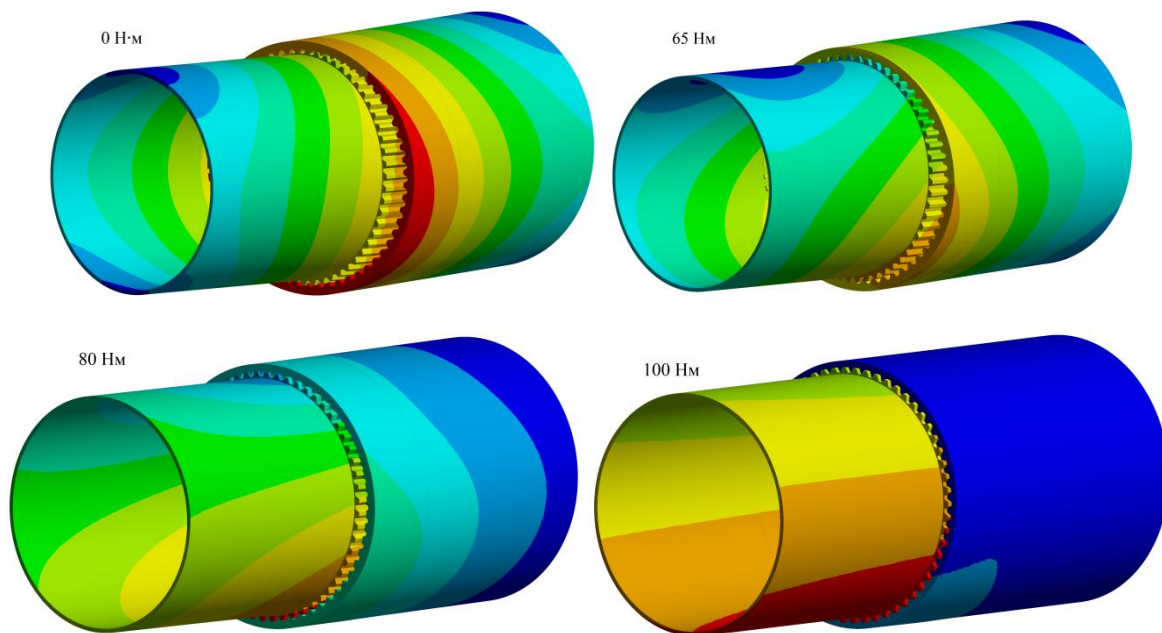


Рисунок 3.16 - Процесс центрирования модели с твёрдотельным валом с перекосом под действием крутящего момента

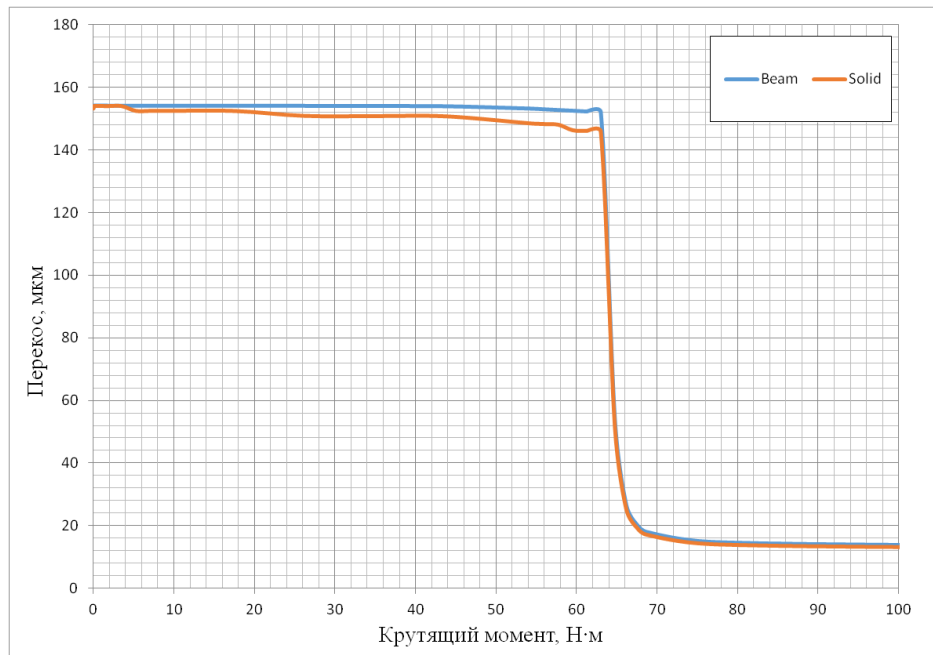


Рисунок 3.17 - Сравнение кривых центрирования для вариантов вала Beam и Solid

Для оценки влияния коэффициента трения на шлицевое соединение с перекосом было проведено сравнение результатов расчётов шлицев при наличии перекоса и действии крутящего момента для трёх коэффициентов трения – 0.01, 0.15 и 0.3. Исследование проводилось как для отдельного соединения, так и для системы с участками вала. Кривые центрирования для отдельного соединения представлены на рисунке 3.18, для модели с участками вала на рисунке 3.19.

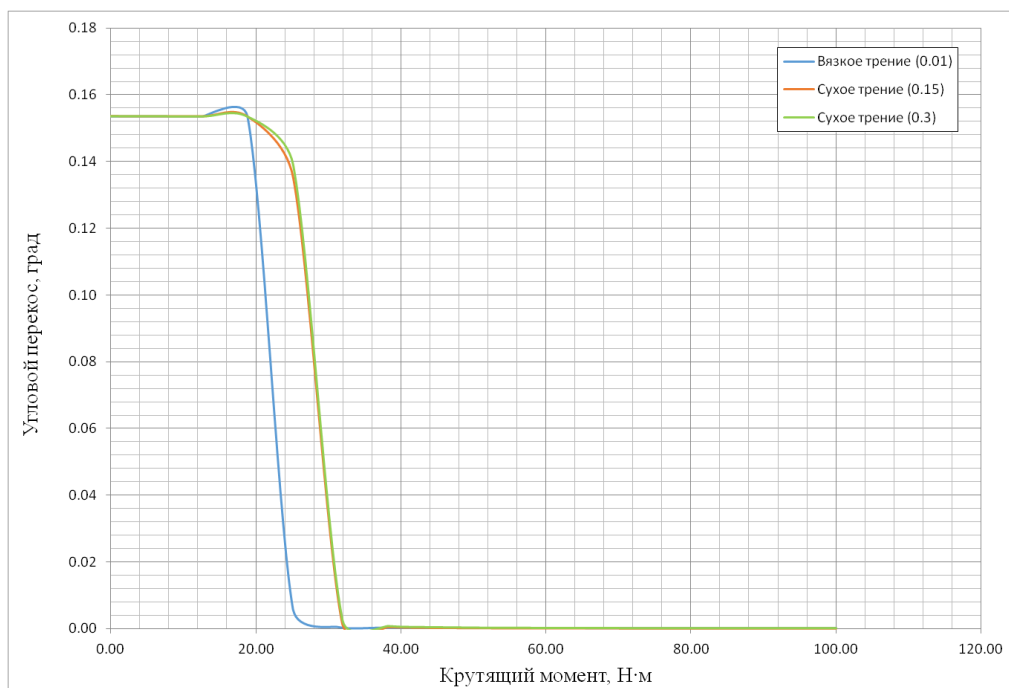


Рисунок 3.18 - Центрирование отдельного соединения при различных законах трения

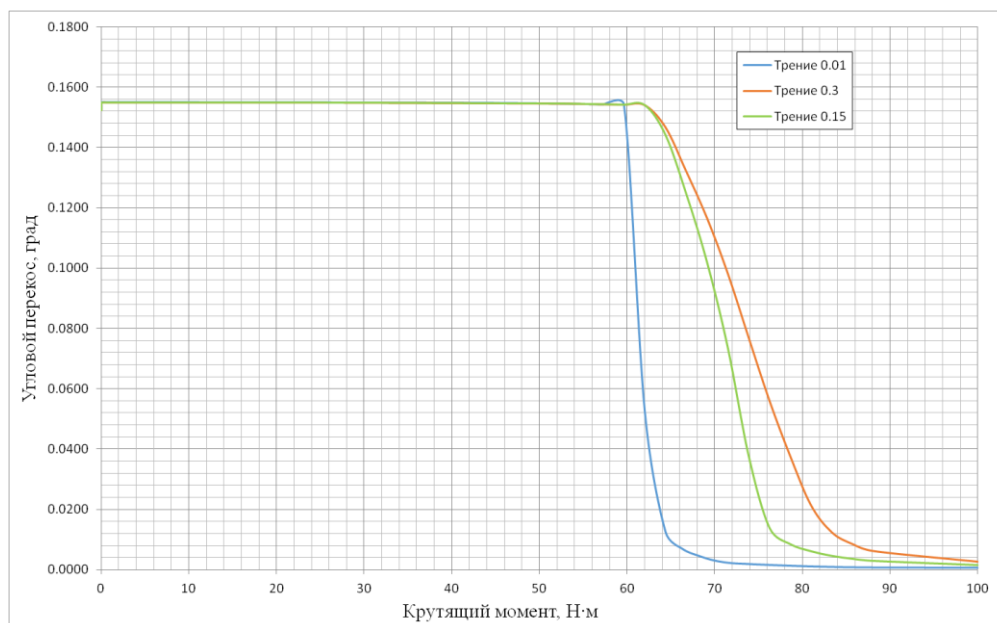


Рисунок 3.19 - Центрирование шлицевого соединения с валом при различных законах трения

Из полученных результатов можно заключить, что изменение закона трения (от «вязкого» к «сухому») приводит к увеличению нагрузок, необходимых для центрирования соединения, а также делает процесс более плавным.

3.3 Верификация математической модели по результатам конечно-элементного анализа

С помощью результатов, полученных при анализе конечно-элементной модели шлицевого соединения, проводится верификация разработанной численной модели. Для верификации жёсткостных свойств рассматривались два варианта нагружения — силой в 1 Н и 100 Н и изгибающим моментом величиной в 1 Н·м и 100 Н·м в радиальных направлениях. Жесткостные характеристики соединения, полученные при использовании двух подходов, представлены в таблице 3.2. По результатам можно заключить, что разница между аналитической моделью и КЭ-моделью не превышает 2 %.

Таблица 3.2 - Результаты расчетов аналитической и КЭ-модели шлицевого соединения

Нагрузка	Радиальная жесткость соединения, Н/м		Угловая жесткость соединения, Н·м/рад	
	КЭ-модель	Численная модель	КЭ-модель	Численная модель
1 Н, 1 Н·м	$2,23 \cdot 10^{10}$	$2,261 \cdot 10^{10}$	$1,17 \cdot 10^7$	$1,194 \cdot 10^7$
100 Н, 100 Н·м	$3,182 \cdot 10^{10}$	$3,241 \cdot 10^{10}$	$5,47 \cdot 10^7$	$5,58 \cdot 10^7$

В шлицевом соединении при появлении перекосов можно наблюдать эффект центрирования при приложении крутящего момента. Описание данного эффекта подробно представлено в работах [17, 59]. Возникновение центрирования также подтверждается конечно-элементным анализом шлицевого соединения (см. рисунки 3.13, 3.16).

Поскольку данный эффект может оказывать влияние на динамическое поведение системы, была проведена верификация эффекта центрирования путем сравнения двух моделей с перекосом и дальнейшим нагружением крутящим моментом. Рассматривались радиальный и угловой перекосы величиной 70 мкм и 0.16° соответственно. Из результатов, представленных на рисунках 3.20. и 3.21 можно заключить, что с ростом крутящего момента в соединении происходит уменьшение величины несоосности (эффект центрирования), и соединение возвращается в обычное состояние. Следует также отметить, что разница между аналитической и конечно-элементной моделями не превышает 7 %.

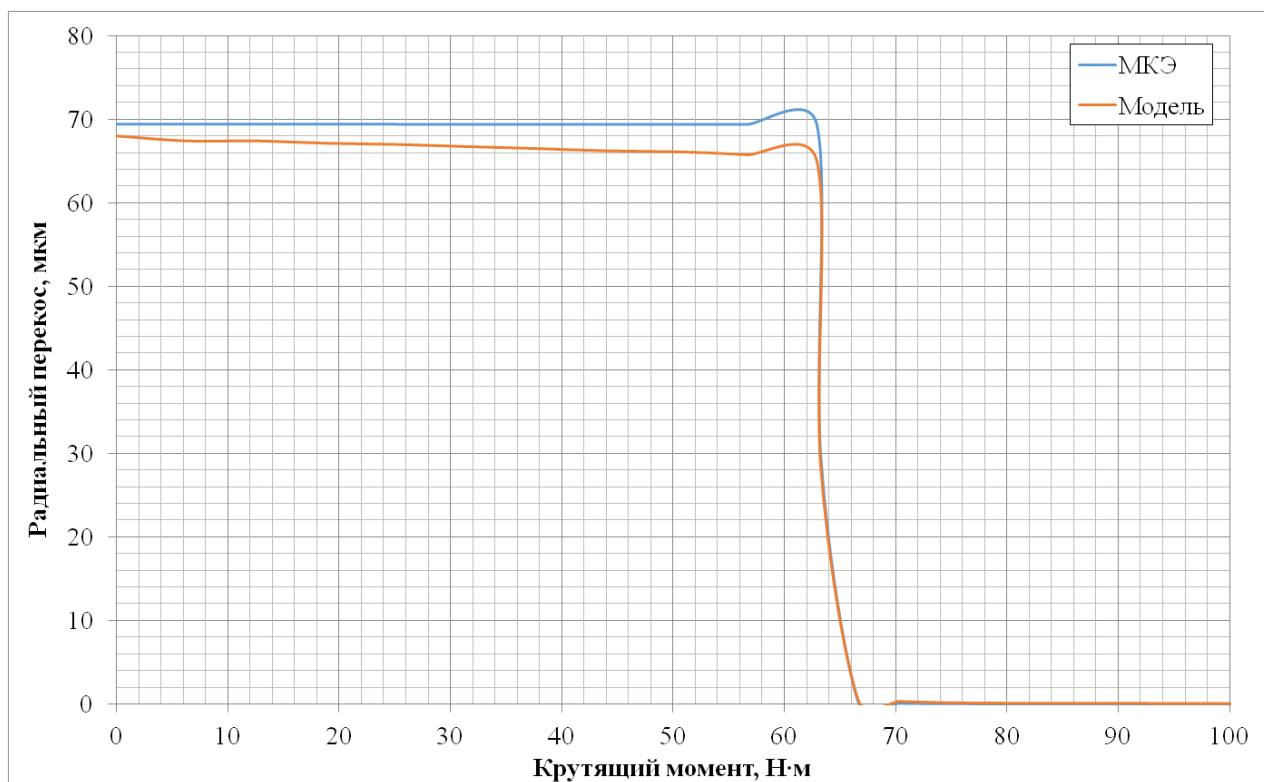


Рисунок 3.20 - Результаты моделирования процесса центрирования при радиальном перекосе аналитической и КЭ модели

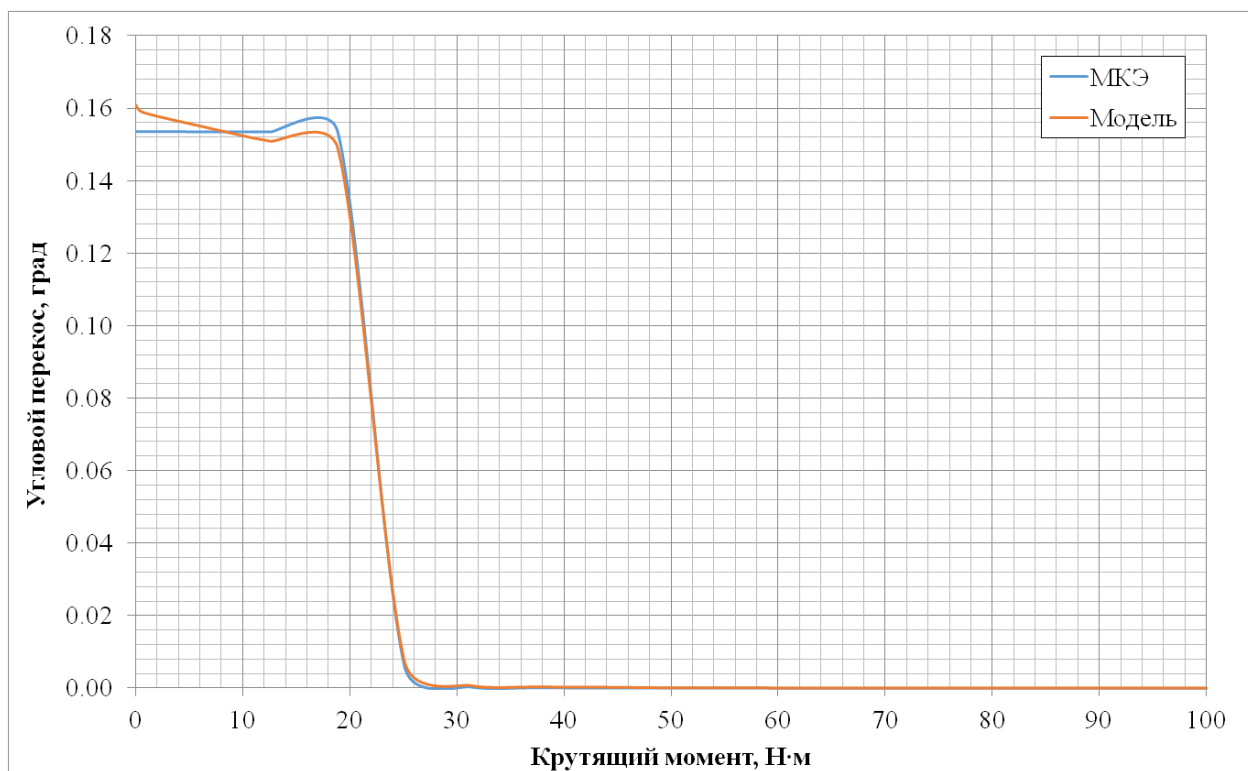


Рисунок 3.21 - Результаты моделирования процесса центрирования при угловом перекосе аналитической и КЭ модели

Верификация аналитической модели показала хорошую сходимость с результатами КЭ-анализа. Разница в жесткостных характеристиках не превышала 2 %. Также приведены результаты по центрированию соединения вследствие действия крутящего момента при перекосе. Наибольшая разница между характеристиками центрирования составила 7 %.

Высокое быстродействие, проведенная верификация и возможность вариантных расчетов позволяют сделать заключение о возможности ее использования в задачах роторной динамики.

3.4 Выводы по главе

1. Проведено исследование работы эвольвентного шлицевого соединения при действии различного вида нагрузок с учётом фрикционного контакта между шлицами и бокового зазора с использованием метода конечных элементов. Получены результаты, демонстрирующие влияние учёта бокового зазора на распределение контакта между шлицами, давление в контакте и жёсткость соединения.

2. Получены результаты о работе соединения при действии перекоса. Показано, что при воздействии крутящего момента в шлицевых соединениях наблюдается эффект центрирования. Данный результат был получен как на модели отдельного соединения, так и на модели в составе динамической системы.

3. Проведено исследование влияния трения на центрирование шлицевого соединения. По результатам можно заключить, что с переходом от «вязкого» трения к «сухому» необходимый для центрирования крутящий момент увеличивается.

4. По результатам проведенного КЭ анализа была проведена верификация разработанной численной модели шлицевого соединения. При верификации было установлено, что разница между жёсткостными характеристиками не превышает 2%; при верификации по кривым центрирования разница не превышает 7%.

4. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ШЛИЦЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РОТОРНОЙ СИСТЕМЫ.

4.1 Введение

Рассматривая газотурбинный двигатель как динамическую систему нельзя не отметить значительное количество элементов, оказывающих влияние на её поведение. К этим элементам относятся подшипники, упругие элементы, части опорных узлов, стоечные узлы, фланцы и т.д. К ним относятся и шлицевые эвольвентные соединения, используемые в роторах для передачи крутящего момента, например, от турбины к компрессору. Широкое распространение такие соединения получили благодаря их высокой надёжности, хорошей прочности и высокому ресурсу работы.

В литературе можно найти множество методик расчёта прочности и надёжности данного соединения. Работы [60 - 65] показывают, что для подобных расчётов активно используются как аналитические, так и конечно-элементные методы.

В то же время для данных соединений существует необходимость оценки их динамических свойств и влияние этих свойств на работу роторной системы. К таким расчётам относятся определение жёсткостных параметров, режимов работы при условиях перекоса, анализ влияния трения на вибрации. Потребность данного анализа связана с тем, что шлицевое соединение может оказывать значительное влияние на параметры динамической системы. В работах [43], [62] можно найти примеры такого влияния.

Для задач роторной динамики ШС обычно моделируется шарниром с моментной податливостью (жесткостью). Однако задача расчета жесткости такого соединения достаточно сложная. Поэтому инженерами часто проводится только оценка степени влияния соединения на динамические свойства ротора. То есть решается две задачи – моментная жесткость равна нулю, либо соединение рассматривается как абсолютно жесткое. Такой упрощенный подход в обоих

случаев может внести значительные погрешности при определении динамических характеристик роторной системы. При этом не учитывается влияние зазоров, а также возможные перекосы в ШС соединяемых роторов, возникающие при работе двигателя.

Вопросы моделирования шлицевого соединения валов как нелинейного динамического элемента роторной системы можно найти в зарубежных источниках. Подобные задачи решаются в нестационарной постановке с применением численных методов. Модели, используемые в таких работах, позволяют решать контактную задачу, учесть деформации зубьев в условиях различного нагружения, учитывать зазоры и перекосы, а также трение, возникающее в контактных парах.

Для определения жесткостных свойств шлицевого соединения применяются численные модели, построенные на базе либо аналитических методов, либо в конечно-элементных (КЭ) программах.

Успешные примеры применения численных алгоритмов на базе аналитических подходов можно найти в работах [19], [21], [23]. Такие алгоритмы можно успешно применять и для решения нелинейных нестационарных задач в роторной динамике.

Применение КЭ подхода для оценки жесткостных характеристик ШС и факторов, влияющих на них, также можно найти в [14], [17], [20]. Несмотря на сложный процесс моделирования, такие КЭ модели применяются и позволяют решать перечисленные задачи. Вместе с тем их применение для решения нелинейных задач в нестационарной постановке весьма трудоемко.

Следует отметить, что в обоих случаях применяемые методы и модели нуждаются в их верификации и тщательной проверке.

4.2 Шлицевое соединение в составе динамической модели ГТД

Анализ влияния жёсткости ШС на динамические параметры роторной системы проводился в модели стационарного газотурбинного двигателя, представленной на рисунке 4.1.

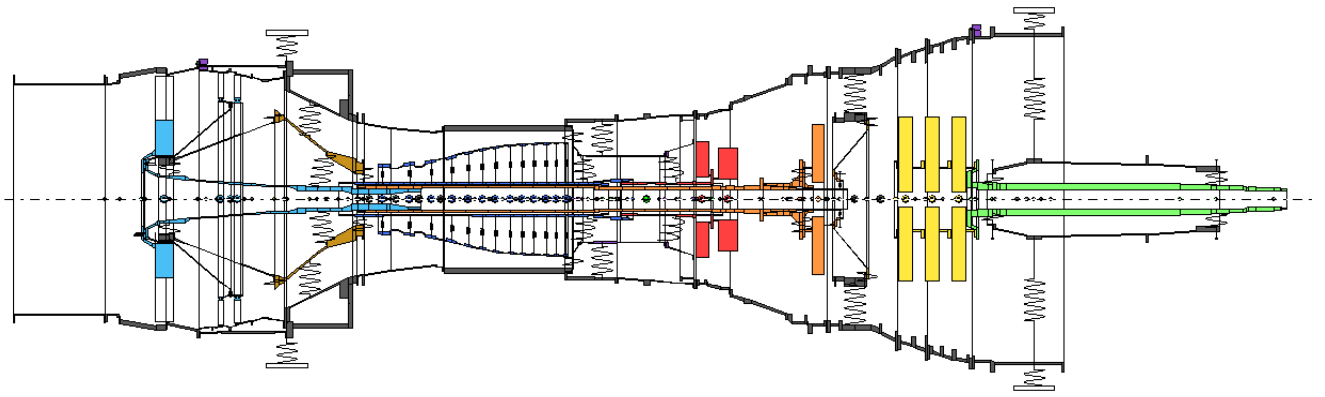


Рисунок 4.1 - Общий вид исследуемой модели двигателя

Создание расчетной модели двигателя проводилось в программной системе DYNAMICS R4 [66]. Данный программный продукт использует принципы модального анализа для расчёта параметров динамической модели – частот и форм собственных колебаний, критических частот вращения, амплитудно-частотных характеристик и т.д. [67 - 69].

В качестве исследуемого элемента было выбрано ШС роторов КВД и ТВД, рисунок 4.2. Соединение в шлицевой паре моделируется связью, задаваемой матрицей коэффициентов жесткости и трением в контактных зонах.

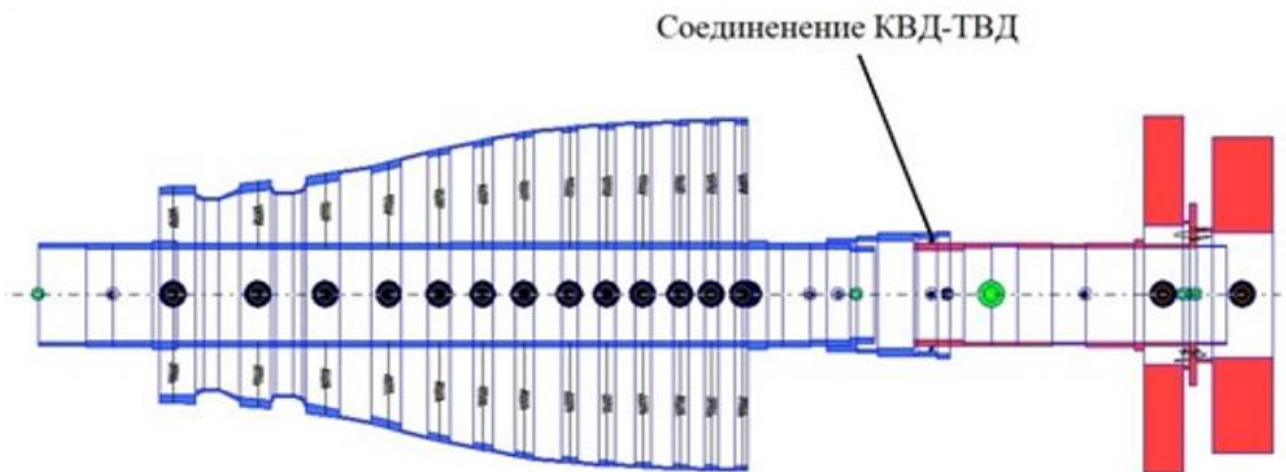


Рисунок 4.2 - Исследуемое шлицевое соединение

Модель состоит из балочных и оболочечных элементов, моделирующих конструкцию двигателя, включающую ротор низкого давления, ротор высокого давления, ротор силовой турбины, статорную часть с опорами роторов. Общие массово-инерционные характеристики модели представлены в таблице 4.1. Скорости скольжения показаны на рисунке 4.3.

Таблица 4.1 - Массово-инерционные характеристики модели

М, кг	$J_x, \text{кг}\cdot\text{м}^2$	$J_y, \text{кг}\cdot\text{м}^2$	$J_z, \text{кг}\cdot\text{м}^2$
5480.3 кг	9633	9633	862

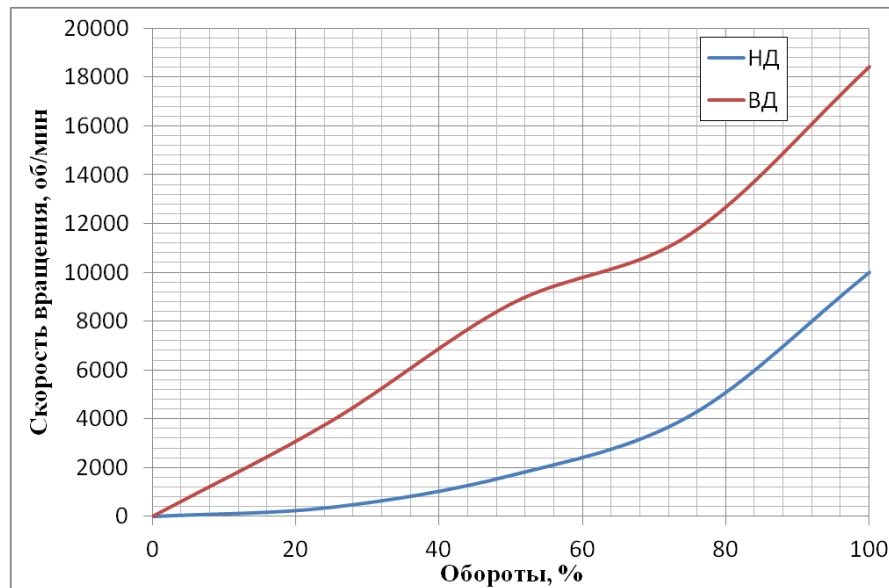


Рисунок 4.3 - Скорости скольжения роторов

Определение коэффициентов жёсткости проводилось с использованием разработанной численной модели при её верификации по результатам конечно-элементного анализа с моделью, использованной в Главе 3.

Для получения коэффициентов жёсткости к модели прикладывались нагрузки, определённые в расчёте динамической системы с жёстким шлицевым соединением при разгоне от 0 до максимальной скорости вращения с учётом сил веса и дисбалансов. Радиальные и моментные дисбалансы задавались в центрах масс роторов - для КВД – 3330 г·мм и $280000 \text{ г}\cdot\text{мм}^2$, для ТВД – 3184 г·мм и $58880 \text{ г}\cdot\text{мм}^2$. Усилия, действующие на соединение, и зависящие от частоты вращения ротора высокого давления, показаны на рисунке 4.4. Из полученных нагрузок для расчёта жёсткости были выбраны их максимальные значения на резонансах – 6800 Н и 1600 Н·м. Полученные в предварительном расчёте динамической системы усилия использовались в КЭ модели ШС для определения коэффициентов его жёсткости [70].

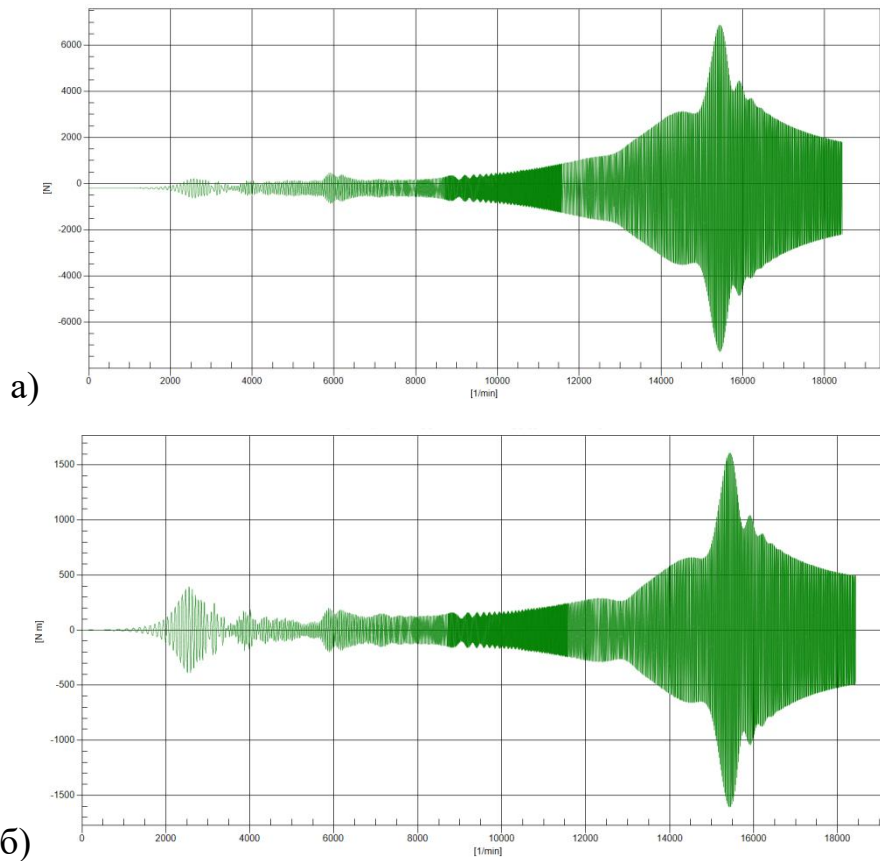


Рисунок 4.4 - Усилия, действующие в соединении КВД-ТВД

а) – сила, б) - момент

Полученные в результате конечно-элементного анализа результаты были включены в матрицу жесткости, моделирующую в программной системе DYNAMICS R4 шлицевое соединение роторов КВД и ТВД, рисунок 4.5.

Жесткость							
		ut_x	ut_y	ut_z	ur_x	ur_y	ur_z
		m	m	m	rad	rad	rad
Fx	N	2.261e+10	0	0	0	0	0
Fy	N		2.261e+10	0	0	0	0
Fz	N			1e+11	0	0	0
Mx	N m				1.194e+07	0	0
My	N m					1.194e+07	0
Mz	N m						1e+11

Рисунок 4.5 - Рассчитанная матрица жёсткости шлицевого соединения (формат DYNAMICS R4)

Расчёт коэффициентов жесткости проводился с учётом зазоров по боковым поверхностям. В соединении под действием нагрузок появляется перекося, величина которого зависит от значения зазоров, рисунок 4.6. Перекося приводит к изменению жёсткостной характеристики – поскольку в контакте участвуют не все

зубья, общая жёсткость соединения будет меньше, чем без учёта зазора. Некорректный учёт зазоров в соединении может приводить к неоправданно завышенным значениям жёсткости.

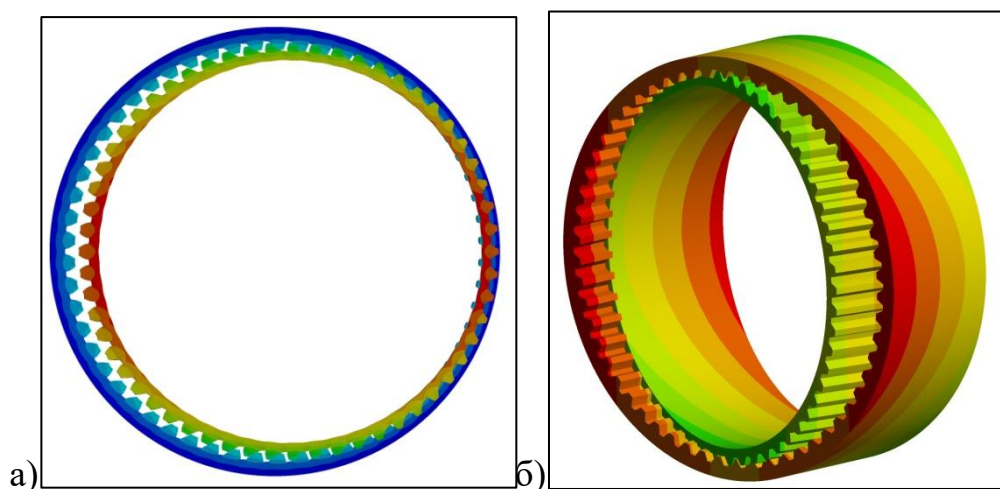


Рисунок 4.6 - Шлицевое соединение при перекосе

а) радиальный; б) угловой

Как уже отмечалось, ШС в общем случае является нелинейным элементом, жесткостные характеристики которого зависят от усилий, действующих на него (режимов работы двигателя). В проведенных расчетах с учетом поставленной задачи принято допущение, что жесткость соединения является постоянной для всех частот вращения и действующих сил.

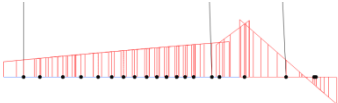
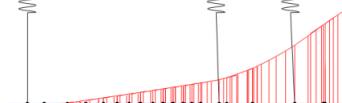
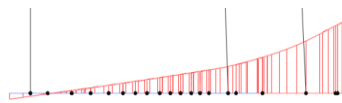
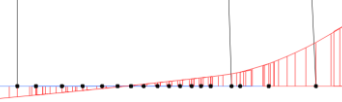
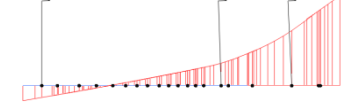
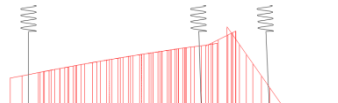
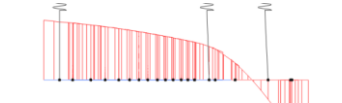
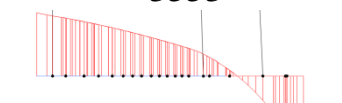
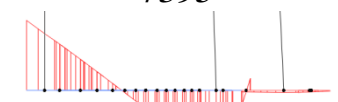


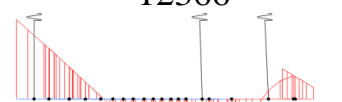
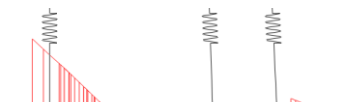
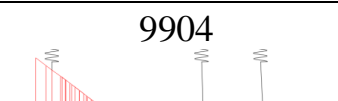
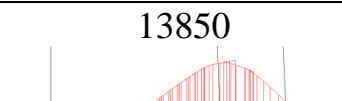
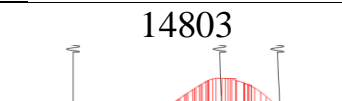
4.3 Влияние жесткости шлицевого соединения на критические частоты

В анализе влияния ШС на динамику двигателя рассматривались три модели – с рассчитанной матрицей жесткости, куда входят как радиальные, так и моментные коэффициенты жесткости, модель соединения с нулевой жесткостью (идеальный шарнир) и абсолютно жесткое соединение по всем степеням свободы.

Сравнение критических скоростей модели для вышеперечисленных вариантов соединения представлено в таблице 4.2. В таблице представлен список критических частот в диапазоне вращения ротора ВД с прямой синхронной прецессией и отличающиеся между собой более чем на 5%. Также приведены формы колебаний для данных частот.

Использование абсолютно податливого соединения в модели приводит к значительным изменениям частотного спектра и форм колебаний - 17% для формы 7395 об/мин и 40% для формы 9904 об/мин по сравнению с вариантом рассчитанной жёсткости. Также необходимо отметить, что в модели с податливым соединением некоторые формы отсутствуют. Для большинства форм абсолютно жёсткий вариант соединения имеет меньше различий от варианта с рассчитанной жёсткостью. Вместе с тем есть и формы колебаний с достаточно большими отличиями по частотам от абсолютно жесткого варианта соединения.

Таблица 4.2 - Результаты расчетов для различных вариантов жесткости

Податливое соединение	Рассчитанная жёсткость	Жёсткое соединение
2285 	2163 	2209 
-	2370 	2430 
3263 	3487 	3553 
7395 	6118 	6306 
-	12366 	13389 
9904 	13850 	14803 

Аналогичные результаты наблюдаются и для собственных частот динамической системы, рассчитанных на режиме с максимальными усилиями, действующими на соединение.

Поскольку жёсткость шлицевого соединения является характеристикой нелинейной и зависит от величины прикладываемых нагрузок, значения собственных частот колебаний динамической системы, а, следовательно, и критических частот вращения, могут варьироваться. Данное утверждение подтверждается результатами различных исследований, которые можно найти в работах [23], [25].

Полученные результаты демонстрируют важность корректного учета жёсткости шлицевых соединений. Излишнее ужесточение системы приводит к изменению критических частот вращения. Недостаточные величины жёсткости также оказывают влияние как на частоты, так и на формы колебаний, причём значительно сильнее, чем ужесточение.

4.4 Влияние жёсткости на амплитудно-частотные характеристики и нагрузки на опоры

Сравнение амплитудно-частотных характеристик проводилось в двух точках контроля вибраций. Анализ влияния шлицев на нагрузки опорных узлов проводился для опор ротора ВД. Точки контроля вибраций представлены на рисунке 4.7, опорные узлы ротора ВД показаны на рисунке 4.8.

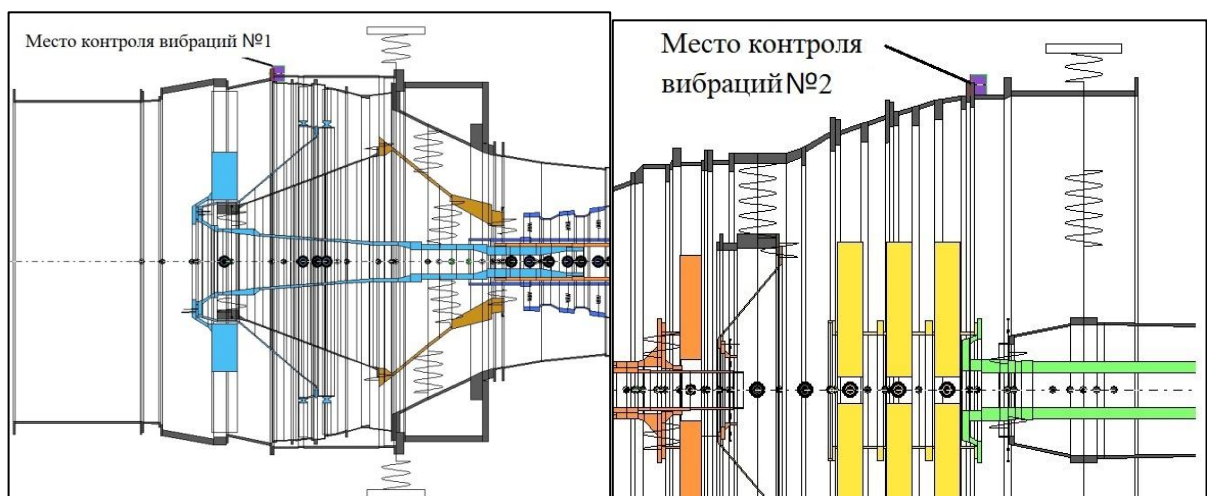


Рисунок 4.7 - Места контроля вибраций

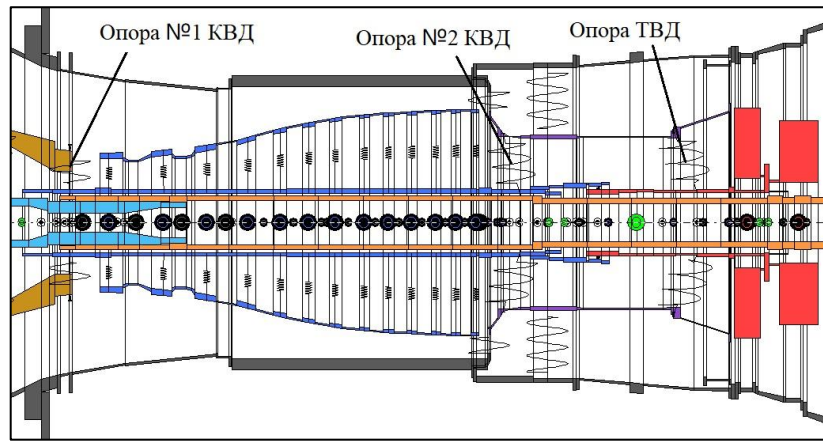


Рисунок 4.8 - Опоры ротора ВД

Результаты расчётов виброскоростей в диапазоне частот вращения ротора ВД для трёх вариантов жёсткости шлицевого соединения представлены на рисунке 4.9.

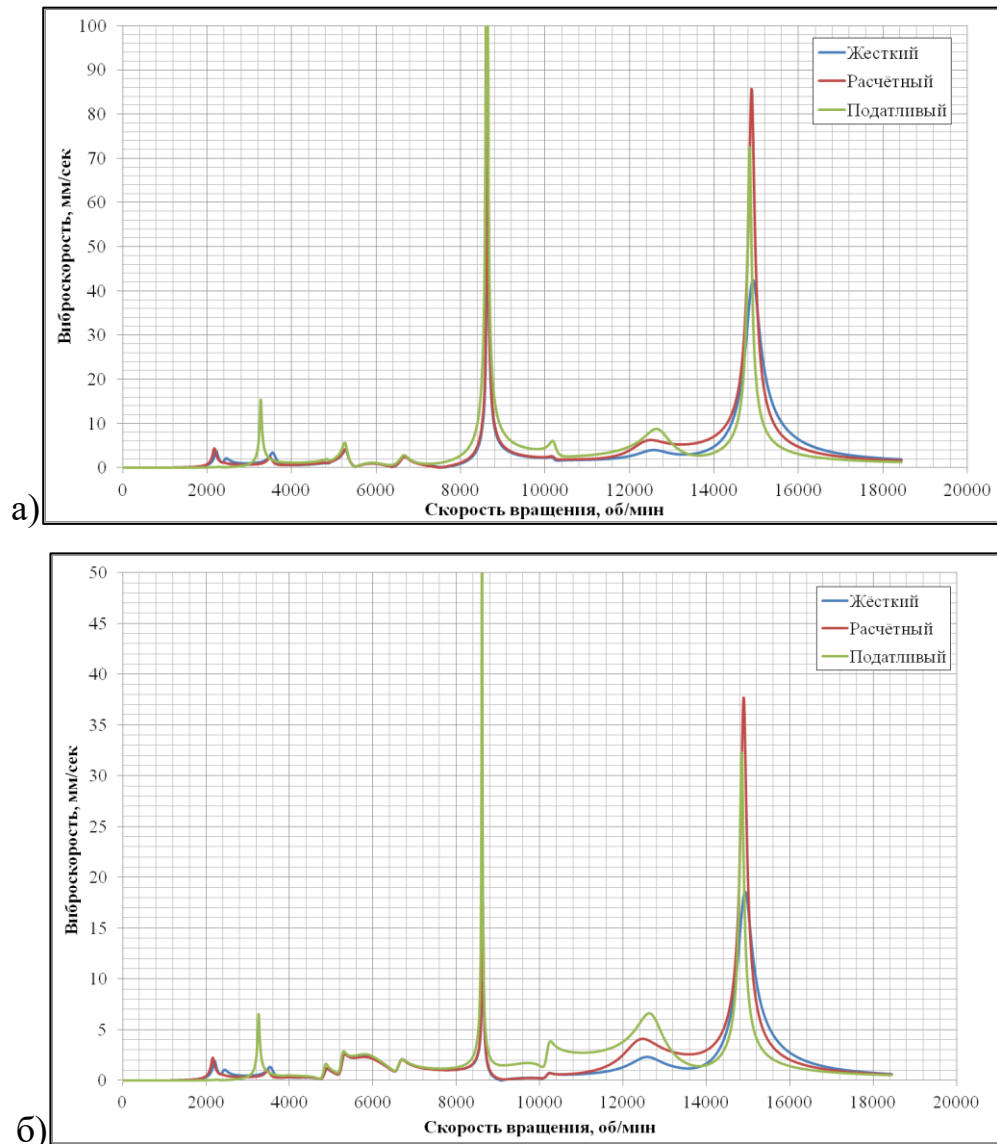


Рис. 4.9. Амплитудно-частотные характеристики для датчиков №1 (а) и №2 (б)

При сравнении амплитудно-частотных характеристик для мест контроля вибраций №1 и №2 можно отметить отличия общего уровня вибраций между системой с жёсткостью шлицевого соединения, полученной из конечно-элементной модели, и системами с абсолютно жёстким или податливым вариантами. Однако, наибольшее влияние оказывается на резонансные частоты, значения которых составляют 8620 об/мин (№1) и 14857 об/мин (№2). По сравнению с абсолютно жёстким соединением амплитуды вибраций модели с рассчитанной жёсткостью по датчику №1 выше ~ на 25% для резонанса на 8620 об/мин, и в 2 раза для резонанса на 14857 об/мин. Для датчика №2 разницы между резонансами на 8620 об/мин не наблюдается, но для пика на 14857 об/мин также отмечается двукратное увеличение виброскорости для варианта с рассчитанной жёсткостью.

При сравнении с моделью, включающей в себя податливое соединение, амплитуды вибраций модели с рассчитанной жёсткостью шлицев показывают меньшие вибрации на резонансе №1 (для обоих датчиков) – разница составляет 300 %. На резонансе №2 изменения не столь значительны – виброскорости модели с податливым соединением меньше на 23%.

Стоит отметить, что корректность учёта упругой характеристики шлицев будет влиять на амплитуды вибраций несколько нелинейно. Это демонстрируют показания датчиков на резонансе 14857 об/мин при сравнении соединения с рассчитанной жёсткостью с податливым вариантом соединения – амплитуды вибраций на данном резонансе у податливого соединения ниже, чем у расчётного.

На рисунках 4.10 - 4.12 представлены графики нагрузок, приходящихся на опоры ротора ВД для трёх рассчитанных вариантов модели.

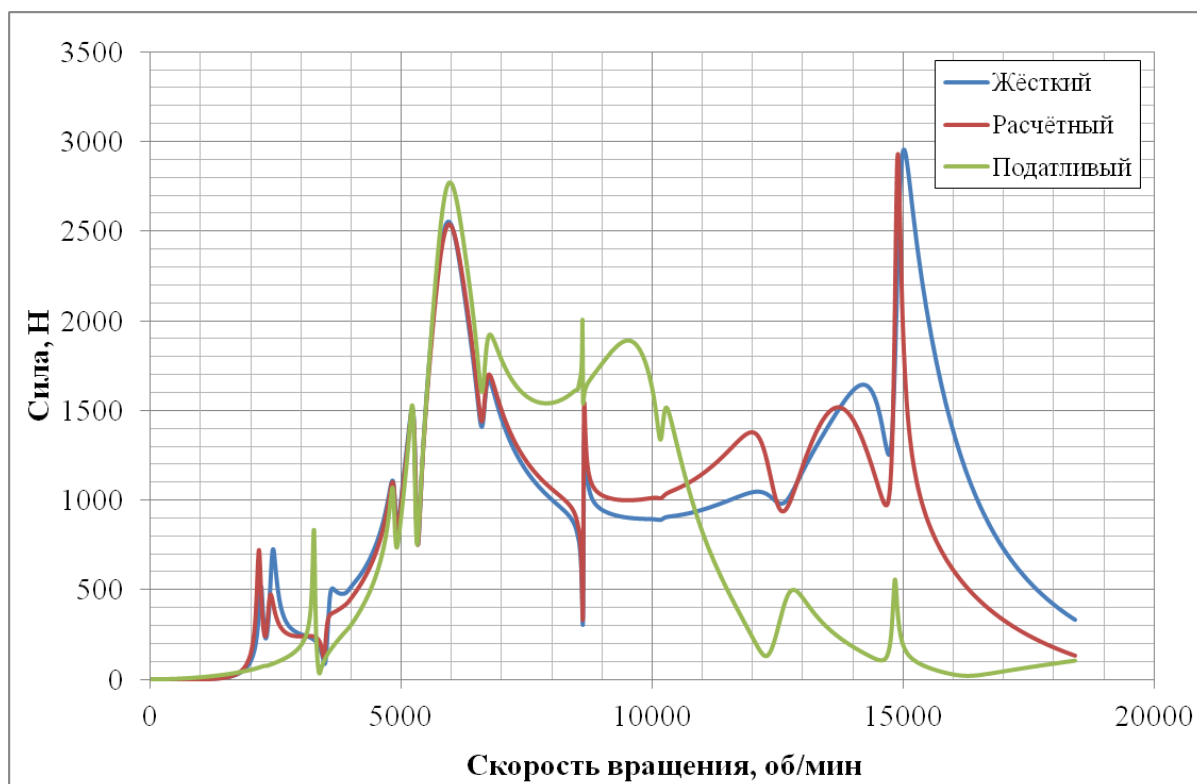


Рисунок 4.10 - Усилия, приходящиеся на опору №1 КВД

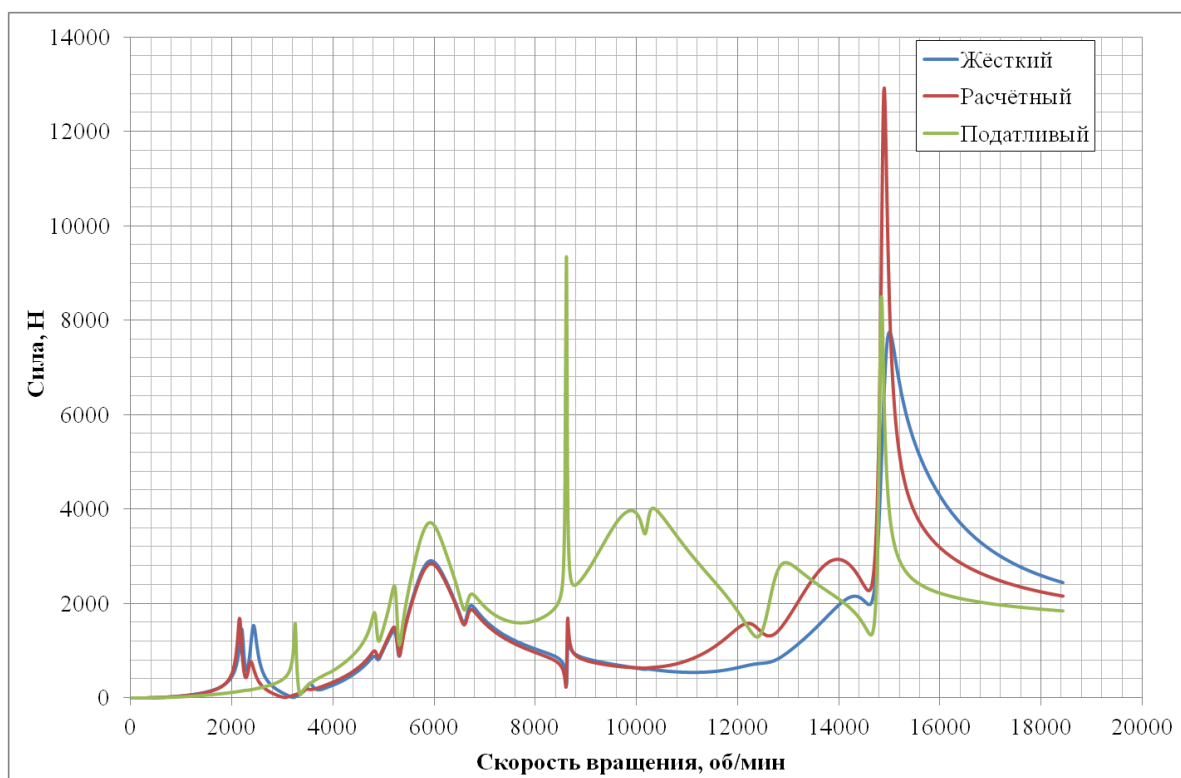


Рисунок 4.11 - Усилия, приходящиеся на опору №2 КВД

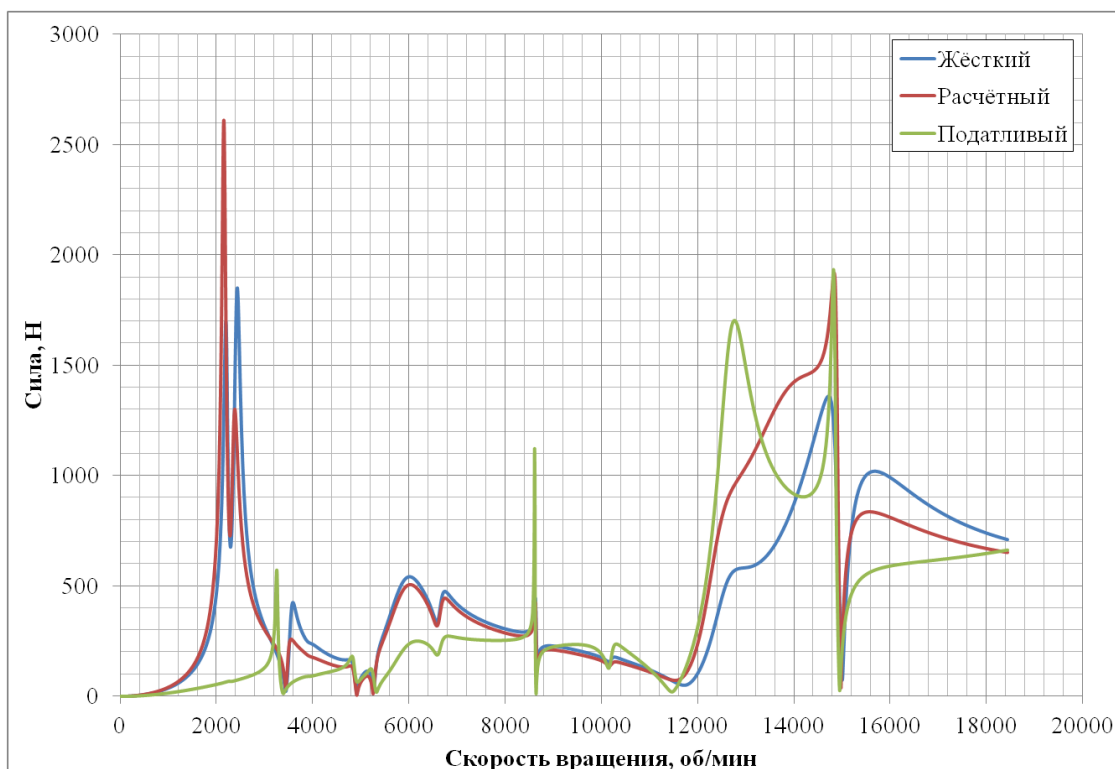


Рисунок 4.12 - Усилия, приходящиеся на опору ТВД

Для опоры №2 КВД наиболее значительным является отличие АЧХ нагрузок на опору податливого варианта при частотах вращения от 8500 до 12000 об/мин. При этом между жёстким и податливым случаями разница незначительна – величины усилий близки за исключением резонанса на 14857 об/мин, где модель с расчётным вариантом жёсткости ШС показывает увеличение нагрузки на опору на 40% по сравнению с остальными вариантами.

Нагрузки, приходящиеся на опору ТВД, для вариантов жёсткого и расчётного вариантов имеют различия в значениях на пике ~2000 об/мин (разница в 34%) и на резонансе 14857 об/мин – 31%. АЧХ нагрузок на опоры имеют схожий характер, что говорит об незначительных изменениях в динамической системе, связанных с перераспределением энергии деформаций между опорами. Вариант модели с податливыми шлицами имеет более значительные отличия от варианта с рассчитанной жёсткостью. Положение пика с 2000 об/мин изменяется до 3000 об/мин вместе с амплитудой нагрузки. Также в районе 13000 об/мин можно наблюдать резкий рост усилий, действующих на опору, затем их падение и снова рост к резонансу 14857 об/мин. Подобные изменения могут быть связаны с перераспределением нагрузок в системе - поскольку силы, действующие на опору

№1 КВД в тот момент были ниже, чем в варианте с рассчитанной жесткостью, опора ТВД поверглась действию более значимых сил.

Из полученных результатов можно заключить, что жёсткость шлицевого соединения оказывает значительное влияние, как на положение критических скоростей, так и на вынужденные колебания. Некорректный учёт жёсткостных характеристик приводит к изменению частотного спектра - перестройке динамической системы. При учёте шлицевого соединения, как абсолютно жёсткого или податливого, амплитуды вибраций могут иметь большие расхождения по сравнению с вариантом модели, в котором используется рассчитанная жёсткость соединения из конечно-элементной модели. Результаты показывают, что шлицевое соединение является нелинейным элементом, жесткостные характеристики которого зависят от режимов работы двигателя.

4.5 Выводы по главе

1. Проведён анализ влияния шлицевого соединения на динамические параметры динамической системы на примере модели ГТД. Моделирование проводилось в программном комплексе DYNAMICS R4. Для определения влияния рассматривалась модель с тремя вариантами жёсткости шлицевого соединения КВД-ТВД: жёсткое, расчётное и податливое.

2. Для получения расчётных коэффициентов жесткости была использована разработанная численная модель. Нагрузки определялись в результате действия сил веса и неуравновешенностей.

3. Представлены результаты по сравнению критических скоростей вращения, рассчитанных с частотой ротора ВД. Отмечаются значительные расхождения, особенно между податливой и расчётной моделями.

4. Представлены амплитудно-частотные характеристики и зависимости нагрузок на опоры. По полученным данным можно сделать заключение, что шлицевое соединение является элементом динамической системы, способным оказывать влияние на вынужденные колебания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В диссертации проведён анализ существующих источников по тематике работы; рассмотрены основные подходы и методы определения жёсткости шлицевого соединения и его влияния на систему.

2. Предложена математическая модель и алгоритм определения жёсткости эвольвентного шлицевого соединения с учётом нелинейности жесткостных характеристик. Для решения проблемы особых точек при применении вектора Эйлера разработан и внедрен в расчетные алгоритмы способ инкрементального разделения конечного поворота на тензор большого накопленного поворота и вектор малого дополнительного.

3. Проведено исследование работы шлицевого соединения с использованием метода конечных элементов с различными нагрузочными характеристиками, с учётом влияния податливости валов, зазоров по боковым поверхностям и трения в шлицевой паре. Полученные результаты позволяют выделить такой феномен, как центрирование, при работе шлицевого соединения.

4. Разработанная модель и алгоритм были успешно верифицированы по результатам прямого КЭ - моделирования. Разница при верификации составила не более 2% для коэффициентов жесткости.

5. С использованием разработанных модели и алгоритма проведен анализ динамического поведения роторной системы со шлицевым соединением, получены результаты по влиянию на критические скорости, амплитуды вибраций и нагрузки на опорные узлы.

6. Результаты диссертации внедрены в программный комплекс Dynamics R4, разрабатываемый научно-техническим центром по роторной динамике ООО «Альфа-Транзит».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 6033-80. Соединения шлицевые эвольвентные с углом профиля 30°. М.: Изд-во стандартов, 1993.
2. Crease, A.B. Forces generated by gear couplings // Proceedings of the International Conference on Flexible Couplings for High Powers and Speeds, 29.06 – 1.07 1977, pp. 572 - 578.
3. Dudley, D.W. How to Design Involute Splines // Product Engineering, Oct. 28, 1957, p.75
4. A.H. Elkhoy, M.A. Alfares. Misalignment loads in splined gear couplings // International Journal of Computer Applications in Technology, vol. 15, 2002, pp.128 - 137.
5. Guang Zhao, Zhansheng Liu, Feng Chen. Meshing Force of Misalignment Spline Coupling and the Influence on rotor system // International Journal of Rotating Machinery, vol. 2008, p. 1-8.
6. Z. Liu, G. Zhao “Modeling research on radial force in gear coupling with parallel misalignment” // 12th IFToMM World Congress, Besancon, 2007.
7. Clement Dupertuis, Jean-Louis Ligier. Contact pressure in misalignment spline couplings // Mechanics & Industry, vol. 21, 510 (2020), pp.1-12.
8. Xiangzhen Xue, Qixin Huo, Jian Liu, Jipeng Jia. Nonlinear dynamic load analysis of aviation spline coupling with mass eccentricity and misalignment // Advances in Mechanical Engineering, 2021, vol.13 (2), 1-19 p.
9. Xiangzhen Xue, Qixin Huo, Jian Liu. Nonlinear vibration characteristic of the involute spline coupling in aeroengine with the parallel misalignment // International journal of aerospace engineering, vol. 2021, 1-19 p.
10. J. Hong, D. Talbot, A. Kahraman. A stiffness formulation for spline joints // Journal of mechanical design, vol. 138, April 2016, (1-8 p.)

- 11.J. Hong, D. Talbot, A. Kahraman. A generalized semi-analytical load distribution model for clearance-fit, major-fit, minor-fit and mismatched splines // *Mechanical Engineering Science* 2015, pp. 1-13.
- 12.C.H. Wink, M. Nakandakar. Influence of gear loads on spline coupling // *Power Transmission Engineering*, February 2014, pp. 42- 49
- 13.Francesca Cura, Andrea Mura, Michele Gravina. Load distribution in spline coupling teeth with parallel offset misalignment // *Journal of mechanical engineering science*, vol. 227 (10), 2195 - 2205 p.
- 14.Yunbo Hu¹, Huibin Wang, Yuanqiang Tan, Likuan Jiang, Shengqiang Jiang. Study on the meshing force of misaligned gear coupling // *International Forum on Mechanical, Control and Automation (IFMCA 2016)*, vol. 113, pp. 452 – 458.
- 15.Jinyi Bai, Wenjing Wang ,Pingyu Zhou ,Yuguang Wang. Dynamic simulation analysis on axle spline of high-speed train gauge-change system // *Shock and Vibration*, vol. 2021, 19 p.
- 16.Francesca Cura, Andrea Mura. Analysis of a load application point in spline coupling teeth // *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*, 2014, vol. 15(4), 302-308 p.
- 17.Francesca Cura, Andrea Mura. Experimental and theoretical investigation about reaction moments in misaligned splined couplings // *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 45, 2014, 504–512 p.
- 18.T.C. Gupta, K. Gupta. Modeling of flexible coupling to connect misalignment flexible rotors supported on ball bearing // *Proceedings of ASME Turbo Expo 2014*, 14 p.
- 19.Xiangang Su, Hong Lu, Xinbao Zhang, Wei Fan, Yongquan Zhang. Analysis of dynamic characteristic for misalignment-spline gear shaft based on whole transfer matrix method // *JOURNAL OF VIBROENGINEERING*, May 2018, vol. 20, issue 3, pp. 1392 – 1408.

20. Qicheng Zhang, Weixi Li, Zhichao Liang, Jie Hong. Study on the stiffness loss and its affecting factors of the spline joint used in rotor system // Proceedings of ASME Turbo Expo 2014, 11 p.
21. Vincenzo Cuffaro, Francesca Cura, Andrea Mura. Analysis of the pressure distribution in spline couplings // Journal of mechanical engineering science, vol. 226 (11), 2852 - 2859 p.
22. Francesca Cura, Andrea Mura. Experimental procedure for evaluation of tooth stiffness in spline coupling including angular misalignment // MECHANICAL SYSTEMS AND SIGNAL PROCESSING, ISSN 0888-3270, STAMPA, vol. 40 (2013), pp.545-555.
23. Wei Fan, Hong Lu, Yongquan Zhang, Xiangang Su. Dynamic Characteristics of gear coupling and rotor system in transmission process considering misalignment and tooth contact analysis // MDPI, Processes 2020, vol. 8, 23 p.
24. Xiangzhen Xue, Qixin Huo, Karl D Dearn, Jian Liu, Junpeng Jia. Involute spline couplings in aero-engine: Predicting nonlinear dynamics response with mass eccentricity // Journal of Multi-body Dynamics, vol. 235(1), 2021, pp.75 – 92.
25. Jianping Jing, Teng Gao, Changmin Chen. The study on spline coupling dynamic coefficients and its impact on rotor stability // ICSV23, 2016, 8 p.
26. Zezeng Dai, Jianping Jin, Changmin Chen, Jiqing Cong. Extensive experimental study on the stability of rotor system with spline coupling // Proceedings of ASME Turbo Expo 2018, 11 p.
27. Simon Peter Jupp. Fundamental modelling of friction during the hot rolling of steel, PhD thesis, University of Sheffield.
28. H. Bolt, F. Friedel, G. Bourdon, X. Cornet, S. Ehlers and F. Steinert Investigation of the formation, constitution and properties of scale formed during the finishing rolling, cooling and coiling of thin hot strips // Technical Report No.3, Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities, 2004, 409 p.

29. H. Olsson, K.J. Astrom, C. Canudas de Wit, M. Gafvert, P. Lischinsky. Friction models and friction compensation // *European journal of control*, 1998, vol.4, 176-195 pp.
30. Al-Bender F. Fundamentals of friction modeling // *Proceedings ASPE Spring Topical Meeting on Control of Precision Systems*, ASPE, 2010, pp. 117 - 122.
31. Pennestri E., Rossi V., Salvini P., Valentini P.P. Review and comparison of dry friction force models // *Nonlinear Dynamics*, March 2016, 30 p.
32. Liu Y. F., Li J., Zhang Z.M., Hu X.H., Zhang W.J. Experimental comparison of five friction models on the same test-bed of the micro stick-slip motion system // *Mechanical Sciences*, 2015, vol. 6, pp. 15–28.
33. Калинин Д.В., Темис Ю.М. Анализ влияния сил трения в зацеплении на динамические нагрузки в зубчатых передачах // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2018. №. 6 (699). С. 32–43.
34. Низаметдинов Ф.Р. Разработка методики анализа влияния относительных движений с ограничениями во фланцевых соединениях на динамику авиационных двигателей: дисс. канд. техн. наук. Москва. 2021. 161 с.
35. R.A. Marmol, A.J. Smalley, J.A. Tecza. Spline coupling induced nonsynchronous rotor vibration // *Journal of mechanical design*, 1980, vol. 102/175
36. А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. Теория колебаний / Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1959, 916 с.
37. А.А. Харкевич. Автоколебания / Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва 1954, 172 с.
38. Дж. Хейл. Колебания в нелинейных системах / Издательство “МИР”, Москва 1966, 232 с.
39. И.А. Биргер, Я.Г. Пановко. Прочность. Устойчивость. Колебания. Том 3 / Издательство “Машиностроение”, Москва 1980, 285 с.
40. К. Магнус. Колебания. Введение в исследование колебательных систем / Издательство “МИР”, Москва 1982, 304 с.

41. В.Л. Попов. Механика контактного взаимодействия и физика трения / ФИЗМАТЛИТ, Москва 2013, 352 с.
42. Д.В. Хронин. Теория и расчёт колебаний в двигателях летательных аппаратов / Издательство “Машиностроение”, Москва 1950, 413 с.
43. Колесников И.В., Коропец П.А. Анализ динамических процессов в зубчатой муфте трансмиссии хвостового винта вертолѐта // Динамика и виброакустика, Т.5, №1, 2019, стр. 6-13.
44. G. Zhao, Z. Liu, Y. Wang, J. Zhang. Study of stabilities of rotor-bearing system with different types of couplings // ASME Turbo Expo, 2009, 10 p.
45. Haimin Z., Weifang C., Rupeng Z., Jie G., Meijun L. Modelling and dynamic analysis of spline-connected multi-span rotor system // Meccanica, 2020, vol. 55, 1413 - 1433 p.
46. Tong Wang, Yankai Wang, Meiru Liu, Zhicai Zhong. Stability analysis of rotor with a spline coupling // ISAES 2022, Journal of Physics: Conference Series, 13 p.
47. Мусалимов В.М., Сергушин П.А. Аналитическая механика. Уравнение Лагранжа второго рода. Свободные колебания / С-Пб: СПбГУ ИТМО, 2007, с. 53
48. Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Конечный элемент гибкого стержня с отдельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для задач нелинейной динамики конструкций летательных аппаратов // Труды МАИ, 2018, №. 99. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=91790> (дата обращения 01.12.2022)
49. Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Разработка конечного элемента гибкого стержня с отдельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов // Труды МАИ, 2017, №. 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76832> (дата обращения 01.12.2022)
50. Michel Geradin, Alberto Cardona. Flexible Multibody Dynamics / John Wiley & Sons, LTD, 2001, pp. 31–33.

- 51.П.А. Жилин. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве / СПб.: Нестор. 2001. 276 с.
- 52.Сорокин Ф.Д., Попов В.В., Низаметдинов Ф.Р. Торможение ротора, вызванное прохождением через резонанс // XXVI Международный симпозиум им. А.Г. Горшкова «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред»: Материалы симпозиума. Москва, 2020, Т.1, С.208–210.
- 53.Wan Z. et al. An improved time-varying mesh stiffness algorithm and dynamic modeling of gear-rotor system with tooth root crack // Engineering Failure Analysis, 2014, vol. 42. pp. 157–177.
- 54.Karpat F. et al. Effect of rim thickness on tooth root stress and mesh stiffness of internal gears / // ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Montreal, Canada. 2014. 7 p.
- 55.И.Ф. Образцов. Строительная механика летательных аппаратов / Москва, «Машиностроение». 1986. 114 – 117 с.
- 56.Попов В.В. Разработка методов анализа нелинейной динамики дифференциального редуктора турбовинтового двигателя: дисс. канд. техн. наук. Москва. 2023. 132 с.
- 57.Ibrahimbegović A. On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner’s beam theory: three–dimensional curved beam elements // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, vol. 122, Is. 1-2. pp. 11–26.
- 58.ANSYS Inc.Ansys mechanical user’s Guide. Canonsburg, PA. 2012. 1660 p.
- 59.Luciano D.I. Analisi F.E.M. su accoppiamenti scanalati: Tilting Moment e Friction Moment / Politecnico di Torino, 2020, 106 p.
- 60.С.М. Ванюхин, С.Н. Ломакин, А.И. Гришин, А.Ю. Шурыгин. Разработка и исследование конечно элементных моделей различных типов соединений с использованием “ANSYS®MECHANICAL” для определения их прочностных характеристик и усталостной прочности // Научное обозрение: электрон. журн., 2019, № 1, С. 1 – 15.

- 61.Х.К. Ишмуратов. Определение величины износа шлицевых соединений агрегатов силовых передач // *Universum: технические науки: электрон. научн. журн.*, 2019, № 6 (63).
- 62.Я.Г. Карячкин, С.А. Ефанов, Е.И. Дуданов. Динамический анализ деталей двухступенчатого редуктора в SOLIDWORKS // *Известия ТулГУ, Технические науки*, 2021, №9, С. 407 – 411.
- 63.Крючков А. Н., Плотников С. М., Сундуков А. Е., Сундуков Е. В. Вибродиагностика величины бокового зазора в зубчатом зацеплении дифференциального редуктора турбовинтового двигателя // *Вестник Московского авиационного института*, 2020, Т. 27, № 3, С. 198-208. DOI: 10.34759/vst-2020-3-198-208
- 64.Сундуков А. Е., Шахматов Е. В. Оценка влияния места постановки двигателя и типа воздушного винта на диагностические признаки износа зубьев его редуктора // *Вестник Московского авиационного института*, 2022, Т. 29, № 4, С. 208-218. DOI: 10.34759/vst-2022-4-208-218
- 65.Амелькин А. С., Киянский Т. Н. Влияние шлицевого соединения на геометрические параметры расположенного над ним подшипника // *Вестник Московского авиационного института*, 2008, Т. 15, № 3, С. 90-94.
- 66.Программная система для решения задач роторной динамики «DYNAMICS R4». Общество с ограниченной ответственностью "Альфа-Транзит", Роспатент Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018614888 от 19.04.2018 г.
- 67.Иванов А.В., Леонтьев М.К. Модальный анализ динамических систем роторов // *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*. 2005, №3, С. 31-35.
- 68.В. Хейлен, С. Ламменс, П. Сас. Модальный анализ: теория и испытания / ООО «Новатест», Московская обл., г. Химки, 2010 г, 319 с.
- 69.М.К. Леонтьев, А.В. Иванов, С.А. Дегтярев. Моделирование роторных динамических систем с пространственным расположением валов // *Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева*, 2012, №2, С. 231 – 239.

70.DYNAMICS R4. Program system for analysis of rotor dynamics of turbomachines. UserGuide. Alfa-Tranzit Co., Ltd. (2023). URL: <https://rotordynamics.ru/wp-content/uploads/2022/06/obuchenie-rukovodstvo-polzovatelya.pdf>

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ГТД – газотурбинный двигатель

ШС – шлицевое соединение

МКЭ – метод конечных элементов

КЭ – конечный элемент

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений