

Казакова Анастасия Олеговна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ**

05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
заслуженный деятель науки РФ,
д.ф.-м.н., профессор Терентьев А.Г.

Чебоксары – 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	13
§ 1.1. Основные понятия и уравнения теории напряженно-деформированного состояния сплошной среды	14
§ 1.2. Кручение стержня произвольного сечения	17
§ 1.3. Плоская задача теории упругости	22
§ 1.4. Изгиб тонких пластинок	27
§ 1.5. Движение цилиндра в вязкой жидкости	31
§ 1.6. Классификация математических моделей, описываемых полигармоническим уравнением	33
§ 1.7. Выводы по главе 1	34
ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ К РЕШЕНИЮ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ	36
§ 2.1. Аналитические представления полигармонических функций	36
§ 2.2. Аналитическое решение основной краевой задачи в односвязной и в двусвязной области	43
§ 2.3. Нахождение коэффициентов приближенным методом коллокации	48
§ 2.4. Тестовые примеры	54
Пример 2.1. Аналитическое решение основной краевой задачи	54
Пример 2.2. Применение метода коллокации для односвязной области	56
Пример 2.3. Применение метода коллокации для двусвязной области	59
§ 2.5. Выводы по главе 2	61

ГЛАВА 3. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	62
§ 3.1. Интегральная формула Грина	63
§ 3.2. Интегральные соотношения для полигармонических функций.....	65
§ 3.3. Исследование функций, входящих в интегральные соотношения.....	70
§ 3.4. Построение численного алгоритма решения краевых задач для полигармонического уравнения на основе метода граничных элементов	75
§ 3.5. Обоснование сходимости, оценки точности и основные преимущества предложенного метода	81
§ 3.6. Тестовые примеры	84
Пример 3.1. Осесимметричная задача Дирихле в пространственной области, ограниченной эллипсоидом	85
Пример 3.2. Основная краевая задача в плоской односвязной области	86
Пример 3.3. Задача Дирихле в плоской двусвязной области	88
Пример 3.4. Задача Неймана в плоской односвязной области	89
Пример 3.5. Задача Дирихле в области, ограниченной астроидой.....	91
§ 3.7. Выводы по главе 3.....	92
ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД С ПРИМЕНЕНИЕМ РАЗРАБОТАННОГО АЛГОРИТМА.....	93
§ 4.1. Применение МГЭ к решению задачи кручения стержня.....	94
Пример 4.1. Кручение стержня эллиптического сечения.....	97
§ 4.2. Численное решение плоской задачи теории упругости	98
Пример 4.2. Решение задачи теории упругости для односвязной области	101
Пример 4.3. Задача Ламе.....	103
Пример 4.4. Эксцентрическая труба под равномерным давлением	105
Пример 4.5. Плоская задача теории упругости в трехсвязной области	107
§ 4.3. Численное моделирование изгиба тонких пластинок.....	109
Пример 4.6. Изгиб эллиптической пластинки с заделанными краями.....	112

Пример 4.7. Задача II для круглой пластинки.....	113
Пример 4.8. Круглая пластинка под линейно изменяющейся нагрузкой.....	114
§ 4.4. Движение цилиндра в вязкой жидкости	115
Пример 4.9. Поступательное движение круглого цилиндра.....	116
§ 4.5. Описание комплекса программ	117
§ 4.6. Численное моделирование некоторых актуальных задач.....	122
4.6.1. Эллиптическая труба под равномерным давлением.....	122
4.6.2. Изгиб квадратной пластинки с заделанными краями.....	123
4.6.3. Движение эллиптического цилиндра в вязкой жидкости.....	125
4.6.4. Задача о трубе, погруженной в весомую жидкость	127
§ 4.7. Выводы по главе 4.....	130
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	131
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Интеграл Стильеса и условия его существования	133
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Геометрия биполярных координат	135
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Листинги программ комплекса	140
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	155

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Математические модели многих задач механики сплошных сред приводят к гармонической и бигармонической проблеме. Однако удобные аналитические выражения могут быть получены лишь для некоторых областей частного вида. В случае же областей сложной формы незаменимым является применение численных методов. Класс полигармонических уравнений порядка выше второго также весьма важен с точки зрения приложений, так как многие задачи математической физики (например, теория упругих пластинок и оболочек) приводят к уравнениям этого класса. К оболочкам относятся, в частности, тонкостенные пространственные системы, которым можно придать обтекаемую форму и на их основе получить относительно легкие конструкции. Это имеет огромное значение в авиационно-космической промышленности, а также при конструировании высотных зданий, автомобилей и подводных объектов в процессе освоения морских глубин, что представляется весьма важным для решения энергетических проблем в недалеком будущем. Поэтому актуальным остается вопрос о разработке эффективных средств компьютерного моделирования и численных методов решения различных краевых задач для полигармонического уравнения в произвольной области.

Настоящая работа посвящена вопросам математического описания явлений, изучаемых в гидромеханике и теории упругости и сводящихся к решению краевых задач для полигармонического уравнения. Особое внимание уделено плоским и осесимметричным пространственным областям со сложными границами, когда нахождение аналитического решения затруднительно или даже невозможно. Для решения таких задач предлагается два различных численных метода: один из них основан на применении конформного отображения и метода коллокации и позволяет рассматривать плоские односвязные и двусвязные области; второй метод является более универсальным и применяется для решения различных краевых задач для полигармонического уравнения в произвольной плоской и осесимметричной пространственной области.

Степень разработанности проблемы. Классы гармонических и бигармонических функций в разное время изучались такими выдающимися математиками как Г.В. Колосов [43], Ф.Д. Гахов [20], Н.И. Мусхелишвили [51] и другими учеными. Благодаря их основополагающим работам в математической теории упругости, классическая теория краевых задач для аналитических функций стала достаточно хорошо систематизированным разделом математического моделирования, и в изучение были введены полианалитические функции.

Впервые устойчивый интерес к полигармоническим уравнениям проявился в работах И.Н. Векуа [11], где эллиптические уравнения высших порядков изучены с использованием аппарата теории аналитических функций. В дальнейшем изучение краевых задач для полианалитических функций велось в работах В.С. Рогожина [58], М.П. Ганина [19], А.В. Бицадзе [7], И.А. Соколова [66], В.И. Жегалова [24], К.М. Расулова [57], Н.Т. Хопа [83], Н. Vegehr [88] и других известных математиков. За последние десятилетия был получен ряд значимых результатов в области теории полигармонических уравнений. В частности: изучены некоторые свойства полигармонических функций (В.П. Михайлов [50], А.В. Бицадзе [6] и др.); рассмотрены краевые задачи для полигармонического уравнения в различных формулировках (Болотин И.Б. [8] и др.); получены условия разрешимости краевых задач для некоторых областей частного вида (Б.Е. Кангужин, Т.Ш. Кальменов, Б.Д. Кошанов, М.Ю. Немченко [37] – [39] и др.); доказаны теоремы существования и единственности (Б.Х. Турметов, М.Т. Ильясова [77] и др.); решены некоторые краевые задачи в круге, полосе и некоторых других областях (В.И. Жегалов [24], Б.Е. Карачик [41] и др.).

Численные алгоритмы решения задач гидродинамики, приводящих к гармоническим уравнениям, основанные на методах граничных элементов (МГЭ), были предложены в 80-е гг. XX века в работах П. Бенерджи и Р. Баттерфилд [5], А.Г. Терентьева и К.Е. Афанасьева [69], L.Elliott и др. [93].

Насколько нам известно, до сих пор не разработаны эффективные численные методы для решения краевых задач для полигармонических уравнений выс-

ших порядков в произвольной области. Более того, известные теоретические результаты не являются достаточными для построения таких алгоритмов.

Целью настоящей работы является создание методов математического моделирования явлений, изучаемых в механике сплошных сред и приводящих к краевым задачам для полигармонического уравнения в произвольной области.

Для достижения указанной цели были решены следующие **задачи**:

- проанализировать подходы к моделированию явлений, изучаемых в гидродинамике и теории упругости;

- выявить, какие задачи механики сплошных сред, приводящие к полигармоническим уравнениям, являются актуальными и нуждаются в дополнительном исследовании;

- разработать и реализовать эффективные алгоритмы численного решения краевых задач для полигармонического уравнения в произвольной плоской и осесимметричной пространственной области;

- провести тестовые расчеты, дать оценки точности разработанных алгоритмов и сравнить их с другими численными методами применительно к рассматриваемому классу задач;

- разработать на основе предложенных алгоритмов и реализовать эффективные методы численного моделирования в гидродинамике и теории упругости;

- провести вычислительный эксперимент по моделированию исследуемых явлений и сравнить полученные результаты с известными точными решениями для некоторых областей;

- получить решения некоторых актуальных задач механики сплошных сред, используя математическое моделирование и разработанные методы численного решения полигармонических уравнений.

Научная новизна результатов диссертационного исследования состоит в том, что впервые:

- исследованы вопросы математического моделирования в механике сплошных сред с использованием общей теории полигармонических функций, что по-

зволяет применить один и тот же подход для решения различных задач гидродинамики и теории упругости;

- предложен способ решения основной краевой задачи для полигармонического уравнения, основанный на методах конформного отображения и коллокации, позволяющий рассмотреть произвольные односвязные и двусвязные плоские области;

- разработан эффективный численный алгоритм решения краевых задач для полигармонического уравнения в произвольной плоской и осесимметричной пространственной области на основе интегральных соотношений Грина и метода граничных элементов, обоснована корректность предлагаемого метода;

- предложен метод численного моделирования кручения стержней, изгиба тонких пластинок, плосконапряженного состояния и движения тел в вязкой жидкости с использованием методов решения полигармонических уравнений, благодаря чему можно расширить класс рассматриваемых областей и граничных условий для задач, связанных с этими явлениями;

- проведено численное моделирование некоторых актуальных задач механики сплошных сред с помощью предложенного метода (в частности, решена задача об определении напряженного состояния трубы произвольного сечения, погруженной в весомую жидкость).

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Математические модели механики сплошных сред, исследуемые с единой точки зрения как приводящие к краевым задачам для полигармонического уравнения, в том числе высших порядков.

2. Метод решения основной краевой задачи для полигармонического уравнения в произвольной односвязной и двусвязной плоской области с применением методов конформного отображения и коллокации.

3. Эффективный численный метод решения различных краевых задач для полигармонического уравнения в произвольной плоской и осесимметричной пространственной области, обладающий высокой степенью точности.

4. Универсальный численный метод моделирования различных задач механики сплошных сред и полученные с его помощью решения новых задач.

Достоверность и обоснованность результатов, полученных в ходе диссертационного исследования, обеспечивается хорошей согласованностью результатов проведенных вычислительных экспериментов с точными аналитическими решениями тестовых примеров, а также тем, что разработанные алгоритмы основаны на хорошо зарекомендовавшей себя на практике применении к другим классам задач методологии.

Практическая ценность результатов работы заключается в том, что рассмотренные в ней математические модели механики сплошных сред имеют множество приложений в таких значимых отраслях как авиационная и ракетно-космическая промышленность, кораблестроение, освоение морских глубин. Результаты диссертационного исследования обладают и теоретической ценностью: они могут представлять значительный интерес для научных коллективов, занимающихся проблемами механики сплошных сред, исследованием краевых задач в классах полианалитических функций и численными методами их решения. Кроме того, результаты диссертационной работы могут быть использованы в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов и аспирантов университетов, а также при разработке образовательных ресурсов по математическому моделированию, численным методам и механике сплошных сред.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В соответствии с формулой специальности 05.13.18. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в рамках диссертационного исследования применено математическое моделирование, разработаны численные методы и комплекс программ для решения научных проблем: фундаментальных (в теории краевых задач для полигармонического уравнения) и прикладных (в области механики сплошных сред).

Результаты диссертационного исследования соответствуют следующим пунктам паспорта научной специальности 05.13.18. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»:

- п. 2. «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей» соответствуют результаты, полученные при исследовании математических моделей механики сплошных сред, а также предложенный метод решения основной краевой задачи для полигармонического уравнения в произвольной односвязной и двусвязной плоской области, основанный на аналитическом методе конформного отображения и приближенном методе коллокации;

- п. 3. «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий» соответствуют разработка и обоснование численного метода решения краевых задач для полигармонического уравнения в произвольной плоской и осесимметричной пространственной области, построение с применением современных компьютерных программ тестовых примеров, свидетельствующих об эффективности разработанного численного алгоритма;

- п. 4. «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» соответствует реализация предложенного численного алгоритма в виде комплекса программ, позволяющих решить различные проблемы математического моделирования в механике сплошных сред, а также проведенные вычислительные эксперименты, подтверждающие высокую точность предложенных численных методов.

- п. 5. «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента» соответствует проведенное численное исследование актуальных задач гидродинамики и теории упругости с помощью предложенных методов математического моделирования различных граничных условий для об-

ластей со сложными границами и решения краевых задач для полигармонического уравнения.

Структура и содержание работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, трех приложений и списка литературы (97 наименований). Нумерация формул, таблиц и рисунков сквозная в каждой главе.

В настоящей работе рассматриваются вопросы математического описания и численного моделирования явлений, изучаемых в механике сплошных сред, математические модели которых представляются полигармоническими уравнениями, в том числе высшего порядка.

В главе 1 рассматриваются математические модели некоторых явлений, изучаемых в теории упругости и гидродинамике, как с классической точки зрения, так и в несколько видоизмененной форме, что позволяет все рассмотренные задачи свести к решению полигармонических уравнений. Показано, что краевые задачи, к которым приводят рассмотренные модели, могут быть классифицированы по аналогии с краевыми задачами для гармонического уравнения.

В главе 2 кратко излагается общая теория полигармонических функций, вводятся основные понятия, дается постановка основной краевой задачи, которая имеет немало приложений. С применением методов теории функций комплексного переменного получено аналитическое решение основной краевой задачи для односвязной и двусвязной плоской области в виде степенного ряда, для нахождения коэффициентов которого предложен приближенный метод коллокации. Рассмотрены тестовые примеры, подтверждающие эффективность такого подхода.

Глава 3 посвящена построению численного алгоритма для решения краевых задач для полигармонического уравнения в произвольных плоских и осесимметричных пространственных областях. Показано, что полигармоническое уравнение сводится к системе интегральных уравнений относительно дополнительных полигармонических функций более низких порядков, которая методом граничных элементов может быть представлена в виде системы линейных алгебраических

уравнений. Показано, что основная краевая задача для полигармонического уравнения эквивалентна смешанной задаче. Численный метод иллюстрируется тестовыми примерами решения задач для полигармонических уравнений второго, третьего и четвертого порядков.

В главе 4 разработанный алгоритм применяется для численного моделирования задач гидродинамики (движение цилиндра в вязкой жидкости) и теории упругости (плоская задача теории упругости, задачи кручения стержней и изгиба тонких пластинок). Рассмотренные тестовые примеры подтверждают высокую точность предложенного метода и эффективность его применения для решения различных прикладных задач. Кроме того, в главе 4 содержится описание разработанного программного комплекса, а также приведены результаты решений некоторых актуальных задач механики сплошных сред.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту.

В приложениях А и Б изложены некоторые дополнительные теоретические сведения, которые носят вспомогательный характер и которые нецелесообразно было включать в основную часть диссертации. В приложении В приведены листинги некоторых программ разработанного программного комплекса.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Полигармоническим (или n -гармоническим) уравнением называется уравнение вида

$$\Delta^n u = 0,$$

где Δ – оператор Лапласа, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1.1. Полигармонической функцией n -го порядка в некоторой области T евклидова пространства \mathbb{R}^2 или \mathbb{R}^3 будем называть функцию u действительных переменных, определенную и непрерывную в области T , имеющую в этой области непрерывные частные производные до порядка $2n$ включительно и удовлетворяющую всюду в T дифференциальному уравнению $\Delta^n u = 0$.

Математические модели многих задач механики сплошных сред описываются гармоническими ($n = 1$) и бигармоническими ($n = 2$) уравнениями. Построение этих моделей основывается на фундаментальных уравнениях теории напряженно-деформированного состояния сплошной среды, которые можно разделить на три группы: *статические*, *геометрические* и *физические*. Выводу этих уравнений посвящен параграф 1.1, который носит реферативный характер и необходим для дальнейшего изложения. Далее в этой главе рассматриваются математические модели некоторых явлений, изучаемых в теории упругости и гидродинамике, как с классической точки зрения, так и в несколько видоизмененной форме, что позволяет все рассмотренные задачи свести к решению полигармонических уравнений, в том числе высшего порядка. В параграфе 1.2 рассмотрена задача кручения стержня произвольного, в том числе многосвязного, сечения, которая сводится к нахождению гармонической функции по заданной на границе сечения ее нормальной производной. Параграф 1.3 посвящен изучению плоской задачи теории упругости, которая, как известно, сводится к решению краевой задачи для бигармонического уравнения; основное внимание в этом параграфе уделено моделированию граничных условий, в том числе для общего случая многосвязной области.

В параграфе 1.4 рассматривается изгиб тонких пластинок произвольной формы; проблема определения характеристик напряженного состояния пластинки приводит к краевой задаче для неоднородного бигармонического уравнения, которое, как показано в этом параграфе, в ряде случаев можно свести к однородному полигармоническому уравнению высшего порядка, и такая модель может представляться более удобной. В параграфе 1.5 исследуется движение цилиндра в вязкой жидкости, показано, что задача об определении гидродинамических характеристик жидкости сводится к краевой задаче для бигармонического уравнения в плоской двусвязной области. Рассмотренные в параграфах 1.2 – 1.5 задачи механики сплошных сред позволяют сделать некоторые обобщения и дать классификацию математических моделей, описываемых полигармоническими уравнениями; этому посвящен параграф 1.6. В параграфе 1.7 сформулированы основные выводы по главе 1.

Некоторые результаты этой главы опубликованы в работах автора [30], [34].

§ 1.1. Основные понятия и уравнения теории напряженно-деформированного состояния сплошной среды

Этот вводный параграф носит реферативный характер. Сведения, представленные в нем, необходимы для дальнейшего изложения и построения некоторых математических моделей механики сплошных сред.

1°. Рассматривается произвольное тело, которое находится под действием поверхностных и объемных нагрузок. Пусть p_x, p_y, p_z – проекции интенсивности поверхностной нагрузки на координатные оси, а F_x, F_y, F_z – проекции интенсивности объемной нагрузки. Под действием заданных нагрузок в теле появляются напряжения. Если вырезать из рассматриваемого тела элементарный параллелепипед, ребра которого параллельны координатным осям (рис. 1.1), то на каждой грани параллелепипеда действуют три напряжения, совокупность которых образует тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Первый индекс указывает площадку, на которой действует напряжение, а второй – его направление.

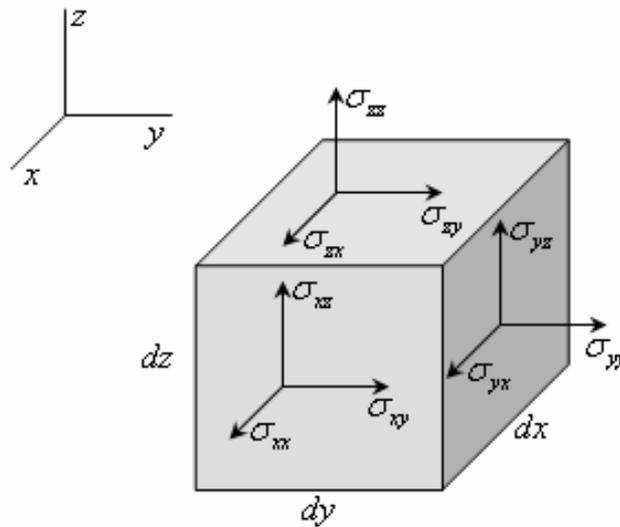


Рисунок 1.1.

В соответствии с *законом парности касательных напряжений* (см. [49]) $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$, т.е. тензор напряжений является симметричным относительно главной диагонали. Все компоненты тензора напряжений в сплошной среде являются непрерывными функциями координат, которые определяют непрерывное поле напряжений в объеме тела. Чтобы каждый элемент тела был в равновесии в своем взаимодействии с соседними элементами, должны выполняться три дифференциальных уравнения равновесия (см., например, [73]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

2°. При действии внешних нагрузок точки деформируемого тела перемещаются в пространстве. Пусть u_x , u_y , u_z – проекции вектора перемещений некоторой точки M на оси координат. Предполагается, что перемещения являются непрерывными функциями пространственных координат, кроме, быть может, особых точек, линий и поверхностей. Если рассмотреть поведение элементарного параллелепипеда, вырезанного в недеформированном состоянии в окрестности точки M , то в результате деформации он, вообще говоря, изменит свой объем и форму. Предполагая деформацию малой, ее представляют в виде последовательности шести простейших деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Уравнения (1.2) называются *геометрическими уравнениями Коши* и выражают связь компонент деформации с перемещениями. Геометрический смысл деформаций описан, например, в [60].

Из (1.2) видно, что если дано непрерывное поле перемещений \mathbf{u} , то сразу определяются соответствующие ему компоненты деформации. Однако если заданы шесть компонент деформации, то нельзя утверждать, что им отвечает какое-либо непрерывное поле перемещений, т.е. что деформации являются *совместными*. Совместными, они должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 0, & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 0, & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= 0, & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Эти уравнения называются *уравнениями совместности деформаций*, а также *уравнениями сплошности* или *неразрывности*, и носят имя Сен-Венана.

3°. Пусть напряжения возникают только при деформации. Тогда можно считать, что компоненты тензора напряжений являются функциями деформаций. Эти функции можно разложить в степенной ряд и сохранить лишь линейные члены. Среды, для которых выполняется такая линейная зависимость, называются *линейно упругими средами*. Пусть, кроме того, упругие свойства среды не зависят от ориентации, т.е. в любом направлении свойства среды одинаковые (*изотропная среда*). Тогда справедливы соотношения *закона Гука* в прямой форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}); & \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}); \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} + \sigma_{zz}); & \varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G}; & \varepsilon_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{G}; & \varepsilon_{xz} &= \frac{\sigma_{xz}}{G}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где E и G – модули упругости при растяжении и сдвиге, а ν – коэффициент Пуассона. Для изотропного материала они связаны зависимостью $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Разрешая (1.4) относительно напряжений, можно получить закон Гука в обратной форме:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}); & \sigma_{yy} &= 2G\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}); \\ \sigma_{zz} &= 2G\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}); & \sigma_{xy} &= G\varepsilon_{xy}; & \sigma_{yz} &= G\varepsilon_{yz}; & \sigma_{xz} &= G\varepsilon_{xz}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu} = \frac{\nu G}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ – параметр Ламе.

§ 1.2. Кручение стержня произвольного сечения

Рассмотрение математических моделей в механике сплошных сред целесообразно начать с модели кручения призматического стержня произвольного сечения, поскольку эта модель описывается полигармоническим уравнением самого низкого порядка, т.е. гармоническим.

1°. Пусть цилиндр произвольного сечения с боковой поверхностью S и торцами S_1 и S_2 находится под действием только внешних крутящих моментов M и $-M$, приложенных на торцах цилиндра (рис. 1.2).

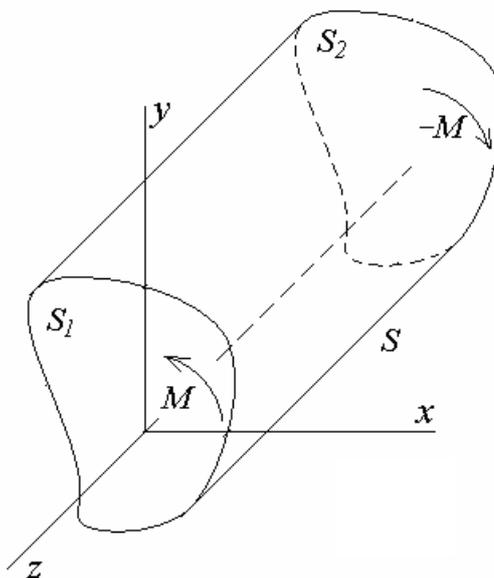


Рисунок 1.2.

Математическая модель задачи о напряженно-деформированном состоянии стержня описывается уравнениями равновесия (1.1), шестью уравнениями (1.5), связывающими компоненты тензора напряжений с деформациями, и шестью геометрическими уравнениями Коши (1.2).

Пусть под действием моментов M и $-M$ верхнее основание малого слоя толщины dz цилиндра поворачивается относительно неподвижного основания S_2 на малый угол $d\varphi$, тогда вектор перемещения всех его точек

$$d\mathbf{u} = d\varphi \mathbf{k} \times \mathbf{r} = \frac{d\varphi}{dz} \mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) dz.$$

Для однородного цилиндра можно предположить, что $d\varphi / dz = \text{const} = \alpha$, тогда

$$u_x = -\alpha yz, \quad u_y = \alpha xz. \quad (1.6)$$

Кроме того, точки перемещаются и вертикально, т.е. компонента u_z является функцией от координат x и y . Для малых деформаций ее можно искать в виде

$$u_z = \alpha f(x, y). \quad (1.7)$$

Подставляя (1.6) и (1.7) в (1.2), находим:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right).$$

Из (1.5) следует, что

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = G \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \right), \quad \sigma_{xz} = G \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right). \quad (1.8)$$

С учетом последних формул видно, что первые два уравнения равновесия (1.1) удовлетворяются автоматически, а третье приводится к виду

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad (1.9)$$

т.е. задача о кручении сводится к решению уравнения Лапласа.

2°. Функция, удовлетворяющая уравнению (1.9), называется *гармонической функцией*. Для ее нахождения необходимо задать краевое условие. Пусть s – дуговая абсцисса контура C , представляющего границу перпендикулярного сечения цилиндра, а \mathbf{t} и \mathbf{n} – единичные вектора касательной и нормали к нему, тогда

$$\begin{aligned} dx &= ds \cos(\mathbf{t}, x) = -ds \cos(\mathbf{n}, y), \\ dy &= ds \cos(\mathbf{t}, y) = ds \cos(\mathbf{n}, x). \end{aligned} \quad (1.10)$$

В данной задаче краевое условие получается из условия на боковой поверхности S : $\mathbf{p} = 0$. Вектор напряжения $\mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}$, где

$$p_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z, \quad p_y = \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z, \quad p_z = \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z,$$

а вектор нормали $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j}$, откуда имеем три условия на боковой поверхности

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y = 0, \quad \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y = 0, \quad \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y = 0. \quad (1.11)$$

Первые два условия выполняются тождественно, третье условие принимает вид

$$G \frac{\alpha}{2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right) \cos(\mathbf{n}, x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \right) \cos(\mathbf{n}, y) \right] = 0.$$

Отсюда следует, что нормальная производная искомой функции на контуре

$$\frac{\partial f}{\partial n} = y \cos(\mathbf{n}, x) - x \cos(\mathbf{n}, y) = y \frac{dy}{ds} + x \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right). \quad (1.12)$$

Полученную модель (уравнения (1.9) и (1.12)) называют *задачей Неймана* для уравнения Лапласа. Как видно, модель не зависит от модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν , т.е. *функция кручения* $f(x, y)$ определяется чисто геометрически для всех стержней с одинаковыми сечениями независимо от материала.

В частности, для цилиндрического стержня с круговым сечением радиуса R имеем: поскольку окружность определяется уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, то на ней, в соответствии с граничным условием (1.12), нормальная производная искомой функции равна нулю. Следовательно, искомая функция должна быть постоянной во всей внутренней области ($f = \text{const}$), и ее производные $\partial f / \partial x = 0$, $\partial f / \partial y = 0$.

3°. Следует отметить, что некоторые авторы рассматривают сопряженную функцию, что позволяет перейти к задаче Дирихле. Пусть существует функция $g(x, y)$, которая определяет компоненты тензора напряжений формулами:

$$\sigma_{xz} = G\alpha \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -G\alpha \frac{\partial g}{\partial x}. \quad (1.13)$$

Из (1.8) и (1.13) следует, что функции f и g связаны между собой уравнениями

$$2 \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} - y, \quad 2 \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} - x. \quad (1.14)$$

Продифференцировав первое равенство по y , второе по x и сложив, приходим к *уравнению Пуассона* (неоднородное уравнение) вида

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -1. \quad (1.15)$$

Для вывода краевых условий следует использовать третье уравнение (1.11)

$$\sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y = G\alpha \left(\frac{\partial g}{\partial y} n_x - \frac{\partial g}{\partial x} n_y \right) = G\alpha \left(\frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) = 0,$$

т.е. производная по дуге контура $\partial g / \partial s = 0$. Следовательно, искомая функция на контуре принимает постоянное значение $g = c = \text{const}$.

Поскольку в (1.13) входят только производные от искомой функции, то граничное условие можно записать в виде

$$g = 0. \quad (1.16)$$

Можно рассмотреть эту же модель и с несколько другой точки зрения. Очевидно, что поскольку $\Delta g = -1$, то $\Delta^2 g = 0$. И тогда полученную задачу можно рассматривать как *краевую задачу для бигармонического уравнения с граничными условиями (1.15) и (1.16)*.

Однако условие (1.16) справедливо лишь для односвязной области, т.е. для сплошного стержня. Если же стержень полый или имеется несколько полых отверстий, то область S будет многосвязной (рис. 1.3).

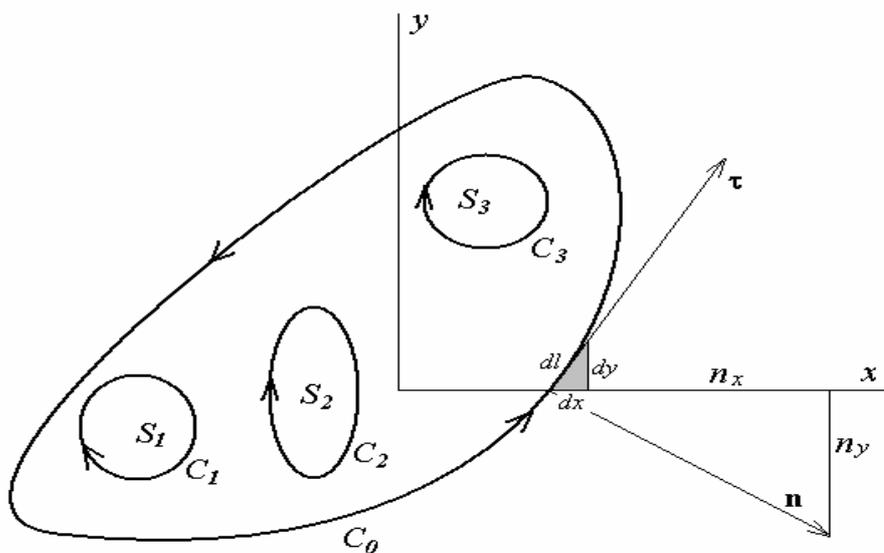


Рисунок 1.3.

На каждом контуре C_k функция g будет принимать постоянное значение $g_k = \text{const}$. На одном из контуров (например, на внешней замкнутой границе C_0) можно считать $g = 0$. Значения g_k на других границах определяются из условия однозначности функции кручения $f(x, y)$, тогда $\oint_{C_k} df = 0$. С учетом (1.14)

$$\begin{aligned} \oint_{C_k} df &= \oint_{C_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) = 2 \oint_{C_k} \left(\frac{\partial g}{\partial y} dx - \frac{\partial g}{\partial x} dy \right) + \oint_{C_k} (y dx - x dy) = \\ &= - \oint_{C_k} \left(\frac{\partial g}{\partial x} n_x + \frac{\partial g}{\partial y} n_y \right) ds - \oint_{C_k} (x n_x + y n_y) ds = - \oint_{C_k} \frac{\partial g}{\partial n} ds - 2 \iint_{S_k} dx dy = - \oint_{C_k} \frac{\partial g}{\partial n} ds - 2S_k, \end{aligned}$$

откуда

$$\oint_{C_k} \frac{\partial g}{\partial n} ds = -2S_k. \quad (1.17)$$

§ 1.3. Плоская задача теории упругости

Определение упругого равновесия в плоской задаче теории упругости сводится к решению краевых задач для бигармонического уравнения. Особое внимание уделено построению краевых условий для односвязных и для многосвязных областей. В последнем случае краевые условия содержат константы, для определения которых необходимо использовать условия однозначности смещений.

1°. Пусть из тонкой пластины (толщина ее должна стремиться к нулю), нагруженной в ее плоскости, выделен элемент с малыми размерами dx , dy и δ . На его гранях в общем случае возникают напряжения σ_{xx} , σ_{yy} , $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$; на боковых гранях напряжения отсутствуют: $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$, $\sigma_{zz} = 0$. Предполагается, что эти напряжения равны нулю и во внутренних точках элемента, тогда описанное состояние называется *плоским напряженным состоянием тела*. Задача об определении такого состояния приводит к математической модели, описанной ниже.

Пусть задана произвольная плоская область T , и пусть граница этой области ∂T задана функциями дуговой координаты ($s \in \partial T$): $x = x(s)$, $y = y(s)$. Требуется определить компоненты тензора напряжений в каждой точке области T . На границе области заданы нормальное и касательное напряжения $p_n(s)$ и $p_\tau(s)$, связанные с вектором $\mathbf{p} = [p_x(s), p_y(s)]$ внешнего напряжения равенствами

$$p_x = p_n \tau_y + p_\tau \tau_x, \quad p_y = p_\tau \tau_y - p_n \tau_x,$$

где $\tau_x = x'_s$, $\tau_y = y'_s$ - компоненты касательного единичного вектора.

На границе области внешнее напряжение выражается через компоненты тензора напряжений формулами

$$\sigma_{xx} \tau_y - \sigma_{xy} \tau_x = p_x, \quad \sigma_{xy} \tau_y - \sigma_{yy} \tau_x = p_y. \quad (1.18)$$

Равенства (1.18) – граничные условия для определения тензора напряжений.

Для плоской задачи уравнения равновесия (1.1) принимают вид:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + F_x = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0. \quad (1.19)$$

Из шести уравнения совместности деформаций (1.3) остается только одно:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 0. \quad (1.20)$$

Если принять, что объемные силы $F_x = const$, $F_y = const$, то дифференцируя первое уравнение (1.19) по x , второе – по y и складывая их, можно получить

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right). \quad (1.21)$$

Подставляя теперь в (1.20) выражения деформаций через напряжения (1.4) и используя (1.21), получим

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (1.22)$$

Это уравнение называется *уравнением Леви*.

2°. Пусть $F_x = 0$, $F_y = 0$. Предполагается, что существует такая функция φ , называемая *функцией напряжений*, что через нее напряжения, возникающие внутри области T , выражаются формулами

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (1.23)$$

Поскольку напряжения должны удовлетворять уравнению Леви (1.22), то функция напряжений φ , очевидно, является *бигармонической*, т.е.

$$\Delta^2 \varphi = 0. \quad (1.24)$$

Граничные условия (1.18) с учетом (1.23) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \tau_y + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \tau_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \tau_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \tau_y = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = p_x(s), \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tau_x - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \tau_y &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \tau_x - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \tau_y = -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = p_y(s). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\int_0^s p_y(s) ds + C_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int_0^s p_x(s) ds + C_2,$$

где C_1, C_2 – постоянные, равные значениям производных функции φ в точке $s = 0$.

Нормальная и касательная производные функции напряжений:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tau_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tau_x = -y'_s \int_0^s p_y(s) ds - x'_s \int_0^s p_x(s) ds + C_1 y'_s - C_2 x'_s, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tau_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tau_y = -x'_s \int_0^s p_y(s) ds + y'_s \int_0^s p_x(s) ds + C_1 x'_s + C_2 y'_s. \quad (1.26)$$

Из равенства (1.26) определяется функция напряжений

$$\varphi(s) = \int_0^s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tau_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tau_y \right) ds + C_3,$$

где C_3 – постоянная, равная значению функции напряжений в точке $s = 0$.

Если вычислить интеграл в последнем равенстве по частям, получится

$$\begin{aligned} \varphi(s) = & \int_0^s (x(s)p_y(s) - y(s)p_x(s)) ds + \\ & + x(s) \left(C_1 - \int_0^s p_y(s) ds \right) + y(s) \left(C_2 + \int_0^s p_x(s) ds \right) + C_3. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Таким образом, математическая модель плоской задачи теории упругости приводит к краевой задаче для бигармонического уравнения (1.24) с граничными условиями (1.25) и (1.27), т.е. на границе плоской области T заданы значения самой функции напряжений и ее нормальной производной.

3°. Если область T является односвязной, то константы C_1, C_2, C_3 можно задать произвольно (например, принять их равными нулю), т.к. они входят в несущественную для напряжений линейную часть функции напряжений. В случае многосвязной области можно положить их равными нулю на одном (например, наружном) контуре, на других контурах константы не могут быть выбраны произвольно. Уравнения для определения неизвестных констант можно получить из условия однозначности смещений. Как показано в [23], перемещение любого элемента области складывается из поступательного перемещения $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ и поворота относительно оси z .

Перемещения u_x и u_y определяются равенствами (см. [74]):

$$u_x = \frac{1}{2G} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4}{1+\nu} p \right), \quad u_y = \frac{1}{2G} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{4}{1+\nu} q \right), \quad (1.28)$$

где p и q – сопряженные гармонические функции, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\Delta \varphi}{4}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Ввиду однозначности функции u_x , интеграл от ее полного дифференциала по замкнутому контуру должен быть равен нулю, поэтому

$$\begin{aligned} \oint_{(\partial T)_k} d\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{4}{1+\nu}p\right) &= -\oint_{(\partial T)_k} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}dy\right) + \frac{4}{1+\nu} \oint_{(\partial T)_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right) = \\ &= \oint_{(\partial T)_k} p_y(s)ds - \frac{4}{1+\nu} \oint_{(\partial T)_k} \left(\frac{\partial q}{\partial x}dy - \frac{\partial q}{\partial y}dx\right) = \oint_{(\partial T)_k} p_y(s)ds - \frac{4}{1+\nu} \oint_{(\partial T)_k} \frac{\partial q}{\partial n}ds = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\oint_{(\partial T)_k} \frac{\partial q}{\partial n}ds = \frac{1+\nu}{4} \oint_{(\partial T)_k} p_y(s)ds. \quad (1.29)$$

Аналогично, из второго условия (1.28) следует:

$$\oint_{(\partial T)_k} \frac{\partial p}{\partial n}ds = -\frac{1+\nu}{4} \oint_{(\partial T)_k} p_x(s)ds. \quad (1.30)$$

Угол поворота относительно оси z равен (см. [47])

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{G(1+\nu)} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{2}{G(1+\nu)} \frac{\partial q}{\partial x},$$

откуда следует, что функция $Q = \frac{\partial q}{\partial x}$ должна быть однозначной. Очевидно, что

функции $\Delta\varphi$ и Q – сопряженные гармонические функции, поэтому

$$Q(s) = \int_0^s dQ = \int_0^s \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \right) = \int_0^s \left(\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial x}dy - \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial y}dx \right) = \int_0^s \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial n}ds. \quad (1.31)$$

Из (1.31) получается третье условие, которое должно выполняться при однозначных перемещениях:

$$\oint_{(\partial T)_k} \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial n}ds = 0. \quad (1.32)$$

Таким образом, получены три уравнения (1.29), (1.30), (1.32) для определения трех неизвестных констант на каждом из внутренних контуров $(\partial T)_k$ многосвязной области, т.е. в случае многосвязной области к математической модели, описываемой уравнениями (1.24), (1.25), (1.27), следует добавить еще по три уравнения (1.29), (1.30), (1.32) для каждого из внутренних контуров $(\partial T)_k$.

§ 1.4. Изгиб тонких пластинок

Тонкой пластинкой называется призматическое тело, высота которого h мала по сравнению с другими ее размерами ($10 \leq a/h \leq 100$). Деформации пластинки также считаются малыми, т.е. прогибы пластинки малы в сравнении с ее толщиной ($w/h \leq 0.2$). Теория тонких пластинок с малыми прогибами (см., например, [1]) базируется на трех гипотезах (Кирхгофа): гипотеза прямых нормалей, гипотеза об отсутствии давления между слоями пластины и гипотеза о недеформируемости срединной плоскости.

Наиболее полно классическая теория изгиба тонких пластинок изложена в монографии С.П. Тимошенко и С. Войновского-Кригер (см. [73]). В этой и в ряде других работ получены точные решения для некоторых областей частного вида, в основном для прямоугольных и круглых пластинок. Проблема определения характеристик напряженного состояния тонкой пластинки приводит к краевой задаче для неоднородного бигармонического уравнения, которое, как будет показано в этом параграфе, в ряде случаев можно свести к однородному полигармоническому уравнению высшего порядка.

1°. Как уже отмечалось, внутри тонкой пластинки имеется так называемая нейтральная плоскость, на которой отсутствуют деформации. Очевидно, что эта плоскость расположена по середине толщины h пластинки, и по двум ее сторонам деформации имеют противоположные знаки. Расположим пластинку в такой системе координат, чтобы эта плоскость совпадала с плоскостью $z = 0$ (рис. 1.4).

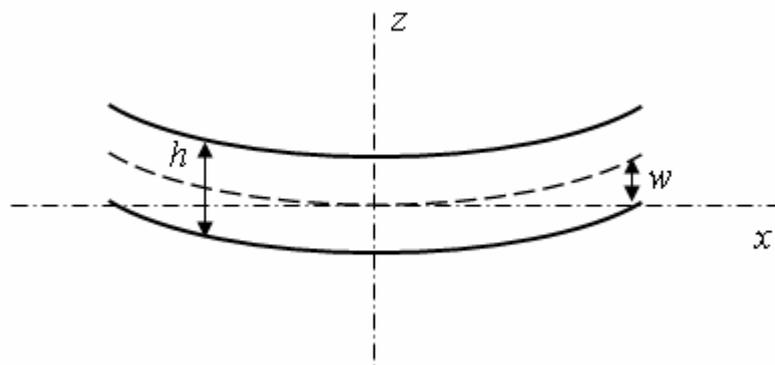


Рисунок 1.4.

В силу гипотез Кирхгофа, смещения точек срединной плоскости вдоль осей x и y можно считать равными нулю, поэтому вектор смещения этих точек:

$$u_x^{(0)} = 0, \quad u_y^{(0)} = 0, \quad u_z^{(0)} = w(x, y). \quad (1.33)$$

Смещения же остальных точек пластины приближенно выражаются через w формулами (см., например, [13]):

$$u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_z = w. \quad (1.34)$$

Подставляя теперь (1.34) в (1.2) и (1.5), можно получить выражения для деформаций и напряжений, возникающих в пластинке при изгибе:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & \sigma_{yy} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_{xy} &= -\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0, \\ \varepsilon_{xx} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \varepsilon_{xy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & \varepsilon_{yy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{yz} = 0, \\ \varepsilon_{zz} &= z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\nu}{1-\nu}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Как видно из формул (1.35), все компоненты тензоров напряжений и деформаций выражаются через одну функцию $w(x, y)$, которую называют *функцией прогибов*. Таким образом, решение задачи изгиба пластинки сводится к нахождению в области T , занятой срединной плоскостью пластинки, функции прогибов $w(x, y)$. Эта функция, как показано в теории изгиба пластинок, удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D}, \quad (1.36)$$

где q – действующая на пластинку внешняя сила, отнесенная к единице площади

поверхности, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластинки.

Уравнения (1.36) называют *уравнением изгиба тонкой пластинки*, или уравнением Софи Жермен.

2°. Граничные условия для уравнения (1.36) записываются в зависимости от способа закрепления края пластинки, и соответствующие математические модели описываются следующими уравнениями (см. [11]):

I. *Край пластинки заделан*. На границе области T должны выполняться условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (1.37)$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к границе области ∂T .

II. *Край пластинки опёрт*. Тогда граничные условия имеют вид:

$$w = 0, \quad v\Delta w + (1 - \nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin 2\alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right\} = 0, \quad (1.38)$$

где α – угол, составленный внешней нормалью с осью Ox .

III. *Край пластинки свободен*. В этом случае граничные условия запишутся в виде:

$$v\Delta w + (1 - \nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin 2\alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right\} = 0, \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial n} + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right\} = 0,$$

где $\frac{\partial}{\partial s}$ означает дифференцирование по направлению касательной к границе области ∂T , направленной в сторону положительного обхода.

Механический смысл и подробный вывод этих условий можно найти, например, в [11].

Следует, однако, заметить, что математическая формулировка краевых условий для задач II и III является довольно сложной. Покажем, что для задачи II

второе краевое условие (1.38) может быть упрощено. Если перейти к производным по направлениям нормали \mathbf{n} и касательной \mathbf{l} , то оно примет вид:

$$\Delta w - (1 - \nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial l^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial l} \frac{\partial w}{\partial n} \right\} = 0.$$

Но поскольку $w = 0$ на границе области, то на всей границе равны нулю и производные $\frac{\partial w}{\partial l}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial l^2}$. Тогда из последнего равенства легко выразить граничное значение нормальной производной функции прогиба через Δw , и окончательно граничные условия (1.38) преобразуются к виду:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{\partial \alpha / \partial l} \frac{\Delta w}{1 - \nu}. \quad (1.40)$$

3°. Итак, задача изгиба тонкой пластинки сводится к решению неоднородного бигармонического уравнения с краевыми условиями (1.37), (1.39) или (1.40). Можно, однако, показать, что в ряде случаев математическая модель задачи может быть описана однородным полигармоническим уравнением высшего порядка.

В самом деле, если сила, действующая на единицу площади тонкой пластинки, q является полигармонической функцией некоторого порядка $n - 2$ (например, многочленом некоторой степени), то из уравнения (1.36) следует, что w – полигармоническая функция n -го порядка, т.е. удовлетворяет уравнению $\Delta^n w = 0$.

В частности, если q – константа (этот случай имеет немало практических приложений), то функция прогибов, очевидно, удовлетворяет полигармоническому уравнению третьего порядка, а в качестве третьего условия для ее нахождения может быть использовано равенство

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D}.$$

Аналогично, если функция w является полигармонической некоторого порядка $n-2$, то в качестве недостающих $n-2$ краевых условий для n -гармонического уравнения несложно, применив дифференцирование, получить следующие равенства:

$$\Delta^2 w = \frac{q(x, y)}{D}, \quad \Delta^3 w = \frac{\Delta q(x, y)}{D}, \quad \dots, \quad \Delta^{n-1} w = \frac{\Delta^{n-3} q(x, y)}{D}.$$

Эта новая предложенная здесь математическая модель представляется в ряде случаев более удобной, поскольку позволяет расширить класс задач, которые могут быть рассмотрены как сводящиеся к полигармоническому уравнению, вследствие чего для них может быть применен один и тот же универсальный способ решения.

§ 1.5. Движение цилиндра в вязкой жидкости

В этом параграфе рассматривается задача об исследовании движения цилиндра в ограниченной жидкости, когда инерционными силами можно пренебречь (приближение Стокса). Основные теоретические сведения и подробную информацию о том, в каких случаях применимо упрощение Стокса, можно найти в [10], [46]. Рассматривается движение цилиндрического тела с сечением произвольной формы в вязкой жидкости, причем удобно считать, что жидкость ограничена неподвижной цилиндрической поверхностью. Тогда задача сводится к краевой задаче для бигармонического уравнения в плоской двусвязной области.

1°. Пусть в плоскости $z = x + iy$ подвижный контур C_1 находится внутри неподвижного контура C_2 . Компоненты скорости точки подвижного твердого тела складываются из компонент поступательной и угловой скорости:

$$V_x = V_x^{(0)} - \Omega y, \quad V_y = V_y^{(0)} + \Omega x. \quad (1.41)$$

Предположение о несжимаемости жидкости допускает существование функции тока $\psi(x, y)$, через которую выражаются компоненты скорости и завихренность потока:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = -\Delta \psi, \quad (1.42)$$

а также все гидродинамические реакции (см. [72]).

В приближении Стокса уравнения движения жидкости имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\mu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x}, \quad (1.43)$$

где p – гидродинамическое давление, μ – коэффициент вязкости среды.

Если теперь продифференцировать первое уравнение (1.43) по y , а второе – по x и записать разность полученных выражений, то видно, что функция тока удовлетворяет бигармоническому уравнению $\Delta^2 \psi = 0$.

Граничные условия для определения этой функции получаются из условия прилипания, в соответствии с которым на контурах C_1 и C_2 скорость жидкости совпадает со скоростью точки контуров:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{C_1} = V_x, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{C_1} = -V_y, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{C_2} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{C_2} = 0. \quad (1.44)$$

2°. Покажем, что от рассматриваемой гидродинамической задачи можно перейти к задаче об определении функции тока ψ по известным граничным значениям самой функции и ее нормальной производной. В самом деле, граничные условия (1.44) позволяют определить нормальную и касательную производные функции тока на границах C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{C_1} &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} n_y \right)_{C_1} = (v_y y'_s + v_x x'_s)_{C_1} = (V_y^{(0)} + \Omega x) y'_s + (V_x^{(0)} - \Omega y) x'_s, \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{C_2} &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} n_y \right)_{C_2} = 0, \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s} \Big|_{C_1} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{C_1} \tau_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{C_1} \tau_y = v_y \Big|_{C_1} x'_s - v_x \Big|_{C_1} y'_s = (V_y^{(0)} + \Omega x) x'_s - (V_x^{(0)} - \Omega y) y'_s, \\ \frac{\partial \psi}{\partial s} \Big|_{C_2} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{C_2} \tau_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{C_2} \tau_y = 0. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Равенства (1.46) можно проинтегрировать по s и получить значения функции ψ на границах C_1 и C_2 :

$$\psi \Big|_{C_1} = -V_y^{(0)} x - \Omega \frac{x^2}{2} + V_x^{(0)} y - \Omega \frac{y^2}{2}, \quad \psi \Big|_{C_2} = const. \quad (1.47)$$

Поскольку скорость, давление, завихренность потока и компоненты тензора напряжений выражаются только через производные функции тока, то можно положить $const = 0$. Таким образом, рассматриваемая гидродинамическая задача эквивалентна краевой задаче для бигармонического уравнения с граничными условиями (1.45), (1.47).

§ 1.6. Классификация математических моделей, описываемых полигармоническим уравнением

Рассмотренные в §§ 1.2–1.5 математические модели механики сплошных сред, как было показано, приводят к различным краевым задачам для гармонического, бигармонического, а также в ряде случаев для полигармонического уравнения высшего порядка ($n \geq 3$).

Поэтому все эти модели можно рассматривать с единой точки зрения и применять для них один и тот же алгоритм. Для этого следует сделать некоторые обобщения рассмотренных задач на общий случай краевых задач для n -гармонического уравнения. Тогда можно классифицировать краевые задачи для полигармонического уравнения по аналогии с теорией краевых задач для гармонического уравнения. Для нахождения решения уравнения

$$\Delta^n u = 0 \quad (1.48)$$

необходимо, очевидно, задать n граничных условий. Будем называть эти условия следующим образом:

- *Условия Дирихле*: если на границе области заданы значения самой функции u , а также функций Δu , $\Delta^2 u$, ..., $\Delta^{n-1} u$. К этому виду задач относится, например, задача о кручении стержня для сопряженной функции ($n = 2$);
- *Условия Неймана*: если на границе области заданы значения нормальных производных $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial \Delta u}{\partial n}$, $\frac{\partial \Delta^2 u}{\partial n}$, ..., $\frac{\partial \Delta^{n-1} u}{\partial n}$. Сюда относится задача о кручении стержня для функции кручения ($n = 1$);
- *Смешанные условия*: если на границе задана часть функций из условий Дирихле и часть функций из условий Неймана, либо их линейные комбинации (всего n условий). К этому типу относится наибольшее число рассмотренных математических моделей, а именно плоская задача теории упругости ($n = 2$), задачи об изгибе тонкой пластины ($n \geq 3$), гидродинамическая задача о движении цилиндра в вязкой жидкости ($n = 2$).

§ 1.7. Выводы по главе 1

В этой главе показано, что математические модели многих явлений, изучаемых в механике сплошных сред, описываются гармоническими, бигармоническими уравнениями, а также полигармоническими уравнениями высшего порядка ($n \geq 3$). Причем краевые задачи, к которым приводят рассмотренные модели, могут быть классифицированы по аналогии с краевыми задачами для гармонической функции. При этом оказывается, что для большинства рассмотренных задач в качестве краевых справедливы смешанные условия, когда на границе области задано n условий, в числе которых могут быть граничные значения самой полигармонической функции u , функций Δu , $\Delta^2 u$, ..., $\Delta^{n-1} u$, их нормальных производных $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial \Delta u}{\partial n}$, $\frac{\partial \Delta^2 u}{\partial n}$, ..., $\frac{\partial \Delta^{n-1} u}{\partial n}$, а также линейных комбинаций всех этих функций.

Таким образом, можно сделать вывод, что ко всем рассмотренным задачам может быть применен один и тот же метод решения, а именно универсальный метод решения краевых задач для полигармонического уравнения любого порядка. В настоящей работе предлагается два принципиально различных метода решения таких задач, которые будут описаны в главах 2 и 3.

ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ К РЕШЕНИЮ ПЛОСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В этой главе кратко излагается общая теория полигармонических функций, и дается решение некоторых задач в односвязной и в двусвязной плоской области с применением аналитического метода конформного отображения и численного метода коллокации. Параграф 2.1 посвящен общим представлениям решения полигармонического уравнения на плоскости; он носит реферативный характер, в дополненном и несколько видоизмененном виде здесь приводятся результаты § 32 монографии И.Н. Векуа [11]. В параграфе 2.2 получено аналитическое решение основной краевой задачи для полигармонического уравнения с использованием аппарата теории функций комплексного переменного, при этом искомая функция представляется в виде степенного ряда с комплексными коэффициентами. В параграфе 2.3 для нахождения неизвестных коэффициентов искомой функции предложен численный метод коллокации. Числовые примеры, иллюстрирующие изложенные в этой главе аналитический и численный методы, представлены в параграфе 2.4. В параграфе 2.5 сформулированы основные выводы по главе 2.

Некоторые результаты этой главы опубликованы в работах автора [27], [31], [33].

§ 2.1. Аналитические представления полигармонических функций

Прежде чем перейти к рассмотрению краевых задач для полигармонического уравнения, выведем сначала формулы, дающие общие представления решения полигармонического уравнения. При этом ограничимся пока рассмотрением случая, когда область T является плоской.

Для вывода этих формул удобно от декартовых координат (x, y) перейти к новым переменным $(z = x + iy, \bar{z} = x - iy)$, которые рассматриваются как независимые. В двумерных декартовых координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.1)$$

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$, несложно получить выражение оператора Лапласа (2.1) через переменные (z, \bar{z}) , а именно

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (2.2)$$

С учетом (2.2) уравнение (1.48) переписывается в виде

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial z^n \partial \bar{z}^n} = 0. \quad (2.3)$$

1°. Пусть T – некоторая односвязная область в плоскости $z = x + iy$. Решения уравнения $\Delta^n u = 0$, которые в области T имеют непрерывные производные порядка $\leq 2n$, называют регулярными решениями или ещё n -гармоническими функциями в области T .

Пусть u – регулярное в T (вообще говоря, комплексное) решение уравнения $\Delta^n u = 0$. Тогда

$$\Delta^{n-1} u = u_0(x, y), \quad (2.4)$$

где u_0 – комплексная гармоническая функция в T , которую можно представить в виде:

$$u_0(z, \bar{z}) = \varphi_0(z) + \varphi_0^*(\bar{z}). \quad (2.5)$$

Здесь $\varphi_0(z), \varphi_0^*(\bar{z})$ – голоморфные функции в T, \bar{T} соответственно (\bar{T} – отражение области T относительно вещественной оси), которые подчинены условию

$$\varphi_0(0) = \varphi_0^*(0). \quad (2.6)$$

Выполнение условия (2.6) позволяет выразить функции φ_0, φ_0^* однозначно через функцию u . В самом деле, при соблюдении условия (2.6) имеем:

$$u_0(0,0) = \varphi_0(0) + \varphi_0^*(0) = 2\varphi_0(0) = 2\varphi_0^*(0),$$

откуда

$$\varphi_0(0) = \varphi_0^*(0) = \frac{u_0(0,0)}{2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^{2n-2} u}{\partial z^{n-1} \partial \bar{z}^{n-1}} \Big|_{\substack{z=0 \\ \bar{z}=0}}.$$

Далее можно записать

$$u_0(z,0) = \frac{\partial^{2n-2} u}{\partial z^{n-1} \partial \bar{z}^{n-1}} \Big|_{\bar{z}=0} = \varphi_0(z) + \varphi_0^*(0), \quad u_0(0,\bar{z}) = \frac{\partial^{2n-2} u}{\partial z^{n-1} \partial \bar{z}^{n-1}} \Big|_{z=0} = \varphi_0(0) + \varphi_0^*(\bar{z}),$$

что даёт окончательно

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= \left(\frac{\partial^{2n-2} u}{\partial z^{n-1} \partial \bar{z}^{n-1}} \right)_{\bar{z}=0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^{2n-2} u}{\partial z^{n-1} \partial \bar{z}^{n-1}} \right)_{\substack{z=0 \\ \bar{z}=0}}, \\ \varphi_0^*(\bar{z}) &= \left(\frac{\partial^{2n-2} u}{\partial z^{n-1} \partial \bar{z}^{n-1}} \right)_{z=0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^{2n-2} u}{\partial z^{n-1} \partial \bar{z}^{n-1}} \right)_{\substack{z=0 \\ \bar{z}=0}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Уравнение (2.4), в силу (2.5), можно записать так:

$$\frac{\partial^{2n-2} u}{\partial z^{n-1} \partial \bar{z}^{n-1}} = \varphi_0(z) + \varphi_0^*(\bar{z}), \quad (2.8)$$

т.е. от однородного уравнения n -ой степени мы перешли к неоднородному уравнению $(n-1)$ -ой степени. Чтобы понизить степень уравнения ещё на единицу, проинтегрируем дважды равенство (2.8):

$$\int_0^z \int_0^{\bar{z}} \left(\frac{\partial^{2n-2} u}{\partial z^{n-1} \partial \bar{z}^{n-1}} \right)_{\substack{z=t \\ \bar{z}=\tau}} dt d\tau = \int_0^z \int_0^{\bar{z}} (\varphi_0(t) + \varphi_0^*(\tau)) dt d\tau.$$

Получается:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2n-4} u}{\partial z^{n-2} \partial \bar{z}^{n-2}} - \left(\frac{\partial^{2n-4} u}{\partial z^{n-2} \partial \bar{z}^{n-2}} \right)_{z=0} - \left(\frac{\partial^{2n-4} u}{\partial z^{n-2} \partial \bar{z}^{n-2}} \right)_{\bar{z}=0} + \left(\frac{\partial^{2n-4} u}{\partial z^{n-2} \partial \bar{z}^{n-2}} \right)_{\substack{z=0 \\ \bar{z}=0}} = \\ = z \int_0^{\bar{z}} \varphi_0^*(\tau) d\tau + \bar{z} \int_0^z \varphi_0(t) dt \end{aligned}$$

или, если положить

$$\varphi_1(z) + \varphi_1^*(\bar{z}) = \left(\frac{\partial^{2n-4} u}{\partial z^{n-2} \partial \bar{z}^{n-2}} \right)_{z=0} + \left(\frac{\partial^{2n-4} u}{\partial z^{n-2} \partial \bar{z}^{n-2}} \right)_{\bar{z}=0} - \left(\frac{\partial^{2n-4} u}{\partial z^{n-2} \partial \bar{z}^{n-2}} \right)_{\substack{z=0 \\ \bar{z}=0}},$$

то

$$\frac{\partial^{2n-4} u}{\partial z^{n-2} \partial \bar{z}^{n-2}} = \varphi_1(z) + \varphi_1^*(\bar{z}) + z \int_0^{\bar{z}} \varphi_0^*(\tau) d\tau + \bar{z} \int_0^z \varphi_0(t) dt. \quad (2.9)$$

Очевидно, здесь $\varphi_1(z), \varphi_1^*(\bar{z})$ – голоморфные функции в T, \bar{T} соответственно, которые можно подчинить условию $\varphi_1(0) = \varphi_1^*(0)$; при соблюдении этого условия функции φ_1, φ_1^* однозначно выражаются через u :

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \left(\frac{\partial^{2n-4} u}{\partial z^{n-2} \partial \bar{z}^{n-2}} \right)_{\bar{z}=0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^{2n-4} u}{\partial z^{n-2} \partial \bar{z}^{n-2}} \right)_{\substack{z=0 \\ \bar{z}=0}}; \\ \varphi_1^*(\bar{z}) &= \left(\frac{\partial^{2n-4} u}{\partial z^{n-2} \partial \bar{z}^{n-2}} \right)_{z=0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^{2n-4} u}{\partial z^{n-2} \partial \bar{z}^{n-2}} \right)_{\substack{z=0 \\ \bar{z}=0}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Проинтегрируем теперь дважды равенство (2.9). Поступая аналогично предыдущему, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2n-6} u}{\partial z^{n-3} \partial \bar{z}^{n-3}} &= \varphi_2(z) + \varphi_2^*(\bar{z}) + z \int_0^{\bar{z}} \varphi_1^*(\tau) d\tau + \bar{z} \int_0^z \varphi_1(t) dt + \\ &+ \frac{z^2}{2} \int_0^{\bar{z}} (\bar{z} - \tau) \varphi_0^*(\tau) d\tau + \frac{\bar{z}^2}{2} \int_0^z (z - t) \varphi_0(t) dt, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\varphi_2(z), \varphi_2^*(\bar{z})$ – голоморфные функции в T, \bar{T} соответственно и подчинены условию $\varphi_2(0) = \varphi_2^*(0)$, тогда функции φ_2, φ_2^* однозначно выражаются через u :

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= \left(\frac{\partial^{2n-6} u}{\partial z^{n-3} \partial \bar{z}^{n-3}} \right)_{\bar{z}=0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^{2n-6} u}{\partial z^{n-3} \partial \bar{z}^{n-3}} \right)_{\substack{z=0 \\ \bar{z}=0}}, \\ \varphi_2^*(\bar{z}) &= \left(\frac{\partial^{2n-6} u}{\partial z^{n-3} \partial \bar{z}^{n-3}} \right)_{z=0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^{2n-6} u}{\partial z^{n-3} \partial \bar{z}^{n-3}} \right)_{\substack{z=0 \\ \bar{z}=0}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Продолжая аналогично далее, приходим к следующему результату для произвольного значения $m \leq n$:

$$\frac{\partial^{2(n-m)} u}{\partial z^{n-m} \partial \bar{z}^{n-m}} = \varphi_{m-1}(z) + \varphi_{m-1}^*(\bar{z}) + \sum_{k=1}^{m-1} \left[\frac{z^k}{k!} \int_0^{\bar{z}} \frac{(\bar{z} - \tau)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi_{m-k-1}^*(\tau) d\tau + \frac{\bar{z}^k}{k!} \int_0^z \frac{(z-t)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi_{m-k-1}(t) dt \right].$$

Положив в последнем равенстве $m = n$, получим окончательно:

$$u = \varphi_{n-1}(z) + \varphi_{n-1}^*(\bar{z}) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{z^k}{k!} \int_0^{\bar{z}} \frac{(\bar{z} - \tau)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi_{n-k-1}^*(\tau) d\tau + \frac{\bar{z}^k}{k!} \int_0^z \frac{(z-t)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi_{n-k-1}(t) dt \right], \quad (2.13)$$

где $\varphi_k(z), \varphi_k^*(\bar{z})$ ($k = 0, \dots, n-1$) – голоморфные функции в T, \bar{T} соответственно, которые можно подчинить условиям

$$\varphi_k(0) = \varphi_k^*(0) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2.14)$$

Этот же результат несколько иным способом получен Векуа в [11].

При соблюдении условий (2.14) функции $\varphi_k(z), \varphi_k^*(\bar{z})$ ($k = 0, \dots, n-1$) однозначно определяются через u :

$$\begin{aligned} \varphi_{n-k-1}(z) &= \left(\frac{\partial^{2k} u}{\partial z^k \partial \bar{z}^k} \right)_{\bar{z}=0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^{2k} u}{\partial z^k \partial \bar{z}^k} \right)_{\substack{z=0 \\ \bar{z}=0}}; \\ \varphi_{n-k-1}^*(\bar{z}) &= \left(\frac{\partial^{2k} u}{\partial z^k \partial \bar{z}^k} \right)_{z=0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^{2k} u}{\partial z^k \partial \bar{z}^k} \right)_{\substack{z=0 \\ \bar{z}=0}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Таким образом, формула (2.13) даёт общее выражение всех регулярных в T решений уравнения $\Delta^n u = 0$ через $2n$ голоморфных функций одной комплексной переменной.

Формулу (2.13) можно переписать в виде

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} \left[z^k \Phi_k^*(\bar{z}) + \bar{z}^k \Phi_k(z) \right], \quad (2.16)$$

где

$$\Phi_k(z) = \begin{cases} \varphi_{n-1}(z), & k=0, \\ \frac{1}{k!} \int_0^z \frac{(z-t)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi_{n-k-1}(t) dt, & k=1,2,\dots,n-1, \end{cases}$$

$$\Phi_k^*(\bar{z}) = \begin{cases} \varphi_{n-1}^*(\bar{z}), & k=0, \\ \frac{1}{k!} \int_0^{\bar{z}} \frac{(\bar{z}-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi_{n-k-1}^*(\tau) d\tau, & k=1,2,\dots,n-1. \end{cases}$$

Из формулы (2.16) вытекает следующая

Теорема 2.1. *Каждое регулярное в односвязной области T решение $u(x, y)$ полигармонического уравнения является аналитической функцией переменных x, y в T . При этом ее аналитическое продолжение является аналитической функцией переменных z, \bar{z} в области (T, \bar{T}) .*

Если u – действительное решение уравнения $\Delta^n u = 0$, то формула (1.16) принимает вид:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \Phi_k(z). \quad (2.17)$$

Таким образом, формула (2.17) показывает, что имеет место

Утверждение 2.1. *В односвязной области вещественная n -гармоническая функция представима через n аналитических функций комплексного аргумента.*

2°. Пусть теперь T – $(m+1)$ -связная область, ограниченная замкнутыми простыми контурами L_0, L_1, \dots, L_m , первый из которых является внешним контуром и охватывает все последующие. Если провести в T разрезы, можно получить односвязную область T' , в которой функция $u(x, y)$ представима в виде (2.16), где $\Phi_k(z), \Phi_k^*(\bar{z})$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) – голоморфные функции в T', \bar{T}' соответственно. Но производные $\Phi_k^{(n)}(z), \Phi_k^{*(n)}(\bar{z})$ этих функций должны быть голоморфными в T, \bar{T} соответственно (см. [12]). И поэтому $\Phi_k(z), \Phi_k^*(\bar{z})$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\Phi_k(z) &= \chi_k(z) + \sum_{j=1}^m \sum_{l=0}^{n-1} A_{kl}^j z^l \ln(z - z_j), \\ \Phi_k^*(\bar{z}) &= \chi_k^*(\bar{z}) + \sum_{j=1}^m \sum_{l=0}^{n-1} A_{kl}^{*j} \bar{z}^l \ln(\bar{z} - \bar{z}_j),\end{aligned}\quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad (2.18)$$

где χ_k, χ_k^* ($k = 0, 1, \dots, n-1$) – голоморфные функции в T, \bar{T} соответственно, A_{kl}^j, A_{kl}^{*j} – некоторые константы, z_1, z_2, \dots, z_m – фиксированные точки внутри контуров L_1, L_2, \dots, L_m соответственно (т.е. вне области T).

Далее, подставляя выражения (2.18) в (2.16) и учитывая, что u – однозначная функция, получим:

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} \left[z^k \chi_k^*(\bar{z}) + \bar{z}^k \chi_k(z) \right] + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_{kl}^j z^k \bar{z}^k \ln|z - z_j|, \quad (2.19)$$

где $\chi_k(z), \chi_k^*(\bar{z})$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) – произвольные голоморфные функции в T, \bar{T} соответственно, а B_{kl}^j – произвольные постоянные ($B_{kl}^j = 2A_{kl}^j$).

Таким образом, формула (2.19) дает все регулярные в $(m+1)$ -связной области T решения уравнения $\Delta^n u = 0$, и может быть сформулирована следующая

Теорема 2.1'. Каждое регулярное в многосвязной области T решение уравнения $\Delta^n u = 0$ является аналитической функцией переменных x, y в T .

Часть теоремы 2.1 об аналитичности продолжения для многосвязной области не имеет места, так как получится, вообще говоря, многозначная функция.

Если u – действительное решение, то формула (2.19) имеет вид:

$$u = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \chi_k(z) + \sum_{j=1}^m \sum_{l,k=0}^{n-1} B_{kl}^j z^k \bar{z}^l \ln|z - z_j| \right], \quad (2.20)$$

где $\chi_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) – произвольные голоморфные функции в T , B_{kl}^j – произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям:

$$B_{kl}^j = \overline{B_{lk}^j} \quad (j = 1, 2, \dots, m; k, l = 0, 1, \dots, n-1).$$

§ 2.2. Аналитическое решение основной краевой задачи в односвязной и в двусвязной области

Как было показано в главе 1, немало приложений имеет **основная краевая задача** для полигармонического уравнения:

Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую в области T полигармоническому уравнению $\Delta^n u = 0$, непрерывную вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка включительно в замкнутой области $T \cup \partial T$ и удовлетворяющую на границе ∂T условиям:

$$u|_{\partial T} = g_0(s), \quad \left. \frac{\partial^k u}{\partial n^k} \right|_{\partial T} = g_k(s), \quad s \in \partial T, \quad (k = \overline{1, n-1}), \quad (2.21)$$

где \mathbf{n} - внешняя нормаль к границе области ∂T , g_k ($k = \overline{0, n-1}$) – заданные действительные функции, которые удовлетворяют следующим условиям: $g_k(s)$ имеет непрерывные производные по дуге s до $(2n-k)$ -го порядка ($k = \overline{0, n-1}$).

К такой постановке приводят, в частности, математические модели плоской задачи теории упругости и гидродинамической задачи для вязкой жидкости.

В [11] доказана следующая

Лемма 2.1. *Если однородная основная краевая задача для полигармонического уравнения не имеет решения (кроме тривиального), то неоднородная задача всегда разрешима.*

На основании этой леммы 2.1 может быть доказано существование и единственность решения основной краевой задачи для полигармонического уравнения. В § 2.2 эта задача будет решена аналитически с использованием аппарата теории функций комплексного переменного, а именно с применением конформного отображения и разложения неизвестных функций в степенные ряды. Такой подход позволяет рассмотреть произвольные односвязные и двусвязные области.

1°. В § 2.1 непосредственным интегрированием уравнения (2.3) была получена формула (2.17), которая показывает, что в односвязной области T веществ-

венная n -гармоническая функция u представима через n аналитических функций комплексного переменного. Эта формула может быть записана в виде:

$$u(z) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k} \varphi_k(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left[z^{-k} \varphi_k(z) + z^k \overline{\varphi_k(z)} \right], \quad (2.22)$$

где $\varphi_k(z)$ – некоторые аналитические функции. Можно сказать, что формула (2.22) является обобщением формулы Гурса, которая выражает бигармоническую функцию через две аналитические функции комплексной переменной z (см. [45]).

Согласно теореме Римана о конформном отображении, односвязную область T плоскости z можно конформно отобразить на единичный круг плоскости ζ . Тогда задача сведётся к нахождению n аналитических функций $\varphi_k(\zeta)$ ($k = \overline{0, n-1}$). Их можно представить в виде рядов Тейлора:

$$\varphi_k(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(k)} \zeta^m \quad (k = \overline{0, n-1}), \quad a_m^{(k)} \in \mathbb{C}. \quad (2.23)$$

Функцию $z(\zeta)$ и её степени также следует представить в виде степенных рядов:

$$z(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \zeta^m, \quad \overline{z(\zeta)} = \sum_{m=-\infty}^0 \frac{\overline{c_{-m}}}{|\zeta|^{2m}} \zeta^m,$$

$$z^k(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(k)} \zeta^m, \quad \overline{z^k(\zeta)} = \sum_{m=-\infty}^0 \frac{\overline{b_{-m}^{(k)}}}{|\zeta|^{2m}} \zeta^m,$$

$$b_0^{(k)} = c_0^k, \quad b_m^{(k)} = \frac{1}{m c_0} \sum_{i=1}^m (ik - m + i) c_i b_{m-i}^{(k)} \quad \text{при } m \geq 1.$$

Подставив (2.23) и последние равенства в (2.22), после некоторых преобразован:

$$u(\zeta) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p \zeta^p, \quad A_p = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{mp}^{(k)}, \quad (2.24)$$

$$\text{Здесь } B_{mp}^{(k)} = \begin{cases} \frac{\overline{b_{-m}^{(k)}}}{|\zeta|^{2m}} a_{p-m}^{(k)}, & \begin{cases} m < 0 \\ m \leq p \end{cases}, \\ b_m^{(k)} |\zeta|^{2(m-p)} \overline{a_{m-p}^{(k)}}, & \begin{cases} m > 0 \\ m \geq p \end{cases}, \\ \overline{b_0^{(k)}} a_p^{(k)}, & p > m = 0, \\ b_0^{(k)} \overline{a_{-p}^{(k)}} |\zeta|^{-2p}, & p < m = 0, \\ \overline{b_0^{(k)}} a_0^{(k)} + b_0^{(k)} \overline{a_0^{(k)}}, & p = m = 0, \\ 0, & m(m-p) < 0. \end{cases}$$

Граничные условия (2.21) в плоскости ζ примут вид:

$$\begin{aligned} u|_{|\zeta|=1} &= \tilde{g}_0(e^{i\theta}) = g_0(z(e^{i\theta})); \\ \frac{\partial u}{\partial n_1} \Big|_{|\zeta|=1} &= \tilde{g}_1(e^{i\theta}) = g_1(z(e^{i\theta})) |z'(e^{i\theta})|; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial n_1^2} \Big|_{|\zeta|=1} &= \tilde{g}_2(e^{i\theta}) = g_2(z(e^{i\theta})) |z'(e^{i\theta})|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(g_0'(z(e^{i\theta})) z''(e^{i\theta}) \right); \\ &\dots\dots\dots; \\ \frac{\partial^{n-1} u}{\partial n_1^{n-1}} \Big|_{|\zeta|=1} &= \tilde{g}_{n-1}(e^{i\theta}) = \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{\partial^{n-2} u}{\partial n_1^{n-2}} \right) \Big|_{|\zeta|=1} \end{aligned}$$

Рассмотрим подробно первую производную по нормали. Пусть $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная

в плоскости z , а $\frac{\partial u}{\partial n_1}$ — в плоскости ζ . По определению нормальной производной:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u \cdot \mathbf{n}) = |\nabla u| \cdot |\mathbf{n}| \cos(\nabla u, \mathbf{n}), \quad \frac{\partial u}{\partial n_1} = (\nabla_1 u \cdot \mathbf{n}_1) = |\nabla_1 u| \cdot |\mathbf{n}_1| \cos(\nabla u, \mathbf{n}_1),$$

где $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ — градиент функции u в плоскости z , а $\nabla_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$ — гра-

диент функции u в плоскости ζ . Тогда $\nabla_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)$.

Обратная отображающая функция $z(\zeta)$ является аналитической, поэтому

$$z'(\zeta) = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta} - i \frac{\partial x}{\partial \eta},$$

а значит

$$\begin{aligned} |\nabla_1 u| &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{Re} z'(\zeta) + \frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{Im} z'(\zeta) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{Re} z'(\zeta) - \frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{Im} z'(\zeta) \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} \sqrt{\operatorname{Re}^2 z'(\zeta) + \operatorname{Im}^2 z'(\zeta)} = |\nabla u| |z'(\zeta)|. \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что $|\mathbf{n}| = |\mathbf{n}_1| = 1$, а также что при конформном отображении имеет место консерватизм углов, и поэтому $\cos(\nabla u, \mathbf{n}) = \cos(\nabla u, \mathbf{n}_1)$, получим

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n_1} \right|_{|\zeta|=1} = \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{z \in \partial D} |z'(e^{i\theta})| = g_1(z(e^{i\theta})) |z'(e^{i\theta})|.$$

Несложно показать, что производные по внешней нормали единичного круга

$$\frac{\partial^k u}{\partial n_1^k} = \frac{\partial^k u}{\partial \rho^k} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p \frac{p!}{(p-k)!} \zeta^{p-k} e^{ik\theta}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad \text{где } \rho = |\zeta|. \quad (2.25)$$

Разложим теперь в ряды функции $\tilde{g}_k(e^{i\theta}) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} S_p^{(k)} e^{ip\theta}$, $k = \overline{0, n-1}$ и удовле-

творим краевым условиям, полагая в (2.24) и (2.25) $\zeta = e^{i\theta}$. Приравнивая коэффициенты при $e^{ip\theta}$, получаем бесконечную систему линейных уравнений

$$A_p \frac{p!}{(p-k)!} = S_p^{(k)}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad p \in \mathbb{Z} \quad \text{относительно неизвестных коэффициентов}$$

$a_m^{(k)}$. В полученных линейных уравнениях необходимо выделить действительные и мнимые части коэффициентов, при этом линейность системы не нарушается.

2°. Аналогичный подход можно применить для основной краевой задачи для полигармонического уравнения в двусвязной области. Согласно (2.20), вещественная n -гармоническая функция в двусвязной области представляется в виде:

$$u = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z) + \sum_{l,k=0}^{n-1} B_{kl} z^k \bar{z}^l \ln|z - z_0| \right], \quad (2.26)$$

где $\varphi_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) – произвольные голоморфные функции в двусвязной области T , z_0 – некоторая фиксированная точка, лежащая в односвязной области, ограниченной внутренним контуром области T , B_{kl} – произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям:

$$B_{kl} = \overline{B_{lk}} \quad (k, l = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2.27)$$

Из условий (2.27) следует, что $B_{kk} \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$. Тогда формула (2.26) примет вид:

$$u = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\bar{z}^k \varphi_k(z) + z^k \overline{\varphi_k(z)} + \ln|z| \left(A_k |z|^{2k} + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n-1} [B_{kl} z^k \bar{z}^l + B_{lk} \bar{z}^k z^l] \right) \right], \quad (2.28)$$

где $A_k = 2B_{kk}$.

Двусвязную область T плоскости z можно конформно отобразить на круговое кольцо плоскости ζ , один из радиусов которого (например, больший) равен единице, а второй зависит от формы области T . Тогда задача, как и в случае односвязной области, сводится к нахождению n голоморфных функций $\varphi_k(\zeta)$, каждую из которых следует представить теперь в виде ряда Лорана:

$$\varphi_k(\zeta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(k)} \zeta^m \quad (k = \overline{0, n-1}), \quad a_m^{(k)} \in \mathbb{C}. \quad (2.29)$$

Далее, аналогично предыдущему, необходимо представить обратную отображающую функцию и ее степени в виде степенных рядов. Подставляя эти ряды и (2.29) в (2.28) и удовлетворяя граничным условиям в плоскости ζ , можно, как и в случае односвязной области, получить бесконечную систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов функций $\varphi_k(z)$.

При кажущейся простоте аналитического метода реализация его сопряжена с рядом трудностей, связанных с конформным отображением области на единичный круг или кольцо, с разложением отображающей функции в степенной ряд и с решением бесконечной системы линейных уравнений. Следует, однако, заметить, что к настоящему времени некоторыми авторами разработаны приближенные методы нахождения отображающих функций с любой наперед заданной точностью (см., например, [71], [79]), причем, как правило, эти отображающие функции сразу ищутся в форме степенного ряда. Бесконечную систему линейных уравнений также можно решить известными методами, сохранив конечное число коэффициентов. В частности, может быть использован численный метод коллокации.

§ 2.3. Нахождение коэффициентов приближенным методом коллокации

Впервые известный метод коллокации для решения краевых задач математической физики был предложен академиком Л.В. Канторовичем в 1934 г. (см. [40]). Метод коллокации является приближенным аналитическим методом и предусматривает выполнение краевых условий лишь в конечном числе отдельных точек границы. И хотя строгого математического обоснования метод не имеет, он широко используется в работах некоторых авторов (см. [15], [22], [72]), так как он прост для численной реализации и даёт достаточно высокую точность.

1°. Рассмотрим сначала односвязную область T . Обозначим через z_q ($q = \overline{1, 2N}$) коллокационные точки на границе ∂T , в которых граничные условия (2.21) выполняются точно. Сохраним в рядах (2.23) по N членов:

$$\varphi_k(\zeta) = \sum_{m=1}^N \tilde{a}_m^{(k)} \zeta^m \quad (k = \overline{0, n-1}). \quad (2.30)$$

Искомая функция u может быть представлена в виде:

$$u(\zeta) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=1}^N \left[\tilde{a}_m^{(k)} f_m^{(k)}(\zeta) + \overline{\tilde{a}_m^{(k)}} \overline{f_m^{(k)}(\zeta)} \right], \quad f_m^{(k)}(\zeta) = \overline{z^k(\zeta)} \zeta^m.$$

Общее число неизвестных вещественных и мнимых частей коэффициентов равно $2nN$. Пронумеровав теперь эти коэффициенты от 1 до $2nN$ так, что:

$$C_m = \begin{cases} \operatorname{Re} \tilde{a}_m^{(0)}, & m = \overline{1, N}, \\ \operatorname{Im} \tilde{a}_{m-N}^{(0)}, & m = \overline{N+1, 2N}, \\ \operatorname{Re} \tilde{a}_{m-2N}^{(1)}, & m = \overline{2N+1, 3N}, \\ \operatorname{Im} \tilde{a}_{m-3N}^{(1)}, & m = \overline{3N+1, 4N}, \\ \dots, \\ \operatorname{Re} \tilde{a}_{m-(2n-2)N}^{(n-1)}, & m = \overline{(2n-2)N+1, (2n-1)N}, \\ \operatorname{Im} \tilde{a}_{m-(2n-1)N}^{(n-1)}, & m = \overline{(2n-1)N, 2nN}, \end{cases}$$

мы можем представить искомую функцию в виде ряда:

$$u(\zeta) = \sum_{m=1}^{2nN} C_m F_m(\zeta), \quad (2.31)$$

$$F_m(\zeta) = \begin{cases} \operatorname{Re} f_m^{(0)}(\zeta), & m = \overline{1, N}, \\ -\operatorname{Im} f_{m-N}^{(0)}(\zeta), & m = \overline{N+1, 2N}, \\ \operatorname{Re} f_{m-2N}^{(1)}(\zeta), & m = \overline{2N+1, 3N}, \\ -\operatorname{Im} f_{m-3N}^{(1)}(\zeta), & m = \overline{3N+1, 4N}, \\ \dots, \\ \operatorname{Re} f_{m-(2n-2)N}^{(n-1)}(\zeta), & m = \overline{(2n-2)N+1, (2n-1)N}, \\ -\operatorname{Im} f_{m-(2n-1)N}^{(n-1)}(\zeta), & m = \overline{(2n-1)N, 2nN}. \end{cases} \quad (2.32)$$

Разобьём единичную окружность на $2N$ частей и получим $2N$ коллокационных точек $\zeta_q = e^{iT_q}$, $T_q = \pi q / N$. Введём следующие обозначения:

$$u_q^{(k)} = \tilde{g}_k(\zeta_q), \quad F_m^{(k)}(\zeta) = \frac{d^k F_m(\zeta)}{dn_1^k} = \frac{d^k F_m(\zeta)}{d\rho^k}, \quad L_{mq}^{(k)} = F_m^{(k)}(\zeta_q), \quad (2.33)$$

$$k = \overline{0, n-1}, \quad m = \overline{1, 2nN}, \quad q = \overline{1, 2N}.$$

Далее

$$U_q = \begin{cases} u_q^{(0)}, & q = \overline{1, 2N}, \\ u_{q-2N}^{(1)}, & q = \overline{2N+1, 4N}, \\ \dots, \\ u_{q-2(n-1)N}^{(n-1)}, & q = \overline{2(n-1)N+1, 2nN}, \end{cases} \quad (2.34)$$

$$M_{qm} = \begin{cases} L_{mq}^{(0)}, & q = \overline{1, 2N}, \\ L_{m, q-2N}^{(1)}, & q = \overline{2N+1, 4N}, \\ \dots, \\ L_{m, q-2(n-1)N}^{(n-1)}, & q = \overline{2(n-1)N+1, 2nN}, \end{cases} \quad m = \overline{1, 2nN}.$$

Тогда рассматриваемая задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений $\mathbf{U} = \mathbf{M}\mathbf{C}$ для нахождения неизвестных коэффициентов C_m , откуда

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}, \quad (2.35)$$

$$\tilde{a}_m^{(k)} = C_{m+2kN} + iC_{m+(2k+1)N}, \quad (k = \overline{0, n-1}). \quad (2.36)$$

2°. В случае двусвязной области T сохраним в рядах (2.29) по $2N$ членов:

$$\varphi_k(\zeta) = \sum_{m=-N}^N \tilde{a}_m^{(k)} \zeta^m, \quad \tilde{a}_0^{(k)} = 0, \quad (k = \overline{0, n-1}). \quad (2.37)$$

Искомая функция тогда может быть представлена в виде ряда:

$$u(\zeta) = \sum_{m=1}^{4nN+n^2} C_m F_m(\zeta), \quad (2.38)$$

$$C_m = \left\{ \begin{array}{l}
\operatorname{Re} \tilde{a}_{m-N-1}^{(0)}, \quad m = \overline{1, N}, \\
\operatorname{Re} \tilde{a}_{m-N}^{(0)}, \quad m = \overline{N+1, 2N}, \\
\operatorname{Im} \tilde{a}_{m-3N-1}^{(0)}, \quad m = \overline{2N+1, 3N}, \\
\operatorname{Im} \tilde{a}_{m-3N}^{(0)}, \quad m = \overline{3N+1, 4N}, \\
\operatorname{Re} \tilde{a}_{m-5N-1}^{(1)}, \quad m = \overline{4N+1, 5N}, \\
\operatorname{Re} \tilde{a}_{m-5N}^{(1)}, \quad m = \overline{5N+1, 6N}, \\
\operatorname{Im} \tilde{a}_{m-7N-1}^{(1)}, \quad m = \overline{6N+1, 7N}, \\
\operatorname{Im} \tilde{a}_{m-7N}^{(1)}, \quad m = \overline{7N+1, 8N}, \\
\dots\dots\dots, \\
\operatorname{Re} \tilde{a}_{m-(4n-3)N-1}^{(n-1)}, \quad m = \overline{4(n-1)N+1, (4n-3)N}, \\
\operatorname{Re} \tilde{a}_{m-(4n-3)N}^{(n-1)}, \quad m = \overline{(4n-3)N+1, (4n-2)N}, \\
\operatorname{Im} \tilde{a}_{m-(4n-1)N-1}^{(n-1)}, \quad m = \overline{(4n-2)N+1, (4n-1)N}, \\
\operatorname{Im} \tilde{a}_{m-(4n-1)N}^{(n-1)}, \quad m = \overline{(4n-1)N+1, 4nN}, \\
A_{m-4nN-1}, \quad m = \overline{4nN+1, 4nN+n}, \\
\operatorname{Re} B_{0, m-4nN-n}, \quad m = \overline{4nN+n+1, 4nN+2n-1}, \\
\operatorname{Im} B_{0, m-4nN-2n+1}, \quad m = \overline{4nN+2n, 4nN+3n-2}, \\
\operatorname{Re} B_{1, m-4nN-3n+3}, \quad m = \overline{4nN+3n-1, 4nN+4n-4}, \\
\operatorname{Im} B_{1, m-4nN-4n+5}, \quad m = \overline{4nN+4n-3, 4nN+5n-6}, \\
\dots\dots\dots, \\
\operatorname{Re} B_{n-2, n-1}, \quad m = 4nN + n^2 - 1, \\
\operatorname{Im} B_{n-2, n-1}, \quad m = 4nN + n^2,
\end{array} \right. \tag{2.39}$$

$$F_m(\zeta) = \left\{ \begin{array}{l}
\operatorname{Re} \zeta^{m-N-1}, \quad m = \overline{1, N}, \\
\operatorname{Re} \zeta^{m-N}, \quad m = \overline{N+1, 2N}, \\
-\operatorname{Im} \zeta^{m-3N-1}, \quad m = \overline{2N+1, 3N}, \\
-\operatorname{Im} \zeta^{m-3N}, \quad m = \overline{3N+1, 4N}, \\
\operatorname{Re} \overline{z(\zeta)} \zeta^{m-5N-1}, \quad m = \overline{4N+1, 5N}, \\
\operatorname{Re} \overline{z(\zeta)} \zeta^{m-5N}, \quad m = \overline{5N+1, 6N}, \\
-\operatorname{Im} \overline{z(\zeta)} \zeta^{m-7N-1}, \quad m = \overline{6N+1, 7N}, \\
-\operatorname{Im} \overline{z(\zeta)} \zeta^{m-7N}, \quad m = \overline{7N+1, 8N}, \\
\cdots, \\
\operatorname{Re} \left(\overline{z^{n-1}(\zeta)} \zeta^{m-(4n-3)N-1} \right), \quad m = \overline{4(n-1)N+1, (4n-3)N}, \\
\operatorname{Re} \left(\overline{z^{n-1}(\zeta)} \zeta^{m-(4n-3)N} \right), \quad m = \overline{(4n-3)N+1, (4n-2)N}, \\
-\operatorname{Im} \left(\overline{z^{n-1}(\zeta)} \zeta^{m-(4n-1)N-1} \right), \quad m = \overline{(4n-2)N+1, (4n-1)N}, \\
-\operatorname{Im} \left(\overline{z^{n-1}(\zeta)} \zeta^{m-(4n-1)N} \right), \quad m = \overline{(4n-1)N+1, 4nN}, \\
|z(\zeta)|^{2(m-4nN-1)} \ln |z(\zeta)|, \quad m = \overline{4nN+1, 4nN+n}, \\
\operatorname{Re} \left(z^{m-4nN-n}(\zeta) \right) \ln |z(\zeta)|, \quad m = \overline{4nN+n+1, 4nN+2n-1}, \\
\operatorname{Im} \left(z^{m-4nN-2n+1}(\zeta) \right) \ln |z(\zeta)|, \quad m = \overline{4nN+2n, 4nN+3n-2}, \\
\operatorname{Re} \left(\overline{z(\zeta)} z^{m-4nN-3n+3}(\zeta) \right) \ln |z(\zeta)|, \quad m = \overline{4nN+3n-1, 4nN+4n-4}, \\
\operatorname{Im} \left(\overline{z(\zeta)} z^{m-4nN-4n+5}(\zeta) \right) \ln |z(\zeta)|, \quad m = \overline{4nN+4n-3, 4nN+5n-6}, \\
\cdots, \\
\operatorname{Re} \left(\overline{z^{n-2}(\zeta)} z^{n-1}(\zeta) \right) \ln |z(\zeta)|, \quad m = 4nN + n^2 - 1, \\
\operatorname{Im} \left(\overline{z^{n-2}(\zeta)} z^{n-1}(\zeta) \right) \ln |z(\zeta)|, \quad m = 4nN + n^2,
\end{array} \right.$$

На границе кругового кольца в плоскости ζ , выберем $4N + n$ коллокационных точек ζ_q , $q = \overline{1, 4N+n}$; в частности, если n – четное, то каждую из окружностей, ограничивающих кольцо в плоскости ζ , можно разбить на $2N + \frac{n}{2}$ частей.

При этом необходимо учесть, что поскольку выражения для $F_m(\zeta)$ содержат ζ в отрицательной степени, а также $\ln|z(\zeta)|$, то во множество коллокационных точек не следует включать точку $\zeta_q = 0$ ($z_q = 0$).

Далее введем обозначения, аналогичные (2.33), но с учетом, что коллокационных точек теперь $4N + n$. Тогда

$$U_q = \begin{cases} u_q^{(0)}, & q = \overline{1, 4N + n}, \\ u_{q-4N-n}^{(1)}, & q = \overline{4N + n + 1, 8N + 2n}, \\ \dots, \\ u_{q-(4N+n)(n-1)}^{(n-1)}, & q = \overline{(4N + n)(n-1) + 1, 4nN + n^2}, \end{cases}$$

$$M_{qm} = \begin{cases} L_{mq}^{(0)}, & q = \overline{1, 4N + n}, \\ L_{m,q-4N-n}^{(1)}, & q = \overline{4N + n + 1, 8N + 2n}, \\ \dots, \\ L_{m,q-(4N+n)(n-1)}^{(n-1)}, & q = \overline{(4N + n)(n-1) + 1, 4nN + n^2}, \end{cases} \quad m = \overline{1, 4nN + n^2},$$

и задача снова сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов C_m , решение которой запишется в матричной форме: $\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{U}$. Коэффициенты рядов (2.37), а также значения A_k и B_{kl} можно найти тогда из (2.39).

Применяя метод коллокации для нахождения неизвестных значений коэффициентов искомой функции как в случае односвязной, так и в случае двусвязной области следует учитывать, что точность метода зависит от выбора точек коллокации. Оптимальный способ выбора и точные оценки нуждаются в дополнительном отдельном исследовании, которое мы не будем проводить в рамках данной работы. Заметим только, что на примерах можно показать, что с увеличением количества коллокационных точек до определенного предела точность метода возрастает. Эффективность применения метода коллокации продемонстрирована на тестовых примерах, представленных в § 2.4.

§ 2.4. Тестовые примеры

Пример 2.1. Аналитическое решение основной краевой задачи

Решим аналитически следующий пример: найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую в круге радиуса R уравнению $\Delta^3 u = 0$, непрерывную вместе со своими производными 2-го порядка включительно в $|z| \leq R$ и удовлетворяющую на границе $|z| = R$ условиям:

$$\left. \begin{aligned} u|_{|z|=R} &= R^5 \cos(\theta) \sin(\theta) (\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)), \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{|z|=R} &= 5R^4 \cos(\theta) \sin(\theta) (\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \Big|_{|z|=R} &= 20R^3 \cos(\theta) \sin(\theta) (\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)). \end{aligned} \right\} 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (2.40)$$

где \mathbf{n} - внешняя нормаль к окружности.

Решение такого примера можно искать непосредственно в плоскости z , однако для общности рассуждений конформно отображим круг радиуса R плоскости z на единичный круг плоскости ζ . Очевидно, что обратная отображающая функция $z(\zeta) = R\zeta$.

В силу (2.22) и (2.23) искать решение будем в виде:

$$u(z) = \operatorname{Re} \left[\varphi_0(z) + \bar{z} \varphi_1(z) + \bar{z}^2 \varphi_2(z) \right], \quad (2.41)$$

$$\varphi_k(z(\zeta)) = \varphi_k(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_m^{(k)} + i\beta_m^{(k)}) \zeta^m \quad (k = \overline{0, 2}). \quad (2.42)$$

Подставив (2.42), $z(\zeta) = R\zeta$ и $\zeta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ в (2.41), получим:

$$\begin{aligned} u = & \left(\rho \alpha_0^{(1)} + \rho^3 \alpha_1^{(2)} \right) \cos \theta + \left(\rho \beta_0^{(1)} + \rho^3 \beta_1^{(2)} \right) \sin \theta + \rho^2 \alpha_0^{(2)} \cos 2\theta + \rho^2 \beta_0^{(2)} \sin 2\theta + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left(\alpha_n^{(0)} + \rho^2 \alpha_{n+1}^{(1)} + \rho^4 \alpha_{n+2}^{(2)} \right) \rho^n \cos n\theta - \left(\beta_n^{(0)} + \rho^2 \beta_{n+1}^{(1)} + \rho^4 \beta_{n+2}^{(2)} \right) \rho^n \sin n\theta \right\}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Вычислим теперь первую и вторую нормальные производные от функции (2.43).

Учитывая, что $\mathbf{n}_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n_1} = & (\alpha_0^{(1)} + 3\rho^2 \alpha_1^{(2)}) \cos \theta + (\beta_0^{(1)} + 3\rho^2 \beta_1^{(2)}) \sin \theta + 2\rho \alpha_0^{(2)} \cos 2\theta + 2\rho \beta_0^{(2)} \sin 2\theta + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{n\alpha_n^{(0)}}{\rho} + \rho(n+2)\alpha_{n+1}^{(1)} + \rho^3(n+4)\alpha_{n+2}^{(2)} \right) \rho^n \cos n\theta - \right. \\ & \left. - \left(\frac{n\beta_n^{(0)}}{\rho} + \rho(n+2)\beta_{n+1}^{(1)} + \rho^3(n+4)\beta_{n+2}^{(2)} \right) \rho^n \sin n\theta \right\}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial n_1^2} = & 6\rho \alpha_1^{(2)} \cos \theta + 6\rho \beta_1^{(2)} \sin \theta + 2\alpha_0^{(2)} \cos 2\theta + 2\beta_0^{(2)} \sin 2\theta + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{n(n-1)\alpha_n^{(0)}}{\rho^2} + (n+2)(n+1)\alpha_{n+1}^{(1)} + \rho^2(n+4)(n+3)\alpha_{n+2}^{(2)} \right) \rho^n \cos n\theta - \right. \\ & \left. - \left(\frac{n(n-1)\beta_n^{(0)}}{\rho^2} + (n+2)(n+1)\beta_{n+1}^{(1)} + \rho^2(n+4)(n+3)\beta_{n+2}^{(2)} \right) \rho^n \sin n\theta \right\}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Граничные условия (2.40) в плоскости ζ после преобразований примут вид:

$$\left. \begin{aligned} u|_{|\zeta|=1} &= R^5 \left(\frac{1}{8} \cos \theta + \frac{1}{8} \sin \theta - \frac{3}{16} \cos 3\theta + \frac{3}{16} \sin 3\theta + \frac{1}{16} \cos 5\theta + \frac{1}{16} \sin 5\theta \right), \\ \frac{\partial u}{\partial n_1} \Big|_{|\zeta|=1} &= R^5 \left(\frac{5}{8} \cos \theta + \frac{5}{8} \sin \theta - \frac{15}{16} \cos 3\theta + \frac{15}{16} \sin 3\theta + \frac{5}{16} \cos 5\theta + \frac{5}{16} \sin 5\theta \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial n_1^2} \Big|_{|\zeta|=1} &= R^5 \left(\frac{5}{2} \cos \theta + \frac{5}{2} \sin \theta - \frac{15}{4} \cos 3\theta + \frac{15}{4} \sin 3\theta + \frac{5}{4} \cos 5\theta + \frac{5}{4} \sin 5\theta \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

$0 \leq \theta < 2\pi.$

Положив теперь в (2.43) – (2.45) $\rho = 1$ и приравняв полученные выражения правым частям соответствующих равенств (2.46), получим систему линейных алгебраических уравнений, решив которую, найдём искомые коэффициенты:

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(1)} = -\alpha_1^{(0)}; \quad \alpha_1^{(2)} = -\alpha_2^{(1)}; \quad \alpha_3^{(2)} = \frac{R^5}{8}; \quad \alpha_4^{(1)} = -\frac{3R^5}{16}; \quad \alpha_5^{(0)} = \frac{R^5}{16}; \\ \beta_0^{(1)} = \beta_1^{(0)}; \quad \beta_1^{(2)} = \beta_2^{(1)}; \quad \beta_3^{(2)} = -\frac{R^5}{8}; \quad \beta_4^{(1)} = -\frac{3R^5}{16}; \quad \beta_5^{(0)} = -\frac{R^5}{16}. \end{aligned}$$

Все остальные коэффициенты равны нулю. Подставив теперь эти коэффициенты в (2.43), получим выражение для искомой функции:

$$u(\zeta) = R^5 \rho^5 \left(\frac{1}{8} \cos \theta + \frac{1}{8} \sin \theta - \frac{3}{16} \cos 3\theta + \frac{3}{16} \sin 3\theta + \frac{1}{16} \cos 5\theta + \frac{1}{16} \sin 5\theta \right).$$

С учётом, что $z = re^{i\theta} = R\rho e^{i\theta}$ в плоскости z будем иметь:

$$u(z) = r^5 \left(\frac{1}{8} \cos \theta + \frac{1}{8} \sin \theta - \frac{3}{16} \cos 3\theta + \frac{3}{16} \sin 3\theta + \frac{1}{16} \cos 5\theta + \frac{1}{16} \sin 5\theta \right) = xy(x^3 + y^3).$$

Таким образом, искомая функция найдена.

Пример 2.2. Применение метода коллокации для односвязной области

В качестве примера, иллюстрирующего метод коллокации для нахождения коэффициентов искомой функции в односвязной области, рассмотрим основную краевую задачу для полигармонической функции 3-го порядка в плоской области, ограниченной лемнискойю Бута. Эта кривая задаётся уравнением $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2$, где a и b – некоторые параметры. Кроме того, может быть получено параметрическое уравнение лемнискаты Бута:

$$x(t) = \frac{ab^2 \cos t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}, \quad y(t) = \frac{a^2 b \sin t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Пусть область ограничена лемнискойю Бута с параметрами $a = \frac{4}{5}, b = \frac{4}{3}$

(рис. 2.1 а). Граничные условия зададим, полагая, что $u = xy(x^3 + y^3)$ – искомая функция. Легко проверить, что она является полигармонической третьего порядка, и для неё могут быть найдены первая и вторая производная по внешней нормали лемнискаты Бута по формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} n_x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} n_x n_y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} n_y^2,$$

$$n_x = \frac{y'_t}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}}, \quad n_y = -\frac{x'_t}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}}.$$

Функция, осуществляющая конформное отображение единичного круга на область, ограниченную лемнискатой Бута, имеет вид (см., например, [25]):

$$z(\zeta) = \frac{2p\zeta}{\zeta^2 + p^2} \left(p = \sqrt{\frac{a+b}{b-a}} \right). \quad (2.47)$$

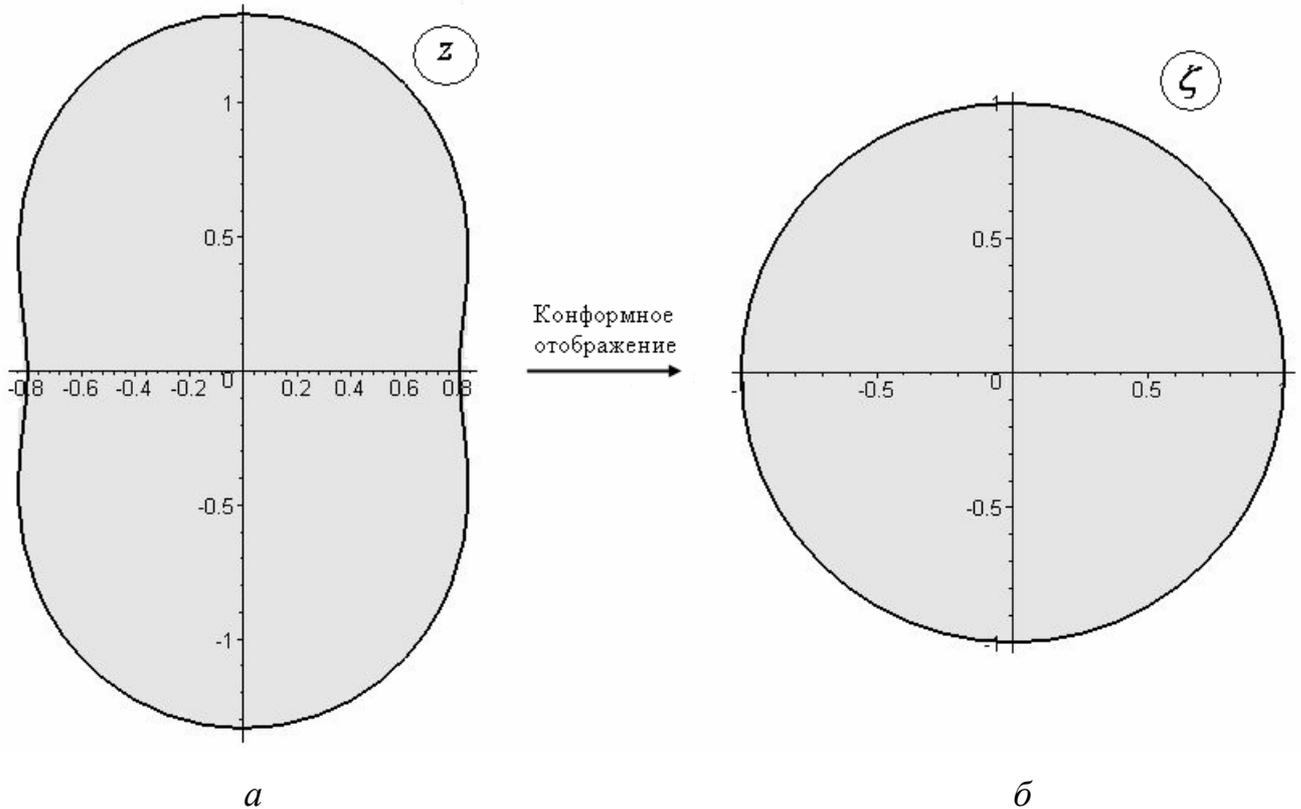


Рисунок 2.1

Далее от заданных граничных условий в плоскости z необходимо перейти к новым граничным условиям в плоскости ζ . Связь между переменными t и $\theta = \arg(\zeta)$ можно установить из равенства $x(t) + iy(t) = z(e^{i\theta})$, отделив в левой его части вещественную и мнимую составляющие. Несложно проверить, что:

$$\sin^2 \theta = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} \sin^2 t + \frac{b}{a} \cdot \frac{ab - \sqrt{b^2 - a^2}}{b^2 - a^2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} \cos^2 t - \frac{a}{b} \cdot \frac{ab - \sqrt{b^2 - a^2}}{b^2 - a^2}.$$

Будем приближённо искать функцию u в виде (2.31). Коэффициенты C_m этой функции найдём численным методом коллокации при $N = 50$. В качестве коллокационных точек выберем $\zeta_q = e^{iT_q}$, $T_q = \frac{\pi q}{50} - \frac{\pi}{150}$, $q = \overline{1, 100}$. Значения

элементов матриц M и U находим по формулам (2.32) – (2.34), а искомые коэффициенты по формулам (2.35) – (2.36). Расчёты показывают, что полученное решение на границе практически совпадает с заданными граничными условиями.

Можно рассмотреть поведение найденной функции и внутри области. Каждой окружности $|\zeta| = \rho$ ($\rho < 1$), лежащей внутри единичного круга в плоскости ζ , функция (2.47) ставит в соответствие замкнутую кривую, лежащую внутри области T плоскости z . Задавая различные значения $\rho \in [0; 1]$, можно проследить, как ведёт себя найденная функция внутри области T . На рис. 2.2 представлены графики найденной функции u (цветные штрихпунктирные линии) и графики точного решения (черные сплошные линии) для различных фиксированных значений $\rho \in [0; 1]$. Из рисунка видно, что точные графики искомой функции практически совпадают с графиками функции, найденной в виде степенного ряда с применением метода коллокации.

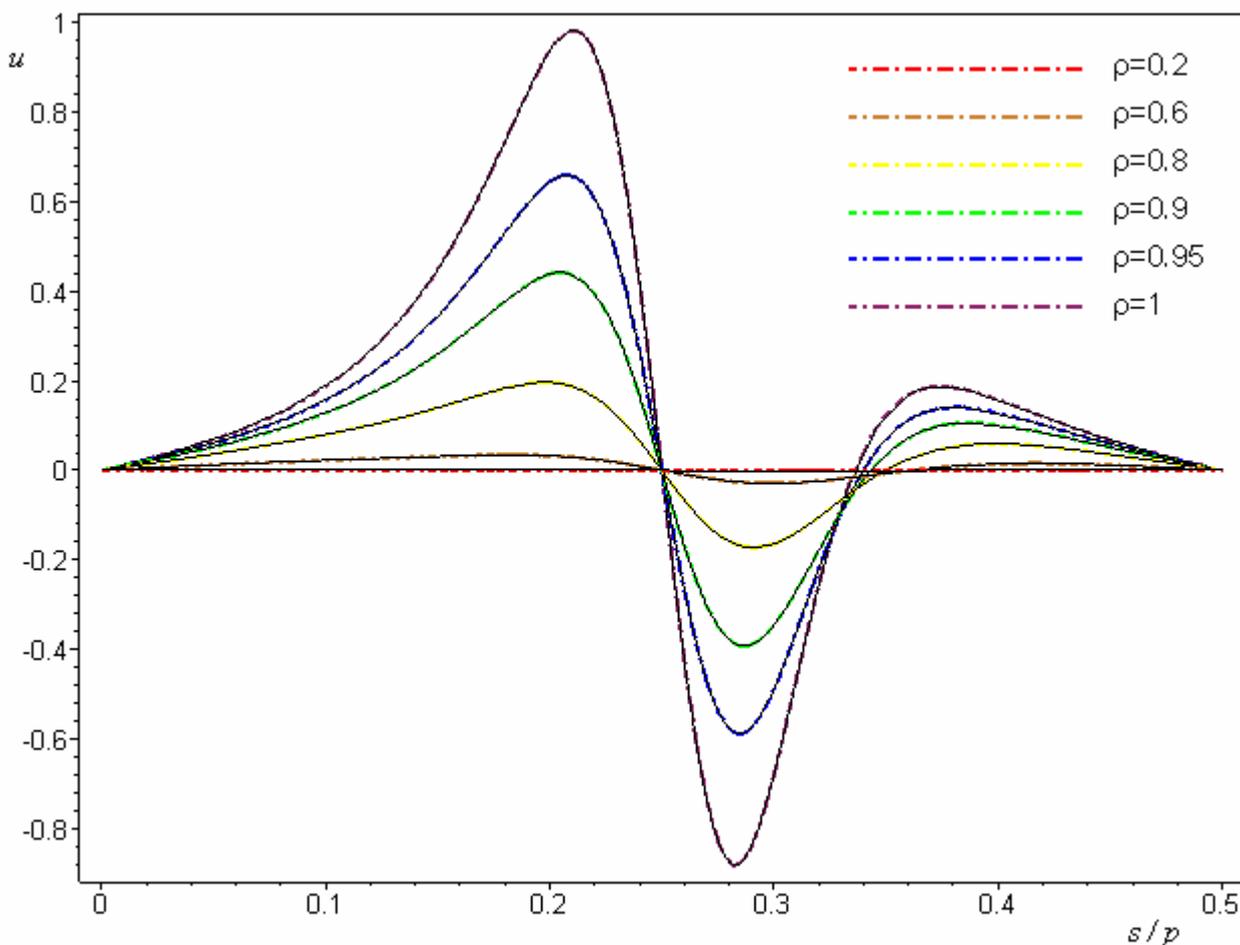


Рисунок 2.2

Пример 2.3. Применение метода коллокации для двусвязной области

Рассмотрим теперь основную краевую задачу для бигармонического уравнения в двусвязной области, ограниченной двумя конфокальными эллипсами с полуосями $a_1 = 13$, $b_1 = 5$ и $a_2 = 15$, $b_2 = 9$ (эллиптическое кольцо изображено на рис. 2.3 а). Конформное отображение такой области на круговое кольцо с единичным внешним радиусом осуществляет функция, обратная к которой имеет вид:

$$z = 12\zeta + \frac{3}{\zeta}. \quad (2.48)$$

Внутренний радиус кругового кольца в плоскости ζ будет равен тогда 0.75 (см. рис. 2.3 б).

Граничные условия задачи заданы по эталонной бигармонической функции

$$u = xy(x^2 + y^2).$$

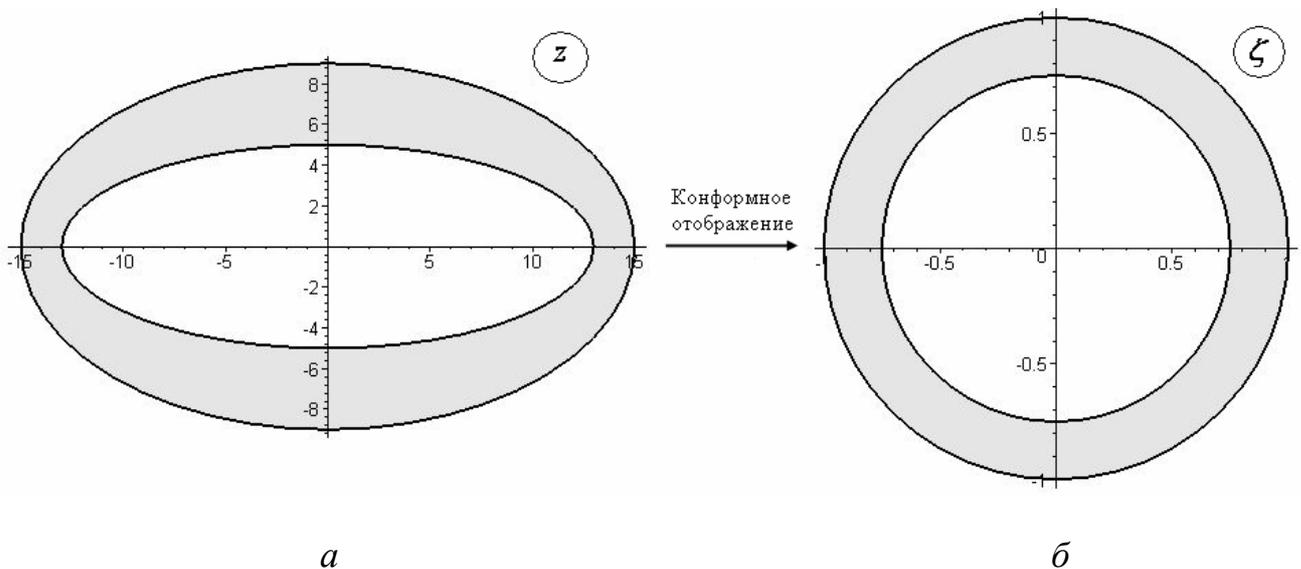


Рисунок 2.3

Поскольку u – бигармоническая функция, то ряд (2.38) имеет $8N + 4$ членов, и поэтому в качестве коллокационных точек выберем $\zeta_q = 0.75e^{-iT_q}$,

$$\zeta_{q+2N+1} = e^{iT_q}, \text{ где } T_q = \frac{2\pi q}{2N+1} - \frac{\pi}{150}, \quad q = \overline{1, 2N+1}.$$

На рис. 2.4 представлены результаты решения для случая $N = 30$ (т.е. на каждой окружности, ограничивающей кольцо в плоскости ζ , берется по 61 коллокационной точке). Каждой окружности $|\zeta| = \rho$ ($0.75 < \rho < 1$), лежащей внутри кругового кольца в плоскости ζ , функция (2.48) ставит в соответствие эллипс, лежащий внутри эллиптического кольца в плоскости z . Цветными штрихпунктирными линиями показана зависимость найденной с применением метода коллокации функции u от нормированной дуговой координаты s/p для различных фиксированных значений $\rho \in [0.75, 1]$. Графики соответствующих значений точного решения показаны сплошными черными линиями. Значения функции u являются периодическими с периодом $T = 0.5p$ и антисимметричны относительно $\frac{T}{2} = 0.25p$, поэтому указанные графики представлены только для $s/p \in [0, 0.25]$. Как видно из графиков, предложенный метод решения дает хорошую точность и в случае двусвязной области.

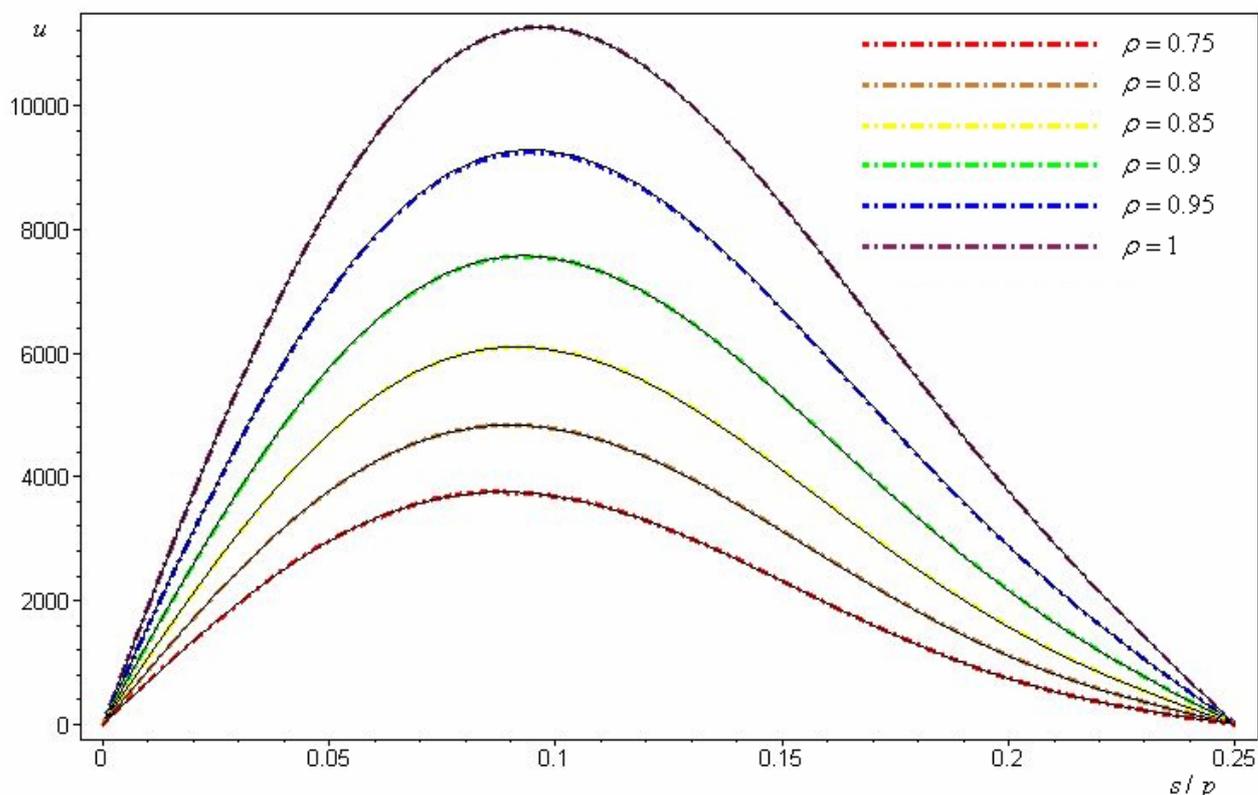


Рисунок 2.4

§ 2.5. Выводы по главе 2

В главе изложены теоретические основы, необходимые для построения численного алгоритма решения краевых задач для полигармонического уравнения. Предложено решение основной краевой задачи в произвольной плоской односвязной и двусвязной области, основанное на применении методов комплексного анализа и приближенного метода коллокации. Такой подход позволяет свести рассматриваемую задачу к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. Из тестовых примеров, рассмотренных в конце главы, видно, что предложенный способ решения основной краевой задачи для полигармонического уравнения в плоской области является весьма эффективным как в случае односвязной, так и в случае двусвязной области. А метод коллокации, предложенный для нахождения коэффициентов искомых функций, хотя и не имеет строгого математического обоснования, дает достаточно высокую точность, что видно из представленных в этой главе графиков. Расчеты, проведенные для различных значений N , показывают, что с увеличением числа коллокационных точек точность метода возрастает.

ГЛАВА 3. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Как отмечалось в предыдущей главе, реализация рассмотренных в ней методов сопряжена с рядом трудностей. Кроме того, они применимы, очевидно, только для плоских областей и не всегда могут быть использованы для областей сложной формы. Поскольку применимость этих методов довольно ограничена и требует дополнительного исследования сходимости ряда, более привлекательным методом решения краевых задач для полигармонического уравнения является метод граничных элементов (см. [5], [9], [69]), суть которого состоит в аппроксимации границы области системой конечного числа достаточно малых (граничных) элементов и в аппроксимации рассматриваемых функций на каждом элементе.

Эта глава посвящена построению численного алгоритма для решения краевых задач для полигармонического уравнения в произвольных плоских и осесимметричных пространственных областях. В параграфе 3.1 рассматривается интегральная формула Грина, на основании которой, как показано в параграфах 3.2 и 3.3, полигармоническое уравнение сводится к системе интегральных уравнений относительно дополнительных полигармонических функций более низких порядков. В параграфе 3.4 с помощью метода граничных элементов эта система интегральных уравнений представлена в виде системы линейных алгебраических уравнений. В параграфе 3.5 показано, что основная краевая задача для полигармонического уравнения эквивалентна смешанной краевой задаче для системы вспомогательных функций, и, следовательно, может быть применен один и тот же алгоритм. Параграф 3.6 посвящен обоснованию предложенного численного метода, точность которого проиллюстрирована на числовых примерах, рассмотренных в параграфе 3.7.

Основные результаты, представленные в этой главе, опубликованы в работах автора [27], [30], [31], а также в совместной работе А.Г. Терентьева и автора [29].

§ 3.1. Интегральная формула Грина

При изучении свойств гармонических функций, а также при разработке численных методов эффективно применение интегральной формулы Грина:

$$\iint_T (v\Delta u - u\Delta v) d\tau = \int_{\partial T} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \quad (3.1)$$

Из интегральной формулы Грина (3.1) можно получить важную в приложениях формулу (см. [64]), дающую выражение значения функции в любой точке (x_0, y_0) в плоской области T в виде суммы контурного и двойного интегралов:

$$u(x_0, y_0) = \int_{\partial T} \left(G(r) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G(r)}{\partial n} \right) ds - \iint_T \Delta u G(r) d\tau, \quad (3.2)$$

где $G(r) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$ – функция Грина для плоской области, r – расстояние от фиксированной точки (x_0, y_0) до переменной точки интегрирования.

Если u – гармоническая функция, то второе слагаемое правой части формулы (3.2) обращается в нуль, и полученное соотношение выражает значение функции u в любой внутренней точке области T через ее значения на границе этой области. С помощью этого соотношения некоторыми авторами были разработаны эффективные численные алгоритмы, основанные на методах граничных элементов, для решения гармонических уравнений, что позволило рассчитать широкий круг плоских и осесимметричных задач механики сплошных сред (см. [70], [102]).

Аналогичный подход может быть применен и для решения краевых задач для полигармонического уравнения. Однако в этом случае применять для численных расчетов непосредственно формулу (3.2) нецелесообразно, поэтому ее следует преобразовать к виду, содержащему только контурные интегралы. Для этого введем сначала некоторые необходимые обозначения.

Пусть функция $G_k(r)$ есть частное решение уравнения

$$\Delta^k G_k = G_0(r), \quad G_0 = G. \quad (3.3)$$

Решение уравнения (3.3) может быть найдено интегрированием k -кратного оператора Лапласа в полярных координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \left(\dots \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG_k}{dr} \right) \dots \right) \right) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}. \quad (3.4)$$

Рассмотрим сначала случай $k=1$, тогда

$$\Delta G_1 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG_1}{dr} \right) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r},$$

откуда, полагая константы интегрирования равными нулю, имеем

$$\frac{dG_1}{dr} = \frac{1}{2\pi r} \int r \ln \frac{1}{r} dr = \frac{r}{4\pi} \left(\ln \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow G_1 = \frac{1}{4\pi} \int r \left(\ln \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \right) dr = \frac{r^2}{8\pi} \left(\ln \frac{1}{r} + 1 \right).$$

Далее, при $k=2$ уравнение (3.3) примет вид $\Delta^2 G_2 = G_0$, или, что то же самое, $\Delta G_2 = G_1$, откуда, аналогично предыдущему:

$$\frac{dG_2}{dr} = \frac{1}{8\pi r} \int r^3 \left(\ln \frac{1}{r} + 1 \right) dr = \frac{r^3}{32\pi} \left(\ln \frac{1}{r} + \frac{5}{4} \right) \Rightarrow G_2 = \frac{r^4}{128\pi} \left(\ln \frac{1}{r} + \frac{3}{2} \right).$$

Продолжая аналогично далее, получим следующую формулу:

$$G_k = \frac{1}{2\pi} \frac{r^{2k}}{4^k (k!)^2} \left(\ln \frac{1}{r} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right), \quad (3.5)$$

где $r = |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, (x_0, y_0) – полюс функции $G_k(r)$.

Решение (3.5) было найдено иным способом в работе И.Н. Векуа [11].

Пусть u – полигармоническая функция n -го порядка. Введем обозначения:

$$u = u_0, \Delta u = u_1, \Delta^2 u = u_2, \dots, \Delta^{n-1} u = u_{n-1}. \quad (3.6)$$

Обратимся теперь к уравнению (3.2) и рассмотрим второе слагаемое в его правой части. Интеграл $\iint_T \Delta u G(r) d\tau$ по области T можно представить в виде

$$\iint_T \Delta u G(r) d\tau = \sum_{k=1}^{n-1} \iint_T (u_k \Delta G_k - \Delta u_k G_k) d\tau.$$

На основании формулы Грина (3.1) для интегралов в правой части последнего равенства имеют место представления через контурные интегралы:

$$\iint_T (u_k \Delta G_k - \Delta u_k G_k) d\tau = \int_{\partial T} \left(u_k \frac{\partial G_k}{\partial n} - \frac{\partial u_k}{\partial n} G_k \right) ds, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

где $\frac{\partial}{\partial n} = (\nabla \cdot \mathbf{n})$ – оператор дифференцирования по направлению внешней нормали. Формула такого вида была впервые получена Гутцмером в [94].

Поэтому для второго слагаемого правой части (3.2) имеем окончательно:

$$\iint_T \Delta u G(r) d\tau = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\partial T} \left(u_k \frac{\partial G_k}{\partial n} - \frac{\partial u_k}{\partial n} G_k \right) ds. \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в (3.2), получим окончательно, что значение полигармонической функции внутри области выражается через граничные значения функций u_k и их нормальных производных:

$$u(x_0, y_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial T} \left(\frac{\partial u_k}{\partial n} G_k - u_k \frac{\partial G_k}{\partial n} \right) ds. \quad (3.8)$$

Формула (3.8) выражает значение решения $u(x, y)$ полигармонического уравнения в любой точке области T через значения на ∂T самой функции $u(x, y)$ и ее производных до $(n-1)$ -го порядка включительно. Поэтому с ее помощью можно получить решение основной краевой задачи для полигармонического уравнения.

§ 3.2. Интегральные соотношения для полигармонических функций

1°. С помощью интегрального тождества Грина (3.1) можно также получить значение полигармонической функции для граничной точки. Тогда получим общую формулу, выражающую значение полигармонической функции u внутри плоской области T и на ее границе через граничные значения вспомогательных функций:

$$\varepsilon u(P_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial T} (v_k(P)G_k(P, P_0) - u_k(P)H_k(P, P_0)) ds(P), \quad (3.9)$$

где введены обозначения $H_k = \frac{\partial G_k}{\partial n}$, $v_k = \frac{\partial u_k}{\partial n}$, P_0 – фиксированная точка внутри области или на её границе, P – переменная точка интегрирования,

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & P_0 \in T, \\ 0.5, & P_0 \in \partial T \quad (\text{для гладкой границы}), \\ \omega/2\pi, & P_0 \in \partial T \quad (\text{для угловой точки}), \end{cases}$$

ω – внутренний угол между односторонними касательными к границе ∂T в угловой точке P_0 . Запись $G_k(P, P_0)$ означает, что функции G_k зависят только от расстояния между точками P и P_0

Каждая вспомогательная функция u_k является, согласно (3.6), полигармонической $(n - k)$ -го порядка, и следовательно для всех этих введенных промежуточных функций также справедливы соотношения, аналогичные (3.9):

$$\begin{aligned} \varepsilon u_1 &= \sum_{k=0}^{n-2} \int_{\partial T} (v_{k+1}G_k - u_{k+1}H_k) ds, \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon u_{n-2} &= \int_{\partial T} (v_{n-2}G_0 - u_{n-2}H_0) ds + \int_{\partial T} (v_{n-1}G_1 - u_{n-1}H_1) ds, \\ \varepsilon u_{n-1} &= \int_{\partial T} (v_{n-1}G_0 - u_{n-1}H_0) ds. \end{aligned}$$

Окончательно получим систему интегральных соотношений вида

$$\varepsilon u_j = \sum_{k=0}^{n-j-1} \int_{\partial T} (v_{j+k}G_k - u_{j+k}H_k) ds, \quad (j = \overline{0, n-1}). \quad (3.10)$$

Таким образом, полигармоническая функция $u = u_0$ определяется через значения n функций u_k и их нормальных производных v_k на границе области. Кроме того, должны выполняться n интегральных соотношений (3.10).

2°. До сих пор мы ограничивались рассмотрением только плоского случая, однако очевидно, что формулы (3.10) справедливы и в случае, если область T является трехмерной. При этом правые части (3.10) будут представлять собой суммы поверхностных интегралов, $G_0(r) = \frac{1}{4\pi r}$ – функция Грина для пространственной области, а функции $G_k(r)$ получаются интегрированием уравнения (3.3) в сферических координатах и имеют вид

$$G_k = \frac{1}{4\pi} \frac{r^{2k-1}}{(2k)!}, \quad (k = \overline{0, 1, \dots, n-1}). \quad (3.11)$$

Пусть Σ – поверхность, являющаяся границей пространственной области T . Тогда формулы (3.10) примут вид

$$\varepsilon u_j = \sum_{k=0}^{n-j-1} \iint_{\Sigma} (v_{j+k} G_k - u_{j+k} H_k) d\sigma, \quad (j = \overline{0, n-1}). \quad (3.12)$$

При этом ω – телесный угол, под которым видна поверхность Σ из угловой точки.

Если поверхность Σ является осесимметричной и функции u_j обладают осевой симметрией, то поверхностные интегралы в (3.12) можно свести к контурным интегралам по образующей Γ поверхности Σ . Для этого следует рассмотреть цилиндрические координаты (z, ρ, φ) . Функции u_j и v_j не зависят от координаты φ , поэтому двукратные интегралы в (3.12) преобразуются в однократные:

$$\varepsilon u_j = \sum_{k=0}^{n-j-1} \int_{\Gamma} (v_{j+k} F_k - u_{j+k} R_k) r' ds, \quad (j = \overline{0, n-1}). \quad (3.13)$$

$$F_k = \int_0^{2\pi} G_k d\varphi, \quad R_k = \frac{\partial F_k}{\partial n}, \quad (k = \overline{0, n-1}), \quad (3.14)$$

где r' – расстояние от оси вращения до переменной точки интегрирования.

Далее определим вид функций (3.14). Из (3.11) и (3.14) следует, что:

$$F_0 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi r} d\varphi. \quad (3.15)$$

Здесь r – расстояние между фиксированной точкой с координатами (z_0, ρ_0, φ_0) и переменной с координатами (z, ρ, φ) :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\rho \cos \varphi - \rho_0 \cos \varphi_0)^2 + (\rho \sin \varphi - \rho_0 \sin \varphi_0)^2 + (z - z_0)^2} = \\ &= \sqrt{(z - z_0)^2 + \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Цилиндрические координаты можно выбрать так, чтобы $\varphi_0 = 0$, поэтому

$$F_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a - b \cos \varphi}}, \quad (3.17)$$

где $a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2$, $b = 2\rho\rho_0$, ρ, z и ρ_0, z_0 – координаты переменной и фиксированной точек меридиональной плоскости. С помощью замены $\varphi = \pi + 2\psi$ (3.17) сводится к полному эллиптическому интегралу первого рода $K(\lambda)$:

$$F_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d\psi}{\sqrt{a + b \cos 2\psi}} = \frac{1}{\pi\sqrt{a+b}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{2b}{a+b} \sin^2 \psi}} = \frac{K(\lambda)}{\pi\sqrt{a+b}}, \quad (3.18)$$

$$\text{где } \lambda^2 = \frac{2b}{a+b} = \frac{4\rho\rho_0}{(\rho + \rho_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Так как производная $K'(\lambda) = (E(\lambda)/(1 - \lambda^2) - K(\lambda))/\lambda$, то

$$R_0 = n_z \frac{\partial F_0}{\partial z} + n_\rho \frac{\partial F_0}{\partial \rho} = \frac{n_\rho [E(\lambda) - K(\lambda)]}{2\pi\rho\sqrt{a+b}} - \frac{n_\rho(\rho - \rho_0) + n_z(z - z_0)}{\pi(a-b)\sqrt{a+b}} E(\lambda). \quad (3.19)$$

Здесь $E(\lambda)$ – полный эллиптический интеграл второго рода¹.

С помощью той же замены найдем функцию F_1 . После соответствующих преобразований, учитывая, что $E'(\lambda) = (E(\lambda) - K(\lambda))/\lambda$, имеем:

¹ Насколько нам известно, впервые функции (3.18), (3.19) в несколько ином виде были представлены в 1974 г. в работе В.В. Воинова и др. [14], посвященной исследованию потенциально-го обтекания тела вращения потоком несжимаемой жидкости.

$$F_1 = \frac{\sqrt{a+b}}{2\pi} E(\lambda),$$

$$R_1 = \frac{n_\rho \sqrt{a+b}}{4\pi\rho} [E(\lambda) - K(\lambda)] + \frac{n_\rho(\rho + \rho_0) + n_z(z - z_0)}{2\pi\sqrt{a+b}} K(\lambda). \quad (3.20)$$

Для остальных функций F_k ($k \geq 2$) может быть получена рекуррентная формула. Из первой формулы (3.10)

$$F_{k+1} = \frac{1}{4\pi(2k+2)!} \int_0^{2\pi} (\sqrt{a-b\cos\varphi})^{2k+1} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi(2k+2)!} \int_0^{2\pi} (a-b\cos\varphi)(\sqrt{a-b\cos\varphi})^{2k-1} d\varphi.$$

Последний интеграл с помощью тождества $1 = \frac{4k}{2k+1} - \frac{2k-1}{2k+1}$ может быть представлен в виде суммы двух интегралов:

$$F_{k+1} = \frac{1}{4\pi(2k+2)!} \left(\frac{4k}{2k+1} a \int_0^{2\pi} (\sqrt{a-b\cos\varphi})^{2k-1} d\varphi - \right.$$

$$\left. - \int_0^{2\pi} \left(\frac{2k-1}{2k+1} a + b\cos\varphi \right) (\sqrt{a-b\cos\varphi})^{2k-1} d\varphi \right).$$

Первый из них представляет выражение, содержащее функцию F_k . Второй интеграл можно представить в виде

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{2k-1}{2k+1} a + b\cos\varphi \right) (a-b\cos\varphi)(\sqrt{a-b\cos\varphi})^{2k-3} d\varphi.$$

После раскрытия первых двух скобок и последующей группировки слагаемых:

$$\frac{1}{2k+1} \int_0^{2\pi} \left((2k-1)a^2 - 2ab\cos\varphi - (2k-1)b^2(1-\sin^2\varphi) - 2b^2\cos^2\varphi \right) (\sqrt{a-b\cos\varphi})^{2k-3} d\varphi =$$

$$= \frac{2k-1}{2k+1} \int_0^{2\pi} (a^2 - b^2) (\sqrt{a-b\cos\varphi})^{2k-3} d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2k+1} \int_0^{2\pi} \left(2b\cos\varphi (\sqrt{a-b\cos\varphi})^{2k-1} + (2k-1)b^2\sin^2\varphi (\sqrt{a-b\cos\varphi})^{2k-3} \right) d\varphi.$$

Можно заметить, что первообразной в последнем интеграле является выражение $2b \sin \varphi \left(\sqrt{a - b \cos \varphi} \right)^{2k-1}$, и, следовательно, интеграл обращается в нуль.

Поскольку

$$\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{a - b \cos \varphi} \right)^{2k-1} d\varphi = 4\pi(2k)!F_k, \quad \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{a - b \cos \varphi} \right)^{2k-3} d\varphi = 4\pi(2k-2)!F_{k-1},$$

то функции

$$F_{k+1} = \frac{4k(2k)!}{(2k+1)(2k+2)!} aF_k - \frac{(2k-1)(2k-2)!}{(2k+2)!(2k+1)} (a^2 - b^2)F_{k-1},$$

или, после сокращения и приведения слагаемых к общему знаменателю,

$$F_{k+1} = \frac{8k^2 aF_k - (a^2 - b^2)F_{k-1}}{4k(k+1)(2k+1)^2}, \quad k = \overline{1, n-2}. \quad (3.21)$$

Рекуррентное соотношение для нормальных производных имеет вид:

$$R_{k+1} = \frac{1}{4k(k+1)(2k+1)^2} \left[8k^2 aR_k - (a^2 - b^2)R_{k-1} + \right. \\ \left. + 4(4k^2 F_k - aF_{k-1}) \left((z - z_0)n_z + \rho n_\rho \right) + 8\rho_0^2 F_{k-1} \rho n_\rho \right], \quad k = \overline{1, n-2}. \quad (3.22)$$

§ 3.3. Исследование функций, входящих в интегральные соотношения

1°. Для дальнейшего полезно и выяснить вопрос об особенностях функций, входящих в (3.10) и (3.13), при $r = 0$. В плоском случае это функции вида (3.5) и их нормальные производные. Из (3.5) видно, что среди функций G_k только функция G_0 имеет логарифмическую, т.е. интегрируемую, особенность в точке $z = z_0$ ($r = 0$); для всех остальных функций G_k

$$\lim_{r \rightarrow 0} G_k(r) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Вид функций H_k также получается непосредственно из (3.5). В частности,

$$\begin{aligned}
H_0 &= \frac{\partial G_0}{\partial n} = \frac{\partial G_0}{\partial x} n_x + \frac{\partial G_0}{\partial y} n_y = \frac{dG_0}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial x} n_x + \frac{\partial r}{\partial y} n_y \right) = \\
&= -\frac{1}{2\pi r} \left(\frac{\partial}{\partial x} n_x + \frac{\partial}{\partial y} n_y \right) \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{(x-x_0)n_x + (y-y_0)n_y}{r},
\end{aligned}$$

т.е. окончательно

$$H_0 = -\frac{(x-x_0)n_x + (y-y_0)n_y}{2\pi r^2}. \quad (3.23)$$

Исследуем поведение этой функции при $r \rightarrow 0$. Пусть граница области ∂T задана функциями дуговой координаты $x = x(s)$, $y = y(s)$. Тогда $x_0 = x(s_0)$ и $y_0 = y(s_0)$. В окрестности точки $s = s_0$ ($s = s_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$) имеем

$$\begin{aligned}
x(s) &= x(s_0 + \varepsilon) = x(s_0) + x'(s_0)\varepsilon + x''(s_0)\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots, \\
y(s) &= y(s_0 + \varepsilon) = y(s_0) + y'(s_0)\varepsilon + y''(s_0)\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots
\end{aligned}$$

Тогда можно считать, что

$$x - x_0 = x'_0\varepsilon + x''_0\frac{\varepsilon^2}{2}, \quad y - y_0 = y'_0\varepsilon + y''_0\frac{\varepsilon^2}{2},$$

где $x'_0 = x'(s_0)$, $x''_0 = x''(s_0)$, $y'_0 = y'(s_0)$, $y''_0 = y''(s_0)$.

В ряды в окрестности $s = s_0$ можно разложить и компоненты вектора нормали:

$$\begin{aligned}
n_x &= y'(s) = y'(s_0 + \varepsilon) = y'_0 + y''_0\varepsilon + \dots, \\
n_y &= -x'(s) = -x'(s_0 + \varepsilon) = -(x'_0 + x''_0\varepsilon + \dots).
\end{aligned}$$

Тогда для функции H_0 будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow 0} H_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\left(x'_0\varepsilon + x''_0\frac{\varepsilon^2}{2} \right) (y'_0 + y''_0\varepsilon) - \left(y'_0\varepsilon + y''_0\frac{\varepsilon^2}{2} \right) (x'_0 + x''_0\varepsilon)}{\varepsilon^2 \left(\left(x'_0 + x''_0\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 + \left(y'_0 + y''_0\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right)}.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в числителе,

$$\lim_{r \rightarrow 0} H_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0) \frac{\varepsilon^2}{2}}{\varepsilon^2 \left(\left(x'_0 + x''_0 \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 + \left(y'_0 + y''_0 \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right)} = \frac{x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0}{2(x_0'^2 + y_0'^2)} \neq \infty.$$

Рассмотрим далее функцию

$$H_1 = \frac{\partial G_1}{\partial n} = \frac{dG_1}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial x} n_x + \frac{\partial r}{\partial y} n_y \right) = \frac{r}{8\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{1}{r} \right) \frac{(x - x_0) n_x + (y - y_0) n_y}{r},$$

и окончательно

$$H_1 = \frac{(x - x_0) n_x + (y - y_0) n_y}{8\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{1}{r} \right).$$

Из последнего равенства видно, что функция H_1 при $z \rightarrow z_0$ ($r \rightarrow 0$) стремится к нулю и не имеет в этой точке особенность. Несложно показать, что это справедливо и для остальных функций H_k ($k = 2, 3, \dots$). Таким образом, доказана

Теорема 3.1. *В плоском случае из всех функций G_k , H_k , входящих в интегральные соотношения для полигармонических функций, только функция G_0 имеет особенность в точке $z = z_0$ ($r = 0$), а именно логарифмическую, т.е. интегрируемую, особенность.*

2°. Проведем теперь исследование функций, входящих в (3.13). Пусть функции $z(s)$, $\rho(s)$ определяют образующую границы области Γ , а s и s_0 — дуговые координаты точки интегрирования и фиксированной точки на Γ . Исследуем сначала поведение функций F_k при $s \rightarrow s_0$. Тогда $z \rightarrow z_0$, $\rho \rightarrow \rho_0$, и несложно показать, что $\lambda \rightarrow 1$ при $s \rightarrow s_0$. А так как $\lim_{\lambda \rightarrow 1} K(\lambda) = \infty$, то $\lim_{s \rightarrow s_0} F_0 = \infty$. Разложим функцию F_0 в ряд в окрестности этой точки. Пусть $s = s_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, тогда

$$\begin{aligned} \lambda \approx 1 - \frac{1}{8} \frac{\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0)}{\rho^2(s_0)} \varepsilon^2 - \\ - \frac{1}{8} \left[\frac{\rho'(s_0) \rho''(s_0) + z'(s_0) z''(s_0)}{\rho^2(s_0)} - \frac{\rho'^3(s_0) + \rho'(s_0) z'^2(s_0)}{\rho^3(s_0)} \right] \varepsilon^3. \end{aligned} \quad (3.24)$$

В окрестности точки $\lambda = 1$ $K(\lambda) = \ln(-2i\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\ln(\lambda - 1) + O(\lambda - 1)$, поэтому при достаточно близких к единице значениях λ можно считать, что

$$K(\lambda) \approx \ln(-2i\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\ln(\lambda - 1).$$

Подставляя сюда (3.24) и учитывая, что $\sqrt{\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0)} = |\mathbf{n}| = 1$, получим:

$$K(\lambda) \approx (\ln(8\rho_0) - \ln \varepsilon) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left[\rho'(s_0)\rho''(s_0) + z'(s_0)z''(s_0) - \frac{\rho'(s_0)}{\rho(s_0)} \right] \varepsilon \right),$$

или, с учётом разложения в ряд Маклорена последнего слагаемого,

$$K(\lambda) \approx (\ln(8\rho_0) - \ln \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \left[\rho'(s_0)\rho''(s_0) + z'(s_0)z''(s_0) - \frac{\rho'(s_0)}{\rho(s_0)} \right]. \quad (3.25)$$

Выражение

$$\frac{1}{\pi\sqrt{a+b}} = \frac{1}{\pi\sqrt{(\rho(s) + \rho(s_0))^2 + (z(s) - z(s_0))^2}} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho(s_0)} - \frac{1}{4\pi} \frac{\rho'(s_0)}{\rho^2(s_0)} \varepsilon.$$

Перемножим почленно последнее выражение и правую часть (3.25), тогда

$$F_0 \approx \frac{1}{4\pi\rho_0} \left\{ 2(\ln(8\rho_0) - \ln \varepsilon) - \left[\frac{\rho'_0}{\rho_0} (\ln(8\rho_0) - \ln \varepsilon) + \rho'_0\rho''_0 + z'_0z''_0 - \frac{\rho'_0}{\rho_0} \right] \varepsilon \right\},$$

откуда видно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($s \rightarrow s_0$) F_0 имеет логарифмическую особенность.

Так как $E(1) = 1$, то $\lim_{s \rightarrow s_0} F_1 = \rho_0 / \pi$. Согласно формуле (3.17),

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_0} F_{k+1} &= \frac{2k}{(k+1)(2k+1)^2} \lim_{s \rightarrow s_0} (\rho^2(s) + \rho_0^2 + (z(s) - z_0)^2) F_k - \\ &- \frac{1}{4k(k+1)(2k+1)^2} \lim_{s \rightarrow s_0} ((\rho(s) - \rho_0)^2 + (z(s) - z_0)^2) ((\rho(s) + \rho_0)^2 + (z(s) - z_0)^2) F_{k-1}. \end{aligned}$$

А так как второй предел, очевидно, равен нулю, то оказывается, что

$$\lim_{s \rightarrow s_0} F_{k+1} = \frac{4k\rho_0^2}{(k+1)(2k+1)^2} \lim_{s \rightarrow s_0} F_k, \quad (k \geq 1).$$

Исследуя функции R_k и используя формулу (3.18), можно получить, что

$$\lim_{s \rightarrow s_0} R_0 = \infty, \quad \lim_{s \rightarrow s_0} R_1 = \frac{n_\rho}{2\pi},$$

$$\lim_{s \rightarrow s_0} R_{k+1} = \frac{4k\rho_0}{(k+1)(2k+1)^2} \left(\rho_0 \lim_{s \rightarrow s_0} R_k + n_\rho \lim_{s \rightarrow s_0} F_k \right) \quad (k \geq 1),$$

причём в окрестности точки $s = s_0$

$$\begin{aligned} R_0 = & -\frac{n_\rho \rho'_0 + n_z z'_0}{2\pi\rho_0} (s - s_0)^{-1} + \frac{n_\rho}{4\pi\rho_0^2} \ln(s - s_0) + \\ & + \left[\frac{n_\rho}{4\pi\rho_0^2} (1 - \ln(8\rho_0)) + \frac{(n_\rho \rho'_0 + n_z z'_0) \rho'_0 - (n_\rho \rho''_0 + n_z z''_0) \rho_0}{4\pi\rho_0^2} + \right. \\ & \left. + \frac{(n_\rho \rho'_0 + n_z z'_0)(\rho'_0 \rho''_0 + z'_0 z''_0)}{2\pi\rho_0} \right] + O(s - s_0). \end{aligned}$$

Если положить $s = s_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) и разложить в ряды компоненты вектора нормали в окрестности точки $s = s_0$, то

$$\begin{aligned} R_0 = & -\frac{(\rho''_0 z'_0 - z''_0 \rho'_0) \varepsilon}{2\pi\rho_0} \varepsilon^{-1} - \frac{z'_0 + z''_0 \varepsilon}{4\pi\rho_0^2} \ln \varepsilon + \\ & + \frac{z'_0 + z''_0 \varepsilon}{4\pi\rho_0^2} (\ln(8\rho_0) - 1) + \frac{(\rho''_0 z'_0 - z''_0 \rho'_0)}{2\pi\rho_0} \left[\frac{\rho_0 + \rho'_0 \varepsilon}{2\pi\rho_0} + (\rho'_0 \rho''_0 + z'_0 z''_0) \varepsilon \right] + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

откуда видно, что R_0 имеет в точке $s = s_0$ логарифмическую особенность.

Таким образом, доказана

Теорема 3.2. *В пространственном осесимметричном случае из всех функций F_k , R_k , входящих в интегральные соотношения для полигармонических функций, только функции F_0 , R_0 имеют особенности в точке $s = s_0$ ($r = 0$), а именно обе эти функции имеют логарифмическую, т.е. интегрируемую, особенность.*

§ 3.4. Построение численного алгоритма решения краевых задач для полигармонического уравнения на основе метода граничных элементов

Полученные в § 3.2 интегральные представления весьма полезны для построения численного алгоритма решения полигармонического уравнения методом граничных элементов (МГЭ) (см. [5], [9], [69]), суть которого состоит в аппроксимации границы области системой конечного числа достаточно малых (граничных) элементов и в аппроксимации рассматриваемых функций на каждом элементе.

МГЭ был разработан в Саутгемптонском университете на основе проведенных там исследований по методам решения классических интегральных уравнений и конечным элементам. Появление и прогресс МГЭ обусловлены тем, что большой класс краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями различных типов, сводится к интегральным уравнениям Вольтерра и Фредгольма, которые явились теоретической основой для МГЭ. Достаточно долго воспользоваться результатами теории интегральных уравнений не удавалось из-за огромного объема вычислительной работы. С развитием вычислительной техники это препятствие преодолевалось и с конца 60-х годов XX столетия началось бурное развитие МГЭ. Большой вклад в создание различных вариантов МГЭ внесли труды западных и отечественных ученых П.К. Бенерджи, Р. Баттерфилда, К. Бреббиа, Л. Вроубела, С. Крауча, А. Старфилда, С. Кобаяши, Н.И. Мухелишвили, С.Г. Михлина, В.Д. Купрадзе, Ю.В. Верюжского, А.И. Цейтлина, А.Я. Александрова, П.И. Перлина, В.А. Гришина и др. Методы решения краевых задач на базе интегральных уравнений оказались более точными и экономичными, чем методы, основанные на аппроксимации дифференциальных операторов (метод конечных элементов, метод конечных разностей). В этой связи развитие и модификация различных вариантов МГЭ является актуальной научной проблемой.

МГЭ применяется, как правило, для решения задач механики, математические модели которых описываются гармоническим уравнением. В этом параграфе будет предложено применение МГЭ для решения различных краевых задач для полигармонического уравнения.

Для каждого такого элемента граница является гладкой, поэтому множитель $\varepsilon = 0.5$. С учетом такой аппроксимации, (3.26) и (3.27) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon u(P_i) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^N u_k(P_j) \int_{L_j} H_k(P, P_i) ds(P) - \sum_{j=1}^N v_k(P_j) \int_{L_j} G_k(P, P_i) ds(P) \right) &= 0, \\ \varepsilon u_1(P_i) + \sum_{k=0}^{n-2} \left(\sum_{j=1}^N u_{k+1}(P_j) \int_{L_j} H_k(P, P_i) ds(P) - \sum_{j=1}^N v_{k+1}(P_j) \int_{L_j} G_k(P, P_i) ds(P) \right) &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \varepsilon u_{n-2}(P_i) + \sum_{j=1}^N u_{n-2}(P_j) \int_{L_j} H_0(P, P_i) ds(P) - \sum_{j=1}^N v_{n-2}(P_j) \int_{L_j} G_0(P, P_i) ds(P) + \\ + \sum_{j=1}^N u_{n-1}(P_j) \int_{L_j} H_1(P, P_i) ds(P) - \sum_{j=1}^N v_{n-1}(P_j) \int_{L_j} G_1(P, P_i) ds(P) &= 0, \\ \varepsilon u_{n-1}(P_i) + \sum_{j=1}^N u_{n-1}(P_j) \int_{L_j} H_0(P, P_i) ds(P) - \sum_{j=1}^N v_{n-1}(P_j) \int_{L_j} G_0(P, P_i) ds(P) &= 0. \end{aligned}$$

Тогда система равенств (3.10) может быть сведена к системе линейных уравнений относительно значений вспомогательных функций в контрольных точках:

$$\begin{aligned} (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}^{(0)}) \mathbf{U}^{(n-1)} - \mathbf{B}^{(0)} \mathbf{V}^{(n-1)} &= 0, \\ (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}^{(0)}) \mathbf{U}^{(n-2)} - \mathbf{B}^{(0)} \mathbf{V}^{(n-2)} + \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{U}^{(n-1)} - \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{V}^{(n-1)} &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}^{(0)}) \mathbf{U}^{(0)} - \mathbf{B}^{(0)} \mathbf{V}^{(0)} + \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{U}^{(1)} - \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{V}^{(1)} + \dots + \mathbf{A}^{(n-1)} \mathbf{U}^{(n-1)} - \mathbf{B}^{(n-1)} \mathbf{V}^{(n-1)} &= 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

где \mathbf{E} — единичная матрица, $\mathbf{U}^{(k)}, \mathbf{V}^{(k)}$ — вектор-столбцы, компонентами которых являются значения функций в контрольных точках:

$$U_j^{(k)} = u_k(P_j), \quad V_j^{(k)} = v_k(P_j), \quad j = \overline{1, N}, \quad k = \overline{0, n-1},$$

$\mathbf{A}^{(k)}, \mathbf{B}^{(k)}$ — матрицы, элементы которых вычисляются интегрированием соответствующих функций по граничным элементам:

$$A_{i,j}^{(k)} = \int_{L_j} H_k(P, P_i) ds, \quad B_{i,j}^{(k)} = \int_{L_j} G_k(P, P_i) ds, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Для построения системы (3.28) необходимо проинтегрировать функции G_k и их производные H_k вдоль отдельных элементов. В § 3.3 была доказана теорема 3.1, согласно которой ни одна из функций G_k , H_k не имеет неинтегрируемых особенностей, поэтому при вычислении значений интегралов не возникнет серьезных трудностей. Их можно вычислить численно с любой степенью точности, используя формулы численного интегрирования; при этом следует учесть, что интегралы $B_{i,j}^{(0)}$ имеют логарифмические особенности и для их вычисления использовать специальные квадратурные формулы (см., например, [101]). Однако можно получить и аналитические выражения для $A_{i,j}^{(k)}$ и $B_{i,j}^{(k)}$. В частности, при $k=0$ и $k=1$:

$$\begin{aligned}
A_{i,j}^{(0)} &= \frac{-d}{\pi\sqrt{4ac-b^2}} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right\}_{x_j}^{x_{j+1}}, \\
A_{i,j}^{(1)} &= \frac{d}{8\pi a} \left\{ 3ax - \sqrt{4ac-b^2} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - \left(ax + \frac{b}{2} \right) \ln |ax^2 + bx + c| \right\}_{x_j}^{x_{j+1}}, \\
B_{i,j}^{(0)} &= \frac{(x_{j+1} - x_j)}{4\pi h_j} \left\{ 2ax - \sqrt{4ac-b^2} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - \left(ax + \frac{b}{2} \right) \ln |ax^2 + bx + c| \right\}_{x_j}^{x_{j+1}}, \\
B_{i,j}^{(1)} &= \frac{(x_{j+1} - x_j)}{24\pi h_j} \left\{ \frac{4a^2}{3} x^3 + 2abx^2 + \left(5ac - \frac{b^2}{4} \right) x - \frac{(4ac-b^2)^{\frac{3}{2}}}{4a} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{a^2 x^3}{2} + \frac{3ab}{4} x^2 + \frac{3}{2} acx + \frac{3bc}{4} - \frac{b^3}{8a} \right) \ln |ax^2 + bx + c| \right\}_{x_j}^{x_{j+1}}, \tag{3.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d &= (y_j - y_i^*) - \frac{(y_{j+1} - y_j)}{(x_{j+1} - x_j)} (x_j - x_i^*), \quad c = x_i^{*2} + \left(y_i^* - \frac{x_{j+1}y_j - x_jy_{j+1}}{x_{j+1} - x_j} \right)^2, \\
a &= \frac{h_j^2}{(x_{j+1} - x_j)^2}, \quad b = -2x_i^* + 2 \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} \left(\frac{x_{j+1}y_j - x_jy_{j+1}}{x_{j+1} - x_j} - y_i^* \right), \tag{3.30}
\end{aligned}$$

где h_j – длина граничного элемента L_j .

2°. В § 3.2 было показано, что если T – пространственная область, граница Σ которой является осесимметричной поверхностью с образующей Γ , то в случае, если функции u_k не зависят от полярного угла φ в цилиндрических координатах, справедливы интегральные соотношения (3.13). С целью унифицирования обозначений заменим переменные (z, ρ) цилиндрических координат на (x, y) .

В этом случае на граничные элементы разбивается кривая Γ , т.е. можно считать, что $\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j$, где Γ_j – отрезок прямой, соединяющий точки (x_j, y_j) , (x_{j+1}, y_{j+1}) , принадлежащие образующей. Аналогично случаю плоской области, можно свести соотношения (3.13) сначала к системе интегральных уравнений, а затем, аппроксимируя значения функций u_k и v_k на каждом элементе, к системе линейных алгебраических уравнений вида (3.28), где элементы матриц $\mathbf{A}^{(k)}$, $\mathbf{B}^{(k)}$:

$$A_{i,j}^{(k)} = \int_{\Gamma_j} R_k(P, P_i) y(P) ds, \quad B_{i,j}^{(k)} = \int_{\Gamma_j} F_k(P, P_i) y(P) ds, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

При вычислении этих значений следует учесть, что подынтегральные выражения элементов $A_{i,j}^{(k)}$, $B_{i,j}^{(k)}$ содержат полные эллиптические интегралы; для их вычисления можно воспользоваться полиномиальными представлениями (см. [69]).

3°. Объединим далее рассмотрение обоих случаев. Для этого обозначим

$$C = \begin{cases} \partial T & (\text{для плоской области}), \\ \Gamma & (\text{для осесимметричной пространственной области}). \end{cases}$$

Пусть граница C задана функциями дуговой абсциссы ($s \in C$) $x = x(s)$, $y = y(s)$, непрерывными и дифференцируемыми вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка включительно. Если контур C разбивается на N элементов, то система уравнений (3.28) представляет систему Nn линейных алгебраических уравнений относительно $2Nn$ компонент. Для решения системы уравнений необходимо задать Nn значений вышеназванных компонент или их линейных комбинаций.

Предложенная в § 1.6 классификация краевых задач для полигармонического уравнения удовлетворяет этому требованию и в новых обозначениях принимает вид:

- 1) задача Дирихле: заданы граничные значения функций u_k ($k = \overline{0, n-1}$);
- 2) задача Неймана: на границе заданы нормальные производные v_k ($k = \overline{0, n-1}$);
- 3) смешанная задача: на границе задана часть функций u_k и часть функций v_k .

Следует заметить, что граничные условия (2.21) основной краевой задачи непосредственно не позволяют задать необходимое количество значений вспомогательных функций, входящих в систему (3.28). Однако можно показать, что граничные условия (2.21) однозначно определяют n первых значений функций $u_k(s)$ и $v_k(s)$. В самом деле, функции u , $\frac{\partial^k u}{\partial n^k}$ переменной s и их производные по s выражаются через частные производные от функции $u(x, y)$ линейно с коэффициентами, определяемыми функциями $x(s)$, $y(s)$ и их кратными производными. Функции $u_k(s)$ и $v_k(s)$ также выражаются линейно через частные производные от функции $u(x, y)$. Объединяя эти зависимости, получаем замкнутую систему линейных уравнений относительно неизвестных функций $u_k(s)$, $v_k(s)$ и неизвестных частных производных функции $u(x, y)$ на границе. По заданным граничным условиям (2.21) можно найти n первых значений функций $u_k(s)$ и $v_k(s)$.

Таким образом, решение основной краевой задачи сводится к решению системы n линейных интегральных уравнений (3.10) или (3.13) со смешенными граничными условиями или $n \cdot N$ линейных алгебраических уравнений (3.28).

В частности, граничные условия основной краевой задачи для бигармонического уравнения $\Delta^2 u = 0$ (описывает математические модели плоской задачи теории упругости и гидродинамической задачи) сразу представляют граничные условия смешанной краевой задачи для системы вспомогательных функций:

$$u_0|_C = f_0(s), \quad v_0|_C = f_1(s), \quad s \in C,$$

а искомыми являются граничные значения функций u_1 и v_1 .

4°. Решив систему (3.28) и определив неизвестные значения функций u_k, v_k на границе области T , можно, согласно (3.10), вычислить значение искомой функции u в любой внутренней точке P_0 . В частности, в случае плоской области:

$$u(P_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^N V_j^{(k)} \int_{L_j} G_k(P, P_0) ds(P) - \sum_{j=1}^N U_j^{(k)} \int_{L_j} H_k(P, P_0) ds(P) \right). \quad (3.31)$$

Интегралы, входящие в (3.31) могут быть вычислены аналитически или с применением формул численного интегрирования. При $k=0$ и $k=1$ аналитические выражения для этих интегралов, очевидно, будут иметь вид, аналогичный формулам (3.29), а выражения (3.30) в этих формулах преобразуются к виду:

$$a = \frac{h_j^2}{(x_{j+1} - x_j)^2}, \quad b = -2x_0 + 2 \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} \left(\frac{x_{j+1}y_j - x_jy_{j+1}}{x_{j+1} - x_j} - y_0 \right),$$

$$c = x_0^2 + \left(y_0 - \frac{x_{j+1}y_j - x_jy_{j+1}}{x_{j+1} - x_j} \right)^2, \quad d = (y_j - y_0) - \frac{(y_{j+1} - y_j)}{(x_{j+1} - x_j)} (x_j - x_0),$$

где (x_0, y_0) – координаты внутренней точки P_0 .

§ 3.5. Обоснование сходимости, оценки точности и основные преимущества предложенного метода

Основное внимание в этой главе было уделено построению численного алгоритма решения краевых задач для полигармонических уравнений. Этот численный алгоритм основывается на методе граничных элементов, который является одним из наиболее молодых и перспективных. Вопрос о строгом математическом обосновании этого метода на сегодняшний день остается открытым и может являться предметом отдельного исследования. Однако здесь мы можем произвести некоторые оценки точности и предложить схему доказательства сходимости разработанного алгоритма. Кроме того, в этом же параграфе будут описаны основные преимущества данного метода.

1°. Поскольку предложенный численный метод предполагает и аппроксимацию границы области некоторым многоугольником, и аппроксимацию вспомогательных функций в пределах сторон этого многоугольника, то и доказательство сходимости метода должно проводиться в два этапа. Во-первых, следует оценить погрешность вычисления значений искомой функции при переходе от области T к многоугольнику, ограниченному граничными элементами. Во-вторых, необходимо доказать сходимость интегральных сумм в системе уравнений (3.27) к интегралам (3.26).

Выясним сначала вопрос о том, как влияет на значение искомой полигармонической функции аппроксимация границы области ∂T некоторой ломанной L . Пусть эта ломанная ограничивает некоторую многоугольную область Ω . По формуле (3.2) значение n -гармонической функции внутри области T определяется значениями на границе области вспомогательных полигармонических функций и их нормальных производных:

$$u(x_0, y_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial T} \left(\frac{\partial u_k}{\partial n} G_k - u_k \frac{\partial G_k}{\partial n} \right) ds. \quad (3.32)$$

Чтобы оценить погрешность вычисления значения функции u , следует записать модуль разности одного из интегралов в правой части последнего равенства и интеграла от того же выражения по ломанной L . В силу тождества Грина получим равенство:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial T} \left(\frac{\partial u_k}{\partial n} G_k - u_k \frac{\partial G_k}{\partial n} \right) ds - \int_L \left(\frac{\partial u_k}{\partial n} G_k - u_k \frac{\partial G_k}{\partial n} \right) ds \right| = \\ & = \left| \iint_T (\Delta u_k G_k - u_k \Delta G_k) d\tau - \iint_{\Omega} (\Delta u_k G_k - u_k \Delta G_k) d\tau \right|. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Далее, обозначая для краткости $Q_k(x, y) = \Delta u_k G_k - u_k \Delta G_k$, имеем:

$$\left| \iint_T Q_k d\tau - \iint_{\Omega} Q_k d\tau \right| = \left| \iint_{T-\Omega} Q_k d\tau \right| \leq \iint_{T-\Omega} |Q_k| d\tau \leq M_k \cdot S, \quad (3.34)$$

где S – площадь области $T - \Omega$, а M_k – наибольшее значение $|Q_k|$ в этой области.

Тогда, с учетом (3.33) и (3.34), получим окончательно для правой части (3.32):

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial T} \left(\frac{\partial u_k}{\partial n} G_k - u_k \frac{\partial G_k}{\partial n} \right) ds - \sum_{k=0}^{n-1} \int_L \left(\frac{\partial u_k}{\partial n} G_k - u_k \frac{\partial G_k}{\partial n} \right) ds \right| \leq n \cdot M \cdot S, \quad (3.35)$$

где $M = \max(M_k, k = \overline{0, n-1})$.

Из (3.35) видно, что погрешность при аппроксимации границы прямо пропорциональна площади S , заключенной между границей области ∂T и ломанной L , составленной из граничных элементов. Понятно, что чем больше число N граничных элементов, аппроксимирующих границу, тем эта площадь меньше, и площадь S должна стремиться к нулю при неограниченном возрастании N .

Перейдем теперь ко второму шагу доказательства, т.е. покажем, что суммы в системе (3.27) сходятся к интегралам (3.26). В самом деле, можно заметить, что суммы в системе уравнений (3.27) представляют интегральные суммы Римана – Стильеса [65]. Поскольку, согласно Определению 1.1, решение ищется непрерывное с непрерывными частными производными до порядка $2n$, то, следовательно, справедлива интегральная формула Грина, а значит интегралы, входящие в (3.26), существуют. Поэтому при беспредельном увеличении числа N граничных элементов интегральные суммы Римана-Стильеса (3.27) должны сходиться к интегралам (3.26), что служит обоснованием применяемого численного метода и одновременно доказывает единственность решения. Более точные оценки и оптимальный выбор элементов нуждаются, конечно, в дополнительном исследовании. Более подробная информация об интеграле Стильеса и условиях его существования изложена, например, в [81].

В следующем параграфе будут приведены демонстрационные примеры, в которых дано сравнение численных расчетов с аналитическими данными и построены соответствующие графики. Эти примеры свидетельствуют о высокой эффективности численного алгоритма. В некоторых примерах этой и следующей главы построены также графики погрешности данного метода, из которых видно, что при увеличении числа граничных элементов погрешность быстро убывает.

2°. Для численного решения уравнений с частными производными наиболее часто применяются *разностные методы*, основанные на том, что все производные, входящие в уравнение и краевые условия, заменяются конечными разностями значений искомой функции в узлах некоторой сетки в области изменения переменных (подробнее о конечно-разностных методах см., например, [82]). Однако для рассматриваемого класса задач такой подход трудно или даже невозможно применить в силу необходимости рассмотрения производных высокого порядка.

Еще одним важным преимуществом предлагаемого в данной работе метода является то, что он позволяет перейти к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений искомых функций *только на границе области*, в отличие от разностных методов, где необходимо построение сетки на всей области изменения переменных.

Кроме того, разностной схеме удовлетворяет *разностное решение*, т.е. некоторый массив значений искомой функции в узлах составленной сетки, тогда как применение МГЭ, как было показано в § 3.5, позволяет определить значение искомой функции в любой точке внутри области и на ее границе. И хотя нахождение этих значений сопряжено с необходимостью вычисления интегралов, мы считаем, что на современном этапе развития ЭВМ это не должно представлять серьезных сложностей.

В силу изложенного выше, можно сказать, что для рассматриваемого класса задач применение разработанного численного метода является более целесообразным, чем применение конечно-разностных схем.

§ 3.6. Тестовые примеры

В этом параграфе будут рассмотрены конкретные числовые примеры решения различных краевых задач для полигармонического уравнения до четвертого порядка включительно в плоских (односвязных и многосвязных) и пространственных осесимметричных областях. Все представленные примеры построены по одному и тому же принципу:

- в качестве эталона задается некоторая полигармоническая функция, по которой строятся граничные условия той или иной краевой задачи;
- данная задача решается по описанному в этой главе алгоритму с применением метода граничных элементов;
- полученное таким образом решение сравнивается с соответствующими значениями для заданной эталонной функции, которая, очевидно, будет являться точным решением рассматриваемой задачи.

Сравнение численных результатов с аналитическими данными показано на графиках. Можно также ввести понятие погрешности, которое будет использоваться в данной работе для оценки точности результатов численного решения:

Определение 3.1. *Средней относительной погрешностью* вычисления значений функции u на некоторой кривой Γ будем называть величину

$$\delta(u) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left| \frac{\tilde{u}_k - u(s_k)}{u(s_k)} \right| \cdot 100\%,$$

где N – число узловых точек s_k на кривой Γ , $u(s_k)$ – точное значение функции u в узловой точке s_k , \tilde{u}_k – соответствующее значение, найденное численно.

Пример 3.1. Осесимметричная задача Дирихле в пространственной области, ограниченной эллипсоидом

Рассмотрим в области, ограниченной эллипсоидом с полуосями $a_1 = a_2 = a = 1$, $b = 0.75$, задачу Дирихле для полигармонической функции третьего порядка $u = z(x^2 + y^2 + z^2)^2$. В цилиндрических координатах функция u принимает вид $u = z(z^2 + \rho^2)^2$, т.е. не зависит от полярного угла и является осесимметричной. Тогда с учетом принятых в 2^о, § 3.3 обозначений, можно записать: $u = x(x^2 + y^2)^2$. Отсюда можно найти значения самой функции u на границе меридионального сечения, а также граничные значения вспомогательных функций:

$$u_1 = \Delta u = 28x(x^2 + y^2), \quad u_2 = \Delta^2 u = 280x.$$

Также аналитически могут быть найдены и функции v_0, v_1, v_2 , которые являются искомыми в задаче Дирихле, и их граничные значения можно сравнить со значениями, полученными численно. Результаты решения задачи при $N = 40$ представлены на рис. 3.1 (а, б, в): найденные численно узловые значения искомых функций изображены точками; сплошные линии – графики функций, найденных аналитически. Здесь $p = 2.763$ - длина образующей эллипсоида. Из графиков наблюдается хорошее совпадение численных и аналитических результатов.

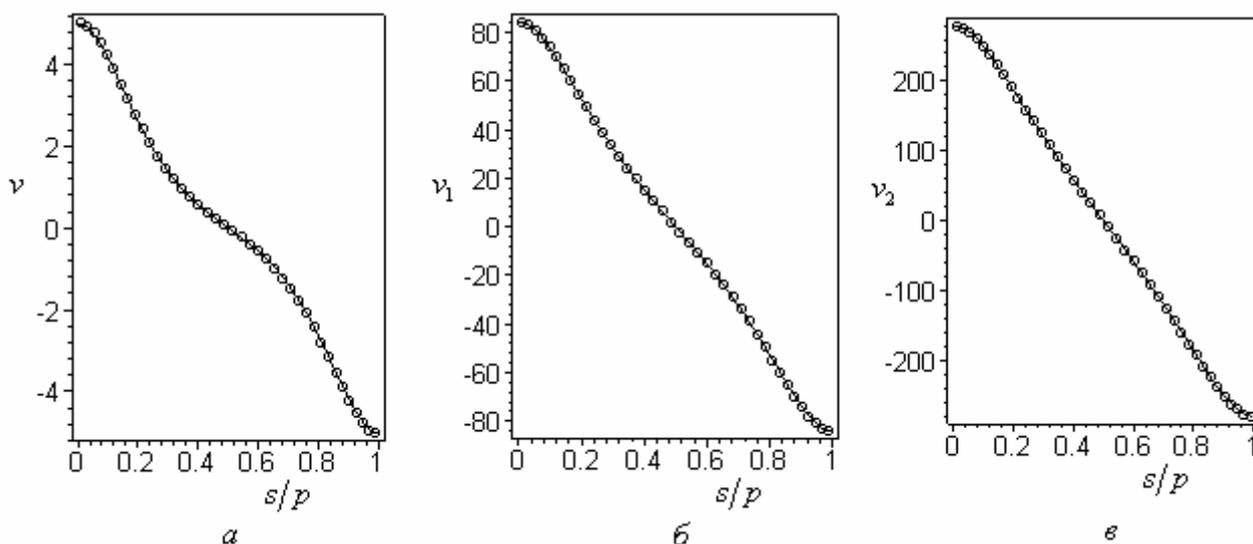


Рисунок 3.1

Пример 3.2. Основная краевая задача в плоской односвязной области

Пусть искомая функция составлена из гармонической, бигармонической функций и полигармонической функции третьего порядка

$$u = \text{Im}(x + iy)^4 + \frac{28}{15}xy(x^2 + y^2) + (x + y)(x^4 + y^4).$$

На рис. 3.2 представлены результаты вычислений для основной краевой задачи для полигармонической функции третьего порядка в эллипсе с полуосями $a = 1, b = 0.75$; $p = 5.526$ - периметр этого эллипса. Зависимость заданных краевых значений функций u, u_n, u_{nn} от s/p показана на рис. 3.2 (а, б, в) сплошными линиями, а график функции u_1 показан на рис. 3.2 в штриховой линией. Результаты вычислений в узловых точках при $N = 40$ изображены на рис. 3.2 (г, д, е) точками; сплошные линии – графики функций, найденных аналитически.

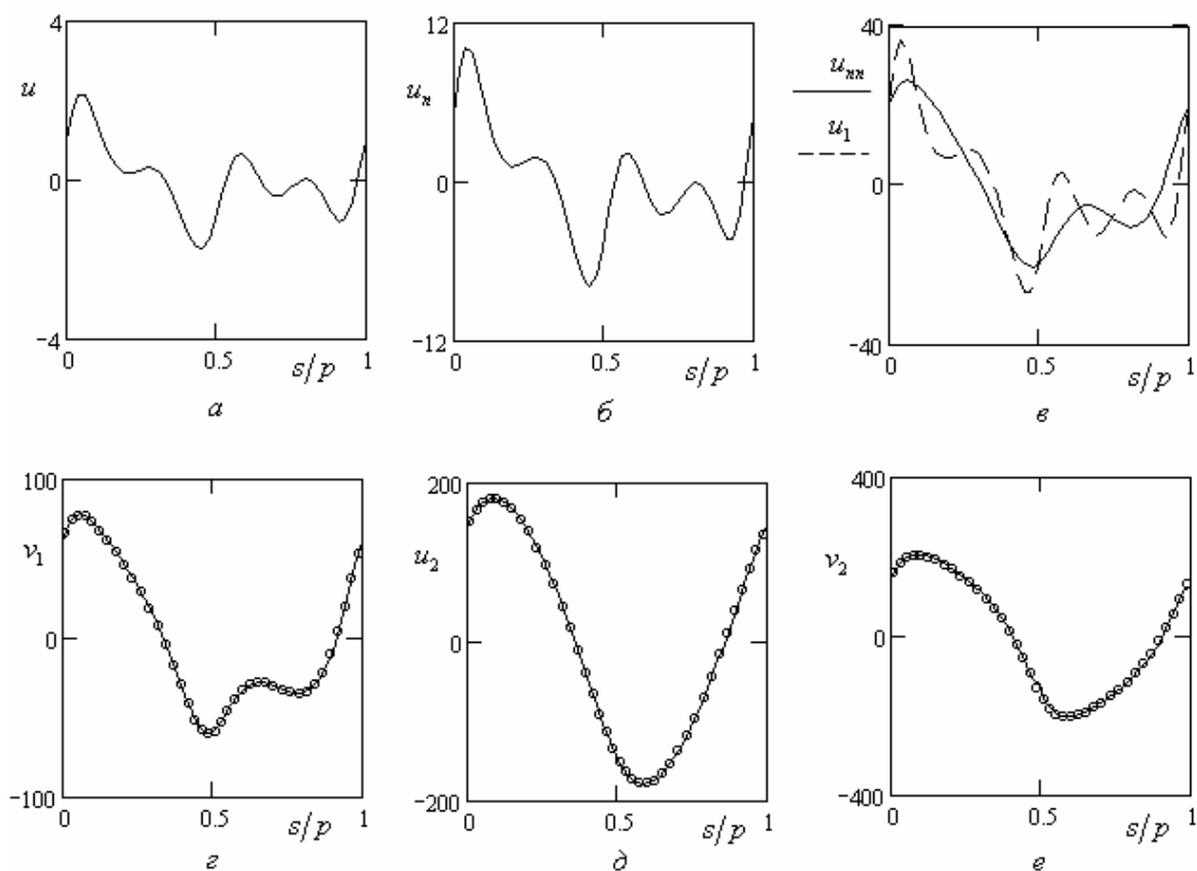


Рисунок 3.2

На рис. 3.3. черными линиями показаны графики зависимости от числа граничных элементов N средней относительной погрешности для функций v_1 , u_2 , v_2 ; красными линиями изображены графики функции c/N^2 , где c – некоторая константа. Из этих графиков видно, что с увеличением числа N граничных элементов погрешность убывает как $1/N^2$, а также что уже при небольшом значении N можно говорить о высокой точности предложенного метода.

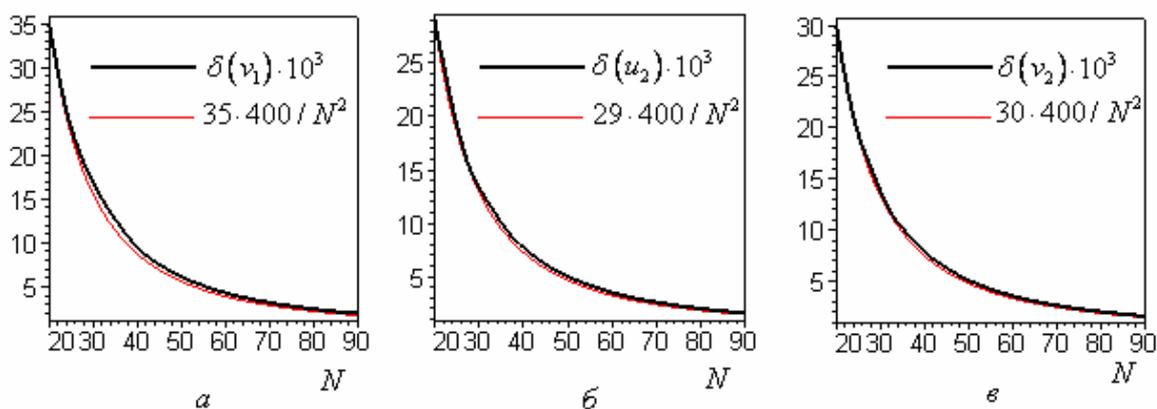


Рисунок 3.3

Пример 3.3. Задача Дирихле в плоской двусвязной области

Рассмотрим теперь задачу Дирихле для бигармонического уравнения в двусвязной области, ограниченной двумя эллипсами, фокусы которых лежат на оси абсцисс:

$$\partial T_1 : \begin{cases} x = a_1 \cos t + x_0, \\ y = -b_1 \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi), \quad \partial T_2 : \begin{cases} x = a_2 \cos t, \\ y = b_2 \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi).$$

На рис. 3.4 изображена такая область при значениях $a_1 = 1$, $b_1 = 0.75$, $x_0 = 0.5$, $a_2 = 2$, $b_2 = 1.5$.

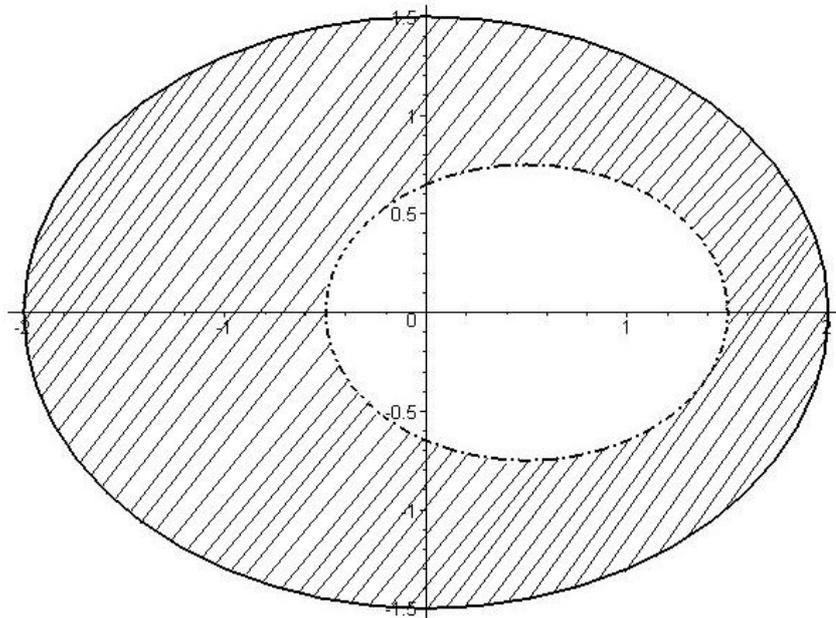


Рисунок 3.4

В качестве эталонной выберем, например, бигармоническую функцию

$$u = x^3(x^2 - 5y^2) + \frac{25}{12}xy(x^2 + y^2). \quad (3.36)$$

По ней составим граничные условия задачи Дирихле. На рис. 3.5 (а, б) показано сравнение результатов численного решения задачи с аналитическими данными, полученными из функции (3.36). Здесь представлена зависимость функций v_0 , v_1 от нормированной дуговой координаты на границе области: значения функций на внешней границе изображены сплошными линиями, на внутренней — штрихпунктирными. Число граничных элементов на каждой границе $N = 50$.

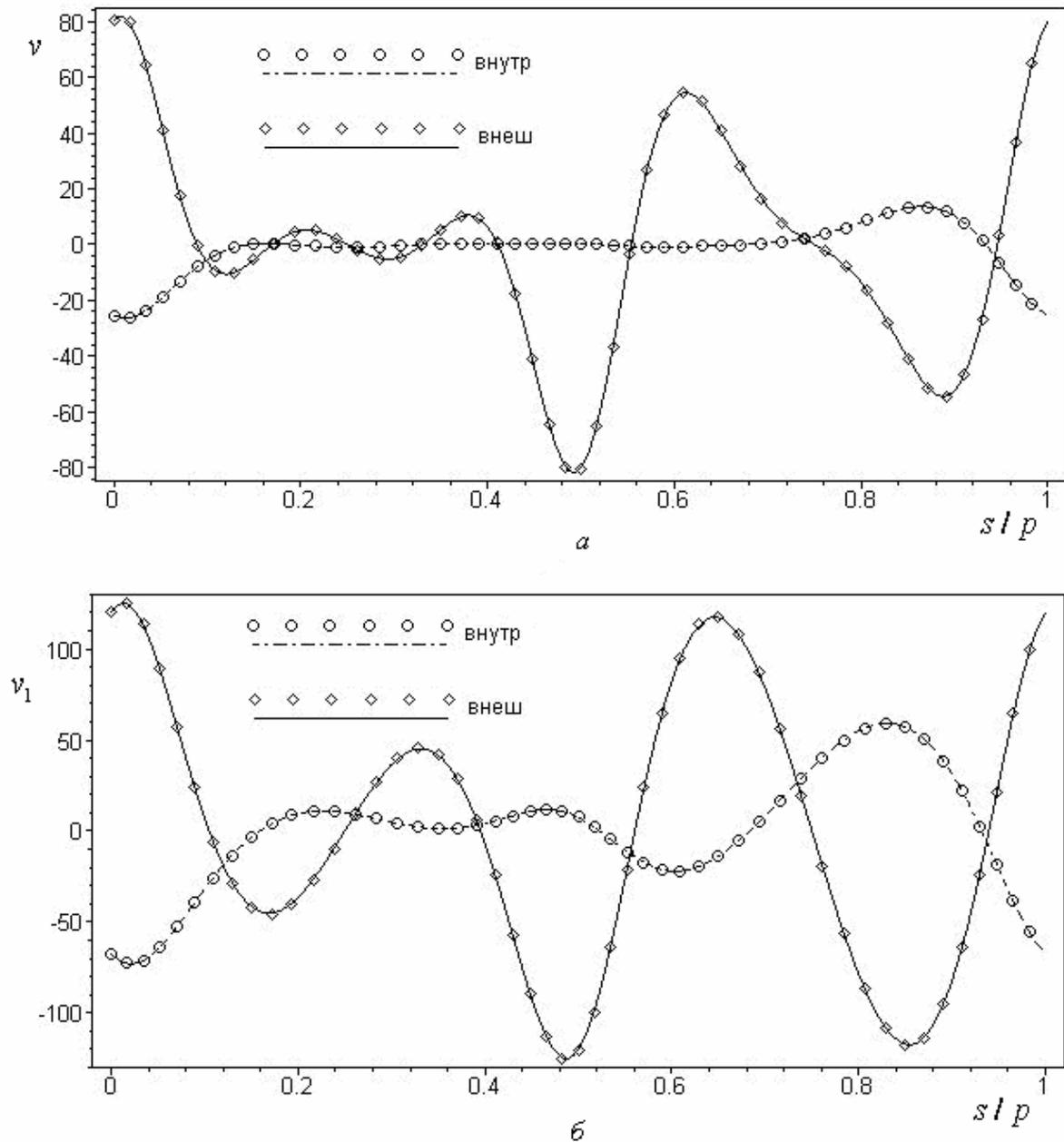


Рисунок 3.5

Пример 3.4. Задача Неймана в плоской односвязной области

В эллипсе с полуосями $a=1$, $b=0.4$ рассматривается задача Неймана для полигармонической функции четвертого порядка $u = xy(x^6 + y^6)$.

Для однозначности решения задачи Неймана, кроме граничных значений функций v, v_1, v_2, v_3 , необходимо также задать значение искомой функции в заданной точке. Пусть, например, $u(a,0) = 0$. Все производные могут быть найдены аналитически, и их можно сравнить с численными расчётами.

На рис. 3.6 *а* показана зависимость граничных значений функций v, v_1, v_2, v_3 от нормированной криволинейной координаты s/p . На рис. 3.6 (*б, в, г, д*) – результаты вычислений. Число элементов на эллипсе $N = 160$; $p = 4.603$ - периметр эллипса. Граничные значения всех вспомогательных функций имеют период $T = 0.5p$ и антисимметричны относительно $s_0 = T/2 = 0.25p$.

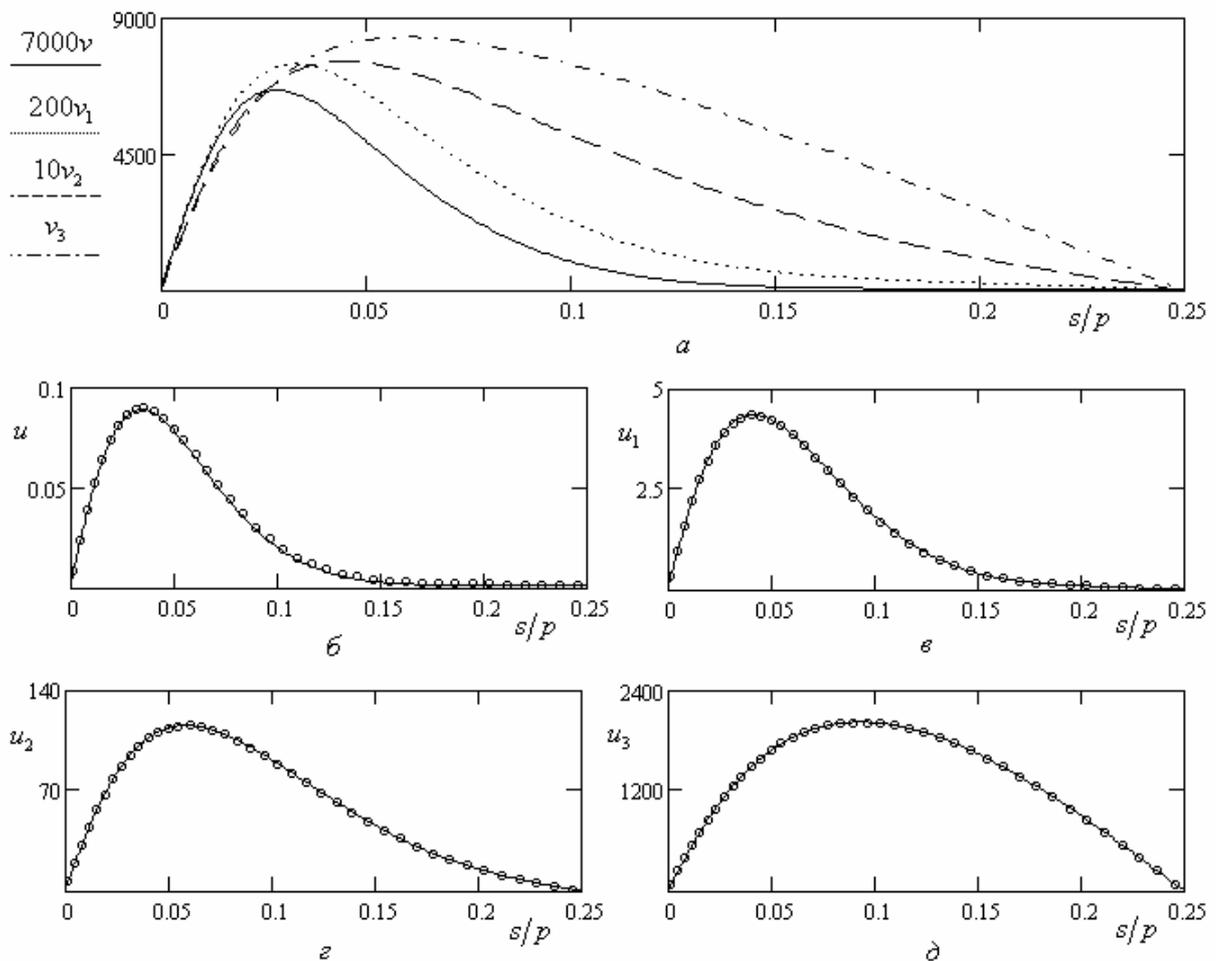


Рисунок 3.6

На рис. 3.7. показана зависимость величин $\delta(u), \delta(u_1), \delta(u_2), \delta(u_3)$ от N .

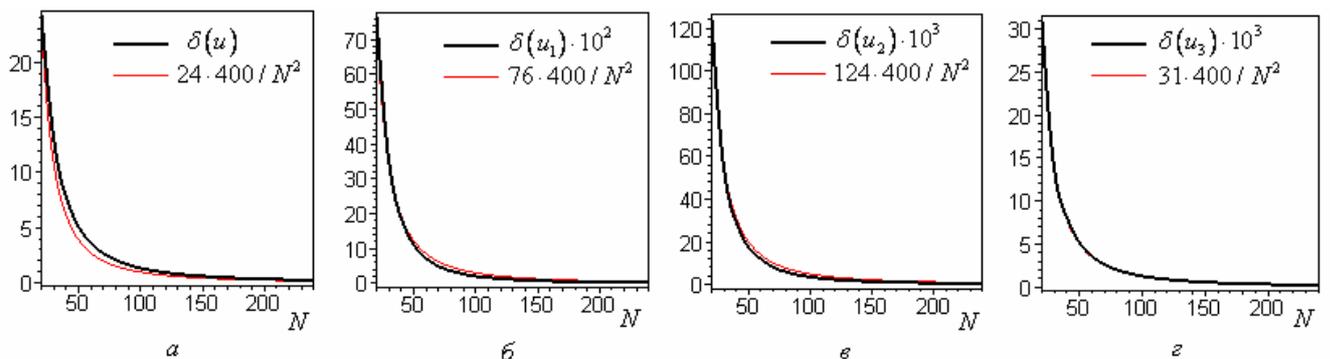


Рисунок 3.7

Пример 3.5. Задача Дирихле в области, ограниченной астроидой

В качестве примера, иллюстрирующего случай, когда граница области не является гладкой, рассматривается задача Дирихле для бигармонического уравнения в односвязной области, ограниченной астроидой, параметрическое уравнение которой

$$\partial T: \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi).$$

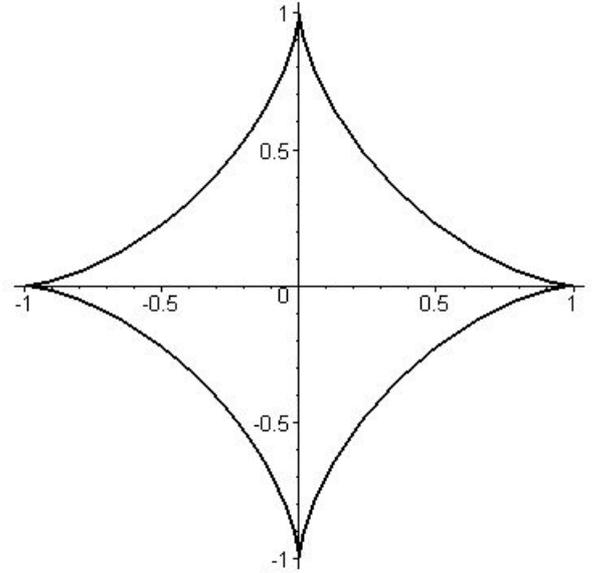


Рисунок 3.8

Эта кривая изображена на рис. 3.8.

Поскольку кривая не является гладкой, то выбирать граничные элементы следует таким образом, чтобы точки, в которых нарушается гладкость, были точками начала (конца) прямолинейного граничного элемента.

Для построения граничных условий за эталонную примем бигармоническую функцию $u = xy(x^2 + y^2)$. Тогда граничные значения вспомогательных функций имеют период $T = 0.5p$ и антисимметричны относительно $s_0 = T/2 = 0.25p$, где $p = 6$ – периметр астроиды. Результаты решения задачи методом граничных элементов при $N = 80$ и сравнение их с точными данными показаны на рис. 3.9 (а, б).

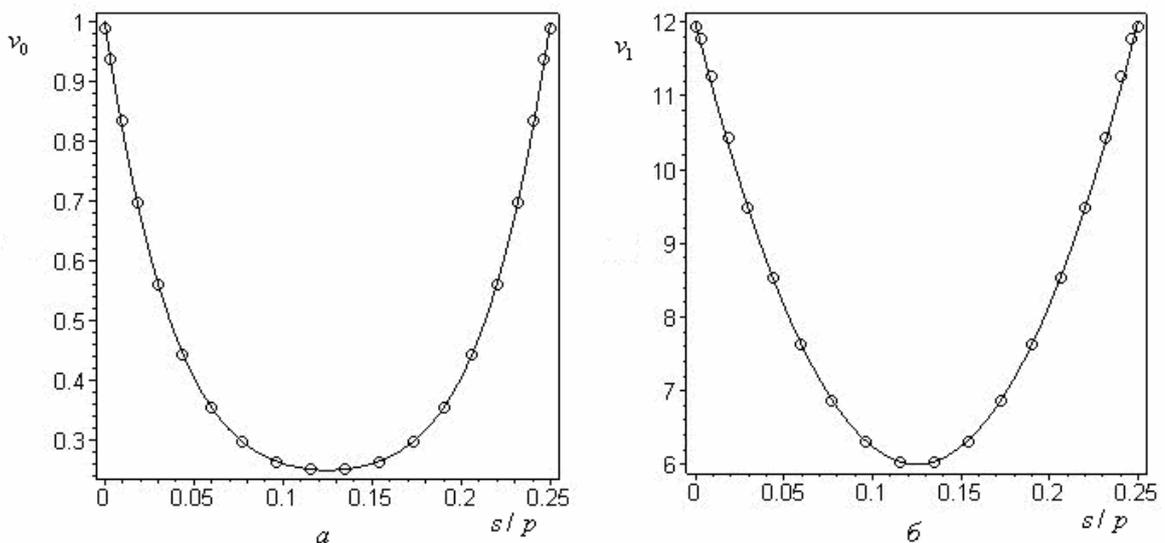


Рисунок 3.9

§ 3.7. Выводы по главе 3

В главе предложен универсальный численный метод решения различных краевых задач для полигармонического уравнения произвольного порядка в плоской и осесимметричной пространственной области. В частности рассматриваются задачи, описывающие математические модели некоторых явлений, изучаемых в механике сплошных сред. Разработанный алгоритм основан на интегральных соотношениях для полигармонической функции, полученных из формулы Грина, и на методе граничных элементов. Каждая из рассматриваемых задач сводится тогда к конечной системе линейных алгебраических уравнений, относительно граничных значений вспомогательных функций, по которым может быть найдено значение искомой полигармонической функции в любой точке области задачи. Показано, что предложенный метод обеспечивает хорошую сходимость, даны некоторые оценки точности и представлено сравнение разработанного алгоритма с другими численными методами, которые могут быть применены для рассматриваемого класса задач. Из тестовых примеров, рассмотренных в конце главы, наблюдается хорошее совпадение численных результатов с аналитическими данными, что свидетельствует о высокой точности предложенного численного алгоритма. Кроме того, приведенные в примерах 3.2 и 3.4 графики зависимости от числа граничных элементов средних относительных погрешностей искомых вспомогательных функций показывают, что с увеличением числа N граничных элементов погрешность убывает как $1/N^2$.

ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД С ПРИМЕНЕНИЕМ РАЗРАБОТАННОГО АЛГОРИТМА

Как было показано в главе 1, математические модели многих явлений, изучаемых в механике сплошных сред, описываются гармоническими, бигармоническими, а также полигармоническими уравнениями высшего порядка. Решениям задач теории упругости с применением методов комплексного анализа посвящены работы многих известных математиков: Г.В. Колосова [43], Л.Д. Ландау [47], Н.И. Мухелишвили [51], С.П. Тимошенко [73] – [74], С.А. Лурье [98], П.И. Перлина [53], А.И. Каландия [35], В.В. Сильвестрова [62] – [63], Ю.А. Аменадзе [2], И.Т. Артемьева [3] и др. Однако удобные аналитические выражения получены только для некоторых областей частного вида. В случае же областей сложной формы незаменимым остается применение численных методов.

В этой главе будет показана возможность применения разработанного численного метода к решению задач гидродинамики и теории упругости, рассмотренных в главе 1. В параграфе 4.1 подробно рассмотрена задача кручения призматического стержня. В параграфе 4.2 предложенный численный алгоритм применяется к решению плоской задачи теории упругости; проведена дискретизация условий однозначности смещений, которые необходимо учитывать при решении в многосвязной области. Параграф 4.3 посвящен моделированию изгиба тонких пластинок в условиях жесткой заделки и свободного опирания края. В параграфе 4.4 рассмотрена гидродинамическая задача о движении цилиндра в вязкой жидкости. Кроме того, в каждом из этих параграфов представлены тестовые примеры, в которых полученные численно результаты сравниваются с известными аналитическими и решениями для некоторых областей и подтверждающие высокую точность предложенного метода и эффективность его применения для решения различных прикладных задач. Параграф 4.5 содержит описание программного комплекса, созданного для моделирования исследованных в данной работе задач механики. Новые математические модели рассмотрены в параграфе 4.6.

Некоторые результаты этой главы опубликованы в работах автора [30], [34].

§ 4.1. Применение МГЭ к решению задачи кручения стержня

1°. В § 2.1 было показано, что напряжения при кручении стержня определяются функцией кручения $f(x, y)$, которая в плоском сечении удовлетворяет гармоническому уравнению

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (4.1)$$

а на контуре ∂T поперечного сечения удовлетворяет граничному условию

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \tilde{x}(s)\tau_x(s) + \tilde{y}(s)\tau_y(s), \quad s \in \partial T, \quad (4.2)$$

где $\tilde{x}(s)$, $\tilde{y}(s)$ и компоненты единичного касательного вектора являются заданными функциями от дуговой абсциссы.

Гармоническая функция $f(x, y)$ может быть представлена в виде тождества Грина (3.9), которое с учетом уравнения Лапласа (4.1) имеет вид:

$$\varepsilon f(x, y) = \oint_{\partial T} f(\tilde{x}, \tilde{y}) H_0(r) ds - \oint_{\partial T} \frac{\partial}{\partial n} f(\tilde{x}, \tilde{y}) G_0(r) ds, \quad (4.3)$$

где $G_0(r) = \frac{1}{2\pi} \ln r$, $r = \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2}$.

В силу условия (4.2), второе слагаемое правой части (4.3) известно, и уравнение (4.3) представляет интегральное уравнение относительно граничных значений функции f . После определения граничных значений функция кручения и ее производные вычисляются во всех внутренних точках.

2°. Для решения задачи методом граничных элементов аппроксимируем контур ∂T N -многоугольником с вершинами в точках $(x_j, y_j) \in \partial T$, $j = 1, \dots, N$. По этим точкам определяются все геометрические параметры граничных элементов L_j . Интегральное соотношение (4.3) может быть представлено на границе области в виде интегральной суммы

$$\frac{1}{2}f(x, y) + \sum_{j=1}^N f(x_j^*, y_j^*) \int_{L_j} H_0(r) ds = \sum_{j=1}^N Q(x_j^*, y_j^*) \int_{L_j} G_0(r) ds, \quad (4.4)$$

где

$$Q(x_j^*, y_j^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial n} \right) \Big|_{x_j^*, y_j^*} = \left(\tilde{x}(s) \frac{d\tilde{x}(s)}{ds} + \tilde{y}(s) \frac{d\tilde{y}(s)}{ds} \right) \Big|_{x_j^*, y_j^*}, \quad (4.5)$$

x_j^* и y_j^* - некоторые значения координат точек на граничном элементе L_j ; в дальнейшем будем считать их средними величинами в данном интервале, т.е. $x_j^* = 0.5(x_j + x_{j+1})$, $y_j^* = 0.5(y_j + y_{j+1})$. Обозначая далее

$$\begin{aligned} f(x_j^*, y_j^*) &= F_j, & Q(x_j^*, y_j^*) &= Q_j, \\ \frac{\delta(i, j)}{2} + \int_{L_j} H_0(r_i) ds &= A_{ij}, & \int_{L_j} G_0(r_i) ds &= B_{ij}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где введено обозначение $r_i = \sqrt{(x_i^* - \tilde{x})^2 + (y_i^* - \tilde{y})^2}$ - расстояние от i -го узла до точки интегрирования, можно записать сумму (3.4) в виде системы уравнений

$$\sum_{j=1}^N F_j A_{ij} = \sum_{j=1}^N Q_j B_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Если ввести векторы \mathbf{F} и \mathbf{Q} с компонентами F_j и Q_j , соответственно, матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} с компонентами A_{ij} и B_{ij} , то система (4.6) запишется в матричном виде

$$\mathbf{AF} = \mathbf{BQ}. \quad (4.7)$$

Компоненты матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} можно вычислить численно, но также они могут быть найдены аналитически. Для этого следует перейти к локальной системе координат (ξ_j, η_j) с центром в средней точке j -го элемента и направить действительную ось по данному элементу. Если перейти к новой переменной $s = h_j t / 2$, то изменение параметра t в пределах $(-1, 1)$ будет соответствовать j -му элементу. В локальной системе координат i -я контрольная точка имеет координаты

$$\xi_{ij} = \frac{h_j}{4\pi} [(x_i^* - x_j^*)s_{x_j} + (y_i^* - y_j^*)s_{y_j}], \quad \eta_{ij} = \frac{h_j}{4\pi} [(y_i^* - y_j^*)s_{x_j} - (x_i^* - x_j^*)s_{y_j}].$$

Тогда функция Грина и ее нормальная производная

$$G = \frac{h_j}{4\pi} \ln \frac{2}{h_j \sqrt{(\xi_j - \xi_{ij})^2 + \eta_{ij}^2}}, \quad \frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\eta_{ij}}{2\pi [(\xi_j - \xi_{ij})^2 + \eta_{ij}^2]}. \quad (4.8)$$

Интегрируя функции (4.8) на отрезке $[-1, 1]$, получаем следующие выражения для компонент матриц **A** и **B**:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1/2, & \eta_{ij} = 0, \quad i = j, \\ -\frac{1}{2\pi} \left(\arctg \frac{1 - \xi_{ij}}{\eta_{ij}} + \arctg \frac{1 + \xi_{ij}}{\eta_{ij}} \right), & \eta_{ij} \neq 0, \quad i \neq j, \\ 0, & \eta_{ij} = 0, \quad i \neq j, \end{cases}$$

$$B_{ij} = \frac{h_j}{2\pi} \left(1 - \ln \frac{h_j}{2} - \frac{(1 - \xi_{ij}) \ln p_{ij} + (1 + \xi_{ij}) \ln q_{ij}}{4} + \pi \eta_{ij} A_{ij} \right),$$

где

$$p_{ij} = (1 - \xi_{ij})^2 + \eta_{ij}^2, \quad q_{ij} = (1 + \xi_{ij})^2 + \eta_{ij}^2.$$

Поскольку $d\tilde{x}(s)/ds = \tau_x$, $d\tilde{y}(s)/ds = \tau_y$, то компоненты вектора **Q**

$$Q_j = x_j^* \tau_{x_j}^* + y_j^* \tau_{y_j}^*.$$

3°. Значения функции кручения в контрольных точках вычисляются из (4.7):

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Q}.$$

Для определения касательного напряжения на границе сечения необходимо определить производную df/ds . Хотя ее можно найти численно по дискретным значениям функции кручения, но проще предварительно аппроксимировать их непрерывной функцией, затем вычислять касательное напряжение по формуле

$$\tau = x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} + \frac{df}{ds}. \quad (4.9)$$

Пример 4.1. Кручение стержня эллиптического сечения

Рассматривается задача кручения стержня, сечение которого представляет собой эллипс с полуосями $a = 1$, $b = 0.25$. Как было показано ранее, функции кручения определяется чисто геометрически и не зависит от материала, из которого сделан стержень, а только от формы поперечного сечения. Гармоническая функция кручения для стержня эллиптического сечения может быть найдена аналитически (см. [47]) и имеет вид:

$$f(x, y) = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} xy.$$

Согласно изложенному выше в этом параграфе, решение может быть также найдено численно с использованием метода граничных элементов. На рис. 4.1 (а) представлено сравнение численных и аналитических результатов для функции кручения на границе области: сплошной линией показан график, соответствующий точному аналитическому решению, а точками – результаты решения с применением разработанного в главе 3 численного алгоритма при $N = 40$. На рис. 4.1 (б) представлен график касательного напряжения на границе области, полученного по формуле (4.9) после аппроксимации узловых значений гармонической функции кручения кубическими сплайнами.

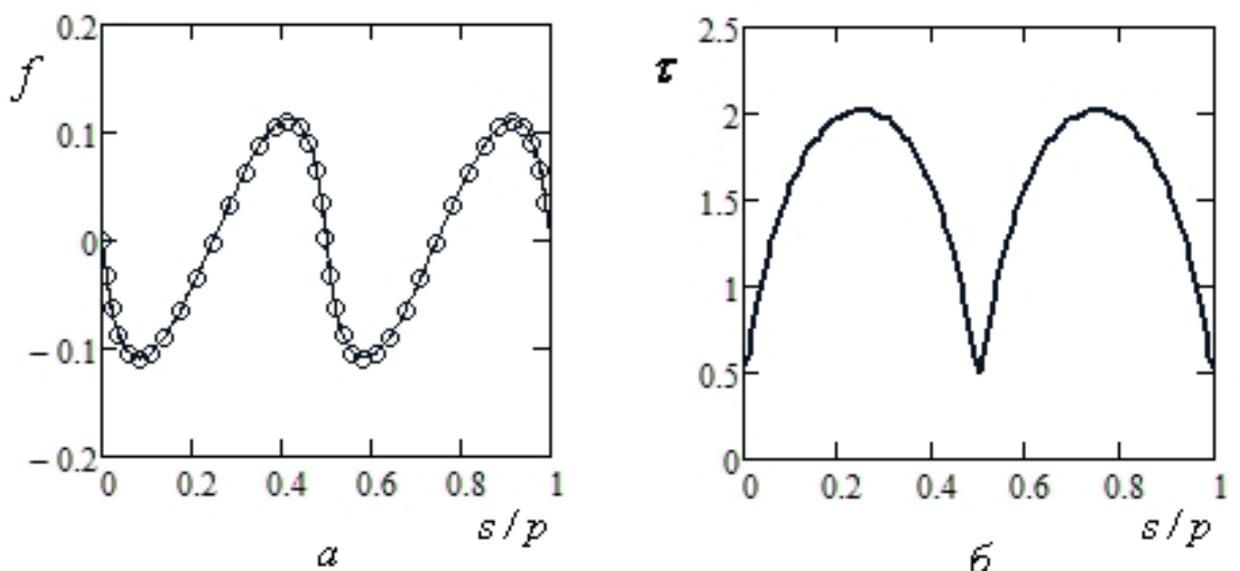


Рисунок 4.1

§ 4.2. Численное решение плоской задачи теории упругости

1°. В главе 3 из интегральной формулы Грина (см. [64]) были получены интегральные соотношения для полигармонических функций. В частности, для бигармонической функции эти соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon \hat{u}(P) &= \int_{\partial D} (\hat{v}G_0 - \hat{u}H_0) ds, \\ \varepsilon u(P) &= \int_{\partial D} (vG_0 - uH_0 + \hat{v}G_1 - \hat{u}H_1) ds,\end{aligned}\tag{4.10}$$

где u – бигармоническая функция, $\hat{u} = \Delta u$, $v = \frac{\partial u}{\partial n}$, $\hat{v} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial n}$,

$$G_0 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad G_1 = \frac{r^2}{8\pi} \left(1 + \ln \frac{1}{r} \right), \quad H_0 = \frac{\partial G_0}{\partial n}, \quad H_1 = \frac{\partial G_1}{\partial n},\tag{4.11}$$

r – расстояние между точкой P и переменной точкой интегрирования, множитель $\varepsilon = 0.5$ для точки P на гладкой границе и $\varepsilon = 1$ для внутренней точки.

С помощью метода граничных элементов система интегральных уравнений для полигармонических функций сводится к системе линейных алгебраических уравнений, в частности, уравнения (4.10) могут быть представлены в виде системы двух матричных уравнений

$$\begin{aligned}(\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}) \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{B} \hat{\mathbf{V}} &= 0, \\ (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}) \mathbf{U} - \mathbf{B} \mathbf{V} + \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{V}} &= 0,\end{aligned}\tag{4.12}$$

где \mathbf{E} — единичная матрица, $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{V}}$ — вектор-столбцы, компоненты которых:

$$U_j = u(P_j), \quad V_j = v(P_j), \quad \hat{U}_j = \hat{u}(P_j), \quad \hat{V}_j = \hat{v}(P_j), \quad j = \overline{1, N},$$

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$ — матрицы, элементы которых вычисляются интегрированием соответствующих функций по прямолинейным граничным элементам L_j :

$$A_{i,j} = \int_{L_j} H_0 ds, \quad B_{i,j} = \int_{L_j} G_0 ds, \quad \hat{A}_{i,j} = \int_{L_j} H_1 ds, \quad \hat{B}_{i,j} = \int_{L_j} G_1 ds, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Система уравнений (4.12) представляет собой систему $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно $2N$ неизвестных компонент векторов $\widehat{\mathbf{U}}$ и $\widehat{\mathbf{V}}$. Элементы векторов \mathbf{U} и \mathbf{V} , известны из постановки задачи и определяются из условий (1.25), (1.27). Для односвязной области все дополнительные постоянные полагаются равными нулю, и оба уравнения (4.12) объединяются в одно матричное уравнение, которое решается численно с помощью обратной матрицы.

2°. В случае многосвязной области к уравнениям (4.12) нужно добавить условия (1.29), (1.30), (1.32) для определения неизвестных констант, входящих в (1.25), (1.27). Для этого целесообразно привести их к линейным уравнениям, содержащим только неизвестные значения функций \hat{u} и \hat{v} .

Пусть результирующая внешних сил, действующих на каждый контур, равна нулю. Тогда условия (1.29), (1.30) на внутренних контурах границы примут вид

$$\oint_{(\partial T)_k} \frac{\partial p}{\partial n} ds = 0, \quad \oint_{(\partial T)_k} \frac{\partial q}{\partial n} ds = 0. \quad (4.13)$$

Первое из равенств (4.13) дает:

$$\oint_{(\partial T)_k} \frac{\partial p}{\partial n} ds = \oint_{(\partial T)_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dy - \frac{\partial p}{\partial y} dx \right) = \oint_{(\partial T)_k} \left(\hat{u} dy - \frac{\partial p}{\partial y} dx \right) = 0,$$

или, после дискретизации,

$$\sum_{j=1}^N \widehat{U}_j^{(k)} \int_{L_j^{(k)}} y'_s ds + \sum_{j=1}^N Q_j^{(k)} \int_{L_j^{(k)}} x'_s ds = 0, \quad (4.14)$$

где $\mathbf{Q}^{(k)}$ – вектор-столбец значений функции $Q = \frac{\partial q}{\partial x}$ в контрольных точках контура $(\partial T)_k$.

С учетом (1.31) элементы вектора $\mathbf{Q}^{(k)}$ можно представить в виде:

$Q_j^{(k)} = \sum_{m=1}^j \widehat{V}_m^{(k)} \int_{L_m^{(k)}} ds$. Тогда после некоторых преобразований, (4.14) сводится к

уравнению

$$\sum_{j=1}^N \left(h_j^{(k)} (x_1^{(k)} - x_j^{(k)}) \widehat{V}_j^{(k)} + (y_{j+1}^{(k)} - y_j^{(k)}) \widehat{U}_j^{(k)} \right) = 0. \quad (4.15)$$

Аналогично, второе условие (4.13) преобразуется к виду

$$\sum_{j=1}^N \left(h_j^{(k)} (y_1^{(k)} - y_j^{(k)}) \widehat{V}_j^{(k)} + (x_{j+1}^{(k)} - x_j^{(k)}) \widehat{U}_j^{(k)} \right) = 0. \quad (4.16)$$

Условие (1.32) легко сводится к линейному уравнению:

$$\sum_{j=1}^N \widehat{V}_j^{(k)} \int_{L_j^{(k)}} ds = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^N h_j^{(k)} \widehat{V}_j^{(k)} = 0. \quad (4.17)$$

Таким образом, для каждого внутреннего контура многосвязной области T получены три линейных уравнения (4.15) - (4.17) которые совместно с (4.12) образуют полную систему уравнений для нахождения значений функций \hat{u} , \hat{v} и трех неизвестных констант на внутренних контурах границы многосвязной области T .

3°. Решение полученной системы линейных уравнений определяет значения вспомогательных функций \hat{u} и \hat{v} на границе области в контрольных точках. Значение функции напряжений во внутренней точке P ($\varepsilon = 1$) определяется из второго уравнения (4.10), на основании которого можно считать, что

$$\varphi(P) = \sum_{j=1}^N \left[V_j \int_{L_j} G_0 ds - U_j \int_{L_j} H_0 ds + \widehat{V}_j \int_{L_j} G_1 ds - \widehat{U}_j \int_{L_j} H_1 ds \right]. \quad (4.18)$$

Однако, для полного решения рассматриваемой задачи теории упругости, необходимо определить напряжения $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ по формулам (1.23), т.е. вычислить вторые частные производные от φ . Это можно сделать двумя способами. С одной стороны, можно сначала продифференцировать функции внутри интегралов равенства (4.33), а затем проинтегрировать полученные выражения. С другой стороны, можно найти аналитическое выражение функции φ как функции от x и y , а затем определить его вторые частные производные. Такой способ представляется более удобным, поскольку и интегрирование, и дифференцирование могут быть проведены аналитически.

Пример 4.2. Решение задачи теории упругости для односвязной области

Рассматривается область, ограниченная эллипсом с полуосями a и b , т.е.

$$\partial T : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Для сравнения результатов численного решения с точными значениями функций зададим функцию напряжений $\varphi = (x^2 + y^2)(x + y)$. По ней можно построить граничные условия основной краевой задачи теории упругости, т.е. задать вектор внешнего напряжения, соответствующий функции напряжений φ :

$$p_x = \frac{2ab \cos 2t + (3b^2 - a^2) \sin 2t}{\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}}, \quad p_y = -\frac{2ab \cos 2t + (b^2 - 3a^2) \sin 2t}{\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}}.$$

Интегрируя эти граничные условия (константы интегрирования принимаются равными нулю), можно получить граничные условия основной краевой задачи для бигармонического уравнения. Пусть для определенности $a = 1, b = 0.75$. На рис. 4.2 (а, б) сплошными линиями показаны графики полученных граничных условий, а штриховыми - графики самой функции φ и ее нормальной производной на границе области. Здесь s/p – нормированная дуговая координата. Далее методом граничных элементов ($N = 60$) находятся значения неизвестных функций $\hat{u} = \Delta u$ и $\hat{v} = \partial \hat{u} / \partial n$ на границе области и можно сравнить их с аналитически полученными из φ данными. На рис. 4.2 (в, г) точками показаны значения, найденные с помощью системы уравнений (4.12), сплошными линиями – графики функций, полученных аналитически. Из рис. 4.2 видно, что функции u и v , полученные интегрированием граничных условий не совпадают с этими же функциями, найденными непосредственно из функции φ . Можно показать, что их графики совпадут, если принять $C_1 = \partial \varphi / \partial x|_{s=0} = 3a^2$, $C_2 = \partial \varphi / \partial y|_{s=0} = a^2$, $C_3 = \varphi|_{s=0} = a^3$. Однако эти постоянные не влияют на окончательное решение задачи, поскольку напряжения выражаются как вторые частные производные функции φ . Поэтому функции \hat{u}, \hat{v} и напряжения, найденные численно, согласуются с аналитическими.

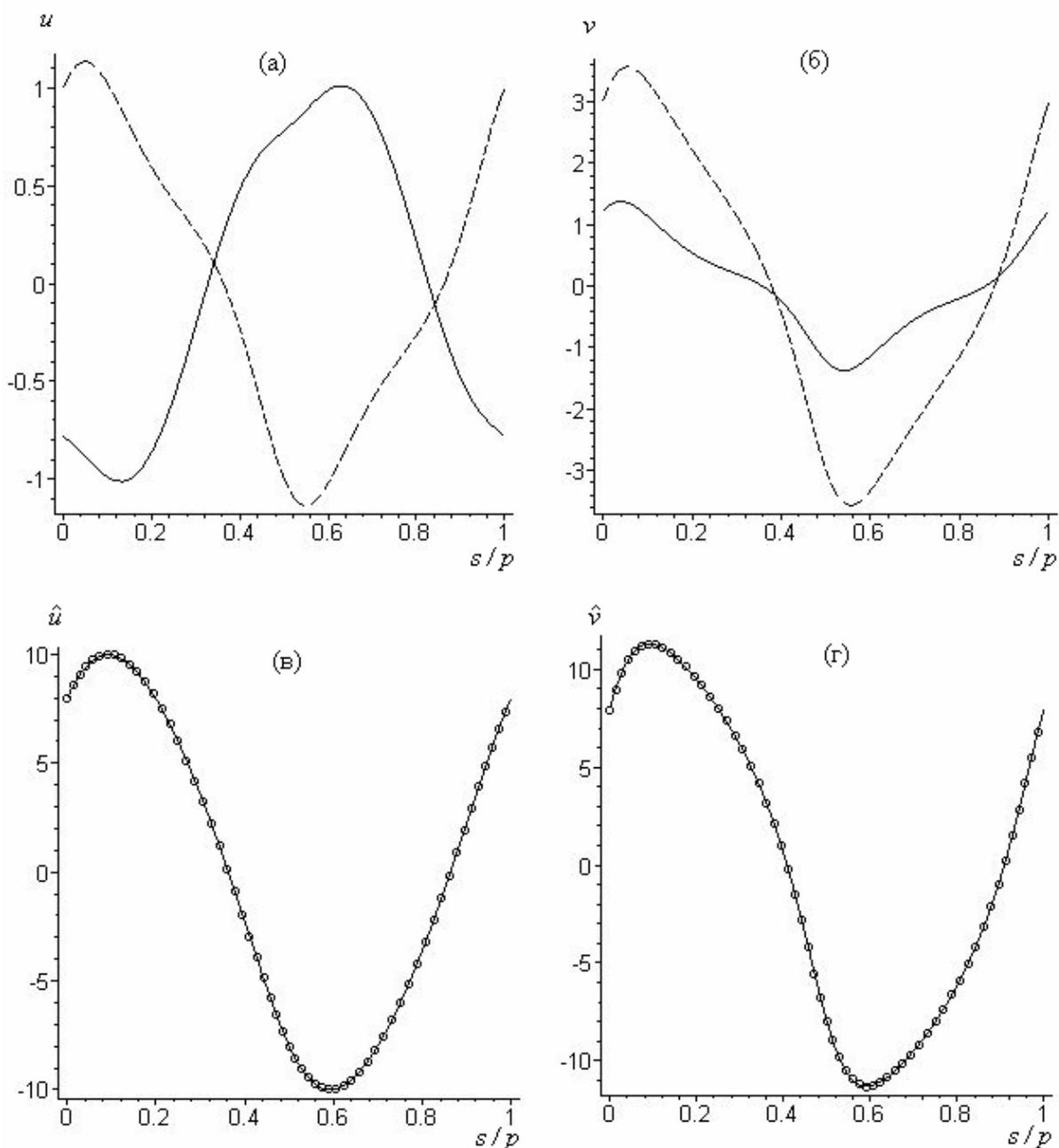


Рисунок 4.2

На рис. 4.3 показана зависимость напряжения $\sigma_{\tau\tau} = \sigma_{xx}\tau_x^2 + 2\sigma_{xy}\tau_x\tau_y + \sigma_{yy}\tau_y^2$ от нормированной дуговой координаты на эллипсах с полуосями $a < 1, b < 0.75$, т.е. лежащих внутри области T (сплошные линии соответствуют функциям, полученным из φ аналитически, а точки, обозначенные различными символами – значениям, найденным численно).

Из графиков видно, что предложенный метод дает достаточно высокую точность, как на границе односвязной области, так и внутри нее.

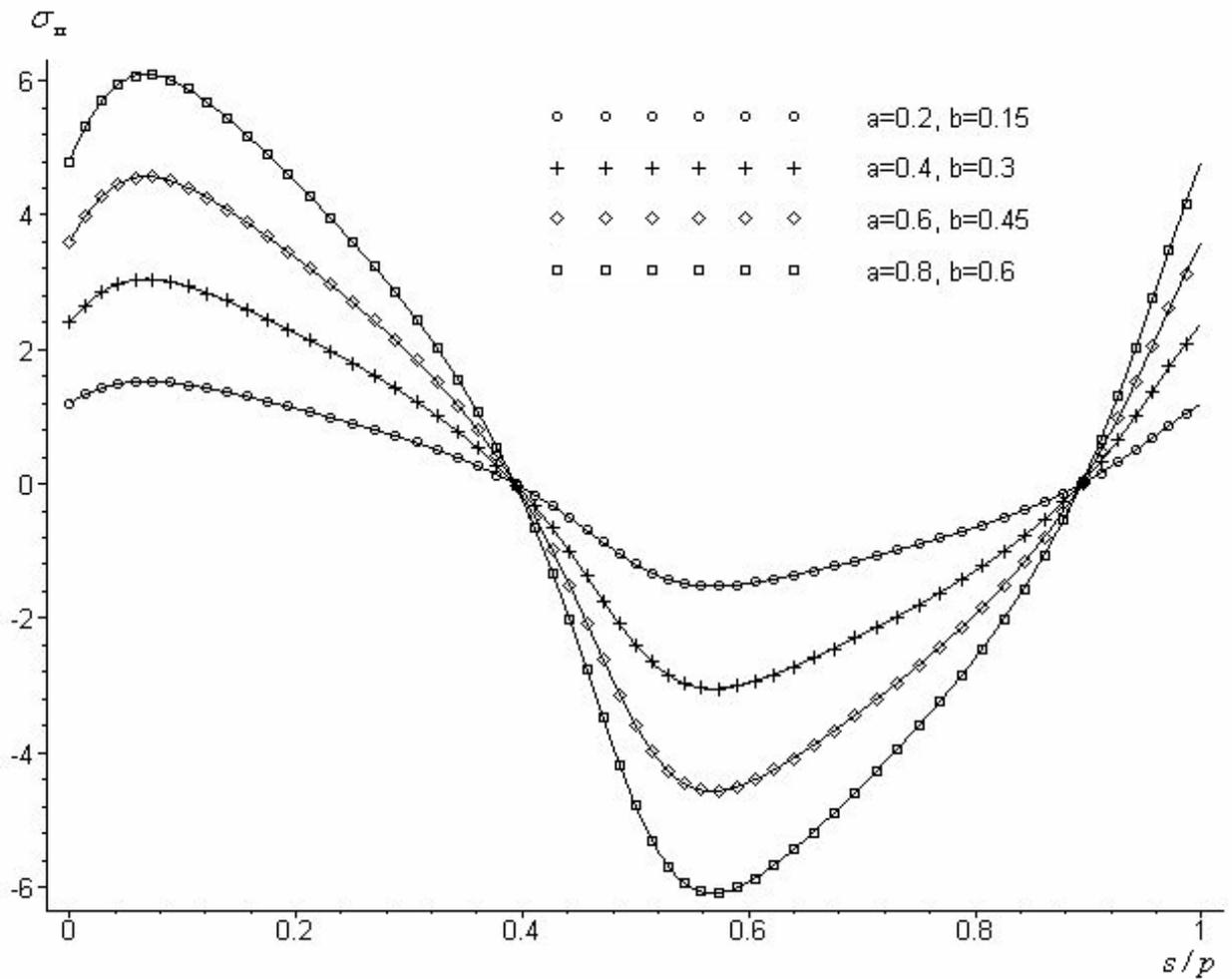


Рисунок 4.3

Пример 4.3. Задача Ламе

Рассмотрим теперь плоскую задачу для двусвязной области. Наиболее простым примером может служить задача Ламе о сечении полого кругового цилиндра с внутренним и внешним радиусами a и b ; внутреннее и внешнее давления равны p_a и p_b соответственно. Точное решение этой осесимметричной задачи (см., например, [1]) определяется функцией напряжений

$$\varphi(\rho) = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{2(b^2 - a^2)} \rho^2 + \frac{(p_b - p_a) a^2 b^2}{b^2 - a^2} \ln \rho + C,$$

где ρ – полярный радиус, C – произвольная постоянная.

Граница области задается, очевидно, уравнениями

$$(\partial T)_1 : \begin{cases} x_1 = a \cos \theta \\ y_1 = -a \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi); \quad (\partial T)_2 : \begin{cases} x_2 = b \cos \theta \\ y_2 = b \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi).$$

Для решения задачи методом граничных элементов нужно перейти от краевых условий задачи теории упругости к краевым условиям для бигармонического уравнения, учитывая, что они не должны зависеть от полярного угла:

$$\varphi|_{(\partial T)_1} = \tilde{C}, \quad \varphi|_{(\partial T)_2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{(\partial T)_1} = p_a a, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{(\partial T)_2} = -p_b b,$$

где \tilde{C} – константа, которая находится из условия $\oint_{(\partial T)_1} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n} = 0$. Точное значение

$$\tilde{C} = \varphi(a) - \varphi(b).$$

В результате решения задачи методом граничных элементов определяются значения функций $\Delta \varphi$ и $\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n}$ на границе области и значение постоянной \tilde{C} , затем, вычисляются напряжения в любой точке области. На рис. 4.4 представлены результаты для напряжения σ_{rr} для некоторых различных значений ρ ($a < \rho < b$) при $a = 4$, $b = 5$, $p_a = 1$, $p_b = 2$.

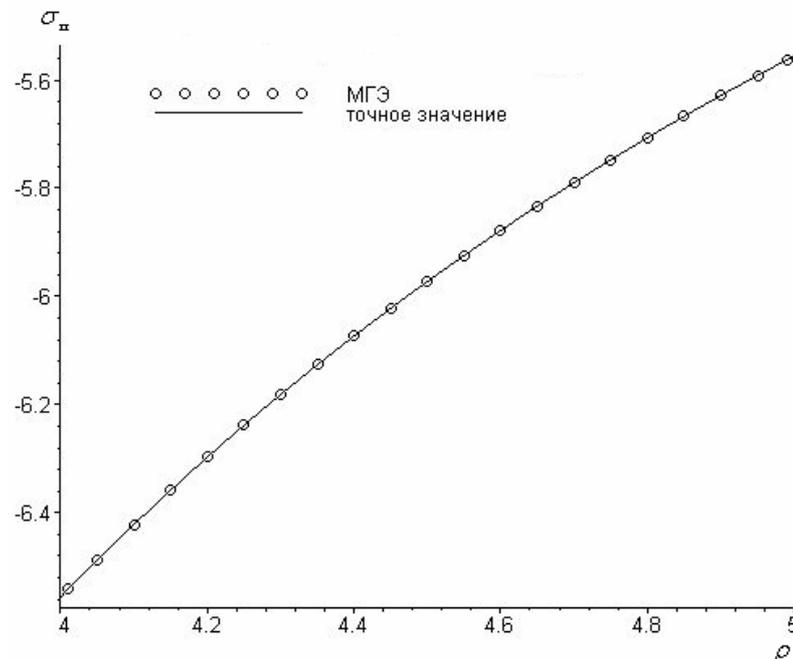


Рисунок 4.4

Из представленного графика видно, что метод обладает высокой точностью также и в случае двусвязной области.

Пример 4.4. Эксцентрическая труба под равномерным давлением

Точное решение задачи о цилиндре, сечением которого является эксцентрическое кольцо, получено Я.С. Уфляндом в [78] с использованием биполярных координат. Подробно биполярные координаты и области, связанные с ними, рассмотрены в приложении Б. На рис. 4.5 представлено эксцентрическое кольцо с радиусами r_1 и r_2 ; d_1 и d_2 - расстояния от начала координат до центров окружностей, p_1 и p_2 - давления, действующие на внутренний и внешний контуры.

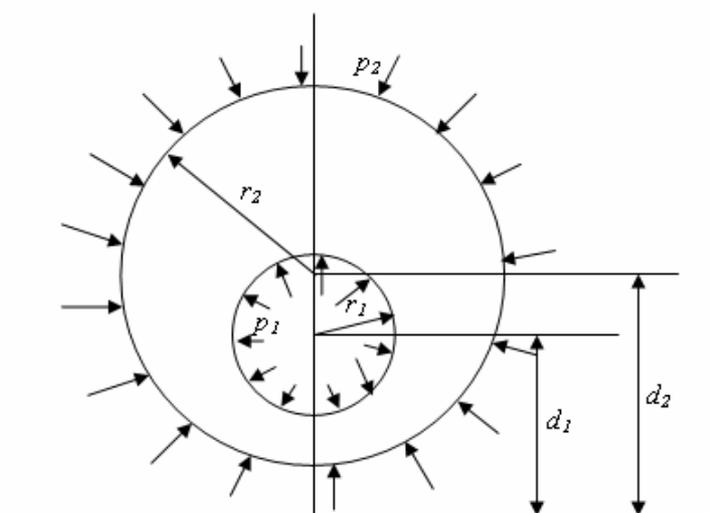


Рисунок 4.5

Пусть для определенности $r_1 = 1$, $r_2 = 1.25$. В биполярных координатах этим значениям будут соответствовать эксцентрические окружности, центры которых находятся на расстояниях $d_1 = \sqrt{2}$ и $d_2 = \sqrt{41} / 4$ от начала координат. Пусть, например, $p_1 = 1$, $p_2 = 3$. После перехода от этих условий к граничным условиям для функции напряжений φ , на границах области известны значения функций u и v с точностью до слагаемых, содержащих три неизвестные постоянные. С помощью МГЭ ($N = 60$) находятся значения на границе области двух вспомогательных функций \hat{u} и \hat{v} , а также значения этих постоянных. На рис. 4.6 (а, б) представлены графики функций \hat{u} и \hat{v} на границе. Здесь точки соответствуют значениям, найденным численно, а линиями изображены графики функций, соответствующих точному аналитическому решению. Квадратными точками изображены значения на внутренней границе, круглыми – на внешней границе.

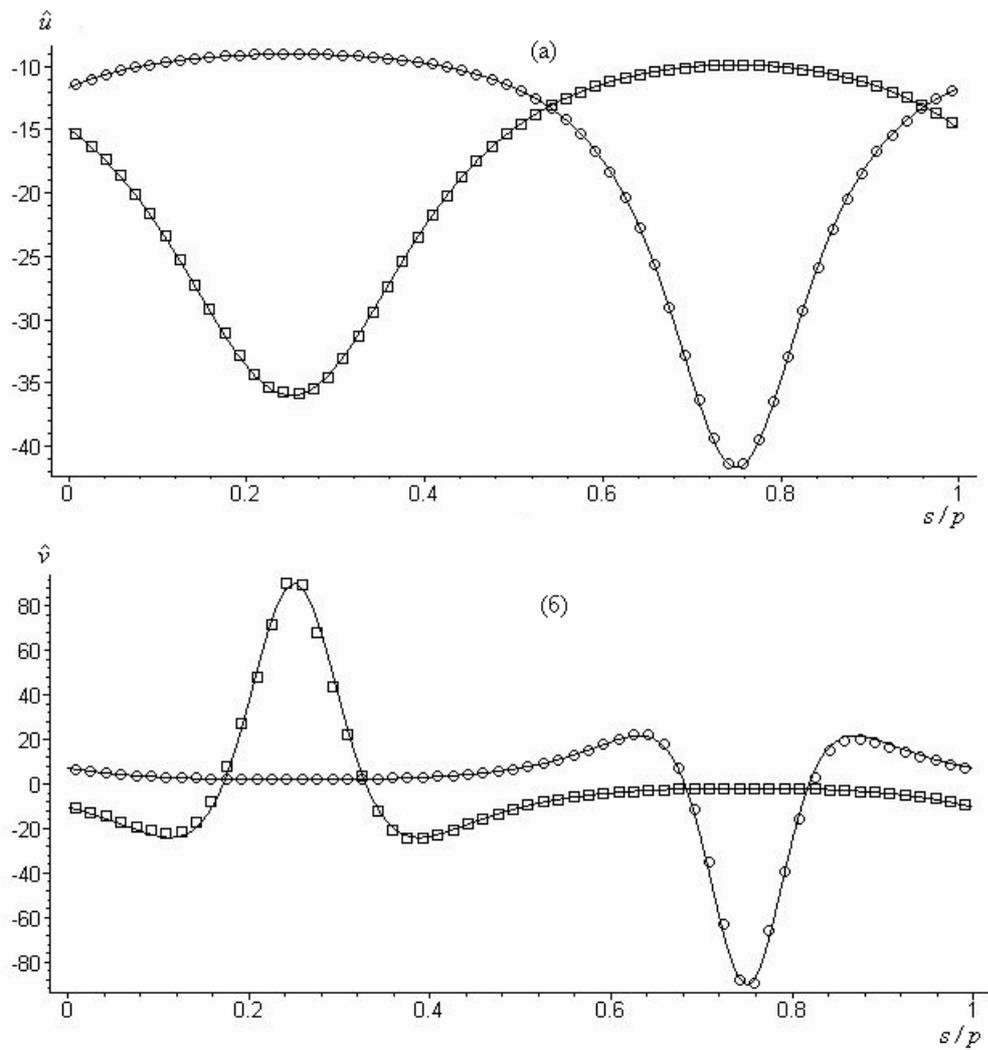


Рисунок 4.6

На рис. 4.7 приведен график напряжения σ_{xx} на окружности, лежащей внутри рассматриваемой области ($r_0 = 1.125$, $d_0 = \sqrt{181}/9$).

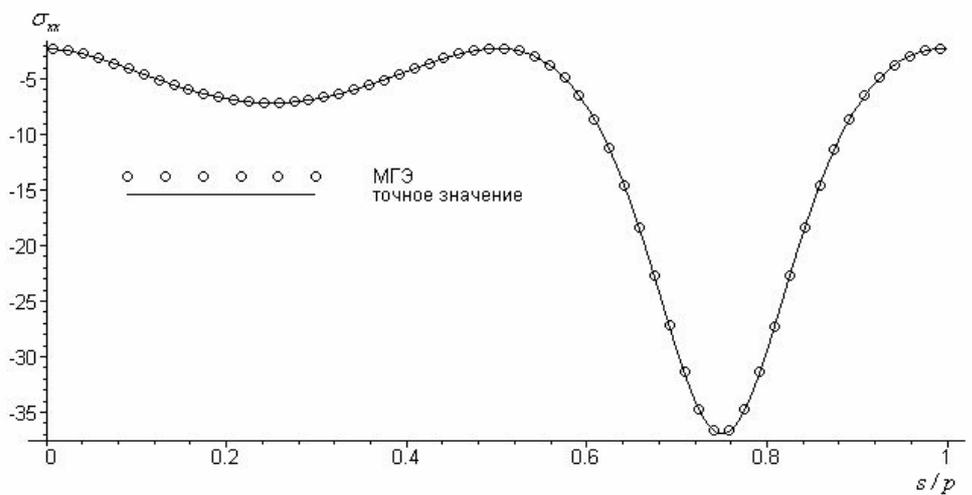


Рисунок 4.7

Пример 4.5. Плоская задача теории упругости в трехсвязной области

Пусть $(\partial T)_0$ – внешняя граница области, представляющая собой эллипс.

Внутренние границы $(\partial T)_1$ и $(\partial T)_2$ – окружности (центры лежат на оси Ox):

$$\begin{aligned}(\partial T)_1: & \begin{cases} x_1 = r_1 \cos \theta + d_1, \\ y_1 = -r_1 \sin \theta, \end{cases} & (\partial T)_2: & \begin{cases} x_2 = r_2 \cos \theta + d_2, \\ y_2 = -r_2 \sin \theta, \end{cases} \\ (\partial T)_0: & \begin{cases} x_0 = a \cos \theta, \\ y_0 = b \sin \theta, \end{cases} & & \theta \in [0, 2\pi).\end{aligned}$$

Пусть для определенности $a = 1$, $b = 0.75$, $r_1 = r_2 = 0.25$, $d_1 = -d_2 = -0.5$ (рис. 4.8).

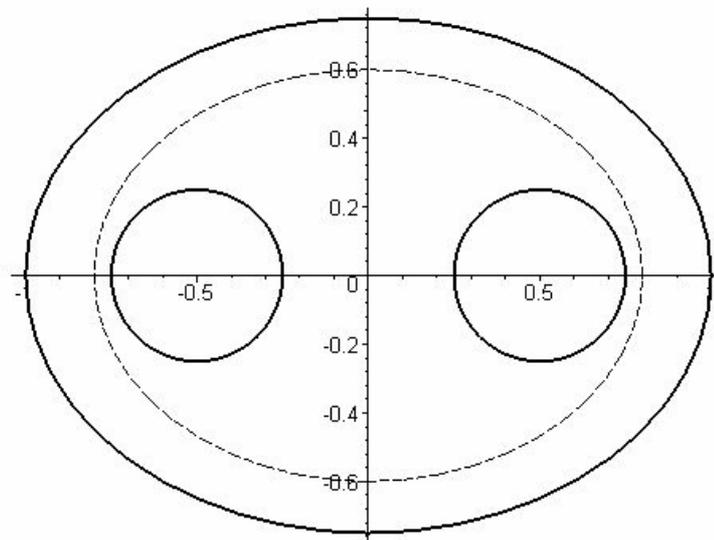


Рисунок 4.8

Для сравнения результатов численных расчетов с точными значениями функций задается бигармоническая функция напряжений, пусть, например, $\varphi = (x^2 + y^2)xy$. По ней можно построить граничные условия основной краевой задачи теории упругости, интегрируя которые получим граничные условия для бигармонического уравнения с точностью до слагаемых, содержащих шесть неизвестных постоянных (по три на каждом внутреннем контуре). Далее с помощью МГЭ (число граничных элементов по $N = 40$ на каждом контуре) определяются эти константы и неизвестные значения функций \hat{u} и \hat{v} . Результаты расчетов представлены на рис. 4.9: точками показаны значения, полученные численно, сплошными линиями – точные графики функций.

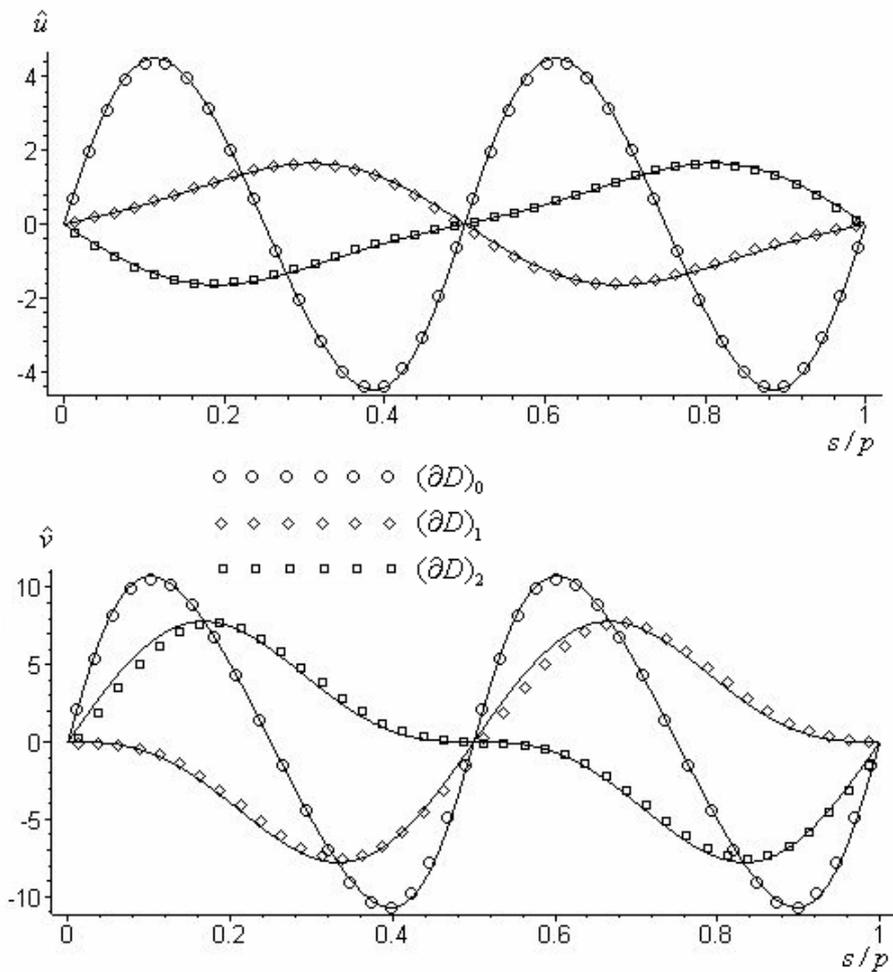


Рисунок 4.9

На рис. 4.10 показан график напряжения $\sigma_{nr} = \sigma_{xy}(\tau_y^2 - \tau_x^2) + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\tau_x\tau_y$ на эллипсе с полуосями $a = 0.8$ и $b = 0.6$, лежащем внутри рассматриваемой области (на рис. 4.8 этот эллипс изображен штриховой линией).

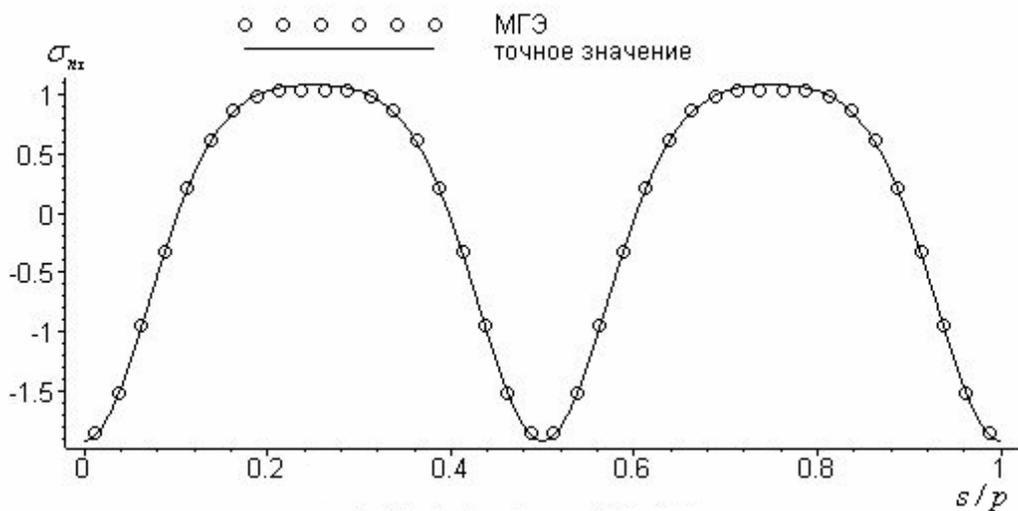


Рисунок 4.10

Предложенный численный алгоритм позволяет найти решение краевой задачи плоской теории упругости в напряжениях для произвольной области. Из тестовых примеров наблюдается хорошее совпадение численных и аналитических результатов, что свидетельствует об эффективности численного алгоритма.

§ 4.3. Численное моделирование изгиба тонких пластинок

Как было показано в § 1.4, математическая модель изгиба тонкой пластинки описывается неоднородным бигармоническим уравнением, которое в ряде случаев можно свести к однородному полигармоническому уравнению высшего порядка. В этом параграфе численный алгоритм, разработанный для решения краевых задач для полигармонического уравнения, применяется к решению задач изгиба тонких пластинок. Здесь будут подробно рассмотрены задачи I (край пластинки жестко заделан) и II (свободное опирание края), поскольку в этих случаях возможен переход от граничных условий (1.37) или (1.38) к граничным условиям для системы интегральных уравнений, которая получена в главе 3.

1°. В § 1.4 было показано, что если q является полигармонической функцией некоторого порядка $n-2$ (например, многочленом некоторой степени), то w – полигармоническая функция n -го порядка, т.е. удовлетворяет уравнению $\Delta^n w = 0$. В частности, если q – константа, то функция прогибов удовлетворяет полигармоническому уравнению третьего порядка, и интегральные соотношения (3.10) для нее запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon w(P_0) &= \int_{\partial\Gamma} \left[\frac{\partial w}{\partial n} G_0 - w H_0 + \frac{\partial \Delta w}{\partial n} G_1 - \Delta w H_1 + \frac{\partial \Delta^2 w}{\partial n} G_2 - \Delta^2 w H_2 \right] ds, \\ \varepsilon \Delta w(P_0) &= \int_{\partial\Gamma} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial n} G_0 - \Delta w H_0 + \frac{\partial \Delta^2 w}{\partial n} G_1 - \Delta^2 w H_1 \right] ds, \\ \varepsilon \Delta^2 w(P_0) &= \int_{\partial\Gamma} \left[\frac{\partial \Delta^2 w}{\partial n} G_0 - \Delta^2 w H_0 \right] ds. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Причем последнее равенство обращается в тождество и может быть отброшено.

2°. В случае заделанного края (задача I) на границе выполняются условия (1.37). Кроме того, если q – константа, то $\frac{\partial \Delta^2 w}{\partial n} = 0$, и система (4.19) примет вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon w(P_0) &= \int_{\partial \Gamma} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial n} G_1 - \Delta w H_1 - \frac{q}{D} H_2 \right] ds, \\ \varepsilon \Delta w(P_0) &= \int_{\partial \Gamma} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial n} G_0 - \Delta w H_0 - \frac{q}{D} H_1 \right] ds.\end{aligned}\quad (4.20)$$

Как было показано в главе 3, система интегральных уравнений (4.20) позволяет построить алгоритм решения полигармонического уравнения на основе метода граничных элементов. Тогда система равенств (4.20) сводится к системе линейных уравнений относительно значений функций в контрольных точках:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}^{(0)} & -\mathbf{B}^{(0)} \\ \mathbf{A}^{(1)} & -\mathbf{B}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{(1)} \\ \mathbf{V}^{(1)} \end{pmatrix} = -\frac{q}{D} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(1)} \\ \mathbf{A}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица, $\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{V}^{(1)}$ – вектор-столбцы узловых значений функций Δw и $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$ соответственно, $\mathbf{A}^{(k)}, \mathbf{B}^{(k)}$ – матрицы, элементы которых вычисляются интегрированием соответствующих функций по граничным элементам:

$$A_{i,j}^{(k)} = \int_{\Gamma_j} H_k(P, P_i) ds, \quad B_{i,j}^{(k)} = \int_{\Gamma_j} G_k(P, P_i) ds, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad k = \overline{0, 2}.$$

Система уравнений (4.21) представляет систему $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно $2N$ неизвестных компонент векторов $\mathbf{U}^{(1)}$ и $\mathbf{V}^{(1)}$.

Вообще, система интегральных уравнений может быть аналогично сведена к системе $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно $2N$ неизвестных значений функций Δw и $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$, если q является полигармонической функцией любого порядка. В этом случае значения всех функций u_k, v_k ($k = \overline{2, n}$) могут быть определены из уравнения Софи Жермен, а функции u_0 и v_0 , в силу граничных условий (1.37), обращаются в нуль на границе области.

3°. Перейдем теперь к рассмотрению задачи II, когда край пластины оперт. В § 1.4 показано, что если перейти к производным по направлениям нормали \mathbf{n} и касательной \mathbf{l} , то второе граничное условие (1.38) упрощается и, с учетом того, что на границе $w = 0$, преобразуется к виду:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{\partial \alpha / \partial l} \frac{\Delta w}{1 - \nu}. \quad (4.22)$$

Интегральные соотношения (4.19) тогда примут вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon w(P_0) &= \int_{\partial \Gamma} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial n} G_1 + \Delta w \left(\frac{1}{1 - \nu} \frac{1}{\partial \alpha / \partial l} G_0 - H_1 \right) - \frac{q}{D} H_2 \right] ds, \\ \varepsilon \Delta w(P_0) &= \int_{\partial \Gamma} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial n} G_0 - \Delta w H_0 - \frac{q}{D} H_1 \right] ds, \end{aligned} \quad (4.23)$$

и после дискретизации этих соотношений получим окончательно систему линейных алгебраических уравнений, матричное представление которой

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}^{(0)} & -\mathbf{B}^{(0)} \\ \mathbf{A}^{(1)} - \frac{1}{1 - \nu} \mathbf{B} & -\mathbf{B}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{(1)} \\ \mathbf{V}^{(1)} \end{pmatrix} = -\frac{q}{D} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(1)} \\ \mathbf{A}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

где \mathbf{B} – матрица, элементы которой вычисляются по формулам:

$$B_{i,j} = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{\partial \alpha / \partial l} G_0(P, P_i) ds, \quad i, j = \overline{1, N},$$

а все остальные обозначения матриц такие же, как в формуле (4.21).

Из системы (4.24) могут быть найдены граничные значения функций Δw и $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$, а далее, зная их, можно определить с помощью первого равенства (4.19) значение искомой функции прогиба в любой точке пластинки.

Также следует отметить, что, как и в случае задачи I, система интегральных уравнений может быть сведена к системе $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно $2N$ неизвестных значений функций Δw и $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$, если q является полигармонической функцией любого порядка.

Пример 4.6. Изгиб эллиптической пластинки с заделанными краями

Рассматривается задача I (края пластинки заделаны) для алюминиевой эллиптической пластинки с полуосями $a = 1$ м, $b = 0.75$ м толщины $h = 0.02$ м, расположенной горизонтально в поле тяжести ($q = \rho gh$). Точное решение этой задачи известно (см. [73]), и функция прогиба имеет вид:

$$w = \frac{qa^4b^4}{8D(3a^4 + 3b^4 + 16a^2b^2)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2,$$

где $D \approx 53$ кН·м – цилиндрическая жесткость рассматриваемой пластинки.

Решение, полученное численно с применением МГЭ можно сравнить с известным аналитическим решением. График зависимости прогибов w [м] от y при $x = 0$ изображен на рис. 4.11 (а), а график зависимости w [м] от x при $y = 0$ - на рис. 4.11 (б): сплошными черными линиями показаны графики, соответствующие точному решению, цветными штриховыми линиями – значениям, полученным с применением МГЭ ($N = 40$).

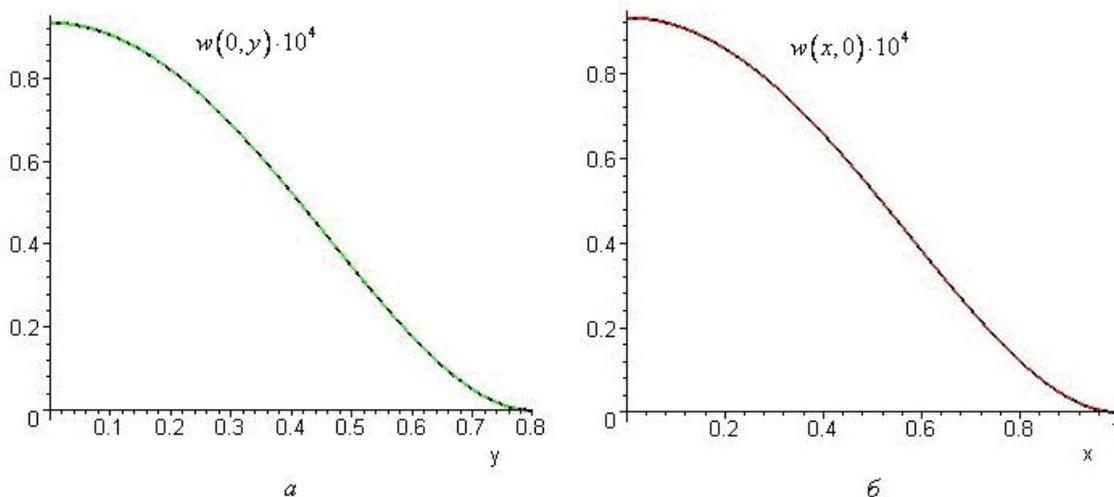


Рисунок 4.11

Так как пластинка является однородной и расположена горизонтально в поле тяжести, то при $y = (b/a)x$ выполняется равенство $w(0, y) = w(x, 0)$. Кроме того, очевидно, что на каждом эллипсе с полуосями $a_1 < a$ и $b_1 = (b/a)a_1$ прогибы будут постоянны (линии уровня). Поэтому для описания деформации пластинки достаточно лишь одного из приведенных выше графиков.

Как и ожидалось, максимальный прогиб наблюдается в центре пластинки: $w_{\max} = w(0,0)$; а по контуру пластинки прогибы равны нулю, что согласуется с краевым условием жесткой заделки. Из графиков, представленных на рисунке 4.11 видно, что наблюдается хорошее совпадение конечных результатов. В следующем примере сравниваются промежуточные результаты решения задачи II для круглой пластинки.

Пример 4.7. Задача II для круглой пластинки

Приведем теперь результаты решения задачи II (края оперты) для круглой пластинки радиуса R и толщины h , расположенной горизонтально в поле тяжести. Точное решение можно найти аналитически (см. [47]), и функция прогиба:

$$w = 3\rho g \frac{1-\nu^2}{16h^2 E} (R^2 - x^2 - y^2) \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} R^2 - x^2 - y^2 \right),$$

где ρ, ν, E – плотность, коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала пластинки соответственно, g – ускорение свободного падения.

Зная это решение, можно определить точные аналитические значения для функций Δw и $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$ на границе области. Они будут являться константами на всей окружности. В таблице 4.1 представлено сравнение численных и аналитических результатов для граничных значений функции Δw для пластинок из различных материалов и с различным отношением толщины пластинки к ее радиусу. Аналогичные результаты для $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$ представлены в таблице 4.2.

Таблица 4.1. Граничные значения функции $\Delta w \cdot 10^4$

материал	алюминий		медь		свинец		сталь	
	h/R							
h/R	0.09	0.05	0.08	0.04	0.07	0.03	0.06	0.02
Точное значение	8.0233	8.0232	6.5376	26.1503	60.975	331.972	16.7731	150.958
МГЭ ($N = 40$)	8.0233	8.0228	6.5361	26.1507	60.968	331.966	16.7731	150.958

Таблица 4.2. Граничные значения функции $\frac{\partial \Delta w}{\partial n} \cdot 10^4$

материал	алюминий		медь		свинец		сталь	
	h/R							
Точное значение	0.3049	0.2033	0.7869	4.1477	5.9281	32.2751	2.3587	21.2285
МГЭ ($N = 40$)	0.3048	0.2032	0.7859	4.1496	5.9280	32.2751	2.3586	21.2277

Пример 4.8. Круглая пластинка под линейно изменяющейся нагрузкой

В [73] получено аналитическое решение задачи об изгибе круглой пластинки, когда правая часть уравнения Софи Жермен является линейной функцией, а именно $q = \frac{px}{R}$, где R – радиус пластинки. Как отмечалось выше, в этом случае уравнение изгиба пластинки можно свести к однородному полигармоническому уравнению третьего порядка и найти по заданным граничным условиям его решение с помощью метода граничных элементов.

В рамках этого примера ограничимся рассмотрением задачи II. Точное решение этой задачи имеет вид:

$$w = \frac{px}{192DR} (R^2 - x^2 - y^2) \left(\frac{7+\nu}{3+\nu} R^2 - x^2 - y^2 \right),$$

откуда

$$\Delta w = -\frac{px}{8DR} \left(\frac{2(5+\nu)}{3(3+\nu)} R^2 - x^2 - y^2 \right).$$

Тогда можно сравнить граничные значения этой функции, найденные аналитически и численно.

На рис. 4.12 показана зависимость граничных значений функции Δw от нормированной дуговой координаты для алюминиевой пластинки радиуса $R = 1$ м, толщины $h = 0.02$ м; кроме того, здесь для определенности положено $p = 1$ Н/м. Сплошная линия соответствует точному аналитическому решению, точки – значениям, полученным численно при $N = 60$.

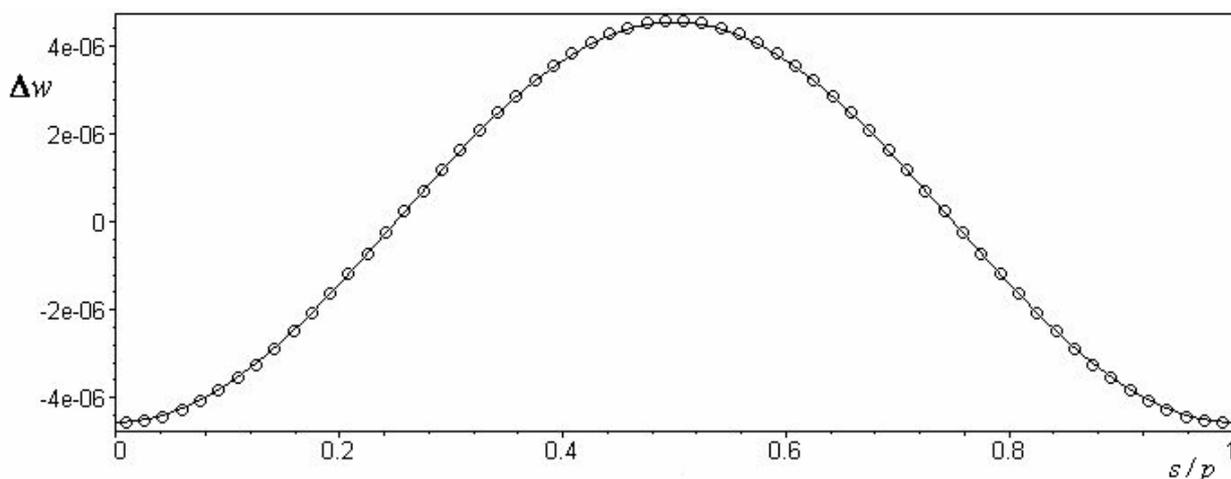


Рисунок 4.12

Таким образом, предложенный в главе 3 численный метод решения краевых задач для полигармонического уравнения позволяет решить задачу изгиба тонкой пластинки произвольной формы в случаях жестко заделанного и опертого края.

§ 4.4. Движение цилиндра в вязкой жидкости

Как было показано в § 1.5, задача о движении цилиндра в ограниченной вязкой жидкости в рамках модели течения Стокса эквивалентна основной краевой задаче для бигармонической функции тока с граничными условиями (1.45), (1.46). В главе 3 для решения такой задачи был предложен численный алгоритм, основанный на интегральной формуле Грина и методе граничных элементов. Так как модель плоской задачи теории упругости также приводит к основной краевой задаче для бигармонического уравнения, и применение разработанного численного метода к ней было подробно изложено в § 4.2, то здесь не будем останавливаться на этом. Заметим только, что в работе А.Г. Терентьева [72] данная задача была решена аналитически с применением методов конформного отображения и коллокации (данный способ решения основной краевой задачи для полигармонического уравнения предложен в главе 2 настоящей работы). В частности, в [72] было найдено решение задачи о поступательном движении круглого цилиндра, и его можно сравнить с решением, полученным с помощью МГЭ.

Пример 4.9. Поступательное движение круглого цилиндра

Пусть подвижный контур C_1 представляет собой окружность радиуса r и находится внутри неподвижного контура C_2 - окружность радиуса R , заполненного вязкой жидкостью. В предположении несжимаемости жидкости компоненты скорости, завихренность потока, давление и все гидродинамические реакции выражаются через одну бигармоническую функцию тока $\psi(x, y)$. Рассмотрим равномерное поступательное движение круглого цилиндра вдоль оси Ox , граничные условия (1.44) тогда принимают вид:

$$\begin{aligned} v_x|_{C_1} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{C_1} = V_x^{(0)}, & v_y|_{C_1} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{C_1} = 0, \\ v_x|_{C_2} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{C_2} = 0, & v_y|_{C_2} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{C_2} = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Как было показано в § 1.5, от условий (4.25) можно перейти к граничным условиям основной краевой задачи для бигармонической функции тока:

$$\psi|_{C_1} = V_x^{(0)} y, \quad \psi|_{C_2} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{C_1} = V_x^{(0)} x'_s, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{C_2} = 0. \quad (4.26)$$

Полученную задачу можно решить численно с применением метода граничных элементов.

В [72] было получено аналитическое решение рассматриваемой задачи, поэтому можно сравнить значения, полученные аналитически и численно, например, для силы гидродинамического сопротивления F_x , действующей на движущийся контур. Сила сопротивления зависит, в том числе, и от свойств жидкости; для универсальности в таблице 4.3 приведены результаты расчетов для величины F_x / μ , где μ – коэффициент динамической вязкости среды. Эта величина зависит только от скорости движения внутреннего цилиндра и от формы его поперечного сечения. Положим для определенности $V_x^{(0)} = 0.01$ м / с, $R = 2$ м, $r = 1$ м. Поскольку рассматривается поступательное движение цилиндра, приведем результаты решения для различных значений расстояния d между центрами цилиндров.

Таблица 4.3. Значения результирующей силы сопротивления F_x / μ (m^2 / c)

d , м	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
Аналит. решение	1.351	1.422	1.690	2.435	5.402	13.551
МГЭ ($N = 100$)	1.355	1.425	1.701	2.442	5.402	13.455

§ 4.5. Описание комплекса программ

Для моделирования описанных в главе 1 явлений механики сплошных сред был разработан программный комплекс, реализующий предложенный в главе 3 численный метод. Комплекс состоит из нескольких программ, с помощью которых получены решения краевых задач Дирихле и Неймана, основной краевой задачи для полигармонического уравнения, а также решения задач механики сплошных сред, рассмотренных в главе 1 настоящей работы. Благодаря универсальности разработанного метода, для решения всех этих различных задач используется одна и та же схема, которую условно можно представить в виде последовательной реализации нескольких модулей. Данный параграф посвящен описанию структурных компонент программного комплекса.

1°. Предложенный в данной работе численный метод основан на применении МГЭ для вычисления контурных интегралов. Контур при этом заменяется многоугольником, стороны которого называются *элементами*, соединения двух соседних элементов – *узлами*, середины элементов – *контрольными точками*. Для определения координат узлов и контрольных точек был разработан модуль «PCoords». Он реализуется в соответствии со следующими принципами:

- возрастание нумерации соответствует обходу области так, что она остается слева: в случае односвязной области обход осуществляется против часовой стрелки, обход по внутренним границам многосвязной области – по часовой стрелке;

- если контур содержит угловые точки, то они совмещаются с узлами;
- узлы на контуре задаются через равные промежутки, однако при необходимости сгущаются вблизи контура с большой кривизной и угловых точек.

Для вычисления интегралов по граничным элементам от функций Грина и их нормальных производных, значения которых составляют матрицу разрешающей системы линейных алгебраических уравнений, разработан программный модуль «ContourGreen». Поскольку большинство задач механики сплошных сред приводят к гармоническим и бигармоническим уравнениям, интегралы от функций G_0, H_0, G_1, H_1 были найдены аналитически, и полученные выражения использованы в модуле «ContourGreen». В случае решения полигармонического уравнения более высокого порядка значения интегралов от остальных функций G_k, H_k ($k = \overline{2, n-1}$) находятся численно методом Ромберга. Для вычисления интегралов «ContourGreen» на входе получает следующие данные:

- порядок n полигармонического уравнения $\Delta^n u = 0$;
- количество N и длины h_j ($j = \overline{1, N}$) граничных элементов, а также координаты узлов и контрольных точек, распределение которых дает на выходе модуль «PCoords»;
- необходимое число знаков после запятой для значений интегралов.

Результатом работы программного модуля «ContourGreen» является построение из полученных значений интегралов матриц $\mathbf{A}^{(k)}, \mathbf{B}^{(k)}$ ($k = \overline{0, n-1}$), которые содержатся в матричной записи СЛАУ для задач Дирихле, Неймана и смешанных (в том числе, для основной краевой задачи) для полигармонического уравнения.

Для построения и решения разрешающей системы линейных алгебраических уравнений применяется программный модуль «LinSolve». Он реализуется в несколько этапов, входные данные для которых либо являются результатами работы модулей «PCoords» и «ContourGreen», либо вводятся пользователем. Рассмотрим каждый из этих этапов в отдельности:

- *построение СЛАУ*: для этого пользователю необходимо объявить тип решаемой задачи (задача Дирихле, Неймана, основная краевая задача и др.), а также задать соответствующие граничные условия; количество уравнений и элементы матриц $\mathbf{A}^{(k)}$, $\mathbf{B}^{(k)}$ ($k = \overline{0, n-1}$) определяются с помощью модулей «PCoords» и «ContourGreen»; система записывается в матричном виде $\mathbf{M} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Z}$;

- *решение полученной СЛАУ*: как показали тестовые расчеты, матрица полученной СЛАУ для различных задач является достаточно хорошо обусловленной ($6 \leq \text{cond}(\mathbf{M}) \leq 87$), поэтому оправданным является использование, как нам кажется, наиболее удобного метода решения – метода обратной матрицы, т.е. столбец неизвестных граничных значений вспомогательных функций u_k , v_k (всего n функций) определяется по формуле $\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{Z}$;

- *определение значений искомой функции*: по известным значениям всех вспомогательных функций u_k , v_k в контрольных точках (часть из этих значений задаются граничными условиями, часть определяются в результате решения СЛАУ на предыдущем этапе) значения искомой функции u определяются с помощью формулы (3.31); при этом могут быть найдены как дискретные значения искомой функции в некоторых точках области, так и непрерывная зависимость от координат в виде ряда, о чем уже говорилось ранее в § 4.2.

Для решения краевых задач для полигармонического уравнения достаточно использования описанных выше трех модулей. Однако для полного решения задач механики сплошных сред следует также определить напряжения и при необходимости другие механические характеристики. Для этого был разработан программный модуль «**StressesDet**», который адаптируется под решаемую задачу, используя справедливые для данной задачи формулы. В качестве входных данных «**StressesDet**» использует объявленные пользователем искомые величины, а также полученные в результате работы модуля «**LinSolve**» значения полигармонической функции.

Графическую визуализацию полученных решений осуществляет программный модуль «**VisualGraph**». С его помощью можно построить графики вспомога-

тельных функций u_k , v_k на границе области и самой искомой функции u на заданных пределах (входные данные – результат работы модуля «LinSolve»), а также графики напряжений и других механических характеристик, полученных в результате работы модуля «StressesDet». Кроме того, при рассмотрении тестовых примеров в рамках модуля «VisualGraph» полученные численно решения можно сравнить графически с точными значениями искоемых функций, а также вычислить погрешности вычислений и построить графики их зависимости от числа граничных элементов, что было сделано для некоторых тестовых примеров рассмотренных в главе 3.

2°. Описанные модули являются структурными компонентами программ, входящих в состав разработанного комплекса и реализующих решения следующих задач:

- краевых задач Дирихле и Неймана для полигармонического уравнения (программа «**Dirichlet-Neumann**»);
- основной краевой задачи для полигармонического уравнения (программа «**BasicProblem**»);
- задачи кручения призматического стержня (программа «**BarTwist**»);
- плоской задачи теории упругости (программа «**PlaneElastic**»);
- задачи изгиба тонкой пластинки (программа «**LeafBend**»);
- гидродинамической задачи о движении цилиндра в вязкой жидкости (программа «**ViscouseFluide**»).

В приложении В приведены листинги некоторых из этих программ, а именно программ «Dirichlet-Neumann», «BarTwist» и «LeafBend», причем показаны как построения тестовых примеров, так и реализация решений новых задач для некоторых областей частного вида. В приложении В приведены программы, написанные в среде MathCad, использование которой обусловлено наглядностью программирования задачи и возможностью для пользователя контролировать процесс решения задачи и вносить коррективы во входные данные на любом этапе реализации решения, что, на наш взгляд, является важным преимуществом MathCad.

Общая структура всех программ комплекса может быть описана с помощью блок-схемы, представленной на рис. 4.13. В качестве входных данных задаются тип и порядок задачи (математической или механической), область, в которой ищется решение, число граничных элементов и граничные условия. На выходе пользователь получает значения и графики интересующих его величин.

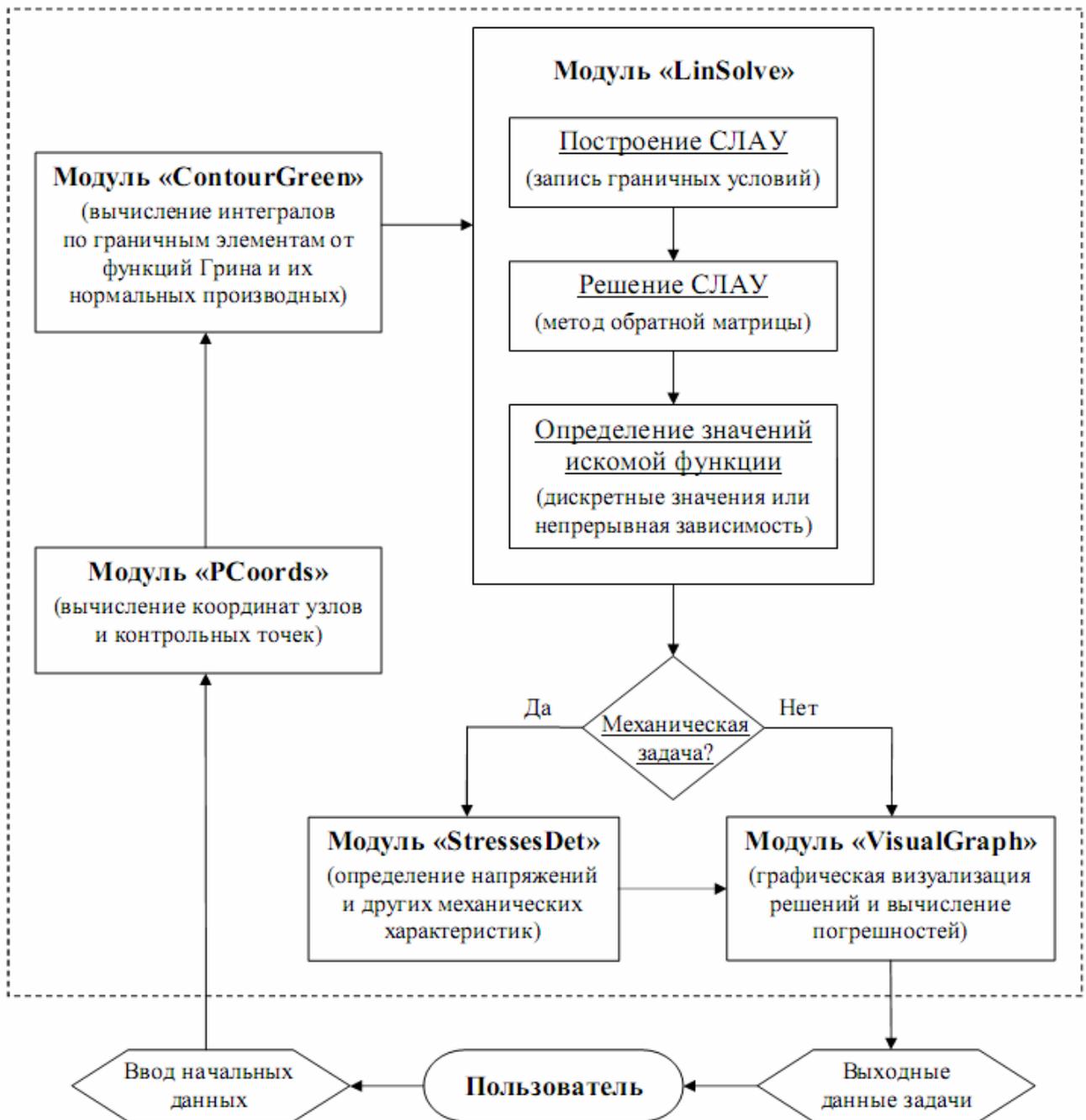


Рисунок 4.13

§ 4.6. Численное моделирование некоторых актуальных задач

Как видно из рассмотренных в этой главе тестовых примеров, метод дает высокую точность при решении различных задач механики сплошных сред, поэтому с его помощью можно рассчитывать новые, не изученные ранее задачи, которые не могут быть решены аналитически. Основное преимущество предложенного численного алгоритма состоит в том, что его можно применять для областей произвольной формы. В этом параграфе будут рассмотрены примеры решения некоторых различных задач механики сплошных сред с применением математического моделирования и МГЭ.

4.6.1. Эллиптическая труба под равномерным давлением

Рассматривается область, ограниченная двумя конфокальными эллипсами с полуосями (a_1, b_1) и (a_2, b_2) , причем $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$. Пусть заданы следующие граничные условия:

$$p_n|_{(\partial T)_1} = -p_1, \quad p_n|_{(\partial T)_2} = -p_2, \quad p_\tau|_{(\partial T)_1} = p_\tau|_{(\partial T)_2} = 0, \quad (4.27)$$

где $(\partial T)_1: \begin{cases} x_1 = a_1 \cos \theta \\ y_1 = -b_1 \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi); \quad (\partial T)_2: \begin{cases} x_2 = a_2 \cos \theta \\ y_2 = b_2 \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi).$

Переход от граничных условий (4.27) к граничным условиям для бигармонической функции напряжений осуществляется по формулам (1.25) и (1.27) (константы интегрирования на внешней границе области принимаем равными нулю):

$$\varphi|_{(\partial T)_1} = \frac{p_1}{4}(b_1^2 - a_1^2) \cos 2\theta + C_1 a_1 \cos \theta + C_2 b_1 \sin \theta + C_3, \quad \varphi|_{(\partial T)_2} = \frac{p_2}{4}(b_2^2 - a_2^2) \cos 2\theta,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{(\partial T)_1} = \frac{p_1 a_1 b_1 - C_1 b_1 \cos \theta - C_2 a_1 \sin \theta}{\sqrt{b_1^2 \cos^2 \theta + a_1^2 \sin^2 \theta}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{(\partial T)_2} = \frac{-p_2 a_2 b_2}{\sqrt{b_1^2 \cos^2 \theta + a_1^2 \sin^2 \theta}}.$$

Численное решение системы уравнений (4.12) осуществлялось при $N = 60$; вычислялись значения функций $\Delta \varphi$ и $\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n}$ на границе, а также неизвестные константы C_1, C_2, C_3 , затем определялись напряжения во внутренних точках области.

На рис. 4.14 представлены графики напряжения $\sigma_{\tau\tau}$ для некоторых значений полуосей эллипсов, лежащих внутри области T , для случая, когда $a_2 = 1$, $b_2 = 0.75$, $a_1 = 0.8$, $b_1 = 0.6$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0.5$. Так как в рассматриваемой задаче эллиптическая труба находится под равномерным нормальным давлением, то достаточно привести графики для $\theta \in [0, \pi / 2]$. Точки на рис. 4.14 соответствуют найденным дискретным значениям напряжения $\sigma_{\tau\tau}$, а сплошные линии – это линии интерполяции кубическими сплайнами для этих точек.

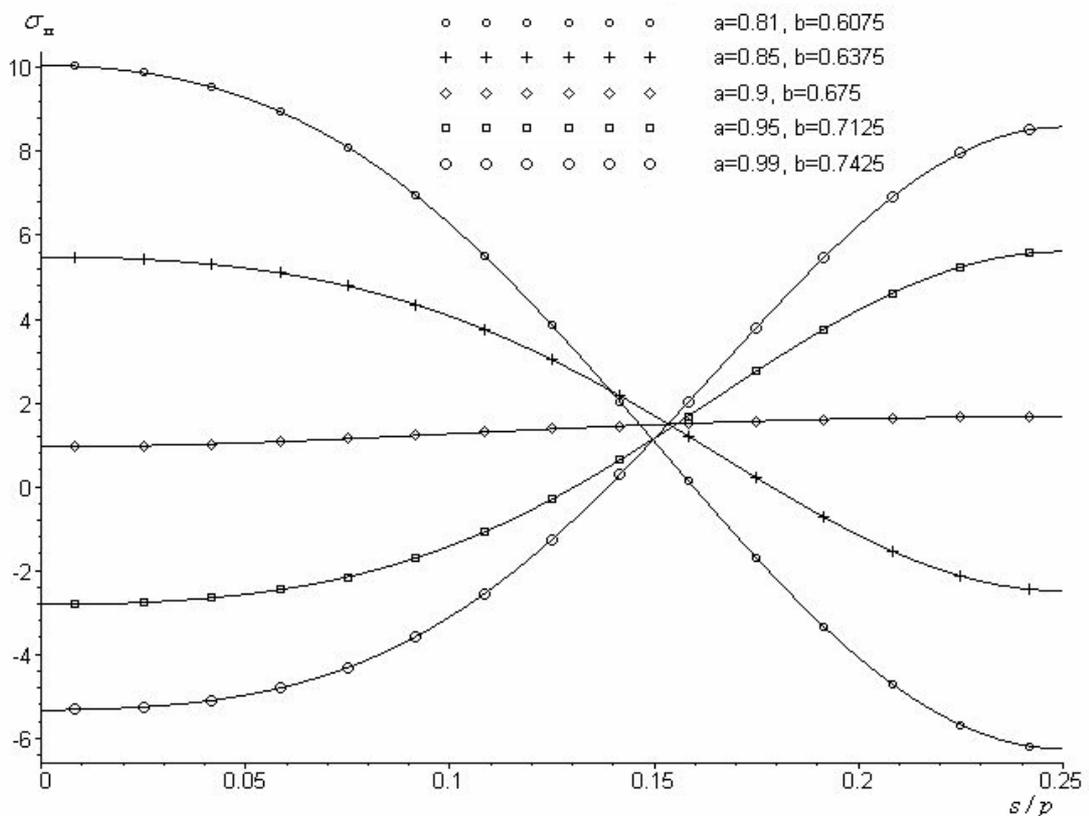


Рисунок 4.14

4.6.2. Изгиб квадратной пластинки с заделанными краями

Приведем теперь результаты решения задачи I для тонкой пластинки в форме квадрата со стороной $a = 1$ м, расположенной горизонтально в поле равномерно распределенной вертикальной нагрузки такой, что уравнение прогибов принимает вид $\Delta^2 w = 64$. Система координат выбрана таким образом, что расположение пластинки соответствует показанному на рис. 4.15. Число элементов на границе области $N = 120$ (по 30 на каждой стороне квадрата).

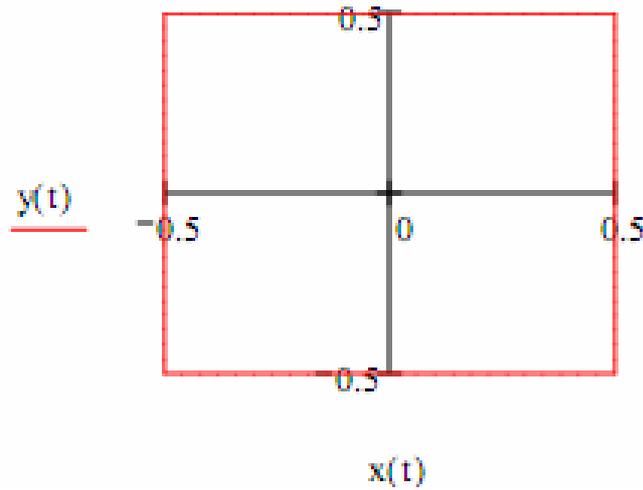


Рисунок 4.15

На рис. 4.16 изображены графики зависимости прогибов от координаты x при некоторых значениях $y = const$. В силу симметричности области зависимость прогибов от y имеет такой же вид.

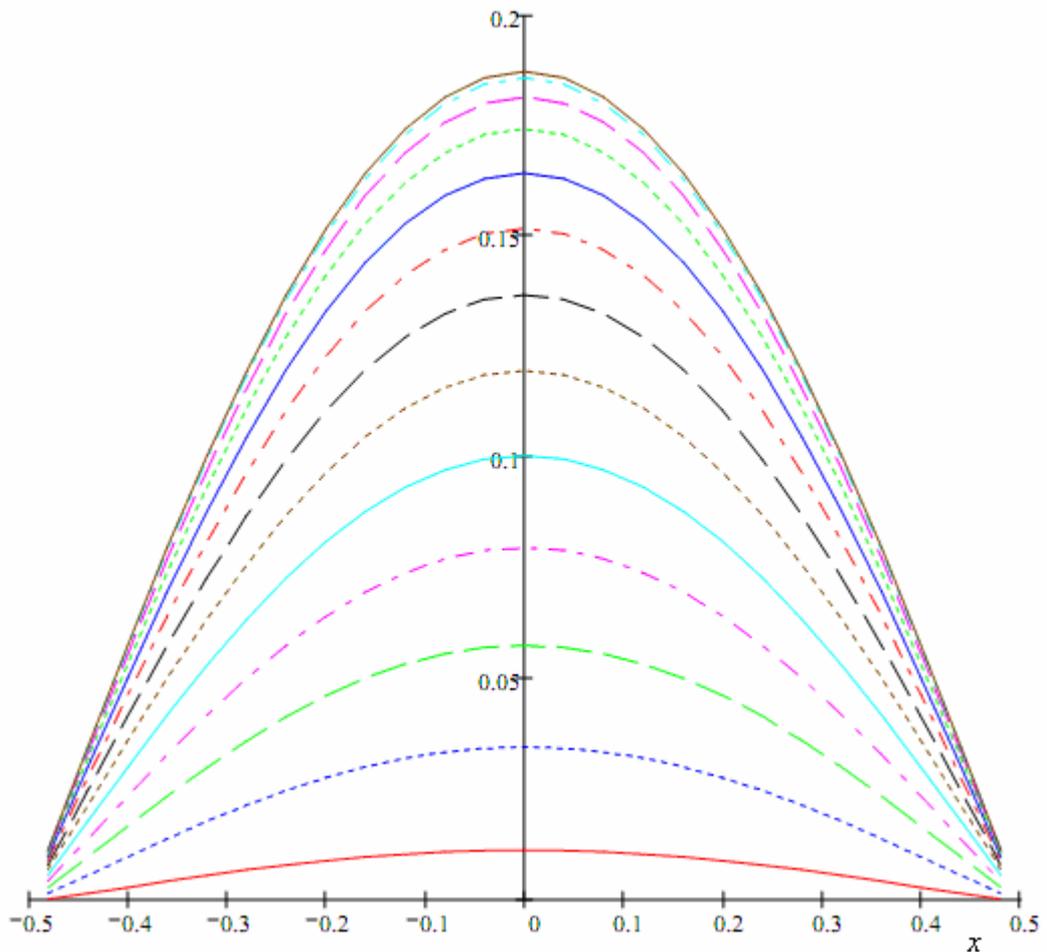
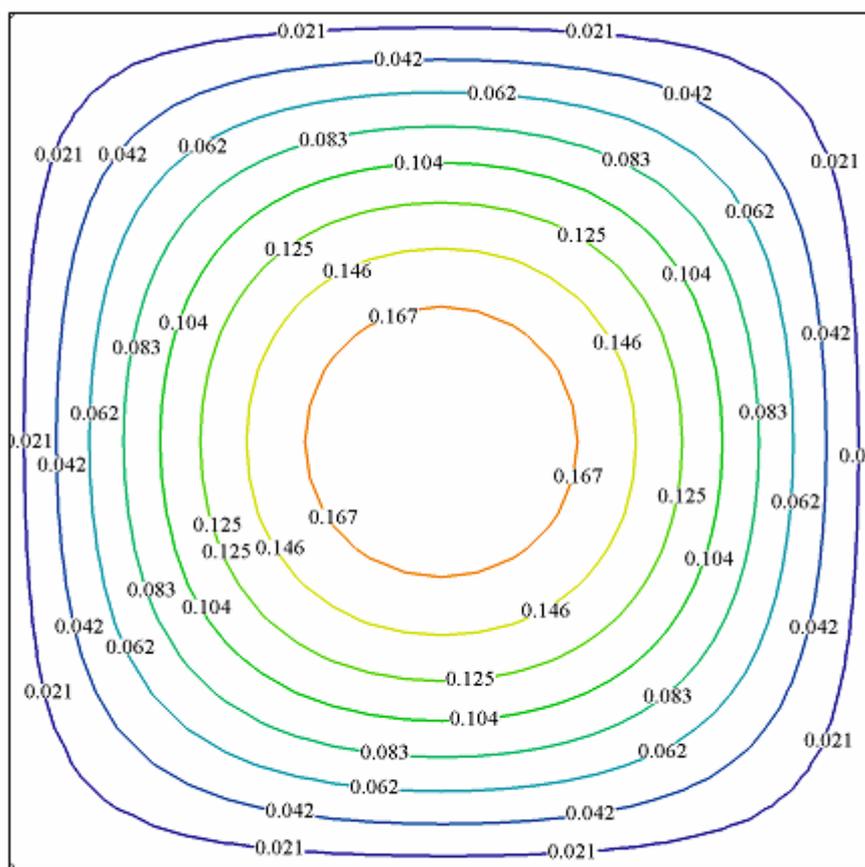


Рисунок 4.16

На рис. 4.17 изображены линии уровня функции прогибов $w(x, y)$: красным цветом изображены наибольшие значения прогибов, фиолетовым – наименьшие.



W

Рисунок 4.17

4.6.3. Движение эллиптического цилиндра в вязкой жидкости

Плоская гидродинамическая задача рассматривалась в § 1.5 и в § 4.4. Пусть подвижный контур C_1 представляет собой эллипс с полуосями a и b и находится внутри неподвижного контура C_2 - окружность радиуса R . В предположении несжимаемости жидкости компоненты скорости, завихренность потока, давление и все гидродинамические реакции выражаются через одну бигармоническую функцию тока $\psi(x, y)$. Рассмотрим равномерное поступательное движение эллиптического цилиндра вдоль оси Ox , граничные условия (1.44) тогда принимают вид:

$$v_x|_{C_1} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{C_1} = V_x^{(0)}, \quad v_y|_{C_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{C_1} = 0, \quad v_x|_{C_2} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{C_2} = 0, \quad v_y|_{C_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{C_2} = 0.$$

Как было показано в § 1.5, от этих условий можно перейти к граничным условиям основной краевой задачи для бигармонической функции тока $\psi(x, y)$:

$$\psi|_{C_1} = V_x^{(0)}y, \quad \psi|_{C_2} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n}\Big|_{C_1} = V_x^{(0)}x'_s, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n}\Big|_{C_2} = 0. \quad (4.28)$$

Полученную задачу можно решить численно с применением метода граничных элементов. Положим для определенности $V_x^{(0)} = 0.1$ м / с, $R = 2$ м, $a = 1$ м. Поскольку рассматривается поступательное движение цилиндра, приведем результаты решения для различных значений расстояния d между центрами кругового и эллиптического цилиндров (см. рис. 4.18).

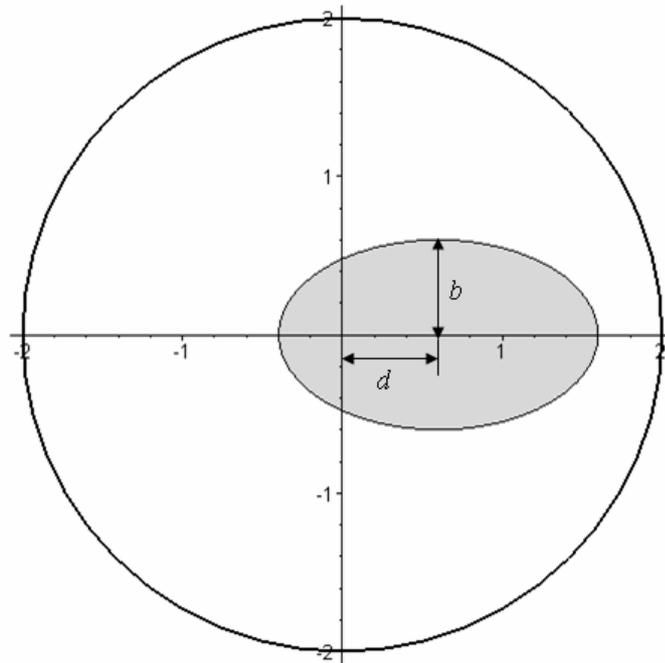


Рисунок 4.18

На рисунке 4.19 показаны значения завихренности потока $\omega = -\Delta\psi$ на границе C_1 , полученные в результате численного решения задачи, для различных значений параметров b и d . В работе А.Г. Терентьева [72] получено точное аналитическое решение для двух круговых концентрических цилиндров ($b = a$, $d = 0$). На рис. 4.19 (з) график функции ω , соответствующий точному решению при $b = 1$, показан сплошной линией. Из этого графика видно, что численное решение совпадает с аналитическим.

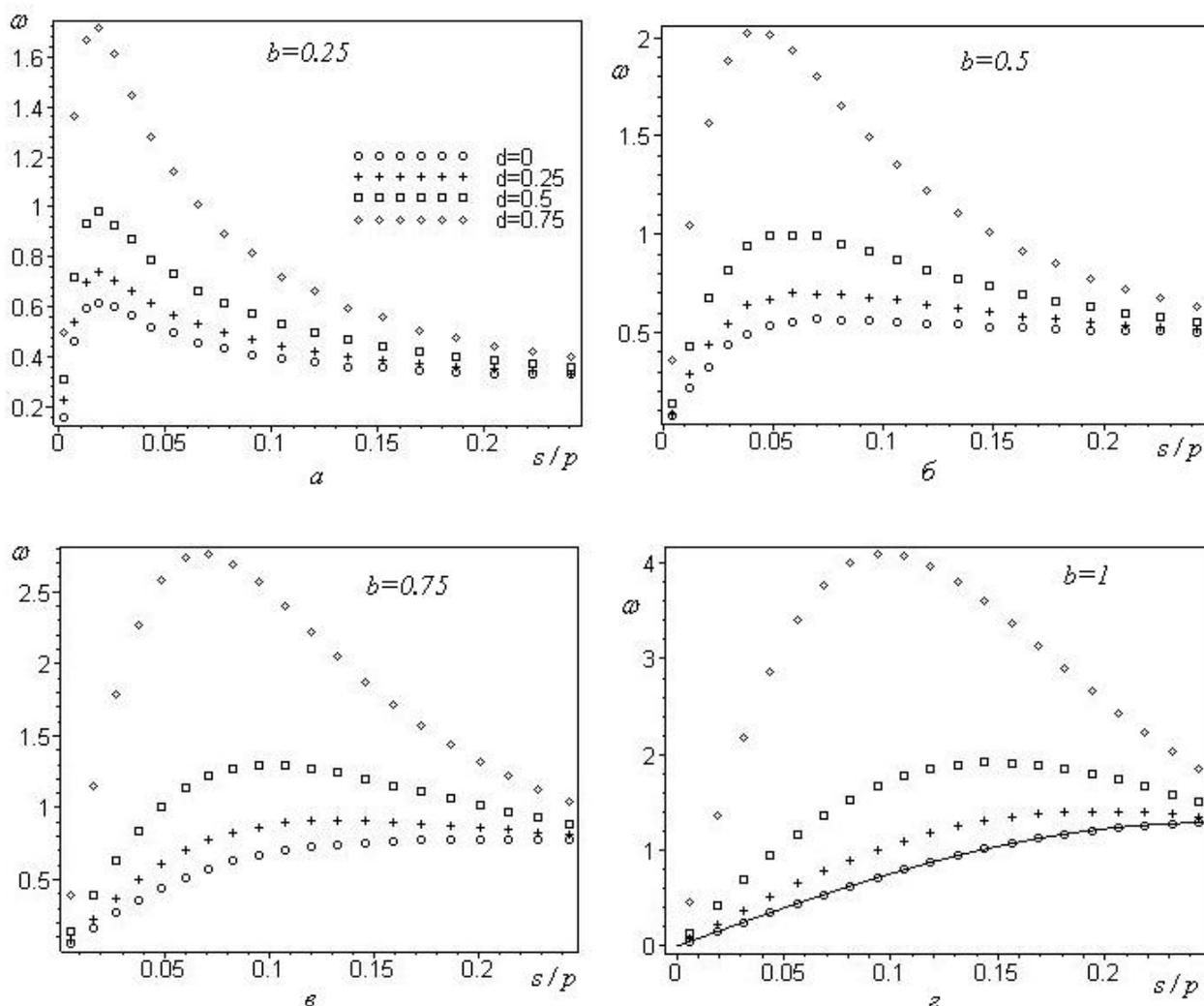


Рисунок 4.19

4.6.4. Задача о трубе, погруженной в весомую жидкость

В последнее время внимание ученых привлекают различные подводные глубоководные и малопогруженные объекты (см. [103]), при этом возникают проблемы, связанные с прочностными свойствами. Поэтому методы расчета корпусов при переменном внешнем давлении имеют определенное практическое значение. Пусть упругое однородное тело, представляющее собой полый цилиндр произвольного сечения, погружено в покоящуюся однородную весомую жидкость так, что вдоль каждой его образующей гидростатическое давление, действующее на внешнюю поверхность тела, постоянно; внутреннее давление P_1 постоянно на всей внутренней поверхности тела. Пусть h и H – минимальное и максимальное значения высоты, на которой находятся точки погруженного в жидкость тела.

Гидростатическое давление действует на внешнюю поверхность тела по нормали и изменяется по линейному закону: $P(y) = \rho gy$, $y \in [h; H]$, где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения. Пусть область сечения расположена в декартовой системе координат так, что прямая $y = 0$ совпадает со свободной границей (см. рис. 4.20).

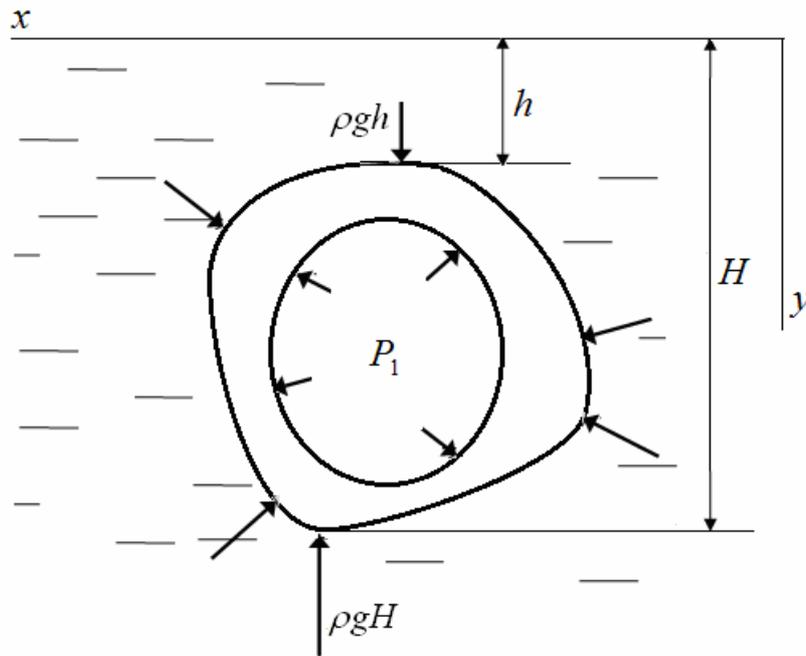


Рисунок 4.20

Рассматриваемая задача сводится к первой основной краевой задаче плоской теории упругости (см. § 4.2) с граничными условиями

$$\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = b_x, \quad \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y = b_y, \quad (4.29)$$

где $b_x = P(s)n_x$, $b_y = P(s)n_y$, $P(s) = \begin{cases} P_1, & s \in (\partial D)_1, \\ \rho gy_2(s), & s \in (\partial D)_2, \end{cases}$

поэтому можно применить разработанный в главе 3 численный метод.

В качестве расчетных примеров были рассмотрены задачи об определении плоского напряженного состояния трубы с сечениями в виде концентрического, эксцентрического и эллиптического колец, погруженной в воду на глубину $h = 100$ м ($\rho = 1000$ кг/м³, $g = 9.8$ Н/м). Внутреннее давление P_1 считалось равным атмосферному давлению.

На рис. 4.21 показаны рассмотренные сечения и графики зависимости напряжения $\sigma_r = \partial^2 \varphi / \partial n^2$ на границах трубы от нормированной дуговой координаты s . В верхней части рис. 4.21 представлены результаты для сечений в виде концентрического и эксцентрического колец с радиусами 10 м и 8 м; в нижней части – для эллиптических колец с полуосями внешнего контура 15 м и 10 м, внутреннего – 12 м и 8 м; δ – расстояние между центрами внутренней и внешней границы. Сплошными линиями изображены графики напряжения σ_r на внешнем контуре сечения (МПа), штриховыми – на внутреннем контуре (кПа). Графики представлены только для $s \in [-1/4, 1/4]$, что соответствует значениям полярного угла $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Значения для остальной части границы нетрудно определить в силу симметричности рассматриваемых областей.

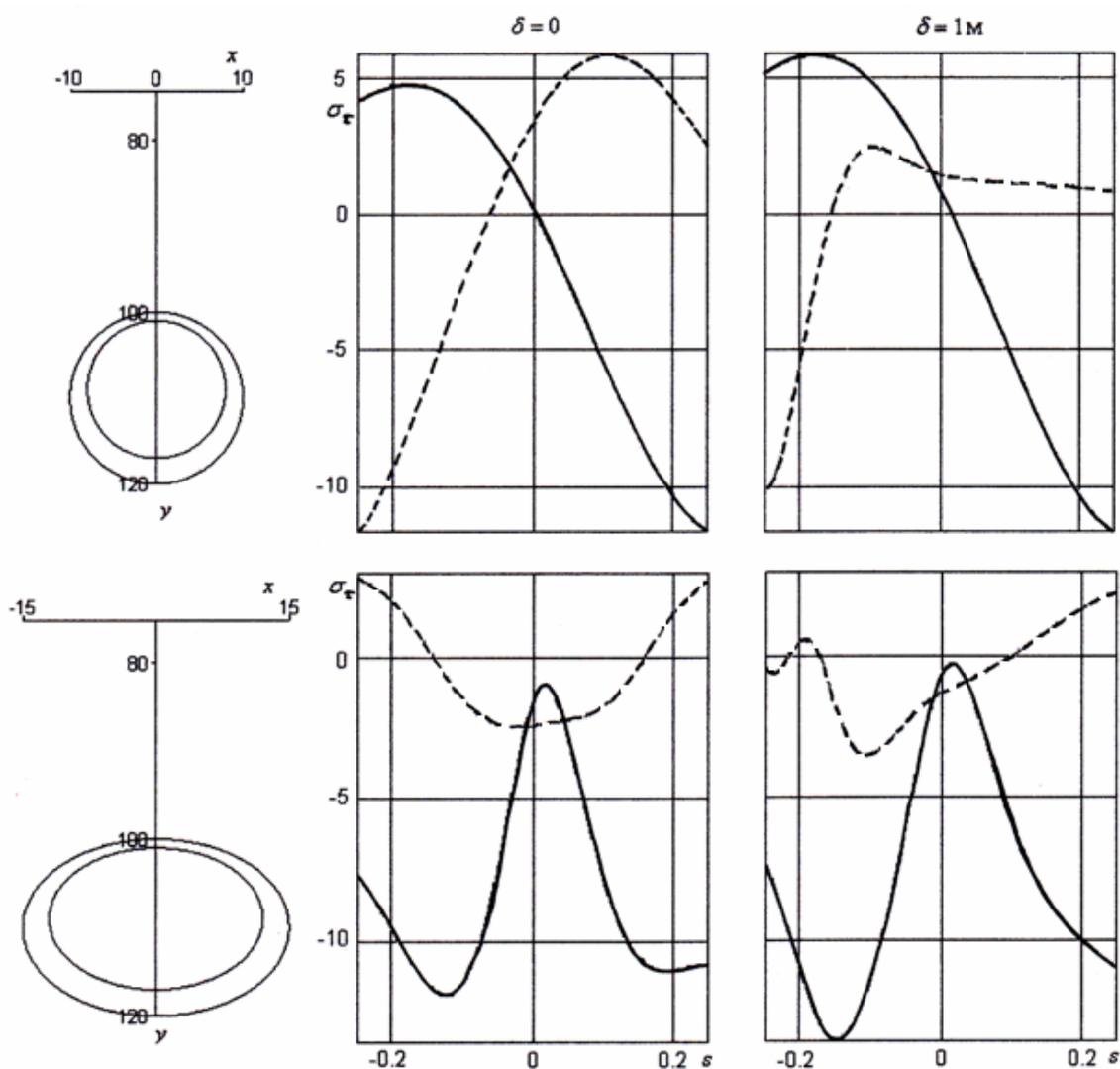


Рисунок 4.21

§ 4.7. Выводы по главе 4

В главе показана возможность применения разработанного в главе 3 численного метода решения краевых задач для полигармонического уравнения к решению задач гидромеханики и теории упругости, многие из которых, как было показано в главе 1, сводятся к решению гармонического и бигармонического уравнений. Подробно рассмотрены задача кручения стержня, плоская задача теории упругости в напряжениях, задача изгиба тонкой пластинки и гидродинамическая задача о движении цилиндра в вязкой жидкости. Тестовые примеры подтверждают высокую точность предложенного метода и эффективность его применения для решения различных задач механики. Получены решения некоторых актуальных задач, в частности задачи об определении плосконапряженного состояния трубы произвольного сечения, погруженной в весомую жидкость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения диссертационной работы были получены следующие **основные результаты**:

1. Представлено исследование вопросов математического моделирования в механике сплошных сред. При этом реализован новый подход к исследованию явлений, изучаемых в механике сплошных сред: математические модели различных явлений рассмотрены с универсальной точки зрения как описываемые полигармоническим уравнением некоторого порядка, в том числе высшего. Сделан вывод о том, что для решения различных задач гидродинамики и теории упругости может быть применен один и тот же универсальный метод решения краевых задач для полигармонического уравнения любого порядка.

2. Предложен алгоритм решения основной краевой задачи для полигармонического уравнения в произвольной односвязной и двусвязной области, основанный на применении методов комплексного анализа и приближенного метода коллокации. Получено представление n -гармонической вещественной функции через n аналитических функций, являющееся обобщением известной формулы Гурса для бигармонической функции.

3. Разработан эффективный численный метод решения различных краевых задач для полигармонического уравнения в произвольной плоской и осесимметричной пространственной области, основанный на интегральной формуле Грина и методе граничных элементов (МГЭ). Из формулы Грина получены интегральные соотношения для полигармонических функций, в том числе обладающих осевой симметрией. Установлено, что разработанный метод обладает высокой степенью точности и обладает рядом преимуществ перед конечно-разностными схемами.

4. Разработаны методы математического моделирования некоторых явлений, изучаемых в механике сплошных сред, а именно кручения призматического стержня, изгиба тонкой пластинки, движения цилиндра в вязкой жидкости. При исследовании плосконапряженного состояния получены условия однозначности смещений в удобном для реализации численного метода виде.

5. Создан комплекс программ для моделирования решений различных задач механики сплошных сред, приводящих к краевым задачам для полигармонического уравнения. Осуществлена программная реализация математических моделей механики сплошных сред с использованием разработанного на основе МГЭ численного метода решения краевых задач для полигармонического уравнения. Программный комплекс оснащен возможностью контроля пользователем промежуточных результатов и средствами графической визуализации результатов расчетов.

6. На основе разработанных средств математического моделирования получены решения некоторых актуальных задач механики сплошных сред, в частности задачи об определении плосконапряженного состояния трубы, погруженной в весомую жидкость; результаты проведенного исследования могут быть полезны при освоении морских глубин и для решения энергетических проблем. Показано, что погрешность вычислений при реализации разработанного метода обратно пропорциональна квадрату числа граничных элементов, на которые разбивается граница области.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Интеграл Стильеса и условия его существования

Здесь реферативно изложены сведения § 5 главы XV книги Г.М. Фихтенгольца [81].

Интеграл Стильеса является непосредственным обобщением обычного определенного интеграла Римана. Рассмотрим его определение. Пусть в промежутке $[a, b]$ заданы две ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$. Разложим промежуток $[a, b]$ на части точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (\text{A.1})$$

и положим $\lambda = \max \Delta x_i$. Далее в каждой из частей $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = \overline{0, n-1}$) выберем по точке ξ_i , и умножим значение функции $f(x)$ в этой точке на соответствующее промежутку $[x_i, x_{i+1}]$ приращение функции $g(x)$. Сумма всех таких произведений называется интегральной суммой Стильеса:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (g(x_{i+1}) - g(x_i)). \quad (\text{A.2})$$

Конечный предел суммы Стильеса σ при стремлении λ к нулю называется интегралом Стильеса функции $f(x)$ по функции $g(x)$ и обозначается

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i). \quad (\text{A.3})$$

Предел здесь понимается в том же смысле, что и в случае обыкновенного определенного интеграла. При существовании интеграла (A.3) говорят, что функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a, b]$ по функции $g(x)$.

Таким образом, отличие данного выше определения от обычного определения интеграла Римана состоит в том, что $f(\xi_i)$ умножается не на приращение Δx_i независимой переменной, а на приращение $\Delta g(x_i)$ самой функции. Это означает, что интеграл Римана есть частный случай интеграла Стильеса, когда $g(x) = x$.

Приведем теперь *классы случаев существования интеграла Стильеса*:

1. Если функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ имеет ограниченное изменение на промежутке $[a, b]$, то интеграл Стильеса

$$\int_a^b f(x) dg(x) \quad (\text{A.4})$$

существует.

2. Если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a, b]$ в смысле Римана, а $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\begin{aligned} |g(\tilde{x}) - g(x)| &\leq L(\tilde{x} - x) \\ (L = \text{const}, \quad a \leq x < \tilde{x} \leq b), \end{aligned}$$

то интеграл (A.4) существует.

3. Если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a, b]$ в смысле Римана, а функция $g(x)$ представима в виде интеграла с переменным верхним пределом:

$$g(x) = c + \int_a^{\tilde{x}} \varphi(t) dt,$$

где $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема в промежутке $[a, b]$, то интеграл (A.4) существует.

Доказательства этих утверждений можно найти в [81].

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Геометрия биполярных координат

В этом приложении дается определение биполярных координат в соответствии с монографией Я.С. Уфлянда [78].

Рассмотрим систему криволинейных координат (α, β) , определив их следующим образом: выберем на оси Ox две точки P_1 и P_2 (полюсы) на расстоянии $2a$ друг от друга (рисунок Б.1) и будем характеризовать положение точки на плоскости следующими двумя величинами:

$$\alpha = \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad \beta = \angle PMP_1. \quad (\text{Б.1})$$

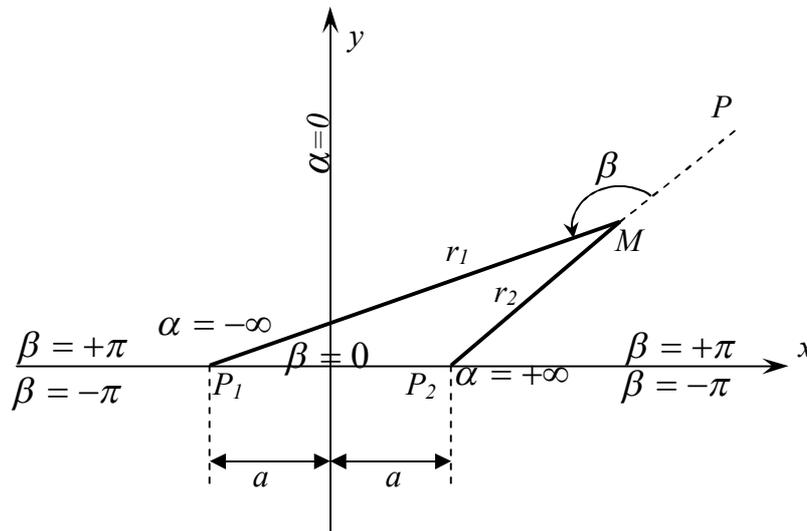


Рисунок Б.1

Координата α будет при этом изменяться от $-\infty$ до $+\infty$; в правой полуплоскости $\alpha > 0$, в левой $\alpha < 0$; ось Oy является координатной линией $\alpha = 0$; точки $x = \pm a, y = 0$ соответствуют значениям $\alpha = \pm\infty$.

Координата β меняется от $-\pi$ до $+\pi$; в верхней полуплоскости $\beta > 0$, в нижней $\beta < 0$; отрезок P_1P_2 является координатной линией $\beta = 0$. Что касается отрезков оси Ox при $x < -a$ и $x > a$, то здесь координата β терпит разрыв, равный 2π : на верхнем берегу ($y = +0$) $\beta = +\pi$, на нижнем ($y = -0$) $\beta = -\pi$.

Такие криволинейные координаты обычно называют *биполярными*.

Эти же координаты могут быть получены при помощи такого конформного преобразования:

$$\zeta = \ln \frac{a+z}{a-z}, \zeta = \alpha + i\beta, z = x + iy. \quad (\text{Б.2})$$

В самом деле, разделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= \ln \sqrt{(a+x)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(a-x)^2 + y^2}; \\ \beta &= \operatorname{arctg} \frac{y}{a+x} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} + \pi, \end{aligned}$$

что совпадает с (Б.1), если учесть соотношения:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+a)^2 + y^2}, & r_2 &= \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \\ \theta_1 &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a}, & \theta_2 &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Б.3})$$

Преобразование (Б.2) показывает, что биполярные координаты образуют взаимно ортогональную сетку кривых $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$.

Геометрически ясно, что координатные линии $\beta = \text{const}$ суть дуги окружностей, имеющих центры на оси Oy и проходящих через точки P_1 и P_2 (рис. Б.2).

Радиус R дуги $\beta = \beta_0$, а также расстояние l от начала координат до центра C этой дуги определяются непосредственно из треугольника OSP_2 :

$$R = \frac{a}{|\sin \beta_0|}, \quad l = a |\operatorname{ctg} \beta_0|. \quad (\text{Б.4})$$

Таким образом, радиус дуги $\beta = -\pi$ (отрезки оси Ox : $-a, -\infty$ и $+a, +\infty$) бесконечно велик. При возрастании β от $-\pi$ до $-\pi/2$ расстояние l убывает от ∞ до 0, т.е. центры дуг $\beta = \text{const}$ передвигаются из точки $y = -\infty$ в начало координат, а их радиусы убывают от ∞ до a , так что линия $\beta = -\pi/2$ есть нижняя половина окружности радиуса a . При дальнейшем возрастании β от $-\pi/2$ до 0 центры дуг передвигаются из начала координат в точку $y = +\infty$, а их радиусы возрастают от a до ∞ , причем радиус дуги $\beta = 0$ (отрезок $-a, +a$) бесконечно велик.

При возрастании β от 0 до $\pi/2$ центры дуг передвигаются из точки $y = +\infty$ в точку $y = 0$, а их радиусы убывают от ∞ до a , так что линия $\beta = \pi/2$ есть верхняя половина окружности радиуса a . Наконец, при изменении β от $\pi/2$ до π центры дуг передвигаются из начала координат в точку $y = +\infty$, а их радиусы возрастают от a до ∞ ; радиус дуги $\beta = +\pi$ (отрезки $-a, -\infty$ и $+a, +\infty$ оси Ox) бесконечно велик. Заметим еще, что дуга, дополняющая дугу $\beta = \beta_0 \geq 0$ до полной окружности, является координатной линией $\beta = \beta_0 - \pi$.

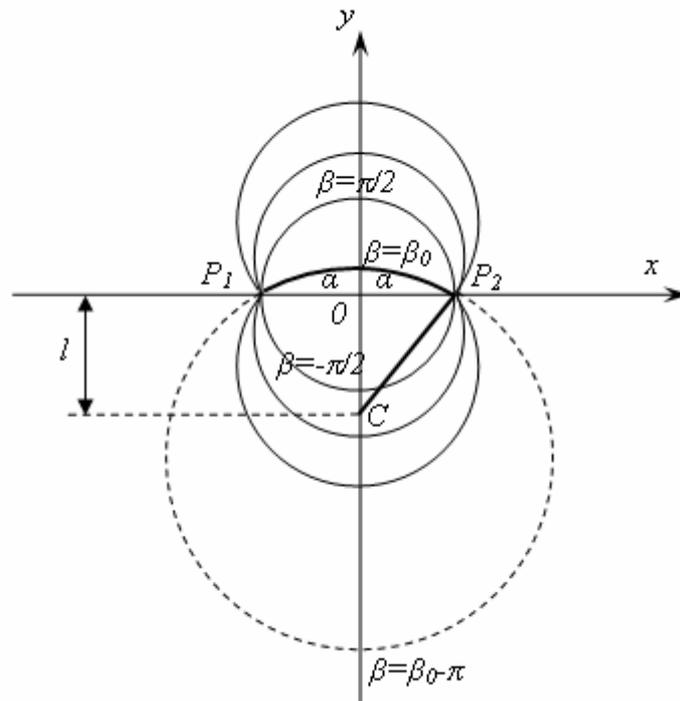


Рисунок Б.2

Уравнение кривой $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$ может быть непосредственно получено из равенства:

$$\alpha_0 = \ln \frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}},$$

которое можно преобразовать к такому виду:

$$(x - a \operatorname{cth} \alpha_0)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{sh} \alpha_0} \right)^2. \quad (\text{Б.5})$$

Последнее уравнение показывает, что координатные линии $\alpha = \text{const}$ суть эксцентрические окружности, центры которых расположены на оси Ox (рис. Б.3). Радиусы ρ этих окружностей и расстояния d их центров от начала координат даются формулами:

$$\rho = \frac{a}{|\text{sh } \alpha_0|}, \quad d = a|\text{cth } \alpha_0|. \quad (\text{Б.6})$$

Расстояние от начала координат до точки Q пересечения окружности $\alpha = \alpha_0$ с осью Ox будет $b = d - \rho$ или

$$b = a \left| \text{th } \frac{\alpha_0}{2} \right|. \quad (\text{Б.7})$$

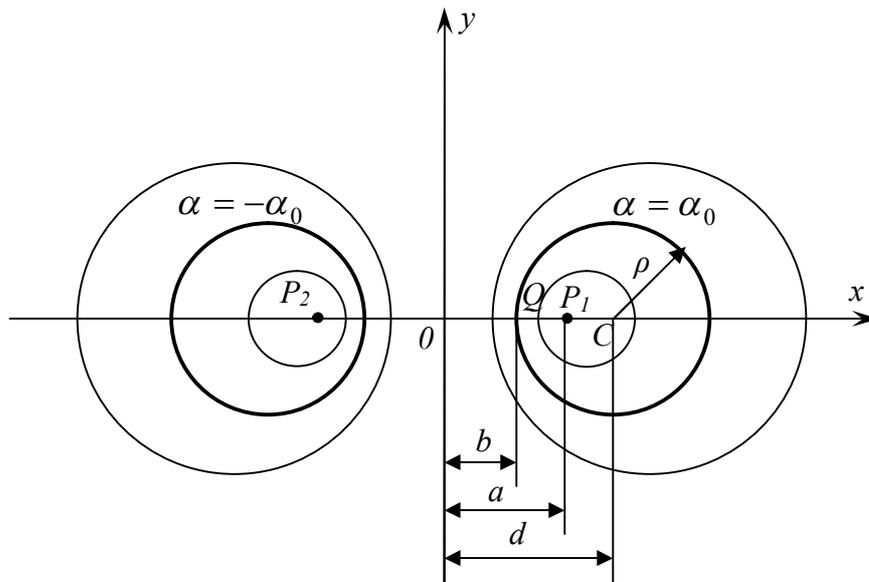


Рисунок Б.3

Таким образом, радиус окружности $\alpha = -\infty$ (точка P_1) бесконечно мал; при возрастании α от $-\infty$ до 0 центры окружностей $\alpha = \text{const}$ передвигаются из точки P_1 в точку $x = -\infty$, а их радиусы возрастают от 0 до ∞ , так что ось Oy ($\alpha = 0$) есть окружность бесконечно большого радиуса. При дальнейшем возрастании α от 0 до ∞ центры окружностей $\alpha = \text{const}$ передвигаются из точки $x = +\infty$ в точку P_2 , которой соответствует $\alpha = +\infty$, а их радиусы убывают от ∞ до 0 .

Выразим теперь прямоугольные координаты x и y через биполярные координаты α и β . Решая уравнение (Б.2) относительно z , получим:

$$z = a \operatorname{th} \frac{\zeta}{2}, \quad x + iy = a \operatorname{th} \frac{\alpha + i\beta}{2}, \quad (\text{Б.8})$$

и, отделяя здесь вещественную и мнимую части, будем иметь:

$$\frac{x}{a} = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad \frac{y}{a} = \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (\text{Б.9})$$

Выражение полярного радиуса r через биполярные координаты можно получить из (Б.9):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta}{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^2} = \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta},$$

так что

$$\left(\frac{r}{a} \right)^2 = \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (\text{Б.10})$$

Из (Б.10) видно, что бесконечно удаленная точка плоскости имеет биполярные координаты $\alpha = 0, \beta = \pm\pi$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В. Листинги программ комплекса

Для моделирования исследованных в рамках диссертационной работы явлений механики сплошных сред был разработан программный комплекс, описанный в § 4.5 настоящей работы. Приведем здесь листинги нескольких программ этого комплекса.

Листинг В.1. Программа «Dirichlet-Neumann»

Решение краевых задач Дирихле и Неймана для полигармонического уравнения с применением МГЭ

1. Параметрическое задание границы области:

$$b := 0.75 \quad x(t) := \cos(t) \quad y(t) := b \sin(t) \quad \text{Эллипс}$$

$$x'(t) := \frac{d}{dt} x(t) \quad y'(t) := \frac{d}{dt} y(t)$$

$$s'(t) := \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \quad so(t) := \int_0^t s'(t) dt$$

$$Lex := \int_0^{2 \cdot \pi} s'(t) dt \quad Lex = 5.526 \quad \text{Периметр эллипса}$$

$$nx(t) := \frac{y'(t)}{s'(t)} \quad ny(t) := -\frac{x'(t)}{s'(t)} \quad \text{Компоненты вектора нормали}$$

2. Задание эталонной функции и вычисление ее производных для сравнения результатов численного расчета с аналитическими данными:

$$i := \sqrt{-1}$$

$$u(x, y) := \operatorname{Im}[(x + i \cdot y)^3] + \left[\frac{7 \cdot x \cdot y}{3} \cdot (x^2 + y^2) \right] + (x \cdot y) \cdot (x^3 + y^3) \quad \text{Полигармоническая функция третьего порядка}$$

$$ux(x, y) := \frac{d}{dx} u(x, y) \quad uy(x, y) := \frac{d}{dy} u(x, y)$$

$$uxx(x, y) := \frac{d^2}{dx^2} u(x, y) \quad uyy(x, y) := \frac{d^2}{dy^2} u(x, y) \quad uxy(x, y) := \frac{d}{dx} uy(x, y)$$

3. Задание функций Грина:

$$G_0(x, a, b) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \left[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} \right] \quad \text{Функция Грина}$$

$$H_0(x, a, b) := -\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{b}{(x-a)^2 + b^2} \quad \text{Нормальная производная функции Грина}$$

$$r(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} \quad G(x, a, b, k) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{r(x-a, b)^{2 \cdot k}}{4^k \cdot (k!)^2} \cdot \left(\ln \left(\frac{1}{r(x-a, b)} \right) + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right) \quad \text{Полигармоническая функция Грина}$$

$$H(x, a, b, k) := \frac{b}{2 \cdot \pi \cdot [4^k \cdot (k!)^2]} \cdot \left[2 \cdot k \cdot r(x-a, b)^{2 \cdot k - 2} \cdot \left(\ln \left(\frac{1}{r(x-a, b)} \right) + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} - \frac{1}{2 \cdot k} \right) \right] \quad \text{Нормальная производная полигармонической функции Грина}$$

4. Вычисление интегралов от функций Грина:

Интегралы от функций G_0 , H_0 , G_1 , H_1 могут быть вычислены аналитически:

$$u(a, h) := 2 \cdot \frac{a}{h} \quad v(b, h) := 2 \cdot \frac{b}{h} \quad p(u, v, h) := \ln \left[\frac{h^2}{4} \cdot [(1-u)^2 + v^2] \right] \quad q(u, v, h) := \ln \left[\frac{h^2}{4} \cdot [(1+u)^2 + v^2] \right]$$

$$A_0(u, v) := \text{if} \left[|v| < 10^{-10}, 0, -\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\text{atan} \left(\frac{1-u}{v} \right) + \text{atan} \left(\frac{1+u}{v} \right) \right) \right]$$

$$B_0(u, v, h) := \frac{h}{2} \cdot \left[v \cdot A_0(u, v) - \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot [(1-u) \cdot p(u, v, h) + (1+u) \cdot q(u, v, h)] + \frac{1}{\pi} \right]$$

$$A_1(u, v, h) := \frac{v \cdot h}{4} \cdot \left(B_0(u, v, h) + \frac{h}{4 \cdot \pi} \right)$$

$$B_1(u, v, h) := \frac{-h^3}{128 \cdot \pi} \cdot \left[\left[\frac{1}{3} \cdot (1-u)^3 + (1-u) \cdot v^2 \right] p(u, v, h) + \left[\frac{1}{3} \cdot (1+u)^3 + (1+u) \cdot v^2 \right] q(u, v, h) \dots \right. \\ \left. + \left[-\frac{16}{9} \cdot (1+3u^2) - \frac{20}{3} \cdot v^2 - \frac{8 \cdot \pi}{3} \cdot v^3 \cdot A_0(u, v) \right] \right]$$

Интегралы от остальных функций вычисляются численно методом Ромберга:

$$A_2(u, v, h) := \int_{-0.5 \cdot h}^{0.5 \cdot h} H \left(x, \frac{h}{2} \cdot u, \frac{h}{2} \cdot v, 2 \right) dx \quad B_2(u, v, h) := \int_{-0.5 \cdot h}^{0.5 \cdot h} G \left(x, \frac{h}{2} \cdot u, \frac{h}{2} \cdot v, 2 \right) dx$$

5. Задание вспомогательных функций для вычисления компонент матриц:

$$h(x_1, x_2, y_1, y_2) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$c(x1, x2, y1, y2) := \frac{x2 - x1}{h(x1, x2, y1, y2)} \quad s(x1, x2, y1, y2) := \frac{y2 - y1}{h(x1, x2, y1, y2)}$$

$$X(a1, a2) := \frac{a1 + a2}{2} \quad Y(b1, b2) := \frac{b1 + b2}{2}$$

$$a(x1, x2, y1, y2, a1, a2, b1, b2) := c(x1, x2, y1, y2) \cdot (X(a1, a2) - X(x1, x2)) + s(x1, x2, y1, y2) \cdot (Y(b1, b2) - Y(y1, y2))$$

$$b(x1, x2, y1, y2, a1, a2, b1, b2) := c(x1, x2, y1, y2) \cdot (Y(b1, b2) - Y(y1, y2)) + (-1) \cdot s(x1, x2, y1, y2) \cdot (X(a1, a2) - X(x1, x2))$$

$$a(x1, x2, y1, y2, a1, a2, b1, b2) := 2 \cdot \frac{a(x1, x2, y1, y2, a1, a2, b1, b2)}{h(x1, x2, y1, y2)}$$

$$b(x1, x2, y1, y2, a1, a2, b1, b2) := 2 \cdot \frac{b(x1, x2, y1, y2, a1, a2, b1, b2)}{h(x1, x2, y1, y2)}$$

6. Задание граничных элементов:

$$N = 40 \quad \text{Число граничных элементов}$$

$$n := 0..N \quad j := 0..N-1 \quad k := 0..N-1$$

$$T_n := 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{N} \quad x0_n := x(T_n) \quad y0_n := y(T_n) \quad \text{Координаты точек концов элементов}$$

$$X_{jk} := 0.5 \cdot (x0_k + x0_{k+1}) \quad \text{Координаты контрольных точек}$$

$$Y_{jk} := 0.5 \cdot (y0_k + y0_{k+1})$$

$$h_k := \sqrt{(x0_{k+1} - x0_k)^2 + (y0_{k+1} - y0_k)^2} \quad \text{длины элементов}$$

7. Вычисление компонент матриц:

$$c1_{j,k} := a(x0_k, x0_{k+1}, y0_k, y0_{k+1}, x0_j, x0_{j+1}, y0_j, y0_{j+1})$$

$$c2_{j,k} := b(x0_k, x0_{k+1}, y0_k, y0_{k+1}, x0_j, x0_{j+1}, y0_j, y0_{j+1})$$

$$A0_{j,k} := \text{if}(j \neq k, A0(c1_{j,k}, c2_{j,k}), 0) \quad B0_{j,k} := \text{if}\left(j \neq k, B0(c1_{j,k}, c2_{j,k}, h_k), \frac{h_k}{2 \cdot \pi} \cdot \left(1 + \ln\left(\frac{2}{h_k}\right)\right)\right)$$

$$A1_{j,k} := A1(c1_{j,k}, c2_{j,k}, h_k) \quad B1_{j,k} := B1(c1_{j,k}, c2_{j,k}, h_k)$$

$$A2_{j,k} := \text{if}(j \neq k, A2(c1_{j,k}, c2_{j,k}, h_k), 0) \quad B2_{j,k} := \text{if}(j \neq k, B2(c1_{j,k}, c2_{j,k}, h_k), 0)$$

Вычисление может быть продолжено в зависимости от порядка уравнения

$$I_{k,j} := \text{if}(k \neq j, 0, 0.5) \quad \underline{A} := I + A0$$

$$Nx_k := \frac{y_{0_{k+1}} - y_{0_k}}{h_k} \quad Ny_k := \frac{x_{0_k} - x_{0_{k+1}}}{h_k}$$

8. Задание граничных условий:

$$\text{Задание условий Дирихле:} \quad u0(t) := u(x(t), y(t))$$

$$\Delta u(x, y) := u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) \quad u1(t) := \Delta u(x(t), y(t))$$

$$u1_{xx}(x, y) := \frac{d^2}{dx^2} \Delta u(x, y) \quad u1_{yy}(x, y) := \frac{d^2}{dy^2} \Delta u(x, y)$$

$$\Delta 2u(x, y) := u1_{xx}(x, y) + u1_{yy}(x, y) \quad u2(t) := \Delta 2u(x(t), y(t))$$

$$\text{Задание условий Неймана:} \quad v0(t) := u_x(x(t), y(t)) \cdot nx(t) + u_y(x(t), y(t)) \cdot ny(t)$$

$$u1_x(x, y) := \frac{d}{dx} \Delta u(x, y) \quad u1_y(x, y) := \frac{d}{dy} \Delta u(x, y) \quad v1(t) := u1_x(x(t), y(t)) \cdot nx(t) + u1_y(x(t), y(t)) \cdot ny(t)$$

$$u2_x(x, y) := \frac{d}{dx} \Delta 2u(x, y) \quad u2_y(x, y) := \frac{d}{dy} \Delta 2u(x, y) \quad v2(t) := u2_x(x(t), y(t)) \cdot nx(t) + u2_y(x(t), y(t)) \cdot ny(t)$$

9. Дискретизация граничных условий:

$$U0_k := u(X_k, Y_k) \quad U0_{x_k} := u_x(X_k, Y_k) \quad U0_{y_k} := u_y(X_k, Y_k)$$

$$V0_k := U0_{x_k} \cdot Nx_k + U0_{y_k} \cdot Ny_k$$

$$U1_k := \Delta u(X_k, Y_k) \quad U1_{x_k} := u1_x(X_k, Y_k) \quad U1_{y_k} := u1_y(X_k, Y_k)$$

$$V1_k := U1_{x_k} \cdot Nx_k + U1_{y_k} \cdot Ny_k$$

$$U2_k := \Delta 2u(X_k, Y_k) \quad U2_{x_k} := u2_x(X_k, Y_k) \quad U2_{y_k} := u2_y(X_k, Y_k)$$

$$V2_k := U2_{x_k} \cdot Nx_k + U2_{y_k} \cdot Ny_k$$

10. Решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$\underline{i} := 0..3 \cdot N - 1 \quad k := 0..N - 1$$

$$N1_{k,i} := \text{if}(i < N, B0_{k,i}, \text{if}(i < 2 \cdot N, B1_{k,i-N}, B2_{k,i-2 \cdot N}))$$

$$N2_{k,i} := \text{if}(i < N, 0, \text{if}(i < 2 \cdot N, B0_{k,i-N}, B1_{k,i-2 \cdot N}))$$

$$N3_{k,i} := \text{if}(i < N, 0, \text{if}(i < 2 \cdot N, 0, B0_{k,i-2 \cdot N}))$$

$$M1_{k,i} := \text{if}(i < N, A_{k,i}, \text{if}(i < 2 \cdot N, A1_{k,i-N}, A2_{k,i-2 \cdot N}))$$

$$M2_{k,i} := \text{if}(i < N, 0, \text{if}(i < 2 \cdot N, A_{k,i-N}, A1_{k,i-2 \cdot N}))$$

$$M3_{k,i} := \text{if}(i < N, 0, \text{if}(i < 2 \cdot N, 0, A_{k,i-2 \cdot N}))$$

$$k := 0..3 \cdot N - 1$$

$$M_{k,i} := \text{if}(k < N, M1_{k,i}, \text{if}(k < 2 \cdot N, M2_{k-N,i}, M3_{k-2 \cdot N,i}))$$

$$N0_{k,i} := \text{if}(k < N, N1_{k,i}, \text{if}(k < 2 \cdot N, N2_{k-N,i}, N3_{k-2 \cdot N,i}))$$

$$U_k := \text{if}(k < N, U0_k, \text{if}(k < 2 \cdot N, U1_{k-N}, U2_{k-2 \cdot N}))$$

$$V_k := \text{if}(k < N, V0_k, \text{if}(k < 2 \cdot N, V1_{k-N}, V2_{k-2 \cdot N}))$$

$$Z := M \cdot U \quad Z1 := N0 \cdot V \quad j := 0..N - 1$$

Решение задачи Дирихле: $V := N0^{-1} \cdot Z$

$$V0_j := V_j \quad V1_j := V_{N+j} \quad V2_j := V_{2 \cdot N+j}$$

Решение задачи Неймана: $M_{k,0} := 1 \quad U := M^{-1} \cdot Z1$

$U0_j := U_j + u(X_0, Y_0)$ необходимо задать значение искомой функции в одной точке

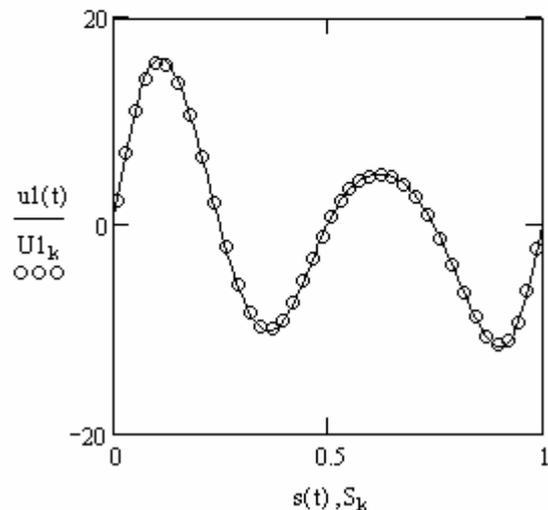
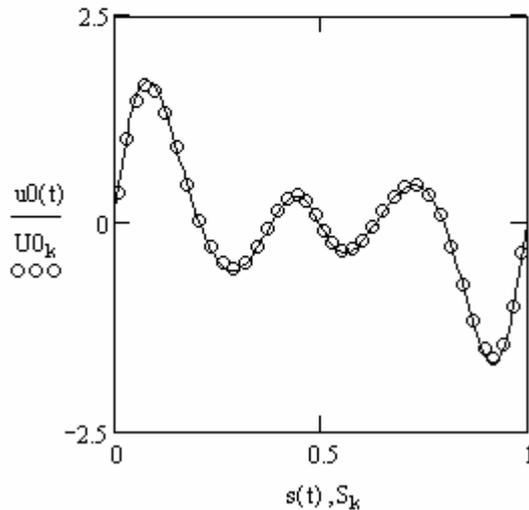
$$U1_j := U_{N+j} \quad U2_j := U_{2 \cdot N+j}$$

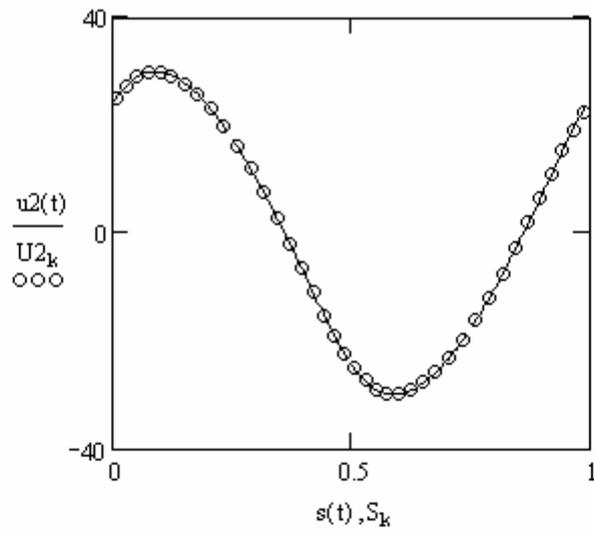
11. Построение графиков: $j := 1..N - 1$

$$S_{j0} := 0.5 \cdot h_0 \quad S_j := S_{j-1} + 0.5 \cdot (h_j + h_{j-1}) \quad S := \frac{S}{\text{Lex}} \quad s(t) := \frac{so(t)}{\text{Lex}}$$

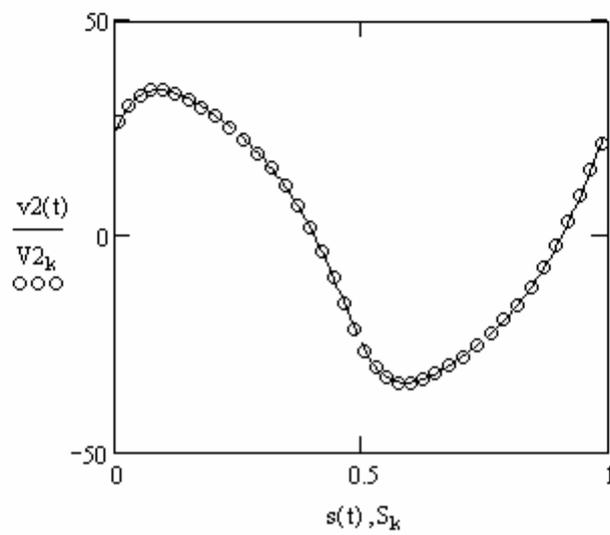
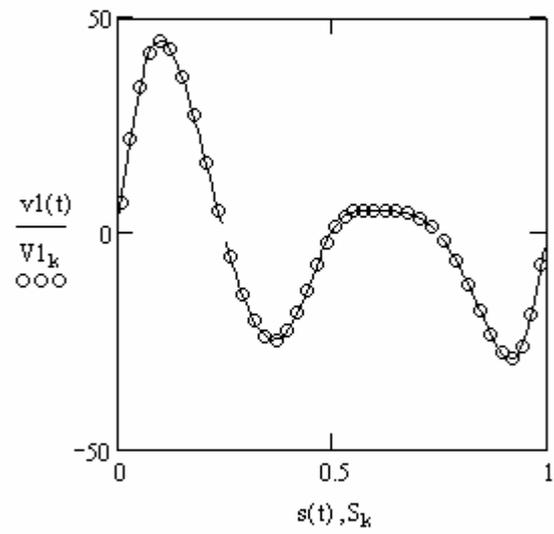
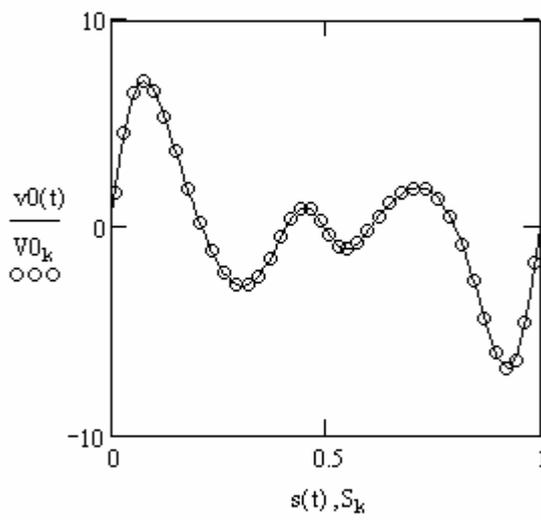
$$t := 0, 0.01 \cdot \pi .. 2 \cdot \pi$$

Результаты решения задачи Неймана:





Результаты решения задачи Дирихле:



12. Вычисление погрешностей:

$$\text{pogr_u0} := \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left| \frac{u(X_k, Y_k) - U0_k}{u(X_k, Y_k)} \right| \right) \cdot 100\% \quad \text{pogr_u0} = 0.074$$

$$\text{pogr_u1} := \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left| \frac{\Delta u(X_k, Y_k) - U1_k}{\Delta u(X_k, Y_k)} \right| \right) \cdot 100\% \quad \text{pogr_u1} = 9.842 \times 10^{-3} \quad \text{Задача Неймана}$$

$$\text{pogr_u2} := \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left| \frac{\Delta^2 u(X_k, Y_k) - U2_k}{\Delta^2 u(X_k, Y_k)} \right| \right) \cdot 100\% \quad \text{pogr_u2} = 2.539 \times 10^{-3}$$

$$\text{pogr_v0} := \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left| \frac{U0x_k \cdot Nx_k + U0y_k \cdot Ny_k - V0_k}{U0x_k \cdot Nx_k + U0y_k \cdot Ny_k} \right| \right) \cdot 100\% \quad \text{pogr_v0} = 0.018$$

$$\text{pogr_v1} := \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left| \frac{U1x_k \cdot Nx_k + U1y_k \cdot Ny_k - V1_k}{U1x_k \cdot Nx_k + U1y_k \cdot Ny_k} \right| \right) \cdot 100\% \quad \text{pogr_v1} = 0.013 \quad \text{Задача Дирихле}$$

$$\text{pogr_v2} := \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left| \frac{U2x_k \cdot Nx_k + U2y_k \cdot Ny_k - V2_k}{U2x_k \cdot Nx_k + U2y_k \cdot Ny_k} \right| \right) \cdot 100\% \quad \text{pogr_v2} = 2.241 \times 10^{-3}$$

Листинг В.2. Программа «BarTwist»

Решение задачи кручения призматического стержня эллиптического сечения

ЭЛЛИПС

$b := 0.5$ $a := 1$ заданные полуоси

$x_0(t) := a \cdot \cos(t)$ $y_0(t) := b \cdot \sin(t)$ уравнения эллипса

$N := 20$ общее количество

$i := 0..N$

$t_i := \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{N}$

$x_i := x_0(t_i)$ $y_i := y_0(t_i)$ -координаты узлов

$$i := 0..N \quad k := 0..N$$

$$x_i := Z_{0,i} \quad y_i := Z_{1,i}$$

$$i := 1..N \quad k := 1..N$$

$$X_i := 0.5 \cdot (x_i + x_{i-1}) \quad Y_i := 0.5 \cdot (y_i + y_{i-1}) \quad \text{-координаты контрольных точек}$$

$$h_i := \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad \text{-длина } i\text{-го элемента}$$

$$s_i := \sum_{j=1}^i h_j \quad \text{-дуговая абсцисса } i\text{-го узла} \quad L := s_N \quad \text{-периметр сечения}$$

$$s_i := s_i - 0.5 \cdot h_i \quad \text{-дуговая абсцисса } i\text{-й контрольной точки}$$

$$\tau_{x_i} := \frac{x_i - x_{i-1}}{h_i} \quad \tau_{y_i} := \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \quad \text{-компоненты касательной}$$

$$\xi_{k,i} := \frac{2}{h_i} \cdot [(X_k - X_i) \cdot \tau_{x_i} + (Y_k - Y_i) \cdot \tau_{y_i}] \quad \text{-координаты контрольных точек в локальной системе координат}$$

$$\eta_{k,i} := \frac{2}{h_i} \cdot [(Y_k - Y_i) \cdot \tau_{x_i} - (X_k - X_i) \cdot \tau_{y_i}]$$

$$A'_{k,i} := \text{if } [i \neq k, \text{if } [\eta_{k,i} \neq 0, -\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\text{atan} \left(\frac{1 - \xi_{k,i}}{\eta_{k,i}} \right) + \text{atan} \left(\frac{1 + \xi_{k,i}}{\eta_{k,i}} \right) \right), 0], \frac{1}{2}]$$

$$p_{k,i} := (1 - \xi_{k,i})^2 + (\eta_{k,i})^2 \quad q_{k,i} := (1 + \xi_{k,i})^2 + (\eta_{k,i})^2$$

$$B'_{k,i} := \frac{h_i}{2 \cdot \pi} \cdot \left[1 - \ln \left(\frac{h_i}{2} \right) - \frac{1}{4} \cdot [(1 - \xi_{k,i}) \cdot \ln(p_{k,i}) + (1 + \xi_{k,i}) \cdot \ln(q_{k,i})] + \pi \cdot \eta_{k,i} \cdot A'_{k,i} \right]$$

$$Q'_i := X_i \cdot \tau_{x_i} + Y_i \cdot \tau_{y_i} \quad \text{- значения функции } Q(X,Y) \text{ в контрольных точках}$$

$$D' := B' \cdot Q'$$

$$i := 0..N-1 \quad k := 0..N-1$$

$$A_{i,k} := A'_{i+1,k+1} \quad D_i := D'_{i+1}$$

$$A_{0,i} := 0$$

$$A_{0,0} := 1 \quad D_0 := 0 \quad \text{- перестраиваются матрицы } A \text{ и } C \text{ для того, чтобы функция кручения в } i\text{-й точке была равна } 0$$

$$F := A^{-1} \cdot D \quad \text{- функция кручения}$$

$$G_1 := \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^N \left[h_i \cdot \left[\tau_{y_i} \cdot (X_i)^3 - \tau_{x_i} \cdot (Y_i)^3 \right] \right]$$

$$G_2 := - \sum_{i=1}^N \left[h_i \cdot F_{i-1} \cdot (X_i \cdot \tau_{x_i} + Y_i \cdot \tau_{y_i}) \right]$$

$C := G_1 + G_2$ - коэффициент жесткости при кручении

$$S_{o_i} := \frac{S_{i+1}}{L} \quad X_{o_i} := X_{i+1} \quad Y_{o_i} := Y_{i+1}$$

$f(t) := \text{interp}(\text{cspline}(S_o, F), S_o, F, t)$

$x(t) := \text{interp}(\text{cspline}(S_o, X_o), S_o, X_o, t)$

$y(t) := \text{interp}(\text{cspline}(S_o, Y_o), S_o, Y_o, t)$

$$\tau(s) := x(s) \cdot \left(\frac{d}{ds} y(s) \right) - y(s) \cdot \left(\frac{d}{ds} x(s) \right) + \frac{d}{ds} f(s) \quad \text{-касательное напряжение на контуре}$$

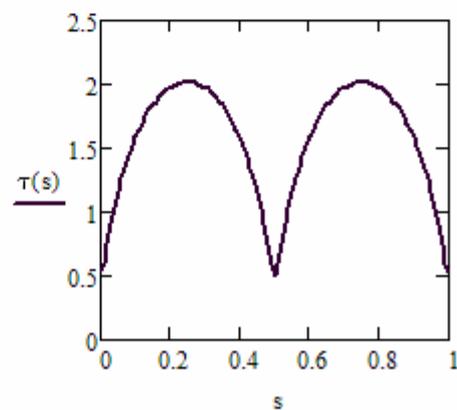
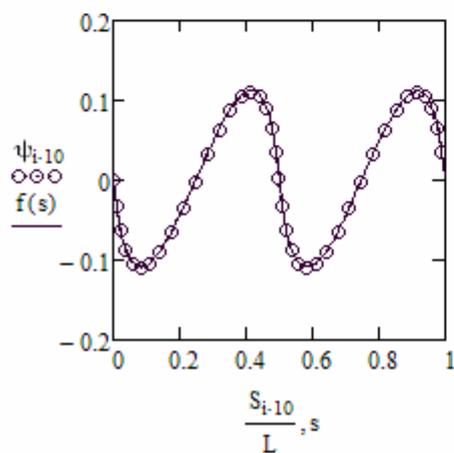
$$N = 40 \quad a = 1 \quad b = 0.25$$

$C = 0.0462$ -коэффициент жесткости при кручении

$L = 4.2892$ -периметр сечения

$$\psi_i := \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} X_i \cdot Y_i \quad \text{- аналитические формула функции кручения для эллипса}$$

$$s := 0, 0.01.. 1$$



Листинг В.3. Программа «LeafBend»

Изгиб тонкой пластинки с заделанными краями
(алюминиевая пластинка расположена горизонтально в поле тяжести)

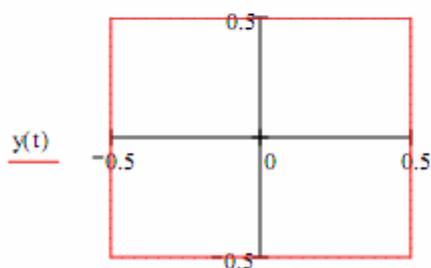
1. Параметрическое задание границы области:

$$a := 1 \quad b := 1 \quad p := 2 \cdot (a + b) \quad t := 0, 0.01 .. 1$$

$$x(t) := \text{if} \left(t < \frac{b}{p}, \frac{a}{2}, \text{if} \left(t < 0.5, -p \cdot t + b + \frac{a}{2}, \text{if} \left(t < 0.5 + \frac{b}{p}, \frac{-a}{2}, p \cdot t - 0.75p - \frac{b}{2} \right) \right) \right)$$

Прямоугольник (квадрат)

$$y(t) := \text{if} \left(t < \frac{b}{p}, p \cdot t - \frac{b}{2}, \text{if} \left(t < 0.5, \frac{b}{2}, \text{if} \left(t < 0.5 + \frac{b}{p}, -p \cdot t + \frac{p+b}{2}, \frac{-b}{2} \right) \right) \right)$$



$$x'(t) := \frac{d}{dt} x(t) \quad y'(t) := \frac{d}{dt} y(t)$$

$$s'(t) := \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \quad so(t) := \int_0^t s'(t) dt$$

$$Lex := \int_0^1 s'(t) dt$$

Lex = 4 Периметр квадрата

$$nx(t) := \frac{y'(t)}{s'(t)} \quad ny(t) := -\frac{x'(t)}{s'(t)} \quad \text{Компоненты вектора нормали}$$

2. Задание функции, соответствующей точному решению, и вычисление ее производных для сравнения результатов численного расчета с аналитическими данными:

$$h := 0.02 \text{ - толщина пластинки [м]} \quad \rho := 2699 \text{ - плотность алюминия [кг/м}^3\text{]}$$

$$g := 9.81 \text{ - ускорение свободного падения [м/с}^2\text{]}$$

$$\sigma := 0.34 \text{ - коэффициент Пуассона алюминия} \quad E := 7 \cdot 10^{10} \text{ - модуль Юнга алюминия [Па]}$$

$$\beta := \frac{3 \cdot \rho \cdot g \cdot (1 - \sigma^2)}{16 \cdot h^2 \cdot E} \quad \beta := 1$$

3. Вычисление интегралов от функций Грина:

$$r(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} \quad G(x, a, b, k) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{r(x - a, b)^{2 \cdot k}}{4^k \cdot (k!)^2} \cdot \left(\ln \left(\frac{1}{r(x - a, b)} \right) + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right) \text{ Полигармоническая функция Грина}$$

$$H(x, a, b, k) := \frac{b}{2 \cdot \pi \cdot [4^k \cdot (k!)^2]} \cdot \left[2 \cdot k \cdot r(x - a, b)^{2 \cdot k - 2} \cdot \left(\ln \left(\frac{1}{r(x - a, b)} \right) + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} - \frac{1}{2 \cdot k} \right) \right] \text{ Нормальная производная полигармонической функции Грина}$$

$$u(a, h) := 2 \cdot \frac{a}{h} \quad v(b, h) := 2 \cdot \frac{b}{h} \quad p(u, v, h) := \ln \left[\frac{h^2}{4} \cdot [(1-u)^2 + v^2] \right] \quad q(u, v, h) := \ln \left[\frac{h^2}{4} \cdot [(1+u)^2 + v^2] \right]$$

$$A0(u, v) := \text{if} \left[|v| < 10^{-10}, 0, -\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\text{atan} \left(\frac{1-u}{v} \right) + \text{atan} \left(\frac{1+u}{v} \right) \right) \right]$$

$$B0(u, v, h) := \frac{h}{2} \cdot \left[v \cdot A0(u, v) - \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot [(1-u) \cdot p(u, v, h) + (1+u) \cdot q(u, v, h)] + \frac{1}{\pi} \right]$$

$$A1(u, v, h) := \frac{v \cdot h}{4} \cdot \left(B0(u, v, h) + \frac{h}{4 \cdot \pi} \right) \quad yv := \frac{a - E^{-1}}{2}$$

$$B1(u, v, h) := \frac{-h^3}{128 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (1-u)^3 + (1-u) \cdot v^2 \right] \cdot p(u, v, h) + \left[\frac{1}{3} \cdot (1+u)^3 + (1+u) \cdot v^2 \right] \cdot q(u, v, h) \dots$$

$$\left[+ \left[-\frac{16}{9} \cdot (1+3u^2) - \frac{20}{3} \cdot v^2 - \frac{8 \cdot \pi}{3} \cdot v^3 \cdot A0(u, v) \right] \right]$$

$$A2(u, v, h) := \int_{-0.5 \cdot h}^{0.5 \cdot h} H \left(x, \frac{h}{2} \cdot u, \frac{h}{2} \cdot v, 2 \right) dx$$

4. Задание вспомогательных функций для вычисления компонент матриц:

$$h(x1, x2, y1, y2) := \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2} \quad X(a1, a2) := \frac{a1 + a2}{2} \quad Y(b1, b2) := \frac{b1 + b2}{2}$$

$$c(x1, x2, y1, y2) := \frac{x2 - x1}{h(x1, x2, y1, y2)} \quad s(x1, x2, y1, y2) := \frac{y2 - y1}{h(x1, x2, y1, y2)}$$

$$a'(x1, x2, y1, y2, a1, a2, b1, b2) := c(x1, x2, y1, y2) \cdot (X(a1, a2) - X(x1, x2)) + s(x1, x2, y1, y2) \cdot (Y(b1, b2) - Y(y1, y2))$$

$$b'(x1, x2, y1, y2, a1, a2, b1, b2) := c(x1, x2, y1, y2) \cdot (Y(b1, b2) - Y(y1, y2)) + (-1) \cdot s(x1, x2, y1, y2) \cdot (X(a1, a2) - X(x1, x2))$$

$$c1_f(x1, x2, y1, y2, a1, a2, b1, b2) := 2 \cdot \frac{a'(x1, x2, y1, y2, a1, a2, b1, b2)}{h(x1, x2, y1, y2)}$$

$$c2_f(x1, x2, y1, y2, a1, a2, b1, b2) := 2 \cdot \frac{b'(x1, x2, y1, y2, a1, a2, b1, b2)}{h(x1, x2, y1, y2)}$$

5. Задание граничных элементов и вычисление компонент матриц:

$$N := 120 \quad \text{Число граничных элементов} \quad n := 0..N \quad j := 0..N-1 \quad k := 0..N-1$$

$$T_n := \frac{n}{N} \quad x_{o_n} := x(T_n) \quad y_{o_n} := y(T_n) \quad \text{Координаты точек концов элементов}$$

$$X_{\omega_k} := 0.5 \cdot (x_{o_k} + x_{o_{k+1}}) \quad Y_{\omega_k} := 0.5 \cdot (y_{o_k} + y_{o_{k+1}}) \quad \text{Координаты контрольных точек}$$

$$h_k := \sqrt{(x_{o_{k+1}} - x_{o_k})^2 + (y_{o_{k+1}} - y_{o_k})^2} \quad \text{длины элементов}$$

$$c1_{j,k} := c1_f(x_{o_k}, x_{o_{k+1}}, y_{o_k}, y_{o_{k+1}}, x_{o_j}, x_{o_{j+1}}, y_{o_j}, y_{o_{j+1}})$$

$$c2_{j,k} := c2_f(x_{o_k}, x_{o_{k+1}}, y_{o_k}, y_{o_{k+1}}, x_{o_j}, x_{o_{j+1}}, y_{o_j}, y_{o_{j+1}})$$

$$A0_m_{j,k} := A0(c1_{j,k}, c2_{j,k}) \quad A1_m_{j,k} := A1(c1_{j,k}, c2_{j,k}, h_k) \quad A2_m_{j,k} := \text{if}(j \neq k, A2(c1_{j,k}, c2_{j,k}, h_k), 0)$$

$$B0_m_{j,k} := B0(c1_{j,k}, c2_{j,k}, h_k) \quad B1_m_{j,k} := B1(c1_{j,k}, c2_{j,k}, h_k) \quad I_{k,j} := \text{if}(k \neq j, 0, 0.5) \quad A_m := I + A0_m$$

6. Дискретизация граничных условий и решение системы уравнений:

$$i := 0..2 \cdot N - 1 \quad M1_{k,i} := \text{if}(i < N, A_{-m_{k,i}}, -B0_{-m_{k,i-N}}) \quad M2_{k,i} := \text{if}(i < N, A1_{-m_{k,i}}, -B1_{-m_{k,i-N}})$$

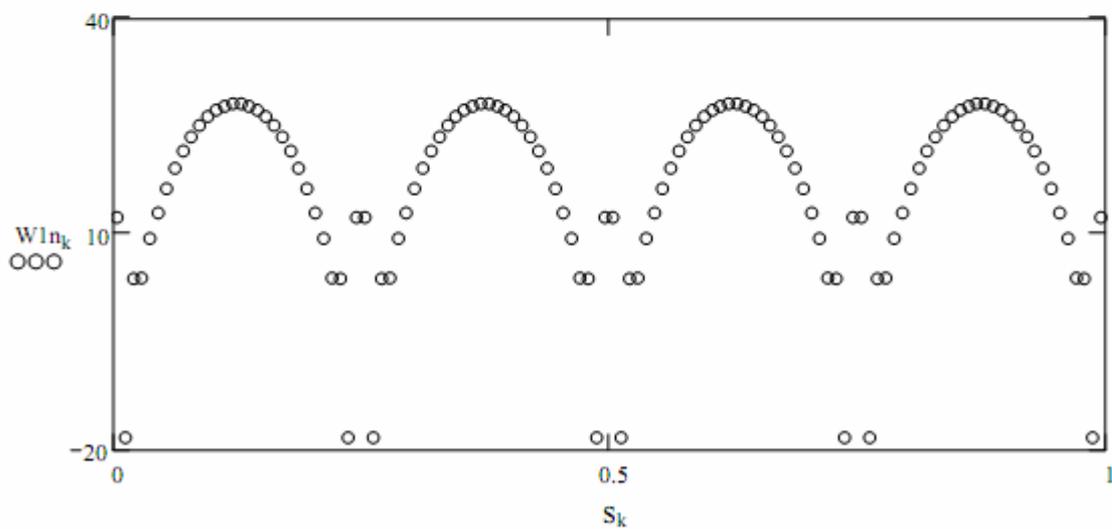
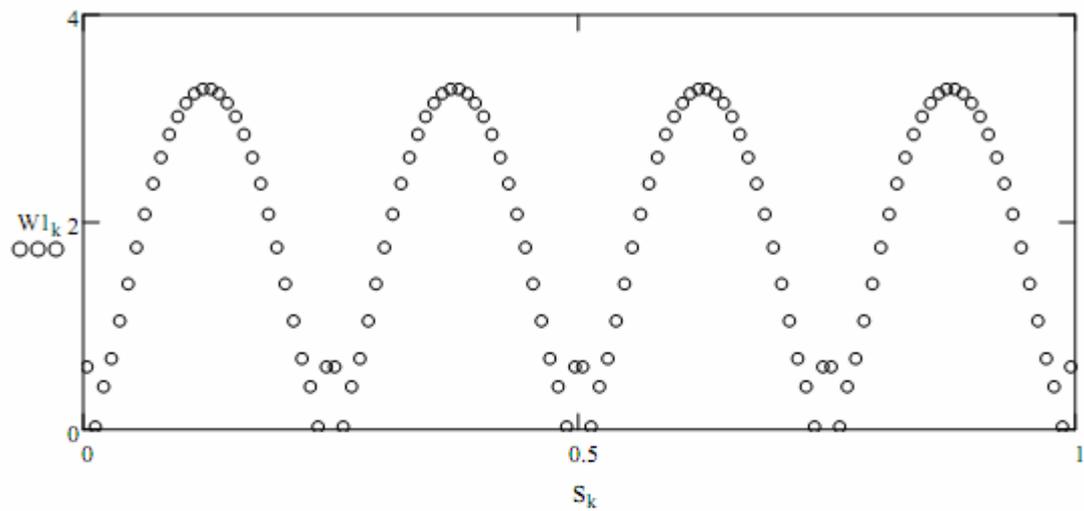
$$k := 0..2 \cdot N - 1 \quad M_{k,i} := \text{if}(k < N, M1_{k,i}, M2_{k-N,i})$$

$$i := 0..N - 1 \quad No_{k,i} := \text{if}(k < N, A1_{-m_{k,i}}, A2_{-m_{k-N,i}}) \quad V_{\text{шт}} := -64\beta \quad Z := No \cdot V$$

$$W_{\text{vsp}} := M^{-1} \cdot Z \quad j := 0..N - 1 \quad W1_j := W_{\text{vsp}_j} \quad W1n_j := W_{\text{vsp}_{N+j}}$$

7. Построение графиков вспомогательных функций:

$$S_0 := 0.5 \cdot h_0 \quad j := 1..N - 1 \quad S_j := S_{j-1} + 0.5 \cdot (h_j + h_{j-1}) \quad S := \frac{S}{\text{Lex}}$$



8. Определение значений функции прогибов w внутри области:

$$n := 25 \quad i := 0..n-1 \quad j := 0..n-1 \quad k := 0..N-1 \quad x_{-v_n} := \frac{a}{2} \quad y_{-v_n} := \frac{b}{2}$$

$$x_{-v_j} := -0.5 \cdot a + a \cdot \frac{j}{n} \quad X_{-v_j} := \frac{x_{-v_j} + x_{-v_{j+1}}}{2} \quad y_{-v_i} := -0.5 \cdot b + b \cdot \frac{i}{n} \quad Y_{-v_i} := \frac{y_{-v_i} + y_{-v_{i+1}}}{2}$$

$$c1_{j,k} := c1_f(xo_k, xo_{k+1}, yo_k, yo_{k+1}, x_{-v_j}, x_{-v_{j+1}}, yv, yv) \quad c2_{j,k} := c2_f(xo_k, xo_{k+1}, yo_k, yo_{k+1}, x_{-v_j}, x_{-v_{j+1}}, yv, yv)$$

$$A1_{c_{j,k}} := A1(c1_{j,k}, c2_{j,k}, h_k) \quad B1_{c_{j,k}} := B1(c1_{j,k}, c2_{j,k}, h_k) \quad A2_{c_{j,k}} := A2(c1_{j,k}, c2_{j,k}, h_k)$$

$$W_{pc_j} := \sum_{k=0}^{N-1} (W1n_k \cdot B1_{c_{j,k}} + W1_k \cdot A1_{c_{j,k}} + V_k \cdot A2_{c_{j,k}}) \quad W_{c_j} := W_{pc_j} - W_{pc_0}$$

$$c1(i, j, k) := c1_f(xo_k, xo_{k+1}, yo_k, yo_{k+1}, x_{-v_j}, x_{-v_{j+1}}, y_{-v_i}, y_{-v_{i+1}})$$

$$c2(i, j, k) := c2_f(xo_k, xo_{k+1}, yo_k, yo_{k+1}, x_{-v_j}, x_{-v_{j+1}}, y_{-v_i}, y_{-v_{i+1}})$$

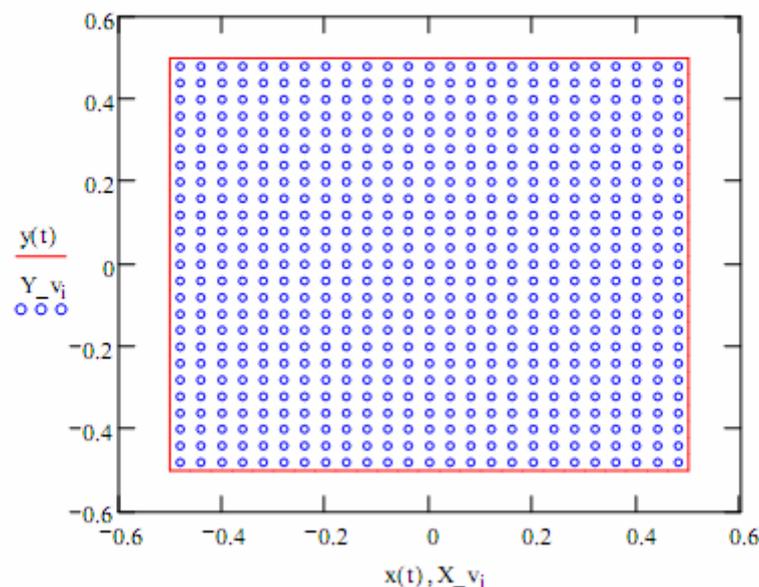
$$A1_p(i, j, k) := A1(c1(i, j, k), c2(i, j, k), h_k) \quad B1_p(i, j, k) := B1(c1(i, j, k), c2(i, j, k), h_k)$$

$$A2_p(i, j, k) := A2(c1(i, j, k), c2(i, j, k), h_k)$$

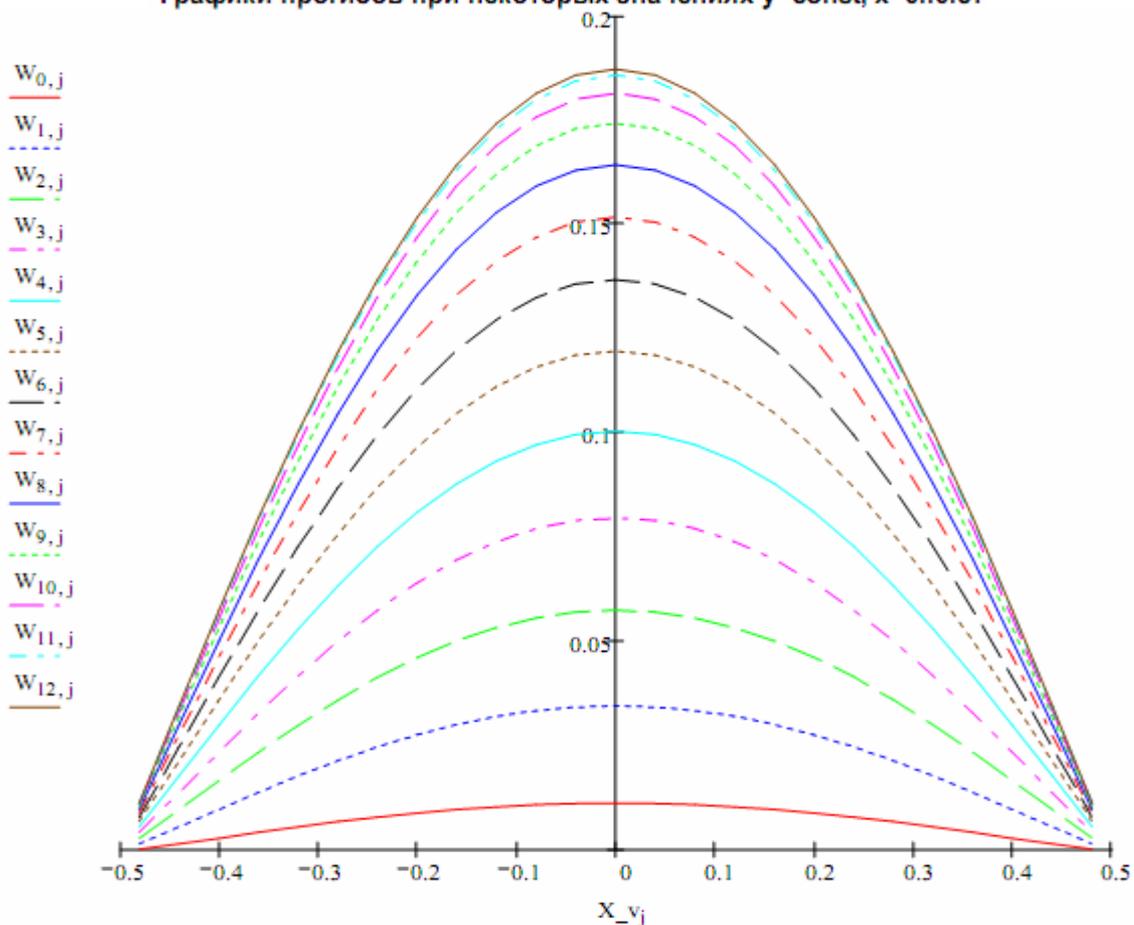
$$W_{pp_{i,j}} := \sum_{k=0}^{N-1} (W1n_k \cdot B1_p(i, j, k) + W1_k \cdot A1_p(i, j, k) + V_k \cdot A2_p(i, j, k))$$

$$W_{p_{i,j}} := W_{pp_{i,j}} - W_{c_i} - W_{c_j} \quad \underline{W}_{w,j} := W_{p_{i,j}} - W_{p_{n-1, n-1}}$$

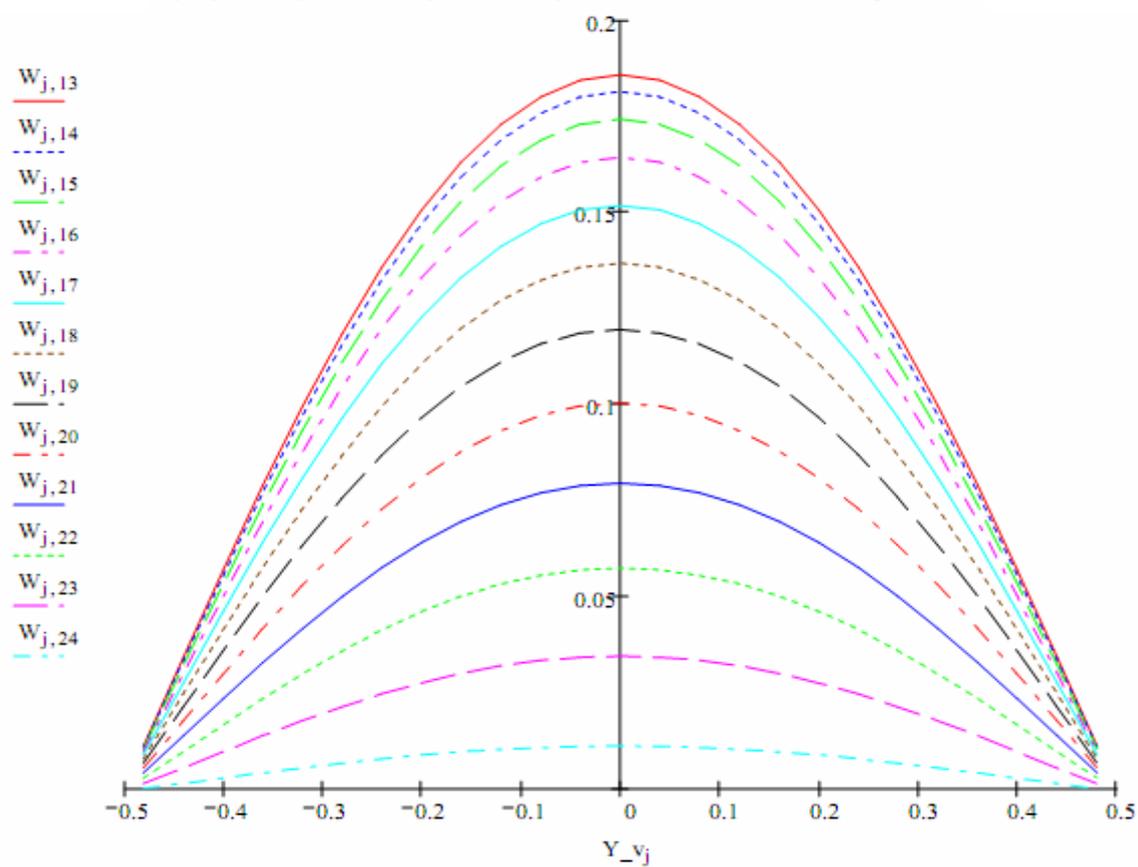
W - матрица значений функции прогибов в узлах на квадрате: узлы изображены графически, элемент $W[0,0]$ соответствует левому нижнему узлу.



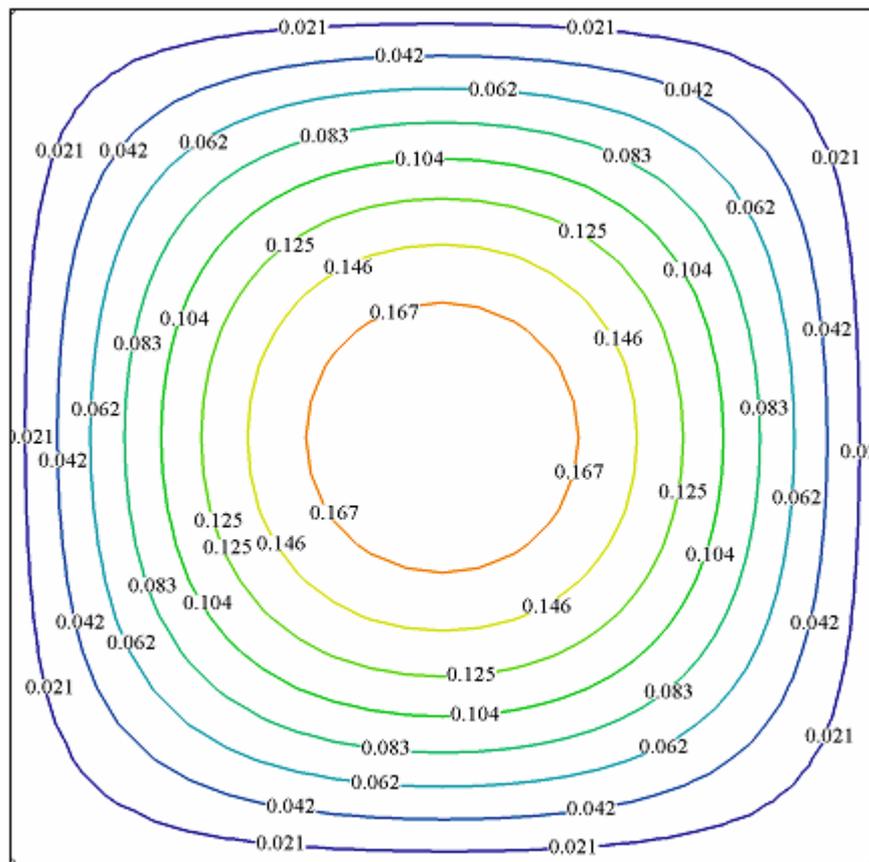
Графики прогибов при некоторых значениях $y=\text{const}$, $x=0..0.5$:



Графики прогибов при некоторых значениях $x=\text{const}$, $y=0..0.5$:



Линии уровня функции $w(x,y)$: красным цветом изображены наибольшие значения прогибов, фиолетовым - наименьшие



W

9. Определение максимального значения функции прогибов (в центре квадрата):

$$m := \frac{n-1}{2}$$

$$W_{\max} := W_{m,m}$$

$$W_{\max} = 0.187$$

максимальное значение прогиба [м] при $\beta = 1$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности: Учебник для строит. спец. вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
2. Аменадзе, Ю.А. Теория упругости: Учебник для университетов. – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.
3. Артемьев, И.Т. Математические методы в механике деформируемого твердого тела / И.Т. Артемьев, Е.А. Григорьев, М.Е. Григорьева. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1998. – 91 с.
4. Балк, М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНТИ: Серия Совр. проб. матем. фонд. напр. – М: ВИНТИ, 1991. Т. 85. С. 187–246.
5. Бенерджи, П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
6. Бицадзе, А.В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи матем. наук. – 1948. – Т. 3, Вып. 6. С. 211–212 .
7. Бицадзе, А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференциальные уравнения. 1988. Т.24, № 5. С. 825–831.
8. Болотин, И.Б. Кусочно-непрерывные краевые задачи типа Римана в классах бианалитических функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Смоленск, 2004. – 106 с.
9. Бреббия, К. Методы граничных элементов: Пер. с англ. / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубелл. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
10. Бэтчерол, Д. Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 760 с.

11. Векуа, И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. – М.: ФМЛ, 1948. – 296 с.
12. Векуа, И.Н. Обобщённые аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 509 с.
13. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
14. Воинов, В.В. Метод расчета потенциального обтекания тела вращения потоком несжимаемой жидкости / В.В. Воинов, О.В. Воинов, А.Г. Петров // Журнал вычислительной математики и математической физики 1974. Т. 14, № 3. С. 797 – 802.
15. Габбасов, Н.С. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2006. – 176 с.
16. Гагаев, Б.М. Нормальные семейства полигармонических функций. // Мат. сб. 1937, № 2 (44), С. 759–768.
17. Галанин, А.В. Граничные задачи линейной гидродинамики: учеб. пособие / А.В. Галанин, А.Г. Терентьев. – Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1984. – 83 с.
18. Галанин, А.В. Приложения теории функций комплексного переменного в задачах механики сплошной среды: учеб. пособие / А.В. Галанин, А.Г. Терентьев. – Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1984. – 94 с.
19. Ганин, М.П. Краевые задачи для полианалитических функций // Докл. АН СССР. – 1951. – Т.75. – № 6. С. 921–924.
20. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
21. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
22. Гуревич, М.И. Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979. – 496 с.
23. Демидов, С.П. Теория упругости: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1979. – 432 с.

24. Жегалов, В.И. Некоторые краевые задачи для полианалитических функций // Тр. семинара по краевым задачам / Казанск. ун-т, 1976. – Вып. 13. С. 80–85.
25. Иванов, В.И. Конформные отображения и их приложения / В.И. Иванов, В.Ю. Попов. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.
26. Казакова, А.О. Интегральные соотношения для полигармонических функций, обладающих осевой симметрией // Математика. Образование: материалы 19-й Междунар. конф. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2011. С.449.
27. Казакова, А.О. Интегральные представления полигармонических функций, обладающих осевой симметрией // Изб. пробл. гидродинамики больших скоростей / Сб. тр. науч. практич. конф. ЧПИ МГОУ. – Чебоксары: Изд-во ЧПИ МГОУ, 2011. С. 51–56.
28. Казакова, А.О. Решение основной краевой задачи для полигармонического уравнения в односвязной области // XX Междунар. конф. «Математика. Экономика. Образование»: тез. докл.–Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ЮФУ, 2012. С. 62.
29. Казакова, А.О. Численное решение краевых задач для полигармонического уравнения / А.О. Казакова, А.Г. Терентьев // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 11. С. 2050-2059.
30. Казакова, А.О. Полигармонические уравнения в механике сплошных сред // Математика. Образование: материалы 21-й Междунар. конф. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2013. С. 361.
31. Казакова, А.О. Численные методы решения полигармонических уравнений и их приложения // Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение: сб. тез. Междунар. науч. конф. – Чебоксары: ЧПИ МГОУ, 2013. С. 28–29.
32. Казакова, А.О. Применение метода граничных элементов к решению задач изгиба тонких пластинок // Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение: сб. тр. Междунар. науч. конф.– Чебоксары: ЧПИ МГОУ, 2013. С.177–181.

33. Казакова, А.О. Применение метода коллокации к решению основной краевой задачи для полигармонического уравнения // Вестник Чувашского университета. 2013. № 3. С. 12–19.
34. Казакова, А.О. Численное моделирование изгиба тонкой пластинки произвольной формы // Научно-технический вестник Поволжья. 2013. № 6. С. 301–304.
35. Каландия, А.И. Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. – 303 с.
36. Калиткин, Н.Н. Численные методы. – М.: Наука. 1978. – 512 с.
37. Кальменов, Т.Ш. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре / Т.Ш. Кальменов, Б.Д. Кошанов, М.Ю. Немченко // Доклады РАН. 2008. Т. 421. № 3. С. 305–307.
38. Кангужин, Б.Е. Представление и свойства функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений / Б.Е. Кангужин, Б.Д. Кошанов // Математический журнал. Т. 8, № 1 (27). С. 50–58.
39. Кангужин, Б.Е. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре / Б.Е. Кангужин, Б.Д. Кошанов // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2, № 2. С. 41–52.
40. Канторович, Л.В. Применение теории интегралов Стильтьеса к расчету балки, лежащей на упругом основании // Тр. Ленингр. института инженеров пром. стр-ва. – 1934. – Вып. 1. – С. 17–34.
41. Карачик, В.В. Об одной задаче для полигармонического уравнения // Сиб. мат. журнал. 1991. Т. 32. № 5. С. 51–58.
42. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 572 с.

43. Колосов, Г. В. Применение комплексной переменной к плоской задаче теории упругости. – Л.–М.: ГТТИ, 1939. – 224 с.
44. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, И.В. Розе; Под ред. И.А. Кибеля. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1963. – 583 с.
45. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука. ФМЛ, 1965. – 749 с.
46. Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
47. Ландау, Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
48. Лукинов, В.Л. Методы Монте-Карло для решения первой краевой задачи для полигармонического уравнения / В.Л. Лукинов, Г.А. Михайлов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45, № 3. С. 495 – 508.
49. Мейз, Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 319 с.
50. Михайлов, В.П. О существовании предельных значений на границе области решений полигармонического уравнения // Математический сборник. 1996. Т. 187, № 11. С. 89–114.
51. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1966. – 817 с.
52. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
53. Партон, В.З. Методы математической теории упругости: Учебное пособие / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1981. – 688 с.

54. Петров, А.Г. Аналитическая гидродинамика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.–520 с.
55. Пирумов, У.Г. Численные методы: теория и практика / У.Г. Пирумов, В.Ю. Гидаспов, И.Э. Иванов, Д.Л. Ревизников, В.Ю. Стрельцов, В.Ф. Формалев. – М.: Изд-во Юрайт, 2012. – 421 с.
56. Райс, Д. Матричные вычисления и математическое обеспечение. – М.: Мир, 1984. – 264 с.
57. Расулов, К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 343 с.
58. Рогожин, В.С. Некоторые краевые задачи для полигармонического уравнения // Учен. зап. Казанск. ун-та, 1950. Т. 110, кн. 4. – С. 71–93.
59. Самарский, А.А. Математическое моделирование / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
60. Седов, Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. – М.: Наука, 1970. – 492 с.
61. Седов, Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1987. – 440 с.
62. Сильвестров, В.В. Краевые задачи теории упругости для плоскости со счетным множеством разрезов // Известия вузов. Математика. 1992. № 4. С. 61–69.
63. Сильвестров, В.В. Одна смешанная краевая задача теории гармонических функций для многосвязной круговой области // Краевые задачи и их приложения. – Чебоксары: Изд-во Чувашского ун-та, 1985. С. 100–105.
64. Смирнов, В.И. Курс высшей математики. Т. II. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 628 с.
65. Смирнов, В.И. Курс высшей математики. Т. V. – М.: ГИФМЛ, 1969. – 657 с.
66. Соболев, С.Л. О прямом методе решения полигармонических уравнений. // Докл. АН СССР. Т. 4. 1936, № 8, С. 339–341.

67. Соболев, С.Л. Об одном разностном аналоге полигармонического уравнения // Докл. АН СССР. Т. 164. 1965, № 1, С. 54–57.
68. Соколов, И.А. О краевой задаче типа Римана для полианалитических функций на окружности // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1969. № 5. С. 64–71.
69. Терентьев, А.Г. Численные методы в гидродинамике: Учеб. пособие / А.Г. Терентьев, К.Е. Афанасьев. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1987. – 80 с.
70. Терентьев, А.Г. Численное исследование в гидродинамике // Изв. АН ЧР. Чебоксары. Вып. 1. 1994. № 2. С. 61 – 84.
71. Терентьев, А.Г. Применение метода граничных элементов к численному конформному отображению / А.Г. Терентьев, Т.Н. Петрова // Известия НАНИ ЧР, 1996. № 1. С. 56–73.
72. Терентьев, А.Г. Движение цилиндра в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса / А.Г. Терентьев, А.А. Терентьев // Известия НАНИ ЧР, 2002. № 2. С. 44–62.
73. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
74. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 560 с.
75. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука. 1979. – 288 с.
76. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 799 с.
77. Турметов, Б.Х. Об одной краевой задаче для полигармонического уравнения с граничным оператором дробного порядка / Б.Х. Турметов, М.Т. Ильясова // Тр. Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения». – Новосибирск: Изд-во НГУ, 2007. С. 318–319.

78. Уфлянд, Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 232 с.
79. Фильчаков, П.Ф. Приближенные методы конформных отображений. – Киев: Наукова думка, 1964. – 536 с.
80. Фильчаков, П.Ф. Численные и графические методы прикладной математики: справочник. – Киев: Наукова думка, 1970. – 580 с.
81. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. – М.–Л.: ФИЗМАТЛИТ, 1960. – 656 с.
82. Формалев, В.Ф. Численные методы / В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.
83. Хоп, Н.Т. О нормальной разрешимости задачи Дирихле системы эллиптического типа // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 167, № 35. С. 982–984.
84. Юденков, А.В. Краевые задачи со сдвигом для полианалитических функций и их приложения к вопросам статической теории упругости. – Смоленск: Смядынь, 2002. – 268 с.
85. Andersson, L. E. Solution of biharmonic equations with application to radar imaging / L.E. Andersson, T. Elfving, G.H. Golub // J. Comput. Appl. Math. 94 (1998). P. 153–180.
86. Armitage, D.H. A polyharmonic generalization of a theorem on harmonic functions // J. London Math. Soc. (2) 7 (1973). P. 251–258.
87. Aronszajn, N. Polyharmonic functions / N. Aronszajn, M.C. Thomas, J.L. Leonard. Oxford: Clarendon Press, 1983. 256 p.
88. Begehr, H. Boundary value problems in complex analysis // Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 2005. – Vol. XII, No. 1. P. 65–85.

- 89.** Bitsadze, A. Some properties of polyharmonic functions // *Differential Equations* 24, 5 (1988). P. 543–548.
- 90.** Cohen, J.M. Polyharmonic functions on trees / J.M. Cohen, F. Colonna, K. Gowrisankaran, D. Singman // *American J. of Math.* 124 (2002). P. 999–1043.
- 91.** Dall'Acqua, A. Estimates for Green function and Poisson kernels of higher-order Dirichlet boundary value problems / A. Dall'Acqua, G. Sweers // *Differential Equations* 205 (2004), no.2. P. 466–487.
- 92.** Dimitrov, D.K. Integration of polyharmonic functions // *Math. Comp.* 65 (1996). P. 1269–1281.
- 93.** Elliott, L. The boundary element method for the solution of slow flow problems for which a paradoxical situation arises / L. Elliott, D.B. Ingham, T. El Bashir // *Proc. Boundary Element Methods in Fluid Dynamics II*, Southampton, 1994. P. 16–24.
- 94.** Gutzmer, A. Remarques sur certaines équations aux différentielles partielles d'ordre supérieur // *Journal de Mathématiques*, ser. VI, 1890. P. 405–422.
- 95.** Hayman, W. Representation and uniqueness theorems for polyharmonic functions / W. Hayman, B. Korenblum. *Journal Analyse Math.* 60 (1993). P. 113–133.
- 96.** Jinrong, T. Boundary element method calculation of the fluid flowing through a porous blunt body / T. Jinrong, W. Shuru, Sh. Qing, A.A. Pyarnpuu, D.L. Reviznikov // *Matem. Mod.*, 2001, Volume 13, Number 6. P. 62–69.
- 97.** Loewner, C. On generation of solutions of the biharmonic equation in the plane by conformal mappings // *Pacific J. of Math.* 3 (1953). P. 417–436.
- 98.** Lurie, S.A. *The Biharmonic Problem in the Theory of Elasticity* / S.A. Lurie, V.V. Vasiliev. – Amsterdam: Gordon and Breach Pub., 1995. – 265 p.
- 99.** Nicolescu, M. *Les fonctions polyharmoniques*. – Paris: Hermann Ed, 1936. – 54 p.

- 100.** Slaughter, W.S. The linearized Theory of Elasticity. – Birkhauser Verlaq AG, 2002. – 543 p.
- 101.** Stroud, A.H. Gaussian quadrature formulas / A.H. Stroud, D. Secrest. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1966. – 374 p.
- 102.** Terentiev, A.G. Numerical modeling of cavitating flows // Proc. of Int. Conf. on Fast Sea Transportation. – S.-Petersburg, 2005. P. 42–43.
- 103.** Terentiev, A.G. The Hydrodynamics of Cavitating Flows / A.G. Terentiev, I.N. Kirschner, J.S. Uhlman. Backbone Publishing Company, USA, 2011. – 598 p.