

Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



Соколов Сергей Викторович

**Топологические и качественные методы анализа
динамики твердого тела и идеальной жидкости**

01.02.01 – Теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант

д. ф.-м. н.

Борисов Алексей Владимирович

Москва – 2018

Оглавление

Введение	5
Обзор литературы	23
Глава 1. Динамика вихревых нитей в бозе-эйнштейновском конденсате и идеальной жидкости	36
1.1. Бифуркационный анализ динамики двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате. Случай интенсивностей противоположных знаков	36
1.2. Бифуркационный анализ динамики двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате. Случай интенсивностей одинаковых знаков	72
1.3. Краткие итоги главы 1	82
Глава 2. Топологический и качественный анализ интегрируемого случая движения твердого тела и одного вихря	85
2.1. Постановка задачи	85
2.2. Уравнения движения. Первые интегралы	87
2.3. Инвариантное многообразие. Бифуркационный анализ	91
2.4. Визуализация перестроек торов Лиувилля	96
2.5. Краткие итоги главы 2	101
Глава 3. Динамика твердого тела и вихрей в идеальной жидкости в поле тяжести	104
3.1. Движение кругового цилиндрического твердого тела, взаимодействующего с одним точечным вихрем, в поле силы тяжести	105
3.2. Движение кругового цилиндрического твердого тела, взаимодействующего с несколькими точечными вихрями, в поле силы тяжести	120

3.3.	Сечение Пуанкаре и хаотический характер динамики системы . . .	125
3.4.	Краткие итоги главы 3	129
Глава 4. Движение кругового цилиндра, взаимодействующего с вихревой парой, в поле силы тяжести в идеальной жидкости 132		
4.1.	Предварительные сведения	133
4.2.	Постановка задачи	135
4.3.	Уравнения движения	137
4.4.	Первые интегралы	140
4.5.	Задача Фёппля в поле тяжести	141
4.6.	Ограниченная задача Фёппля в поле тяжести	148
4.7.	Асимптотическая система. Регуляризация	153
4.8.	Краткие итоги главы 4	155
Глава 5. Хаотическое рассеяние вихревой нити круговым цилиндром, движущимся в поле тяжести 157		
5.1.	Краткий обзор	157
5.2.	Уравнения движения	159
5.3.	Первые интегралы и редукция	162
5.4.	Классификация возможных движений	163
5.5.	Хаотическое рассеяние	164
5.6.	Краткие итоги главы 5	169
Глава 6. Обобщенный двухполевой гиростат и волчок Ковалевской в неевклидовом пространстве 175		
6.1.	Явное определение некоторых периодических движений для обобщенного двухполевого гиростата	176
6.2.	Новые инвариантные соотношения одной критической подсистемы обобщенного двухполевого гиростата	191

6.3.	Разделение переменных для интегрируемого случая Ковалевской в неевклидовом пространстве	200
6.4.	Краткие итоги главы 6	208
Глава 7.	Интегрируемый случай Адлера – ван Мёрбеке	210
7.1.	Интегрируемый случай Адлера – ван Мёрбеке. Дискриминантное множество и бифуркационная диаграмма	211
7.2.	Механическая интерпретация случая Адлера–ван Мёрбеке	230
7.3.	Интегрируемый случай Адлера–ван Мёрбеке. Визуализация бифуркаций торов Лиувилля	236
7.4.	Краткие итоги главы 7	248
	Заключение	250
	Список литературы	254

Введение

Актуальность темы исследования. Методы качественного анализа в задачах динамики твердого тела ([1] и т.д.) и топологические методы исследования интегрируемых гамильтоновых систем (см. [2] и др.) нашли широкий спектр приложений, как внутри математики, так и задачах механики. Тем не менее, классические задачи динамики точечных вихрей, современные проблемы анализа движения вихревых нитей в бозе-эйнштейновском конденсате, а также потребности анализа динамики и фазовой топологии движения твердого тела вокруг неподвижной точки, содержащего полости, заполненные идеальной жидкостью, совершающей вихревое движение, требуют для решения задач классификации возможных типов движений, определения их устойчивости, нахождения возможных асимптотических движений применения современного аппарата топологического и качественного анализа.

Степень разработанности темы исследования.

- Понятие критической подсистемы введено М.П. Харламовым в начале 2000-х гг. в связи с началом исследования фазовой топологии неприводимых систем с тремя степенями свободы. К настоящему моменту локальное и полулокальное исследование критических подсистем является основным методом аналитического и качественного анализа таких систем. Изучение систем алгебраической структуры позволило ввести инвариантные определения и разработать соответствующие методы анализа.
- Теория топологических инвариантов интегрируемых систем со многими степенями свободы, построенная в работах А.Т. Фоменко (1988-1991 гг.), предполагает использование критических точек ранга $n - 1$ отображения момента всей системы в целом. Уже для достаточно простых систем практическое описание и визуализации такого многомерного инварианта оказалось физически невозможным. В связи с этим, в диссертационной рабо-

те предложено описание глобальных топологических инвариантов в виде оснащённых изоэнергетических бифуркационных диаграмм.

- Как правило, вполне интегрируемая гамильтонова система с n степенями свободы зависит от набора параметров p . В основе классификации сложных геометрических объектов, таких, как бифуркационные диаграммы ограничений системы на семейства инвариантных многообразий, зависящих от набора физических и интегральных параметров p , лежит метод ключевых множеств. Задача классификации бифуркационных диаграмм (в большинстве случаев) сводится к нахождению критических значений определённым образом выделенного интеграла на ключевом множестве.
- Обобщая понятие бифуркационной диаграммы, в [3] вводится бифуркационный комплекс, который является простым, наглядным и естественным топологическим инвариантом интегрируемой системы. Его главное преимущество связано с упрощениями, которые достигаются при анализе и представлении результатов о существовании и устойчивости периодических решений интегрируемых систем. Построение этого инварианта дает возможность не только ответить на вопрос об устойчивости каких-то конкретных траекторий, но сразу описать все устойчивые траектории. Так, например, в [3] построены бифуркационные комплексы для двух классических задач динамики твердого тела – волчка Горячева–Чаплыгина и системы Клебша (интегрируемого случая движения твердого тела в жидкости), а также для системы Гаффэ (описывающей динамику газового эллипсоида, заполненного одноатомным идеальным газом). В [4] бифуркационный комплекс был применен для нахождения и определения устойчивости частных решений задачи из неголономной механики.

Цели и задачи диссертационной работы: Основная цель и задача диссертационной работы – качественный анализ, а также исследование фазовой топологии вполне интегрируемых гамильтоновых систем с двумя и тремя

степенями свободы, а также систем с хаотической динамикой, возникающих в задачах вихревой динамики, динамики твердых тел в идеальной жидкости, а также задачах динамики твердого тела во внешних полях.

Научная новизна. Научная новизна диссертационной работы состоит в анализе проблемы устойчивости невырожденных критических движений, возникающих в задачах вихревой динамики, динамики твердого тела в идеальной жидкости и динамики твердого тела во внешних полях, применении, в сочетании с топологическими и аналитическими, современных компьютерных методов анализа динамики систем с недостаточным для полной интегрируемости по Лиувиллю количеством первых интегралов, имеющих более общее хаотическое поведение, применении метода критических подсистем в конкретных задачах, перечисленных выше, практическом построении стратификаций фазового пространства, классификации регулярных и сингулярных слоев слоения Лиувилля в окрестности сингулярных точек отображения момента, нахождении новых инвариантных соотношений и определяемых ими инвариантных подмногообразий.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, полученные в ходе работы над диссертацией и приведенные в тексте, могут быть использованы в задачах вихревой динамики, динамики твердого тела в идеальной жидкости и динамики твердого тела во внешних полях для

- нахождения и анализа устойчивости особых невырожденных траекторий динамических систем;
- построения бифуркационных диаграмм и комплексов, а также анализа посредством их устойчивости критических движений;
- получения стратификаций фазового пространства в конкретных системах с использованием метода критических подсистем;
- исследования фазовой топологии задач качения твердых тел, которые при-

водят к уравнениям движения с наложенными неголономными связями; задач вихревой динамики, как в идеальной жидкости, так и в бозе-эйнштейновском конденсате; задач динамики цилиндрического твердого тела, в присутствии вихревых структур, которые являются интегрируемыми системами с избыточным набором интегралов, т.е. являются задачами некоммутативного интегрирования;

- построения фазовых портретов и сечений Пуанкаре как интегрируемых систем, так и более общих хаотических систем;
- применения методов качественного и топологического анализа к проблемам квантовой теории сильнокоррелированных систем в современных системах пониженной размерности физики конденсированных сред, а также в системах ультрахолодных атомов, помещенных в ловушку. В [5] получены уравнения движения, описывающие такие процессы, как бегущие волны в многокомпонентном бозе-эйнштейновском конденсате, и рассмотрена их редукция к разделенным уравнениям, аналогичным уравнениям для случая интегрируемости Ковалевской. С помощью разделенных уравнений можно получить дискриминантную поверхность, несущую бифуркационную диаграмму, и, таким образом, использовать методы топологического анализа.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе в качестве основных методов исследования выступают: анализ устойчивости невырожденных (в смысле особенностей) траекторий на основе определения их типа (эллиптический/ гиперболический); метод критических подсистем исследования фазовой топологии; метод ключевых множеств, классифицирующий бифуркационные диаграммы. Остановимся на методологии исследования, используемой в диссертационной работе.

- 1) *Анализ устойчивости невырожденных (в смысле особенностей) траек-*

торий.

Общие методы теории устойчивости гамильтоновых систем позволяют получать строгие выводы об устойчивости движения для целого ряда задач классической динамики твердого тела. Так, в ряде работ рассматривалась задача об орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. В.Д. Иртегов [6] указал достаточные условия орбитальной устойчивости маятниковых колебаний тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае С.В.Ковалевской, тот же результат другим способом был получен позже А.З. Брюмом [7]. В работе [8] была установлена нелокальная устойчивость быстрых плоских вращений твердого тела в указанном случае. Полное исследование орбитальной устойчивости маятниковых периодических движений в случае С.В.Ковалевской было выполнено в [9], [10]. В работах А.П. Маркеева [11] и А.В.Карапетяна [12] в случае Горячева–Чаплыгина был также проведен анализ орбитальной устойчивости колебаний и вращений твердого тела относительно оси его динамической симметрии.

Очень часто при анализе устойчивости периодических решений и неподвижных точек не делают различия между интегрируемыми и неинтегрируемыми системами и пользуются общими методами, основанными на вычислении мультипликаторов, нормализующих преобразованиях Биркгофа, изучении областей резонансов и так называемых связок интегралов (см., например, [7, 9, 11, 13–17]).

Естественным образом используя интегрируемость системы, топологический анализ позволяет быстрым и наглядным образом определять устойчивость в тех случаях, когда использование общих стандартных методов является довольно затруднительным. При анализе устойчивости невырожденных (в смысле теории особенностей) траекторий никаких проблем не возникает. Если рассматриваемая система нерезонансна, то имеет

место следующее утверждение: эллиптические невырожденные траектории устойчивы, гиперболические невырожденные траектории неустойчивы.

Невырожденные критические периодические траектории объединяются в однопараметрические семейства, которые интегральным отображением переводятся в бифуркационные кривые. Это позволяет эффективно использовать бифуркационную диаграмму интегрального отображения для анализа устойчивости. А именно, практически во всех выполненных в диссертации исследованиях, для которых проведен топологический анализ, справедливо следующее: гладкой ветви бифуркационной диаграммы соответствует однопараметрическое семейство (или несколько не связанных между собой семейств) невырожденных критических траекторий; тип траектории семейства (эллиптический/гиперболический) не может изменяться в неособых точках ветви (т. е. смена типа происходит в точках пересечения ветвей, излома, возврата и т. п.). Таким образом, грубо говоря, для анализа устойчивости критических траекторий определяется тип траектории для каждой кривой из бифуркационного множества. При этом достаточно определить тип траектории (эллиптический/гиперболический) в какой-нибудь одной из точек гладкой ветви бифуркационной диаграммы. Отметим также, что эллиптические критические траектории *орбитально устойчивы*, а гиперболические – *неустойчивы* [3].

Обобщая понятие бифуркационной диаграммы, в [3] вводится так называемый бифуркационный комплекс, который является простым, наглядным и естественным топологическим инвариантом интегрируемой системы. Его главное преимущество связано с упрощениями, которые достигаются при анализе и представлении результатов о существовании и устойчивости периодических решений интегрируемых систем. Построение этого инварианта дает возможность не только ответить на вопрос об устойчи-

ности каких-то конкретных траекторий, но сразу описать все устойчивые траектории.

2) *Метод критических подсистем исследования фазовой топологии.*

Понятие критической подсистемы введено М.П. Харламовым в начале 2000-х гг. в связи с началом исследования фазовой топологии неприводимых систем с тремя степенями свободы. К настоящему моменту локальное и полулокальное исследование критических подсистем является основным методом аналитического и качественного анализа таких систем. Изучение систем алгебраической структуры позволило ввести инвариантные определения и разработать соответствующие методы анализа.

Пусть для простоты задана интегрируемая гамильтонова система с n степенями свободы с полиномиальными или рациональными правыми частями и такими же интегралами. Тогда множество критических значений отображения момента F может быть записано в виде $P = 0$, где P – полином от фазовых переменных. Разложим его на неприводимые множители

$$P = \prod_j L_j$$

и определим критическую подсистему M_j как множество критических точек нулевого уровня функции L_j , а именно:

$$M_j = \{x : L_j(x) = 0, dL_j(x) = 0\}.$$

Оказывается, что при некоторых предположениях об общем положении верно следующее: во-первых, критическая точка x ранга k локально является точкой трансверсального пересечения $n - k$ подобластей критических подсистем; во-вторых, интегралы L_j этих подсистем являются теми функциями, симплектические операторы которых определяют тип критической точки. Собственные числа симплектических операторов не зависят от точки x , а выражаются через значения констант общих интегралов,

а, фактически, что еще более важно, через значения параметров на поверхностях $F(M_j)$. Эти параметры, в свою очередь, являются частными интегралами критических подсистем, которые также легко находятся из компонент нормали к поверхности, играющих роль неопределённых множителей Лагранжа в критической точке. Это дает аналитическую классификацию критических точек системы исключительно в терминах первых интегралов.

3) *Метод ключевых множеств, классифицирующий бифуркационные диаграммы.*

Как правило, вполне интегрируемая гамильтонова система с n степенями свободы зависит от набора параметров p . В основе классификации сложных геометрических объектов, таких, как бифуркационные диаграммы ограничений системы на семейства инвариантных многообразий, зависящих от набора физических и интегральных параметров p , лежит метод ключевых множеств.

Фиксируется критическая подсистема M_j . Ключевым множеством критической подсистемы называется совокупность точек, в окрестности которых меняется локальное слоение Лиувилля. Образ Σ_j множества ключевых точек под действием некоторого интегрального отображения критической подсистемы называется диаграммой критической подсистемы. Пусть K – некоторый выделенный первый интеграл, например, интеграл момента в системах с симметрией или интеграл энергии в неприводимых системах. Задача классификации бифуркационных диаграмм (в большинстве случаев) сводится к нахождению критических значений выделенного интеграла на ключевом множестве и, далее, к относительно простому определению особых точек набора кривых в арифметическом пространстве $\{(k, p)\}$. В диссертационной работе предложена детальная формализация метода ключевых множеств, а также обоснование его приложений

к новым интегрируемым задачам динамики.

Положения, выносимые на защиту:

- Изложены строго обоснованные результаты по качественному и топологическому анализу интегрируемого случая двух прямолинейных вихревых нитей в идеальной жидкости, внутри круговой цилиндрической области для произвольного соотношения интенсивностей вихрей: получено однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтонианов, которое содержит в виде частных случаев системы в классической идеальной жидкости и в бозе-эйнштейновском конденсате; представлена полная классификация бифуркаций торов Лиувилля, возникающих в особых периодических движения (критических точках ранга 1 отображения момента); найдены все разделяющие значения отношения интенсивностей вихрей при классификации бифуркационных диаграмм; обоснованы результаты об устойчивости периодических решений, полученные при помощи построенных бифуркационных комплексов; приведено полное описание динамики системы в окрестности особых (критических) периодических траекторий; обнаружены новые динамические эффекты в абсолютной динамике вихрей.
- Приведены строгие результаты по качественному и топологическому анализу интегрируемого случая движения кругового цилиндра, взаимодействующего с вихревой нитью, в идеальной жидкости при отличной от нуля циркуляции в отсутствии поля тяжести: построены бифуркационные диаграммы отображения момента и бифуркационные комплексы в случае компактности интегрального многообразия и различной топологии симплектического листа; дана классификация всех возможных особых периодических движений, соответствующих бифуркационным кривым, и определена их устойчивость с помощью построенных бифуркационных комплексов.

- В задаче о движении кругового цилиндра, взаимодействующего с N точечными вихрями, в идеальной жидкости с отличной от нуля циркуляцией под действием силы тяжести получены строго обоснованные результаты: уравнения движения в гамильтоновой форме с нелинейной скобкой Пуассона; первые интегралы, с помощью которых проведена редукция системы; частные решения, которые позволяют указать возможные типы движений системы; относительные равновесия и исследована их устойчивость; показано, что система уже при $N = 1$ является неинтегрируемой, что подтверждается появлением стохастического слоя на сечении Пуанкаре редуцированной системы; при $N = 2$ доказано, что система не может обладать решениями аналогичными конфигурации Фёшля, рассмотрена ограниченная задача, для исходной системы рассмотрена процедура регуляризации и асимптотическая система, указаны возможные типы движений, продемонстрировано, что в большинстве случаев взаимодействие вихревой пары и цилиндра носит характер рассеяния; в случае $N = 1$ и нулевой циркуляции построены различные типы функций рассеяния вихря на цилиндре, вид которых свидетельствует о хаотическом характере рассеяния и, следовательно, об отсутствии интегрируемости.
- Для обобщенного двухполюсного гиростата (случай интегрируемости Соколова–Цыганова) найдены особые периодические движения, при которых ранг отображения момента равен 1. Для таких движений все фазовые переменные могут быть выражены как алгебраические функции от единственной вспомогательной переменной и набора констант. Для этой вспомогательной переменной получены дифференциальные уравнения, которые могут быть проинтегрированы в эллиптических функциях времени. Показано, что соответствующие точки в трехмерном пространстве констант интегралов движения принадлежат пересечению двух листов дискриминантных поверхностей спектральной кривой, ассоциированной с со-

ответствующей парой Лакса. Получены явные выражения характеристических показателей для определения типа найденных особых периодических движений по Вильямсону. Получены новые инвариантные соотношения для одной критической подсистемы обобщенного двухполевого гиростата, определяющие четырехмерное инвариантное многообразие. Определен тип движений системы с тремя степенями свободы на этом инвариантном многообразии. Для волчка Ковалевской в неевклидовом пространстве найдены уравнения Абеля–Якоби и приведены разделяющиеся переменные на плоскости.

- Для интегрируемого случая Адлера – ван Мёрбеке на алгебре Ли $so(4)$ получены строго обоснованные результаты: аналитически исследована фазовая топологии рассматриваемого случая; представлена в явном виде спектральная кривая, коэффициенты которой являются первыми интегралами рассматриваемого интегрируемого случая; таким образом получено новое представление первого интеграла; получено дискриминантное множество спектральной кривой, как объединение поверхностей кратных корней двух многочленов; найдены критические точки ранга 0, образы которых содержатся во множестве точек самопересечения дискриминантных кривых; построена бифуркационная диаграмма отображения момента; вид бифуркационной диаграммы и структура особенностей ранга 0 случая Адлера – ван Мёрбеке показывает, что он топологически неэквивалентен другим интегрируемым случаям на алгебре Ли $so(4)$; приведена возможная механическая интерпретация данного случая; алгоритм построения связанных компонент инвариантных многообразий системы Адлера–ван Мёрбеке для заданных значений констант первых интегралов и функций Казимира, с помощью которого визуализированы перестройки торов Лиувилля при пересечении ветвей бифуркационной диаграммы.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные резуль-

таты диссертации докладывались автором на международных и всероссийских конференциях, ведущих научных семинарах. Список наиболее значимых из них приведен ниже.

IUTAM Symposium "From Mechanical to Biological Systems – an Integrated Approach", Izhevsk, 2012; *International Conference "Geometry, Dynamics, Integrable Systems"*, Izhevsk, 2013, 2016, 2018; *International Conference "Coupled Problems 2017 in Science and Engineering VII"*, Rhodes, Greece, 2017; *International Scientific Workshop "Recent Advances in Hamiltonian and Nonholonomic Dynamics"*, Долгопрудный, 2017; *"The 3th International Conference on Finite Dimension Integrable Systems «FDIS»"*, Bedlewo, Poland, 2015; *"The 2th International Conference on Mathematical Physics «Kezenoi Am–2017»"*, Grozny, Russia, 2017; *"International Conference on Mathematical Control Theory and Mechanics"*, Суздаль, 2017, 2015; *International Conference "Nonlinear Methods in Physics and Mechanics"*, Ярославль, 2015; *International Conference "Dynamics, Bifurcations, and Strange Attractors"*, Нижний Новгород, 2015; *International Conference "Infinite-dimension systems"*, Нижний Новгород, 2015; *International Conference on Dynamical Systems "Shilnikov Workshop"*, Нижний Новгород, 2014, 2015; *"International Conference on Mathematical Control Theory and Mechanics"*, Суздаль, 2015; *"Hamiltonian Dynamics, Nonautonomous Systems, and Patterns in PDE's"*, Нижний Новгород, 2014; *"International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems"*, Суздаль, 2014, 2012; *"Nonholonomic Days"*, Переславль, 2015; *"Regular and Chaotic Dynamics Days"*, Ижевск, 2015; *59-я и 60-я Всероссийская конференция МФТИ*, Долгопрудный, 2016, 2017; *Семинар "Современные геометрические методы"* под руководством академика А. Т. Фоменко; *Семинар "Современные геометрические методы в математической физике"* под руководством академика С. П. Новикова; *Семинар "Современные методы в гамильтоновой механике"* под руководством академика В. В. Козлова; *Семинар "Динамические системы"* Московского авиационного института; *Семинар "Классические и квантовые интегрируемые системы"* отдела теоретической

физики МИАН им. В. А. Стеклова.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 40 печатных работах, из них 17 статей в рецензируемых журналах из перечня рекомендованных ВАК [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34] среди которых 10 публикаций, индексируемых международными базами Scopus и Web of Science; 11 статей в сборниках трудов конференций и 12 тезисов докладов.

Приведем здесь развернутый список публикации автора в рецензируемых журналах.

[18] Соколов С. В., Рамоданов С. М. Движение кругового цилиндрического твердого тела, взаимодействующего с точечным вихрем, в поле силы тяжести. Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 3. С. 617–628.

[19] S. V. Sokolov, S. M. Ramodanov. Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with a point vortex. Regular and Chaotic Dynamics. 2013. Vol. 18, no. 1-2. P. 184–193.

[20] S. V. Sokolov. Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with N point vortices. Nonlinear Dynamics and Mobile Robotics. 2013. Vol. 1. no. 2. P. 193–207.

[21] Соколов С. В. Движение кругового цилиндрического твердого тела, взаимодействующего с N точечными вихрями, в поле силы тяжести. Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 1. С. 59–72.

[22] Соколов С. В. Движение кругового цилиндра, взаимодействующего с вихревой парой, в поле силы тяжести в идеальной жидкости. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2014. № 2. С. 86–99.

[23] Соколов С. В., Кольцов И. С. Хаотическое рассеяние точечного вихря круговым цилиндром, движущимся в поле силы тяжести. Доклады Академии наук. 2015. Т. 465. № 2. С. 174–177.

[24] Соколов С. В., Кольцов И. С. Хаотическое рассеяние точечного вихря круговым цилиндрическим твердым телом, движущимся в поле тяжести. Вестн.

Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2015. Т. 25. № 2. С. 184–196.

[25] Соколов С. В. К вопросу о движении в идеальной жидкости кругового цилиндра и вихревой пары в поле тяжести. Доклады Академии наук. 2016. Т. 470. № 4. С. 393–396.

[26] Борисов А. В., Рябов П. Е. Соколов С. В. Бифуркационный анализ задачи о движении цилиндра и точечного вихря в идеальной жидкости. Матем. заметки. 2016. Т. 99. № 6. С. 848–854.

[27] P. E. Ryabov, A. A. Oshemkov, S. V. Sokolov. The Integrable Case of Adler – van Moerbeke. Discriminant Set and Bifurcation Diagram. Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, no. 5. P. 581–592.

[28] Соколов С. В. Интегрируемый случай М. Адлера и П. ван Мёрбеке. Механическая интерпретация. Тр. МАИ. 2017. №95.

[29] Соколов С. В. Интегрируемый случай Адлера–ван Мёрбеке. Визуализация бифуркаций торов Лиувилля. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2017. Т. 27. № 3. С. 532–540.

[30] Соколов С. В. Новые инвариантные соотношения одной критической подсистемы обобщенного двухполевого гиростата. Доклады Академии наук. 2017. Т. 477. № 6. С. 660–663.

[31] S. V. Sokolov, P. E. Ryabov. Bifurcation Analysis of the Dynamics of Two Vortices in a Bose–Einstein Condensate. The Case of Intensities of Opposite Signs. Regular and Chaotic Dynamics. 2017. Vol. 22, no. 8. P. 976–995.

[32] A. A. Oshemkov, P. E. Ryabov, S. V. Sokolov. Explicit determination of certain periodic motions of a generalized two-field gyrostat. Russian Journal of Mathematical Physics. 2017. Vol. 24. no. 4. P. 526–534.

[33] Соколов С. В. Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных. Тр. МАИ. 2018. №100.

[34] Соколов С. В., Рябов П. Е. Бифуркационная диаграмма системы двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате, имеющих интенсивности одинаковых знаков. Доклады Академии наук. 2018. Т. 480. № 6. С. 652–656.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные в диссертации результаты получены автором лично.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 7 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 274 страниц, из них 253 страниц текста, включая 62 рисунка. Библиография включает 231 наименование на 21 странице.

Рассмотрим здесь подробнее структуру глав диссертации.

В главе 1 представлены результаты, полученные для анализа динамики двух прямолинейных вихревых нитей в жидкости, заключенной внутри области, имеющей форму бесконечного кругового цилиндра. Здесь изучаются две близких задачи: система двух вихревых нитей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключенном в ловушку, и классическая задача о движении точечных вихрей в идеальной жидкости. В первом разделе изучена система двух вихрей для случая интенсивностей противоположных знаков. Построены бифуркационные диаграммы и бифуркационные комплексы, которые для обеих задач топологически эквивалентны. Второй раздел посвящен динамике двух вихрей, имеющих интенсивности одинакового знака, в конденсате. Полученная бифуркационная диаграмма имеет существенные отличия от ситуации классической идеальной жидкости. Результаты данной главы опубликованы в работах [31, 34].

В главе 2 рассматривается интегрируемая гамильтонова система, описывающая движение в идеальной жидкости кругового цилиндра и вихревой нити в отсутствии силы тяжести. Построены бифуркационные диаграммы и бифуркационные комплексы в случае компактности интегрального многообразия и различной топологии симплектического листа. Обсуждаются типы движений, соответствующих бифуркационным кривым, и их устойчивость. Рассматриваемая система представляет собой центральную проблему в теории взаимодействия твёрдого тела с точечными вихрями в плоской гидродинамике идеальной

несжимаемой жидкости (аналогично случаю Эйлера, задаче трёх вихрей и проблеме Кеплера). Выделенность этого случая обусловлена тем, что при добавлении таких малых возмущений, как, например, отклонение формы цилиндра от круговой, второй и более вихрь, отличная от нулевой плавучесть и др., система теряет свойство интегрируемости, что будет показано в следующих главах. Основные результаты, изложенные в данной главе, опубликованы в [26].

Глава 3 посвящена анализу движения в идеальной жидкости бесконечного кругового цилиндра, взаимодействующего с прямолинейными вихревыми нитями, при обтекании с отличной от нуля циркуляцией в поле силы тяжести. Из главы 2 мы знаем, что движение в отсутствие силы тяжести описывается гамильтоновой системой, которая в случае одного вихря является вполне интегрируемой по Лиувиллю и обладает регулярной динамикой. В этой главе мы продолжаем исследовать динамику твердого тела, взаимодействующего с вихревыми нитями, но уже в присутствии поле тяжести. В первом разделе рассмотрена система, состоящая из цилиндра и одного вихря. Получена гамильтонова форма уравнений, обобщающая результаты предыдущей главы на случай действия силы тяжести. Найдены новые режимы движения системы. Во втором разделе получены уравнения движения для цилиндра, взаимодействующего с N вихревыми нитями. Найдены первые интегралы этой системы. В третьем разделе, используя результаты, полученные в первом и втором разделах, мы демонстрируем, что даже в случае $N = 1$ при наличии силы тяжести гамильтонова система, описывающая движение цилиндра и вихря, является неинтегрируемой и демонстрирует хаотический характер динамики. Результаты данной главы опубликованы в работах [18–21].

В главе 4 рассмотрена задача о движении в поле силы тяжести твердого тела, обладающего формой кругового цилиндра, взаимодействующего с двумя точечными вихрями, в идеальной жидкости. Основное внимание сконцентрировано на исследовании конфигурации аналогичной задаче Фёппля: цилиндр движется в поле тяжести в сопровождении вихревой пары ($N = 2$). В этом слу-

чае циркуляция вокруг цилиндра равна нулю, а уравнения движения рассматриваются на некотором инвариантном многообразии. Показано, что, в отличие от конфигурации Фёппля, в поле силы тяжести относительное равновесие вихрей невозможно. Рассмотрена ограниченная задача: цилиндр предполагается достаточно тяжелым, вследствие чего влияние вихревой пары на его падение пренебрежимо мало. Обе задачи (полная и ограниченная) в результате численного исследования демонстрируют качественно сходство. В большинстве случаев решения имеют характер рассеяния. Основные результаты данной главы опубликованы в работах [22, 25].

В главе 5 рассмотрена еще одна задача о падении в поле силы тяжести кругового цилиндра, взаимодействующего с точечным вихрем, в идеальной жидкости. В отличие от глав 2,3 в настоящей главе циркуляция жидкости вокруг цилиндра предполагается равной нулю. Используя автономный интеграл, проведена редукция системы на одну степень свободы в ранее не рассматриваемом случае нулевой циркуляции. Показано, что в отличие от случая циркуляционного обтекания в отсутствии точечных вихрей, в котором движение цилиндра будет происходить в ограниченной горизонтальной полосе, при наличии вихрей и циркуляции равной нулю вертикальная координата цилиндра неограниченно убывает. Дальнейшее внимание в главе сконцентрировано на численном исследовании динамики системы, которая при нулевой циркуляции обладает некомпактными траекториями. Построены различные виды функций рассеяния вихря на цилиндре. Вид этих функций свидетельствует о хаотическом характере рассеяния и, следовательно, об отсутствии дополнительного аналитического интеграла. Основные результаты данной главы опубликованы в работах [23, 24].

Глава 6 посвящена изложению результатов приложения методов топологического и качественного анализа к задачам динамики твердого тела. Речь идет об исследованиях, обобщающих один из важнейших классических результатов динамики твердого тела – интегрируемый случай движения твердого тела вокруг неподвижной точки, полученный С. В. Ковалевской, а именно об обоб-

щенном двухполевом гиростате и волчке Ковалевской в неевклидовом случае. В первом и втором разделе представлены результаты для явного нахождения периодических решений и определения их типа по Вильямсону и нахождении новых инвариантных соотношений для одной критической подсистемы обобщенного двухполевого гиростата. Наконец, в третьем разделе приведено описание движения волчка Ковалевской в неевклидовом пространстве, для которого, используя технику Ковалевской и Кёттера, найдены уравнения Абеля–Якоби и приведены разделяющиеся переменные на плоскости. Результаты данной главы опубликованы в работах [30, 32, 33].

Глава 7 посвящена актуальной проблеме изучения фазовой топологии и механической интерпретации одного из самых сложных интегрируемых случаев на алгебре Ли $so(4)$ с дополнительным интегралом четвертой степени – случаю Адлера–ван Мёрбеке. В первом разделе представлены результаты аналитического исследования фазовой топологии рассматриваемого случая. Получены критические точки ранга 0 отображения момента, построена бифуркационная диаграмма системы. В частности, удалось показать, что случай Адлера–ван Мёрбеке топологически неэквивалентен другим известным интегрируемым случаям на алгебре Ли $so(4)$. Во втором разделе приведена возможная механическая интерпретация рассматриваемого случая. Рассмотрена связь с несколькими классическими интегрируемыми задачами механики. Обсуждаются условия физической реализуемости механической модели. В третьем разделе, предложен способ визуализации перестроек торов Лиувилля. Основные результаты данной главы опубликованы в работах [27–29].

Обзор литературы

Современные подходы качественного и топологического анализа динамических систем, другими словами топологические и качественные методы исследования соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений, фактически были заложены в существенно опередивших свое время трудах Анри Пуанкаре [35], [36], в которых были высказаны основные идеи геометрической теории дифференциальных уравнений. Пуанкаре в этих работах впервые использовал такие плодотворные математические конструкции, как гомоклинические и гетероклинические орбиты, связывающие между собой неподвижные точки, и показал, что возмущение этих орбит является основной причиной сложного хаотического поведения интегральных траекторий в их окрестности.

Дальнейшие этапы развития подходов к проблеме устойчивости и качественного анализа дифференциальных уравнений можно проследить по работам Д. Биркгофа [37], А.А. Андронова [38], Н.Г. Четаева [39] и других ученых [40], [41], [42]. На базе идей Ляпунова [43] и Пуанкаре [35] были разработаны эффективные аналитические методы исследования систем нелинейных дифференциальных уравнений, к которым относятся метод нормальных форм [44], [45], [46], метод малого параметра [47], [48], асимптотические методы [48], [49], [50].

Для классической и небесной механики особый интерес представляют гамильтоновы системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Существенный прогресс в качественном анализе поведения гамильтоновых систем был достигнут во второй половине двадцатого века после опубликования фундаментальных результатов А.Н. Колмогорова [51], В.И. Арнольда [52], [53], Ю. Мозера [54], впоследствии получивших название КАМ–теории. На основании КАМ–теории были получены важные выводы об устойчивости и общем характере движения близких к интегрируемым гамильтоновым системам.

Важное влияние на развитие аналитической динамики твердого тела и ка-

качественной теории динамических систем оказали работы В.В. Козлова, объединённые в монографию "Методы качественного анализа в динамике твердого тела" [1]. В частности, В.В. Козловым доказано несуществование аналитических интегралов уравнений Эйлера–Пуассона, а также указаны динамические эффекты, препятствующие интегрируемости этих уравнений – расщепление сепаратрис, рождение большого числа невырожденных периодических решений. Эти результаты дали сильный толчок исследованиям по проблеме точной интегрируемости уравнений движения. Результаты таких исследований систематизированы в монографиях В.В. Козлова "Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике" [55] и А.В.Борисова, И.С.Мамаева "Современные методы теории интегрируемых систем" [56]. В [56] интегрируемость многомерных аналогов классических интегрируемых задач динамики твердого тела, как правило, устанавливается при помощи представления Лакса со спектральным параметром $\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), A(\lambda)]$. Инварианты матрицы $L(\lambda)$ являются первыми интегралами системы.

Современному состоянию топологического анализа динамических систем мы обязаны работе С. Смейла (1972 г.) [57], в которой намечена программа топологического исследования классических механических систем и указаны пути ее реализации в натуральных системах с симметрией. В качестве примера он рассматривал задачи небесной механики. Впоследствии, благодаря работам прежде всего российских ученых В.В. Козлова, Я.В. Татарина, М.П. Харламова, А.Т. Фоменко, А.В. Болсинова, А.В. Борисова, И.С. Мамаева, А.А. Ошемкова и других исследованы бифуркации нелинейных по скоростям дополнительных интегралов и соответствующих интегральных многообразий, не укладывающиеся в схему Смейла.

Результаты, полученные в XX в., нашли отражение в монографиях [1] (методы качественного анализа в динамике твердого тела), [58] (фазовая топология классических интегрируемых задач) и [2] (теория топологических инвариантов, описание лиувиллевых инвариантов приводимых систем и др.). Главные

достижения относились к задачам динамики твердого тела, в которых существует одномерная группа преобразований конфигурационного пространства $SO(3)$, касательные преобразования к которым сохраняют кинетическую энергию и момент внешних сил как функции на шестимерном фазовом пространстве $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$, в силу чего возможна редукция системы к гамильтоновой системе с четырёхмерным фазовым пространством TS^2 . После этого изоэнергетический уровень оказывается трёхмерным многообразием, на котором один оставшийся интеграл задаёт слоение Лиувилля на двумерные торы. Все базовые бифуркации в таком слоении были найдены М.П. Харламовым в его исследованиях [58] классических случаев Эйлера, Жуковского, Горячева-Чаплыгина, Сретенского, Ковалевской, Клебша. Случай Ковалевской, формально проинтегрированный еще в конце XIX в., получил полное решение лишь в наше время в работах В.В. Козлова (1980), М.П.Харламова (1983-1988), А.Т.Фоменко, А.В.Болсинова, П.Рихтера (2000) [59].

В течение этих лет был открыт и ряд математических обобщений в динамике твердого тела, среди которых физический смысл имеют обобщения И.В.Комарова [60], [61], Х.М.Яхья [62] на задачу о движении гиростата, случай В.В.Соколова [63] для задачи о движении тела в жидкости и случай Борисова-Мамаева-Соколова [64], описывающий движение твердого тела с полостями, заполненными вихревой несжимаемой жидкостью. Все эти задачи также приводятся к системам с двумя степенями свободы. В то же время имеется ряд интегрируемых систем с тремя степенями свободы, не укладывающихся в имеющиеся схемы исследования и принципиально несводимых к системам с двумя степенями свободы (О.И.Богоявленский, В.В.Соколов, А.Г.Рейман и М.А.Семенов-Тян-Шанский, А.И.Бобенко, А.В. Борисов и И.С. Мамаев [65]). Среди них в рамках теоретической механики центральное место занимает задача о движении тяжелого магнита в гравитационном и магнитном полях, сформулированная О.И.Богоявленским (1984) [66] при изучении уравнений Эйлера на алгебрах Ли. В 1987 г. А.Г.Рейман и М.А.Семенов-Тян-Шанский [67] указали

в этой задаче третий интеграл, находящийся в инволюции с K . В результате открыто новое физически реализуемое обобщение случая Ковалевской, но уже несводимое в целом к системе с двумя степенями свободы.

Исследование вихревых структур имеет важное значение в силу очень большого спектра приложений применяемых здесь моделей: с одной стороны эти модели, наиболее хорошо описывают движение подводных аппаратов, крупномасштабную динамику атмосферы и океана (и на сегодняшний день наиболее часто используются для анализа движений различных вихревых образований, таких как, циклоны, торнадо, океанические ринги; анализа динамики примеси, загрязнений, некоторых аспектов прогноза погоды, позволяют объяснить различные явления астрофизики, связанные с возникновением и эволюцией звёзд), с другой стороны эти модели активно используются для описания движения вихрей в сверхтекучих жидкостях и находят применение в квантовой механике. Не случайно этой тематике посвящено и посвящается огромное, порой трудно обозримое, число работ во всем мире. Рассмотрим прежде основные этапы возникновения вихревой теории и охарактеризуем ее современное состояние. В основном тексте при обсуждении конкретных результатов будут приводиться более полные комментарии, которые, возможно, иногда будут пересекаться с изложенными во введении. Ранние исследования по теории вихревого движения восходят к Декарту, Гюйгенсу, Иоганну и Даниилу Бернулли. В этот период были установлены некоторые закономерности вихревого взаимодействия, но вихревая теория Декарта в этот период претендовала на описание движения небесных тел и конкурировала с ньютоновской теорией гравитации. Несмотря на ожесточенную полемику картезианцев и ньютонианцев, теория Декарта вскоре была вытеснена ньютоновской картиной мира и почти совсем забыта. Интересное описание этого периода развития вихревой теории можно найти в книге В.В.Козлова "Общая теория вихрей"[68]. Отметим, что исторически первые труды Эйлера и Лагранжа, создававших ньютоновскую гидродинамику (а также теорию сплошных сред), ограничивались описанием потенциальных

(безвихревых) течений идеальной жидкости. Возрождение интереса к вихревой динамике относится к середине XIX столетия. Это труды Гельмгольца, Кельвина и Кирхгофа, приведшие не только к открытию существенно новых гидродинамических результатов, но и к созданию наиболее общей вихревой теории материи (которая в основном пропагандировалась Кельвином).

Возникновение современной вихревой теории следует связывать с замечательной работой Г. Гельмгольца "Об интегралах уравнений гидродинамики, соответствующих вихревым движениям" (1858 г.) в книге [69], в которой он доказал основные теоремы о движениях идеальной жидкости, при отсутствии однозначного потенциала скоростей. Эти движения жидкости он и назвал вихревыми. Там же он указал аналогию между движением жидкости и магнитным действием электрических токов, а также привел ряд примеров, относящихся к движению прямолинейных и кольцеобразных вихрей (имеющих форму тора, в предельном случае "бесконечно-малого сечения"). Отметим, что Гельмголец также описал движения двух точечных вихрей (параллельных вихревых нитей).

В своих лекциях по математической физике (первое издание относится к 1876 году) Кирхгоф [70, 71] вывел общие уравнения движения N точечных вихрей (называемые иногда уравнениями Кирхгофа), указал их гамильтонову форму, а также получил для них все возможные первые интегралы. По сравнению с небесномеханической задачей N тел эти уравнения имеют первый порядок относительно координат вихрей, роль масс в них играют некоторые параметры, называемые циркуляциями. Он также более подробно (по сравнению с Гельмгольцем) рассмотрел случай двух вихрей, включая случай вихревой пары. В последующих изданиях он рассмотрел также указанный Грёбли интегрируемый случай трех вихрей. Кирхгоф рассмотрел особый случай вихревого движения, когда параллельные вихревые нити заполняют внутренность эллиптического цилиндра. Оказывается, что эллиптическая форма цилиндра сохраняется во время движения, хотя сам цилиндр при движении деформируется. Модель вихря Кирхгофа, или эллиптического вихря, и используется для изучения движе-

ний пятен завихренности.

Вальтер Грёбли в своей диссертации 1877 года "Spezielle Probleme uber die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfaden" [72] подробно проанализировал интегрируемую задачу о движении трех вихрей на плоскости. Отметим, что ссылка на эту работу Грёбли уже имеется в лекциях Кирхгофа (1883 года) [70, 71]. С другой стороны, А. Пуанкаре в своих лекциях 1893 года и вышедшей по ним книге "Theorie des Tourbillions" не только не ссылается на Грёбли, а дает достаточно запутанное доказательство интегрируемости (возможно, просто допуская типичную для него неточность в выражениях). Для анализа движения Грёбли получает (приведённую) систему трех нелинейных уравнений, обладающую двумя интегралами движения и позволяющую получить явную квадратуру. Далее он рассматривает вопрос восстановления по полученной квадратуре абсолютного движения. Более подробно он анализирует частные случаи равных интенсивностей и взаимодействия вихревой пары с единичным вихрем (случай, интересный с точки зрения теории рассеяния). Грёбли также вводит геометрическую интерпретацию, полезную при исследовании движения трех вихрей на сфере (последние исследования этой системы относятся уже к 1998 году).

Современные исследования. 1) В работах Е. А. Новикова (1975) и Х. Арефа (1979) были еще раз независимо воспроизведены исследования Грёбли и Синга по анализу интегрируемой задачи трех вихрей, причем были указаны некоторые новые интересные факты.

2) В работах В.А. Богомолова были получены уравнения движения точечных вихрей на сфере. Первоначальный и не совсем полный анализ этой задачи был выполнен еще И. С. Громекой. (На самом деле Богомолов переоткрыл результаты Е. Цермело, который еще в XIX веке получил, а в случае малого числа вихрей очень подробно исследовал эти уравнения. Здесь мы, тем не менее, упоминаем Богомолова поскольку авторство в данном вопросе (ошибочно) приписывается ему. Справедливости ради следует отметить, что работы и Богомолова, и Цермело замечательны и идейно абсолютно различны). В.А. Богомолов

также указал все необходимые дополнительные интегралы и подробно исследовал интегрируемый случай трех вихрей с одинаковым значением интенсивностей. В случае различных интенсивностей анализ движения был выполнен одновременно и независимо в работах А. В. Борисова, В. Г. Лебедева [73, 74], П. Ньютона и Р. Кидамби [75, 76].

3) В.А. Богомоловым были получены условия линейной устойчивости аналогов томсоновских конфигураций на сфере, которые далее неоднократно переоткрывались [77]. Условия устойчивости по Ляпунову были получены в [78]. Нелинейный анализ устойчивости этих конфигураций в критических случаях был недавно выполнен Л. Г. Куракиным [79]. В нескольких работах были указаны статические конфигурации, составляющие платоновы тела (см., например, [80]). В связи с проблемами современной химии полимеров в последнее время изучаются также близкие периодические движения или составные конфигурации, образующие так называемые вихревые кристаллы [81].

4) Неинтегрируемость задачи четырёх вихрей на плоскости (в ограниченной постановке) была первоначально доказана С.Л. Зиглиным [82]. Этот результат подтверждает хаотизацию движения четырёх вихрей, отмеченную Е.А. Новиковым и Ю.Б. Седовым [83]. Неинтегрируемость движения четырёх вихрей на сфере и движения трех соосных вихревых колец была исследована А.А. и Д.А. Багрецами [84–86]. Применение КАМ-теории и явное понижение порядка для четырёх вихрей (интенсивностей одного знака) на плоскости было выполнено К.М. Ханиным [87] и позднее Лимом [88] (см. также работу [89]).

5) Статистические аспекты вихревой теории, непосредственно связанные с моделями регулярной турбулентности, подробно описываются в книге П. Ньютона [90]; аэрогидродинамические вопросы, связанные, например, с проблемой вихревого обтекания, представлены в книге Дж. Сэффмэна [91].

6) В ряде работ, принадлежащих Ткаченко [92], О'Нейлу [93], Арефу и Стремлеру [94], [95], рассматриваются задачи, связанные с взаимодействием вихревых цепочек и вихревых решёток. Здесь речь идет о бесконечных в обе

стороны наборах одинаковых вихрей, образующих цепочку (когда вихри лежат на прямой через одинаковый интервал) или решётку (т. е. совокупность цепочек, также лежащих на одинаковом расстоянии друг от друга). В первом случае система является однопериодической и определена на цилиндре, во втором случае она двоякопериодична и определена на торе. В такой постановке вопрос о взаимодействии вихревых цепочек, по существу, рассматривался Г.Ламбом, Т.фон Карманом, Н. Е.Кочиным [96], [97], [98] в связи с анализом устойчивости вихревых дорожек (дорожек Бенара–Кармана), образующихся при вихревом обтекании цилиндра. В этом случае мы имеем две вихревые цепочки с равными, но противоположными по знаку циркуляциями. Здесь следует также отметить замечательную работу А.А.Фридмана и П.Я.Полубариновой-Кочиной (1928 г.) [99], в которой впервые были получены общие уравнения взаимодействия произвольного числа вихревых цепочек, а также уравнения движения вихреисточников. Интегрируемость трех вихрей на цилиндре и торе с нулевой суммарной циркуляцией была впервые отмечена Х.Арефом в 1984 году [100]. В работе [93] О'Нейл произвёл суммирование бесконечных рядов, приведших к тэтта-функциям Вейерштрасса, и указал явное сведение этих задач к одной степени свободы. В работе [101] используются не эллиптические формулы, а явные выражения в виде быстросходящихся рядов, которые упрощают вычисления. Более подробно эти задачи изучались в [94], [95], где приведены несколько фазовых портретов приведенной системы на двумерной плоскости. Однако качественный анализ интегрируемых и неинтегрируемых задач в этой области еще далек от завершения.

7) Взаимодействие точечных вихрей с неподвижными гладкими стенками рассматривалось на раннем этапе развития теории вихревых структур. Еще Гельмгольц рассмотрел движение одного точечного вихря в идеальной жидкости, ограниченной плоскостью. Теория движения вихрей в произвольной области была заложена Э. Дж. Раусом [102] (решение для случая круговой области уравнения движения получил еще раньше А. Гринхилл [103]). Наиболее

детально исследовались простейшие области круг, прямоугольник, прямолинейный канал, многоугольники. Следует, однако, отметить, что эти задачи, хотя в большинстве случаев и имеют важное аэрогидродинамическое значение (и рассматривались еще Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным в связи с вихревым обтеканием тел идеальной жидкостью и общей теорией подъемной силы), до сих пор далеки от полного решения.

8) Ограниченные задачи вихревой динамики связаны с динамикой "бесконечно-малого" вихря (частицы жидкости или примеси) в потоке жидкости, создаваемом вихревыми структурами (например, взаимодействующими точечными вихрями). При этом предполагается, что рассматриваемый малый вихрь никак не влияет на движение этих структур. Такого рода исследования лежат в основе теории адвекции. Очевидно, что общее движение примеси является хаотическим уже для двумерного случая. Интерес к этой тематике в основном был стимулирован работами Х. Арефа (который ввел широко используемое понятие хаотической адвекции). Изучение хаотизации в таких задачах, как иногда считают, имеет важное значение для объяснения турбулентности.

9) Задача о движении твердого тела в жидкости по праву относится к числу наиболее трудных проблем гидродинамики. Первые задачи о движении твердого тела, взаимодействующего с жидкой средой, восходят к Максвеллу, Кирхгофу, Ламбу, Жуковскому и Чаплыгину. Существует два основных подхода к ее решению, первый, так называемый феноменологический, имеет в своей основе данные экспериментов и построение упрощенных моделей движения тела. Этот подход восходит своими истоками к работам классиков механики [104, 105]. В современных работах он широко применяется при исследовании движения тела в сопротивляющейся среде (см., например, [106]). Вторым подходом представляет собой попытку точного определения сил и моментов, действующих на тело со стороны жидкости. Для этого в случае вязкой жидкости необходимо использовать полные уравнения Навье-Стокса с граничными условиями на подвижной поверхности. Аналитически такая задача представляется неразрешимой. Однако

в случае, когда жидкость идеальная и несжимаемая, а течение безвихревое, ее удается свести к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, для исследования которых применимы методы классической механики. Различные частные случаи этой задачи рассматривали Пуассон, Стокс, Дирихле, Клебш и др. В 1870 г. Г.Кирхгоф свел задачу о движении твердого тела в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, к интегрированию замкнутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Влияние идеальной жидкости на тело, как известно, проявляется в эффекте присоединённых масс. Затем В.Томпсон и Р.Тэт дали свой вывод этих уравнений(см. [97]) с использованием принципа Гамильтона, обобщив при этом задачу на случай неодносвязного тела. При выполнении определенных условий, помимо эффекта присоединённых масс, действие жидкости на тело может проявляться в виде дополнительных гироскопических сил, обусловленных циркуляцией. Так Н.Е.Жуковским [104] получена формула для подъемной силы, действующей на тела цилиндрической формы. Применяя свою формулу, Жуковский рассмотрел ряд задач о падении тяжёлых твердых тел в безграничном объеме идеальной жидкости [104], [105]. В этих работах действие жидкости на твердое тело сводилось лишь к одной подъемной силе, что приводило, в частности, к нереалистичному предположению о несвязности поступательного и вращательного движений. С.А. Чаплыгин в 1926 г.[107] решил более общую задачу о силах и моментах, действующих на твердое тело,двигающееся произвольным образом в бесконечном объеме идеальной жидкости. Предполагается, что жидкость совершает безвихревое движение и покоится на бесконечности. В частности, циркуляция жидкости вокруг тела постоянна. Формулы Чаплыгина позволяют записать дифференциальные уравнения движения тяжелого цилиндрического тела в идеальной жидкости с учетом ненулевой циркуляции. В отсутствии циркуляции эта задача была рассмотрена Чаплыгиным в своей более ранней работе [108]. Качественный анализ задачи Чаплыгина без учёта циркуляции дан в [109], с учетом циркуляции в [110], [111], [112]. Резуль-

таты этих работ были существенно доработаны и обобщены в обзорной статье [113], в которой также содержится большое число ссылок на недавние работы (в основном численные и натурные эксперименты) по данной тематике. Движение твердых тел в жидкости под действием следящей силы (направление и величина силы фиксированы в некоторой жестко связанной с телом системе координат) выполнено в [114], [111].

10) Задача о движении в идеальной жидкости двух твердых тел изучалась еще Стоксом, а с экспериментальной точки зрения Бьёркнесом [115]. В несколько более общей постановке задача исследовалась Н. Е. Жуковским в [116]. Не менее интересной и представляющей практический интерес для современной гидроаэромеханики является задача взаимодействия в идеальной жидкости твердого тела (имеющего циркуляционное обтекание) и вихрей [117]. (Здесь подразумевается "плоская" постановка задачи.) В [118] показано, что такая система для случая круглого цилиндра является гамильтоновой с некоторой нелинейной скобкой Пуассона. При этом всегда существуют два первых интеграла движения, и задача об инерциальном взаимодействии кругового цилиндрического тела и точечного вихря является интегрируемой. Взаимодействие кругового цилиндра с двумя точечными вихрями уже не является интегрируемым и сводится к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы. Указанные интегрируемые и неинтегрируемые системы пока почти совсем не изучены. Отметим, что несколько позже исследований Рамоданова [117, 119], аналогичная задача исследовалась в [120]. Полученные в [120] уравнения являются частным случаем [117]. Укажем также работы [121–123], в которых изучается взаимодействие поступательно и равномерно движущегося или колеблющегося кругового цилиндра с одним и двумя точечными вихрями. В основном в этих работах анализируется возможность интегрируемости (и вычисляется интеграл Пуанкаре–Мельникова), а также определяются условия коллапса. В [120] анализируется устойчивость в задаче Фёппля, состоящей в изучении пары вихрей (два вихря с равными по величине, но отличающимися по знаку циркуляци-

ями), взаимодействующей с круговым цилиндром в набегающем потоке. Как известно, эта задача является хорошей моделью вихревого обтекания цилиндра при небольших числах Рейнольдса $Re = 13 \div 41$. Конфигурации Фёппля для случая эллиптического цилиндра исследованы в недавней работе [124]. Итак, мы подробно показали, что многочисленные различные постановки, как задачи о движении точечных вихрей в жидкости, так и задачи о движении в жидкости одного твердого тела изучались долго и изучены уже достаточно основательно. Исследования в этом направлении давно перешагнули границы традиционной гидромеханики и "стали достоянием" механиков и математиков, использующих уравнения в этих задачах как полигон для испытания новых и новых качественных методов анализа динамических систем. Но вместе с тем исследования совместного движения твердых тел и вихрей (именно аналитические, а не экспериментальные исследования), а также опять таки аналитические исследования задачи о движении нескольких тел практически не проводились. Имеющиеся работы (частично уже упомянутые) можно пересчитать по пальцам. Настоящая диссертация призвана, хотя бы частично, восполнить этот пробел. Представляется актуальным получение точных уравнений движения (наподобие знаменитых уравнений Кирхгофа), описывающих поведение тел, взаимодействующих с вихрями, а также системы нескольких тел. Подобные системы исключительно важны не только для непосредственного вычисления гидродинамического сопротивления, испытываемого телом, движущемся в завихрённом потоке, но и для исследования задач турбулентности и перемешивания. Родственная задача о самопродвижении тела в жидкости имеет важное значение для моделирования и проектирования подводных аппаратов. Интерес к ней связан с изучением механизма плавания рыб, а также явления кавитации. Особенностью диссертации является широкое использование численных экспериментов и методов компьютерной визуализации в сочетании с аналитическими методами. Специально для этих целей был написан пакет задач, включенный в программный комплекс "Хаос 5.0". При проверке полученных результатов (и особенно случаев инте-

грируемости) использовалась система аналитических вычислений MAPLE. Помимо широкого приложения компьютерных методов, в работе используются и развиваются идеи и методы Ли-алгебраической редукции уравнений движения, основанные на анализе соответствующих пуассоновых структур. Без подобных методов анализа, развивающих и обобщающих идеи Рауса, решение ряда задач представленных в диссертации традиционными классическими методами представляется весьма проблематичным.

Глава 1

Динамика вихревых нитей в бозе-эйнштейновском конденсате и идеальной жидкости

В данной главе будут представлены результаты, полученные для анализа динамики двух прямолинейных вихревых нитей в идеальной жидкости, заключенных внутри области, имеющей форму бесконечного кругового цилиндра. В такой постановке система описывает, как важную с точки зрения физических приложений систему двух вихревых нитей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключенном в ловушку, так и классическую задачу о движении точечных вихрей в идеальной жидкости.

В первом разделе изучена система двух вихрей для случая интенсивностей противоположных знаков. Приведены результаты для обоих случаев – конденсата и идеальной жидкости.

Второй раздел посвящен динамике двух вихрей, имеющих интенсивности одинакового знака, в конденсате. Полученная бифуркационная диаграмма имеет существенные отличия от ситуации классической идеальной жидкости.

Результаты данной главы опубликованы в работах [31, 34].

1.1. Бифуркационный анализ динамики двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате. Случай интенсивностей противоположных знаков

В разделе 1.1 рассмотрена система двух точечных вихрей, имеющих интенсивности противоположных знаков, в бозе-эйнштейновском конденсате, заключенном в ловушку. Приведена гамильтонова форма уравнений движения и по-

казана ее интегрируемость по Лиувиллю. Построена бифуркационная диаграмма и проведен анализ бифуркаций торов Лиувилля в случае интенсивностей противоположных знаков, указаны виды критических движений. Благодаря явному аналитическому описанию бифуркационного множества, удалось обнаружить динамические эффекты, которые свойственны рассматриваемой системе. В частности, аналитически доказано, что на одной из ветвей бифуркационной диаграммы найдется такое значение дополнительного интеграла, соответствующего моменту завихренности, при котором радиусы критических окружностей оказываются равными и вихри движутся по одной и той же окружности, находясь на противоположных концах диаметра. Проведено качественное сравнение фазовой топологии и динамики систем двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате и классической идеальной жидкости. Использование аналитических зависимостей позволило провести компьютерное моделирование динамики двух вихрей в конденсате в случае общего положения. Результаты данного раздела опубликованы в работе [31].

1.1.1. Предварительные сведения

В этом разделе внимание сконцентрировано на актуальной задаче анализа динамики двух вихревых нитей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключенном в ловушке (см. например работу [125] и литературу, указанную в ней). Вихри и вихревые решетки в бозе-эйнштейновском конденсате, например, на ультрахолодных атомах описаны в обзорах [126–128]. Активно изучаются, как с теоретической [129, 130], так и с экспериментальной [131] точки зрения, уединенные вихри и система из двух вихрей.

Чаще всего вихри в конденсате могут быть описаны как решения уравнения Гросса-Питаевского – трехмерного уравнения в частных производных. При этом наиболее явно может быть определена структура потока сверхтекучей жидкости (конденсата) в окрестности вихревой нити. Существенным недостатком этого подхода является отсутствие аналитических решений уравнения

Гросса-Питаевского с необходимыми граничными условиями и, как следствие, возможность исследовать динамику конденсата в целом и вихрей в частности только с помощью численного решения уравнения в частных производных.

Во многих интересных случаях вихревые нити прямолинейны и параллельны друг другу. При этом задача становится существенно двумерной. В этой ситуации в качестве альтернативного подхода можно описывать динамику вихрей в конденсате с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно координат вихревых нитей. Этот подход хорошо известен в классической гидродинамике [132], где исследуется задача динамики вихревых нитей в идеальной жидкости. Начиная с работ Кирхгофа [70], Гельмгольца [69] и др. были известны простейшие свойства движения вихревых нитей, вихревых пар и полигональных конфигураций вихрей в безграничной идеальной жидкости. Гринхилл [103] впервые рассмотрел движение точечных вихрей внутри круга. Линь в работе [133] продемонстрировал, что для точечных вихрей внутри и вне кругового цилиндра уравнения движения имеют вид уравнений Гамильтона относительно той же скобки Пуассона, что и на плоскости. Современные работы продолжают исследования классических задач, обобщая их на случай твердых тел, взаимодействующих с вихрями (см. например [19, 118, 134–136] и др.). В такой постановке возникают интегрируемые гамильтоновы системы или более общие хаотические динамические системы, при исследовании которых применимы хорошо развитые топологические и качественные методы анализа [2, 3, 137].

В текущем разделе рассматривается задача о движении двух прямолинейных вихревых нитей с интенсивностями разных знаков в бозе-эйнштейновском конденсате, заключенном в цилиндрической ловушке. Нити параллельны образующей кругового цилиндра, поэтому очевидно, что задача двумерна. Основной целью данного раздела является анализ фазовой топологии этой задачи.

Здесь качественный анализ динамики двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате проведен с использованием бифуркационного комплекса, впервые

представленного в [3]. Различные типы бифуркационных комплексов были построены в [138–140]

1.1.2. Модель

Следуя [125], рассмотрим прямолинейные вихревые нити в бозе-эйнштейновском конденсате с цилиндрической симметрией. Физически такая ситуация возникает прежде всего при удержании конденсата в гармонической ловушке. Однако общий вид уравнений сохраняется и в случае ловушки, имеющей форму кругового цилиндра с твердыми стенками. Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать двумерную задачу в плоскости, перпендикулярной к образующим цилиндра и вихревым нитям. Тогда общепринятой является терминология, согласно которой мы говорим о движении точечных вихрей в некоторой области плоскости, в нашем случае внутри круга.

Движение вихревой нити возникает в результате взаимодействия с другими вихрями. Угловая скорость однородной жидкости на расстоянии r от вихря определяется выражением

$$\Phi(r) = \frac{\hbar}{mr^2},$$

где \hbar – постоянная Планка, m – атомная масса. Скорость потока, создаваемого первым вихрем в точке, в которой расположен второй вихрь, определяет скорость движения второго вихря. И точно также скорость движения первого вихря определяется потоком от второго. Если вихри имеют одинаковое направление вращения, то система из двух таких вихрей вращается относительно общего центра. В случае если вихри j -й и k -й имеют противоположные направления вращения (интенсивности противоположных знаков), то вихревая пара движется в направлении потока жидкости между вихрями со скоростью

$$v_{jk} = r_{jk}\Phi(r_{jk}), \quad (1.1.1)$$

где r_{jk} – расстояние между вихревыми нитями.

Скорость движения k -го вихря также складывается из гироскопической прецессии конденсата относительно своего центра O на расстоянии r_k . Угловая частота прецессии дается формулой

$$\Omega(r_k) = \frac{\Omega_0}{1 - r_k^2/R^2}, \quad (1.1.2)$$

где R – радиус цилиндра, а

$$\Omega_0 = \frac{\hbar}{mR^2}.$$

Получим уравнения движения системы двух вихрей.

1.1.3. Уравнения движения. Первые интегралы

Складывая две вышеуказанные составляющие скорости (1.1.1), (1.1.2), мы получаем уравнения движения вихрей

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= -\frac{\Gamma_k}{R^2}\Omega(r_k)y_k - \frac{b}{2R^2} \sum_{j \neq k}^n \Gamma_j \Phi(r_{jk})(y_k - y_j), \\ \dot{y}_k &= \frac{\Gamma_k}{R^2}\Omega(r_k)x_k + \frac{b}{2R^2} \sum_{j \neq k}^n \Gamma_j \Phi(r_{jk})(x_k - x_j). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Здесь введены декартовы координаты k -го вихря (x_k, y_k) , удовлетворяющие соотношению $r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$, начало координат O расположено в центре круга, интенсивности вихрей Γ_k , $n = 2$, индексы j, k пробегают значения 1, 2.

Уравнения движения двух точечных вихрей могут быть представлены в гамильтоновой форме

$$\dot{\zeta}_i = \{\zeta_i, H\} = \sum_k \{\zeta_i, \zeta_k\} \frac{\partial H}{\partial \zeta_k}, \quad (1.1.4)$$

где ζ_i – координаты фазового вектора $\zeta = \{x_1, y_1, x_2, y_2\}$.

Для этого рассмотрим функцию

$$H = -\frac{\Omega_0}{2} \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2 \ln \left(1 - \frac{r_k^2}{R^2} \right) + \frac{\Phi_R}{4} \sum_{k=1}^n \sum_{j < k}^n \Gamma_j \Gamma_k \ln \left(\frac{r_{jk}^2}{R^2} \right), \quad (1.1.5)$$

где введены следующие обозначения $\Phi_R = b\Phi(R) = b\Omega_0$, b – постоянный числовой параметр, модифицирующий величину взаимодействия между вихрями от случая неограниченной жидкости к рассматриваемой ситуации конденсата в ловушке.

Наконец, используя функцию (1.1.5) в качестве функции Гамильтона и выбирая ненулевые компоненты матрицы пуассоновой структуры в стандартном виде

$$\{x_i, y_j\} = -\frac{1}{\Gamma_i} \delta_{ij}, \quad (1.1.6)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, получим систему (1.1.3) в искомом гамильтоновом виде (1.1.4).

Заметим, что пуассонова структура (1.1.6) является всюду невырожденной (т. е. имеет ранг, равный размерности фазового пространства). Таким образом, мы имеем гамильтонову систему с двумя степенями свободы с фазовым пространством $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{P} = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) : (x_1^2 + y_1^2 < R^2), (x_2^2 + y_2^2 < R^2)\} = \mathbb{D} \times \mathbb{D}. \quad (1.1.7)$$

где \mathbb{D} обозначен открытый диск радиуса R .

Наша система инвариантна относительно собственных вращений с неподвижной точкой O , из чего следует, что кинетический момент системы сохраняется. Таким образом дополнительный первый интеграл – *момент завихренности*

$$F = \Gamma_1 r_1^2 + \Gamma_2 r_2^2. \quad (1.1.8)$$

Легко убедиться, что относительно скобки (1.1.6) интегралы H и F коммутируют. Кроме того, как мы увидим далее, ранг отображения момента почти всюду максимален, т. е. интегралы H и F почти всюду независимы. Тогда согласно теореме Арнольда–Лиувилля система (1.1.3) является вполне интегрируемой, а также можно утверждать, что компактная связная компонента интегрального многообразия $\mathcal{M} = \{H = h, F = f\}$ диффеоморфна двумерному тору.

Для удобства дальнейшего изложения введем параметр a равный отношению интенсивностей и перейдем к безразмерным переменным \tilde{x}_k, \tilde{y}_k с помощью соотношений

$$x_k = R\tilde{x}_k, \quad y_k = R\tilde{y}_k, \quad a = \Gamma_2/\Gamma_1, \quad (1.1.9)$$

Очевидно, что координаты $\tilde{x}_k, \tilde{y}_k \in [0, 1]$.

В работе [125] указано, что наиболее удовлетворительно результаты экспериментов в ловушке с жёсткими стенками описывает гамильтониан (1.1.5) при значении параметра взаимодействия равном 2. Поэтому ниже мы всюду полагаем $b = 2$.

Наконец, опуская знак тильды над фазовыми переменными, разделив гамильтониан (1.1.5) на константу $-\Omega_0\Gamma_1^2/2$, а дополнительный интеграл (1.1.8) на Γ_1 и сохранив прежние обозначения для интегралов, получим выражения (1.1.5) и (1.1.8) в виде

$$\begin{aligned} H &= \ln [1 - (x_1^2 + y_1^2)] + a^2 \ln [1 - (x_2^2 + y_2^2)] - a \ln [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2], \\ F &= (x_1^2 + y_1^2) + a(x_2^2 + y_2^2). \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Далее мы сконцентрируем свое внимание на изучении фазовой топологии системы (1.1.3) с интегралами (1.1.10).

1.1.4. Критическое множество. Бифуркационный анализ

Следуя [2], определим *отображение момента*

$$\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (1.1.11)$$

полагая $(h, f) = \mathcal{F}(\zeta) = (H(\zeta), F(\zeta)), \forall \zeta \in \mathcal{P}$. Обозначим через \mathcal{C} совокупность всех критических точек отображения момента, то есть множество точек, в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(\zeta) < 2$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P})$ называется *бифуркационной диаграммой*.

Более наглядным представлением множества критических значений является введенный в [3] *бифуркационный комплекс* \mathcal{K} , который был использован

для анализа (орбитальной) устойчивости интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Применение бифуркационного комплекса к интегрируемым системам неголономной механики имеется в [138, 141], а к задачам динамики твердого тела в идеальной жидкости в присутствии точечных вихрей – в [26].

Бифуркационный комплекс \mathcal{K} – это накрытие над бифуркационной диаграммой, которое показывает количество торов в прообразе каждой камеры бифуркационной диаграммы. Кроме того, если кривая бифуркационной диаграммы лежит внутри бифуркационного комплекса, то этой кривой отвечают неустойчивые критические периодические движения. Если же кривая лежит на границе комплекса, то ей отвечают устойчивые критические периодические движения.

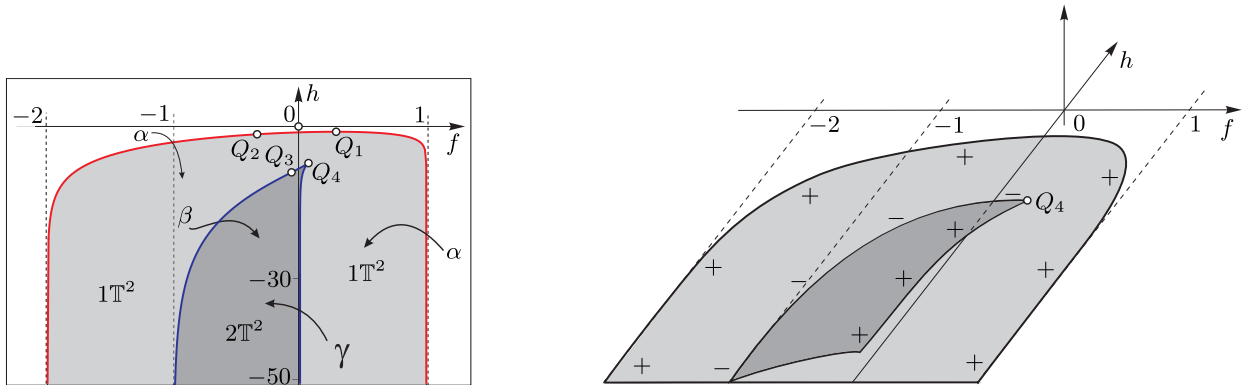


Рис. 1.1. Бифуркационная диаграмма Σ и бифуркационный комплекс \mathcal{K} в случае $a \in (-\infty; -1)$.

Обозначим через \mathcal{N}_1 замыкание множества решений системы

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad (1.1.12)$$

а через \mathcal{N}_2 замыкание множества решений системы

$$F_1 = 0, \quad F_3 = 0, \quad (1.1.13)$$

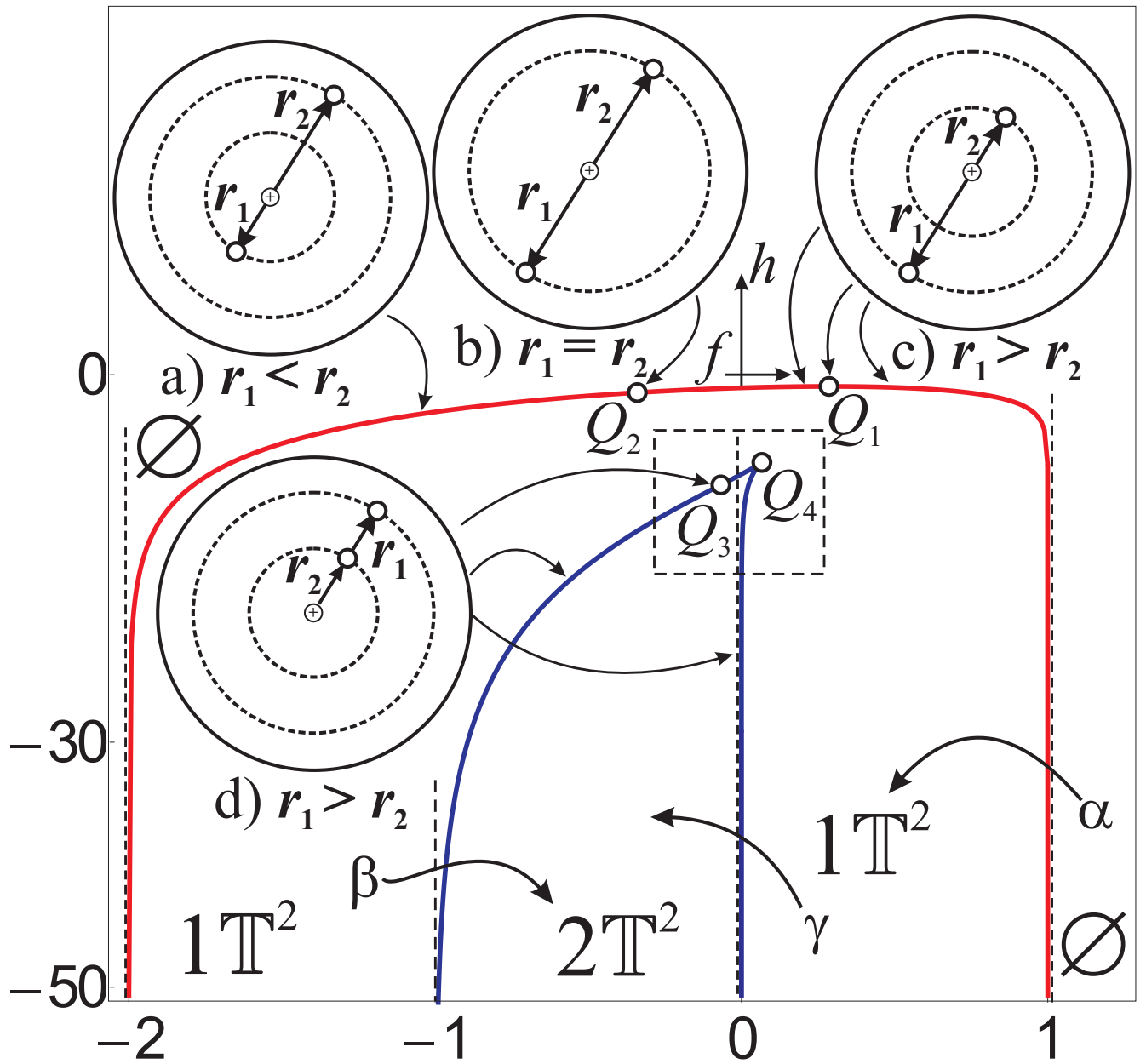


Рис. 1.2. Бифуркационная диаграмма Σ и возможные типы особых периодических движений в случае $a \in (-\infty; -1)$.

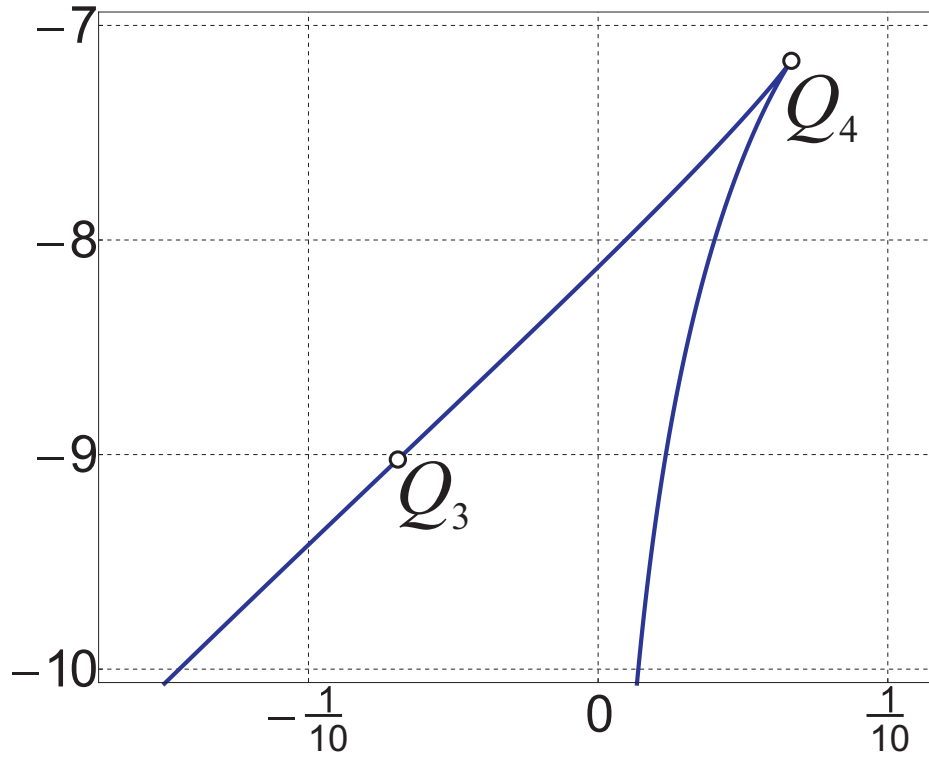


Рис. 1.3. Увеличенный фрагмент диаграммы, изображенной на Рис. 1.2.

где

$$F_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

$$F_2 = [(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2)(x_2^2 + y_2^2) - x_2^2], \quad (1.1.14)$$

$$F_3 = \{x_2[x_1(x_2^2 - 1) + ax_2(x_1^2 - 1)] + x_1 y_2^2(x_2 + ax_1)\}.$$

Теорема 1. *Множество \mathcal{C} критических точек отображения момента \mathcal{F} исчерпывается множеством решений совокупности систем (1.1.12) и (1.1.13). Множества \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 являются двумерными инвариантными подмногообразиями системы (1.1.4) с гамильтонианом (1.1.5).*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения теоремы необходимо найти точки фазового пространства, в которых ранг отображения не максимален. С помощью прямого вычисления можно убедиться, что матрица Якоби отображения момента имеет нулевые миноры второго порядка в точках $\zeta \in \mathcal{P}$, координаты которых удовлетворяют уравнениям системы (1.1.12) и (1.1.13), откуда $\mathcal{C} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 = \{\zeta : (F_1 = 0, F_2 = 0) \vee (F_1 = 0, F_3 = 0)\}$. В инвариантности соотношений (1.1.12) и (1.1.13) можно убедиться с помощью следующих цепочек

равенств

$$\dot{F}_1 = \{F_1, H\} = \sigma_1 F_2 F_3, \quad \dot{F}_2 = \{F_2, H\} = \sigma_2 F_2, \quad \dot{F}_3 = \{F_3, H\} = \sigma_3 F_3$$

где σ_k – некоторые функции фазовых переменных. □

Для дальнейшего исследования удобно перейти к полярным координатам с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos \theta_1, & y_1 &= r_1 \sin \theta_1, \\ x_2 &= r_2 \cos \theta_2, & y_2 &= r_2 \sin \theta_2. \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

Первое из уравнений (1.1.14) принимает вид $\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$. Тогда для определения критического множества мы имеем совокупность двух систем

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2, \\ (r_1^2 - r_1 r_2 + r_2^2 - 1)[a r_2 (r_1^2 - 1) + r_1 (r_2^2 - 1)] = 0 \end{cases} \tag{1.1.16}$$

и

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + \pi, \\ (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 - 1)[a r_2 (r_1^2 - 1) - r_1 (r_2^2 - 1)] = 0. \end{cases} \tag{1.1.17}$$

Далее всюду в настоящем разделе ограничимся рассмотрением ситуации, когда вихри имеют отличные от нуля интенсивности противоположных знаков, т. е. всюду ниже $-\infty < a < 0$.

Из (1.1.16) и (1.1.17) легко заметить, что для нахождения точек критического множества необходимо рассмотреть четыре возможных случая.

Первый случай. Из (1.1.16) получим

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2, \\ r_1^2 - r_1 r_2 + r_2^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Вспоминая тот факт, что $0 \leq r_1, r_2 < 1$, можно убедиться, что второе уравнение не имеет корней.

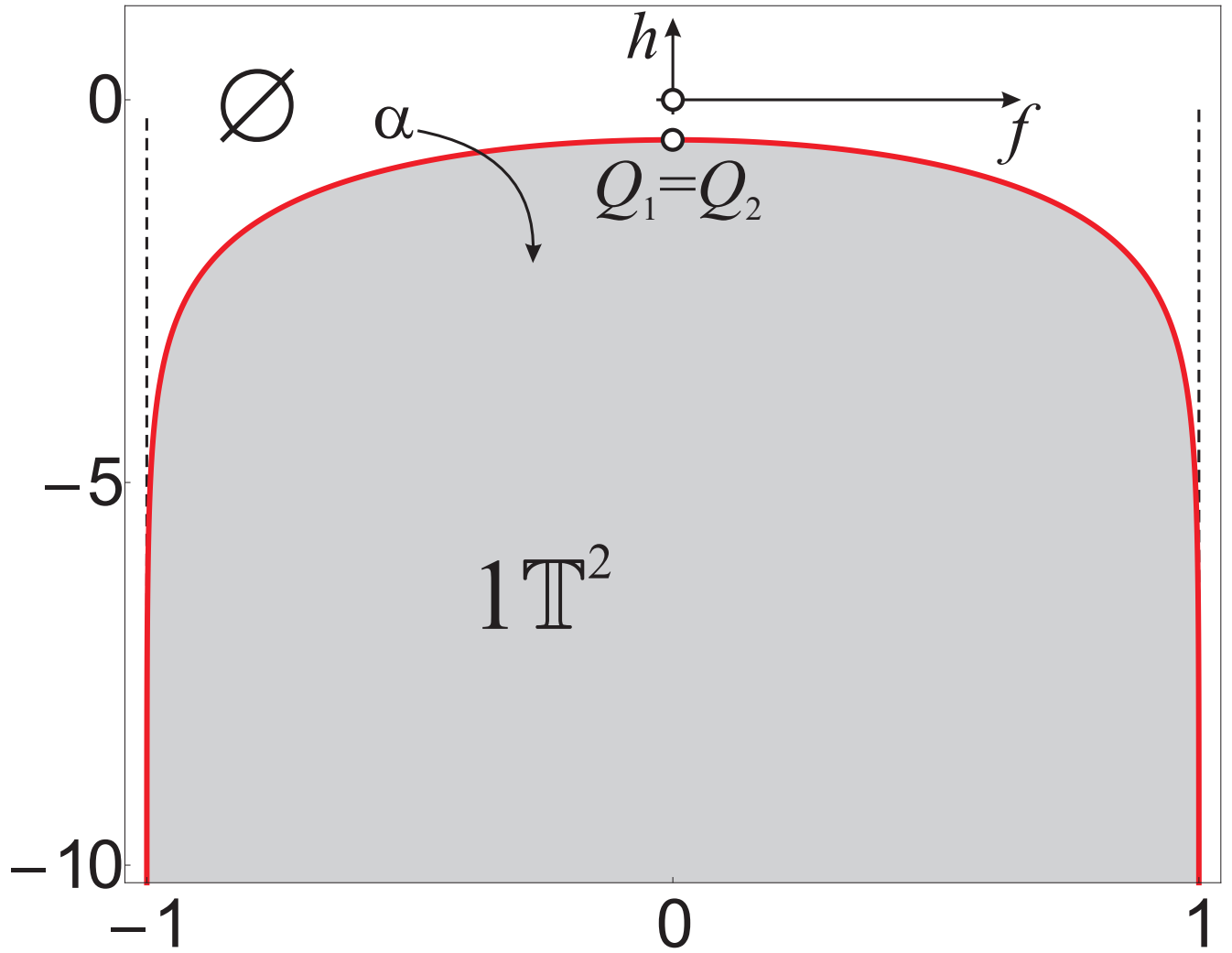


Рис. 1.4. Бифуркационная диаграмма Σ в случае противоположных интенсивностей ($a = -1$).

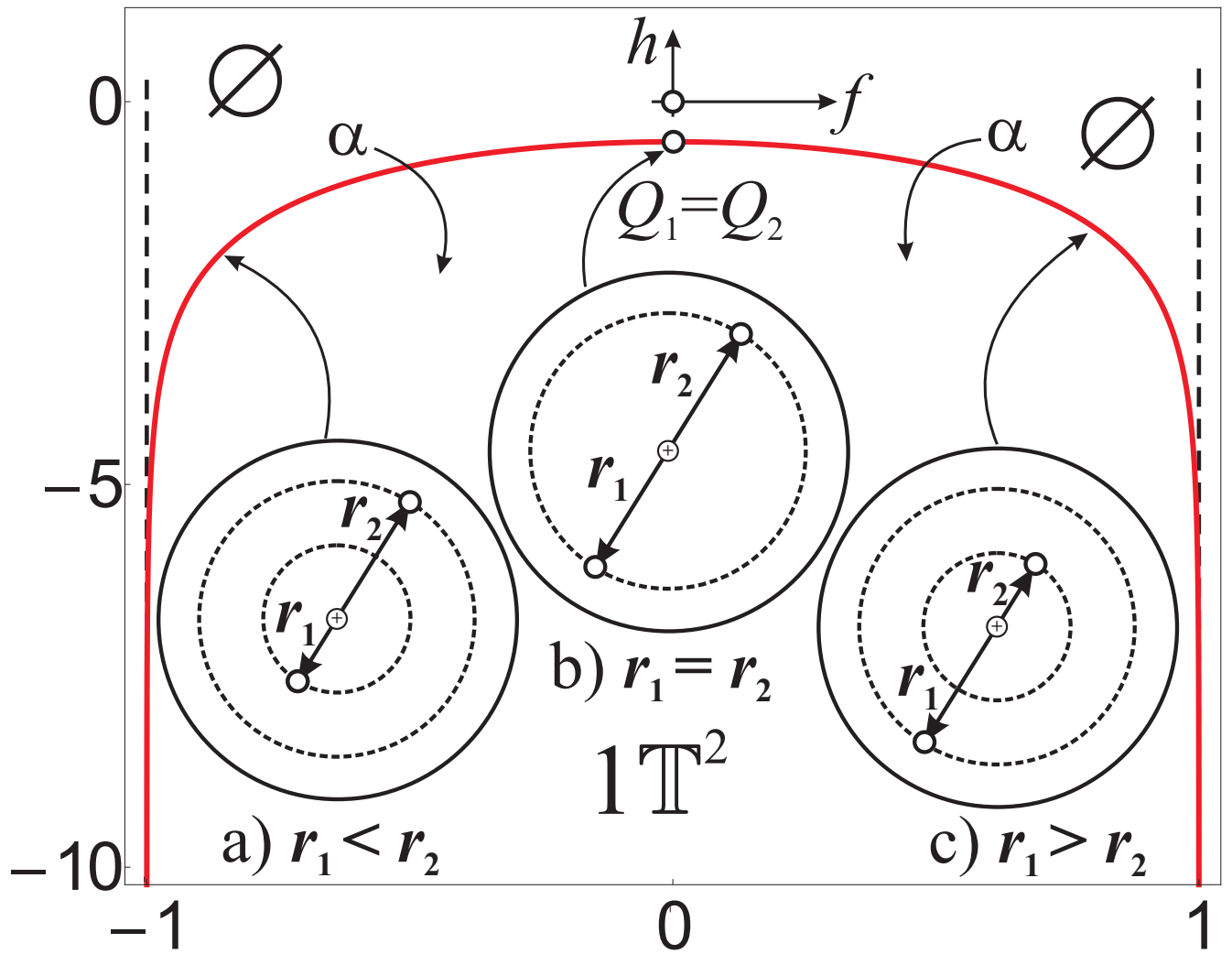


Рис. 1.5. Бифуркационная диаграмма Σ и возможные типы особых периодических движений в случае противоположных интенсивностей ($a = -1$).

Второй случай. Из (1.1.17) имеем вторую систему

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + \pi, \\ r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (1.1.18)$$

Левая часть второго уравнения (1.1.18) допускает следующую рациональную параметризацию

$$\begin{cases} r_1(s) = \frac{1 + 2s}{1 + s + s^2}, \\ r_2(s) = \frac{s^2 - 1}{1 + s + s^2}, \end{cases} \quad s \in [1; +\infty). \quad (1.1.19)$$

Выражения (1.1.19) определяют первую часть критического множества.

Третий случай. Из (1.1.16) получим третью систему

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2, \\ ar_2(r_1^2 - 1) + r_1(r_2^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad (1.1.20)$$

Для решения системы (1.1.20) имеем следующее параметрическое представление

$$\begin{cases} r_1(t) = \sqrt{\frac{at + 1}{t(a + t)}}, \\ r_2(t) = \sqrt{\frac{t(at + 1)}{a + t}}, \\ t \in \left(\frac{1}{|a|}; 1\right), a \in (-\infty; -1), \quad t \in \left(1; \frac{1}{|a|}\right), a \in (-1; 0). \end{cases} \quad (1.1.21)$$

которое описывает вторую часть критического множества.

Четвертый случай. Из (1.1.17) имеем последнюю систему

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + \pi, \\ ar_2(r_1^2 - 1) - r_1(r_2^2 - 1) = 0. \end{cases} \quad (1.1.22)$$

Как и в первом случае можно убедиться, что второе уравнение (1.1.22) при $0 \leq r_1, r_2 < 1$ не имеет корней.

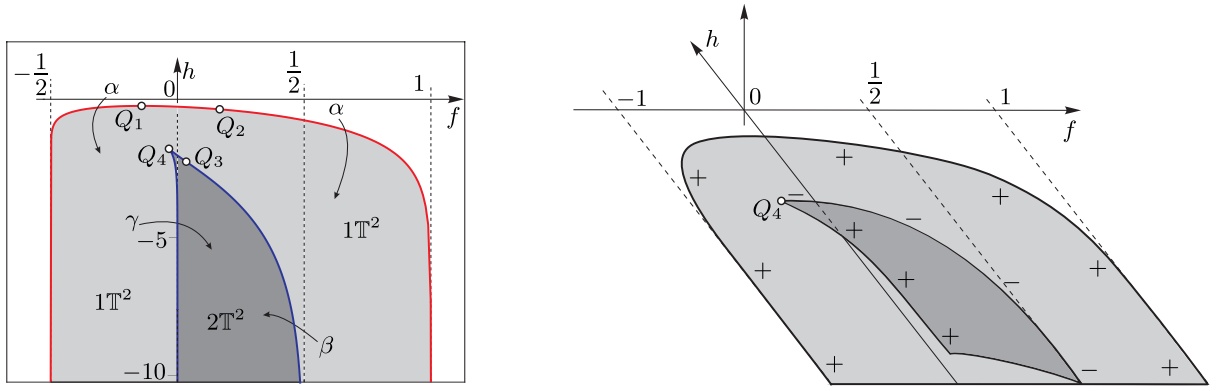


Рис. 1.6. Бифуркационная диаграмма Σ и бифуркационный комплекс K в случае $a \in (-1; 0)$.

С использованием (1.1.10), (1.1.15) и приведенного выше параметрического представления критического множества (1.1.21), (1.1.19) получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Бифуркационная диаграмма Σ отображения момента \mathcal{F} состоит из кривых

$$\Pi_1 : \begin{cases} h(s) = \ln \left[\frac{s(s^2 - 1)(s + 2)}{(1 + s + s^2)^2} \right] + a^2 \ln \left[\frac{s(s + 2)(2s + 1)}{(1 + s + s^2)^2} \right] - \\ - 2a \ln \left[\frac{s(s + 2)}{1 + s + s^2} \right], \\ f(s) = \frac{(2s + 1)^2 + a(s^2 - 1)^2}{(1 + s + s^2)^2}, \end{cases} \quad s \in (1; +\infty). \quad (1.1.23)$$

и

$$\Pi_2 : \begin{cases} h(t) = \ln \left[\frac{t^2 - 1}{t(t + a)} \right] + a^2 \ln \left[\frac{a(1 - t^2)}{t + a} \right] - 2a \ln \left| \frac{(1 - t)\sqrt{at + 1}}{\sqrt{t(t + a)}} \right|, \\ f(t) = \frac{(at + 1)(at^2 + 1)}{t(t + a)}, \\ t \in \left(\frac{1}{|a|}; 1 \right), a \in (-\infty; -1), \text{ или } t \in \left(1; \frac{1}{|a|} \right), a \in (-1; 0). \end{cases} \quad (1.1.24)$$

Очевидно, что бифуркационная кривая Π_1 является образом критического множества \mathcal{N}_1 , а кривая Π_2 – образом \mathcal{N}_2 .

Следствие 1. При $a = -1$ бифуркационная диаграмма Σ отображения мо-

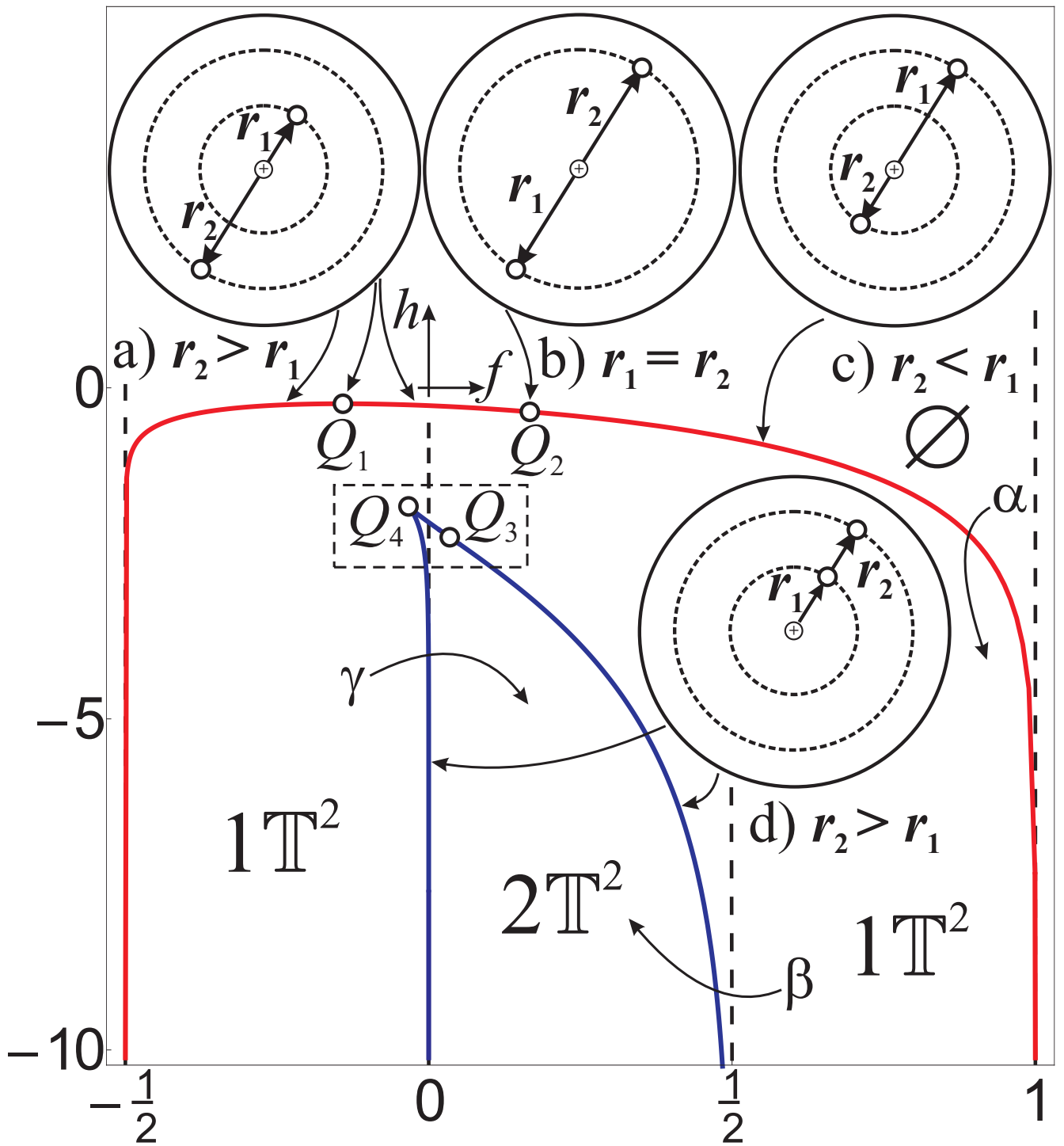


Рис. 1.7. Бифуркационная диаграмма Σ и возможные типы особых периодических движений в случае $a \in (-1; 0)$.

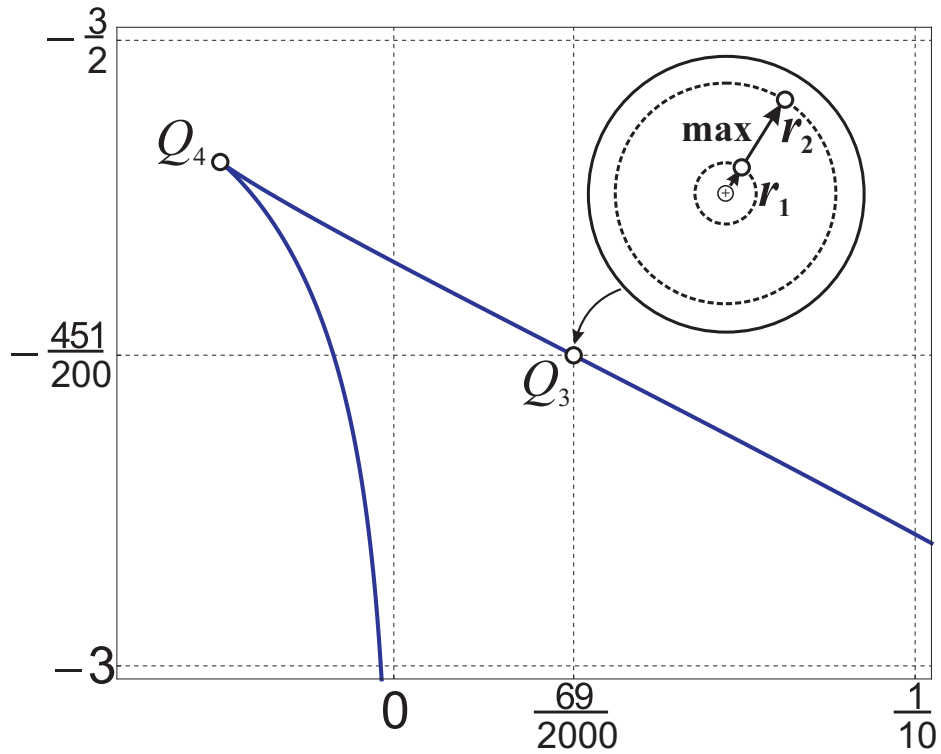


Рис. 1.8. Увеличенный фрагмент диаграммы, изображенной на Рис. 1.7.

мента принимает вид

$$\Pi_1 : \begin{cases} h(f) = \ln \left[\left(\frac{2 + \sqrt{4 - 3f^2}}{6} \right)^2 - \frac{f^2}{4} \right] + \\ + \ln \left[\frac{4 - \sqrt{4 - 3f^2}}{3} + \sqrt{\left(\frac{4 - \sqrt{4 - 3f^2}}{3} \right)^2 - f^2} \right], \end{cases} \quad f \in (-1; +1). \quad (1.1.25)$$

Из (1.1.25) можно сделать несколько замечаний о виде бифуркационной диаграммы при $a = -1$:

1. У графика есть две вертикальные асимптоты $f = -1$ и $f = 1$.
2. График функции $h(f)$ симметричен относительно прямой $f = 0$.
3. Отсутствует кривая Π_2 . Рассмотрим второе из уравнений (1.1.20), определяющих часть критического множества \mathcal{N}_2 , которое в данном случае принимает вид

$$(r_1 - r_2)(r_1 r_2 - 1) = 0.$$

Это уравнение очевидно не имеет физически осмысленных решений: при равенстве нулю первой скобки и одновременно из (1.1.20) $\theta_1 = \theta_2$, мы имеем ситуацию слияния двух вихрей, что приводит к особенности в гамильтониане (1.1.10); при обращении в ноль второй скобки один из вихрей оказывается снаружи круговой области, что также невозможно по постановке задачи. Следовательно множество $\mathcal{N}_2 = \emptyset$ и значит отсутствует образ этого множества при отображении момента – кривая Π_2 .

Рассмотрим подробнее некоторые интересные свойства бифуркационной диаграммы.

1. Отметим во-первых, что кривая Π_2 , как в случае $a \in (-\infty; -1)$ (рис. 1.1, 1.2, 1.3), так и в случае $a \in (-1; 0)$ (рис. 1.6, 1.7, 1.8), имеет точку возврата (cusp) Q_4 . Для того чтобы увидеть это, вернемся к параметрическому представлению (1.1.21) части критического множества \mathcal{N}_2 . Решая систему уравнений $f'(t) = 0$, $h'(t) = 0$ для функций (1.1.24), мы приходим к следующему уравнению четвертой степени относительно t

$$a^2t^4 + 2a^3t^3 + a(a-1)t^2 - 2t - a = 0, \quad (1.1.26)$$

решением которого является значение параметра, соответствующее каспидальной особенности на бифуркационной кривой Π_2 .

2. Другой важной особенностью является наличие трех различных типов бифуркационных диаграмм.
 - а. Первый тип получается при $a \in (-\infty; -1)$. При этом (см. рис. 1.1, 1.2) точка Q_1 максимума ветви Π_1 и точка возврата Q_4 ветви Π_2 смещены вправо относительно вертикальной прямой $f = 0$.
 - б. Второй тип диаграмм получается при $a = -1$. При этом (см. рис. 1.4, 1.5) точка Q_1 максимума ветви Π_1 лежит на вертикальной прямой $f = 0$. Вторая часть бифуркационного множества – ветвь Π_2 при $a = -1$ не существует.

- в. Третий тип получается при $a \in (-1; 0)$. При этом (см. рис. 1.6, 1.7) точка Q_1 максимума ветви Π_1 и точка возврата Q_4 ветви Π_2 смещены влево относительно вертикальной прямой $f = 0$.
3. Важно отметить, что при $a \neq -1$ бифуркационные диаграммы имеют четыре вертикальные асимптоты. Действительно:
- а. Рассмотрим сначала асимптоты к Π_1 – в выражении (1.1.23) при $s \rightarrow 1$ аргумент первого логарифма в выражении для $h(s)$ стремится к нулю и, так как остальные два слагаемых остаются конечны, то $h(s) \rightarrow -\infty$, $f(s) \rightarrow 1$; в итоге получим для ветви Π_1 вертикальную асимптоту $f = 1$ (см. рис. 1.2, 1.5, 1.7).
 - б. В выражении (1.1.23) при $s \rightarrow +\infty$ аргумент второго логарифма в выражении для $h(s)$ стремится к нулю и, так как остальные два слагаемых остаются конечны, то $h(s) \rightarrow -\infty$, $f(s) \rightarrow a$; в результате получим для ветви Π_1 вторую вертикальную асимптоту $f = a$ (см. рис. 1.2, 1.5, 1.7).
 - в. Далее исследуем асимптоты второй ветви бифуркационной диаграммы Π_2 , причем сразу для обоих случаев $t \in \left(\frac{1}{|a|}; 1\right)$, $a \in (-\infty; -1)$ и $t \in \left(1; \frac{1}{|a|}\right)$, $a \in (-1; 0)$. В выражении (1.1.24) при $t \rightarrow 1$ аргументы всех трех логарифмов в выражении для $h(t)$ стремятся к нулю и, следовательно, $h(t) \rightarrow -\infty$, при этом $f(t) \rightarrow 1 + a$; получаем для ветви Π_2 вертикальную асимптоту $f = 1 + a$ (см. рис. 1.2, 1.7).
 - г. Наконец, в выражении (1.1.24) при $t \rightarrow \frac{1}{|a|}$ аргумент третьего логарифма в выражении для $h(t)$ стремится к нулю и, следовательно, $h(t) \rightarrow -\infty$, одновременно $f(t) \rightarrow 0$; тогда получим для ветви Π_2 вторую вертикальную асимптоту $f = 0$ (см. рис. 1.2, 1.7).
4. Отметим, что кривая Π_2 при любом отрицательном значении a , за исключением $a = -1$, имеет, кроме точки возврата Q_4 , точку перегиба Q_3 (см.

рис. 1.3, 1.8), положение которой определяется значением параметра t , являющегося корнем следующего уравнения

$$at^4 + 2a^2t^3 + 2at^2 + 2t + a = 0. \quad (1.1.27)$$

Интересно отметить, что система не имеет особенностей ранга 0. Критические точки системы являются особенностями ранга 1, так как косо́й градиент второго интеграла в критических точках не обращается в ноль. Ниже мы приведем аналитическую классификацию особенностей ранга 1.

Примеры бифуркационной диаграммы Σ и бифуркационного комплекса \mathcal{K} для случаев $a \in (-\infty; -1)$, $a = -1$ и $a \in (-1; 0)$ приведены на рис. 1.1, рис. 1.4 и рис. 1.6 соответственно. На рис. 1.2, рис. 1.5 и рис. 1.7 изображены бифуркационные диаграммы тех же случаев и указаны возможные типы критических движений, так называемых особых периодических движений (ОПД). Соответствие типа движения и участку бифуркационной кривой показан с помощью стрелок. Штриховкой на всех бифуркационных диаграммах указана область возможности движения. В каждой камере бифуркационной диаграммы указано количество инвариантных торов. На бифуркационном комплексе \mathcal{K} знаком “+” помечены устойчивые критические периодические решения, а знаком “−” — неустойчивые.

Бифуркационная диаграмма Σ разбивает плоскость параметров первых интегралов (h, f) на камеры, в каждой из которых указано в прообразе отображения момента количество связных компонент (один тор, либо два тора). На рис. 1.1, рис. 1.4 и рис. 1.6 буквы α , β и γ соответствуют следующим переходам:

$$\alpha: \emptyset \rightarrow \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{T}^2;$$

$$\beta: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1) \rightarrow 2\mathbb{T}^2;$$

$$\gamma: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{T}^2 \rightarrow 2\mathbb{T}^2.$$

Здесь через $\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1)$ обозначено интегральное многообразие, которое представляет собой произведение “восьмерки” на окружность [137].

Приведем параметрическое представление ОПД для двух случаев. Для точек прообраза кривой Π_1 ($\theta_1 = \theta_2 + \pi$) из (1.1.15) и (1.1.19) имеем

$$\gamma_1 : \begin{cases} x_1 = -\frac{1+2s}{1+s+s^2} \cos \theta_2, & y_1 = -\frac{1+2s}{1+s+s^2} \sin \theta_2, \\ x_2 = \frac{s^2-1}{1+s+s^2} \cos \theta_2, & y_2 = \frac{s^2-1}{1+s+s^2} \sin \theta_2, \end{cases} \quad \theta_2 \in [0; 2\pi]. \quad (1.1.28)$$

Во втором случае для точек прообраза кривой Π_2 ($\theta_1 = \theta_2$) из (1.1.15) и (1.1.21) имеем

$$\gamma_2 : \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{at+1}{t(a+t)}} \cos \theta_2, & y_1 = \sqrt{\frac{at+1}{t(a+t)}} \sin \theta_2, \\ x_2 = \sqrt{\frac{t(at+1)}{a+t}} \cos \theta_2, & y_2 = \sqrt{\frac{t(at+1)}{a+t}} \sin \theta_2, \end{cases} \quad \theta_2 \in [0; 2\pi]. \quad (1.1.29)$$

Значения параметров s и t определяют положение образа кривых γ_1 и γ_2 на ветвях Π_1 и Π_2 бифуркационной диаграммы соответственно.

Рассмотрим тип особенностей γ_1 и γ_2 .

Теорема 3. *Особые периодические движения γ_1 и γ_2 являются невырожденными особенностями C^1 ранга 1 отображения момента (1.1.11). Критические движения γ_1 имеют эллиптический тип, вдоль которых всюду $C_1 < 0$, а критические движения γ_2 могут быть двух видов: гиперболический тип при $C_2 > 0$ и эллиптический тип при $C_2 < 0$, где*

$$C_1 = -4[a(s^2-1)^2 - (1+2s)^2] \times \frac{[a(s^2-1)(s^2+4s-1) - (1+2s)(2s^2+2s-1)](1+s+s^2)}{s^4(s^2-1)^2(2+s)^4(1+2s)^2} \quad (1.1.30)$$

и

$$C_2 = -\frac{4(a+t)^2(at^2-1)[a^2t^4 + 2a^3t^3 + a(a-1)t^2 - 2t - a]}{a(t-1)^4(at+1)^2(t+1)^2}. \quad (1.1.31)$$

Смена типа происходит в точке возврата кривой Π_2 , положение которой определяется значением t , являющимся корнем уравнения (1.1.26). При этом $C_2 = 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$L = H + \lambda F, \quad (1.1.32)$$

с неопределенным множителем λ . Используя параметризацию (1.1.28) в выражении для косо́го градиента $\text{sgrad } L$, находим множитель

$$\lambda = \frac{(1 + s + s^2)^2(as^2 + 2s - a + 1)}{s(s^2 - 1)(1 + 2s)(2 + s)}.$$

Характеристический многочлен для линеаризации симплектического оператора A_L имеет вид

$$\mu^2(\mu^2 - C_1) = 0,$$

где C_1 определяется выражением (1.1.30). Из выражения (1.1.30) мы видим, что $C_1 < 0$ для $1 \leq s$, следовательно на всей бифуркационной кривой Π_1 решения γ_1 эллиптические, то есть согласно результатам [3] устойчивые. Как известно, если $C_1 < 0$, то мы получаем “эллиптический” тип точки (соответствующие одномерные торы или критические окружности являются устойчивыми многообразиями в фазовом пространстве и представляют собой предел концентрического семейства двумерных регулярных торов). Если $C_1 > 0$, то мы получаем “гиперболический” тип точки (соответствующие одномерные торы являются неустойчивыми). Исследование невырожденности и типа особенностей отображения момента с помощью характеристического многочлена для систем с двумя степенями свободы было проведено в [2]. Связь между типом особенности и устойчивостью (орбитальной) соответствующего решения, а также построение бифуркационного комплекса были рассмотрены в [3].

Действуя аналогично, рассмотрим косо́й градиент функции (1.1.32)

$$\text{grad } L = \text{sgrad } L|_{\gamma_2} = 0. \quad (1.1.33)$$

Подставляя (1.1.29) в (1.1.33), найдем

$$\lambda = -\frac{t(a-1)(a+t)}{(t^2-1)(at+1)}.$$

Характеристический многочлен в этом случае имеет вид

$$\mu^2(\mu^2 - C_2) = 0,$$

где C_2 определяется выражением (1.1.31). Обращение в ноль выражения (1.1.31) происходит при значении параметра, являющегося корнем многочлена (1.1.26), который отвечает точке возврата Q_4 на кривой Π_2 . \square

1.1.5. Динамика двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате

Рассмотрим классификацию возможных движений точечных вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате внутри круговой области, которая основана на анализе бифуркационных диаграмм и бифуркационных комплексов, полученных в предыдущем разделе при различных значениях отношения интенсивностей вихрей a .

Критические точки ранга 1 отображения момента (1.1.11) соответствуют периодическим решениям (ОПД) системы (1.1.3).

Теорема 4. *Особые периодические движения системы (1.1.3) есть движения вихрей, при котором:*

1. $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = C$, $r_1(t) = R_1$, $r_2(t) = R_2$, где C , R_1 , R_2 – постоянные.
2. Для произвольного по абсолютной величине отрицательного отношения интенсивностей $a \in (-\infty; 0)$ найдется точка Q_2 на бифуркационной кривой Π_1 такая, что в ее прообразе особое периодическое движение происходит при $r_1(t) = r_2(t)$,
3. при изменении параметра s таким, что точка в образе, двигаясь по бифуркационной кривой Π_1 переходит через точку Q_2 , происходит смена знака неравенства $r_1 < r_2$ на $r_1 > r_2$.
4. При изменении параметра t точка в образе двигается по бифуркационной ветви Π_2 так, что неравенство между r_1 и r_2 не меняет знак.

5. Для произвольного по абсолютной величине отрицательного отношения интенсивностей $a \in (-\infty; 0)$ на бифуркационной кривой Π_2 найдутся значения интегралов энергии и момента завихренности, для которых вихри будут двигаться на максимальном расстоянии друг от друга.

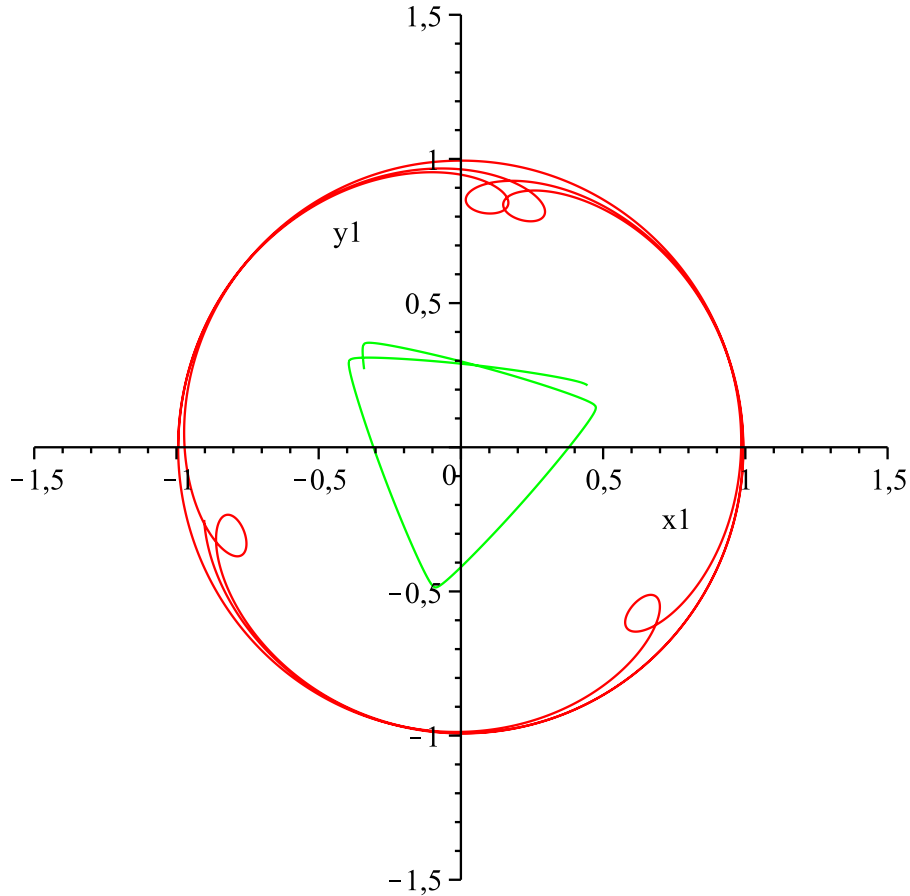


Рис. 1.9. Динамика двух вихрей в прообразе внутренней точки камеры бифуркационной диаграммы Σ в случае $a = -2$.

Доказательство. Рассмотрим каждое из утверждений последовательно.

Докажем утверждение 1. Сначала рассмотрим ОПД на ветви Π_1 . Для доказательства 1 достаточно убедиться в справедливости следующих равенств

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \{\theta_1, H\}|_{\gamma_1} = C, & \dot{\theta}_2 &= \{\theta_2, H\}|_{\gamma_1} = C, \\ \dot{r}_1 &= \{r_1, H\}|_{\gamma_1} = R_1, & \dot{r}_2 &= \{r_2, H\}|_{\gamma_1} = R_2,\end{aligned}$$

где

$$R_1 = \frac{1 + 2s}{1 + s + s^2}, \quad R_2 = \frac{s^2 - 1}{1 + s + s^2}. \quad (1.1.34)$$

Очевидно, что R_1 и R_2 являются постоянными, зависящими только от параметра s на бифуркационной кривой Π_1 , и в общем случае различными. С точки зрения динамики это означает, что вихри вращаются с одинаковой постоянной угловой скоростью C по концентрическим окружностям, концентр которых совпадает с центром круговой области, а вихри расположены на одном диаметре на расстояниях R_1 и R_2 от центра по разные стороны от него. Такая ситуация изображена на рисунках 1.2, 1.5, 1.7 на вставках а), б), в). При этом напомним, что первое из инвариантных соотношений (1.1.12), определяющих \mathcal{N}_1 , в полярных координатах имеет вид первого уравнения в (1.1.18): $\theta_1 = \theta_2 + \pi$, что соответствует расположению вихрей, показанному на перечисленных выше рисунках.

Рассмотрим критические движения на ветви Π_2 . Аналогично первой ветви бифуркационной диаграммы для доказательства 1 необходимо убедиться в справедливости равенств

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \{\theta_1, H\}|_{\gamma_2} = C', & \dot{\theta}_2 &= \{\theta_2, H\}|_{\gamma_2} = C', \\ \dot{r}_1 &= \{r_1, H\}|_{\gamma_2} = R'_1, & \dot{r}_2 &= \{r_2, H\}|_{\gamma_2} = R'_2,\end{aligned}$$

где

$$R'_1 = \sqrt{\frac{at + 1}{t(a + t)}}, \quad R'_2 = \sqrt{\frac{t(at + 1)}{a + t}}. \quad (1.1.35)$$

Из (1.1.35) видно, что R'_1 и R'_2 являются постоянными, зависящими от отношения интенсивностей a и параметра t на бифуркационной кривой Π_2 , и в общем случае различными. Снова вихри вращаются с одинаковой постоянной угловой скоростью C' по концентрическим окружностям, концентр которых расположен в центре круговой области. Вихри расположены на одном диаметре по одну сторону от центра на расстояниях R'_1 и R'_2 . Такая ситуация изображена на рисунках 1.2, 1.7 на вставках д). При этом первое из инвариантных соотношений (1.1.13), определяющих \mathcal{N}_2 , в полярных координатах имеет вид первого равенства (1.1.20): $\theta_1 = \theta_2$, что соответствует описанному выше расположению вихрей.

Докажем утверждения 2 и 3. Для этого заметим, что разность радиусов (1.1.34) окружностей, по которым вращаются вихри, имеет вид

$$R_1 - R_2 = \frac{2 + 2s - s^2}{1 + s + s^2},$$

и меняет знак при переходе через единственное значение параметра

$$s^* = 1 + \sqrt{3}. \quad (1.1.36)$$

Так что имеем

$$R_1 > R_2, \quad s \in (1; s^*),$$

$$R_1 < R_2, \quad s \in (s^*, +\infty),$$

что доказывает 3. Наконец, при $s = s^*$ радиусы окружностей совпадают, что завершает доказательство утверждения 2.

Интересно отметить, что максимальное значение функция H принимает в точке Q_1 . При этом радиусы окружностей различны в случае $a \neq -1$ и равны

$$R_1 = \frac{a^2}{1 - a + a^2}, \quad R_2 = \frac{1}{1 - a + a^2}.$$

Параметр, соответствующий максимуму на бифуркационной кривой Π_1 имеет значение

$$s_0 = -\frac{1 + \sqrt{1 - a + a^2}}{a}. \quad (1.1.37)$$

Таким образом, как видно из (1.1.36) и (1.1.37) положение точки Q_1 на бифуркационной кривой Π_1 совпадает с точкой Q_2 ($s_0 = s^*$) только в случае равной по величине и противоположной интенсивности $a = -1$ (см. бифуркационную диаграмму на рис. 1.5 и динамику вихрей на вставке б) к этому рисунку). При $a \neq -1$ точки Q_1 и Q_2 различны. Утверждение 2 при этом гарантирует нам, что при заданном значении a найдется точка на бифуркационной кривой Π_1 и, следовательно, значения констант интегралов H и F , при которых вихри движутся с одинаковой угловой скоростью по одной окружности, находясь на концах ее диаметра. Данная ситуация изображена на вставках б) рисунков 1.2, 1.5, 1.7.

Докажем 4. Для этого рассмотрим разность квадратов радиусов (1.1.35):

$$R_2'^2 - R_1'^2 = \frac{(at + 1)(t^2 - 1)}{t(a + t)}. \quad (1.1.38)$$

Из (1.1.38) видно, что при значениях $a \in (-\infty; -1)$ и $t \in (\frac{1}{|a|}; 1)$, а также при $a \in (-1; 0)$ и $t \in (1; \frac{1}{|a|})$, которые определяют параметризацию бифуркационной кривой Π_2 во всем рассматриваемом диапазоне изменения параметра a , выражение $R_2'^2 - R_1'^2$ имеет отрицательный знак и нигде не обращается в ноль. Это означает, что вихри в прообразе бифуркационной ветви Π_2 также движутся по концентрическим окружностям с центром в центре круга, находятся при этом на одном диаметре по одну сторону от центра на расстояниях R_1' и R_2' . При любом значении отношения интенсивностей a радиусы различны и $R_2' < R_1'$. Такие движения изображены на вставках d) рисунков 1.2 и 1.7.

Для доказательства утверждения 5 достаточно исследовать выражение (1.1.38) на экстремум. Для нахождения корня производной мы получаем уравнение (1.1.27), которое отвечает точке перегиба Q_3 (см. рис.1.2,1.3, 1.7, 1.8). Так как расстояние (1.1.38) является непрерывной функцией и достигает на асимптотах минимального нулевого значения, то корню уравнения (1.1.27) соответствует максимальное значение (1.1.38). \square

Рассмотрим динамику вихрей для значений констант интегралов H и F , соответствующих точке внутри камеры бифуркационной диаграммы. Как известно, такое решение должно принадлежать регулярному тору Лиувилля и являться всюду плотной его обмоткой. Картина такого движения представлена на рис. 1.9 и рис. 1.10.

Этим решениям отвечают движения, при которых вихри равномерно движутся по концентрическим окружностям и находятся на прямой, проходящей через центр окружности. Интересно отметить, что в работе [142] рассмотрены динамические системы, описывающие движение точечных вихрей в идеальной жидкости внутри и вне круга. Гамильтониан (1.1.10) совпадает с точностью до одного слагаемого с гамильтонианом, приведенном в работе [142]. Там же

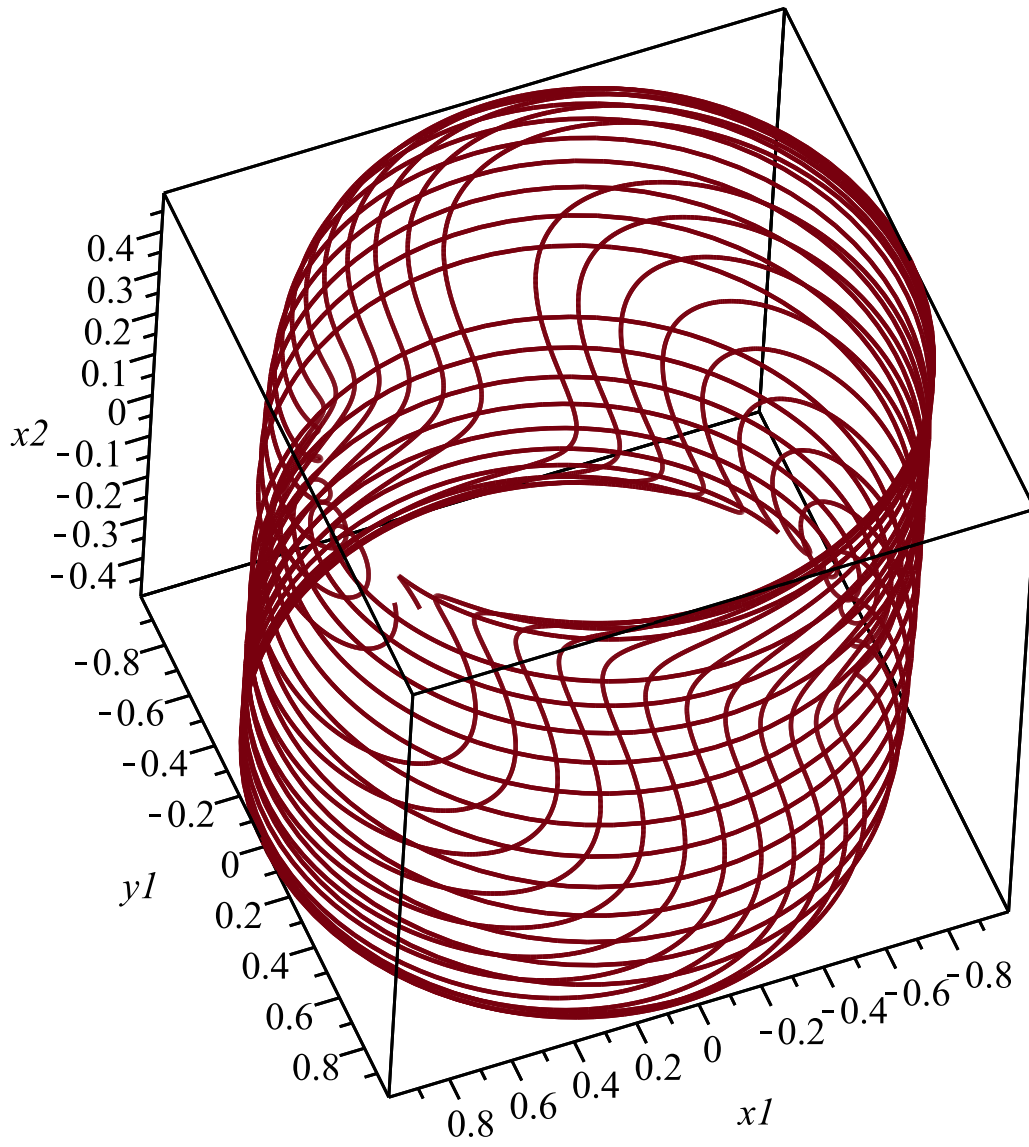


Рис. 1.10. Обмотка тора Лиувилля.

указаны различные фазовые портреты системы, которые определяются количеством и типом устойчивости стационарных решений. Результаты по устойчивости [142], полученные с помощью компьютерного моделирования, согласуются с нашим анализом.

1.1.6. Динамика двух вихрей в идеальной жидкости

Отметим, что в работе [142] были подробно рассмотрены и систематизированы результаты решения задач о движении точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости внутри и вне круговой области, рассмотрены интегрируемые случаи, проанализирована их устойчивость, а также дана картина более общей хаотической динамики, проявляющейся при добавлении к интегрируемым конфигурациям вихрей набегающего потока идеальной жидкости.

Одной из основных целей данного раздела является сравнение результатов бифуркационного анализа и динамических эффектов в двух случаях: динамики вихрей в классической идеальной жидкости и динамики вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате.

Для указанного выше сравнения рассмотрим задачу [142], подобную по постановке, задаче, изложенной в разделах 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.5. Как и ранее, мы исследуем динамику двух вихревых нитей в классической идеальной несжимаемой жидкости, которая помещена внутрь кругового цилиндра радиуса R , имеющего гладкие непроницаемые стенки. Нити параллельны образующей цилиндра, следовательно задача существенно двумерна и всюду далее мы говорим о движении точечных вихрей в круговой области.

Для вывода уравнения движения N точечных вихрей необходимо найти полную функцию тока жидкости, которая удовлетворяет уравнению Пуассона и граничному условию, следующему из условия непротекания жидкости

$$\begin{aligned}\Delta\Psi &= -\sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(z - z_i(t)), \\ \Psi(z)|_{|z|=R} &= \text{const},\end{aligned}\tag{1.1.39}$$

где, как и ранее, Γ_i – интенсивность i -го вихря, $z_i(t)$ – комплексная координата вихря, $\delta(x)$ – обобщенная функция Дирака. Решая краевую задачу (1.1.39) методом зеркальных отражений [103], мы должны добавить N вихрей-изображений, являющихся образами исходных при отображении инверсии относительно границы области (образы имеют интенсивность противоположную исходным)

$$\Gamma'_i = -\Gamma_i, \quad z'_k = \frac{R^2}{z_k}.$$

Выписывая комплексный потенциал течения для системы $2N$ вихрей [69]

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{i=1}^N \Gamma_i \ln(z - z_i) - \sum_{i=1}^N \Gamma_i \ln \left(z - \frac{R^2}{z_k} \right) \right), \quad (1.1.40)$$

и функцию тока

$$\Psi = \text{Im}(W(z)),$$

с помощью формулы Гельмгольца [69] (вычитая «самодействие» вихря из скорости частиц жидкости в точке нахождения вихря), можно получить уравнения движения вихрей

$$\dot{z}_i = \lim_{z \rightarrow z_i} \left(\frac{dF}{dz} - \frac{\Gamma_i}{2\pi i} \frac{1}{z - z_i} \right). \quad (1.1.41)$$

Используя выражение комплексного потенциала (1.1.40) в (1.1.41), окончательно получаем

$$\dot{z}_i = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{\Gamma_k}{z_i - z_k} + \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k \bar{z}_k}{R^2 - z_i \bar{z}_k} \right). \quad (1.1.42)$$

Уравнения (1.1.42) можно представить в гамильтоновой форме [133] с канонической скобкой Пуассона

$$\{z_k, \bar{z}_j\} = -\frac{2i}{\Gamma_k} \delta_{kj} \quad (1.1.43)$$

и гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \left(\sum_{k,j=1, k \neq j}^N \Gamma_k \Gamma_j \ln |z_k - z_j| - \sum_{k,j=1}^N \Gamma_k \Gamma_j \ln \left| \frac{1}{R^2 - z_k \bar{z}_j} \right| \right). \quad (1.1.44)$$

Как и в случае системы вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате, система (1.1.42), вследствие инвариантности относительно поворотов вокруг центра круга, обладает дополнительным первым интегралом – *моментом завихренности*

$$F = \sum_{j=1}^N \Gamma_j z_j \bar{z}_j. \quad (1.1.45)$$

Для сравнения с системой (1.1.3), описывающей движение вихрей в конденсате, перейдем к декартовым координатам вихрей. Рассмотрим (1.1.42) в интересующем нас случае $N = 2$ точечных вихрей внутри круговой области [142]. Пуассонова структура (1.1.43) принимает вид (1.1.6). Далее, переходя с помощью (1.1.9) в выражениях (1.1.44), (1.1.45) к безразмерным декартовым координатам вихрей и отношению интенсивностей, а также отбрасывая несущественные константы, получим

$$\begin{aligned} H_1 &= \ln [1 - (x_1^2 + y_1^2)] + a^2 \ln [1 - (x_2^2 + y_2^2)] - a \ln [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] + \\ &+ a \ln [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1^2 + y_1^2 - 1)(x_2^2 + y_2^2 - 1)], \\ F &= (x_1^2 + y_1^2) + a(x_2^2 + y_2^2). \end{aligned} \quad (1.1.46)$$

Наконец, обобщая случай вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате (1.1.10) и случай вихрей в идеальной жидкости (1.1.46), мы можем рассмотреть следующее однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтонианов

$$\begin{aligned} H_\varepsilon &= \ln [1 - (x_1^2 + y_1^2)] + a^2 \ln [1 - (x_2^2 + y_2^2)] - a \ln [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] + \\ &+ a\varepsilon \ln [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1^2 + y_1^2 - 1)(x_2^2 + y_2^2 - 1)], \end{aligned} \quad (1.1.47)$$

где с помощью ε обозначен параметр деформации. При $\varepsilon = 0$ мы получаем гамильтониан (1.1.10), описывающий динамику вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате, при $\varepsilon = 1$ имеем функцию Гамильтона (1.1.46), соответствующую системе двух вихрей в идеальной жидкости. Таким образом, гамильтониан (1.1.46) может рассматриваться как возмущение гамильтониана (1.1.10).

Можно убедиться, что обобщенный гамильтониан (1.1.47) находится в инволюции с дополнительным интегралом F (1.1.46) относительно скобки (1.1.6), H_ε и F почти всюду независимы. Следовательно, при любом конечном значении параметра деформации мы имеем вполне интегрируемую по Лиувиллю гамильтонову систему с двумя степенями свободы.

Фазовым пространством системы является множество \mathcal{P} (1.1.7). Найдем критическое множество этой системы. Для этого, как и в разделе 1.1.4, рассмотрим соответствующее отображение момента

$$\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

полагая $(h_\varepsilon, f) = \mathcal{F}(\zeta) = (H_\varepsilon(\zeta), F(\zeta))$, $\forall \zeta \in \mathcal{P}$. Снова, как и в случае конденсата, обозначим через \mathcal{C} совокупность всех критических точек отображения момента, в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(\zeta) < 2$. Образ критического множества при отображении момента $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P})$ является бифуркационной диаграммой.

Перейдем с помощью (1.1.15) к полярным координатам вихрей. Условие падения ранга отображения момента приводит к совокупности двух следующих систем. Первая система

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + \pi, \\ F_4 = 0, \end{cases} \quad (1.1.48)$$

и вторая

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2, \\ F_5 = 0, \end{cases} \quad (1.1.49)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} F_4 = & [(a + \varepsilon)r_2^2 - \varepsilon]r_1^5 + [(a + \varepsilon - 1)r_2^3 + (a - \varepsilon + 1)r_2]r_1^4 + \{[a(1 - \varepsilon) - 1]r_2^4 + \\ & + [\varepsilon(a - 1) - a]r_2^2 + \varepsilon + 1\}r_1^3 + \{-(a\varepsilon + 1)r_2^5 + [\varepsilon(a - 1) + 1]r_2^3 + (\varepsilon - 2a)r_2\} \times \\ & \times r_1^2 + \{[a(\varepsilon - 1) - 1]r_2^4 - (a\varepsilon - 2)r_2^2 - 1\}r_1 + [\varepsilon r_2^4 - (\varepsilon + 1)r_2^2 + 1]ar_2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
F_5 = & [(a + \varepsilon)r_2^2 - \varepsilon]r_1^5 - [(a + \varepsilon - 1)r_2^3 + (a - \varepsilon + 1)r_2]r_1^4 + \{[a(1 - \varepsilon) - 1]r_2^4 + \\
& + [\varepsilon(a - 1) - a]r_2^2 + \varepsilon + 1\}r_1^3 - \{-(a\varepsilon + 1)r_2^5 + [\varepsilon(a - 1) + 1]r_2^3 + (\varepsilon - 2a)r_2\} \times \\
& \times r_1^2 + \{[a(\varepsilon - 1) - 1]r_2^4 - (a\varepsilon - 2)r_2^2 - 1\}r_1 - [\varepsilon r_2^4 - (\varepsilon + 1)r_2^2 + 1]ar_2.
\end{aligned}$$

Как и прежде в разделе 1.1.3, замыкание множества решений систем (1.1.48) и (1.1.49) является критическим множеством рассматриваемой системы.

Наконец, мы можем получить неявно заданную бифуркационную диаграмму отображения момента системы двух вихрей в идеальной жидкости, ограниченной круговым цилиндром. Запишем гамильтониан H_ε и дополнительный интеграл F в полярных координатах

$$\begin{aligned}
H_\varepsilon = & \ln [1 - r_1^2] + a^2 \ln [1 - r_2^2] - a \ln [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] + \\
& + a\varepsilon \ln [1 + r_1^2r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)], \\
F = & r_1^2 + ar_2^2.
\end{aligned}$$

Тогда получим, что бифуркационная диаграмма Σ отображения момента \mathcal{F} состоит из неявно заданных кривых

$$\Pi_1 : \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + \pi, \\ F_4 = 0, \\ h = H_\varepsilon, \\ f = F, \end{cases} \quad (1.1.50)$$

и

$$\Pi_2 : \begin{cases} \theta_1 = \theta_2, \\ F_5 = 0, \\ h = H_\varepsilon, \\ f = F. \end{cases} \quad (1.1.51)$$

Построенная бифуркационная диаграмма (1.1.50), (1.1.51) для $a < 0$ и $\varepsilon = 1$ имеет такой же вид (Рис. 1.1,1.4,1.6), что и в случае системы вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате. Особенности диаграмм, описанные в разделе 1.1.4, имеют место и для бифуркационных диаграмм в случае вихрей в идеальной жидкости. Более того, динамика вихрей в конденсате, изображенная на Рис. 1.2,1.5,1.7 и описанная в разделе 1.1.5, имеет качественно тот же характер и в случае идеальной жидкости, что совпадает с результатами, изложенными в работе [142].

Для иллюстрации того, что бифуркационные диаграммы в случае вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате и в идеальной жидкости имеют аналогичные особенности сформулируем и докажем следующие утверждения.

Теорема 5. *При $a = -1$ бифуркационная диаграмма в случае идеальной жидкости, как и в случае бозе-эйнштейновского конденсата, не содержит ветви Π_2 , а ветвь Π_1 обладает симметрией относительно оси энергии.*

Доказательство. Подставляя $a = -1$ и $\varepsilon = 1$ в выражение для F_5 , приходим к уравнению

$$(r_1 + r_2)^4 - 2(r_1 + r_2)^2 - 4(r_1 + r_2)^2 r_1 r_2 + 5r_1 r_2 + 3r_1^2 r_2^2 - r_1^3 r_2^3 + 1 = 0,$$

которое не имеет решений кроме пар $(1, 1)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$, что означает отсутствие ветви Π_2 .

Для доказательства симметрии ветви Π_1 , подставляя $a = -1$ и $\varepsilon = 1$ в (1.1.50), приходим к следующей системе

$$\Pi_1 : \begin{cases} (r_1 + r_2)^4 - 2(r_1 + r_2)^2 - 4(r_1 + r_2)^2 r_1 r_2 + 3r_1 r_2 + 3r_1^2 r_2^2 + r_1^3 r_2^3 + 1 = 0, \\ h = \ln(1 - r_1^2) + \ln(1 - r_2^2) + \ln(r_1 + r_2)^2 - \ln(1 + r_1 r_2)^2, \\ f = r_1^2 - r_2^2, \end{cases} \quad (1.1.52)$$

Из системы (1.1.52) видно, что при замене r_1 на r_2 , а r_2 на r_1 первые два уравнения остаются неизменными, а третье — меняет знак, что и означает симметрию

ветви Π_1 относительно оси h . □

Теорема 6. *Для произвольного отрицательного отношения интенсивностей $a \in (-\infty; 0)$ найдется точка на бифуркационной кривой Π_1 , такая что в ее прообразе особое периодическое движение происходит при $r_1(t) = r_2(t)$.*

Доказательство. Подставляя $r_1 = r_2$ и $\varepsilon = 1$ в выражение для F_4 , получим следующее уравнение

$$r_2(r_2 - 1)(r_2 + 1)(r_2^4 + 4r_2^2 - 1)(a - 1) = 0,$$

корни которого определяют возможные радиусы движения. Первые три множителя соответствуют движениям, при котором вихри достигают стенок цилиндра или оба вихря сливаются в центре цилиндра. Четвертый множитель не зависящий от a обладает единственным вещественным корнем $r_2 = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$ из интервала $(0, 1)$, который соответствует искомому движению. Интересно, что при любом значении отношения интенсивностей движение будет происходить по окружности одного и того же радиуса. При этом на бифуркационной ветви Π_1 точка Q_2 , в прообразе которой будет происходить критическое движение вихрей по окружности такого радиуса, располагается в различных местах в зависимости от значения a и имеет координаты

$$h = (a^2 + a + 1) \ln(3 - \sqrt{5}) - a \ln[2(\sqrt{5} - 2)], f = \sqrt{\sqrt{5} - 2}(a + 1).$$

□

Подытоживая результаты сравнения бифуркационного и качественного анализа динамики отметим, что система двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате является исключительно важной, так как, с одной стороны позволяет провести исследования фазовой топологии и динамики вихрей до конца и получить многие условия в аналитическом виде, а с другой стороны сохраняет практически все особенности бифуркационной диаграммы и динамические

эффекты, наблюдаемые в системе двух вихрей в идеальной жидкости, исследования которой часто возможны только численно. Система вихрей в конденсате является своего рода модельной для изучения важного случая движения вихрей в идеальной жидкости. Исследования вихрей в конденсате дают, во-первых эвристические указания для поиска соответствующих свойств в системе вихрей в идеальной жидкости, а во-вторых часто указывают на способ доказательства аналогичных результатов в более сложном классическом случае.

1.1.7. Краткие итоги раздела 1.1

Интересно также изучить бифуркации, возникающие в бозе-эйнштейновском конденсате при интенсивностях вихрей одного знака (случай $a > 0$) и провести сравнение с соответствующими результатами для идеальной жидкости, полученными в [142]. Этому будет посвящен следующий раздел данной главы. В дальнейшем естественно попытаться распространить методы, использованные в данном разделе в частности и в этой главе в целом, на системы трех вихрей на плоскости и сфере.

Таким образом, в данном разделе исследована фазовая топология задачи двух разноименных вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате, удерживаемом в цилиндрической ловушке. Построены бифуркационные диаграммы в наиболее содержательных случаях. Исследованы перестройки торов Лиувилля. Указаны виды критических движений. Описана динамика вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате. Приведено однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтонианов, описывающее обе системы при частных значениях параметра деформации.

Необходимо отметить, что в реальных физических системах, содержащих бозе-эйнштейновский конденсат, всегда присутствуют энергетические потери, которые приводят к необходимости применения диссипативных моделей. В этой связи актуальной представляется задача о динамике систем, состоящих структур более сложных чем точечные вихри. Такими объектами являются вихреи-

сточники, динамика которых описана, например в [143], [144].

1.2. Бифуркационный анализ динамики двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате. Случай интенсивностей одинаковых знаков

В данном разделе, как было указано выше в разделе 1.1.7, рассмотрена система двух точечных вихрей, имеющих интенсивности одинакового знака, в бозе-эйнштейновском конденсате, заключенном в ловушку. Как и ранее уравнения движения системы двух вихрей записаны в гамильтоновой форме и показана ее интегрируемость по Лиувиллю. Построена бифуркационная диаграмма отображения момента и проведен анализ бифуркаций торов Лиувилля в случае интенсивностей одинаковых знаков, указаны виды критических движений. С помощью явного аналитического описанию бифуркационного множества указаны некоторые динамические эффекты, которые свойственны рассматриваемой системе одноимённых вихрей. Проведено качественное сравнение фазовой топологии и динамики систем двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате и классической идеальной жидкости. Результаты данного раздела опубликованы в работе [34].

1.2.1. Постановка задачи

Вихри и вихревые решетки в бозе-эйнштейновском конденсате, полученном на ультрахолодных атомах и в современных объектах физики конденсированного состояния, описаны, например, в [128]. Активно изучаются, как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения, уединенные вихри и система из двух вихрей [131].

В настоящем разделе рассматривается система двух вихревых нитей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключенном в цилиндрической ловушке (см.

[125] и указанную в ней литературу). Нити параллельны образующей кругового цилиндра, поэтому очевидно, что задача двумерна. Основной целью данного раздела является анализ фазовой топологии этой задачи при интенсивностях вихрей одинакового знака.

Как и в работе [31], динамика системы двух вихрей описывается системой дифференциальных уравнений относительно координат вихревых нитей. В [31] показано, что уравнения движения двух точечных вихрей могут быть представлены в гамильтоновой форме

$$\dot{\zeta} = \{\zeta, H\} \quad (1.2.1)$$

с функцией Гамильтона

$$H = \ln[1 - (x_1^2 + y_1^2)] + a^2 \ln[1 - (x_2^2 + y_2^2)] - a \ln[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]. \quad (1.2.2)$$

Здесь через (x_k, y_k) обозначены декартовы координаты k -ого вихря ($k = 1, 2$), фазовый вектор ζ имеет координаты $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$, параметр a обозначает отношение интенсивностей $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$. Фазовое пространство \mathcal{P} задается в виде прямого произведения двух открытых кругов радиуса 1

$$\mathcal{P} = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) : x_1^2 + y_1^2 < 1, x_2^2 + y_2^2 < 1\}.$$

Пуассонова структура на фазовом пространстве \mathcal{P} задается в стандартном виде

$$\{x_i, y_j\} = -\frac{1}{\Gamma_i} \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Система (1.2.1) допускает один дополнительный первый интеграл движения – *момент завихренности*

$$F = x_1^2 + y_1^2 + a(x_2^2 + y_2^2).$$

Функция F вместе с гамильтонианом H образуют на \mathcal{P} полный инволютивный набор интегралов системы (1.2.1). Согласно теореме Арнольда–Лиувилля

можно утверждать, что компактная связная компонента интегрального многообразия $\mathcal{M} = \{H = h, F = f\}$ диффеоморфна двумерному тору. Определим *интегральное отображение* $\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$, полагая $(f, h) = \mathcal{F}(\zeta) = (F(\zeta), H(\zeta))$. Отображение \mathcal{F} принято также называть *отображением момента*. Обозначим через \mathcal{C} совокупность всех критических точек отображений момента, то есть точек, в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(x) < 2$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P})$ называется *бифуркационной диаграммой*.

Топологические методы исследования устойчивости различных движений интегрируемых гамильтоновых систем [145] активно используются как в негोलомной механике [146], так и в динамике вихрей [142], [19], [26]. Основную роль в топологическом анализе играет бифуркационная диаграмма Σ отображения момента \mathcal{F} . В работе [31] аналитически исследована бифуркационная диаграмма для задачи о движении системы двух точечных вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате (1.2.1) в случае интенсивностей противоположных знаков ($a < 0$). В настоящем разделе будет аналитически получена бифуркационная диаграмма системы (1.2.1), когда параметр отношения интенсивностей a имеет положительный знак.

Для нахождения бифуркационной диаграммы мы используем метод критических подсистем, развитый М. П. Харламовым при исследовании фазовой топологии интегрируемых задач динамики твердого тела [147]. При анализе устойчивости невырожденных (в смысле теории особенностей) траекторий бифуркационная диаграмма позволяет быстрым и наглядным образом определять устойчивость в тех случаях, когда использование общих стандартных методов является довольно затруднительным. В качестве приложения приводится анализ устойчивости критических траекторий (т.е. невырожденных особенностей ранга 1 отображения момента) путем определения типа траектории (эллиптический/гиперболический) для каждой кривой из бифуркационного множества.

1.2.2. Критические подсистемы и бифуркационная диаграмма отображения момента

Определим следующие полиномиальные выражения F_k от фазовых переменных

$$F_1 = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

$$F_2 = (x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2)(x_2^2 + y_2^2) - x_2^2,$$

$$F_3 = x_1(x_2^2 + y_2^2)(x_2 + a x_1) - x_2(a x_2 + x_1)$$

и обозначим через \mathcal{N}_1 замыкание множества решений системы

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \tag{1.2.3}$$

а через \mathcal{N}_2 замыкание множества решений системы

$$F_1 = 0, \quad F_3 = 0. \tag{1.2.4}$$

Тогда справедлива теорема.

Теорема 7. *Множество \mathcal{C} критических точек отображения момента \mathcal{F} исчерпывается множеством решений совокупности систем (1.2.3) и (1.2.4). Множества \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 являются двумерными инвариантными подмногообразиями системы (1.2.1) с гамильтонианом (1.2.2).*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения теоремы необходимо найти точки фазового пространства, в которых ранг отображения момента не максимален. С помощью прямого вычисления можно убедиться, что матрица Якоби отображения момента имеет нулевые миноры второго порядка в точках $\zeta \in \mathcal{P}$, координаты которых удовлетворяют уравнениям системы (1.2.3) и (1.2.4), откуда $\mathcal{C} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$. В инвариантности соотношений (1.2.3) и (1.2.4) можно убедиться с помощью следующих цепочек верных равенств

$$\dot{F}_1 = \{F_1, H\}_{F_1=0} = \sigma_1 F_2 F_3,$$

$$\dot{F}_2 = \{F_2, H\}_{F_1=0} = \sigma_2 F_2,$$

$$\dot{F}_3 = \{F_3, H\}_{F_1=0} = \sigma_3 F_3,$$

где σ_k некоторые полиномиальные функции от фазовых переменных. \square

Для определения бифуркационной диаграммы Σ удобно перейти к полярным координатам с помощью соотношений

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1, y_1 = r_1 \sin \theta_1,$$

$$x_2 = r_2 \cos \theta_2, y_2 = r_2 \sin \theta_2.$$

Первое из уравнений систем (1.2.3) и (1.2.4) принимает вид $\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$, т.е. $\theta_1 - \theta_2 = 0$ и $\theta_1 - \theta_2 = \pi$. Первая возможность, в отличие от динамики двух вихрей интенсивностей разных знаков [31], не реализуется ни при каком положительном значении параметра отношения интенсивностей a . Для второй возможности, т.е. когда $\theta_1 = \theta_2 + \pi$, параметризацию критического множества \mathcal{C} можно представить в виде объединения двух критических подсистем \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 в следующем виде

$$\mathcal{N}_1 : \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + \pi, \\ r_1(s) = \frac{1 + 2s}{s^2 + s + 1}, \quad r_2(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 + s + 1}, \quad s \in [1, +\infty), \end{cases} \quad (1.2.5)$$

и

$$\mathcal{N}_2 : \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 + \pi, \\ r_1(t) = \sqrt{\frac{at - 1}{t(a - t)}}, \quad r_2(t) = \sqrt{\frac{t(at - 1)}{a - t}}, \\ t \in (1; \frac{1}{a}), a \in (0; 1); \quad t \in (\frac{1}{a}; 1), a \in (1; +\infty); \\ r_1 = r_2, \quad a = 1. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

С учетом параметрического представления критического множества \mathcal{C} в виде (1.2.5) и (1.2.6) получаем следующую теорему.

Теорема 8. *Бифуркационная диаграмма Σ отображения момента \mathcal{F} в задаче о движении системы двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате состоит из кривых Π_1 и Π_2 , которые имеют следующее явное параметрическое*

представление

$$\Pi_1 : \begin{cases} f(s) = \frac{(1+2s)^2 + a(s^2-1)^2}{(1+s+s^2)^2}, \\ h(s) = \ln \left[\frac{s(s+2)(s^2-1)}{(1+s+s^2)^2} \right] + a^2 \ln \left[\frac{s(s+2)(1+2s)}{(1+s+s^2)^2} \right] - \\ - 2a \ln \left[\frac{s(s+2)}{1+s+s^2} \right], \quad s \in (1; +\infty), \end{cases} \quad (1.2.7)$$

и

$$\Pi_2 : \begin{cases} f(t) = \frac{(at-1)(at^2+1)}{t(a-t)}, \\ h(t) = \ln \left[\frac{1-t^2}{t(a-t)} \right] + a^2 \ln \left[\frac{a(1-t^2)}{a-t} \right] - a \ln \left[\frac{(at-1)(t+1)^2}{t(a-t)} \right], \\ t \in (1; \frac{1}{a}), a \in (0; 1); \quad t \in (\frac{1}{a}; 1), a \in (1; +\infty). \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Бифуркационная кривая Π_1 является образом критического множества \mathcal{N}_1 , а кривая Π_2 – образом \mathcal{N}_2 .

Отдельно приведем бифуркационную диаграмму для равных положительных интенсивностей, т.е. когда параметр отношения интенсивностей a равен 1.

Следствие 1. При $a = 1$ бифуркационная диаграмма Σ отображения момента \mathcal{F} принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_1 : h &= \ln(1-f), \quad \frac{2}{3} \leq f < 1; \\ \Pi_2 : h &= \ln \left[\frac{(2-f)^2}{8f} \right], \quad 0 < f < 2. \end{aligned}$$

На рис. 1.11 и рис. 1.12 приведены примеры бифуркационной диаграммы Σ для случаев $a \neq 1, a > 0$ и $a = 1$ соответственно. Прежде всего стоит отметить, что, в отличие от динамики двух вихрей разного знака, обе критические подсистемы соответствуют движению вихрей, расположенным на отрезке диаметра по разные стороны от центра.

Как и в случае $a < 0$ (см. раздел 1.1, [31]) при $a > 0$ диаграмма имеет четыре вертикальных асимптоты $f = 0, f = 1, f = a$ и $f = 1 + a$ (см. рис. 1.11).

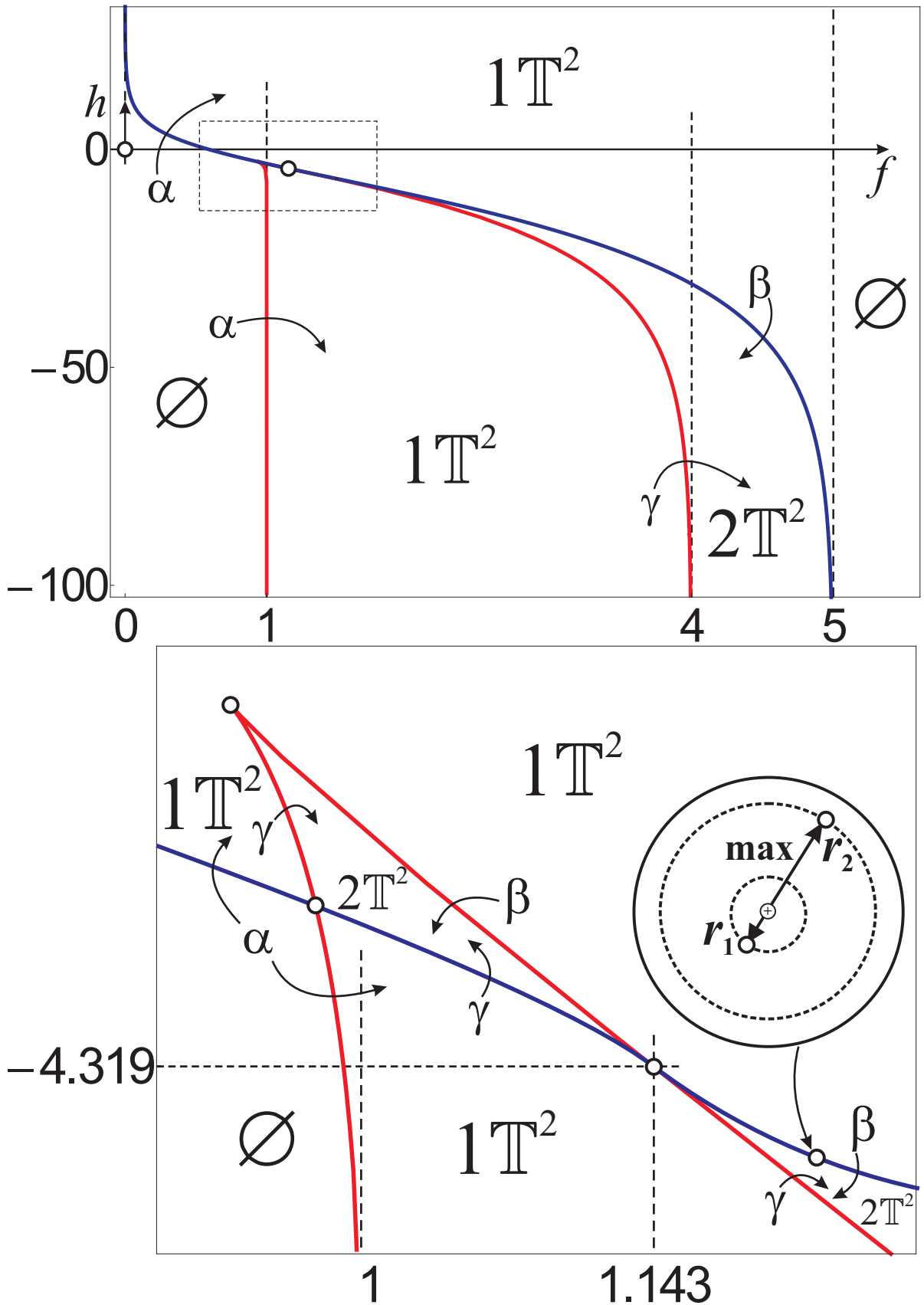


Рис. 1.11. Бифуркационная диаграмма Σ для $a = 4$ и ее увеличенный фрагмент.

Ветвь Π_1 имеет две асимптоты $f = 1$ и $f = a$. Таким критическим точкам бифуркационной диаграммы соответствуют траектории вихрей, одна из которых

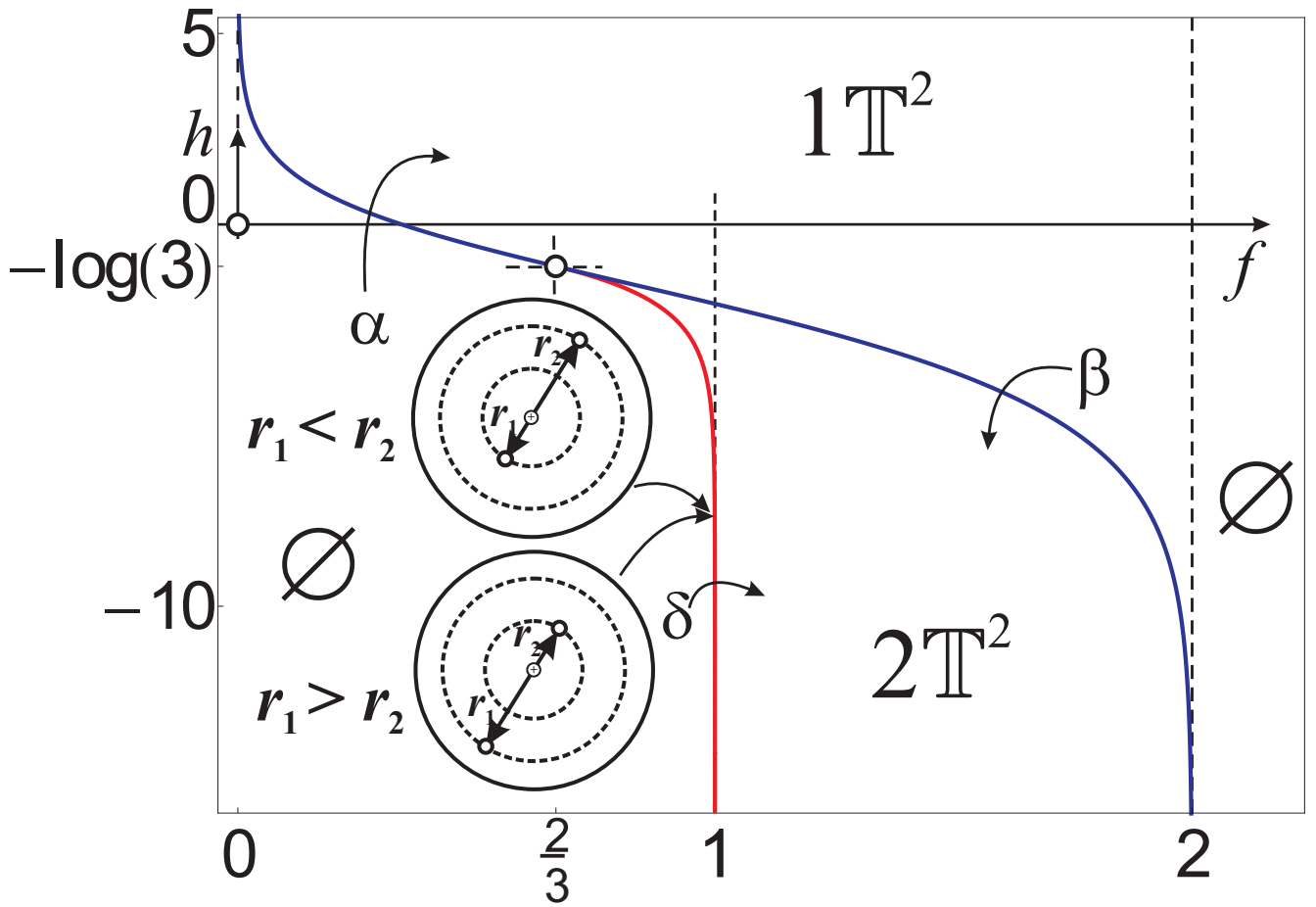


Рис. 1.12. Бифуркационная диаграмма Σ для $a = 1$.

стремится в центр, а вторая приближается к границе области. Другая ветвь Π_2 также имеет две асимптоты $f = 0$ и $f = 1 + a$. Этим точкам бифуркационной диаграммы в прообразе отображения момента соответствуют критические движения вихрей, в первом случае ($f = 0$) одновременно стремящихся в центр области, а во втором случае ($f = 1 + a$) одновременно приближающихся к границе области.

Важным свойством бифуркационной ветви Π_2 , как и в случае разноименных интенсивностей вихрей, является наличие точки перегиба. При данных соотношениях постоянных интегралов (см. увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы, изображенный на рис. 1.11) реализуется движение, при котором разность радиусов орбит вихрей является максимальной. Также, в рассматриваемом случае вихрей одноименной интенсивности наблюдается касание бифуркационных кривых (см. увеличенный фрагмент рис. 1.11), аналогичное

тому, которое было обнаружено при исследовании бифуркационной диаграммы интегрируемого случая Адлера-ван Мёрбеке [27].

Наконец, стоит отметить еще одно важное отличие бифуркационной диаграммы рассматриваемого случая ($a > 0$) от ситуации ($a < 0$). Напомним (см. [31]), что в случае равной по модулю интенсивности ($a = -1$) вторая ветвь бифуркационной диаграммы не существует. При ($a = 1$), напротив, существуют обе ветви бифуркационной диаграммы, кроме того наблюдается слияние двух дуг ветви Π_1 , разделенных точкой возврата. В механическом смысле это означает, что реализуются два критических движения на орбитах разных радиусов $r_1 < r_2$ и $r_1 > r_2$ (см. рис. 1.12). Однако в силу одинаковых интенсивностей эти два движения идентичны и соответствуют двум совпадающим точкам левой и правой части ветви Π_1 .

Бифуркационная диаграмма Σ разбивает плоскость параметров первых интегралов (f, h) на области, в каждой из которых указано в прообразе отображения момента количество связных компонент (один тор, либо два тора). На рис. 1.11 и рис. 1.12 буквы α , β , γ и δ соответствуют следующим переходам [137]:

$$\begin{aligned} \alpha : \emptyset \rightarrow \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{T}^2; \quad \beta : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1) \rightarrow 2\mathbb{T}^2; \\ \gamma : \mathbb{T}^2 \rightarrow (\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{T}^2) \rightarrow 2\mathbb{T}^2; \quad \delta : \emptyset \rightarrow 2\mathbb{S}^1 \rightarrow 2\mathbb{T}^2. \end{aligned}$$

Здесь через $\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1)$ обозначено интегральное многообразие, которое представляет собой произведение “восьмерки” на окружность [137].

1.2.3. Приложение

В качестве приложения исследуем характер устойчивости критических траекторий (1.2.5) и (1.2.6). При этом достаточно определить тип (эллиптический/гиперболический) в какой-нибудь одной из точек (f, h) гладкой ветви кривой Σ [145].

Тип критической точки x_0 ранга 1 в интегрируемой системе с двумя степенями свободы вычисляется следующим образом. Необходимо указать первый

интеграл F , такой, что $dF(x_0) = 0$ и $dF \neq 0$ в окрестности этой точки. Точка x_0 оказывается неподвижной для гамильтонова поля $\text{sgrad } F$ и можно вычислить линеаризацию этого поля в данной точке – симплектический оператор A_F в точке x_0 . Этот оператор будет иметь два нулевых собственных числа, оставшийся сомножитель характеристического многочлена имеет вид $\mu^2 - C_F$, где $C_F = \frac{1}{2}\text{trace}(A_F^2)$. При $C_F < 0$ получим точку типа “центр” (соответствующее периодическое решение имеет эллиптический тип, является устойчивым периодическим решением в фазовом пространстве, пределом концентрического семейства двумерных регулярных торов), а при $C_F > 0$ получим точку типа “седло” (соответствующее периодическое решение имеет гиперболический тип, существуют движения, асимптотические к этому решению, лежащие на двумерных сепаратрисных поверхностях).

Предложение 1. *Тип критической траектории \mathcal{N}_1 определяется знаком квадрата характеристического показателя*

$$\mu^2 = R_1 R_2,$$

где

$$R_1 = (1 + 2s)^2 - a(s^2 - 1)^2,$$

$$R_2 = a(s^2 - 1)(s^2 + 4s + 1) - (1 + 2s)(2s^2 + 2s - 1).$$

Параметр s связан с постоянными f и h общих интегралов F и H зависимостью (1.2.7). Критическая траектория \mathcal{N}_1 имеет тип “центр” при $\mu^2 < 0$ и тип “седло” при $\mu^2 > 0$. Значения параметра s , при котором многочлены R_1 и R_2 обращаются в нуль, отвечают точке касания бифуркационных кривых Π_1 и Π_2 и точке возврата кривой Π_1 соответственно.

Предложение 2. *Тип критической траектории \mathcal{N}_2 определяется знаком квадрата характеристического показателя*

$$\mu^2 = R_3 R_4,$$

где

$$R_3 = 1 - at^2,$$

$$R_4 = a^2t^4 - 2a^2|a|t^3 + a(a-1)t^2 + 2\text{sign}(a)t - a.$$

Параметр t связан с постоянными f и h общих интегралов F и H зависимостью (1.2.8). Критическая траектория \mathcal{N}_2 имеет тип “центр” при $\mu^2 < 0$ и тип “седло” при $\mu^2 > 0$. Значения параметра t , при котором многочлены R_3 и R_4 обращаются в нуль, отвечают при $a > 0$ точке касания бифуркационных кривых Π_1 и Π_2 , а при $a < 0$ точке возврата кривой Π_2 соответственно.

В заключении отметим, что результаты, полученные аналитически в разделе 1.1 и данном разделе, во-первых, описывают динамику двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате при любом отношении интенсивностей вихрей, во-вторых, позволяют исследовать перестройки торов Лиувилля, в-третьих, определяют тип устойчивости критических движений. Кроме того, бифуркационная диаграмма отображения момента системы вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате при интенсивностях вихрей одного знака ($a > 0, a \neq 1$) имеет существенное отличие от диаграммы системы вихрей в идеальной жидкости, полученной численно в [142].

1.3. Краткие итоги главы 1

В заключение перечислим основные результаты полученные в данной главе. Рассмотрена динамическая система, описывающая динамику двух вихревых нитей в идеальной жидкости внутри полости, имеющей форму бесконечного кругового цилиндра. К данной системе приводит, во-первых, рассмотрение двух вихрей в классической идеальной жидкости, помещенной внутрь абсолютно гладкого бесконечного кругового цилиндра, а во-вторых, динамика вихревых нитей в бозе-эйнштейновском конденсате, находящемся в ловушке. Несмотря на различие гамильтонианов для вышеуказанных случаев, бифуркационные диаграммы демонстрируют много общих черт.

В первом разделе рассмотрены оба случая (вихри в конденсате и в классической идеальной жидкости) для вихрей, обладающих интенсивностями противоположных знаков. Первые подразделы посвящены вихрям в конденсате. Приведена гамильтонова форма уравнений движения и показана ее интегрируемость по Лиувиллю. Построена бифуркационная диаграмма и проведен анализ бифуркаций торов Лиувилля, указаны виды критических движений. Благодаря явному аналитическому описанию бифуркационного множества, удалось обнаружить динамические эффекты, которые свойственны рассматриваемой системе. В частности, аналитически доказано, что на одной из ветвей бифуркационной диаграммы найдется такое значение дополнительного интеграла, соответствующего моменту завихренности, при котором радиусы критических окружностей оказываются равными и вихри движутся по одной и той же окружности, находясь на противоположных концах диаметра.

Далее рассмотрена динамика вихрей в идеальной жидкости. В этом случае удалось найти аналитические выражения, задающие бифуркационную диаграмму неявно. Проведено качественное сравнение фазовой топологии и динамики систем двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате и классической идеальной жидкости. С помощью неявно аналитически заданной бифуркационной диаграммы удалось доказать существование динамических эффектов, аналогичных случаю бозе-эйнштейновского конденсата. Использование аналитических зависимостей позволило провести компьютерное моделирование динамики двух вихрей в конденсате в случае общего положения.

Одним из важнейших результатов является обнаруженное однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтонианов, которое при частных значениях параметра деформации сводится к обоим рассмотренным в данной главе случаям.

Второй раздел посвящен динамике внутри цилиндра двух вихрей, имеющих интенсивности одинакового знака. Также, как и в случае разноименных интенсивностей, приведена гамильтонова форма уравнений движения, которые

являются вполне интегрируемыми по Лиувиллю. Построена бифуркационная диаграмма отображения момента. В случае вихрей одного знака полученная бифуркационная диаграмма имеет существенные отличия от ситуации классической идеальной жидкости.

Стоит отметить, что в отличие от динамики вихрей в идеальной жидкости, исследование которой часто проводилось до этого только численно, система, описывающая поведение двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате позволяет провести исследование фазовой топологии и особенностей динамики в аналитическом виде. Обладая при этом практически всеми свойствами системы в идеальной жидкости, система вихрей в конденсате служит хорошим эвристическим инструментом для исследования классической системы.

Наконец отметим, что результаты, полученные аналитически в данной главе, описывают динамику и бифуркационную диаграмму системы двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате при любом отношении интенсивностей вихрей.

Глава 2

Топологический и качественный анализ интегрируемого случая движения твердого тела и одного вихря

В данной главе рассматривается интегрируемая гамильтонова система, описывающая движение в идеальной жидкости кругового цилиндра и вихревой нити. Построены бифуркационные диаграммы и бифуркационные комплексы в случае компактности интегрального многообразия и различной топологии симплектического листа. Обсуждаются типы движений, соответствующих бифуркационным кривым, и их устойчивость. Основные результаты, изложенные в данной главе, опубликованы в [26].

2.1. Постановка задачи

Одной из центральных проблем гидромеханики является задача движения погруженного в жидкость твердого тела. Известно огромное количество работ, посвященных различным подходам к этой проблеме.

Падение твердого тела изучалось как в работах классиков [104, 148, 149], так и современных исследователей [109, 113, 150]. Некоторые явления, например авторотация, предсказанные в этих публикациях, могут реализоваться только в вязкой жидкости. Строгое теоретическое описание таких феноменов можно получить только в рамках гидродинамических уравнений вязкой жидкости, например, уравнений Навье–Стокса, с граничными условиями на границах твердого тела и уравнениями динамики твердого тела, включающими силы и моменты, действующие на тело со стороны жидкости. В дополнении ситуация осложняется малым количеством аналитических решений, которые могут быть получены для определённой таким образом системы уравнений. С другой сто-

роны результаты численного решения таких систем обладают тем недостатком, что наблюдаемые особенности движения твердого тела выглядят скорее как экспериментальные факты и не обладают той эвристической силой как аналитических законов.

Диссипация энергии, свойственная движениям тел в вязкой среде, обусловлена не только внутренним трением, но и в том числе генерацией вихрей. Одним из первых приближений к описанию эффектов, обусловленных генерацией вихрей, является создание моделей, в которых рассматривается движение твердого тела в идеальной жидкости, содержащей постулативно введенную завихренность в виде циркуляции [151], точечных вихрей [18–21, 152] или более сложных конструкций, таких как вихревая пелена [153], вихревые дорожки, решетки и др.

В настоящей главе рассматривается задача о движении в бесконечном объеме идеальной несжимаемой жидкости кругового цилиндра и параллельной его образующей вихревой нити. Вихревая нить имеет интенсивность Γ_1 . Жидкость покоится на бесконечности. Предполагается также, что жидкость совершает постоянное циркуляционное движение вокруг цилиндра с циркуляцией Γ , в общем случае отличной от нуля (рис. 2.1).

Данная система сводится к системе с двумя степенями свободы и является интегрируемой по Лиувиллю [134]. Она представляет собой центральную проблему в теории взаимодействия твёрдого тела с точечными вихрями в плоской гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости (аналогично случаю Эйлера в динамике твердого тела, задаче Грёбли – Кирхгофа трёх вихрей и задаче Кеплера в небесной механике). Выделенность этого случая обусловлена тем, что при любом усложнении системы теряется свойство интегрируемости. Так, исследования движения кругового цилиндра и двух вихрей [118], одного вихря и цилиндра произвольной формы [135], кругового цилиндра и вихря в поле тяжести [19] демонстрируют хаотические и неинтегрируемые свойства соответствующих систем. Одной из особенностей рассматриваемой системы является

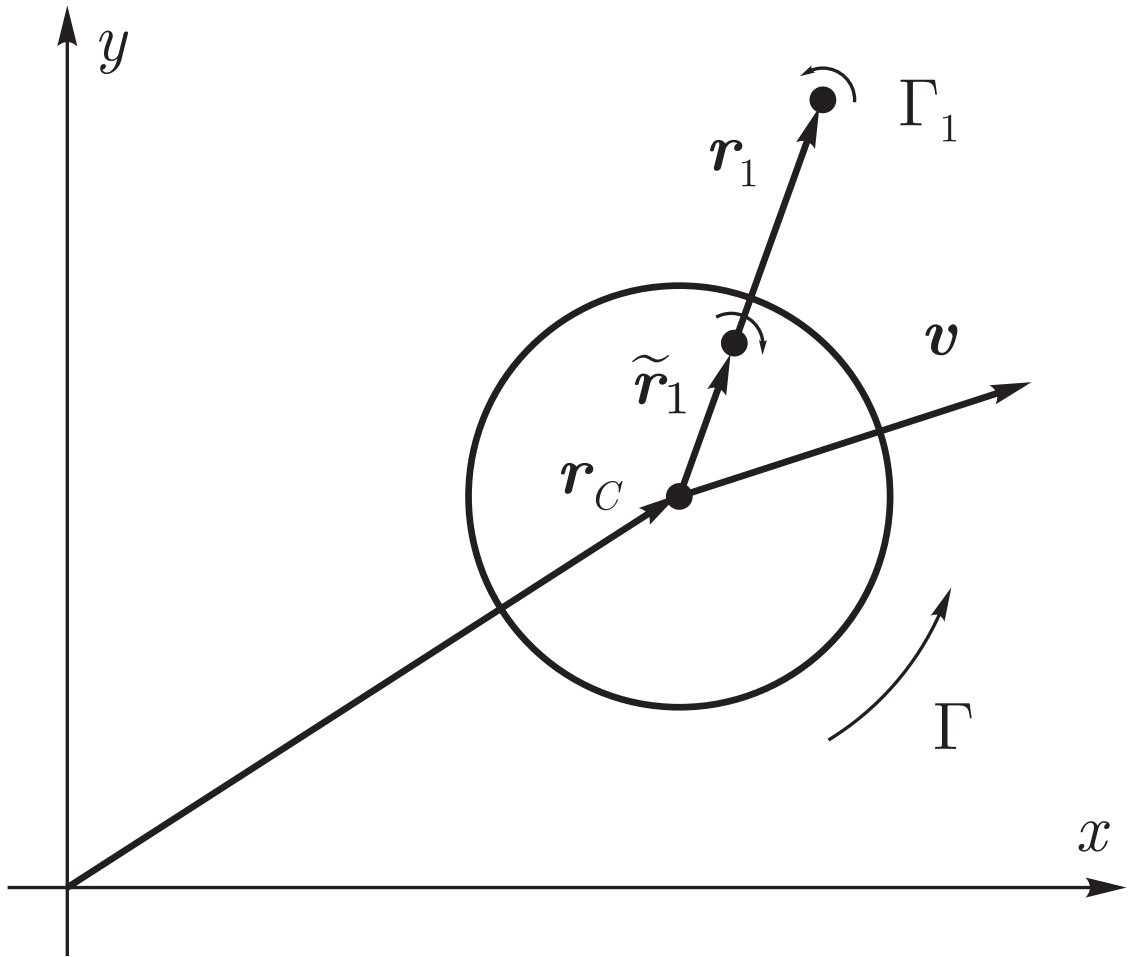


Рис. 2.1. Круговой цилиндр и точечный вихрь.

некомпактность в общем случае фазового многообразия, что требует модификации известных методов топологического анализа [137]. Обобщение системы [134] на случай сферы приведено в [154].

2.2. Уравнения движения. Первые интегралы

Следуя [18], уравнения движения цилиндра и точечного вихря в поле силы тяжести запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1 &= -\mathbf{v} + \text{grad } \tilde{\varphi}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}, & \dot{\mathbf{r}}_c &= \mathbf{v}, \\ a\dot{v}_1 &= \lambda v_2 - \lambda_1(\dot{\tilde{y}}_1 - \dot{y}_1), & a\dot{v}_2 &= -\lambda v_1 + \lambda_1(\dot{\tilde{x}}_1 - \dot{x}_1), \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

где посредством $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c)$ обозначен радиус-вектор центра цилиндра относительно системы координат Oxy , $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ — вектор скорости цилиндра,

$\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$, $\tilde{\mathbf{r}}_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = \frac{R^2 \mathbf{r}_1}{r_1^2}$ радиус-векторы вихря и его инверсного образа относительно центра цилиндра (рис. 2.1), R радиус цилиндра, a масса цилиндра, в том числе присоединённая, λ , λ_1 константы, связанные с циркуляцией жидкости вокруг цилиндра и интенсивностью вихря соотношениями $\lambda = \frac{\Gamma}{2\pi}$, $\lambda_1 = \frac{\Gamma_1}{2\pi}$. Плотность жидкости равна 2π . Функция $\tilde{\varphi}(\mathbf{r})$ является потенциалом течения $\varphi(\mathbf{r})$ идеальной жидкости вне цилиндра с исключенной особенностью в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{R^2}{r^2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \lambda \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \lambda \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_1}{x - \tilde{x}_1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_1}{x - x_1} \right) \right). \quad (2.2.2)$$

Можно заметить, что фазовый поток, определяемый конечномерной системой дифференциальных уравнений (2.2.1), которые являются уравнениями движения взаимодействующих цилиндра и вихря, обладает свойством сохранения инвариантной меры и указанная система может быть представлена в гамильтоновой форме.

Теорема 9. Уравнения движения (2.2.1) можно представить в виде

$$\dot{\zeta}_i = \{\zeta_i, H\} = \sum_k \{\zeta_i, \zeta_k\} \frac{\partial H}{\partial \zeta_k}, \quad (2.2.3)$$

где ζ_i — координаты фазового вектора системы (2.2.1)

$$\zeta = \{x_1, y_1, v_1, v_2, x_c, y_c\},$$

H — гамильтониан, а компоненты кососимметрического структурного тензора пуассоновой структуры $J_{ij}(\zeta) = \{\zeta_i, \zeta_j\}$ удовлетворяют тождеству Якоби:

$$\sum_l \left(J_{il} \frac{\partial J_{jk}}{\partial \zeta_l} + J_{kl} \frac{\partial J_{ij}}{\partial \zeta_l} + J_{jl} \frac{\partial J_{ki}}{\partial \zeta_l} \right) = 0, \quad \forall i, j, k.$$

Доказательство. Прямым вычислением легко убедиться, что система (2.2.1) обладает первым интегралом, имеющим смысл интеграла энергии

$$H = \frac{1}{2} a v^2 + \frac{1}{2} \lambda_1^2 \ln(r_1^2 - R^2) - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda \ln r_1^2. \quad (2.2.4)$$

Полагая H функцией Гамильтона, будем искать такие компоненты J_{ij} , чтобы уравнения движения (2.2.3) в точности совпали с уравнениями (2.2.1). Нетривиальные компоненты структурного тензора, аналогично [134], принимают следующий вид

$$\begin{aligned} \{v_1, x_1\} &= \frac{1}{a} \frac{r_1^4 - R^2(x_1^2 - y_1^2)}{r_1^4}, & \{v_1, y_1\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_1 y_1}{r_1^4}, \\ \{v_2, x_1\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_1 y_1}{r_1^4}, & \{v_2, y_1\} &= \frac{1}{a} \frac{r_1^4 + R^2(x_1^2 - y_1^2)}{r_1^4}, \\ \{v_1, v_2\} &= \frac{\lambda}{a^2} - \frac{\lambda_1 r_1^4 - R^4}{a^2 r_1^4}, & \{x_1, y_1\} &= -\frac{1}{\lambda_1}, \\ \{x_c, v_1\} &= \{y_c, v_2\} = \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что компоненты структурного тензора (2.2.5) искомой пуассоновой структуры удовлетворяют тождеству Якоби. \square

Заметим, что нелинейная пуассонова структура (2.2.5) в области определения является всюду невырожденной (т.е. имеет ранг, равный размерности фазового пространства). В отличие от обычных механических систем она не может быть получена из лагранжева формализма, и её наличие, вообще говоря, неочевидно (но, как отмечено ещё Кирхгофом, типично для различных систем гидродинамического типа). Укажем недавнюю работу [155], в которой указаны новые примеры нетривиальных пуассоновых структур гидродинамического происхождения.

Система (2.2.3) инвариантна относительно группы движений плоскости $E(2)$, однако, действие этой группы непуассоново (негамильтоново). Вследствие этого, коммутация трёх независимых первых интегралов, порождаемых этим действием,

$$\begin{aligned} Q &= av_2 + \lambda x_c - \lambda_1 x_1 \left(\frac{R^2}{\mathbf{r}_1^2} - 1 \right), & P &= av_1 - \lambda y_c + \lambda_1 y_1 \left(\frac{R^2}{\mathbf{r}_1^2} - 1 \right), \\ K &= a(v_1 y_c - v_2 x_c) - \frac{1}{2} \lambda \mathbf{r}_c^2 - \frac{1}{2} \lambda_1 \mathbf{r}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{\mathbf{r}_1^2} - 1 \right) (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_c) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

носит нестандартный характер:

$$\{Q, P\} = \lambda, \quad \{K, Q\} = P, \quad \{K, P\} = -Q.$$

Интегралы Q , P соответствуют трансляционной инвариантности, K — вращательной. Используя эти интегралы, принципиально возможно произвести редукцию (понизить порядок системы) на две степени свободы, т. е. получить явные квадратуры для описания движения. Конструктивно эта редукция (общие соображения которой восходят к Ли, а модификация для непуассоновых действий содержится в [156]) приведена в работах [118, 134]. Отметим, что в работе [118] обсуждается также возможность применения редукции Дирака при ограничении скобки (2.2.5) на непуассоново многообразии, задаваемое $P = Q = 0$. Для дальнейшего анализа мы не используем явные квадратуры, поэтому мы ограничимся элементарным приведением системы (2.2.4), (2.2.5) к двум степеням свободы.

Для этого укажем интеграл (см. [134])

$$F = a\mathbf{v}^2 + \lambda_1 \left[2a \left(1 - \frac{R^2}{r_1^2} \right) (x_1 v_2 - y_1 v_1) + (\lambda_1 - \lambda) \mathbf{r}_1^2 + \lambda_1 \frac{R^4}{r_1^2} \right], \quad (2.2.7)$$

который функционально выражается через P , Q , K :

$$F = 2\lambda K + P^2 + Q^2 + 2R^2 \lambda_1^2,$$

но, однако, не содержит координаты центра цилиндра x_c, y_c . В результате имеем редуцированную систему относительно $\xi = \{x_1, y_1, v_1, v_2\}$, вполне интегрируемую по Лиувиллю с гамильтонианом (2.2.4) и пуассоновой структурой, получаемой из (2.2.5) исключением коммутации для x_c, y_c , а также дополнительным интегралом (2.2.7), находящимся в инволюции с гамильтонианом. Эта ситуация аналогична известной интегральной задаче Эйлера – Пуансо в динамике твёрдого тела, однако с пуассоновой структурой, не задаваемой теперь алгеброй Ли (т. е. не являющейся скобкой Ли – Пуассона).

Качественный анализ динамики с использованием симплектических координат приведен в [118], где также обсуждаются необходимые условия компактности движения, определяемые топологией симплектического листа.

Кроме этого, ограничимся рассмотрением движений системы, при которых совместная поверхность уровня первых интегралов H и F компактна. В работе [118] показано, что в случае $\lambda \cdot \lambda_1 < 0$ симплектический лист редуцированной системы компактен, в случае $\lambda \cdot \lambda_1 > 0$ — некомпактен. Однако, некомпактные (инфинитные) движения возможны только при $\lambda = \lambda_1$. Этот особый случай, как и $\lambda = 0$, мы в данной главе исключим из рассмотрения.

Используя теорему Лиувилля, можно утверждать, что компактная связная компонента интегрального многообразия $\mathcal{P} = \{H = h, F = f\}$ диффеоморфна двумерному тору. Для системы (2.2.3), определяемой некоммутативным избыточным набором интегралов, по теореме Нехорошева [157] в полном фазовом пространстве $(x_1, y_1, v_1, v_2, x_c, y_c)$ также возникает регулярный двумерный тор, заполненный квазипериодическими траекториями.

2.3. Инвариантное многообразие. Бифуркационный анализ

Пусть

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{B}$$

где с помощью \mathcal{B} обозначен шар радиуса R

$$\mathcal{B} = \{(x_1, y_1) : x_1^2 + y_1^2 \leq R^2\}.$$

Определим *отображение момента*

$$\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

полагая $(h, f) = \mathcal{F}(x) = (H(x), F(x))$. Обозначим через \mathcal{C} совокупность всех критических точек отображения момента, то есть множество точек, в которых

$\text{rank } d\mathcal{F}(x) < 2$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{M})$ называется *бифуркационной диаграммой*.

Для визуализации структуры критических точек рассмотрим *бифуркационный комплекс* \mathcal{K} . Он был введён в [3] для анализа (орбитальной) устойчивости интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Применение бифуркационного комплекса к интегрируемым системам неголономной механики имеется в [138]. Бифуркационный комплекс \mathcal{K} является накрытием над бифуркационной диаграммой и показывает количество торов в прообразе каждой камеры бифуркационной диаграммы. Более того, если кривая бифуркационной диаграммы лежит внутри бифуркационного комплекса, то этой кривой отвечают неустойчивые критические периодические движения. Если же кривая лежит на границе комплекса, то ей отвечают устойчивые критические периодические движения.

Обозначим через \mathcal{N} замыкание множества решений системы

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad (2.3.1)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= x_1 v_1 + y_1 v_2, \\ F_2 &= a \left[(x_1^2 + y_1^2)^2 - R^4 \right] (x_1 v_2 - y_1 v_1)^2 + \{(\lambda_1 - \lambda) \times \\ &\times [(x_1^2 + y_1^2)^3 - (a + R^2)(x_1^2 + y_1^2)^2] - R^2(a\lambda + \lambda_1 R^2)(x_1^2 + y_1^2) + \lambda_1 R^6\} \times \\ &\times (x_1 v_2 - y_1 v_1) - \lambda_1 (x_1^2 + y_1^2)(x_1^2 + y_1^2 - R^2) [\lambda R^2 + (\lambda_1 - \lambda)(x_1^2 + y_1^2)]. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Теорема 10. *Множество \mathcal{C} критических точек отображения момента \mathcal{F} исчерпывается множеством решений системы (2.3.1). Множество \mathcal{N} является двумерным инвариантным подмногообразием системы (2.2.3) с гамильтонианом (2.2.4).*

Для доказательства первого утверждения теоремы отметим, что по определению $\mathcal{C} = \mathcal{N} = \{\zeta : F_1 = 0, F_2 = 0\}$. В инвариантности соотношений (2.3.1)

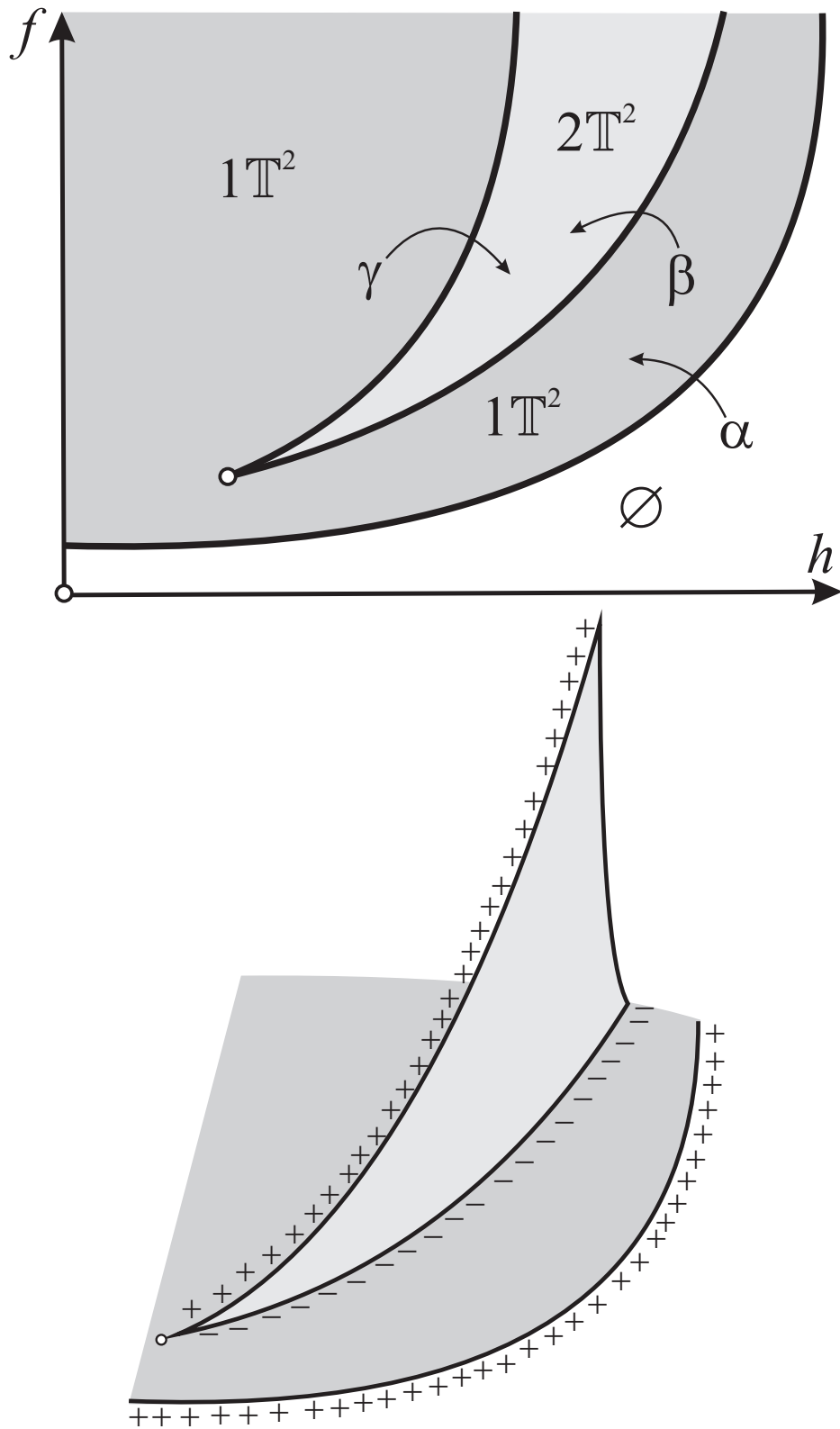


Рис. 2.2. Бифуркационная диаграмма Σ и бифуркационный комплекс \mathcal{K} в случае компактно-го симплектического листа. На бифуркационной диаграмме штриховкой обозначена область возможности движения.

можно убедиться с помощью следующих цепочек равенств:

$$\dot{F}_1 = \{F_1, H\} = A \cdot F_2, \quad \dot{F}_2 = \{F_2, H\} = B \cdot F_2,$$

где A и B функции фазовых переменных.

Структура выражений (2.3.2) существенно упрощается, если ввести следующие переменные [118]:

$$p_1 = a(x_1 v_1 + y_1 v_2), \quad p_2 = a(x_1 v_2 - y_1 v_1), \quad r = x_1^2 + y_1^2.$$

В новых переменных интегралы H и F принимают, соответственно, вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_1^2 + p_2^2}{2ar} + \frac{1}{2}\lambda_1[\lambda_1 \ln(r - R^2) - \lambda \ln r], \\ F &= \frac{p_1^2 + p_2^2}{r} + 2\lambda_1 \left(1 - \frac{R^2}{r}\right) p_2 + \lambda_1^2 \left(r + \frac{R^4}{r}\right) - \lambda\lambda_1 r. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

С использованием (2.3.2), (2.3.3) и приведённой выше теоремы получаем следующее утверждение.

Теорема 11. *Бифуркационная диаграмма Σ отображения момента \mathcal{F} состоит из кривых*

$$\Pi_{1,2} : \begin{cases} h = \frac{z^2}{2ar} + \frac{1}{2}\lambda_1[\lambda_1 \ln(r - R^2) - \lambda \ln r], \\ f = \frac{z^2}{r} + 2\lambda_1 \left(1 - \frac{R^2}{r}\right) z + \lambda_1^2 \left(r + \frac{R^4}{r}\right) - \lambda\lambda_1 r, \end{cases} \quad r \in (R^2; +\infty).$$

Здесь вспомогательная переменная $z = z_{1,2}(r)$ определяется как вещественное решение следующего квадратного уравнения

$$\begin{aligned} (r^2 - R^4)z^2 + \{R^4(R^2 - r)\lambda_1 - r[\lambda_1 r - \lambda(r - a)]R^2 + r^2(\lambda - \lambda_1)(a - r)\}z + \\ + ar\lambda_1(R^2 - r)[\lambda_1 r + \lambda(R^2 - r)] = 0. \end{aligned}$$

Примеры бифуркационной диаграммы Σ и бифуркационного комплекса \mathcal{K} для компактного случая $\lambda \cdot \lambda_1 < 0$ приведены на рис. 2.2, а для некомпактного случая $\lambda \cdot \lambda_1 > 0$ приведены на рис. 2.3. Бифуркационная диаграмма Σ разбивает плоскость параметров первых интегралов (h, f) на камеры, в каждой из

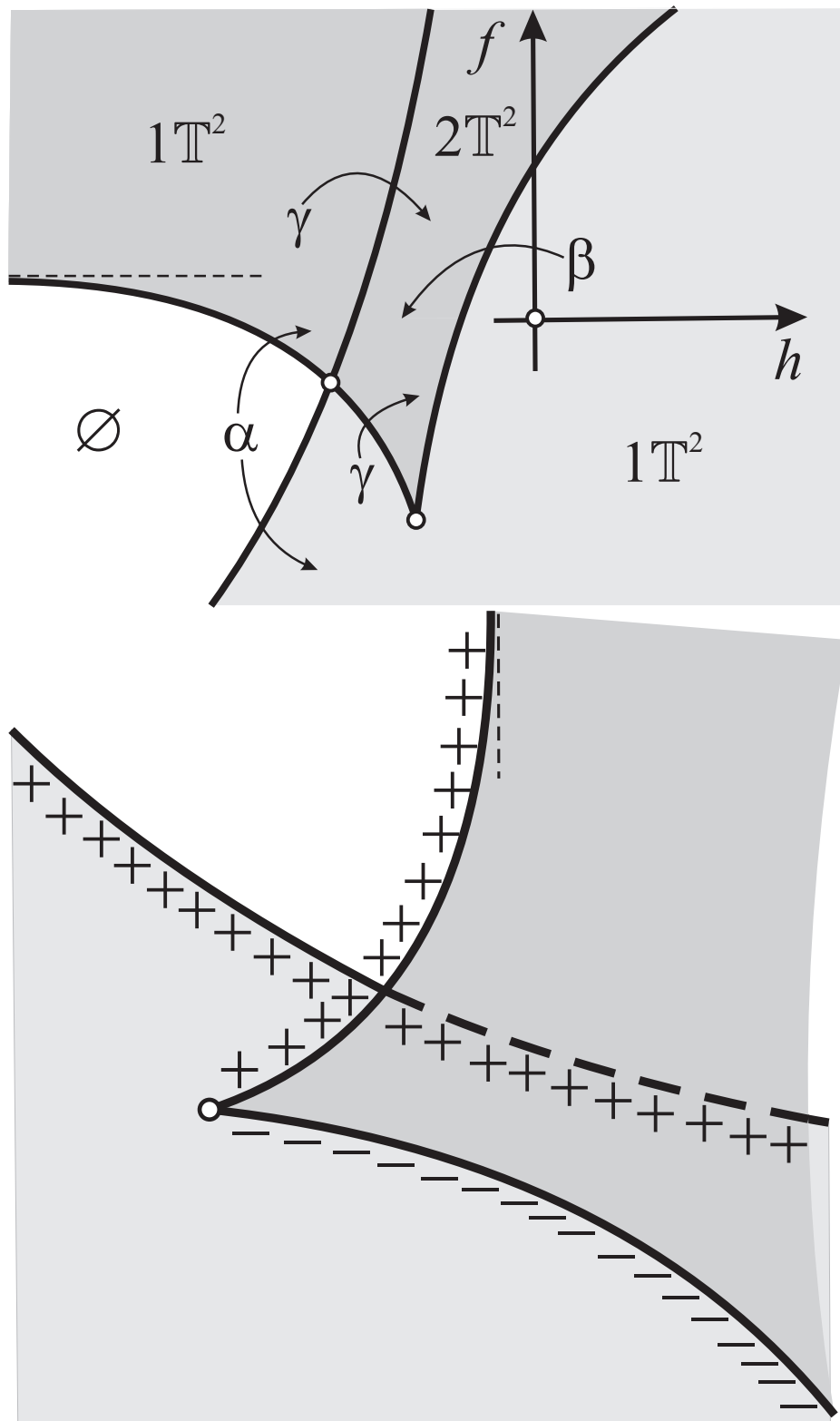


Рис. 2.3. Бифуркационная диаграмма Σ и бифуркационный комплекс \mathcal{K} в некомпактном случае. На диаграмме по-прежнему штриховкой обозначена область возможности движений.

которых указано в прообразе отображения момента количество связных компонент (один тор, либо два тора). На рис. 2.2, 2.3 буквы α , β и γ соответствуют следующим переходам:

$$\alpha: \emptyset \rightarrow \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{T}^2;$$

$$\beta: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1) \rightarrow 2\mathbb{T}^2;$$

$$\gamma: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{T}^2 \rightarrow 2\mathbb{T}^2.$$

Здесь через $\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1)$ обозначено интегральное многообразие, которое представляет собой произведение “восьмерки” на окружность [137]. На бифуркационном комплексе \mathcal{K} знаком “+” помечены устойчивые критические периодические решения, а знаком “−” — неустойчивые.

Критические точки ранга 1 отображения момента соответствуют стационарным решениям приведённой системы в переменных p_1, p_2, r , поиску которых посвящена работа [118]. Стационарным решениям отвечают движения, при которых вихрь и цилиндр равномерно движутся по концентрическим окружностям и находятся на прямой, проходящей через центр окружности. В работе [118] указаны различные фазовые портреты приведённой двумерной системы, которые определяются количеством и типом устойчивости стационарных решений. Результаты по устойчивости [118], полученные с помощью компьютерного моделирования, согласуются с нашим анализом.

2.4. Визуализация перестроек торов Лиувилля

Для рассмотрения наиболее интересной перестройки торов Лиувилля (переход типа β) построим пример бифуркационной диаграммы (см. рисунок 2.4) в компактном случае $\lambda \cdot \lambda_1 < 0$ для следующих числовых значений параметров задачи:

$$a = 1, \quad \lambda = -3, \quad \lambda_1 = 0.5, \quad R = 1. \quad (2.4.1)$$

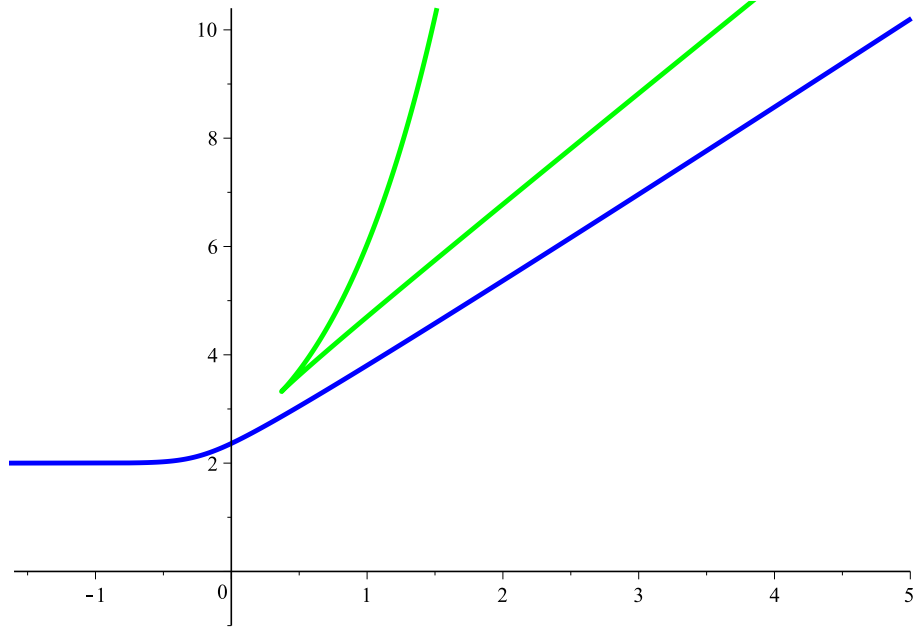


Рис. 2.4. Бифуркационная диаграмма Σ отображения момента в случае компактного симплектического листа для значений параметров (2.4.1). Вертикальная ось соответствует значениям интеграла F , горизонтальная ось - значениям H .

В качестве наглядного примера перестройки торов Лиувилля, соответствующей переходу β , приведем последовательность рисунков (рисунок 2.5, рисунок 2.6, рисунок 2.7), содержащих общую поверхность уровня интегралов (2.3.3), например, для компактного случая $\lambda \cdot \lambda_1 < 0$.

Стоит отметить, что на рисунках 2.5, 2.6, 2.7 в качестве заштрихованных изображены фрагменты поверхностей уровня первых интегралов H и F , соответствующие значениям констант интегралов, указанных в соответствующих подрисуночных подписях. Пересечение этих поверхностей представляет собой искомую общую поверхность уровня интегралов, которая отображается в виде красных кривых. Слои слоения Лиувилля исходной системы с двумя степенями свободы получаются при умножении этих кривых на \mathbb{S}^1 . Это становится очевидным, если учесть тот факт, что каждой точке общей поверхности уровня, изображенной на рисунках 2.5, 2.6, 2.7 соответствует окружность $x_1^2 + y_1^2 = r$.

Наконец, можно изобразить бифуркационную диаграмму (рисунок 2.8) и общую поверхность уровня в некомпактном случае $\lambda \cdot \lambda_1 > 0$ (см. рисунок 2.8 для

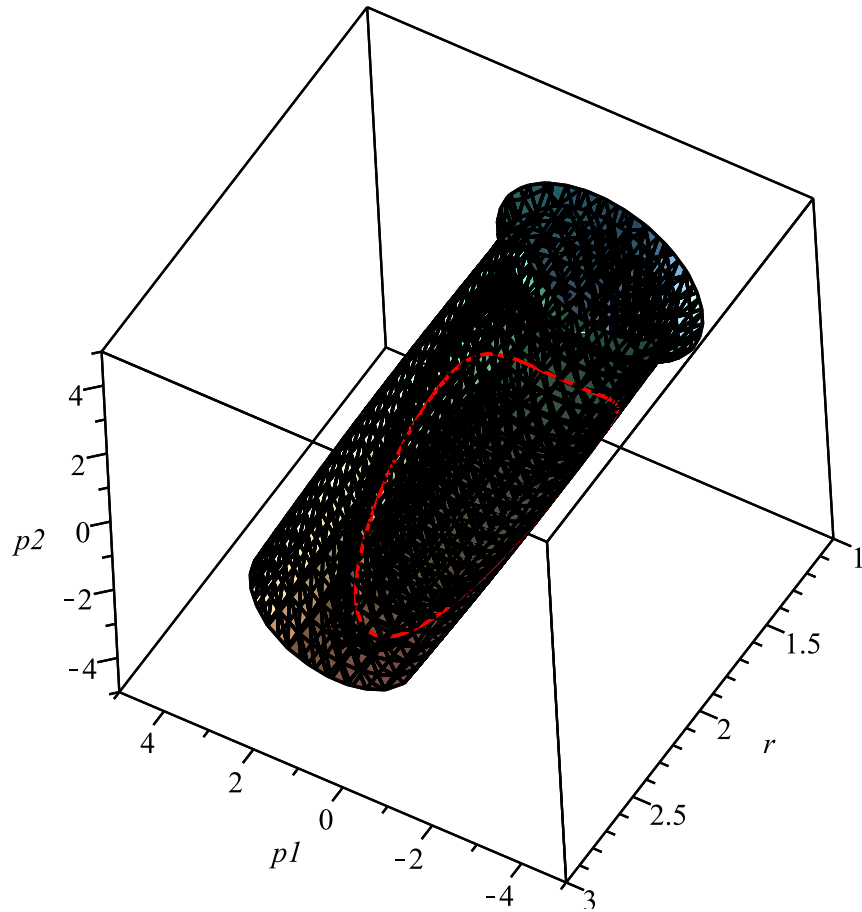


Рис. 2.5. Общая поверхность уровня интегралов (2.3.3), соответствующая камере бифуркационной диаграммы Σ 2.4, содержащей один тор Лиувилля. Соответствующие значения интегралов $H = 1.5, F = 5$.

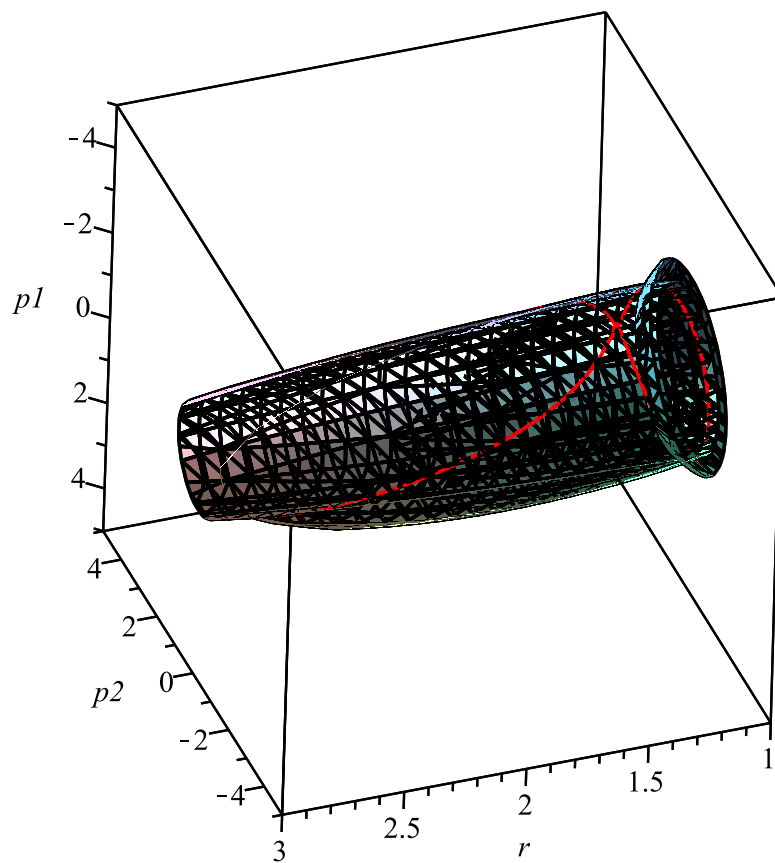


Рис. 2.6. Общая поверхность уровня интегралов (2.3.3), соответствующая кривой бифуркационной диаграммы Σ 2.4. Интегральное многообразие при этом имеет вид $\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1)$. Значения интегралов $H = 1.415$, $F = 5$.

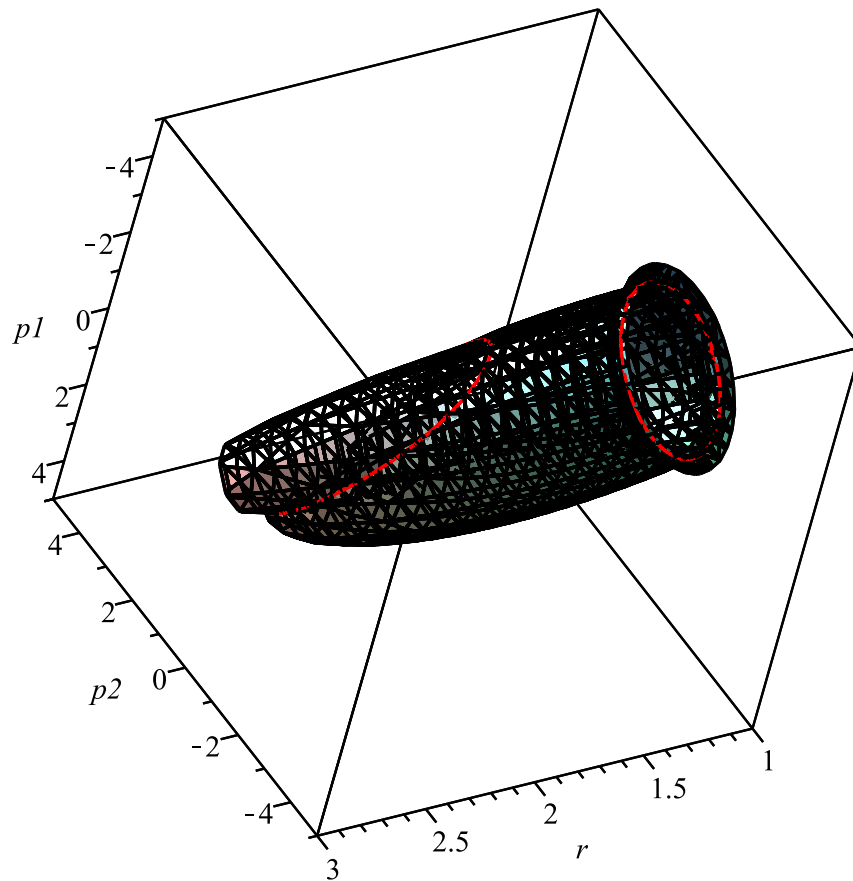


Рис. 2.7. Общая поверхность уровня интегралов (2.3.3), соответствующая камере бифуркационной диаграммы Σ 2.4, содержащей два тора Лиувилля. Соответствующие значения интегралов $H = 1, F = 5$.

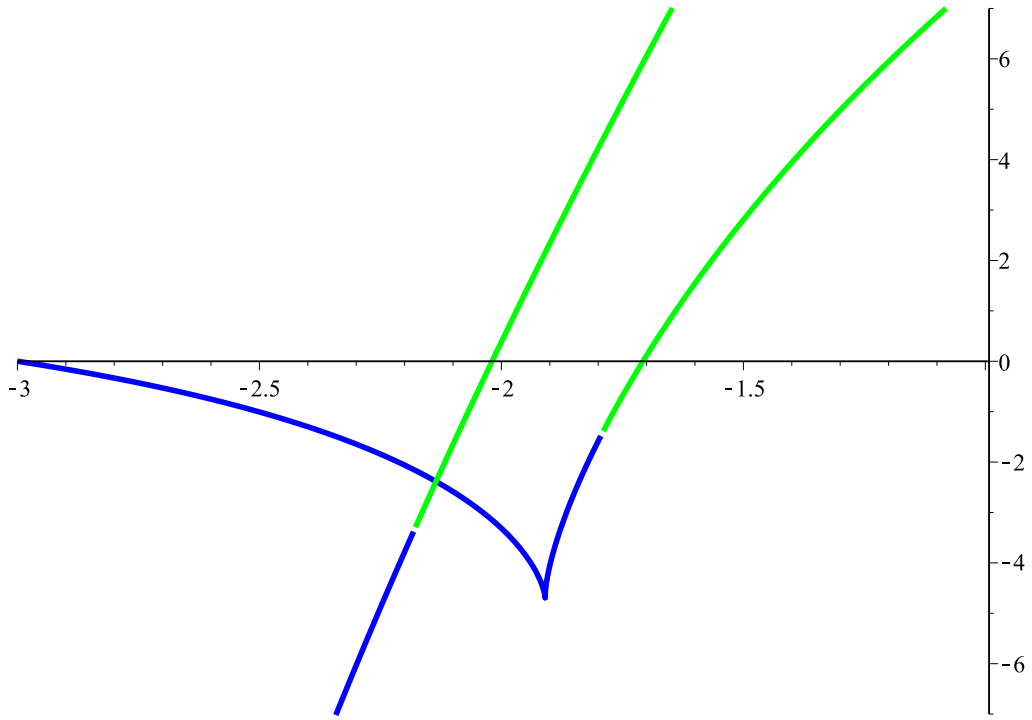


Рис. 2.8. Бифуркационная диаграмма Σ отображения момента в случае некомпактного симплектического листа для значений параметров (2.4.2). Вертикальная ось соответствует значениям интеграла F , горизонтальная ось - значениям H .

следующих числовых значений параметров задачи:

$$a = 2, \quad \lambda = 3, \quad \lambda_1 = 2, \quad R = 1. \quad (2.4.2)$$

Значениям интегралов соответствует точка внутри одной из камер бифуркационной диаграммы. Общая поверхность уровня интегралов вновь изображается в виде красной кривой.

2.5. Краткие итоги главы 2

Используя результаты данной главы, появляется возможность изучить некомпактные бифуркации, возникающие в данной системе, и модифицировать на этот случай результаты топологического анализа [3]. Как уже указывалось некомпактные движения в рассматриваемой задаче возникают при $\lambda = 0$ и $\lambda_1 = \lambda$. Некомпактные бифуркации изучались, например, в работах [158–160], в задаче Эйлера двух неподвижных центров и в обобщённой системе Хено-

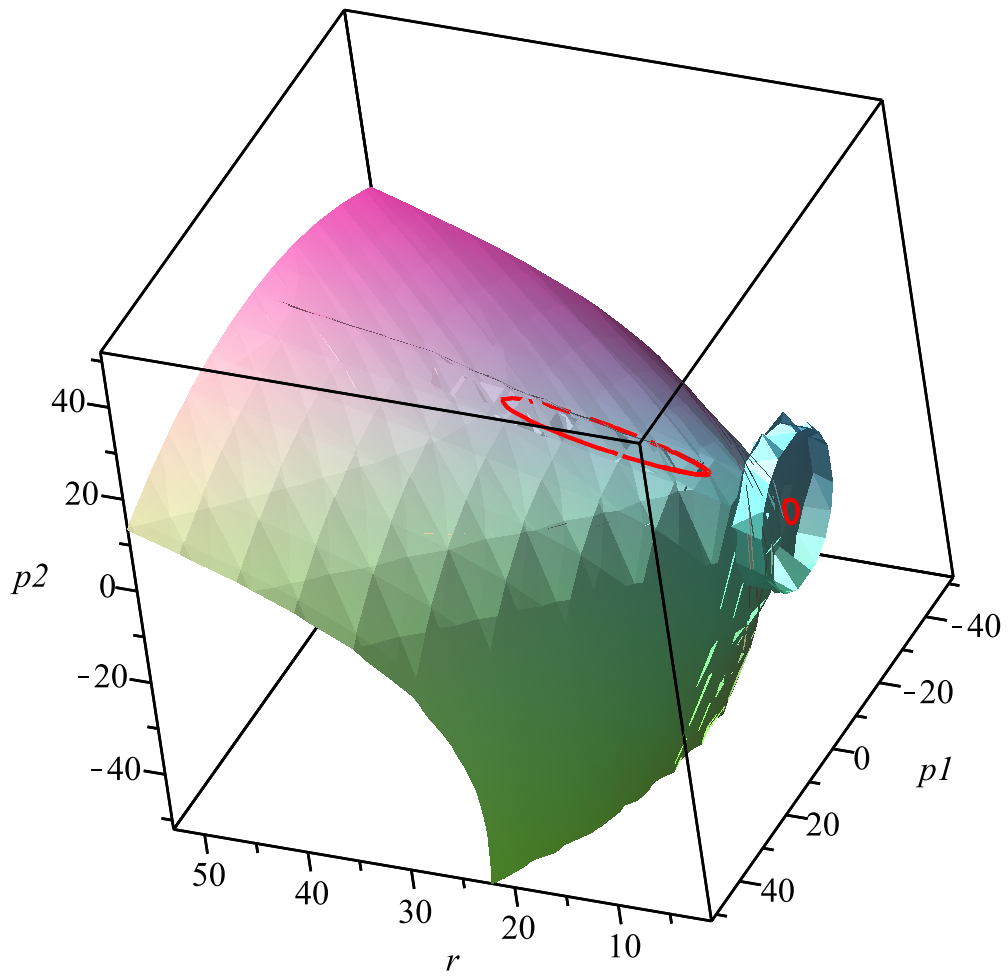


Рис. 2.9. Общая поверхность уровня интегралов (2.3.3), соответствующая камере бифуркационной диаграммы Σ 2.8, содержащей два тора Лиувилля. Соответствующие значения интегралов $H = -1.8, F = 2$.

на – Хейлеса. Перспективным также представляется возможность исследовать топологическими методами более сложные неинтегрируемые ситуации (в случае движения цилиндра и двух или более вихрей). Одной из наиболее важных является задача о существовании и устойчивости стационарных конфигураций (их исследование для случая неподвижного цилиндра восходит к Хавелоку). Для случая неподвижного цилиндра новые нетривиальные стационарные конфигурации вихрей были указаны в [161].

Глава 3

Динамика твердого тела и вихрей в идеальной жидкости в поле тяжести

Данная глава посвящена изложению результатов, полученных при анализе движения в безграничной идеальной жидкости бесконечного кругового цилиндра, взаимодействующего с прямолинейными вихревыми нитями, при обтекании с отличной от нуля циркуляцией в поле силы тяжести. Из предыдущей главы мы уже знаем, что движение в отсутствие силы тяжести (или при нулевой плавучести и нулевом суммарном моменте внешних сил) описывается гамильтоновой системой, которая при числе вихрей $N = 1$ обладает достаточным количеством дополнительных первых интегралов и, как следствие, является вполне интегрируемой по Лиувиллю. Характер динамики является при этом регулярным, что позволило в предыдущей главе воспользоваться развитыми топологическими методами анализа интегрируемых гамильтоновых систем (см. [2, 137] и др.), построить бифуркационную диаграмму отображения момента, указать типы критических движений.

В этой главе мы продолжаем исследовать динамику твердого тела, взаимодействующего с вихревыми нитями, в присутствии поле тяжести.

В первом разделе рассмотрена система, состоящая из цилиндра и одного вихря. Получена гамильтонова форма уравнений, обобщающая результаты предыдущей главы на случай действия силы тяжести. Найдены новые режимы движения системы.

Во втором разделе получены уравнения движения для цилиндра, взаимодействующего с N вихревыми нитями. Найдены первые интегралы этой системы.

В третьем разделе, используя результаты, полученные в первом и втором разделах, мы демонстрируем, что даже в случае $N = 1$ при наличии силы тяже-

сти гамильтонова система, описывающая движение цилиндра и вихря, является неинтегрируемой и демонстрирует хаотический характер динамики.

Результаты данной главы опубликованы в работах [18–21].

3.1. Движение кругового цилиндрического твердого тела, взаимодействующего с одним точечным вихрем, в поле силы тяжести

В этом разделе рассмотрена задача о движении под действием силы тяжести твердого тела, имеющего форму кругового цилиндра, взаимодействующего с точечным вихрем, в идеальной жидкости. Циркуляция жидкости вокруг цилиндра предполагается отличной от нуля. Уравнения, описывающие систему, имеют гамильтонову форму и очевидный первый интеграл (горизонтальная компонента импульса), с помощью которого удастся понизить порядок системы и тем самым получить систему с двумя степенями свободы. Получены частные решения, которые позволяют указать возможные типы движений системы. Найдены относительные равновесия и исследована их устойчивость при различных значениях параметров.

3.1.1. Обзор результатов

Задача о падении твердого тела в жидкости рассматривалась давно, например, в классических работах [104, 148, 149]. Из современных работ отметим [109, 113, 150]. Некоторые эффекты, описанные в этих статьях, как, например, авторотация твердого тела, имеют место только в вязкой жидкости, и, следовательно, их строгое рассмотрение должно опираться на уравнение Навье–Стокса с граничными условиями на подвижных границах. Решение таких задач обычно получают численно, а аналитические исследования содержат дополнительные феноменологические предположения. Например, в работе [162]

вводятся феноменологические выражения для подъемной силы и силы лобового сопротивления, а также предположения о независимости трансляций и вращений. Естественно, что вопрос о применимости такого рода допущений и адекватности получаемых результатов, остается открытым.

Влияние вязкости на падение тела состоит в наличии сопротивления движению, а сопротивление — это не только внутреннее трение жидкости, но и затраты энергии на генерацию вихрей. Чтобы попытаться с одной стороны учесть хотя бы качественно некоторые из возникающих в этой связи эффектов, а с другой — получить более или менее удобоваримую с аналитической точки зрения модель, поступают следующим образом: жидкость предполагают идеальной, а присутствие завихренности (например, циркуляция, точечные вихри, вихревая пелена) постулируют. Простейший эффект завихренности — это наличие циркуляции при обтекании тела. Падение тела с циркуляцией рассмотрено, например, в работах [110, 151, 163]. В [151] показано, что при наличии циркуляции возникающая подъемная сила приводит к тому, что тело движется в некоторой горизонтальной полосе. Дальнейшим развитием представлений о влиянии завихренности на тела является задача о движении тела при наличии точечных вихрей. Гамильтонов формализм для точечных вихрей первоначально был развит Кирхгофом [71]. Современное изложение основных положений вихревой теории можно найти, например, в [91]. В работах [118, 120, 134, 152] этот формализм был распространен на случай движения цилиндрического твердого тела и точечных вихрей в отсутствии тяжести. В работе [152] и затем в работе [120] были получены *точные* уравнения движения, в статье [134] доказана интегрируемость задачи о движении цилиндра и вихря. В работе [118] указаны некоторые частные решения и исследована качественная картина движения цилиндра и вихря.

Следующим этапом в развитии послужила возникшая в 60-х годах XX века модель Брауна–Майкла, где сход вихрей с острой кромки тела постулируется (поскольку, как известно, возникать в идеальной жидкости вихри не могут),

а их интенсивность меняется со временем. Движение твердого тела и вихрей исследуется с помощью модели Брауна – Майкла, например, в работе [164].

Падение тела в присутствии распределенной завихренности («вихревая пелена») изучено в работе [153]. Хотя в работах [153, 164] уравнения получены строго, система из-за своей сложности исследуется авторами численно.

Отметим в заключение работу [121], где исследовано движение вихря в предположении поступательного движения цилиндра. Таким образом, рассмотрение в [121] носит кинематический характер, что не позволяет учесть влияние вихря на движение цилиндра. Основное внимание в работе [121] сконцентрировано на исследовании возможности хаотических режимов движения вихря при возмущении движения цилиндра.

В данной главе влияние завихренности на падение тела в жидкости рассмотрено на примере простейшей задачи о движении массивного цилиндра и вихря в поле тяжести. Циркуляция жидкости вокруг цилиндра предполагается, вообще говоря, отличной от нуля.

3.1.2. Постановка задачи

Пусть твердое тело, имеющее форму кругового цилиндра, движется под действием силы тяжести в безграничном объеме идеальной жидкости, совершающей плоскопараллельное движение и покоящейся на бесконечности. Образующие цилиндра ортогональны при этом плоскости потока. В жидкости движется прямолинейная вихревая нить, параллельная образующим цилиндра, имеющая интенсивность Γ_1 . Жидкость обтекает цилиндр с циркуляцией Γ , в общем случае отличной от нуля (рис. 3.1). Требуется качественно исследовать движение системы.

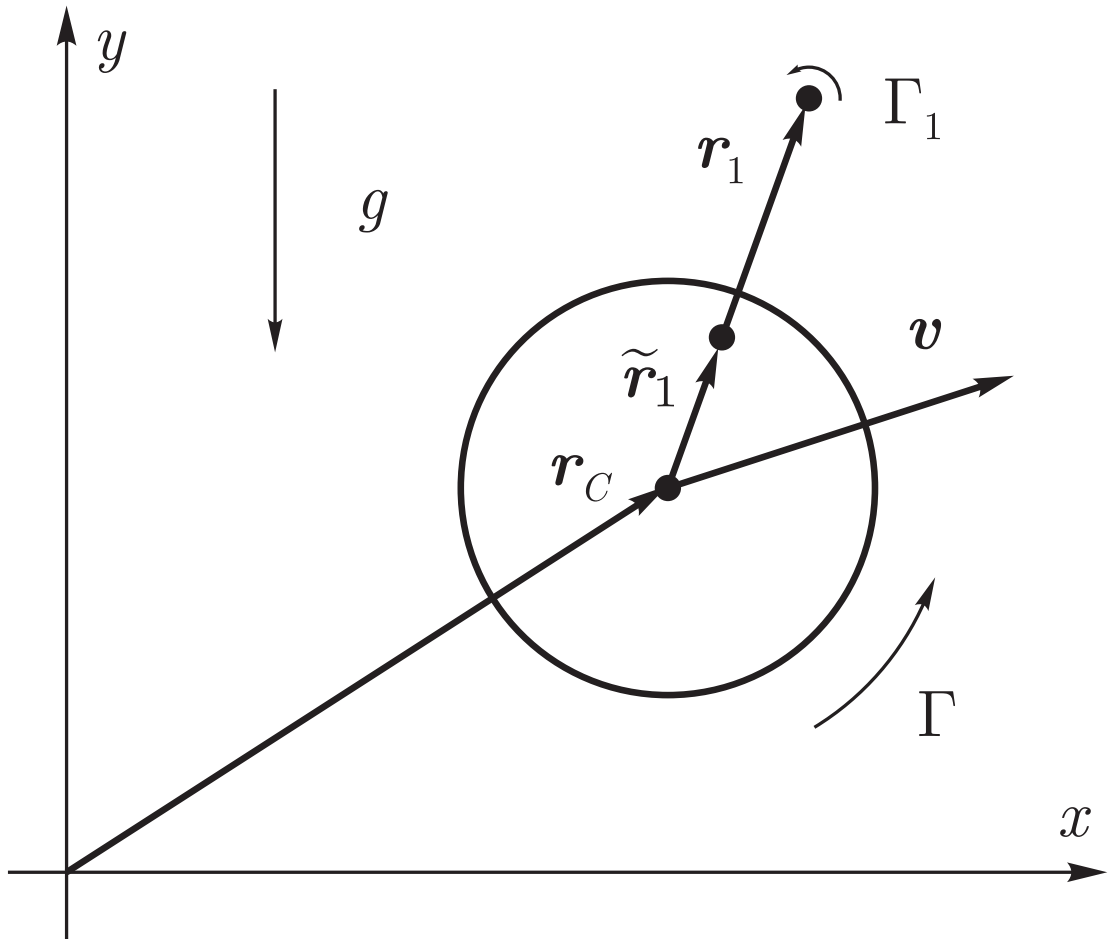


Рис. 3.1. Круговой цилиндр и точечный вихрь в поле силы тяжести.

3.1.3. Уравнения движения

Следуя [152], уравнения движения цилиндра и точечного вихря в поле силы тяжести запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1 &= -\mathbf{v} + \text{grad } \tilde{\varphi}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}, & \dot{\mathbf{r}}_c &= \mathbf{v}, \\ a\dot{v}_1 &= \lambda v_2 - \lambda_1(\tilde{y}_1 - \dot{y}_1), & a\dot{v}_2 &= -\lambda v_1 + \lambda_1(\tilde{x}_1 - \dot{x}_1) - ag, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

где $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c)$ — радиус-вектор центра цилиндра относительно неподвижной системы координат Oxy , $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ — скорость цилиндра, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$ — вектор, соединяющий центр цилиндра с вихрем, $\tilde{\mathbf{r}}_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = \frac{R^2 \mathbf{r}_1}{r_1^2}$ — вектор, соединяющий центр цилиндра с инверсным образом вихря (рис. 3.1), R — радиус цилиндра, a — константа, включающая массу и присоединенную массу цилиндра, ag — величина силы тяжести, действующей на цилиндр, λ и λ_1 —

постоянные, связанные с циркуляцией жидкости вокруг цилиндра и интенсивностью вихря соотношениями $\lambda = \frac{\Gamma}{2\pi}$, $\lambda_1 = \frac{\Gamma_1}{2\pi}$. Плотность жидкости полагается равной 2π . Функция $\tilde{\varphi}(\mathbf{r})$ является потенциалом течения $\varphi(\mathbf{r})$ идеальной жидкости вне цилиндра с исключенной особенностью в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{R^2}{r^2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \lambda \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \lambda \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_1}{x - \tilde{x}_1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_1}{x - x_1} \right) \right). \quad (3.1.2)$$

Уравнения (3.1.1) отличаются от приведенных в [152] слагаемым, учитывающим действие силы тяжести.

Аналогично [134] можно заметить, что конечномерная система (3.1.1), описывающая движение цилиндра и вихря в поле силы тяжести, сохраняет инвариантную меру и может быть представлена в гамильтоновой форме.

Теорема 12. *Уравнения движения (3.1.1) можно представить в виде*

$$\dot{\zeta}_i = \{\zeta_i, H\} = \sum_k \{\zeta_i, \zeta_k\} \frac{\partial H}{\partial \zeta_k}, \quad (3.1.3)$$

где ζ_i — координаты фазового вектора системы (3.1.1)

$$\zeta = \{x_1, y_1, v_1, v_2, x_c, y_c\},$$

H — гамильтониан, а компоненты кососимметрического структурного тензора пуассоновой структуры $J_{ij}(\zeta) = \{\zeta_i, \zeta_j\}$ удовлетворяют тождеству Якоби:

$$\sum_l \left(J_{il} \frac{\partial J_{jk}}{\partial \zeta_l} + J_{kl} \frac{\partial J_{ij}}{\partial \zeta_l} + J_{jl} \frac{\partial J_{ki}}{\partial \zeta_l} \right) = 0, \quad \forall i, j, k.$$

Доказательство. Несложно непосредственной проверкой показать, что система (3.1.1) обладает первым интегралом, имеющим смысл интеграла энергии

$$H = \frac{1}{2}av^2 + \frac{1}{2}\lambda_1^2 \ln(r_1^2 - R^2) - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda \ln r_1^2 + agy_c. \quad (3.1.4)$$

Считая H гамильтонианом системы, подберем компоненты J_{ij} , чтобы уравнения движения (3.1.3) совпали с системой (3.1.1). Отличные от нуля компоненты,

аналогично [134], имеют вид

$$\begin{aligned}
 \{v_1, x_1\} &= \frac{1}{a} \frac{r_1^4 - R^2(x_1^2 - y_1^2)}{r_1^4}, & \{v_1, y_1\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_1 y_1}{r_1^4}, \\
 \{v_2, x_1\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_1 y_1}{r_1^4}, & \{v_2, y_1\} &= \frac{1}{a} \frac{r_1^4 + R^2(x_1^2 - y_1^2)}{r_1^4}, \\
 \{v_1, v_2\} &= \frac{\lambda}{a^2} - \frac{\lambda_1 r_1^4 - R^4}{a^2 r_1^4}, & \{x_1, y_1\} &= -\frac{1}{\lambda_1}, \\
 \{x_c, v_1\} &= \{y_c, v_2\} = \frac{1}{a}.
 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Непосредственным вычислением проверяется, что компоненты структурного тензора (3.1.5) удовлетворяют тождеству Якоби. \square

Таким образом, гамильтоновость уравнений (3.1.1) позволяет применить хорошо развитый формализм для качественного анализа, исследования устойчивости и прочее.

3.1.4. Первые интегралы и редукция

Наличие выделенного направления, задаваемого силой тяжести, нарушает симметрию относительно поворотов системы. Тем не менее, у системы существует два первых интеграла, отвечающие трансляциям, — автономный интеграл P , соответствующий горизонтальному импульсу системы, и неавтономный интеграл Q , соответствующий вертикальному импульсу:

$$\begin{aligned}
 Q &= a(v_2 + gt) + \lambda x_c - \lambda_1(\tilde{x}_1 - x_1), \\
 P &= av_1 - \lambda y_c + \lambda_1(\tilde{y}_1 - y_1).
 \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

По-видимому, других первых интегралов у системы нет, что подтверждается хаотическим поведением решений на сечении Пуанкаре. Неинтегрируемость задачи падения цилиндрического тела произвольной формы с циркуляцией показана в работе [165]. Используя автономный интеграл P , можно понизить порядок исходной системы (3.1.1), обладающей тремя степенями свободы, на одну степень.

Для этого положим $P = 0$. Очевидно, что в случае $\lambda \neq 0$ этого всегда можно добиться выбором начала системы координат (случай $\lambda = 0$ требует отдельного рассмотрения). Выразим y_c из равенства $P = 0$ и подставим в гамильтониан (3.1.4). Исключив из (3.1.1) уравнения на \mathbf{r}_c , получим редуцированную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -v_1 + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right|_{r=\bar{r}_1}, & \dot{y}_1 &= -v_2 + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \right|_{r=\bar{r}_1}, \\ a\dot{v}_1 &= \lambda v_2 - \lambda_1(\tilde{y}_1 - \dot{y}_1), & a\dot{v}_2 &= -\lambda v_1 + \lambda_1(\tilde{x}_1 - \dot{x}_1) - ag \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

с гамильтонианом

$$H_c = \frac{1}{2}av^2 + \frac{1}{2}\lambda_1^2 \ln(r_1^2 - R^2) - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda \ln r_1^2 + \frac{ag}{\lambda}(av_1 + \lambda_1(\tilde{y}_1 - y_1))$$

и пуассоновой структурой, определяемой компонентами структурного тензора, получаемого из (3.1.5) вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих переменным x_c и y_c .

3.1.5. Классификация возможных движений

Найдены частные решения, позволяющие сказать о том, что существует три возможных типа движений системы «цилиндр – вихрь» (рис. 3.2):

- 1) цилиндр и вихрь движутся вместе в ограниченной полосе изменений координаты y (рис. 3.2а);
- 2) цилиндр покидает вихрь и движется в ограниченной полосе изменений координаты y (рис. 3.2б);
- 3) цилиндр покидает вихрь и движется в направлении действия силы тяжести (рис. 3.2с).

По поводу приведенной классификации стоит отметить, что в системе наблюдаются движения с захватом вихря цилиндром, аналогичные описанным в работе [121], а также движения в ограниченной полосе, как в работах [110, 151].

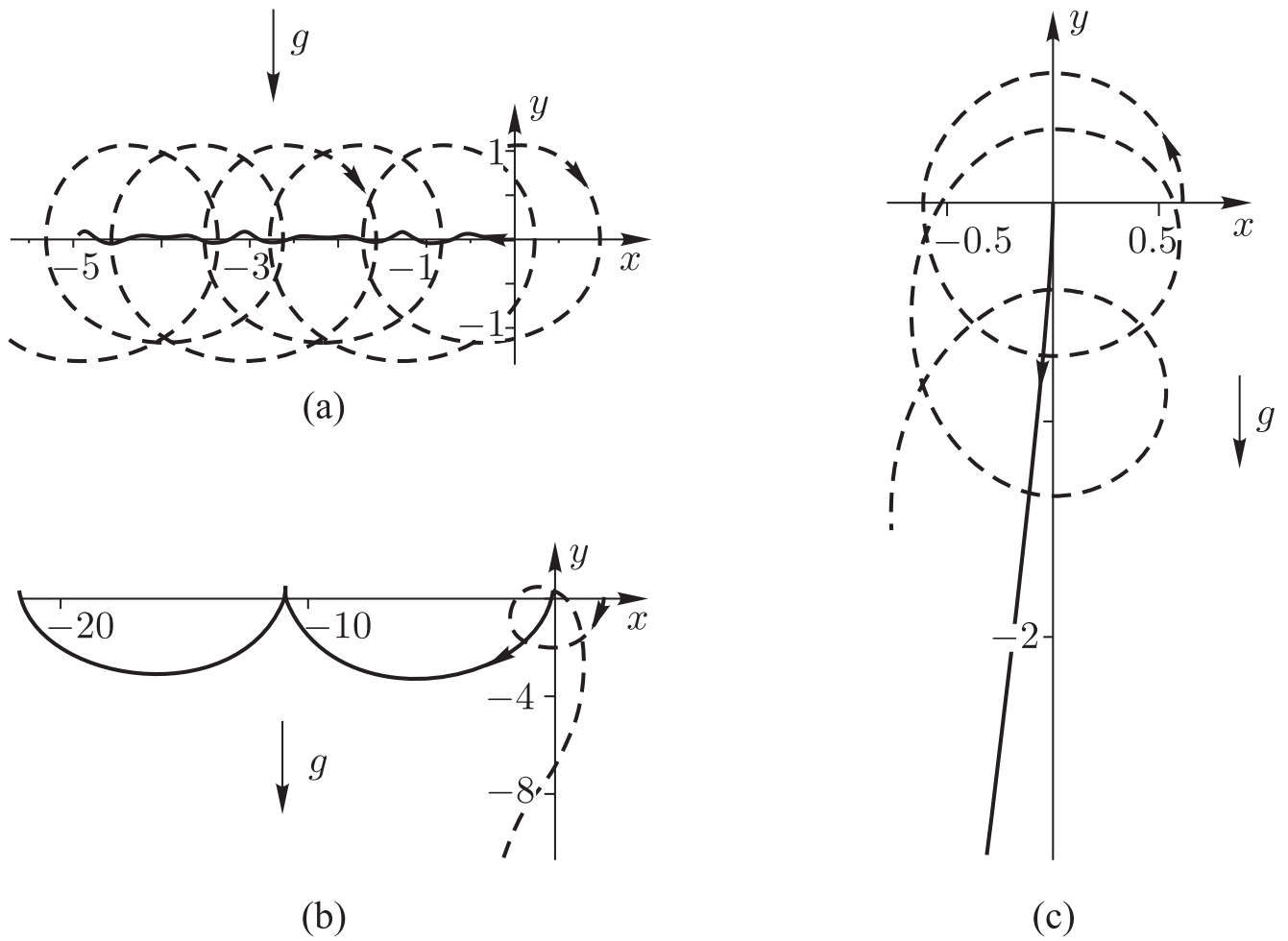


Рис. 3.2. Движение цилиндра (сплошная линия) и вихря (пунктир) в поле силы тяжести: (а) цилиндр и вихрь движутся вместе в ограниченной полосе, вихрь захвачен цилиндром; (б) цилиндр движется в ограниченной полосе, вихрь покидает цилиндр; (с) цилиндр покидает вихрь и движется в направлении действия силы тяжести ($\lambda = \lambda_1$).

В качестве гипотезы заметим, что во время движения цилиндр всегда *остается в ограниченной горизонтальной полосе, то есть «не падает»*, за исключением, быть может, случая $\lambda = \lambda_1$. При падении цилиндра (неограниченном убывании функции $y_c(t)$) вихрь не может быть захвачен цилиндром.

3.1.6. Относительные равновесия и их устойчивость

Будем искать стационарные решения редуцированной системы (3.1.7). Эти решения представляют собой относительные равновесия исходной системы (3.1.1).

Для определения положений равновесия приравняем правые части (3.1.7)

к нулю, откуда находим $v_2 = 0$, $v_1 = -\frac{ag}{\lambda}$. Из гидродинамических соображений легко понять, что единственным решением системы, получаемой подстановкой v_1 и v_2 в вышеупомянутые уравнения из правых частей (3.1.7), будет $x_1 = 0$, что соответствует положению вихря на одной вертикальной прямой с центром цилиндра. Наконец, подставляя x_1 , v_1 , v_2 в правую часть первого уравнения (3.1.7), имеем для положения вихря уравнение

$$\bar{y}_1^4 + (\tilde{\lambda}^2 - \tilde{\lambda}\tilde{\lambda}_1)\bar{y}_1^3 - \tilde{\lambda}^2\bar{y}_1 - 1 = 0, \quad (3.1.8)$$

где введены обозначения $\bar{y}_1 = \frac{y_1}{R}$, $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{agR}}$, $\tilde{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{agR}}$. Интересно отметить, что подобное уравнение было получено в [121] при исследовании задачи адвекции вихря в поле осциллирующего цилиндра.

Таким образом, единственными стационарными решениями вышеуказанной системы (3.1.7) являются $(x_1, y_1, v_1, v_2) = (0, y_1, -\frac{ag}{\lambda}, 0)$, где $y_1 = \bar{y}_1 R$, \bar{y}_1 — корень (3.1.8). Эти решения описывают режимы, при которых цилиндр и вихрь движутся горизонтально, прямолинейно с постоянной скоростью. Для гидродинамически несимметричного тела при отсутствии вихря устойчивость подобного прямолинейного горизонтального движения исследовалась в [110].

Легко понять, что движение цилиндра по горизонтальной прямой с постоянной скоростью возникает при равенстве нулю суммы всех сил, приложенных к нему, то есть в случае, когда сила тяжести уравновешивается подъемной силой, обусловленной наличием циркуляции. Вихрь, помещенный в точку C (рис. 3.3), скорость жидкости в которой равна скорости центра цилиндра, будет неподвижным относительно цилиндра. Следовательно, инверсный образ вихря внутри цилиндра также будет неподвижным относительно него. Тогда, как показано в [152], сила, действующая со стороны вихря на цилиндр, будет равна нулю. В результате такое движение вихря не будет вызывать возмущений прямолинейного равномерного движения цилиндра. Линии тока, соответствующие описанному случаю, изображены на рисунке 3.3.

Из (3.1.8) следует, что положение относительного равновесия вихря опре-

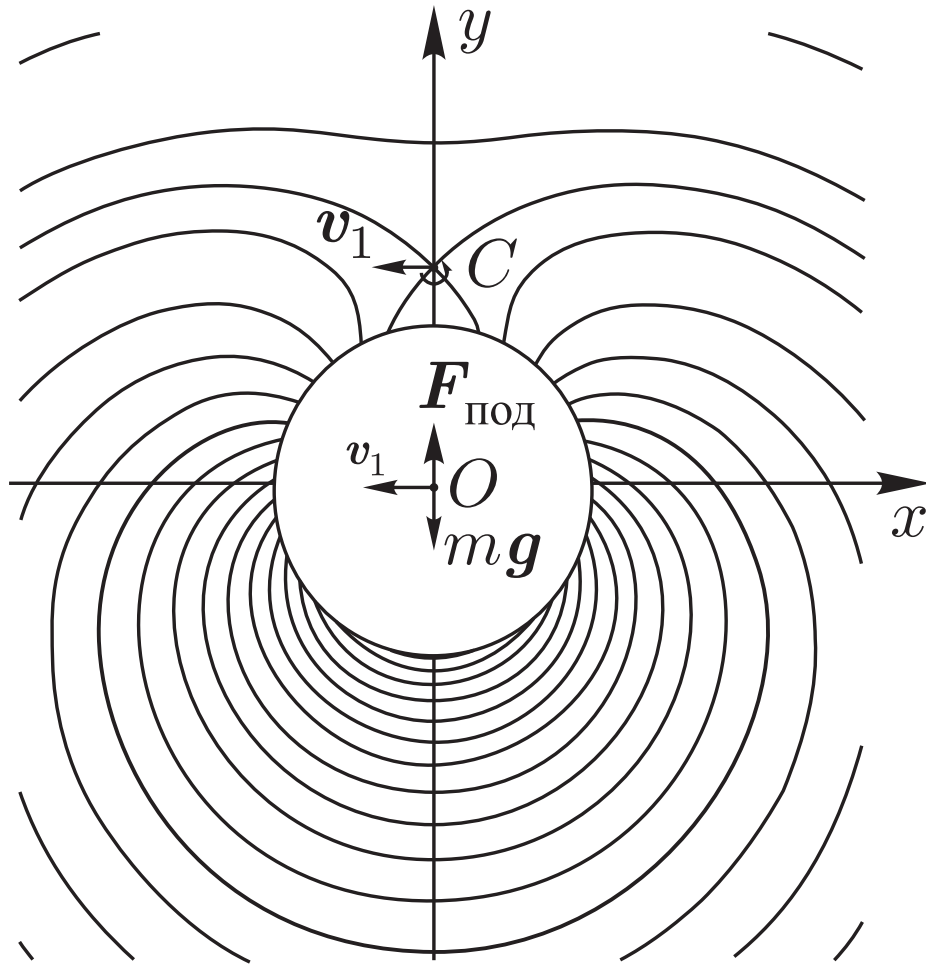


Рис. 3.3. Относительное равновесие цилиндра и вихря.

деляется двумя параметрами $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\lambda}_1$, приведенными циркуляцией и интенсивностью вихря. В общем случае для фиксированных $(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}_1)$ может существовать до 4 положений равновесия (см. рис. 3.4). Единственным ограничением служит условие $|y_1| > R$, так как в противном случае вихрь окажется внутри цилиндра. Без ограничения общности можем считать $\tilde{\lambda} > 0$. Общий вид многолистной поверхности (3.1.8) изображен на рисунке 3.4. Рассмотрим основные особенности этой поверхности.

1. Во второй четверти плоскости $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda})$, соответствующей $\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda} > 0$, имеется только одно положение равновесия вихря, расположенное ниже цилиндра (нижний лист поверхности (3.1.8)).
2. В первой четверти $(\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda} > 0)$ имеется положение равновесия над цилиндром (верхний лист поверхности (3.1.8)). Нижний лист поверхности

(3.1.8) имеет особенность типа «складка», в результате в этой области, соответствующей, например, точкам, лежащим на вертикальной прямой, отрезок которой выделен на рисунке 3.4, возникает три положения равновесия при фиксированных $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda})$: два ниже цилиндра и одно выше цилиндра.

3. Верхний лист поверхности (3.1.8) «обрезается» по оси $\tilde{\lambda}_1 = 0$ условием $y_1 > R$, то есть положение равновесия вихря достигает границы цилиндра сверху.
4. Аналогично предыдущему пункту, нижний лист поверхности (3.1.8) и считая с ним «складка» «обрезается» условием $y_1 < -R$, то есть положения равновесия вихря достигают границы цилиндра снизу.
5. Вид поверхности (3.1.8) в третьей и четвертой четвертях ($\tilde{\lambda} < 0$), в силу симметрии (3.1.8) относительно преобразования $\tilde{\lambda}_1 \rightarrow -\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda} \rightarrow -\tilde{\lambda}$, находится с помощью поворота поверхности, изображенной на рисунке 3.4, относительно оси \bar{y}_1 на 180° .
6. На рисунке 3.4 устойчивые решения (3.1.8) расположены на среднем листе и выделены темно-серым цветом, неустойчивые решения, расположенные на верхнем и нижнем листе, изображены светло-серым цветом, наконец, неустойчивые решения, расположенные на среднем листе, указаны штриховкой.

Обсудим устойчивость найденных относительных равновесий, следуя, например, [166]. Как известно, для исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем необходимо вычислить два инварианта неподвижных точек:

1. индекс квадратичной формы $d^2 H_c$ (то есть симметричной (4×4) -матрицы $\left\| \frac{\partial^2 H_c}{\partial \zeta_k \partial \zeta_j} \right\|$), который принимает значения от 0 до 4;

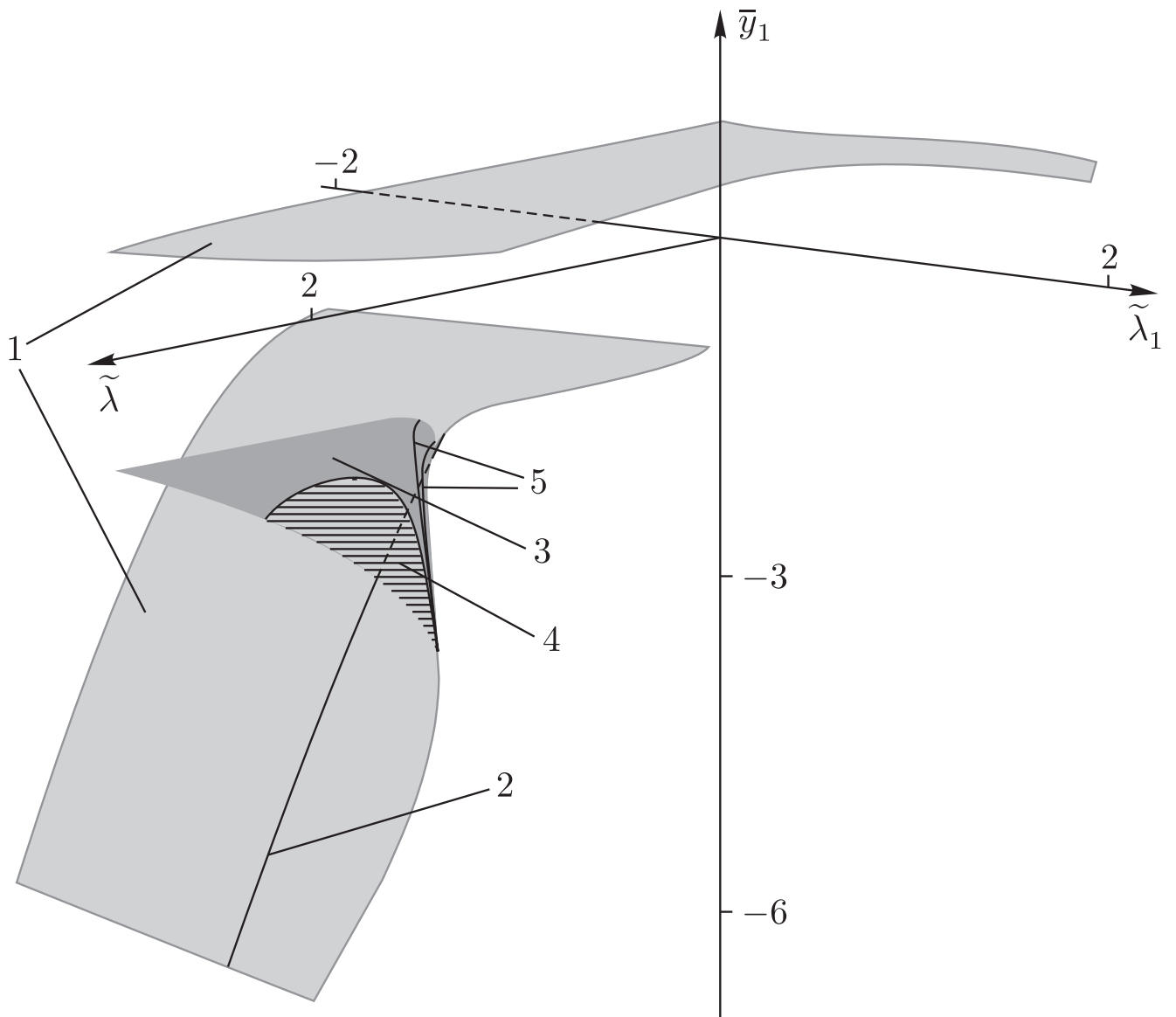


Рис. 3.4. Положения равновесия вихря \bar{y}_1 в зависимости от параметров $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}_1$: 1 — неустойчивые точки ($\text{ind} = 1$), 2 — неустойчивые точки (форма d^2H_c вырождена, система первого приближения удовлетворяет условиям теоремы о неустойчивости), 3 — устойчивые точки ($\text{ind} = 2$, тип точки — центр-центр), 4 — неустойчивые точки ($\text{ind} = 2$, тип точки — фокус-фокус), 5 — резонансные кривые.

- тип особой точки в зависимости от собственных чисел линеаризации векторного поля (то есть симплектической (4×4) -матрицы $\left\| \sum_k J_{ik} \frac{\partial^2 H_c}{\partial \zeta_k \partial \zeta_j} \right\|$), который может принимать одно из следующих значений: центр-центр, седло-центр, седло-седло, фокус-фокус.

Следуя [166], собственные числа линеаризации векторного поля, то есть

корни характеристического полинома

$$\chi(\mu) = \det \left(\sum_k J_{ik} \frac{\partial^2 H_c}{\partial \zeta_k \partial \zeta_j} - \mu E \right) = \mu^4 + a\mu^2 + b, \quad (3.1.9)$$

будем изображать на плоскости коэффициентов характеристического полинома. На рисунке 3.5а, заимствованном из работы [166], изображены области устойчивости и неустойчивости, указаны соответствующие значения индекса квадратичной формы $d^2 H_c$, а также типы неподвижных точек.

Возвращаясь к рисунку 3.4, мы видим, что нижний и верхний листы поверхности (3.1.8) состоят исключительно из неустойчивых неподвижных точек типа седло–центр, так как в них индекс квадратичной формы $d^2 H_c$ равен 1. Эти точки соответствуют области $b < 0$ на рисунке 3.5а. Средний лист состоит из неустойчивых точек типа фокус–фокус и устойчивых точек типа центр–центр. В этих точках индекс $d^2 H_c$ равен 2.

Рассмотрим более подробно область первой четверти плоскости $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda})$, в которой имеется три положения равновесия. Этот фрагмент поверхности (3.1.8) изображен на рисунке 3.5b. Как и на рисунке 3.4, мы видим, что верхний и нижний листы поверхности (3.1.8) состоят из неустойчивых положений равновесия с $\text{ind} = 1$, типа седло–центр, соответствующих области $b < 0$ на рисунке 3.5а. Средний лист поверхности (3.1.8) состоит из точек двух типов: устойчивых точек типа центр–центр и неустойчивых типа фокус–фокус. Индекс $d^2 H_c$ в точках обоих типов $\text{ind} = 2$. Устойчивым точкам соответствует область $\left(a > 0, 0 < b < \frac{a^2}{4} \right)$ на рисунке 3.5а. Неустойчивым точкам соответствует область $b > \frac{a^2}{4}$ на рисунке 3.5а. На рисунках 3.5а и 3.5b изображены кривые, отвечающие резонансам третьего и четвертого порядка, соответственно в $b = \frac{4a^2}{25}$ и $b = \frac{9a^2}{100}$, которые лежат в области устойчивых положений равновесия. Для определения устойчивости точек, лежащих на границах $b = 0$, $b = \frac{a^2}{4}$, на резонансных кривых третьего и четвертого порядка требуется дополнительное исследование.

Наконец, рассмотрим положения равновесия, соответствующие фиксированным значениям $\tilde{\lambda}_1 = 2, 1$ и $\tilde{\lambda} = 4$. Области Хилла в окрестности данных

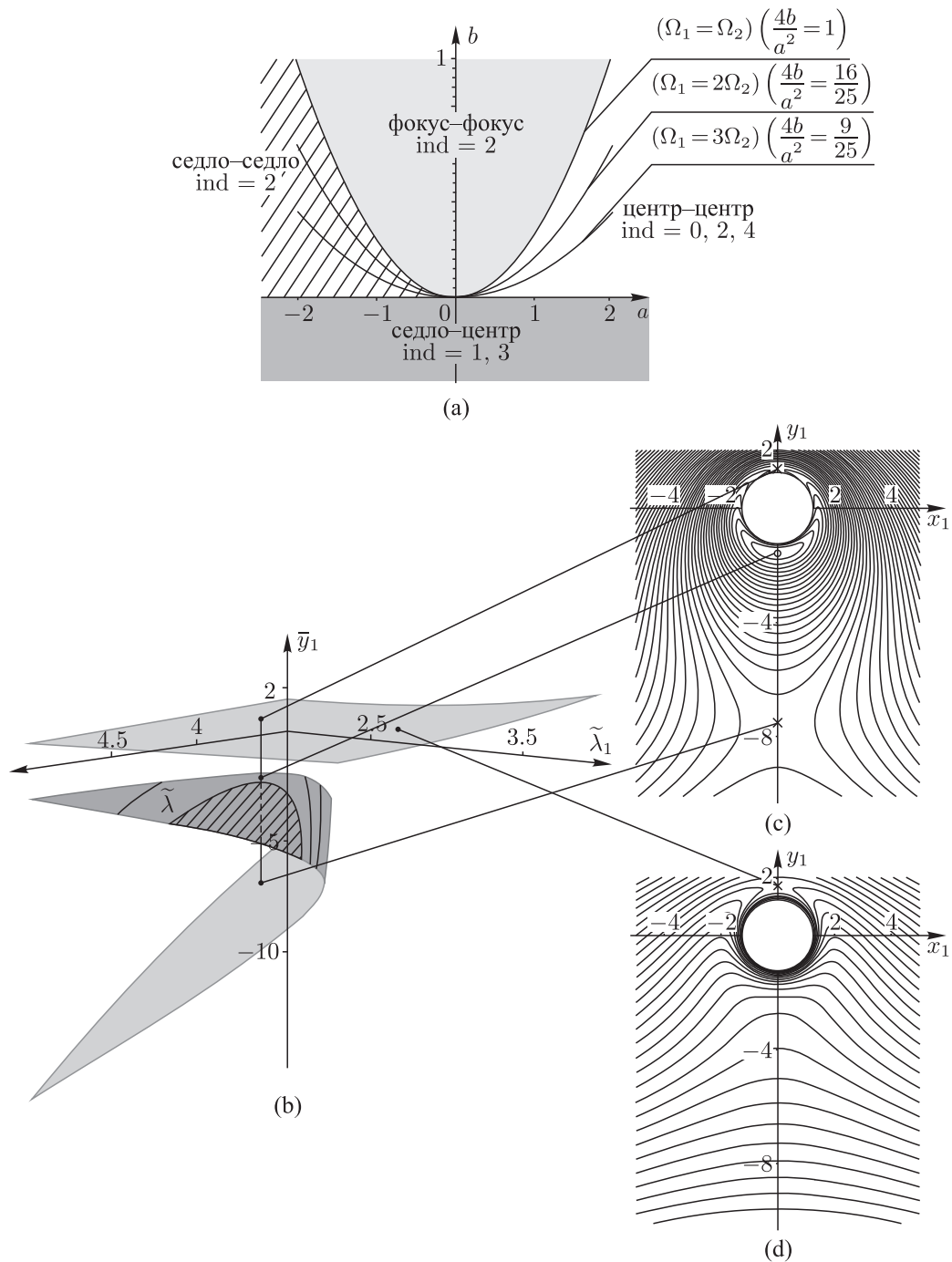


Рис. 3.5. Положения равновесия и их устойчивость. (а) Области устойчивости и неустойчивости и соответствующие типы неподвижных точек на плоскости коэффициентов характеристического полинома. Указаны кривые, соответствующие резонансам третьего и четвертого порядков. (б) Положения относительного равновесия вихря в зависимости от параметров $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}_1$. Отмечены три положения равновесия (два из которых неустойчивы, одно устойчиво), соответствующие фиксированным значениям $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}_1$. При другом значении $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}_1$ указано единственное положение равновесия. (с) Область Хилла для случая трех положений равновесия. (д) Область Хилла для случая единственного положения равновесия. На (с), (д) крестиком отмечены неустойчивые точки, кружком — устойчивая неподвижная точка.

положений изображены на рисунке 3.5с. Очевидно, что верхнее и нижнее положение неустойчивы, а среднее положение устойчиво.

При увеличении циркуляции вокруг цилиндра и неизменной интенсивности вихря, вертикальная прямая, параллельная оси \bar{y}_1 , точки пересечения которой с поверхностью (3.1.8) указывают положения равновесия, будет двигаться вдоль оси $\tilde{\lambda}$. Когда эта прямая пересечет границу, являющуюся образом параболы $b = \frac{a^2}{4}$, тип неподвижной точки сменится с центр–центр на фокус–фокус. Области Хилла в окрестности данных положений равновесия будут аналогичными изображенным на рисунке 3.5с. Среднее положение равновесия при этом становится неустойчивым.

Рассмотрим поведение системы при неизменной циркуляции и увеличении интенсивности вихря. При этом вертикальная прямая, параллельная оси \bar{y}_1 , движется вдоль оси $\tilde{\lambda}_1$. Устойчивая точка типа центр–центр сближается с неустойчивой точкой типа фокус–фокус и на кривой, являющейся образом границы $b = 0$, сливается с ней. При дальнейшем увеличении интенсивности вихря остается только неустойчивое положение равновесия типа седло–центр, расположенное на верхнем листе поверхности (3.1.8), то есть над цилиндром. Соответствующая область Хилла будет иметь вид, изображенный на рисунке 3.5d. Изменение числа положений равновесия при изменении $\tilde{\lambda}_1$, очевидно, носит бифуркационный характер.

Следует отметить, что расположение границы, отделяющей устойчивые и неустойчивые неподвижные точки $\text{ind} = 2$, зависит от параметров задачи (массы и радиуса цилиндра), так как собственные числа линеаризации векторного поля существенным образом зависят от a и R . Напротив, вид поверхности (3.1.8) от a и R не зависит. Тип неподвижных точек, отображенный на рисунках 3.4 и 3.5, определялся для значений $a = R = 1$.

В данном разделе рассмотрена задача о движении под действием силы тяжести массивного кругового цилиндра, взаимодействующего с точечным вихрем, в идеальной жидкости. Приведена гамильтонова форма уравнений дви-

жения. Указаны возможные типы движений системы. Найдены относительные равновесия системы и исследована их устойчивость. Следует отметить, что верхнее положение равновесия всегда является неустойчивым, нижнее положение равновесия также всегда неустойчиво. Наконец, среднее положение равновесия может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от параметров задачи.

В следующем разделе мы рассмотрим обобщение задачи на случай N вихрей. Также необходимо рассмотреть движение цилиндрического тела произвольной формы. В рассмотренной задаче кругового цилиндра и вихря необходимо исследование на наличие периодических решений в окрестности найденных стационарных решений. Интерес представляет также вопрос о существовании хореографий. Среди нерешенных задач отметим еще вопрос о нахождении границы режимов движения цилиндра и вихря, изображенных на рисунке 3.2, как функции параметров, а также исследования бифуркационного характера смены числа положений равновесия редуцированной системы.

3.2. Движение кругового цилиндрического твердого тела, взаимодействующего с несколькими точечными вихрями, в поле силы тяжести

В данном разделе будет рассмотрена задача о движении под действием силы тяжести твердого тела, имеющего форму бесконечного кругового цилиндра, взаимодействующего с N прямолинейными вихревыми нитями, в идеальной жидкости. Как и в предыдущем разделе, циркуляция жидкости вокруг цилиндра предполагается отличной от нуля. Вновь с помощью неканонической скобки Пуассона уравнения, описывающие систему, будут записаны в гамильтоновой форме. Также будут найдены первые интегралы системы, число которых недостаточно для интегрируемости в смысле Лиувилля.

3.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим твердое тело, имеющее форму кругового цилиндра, которое движется в безграничном объеме идеальной жидкости. На тело помимо окружающей жидкости действует сила тяжести. Предполагается, что жидкость совершает плоскопараллельное движение и покоится на бесконечности. Образующие цилиндра ортогональны плоскости потока. В жидкости движется N прямолинейных вихревых нитей, каждая из которых параллельна образующим цилиндра, и имеет интенсивность Γ_i , где $i = \overline{1, N}$. Жидкость обтекает цилиндр с циркуляцией Γ , в общем случае отличной от нуля (рис. 3.6). Из постановки ясно, что задача является двумерной. Требуется качественно исследовать движение системы.

3.2.2. Уравнения движения

Аналогично [19, 152], уравнения движения цилиндра и точечных вихрей в поле силы тяжести запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i &= -\mathbf{v} + \text{grad } \tilde{\varphi}_i(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}, \\ \dot{\mathbf{r}}_c &= \mathbf{v}, \\ a\dot{v}_1 &= \lambda v_2 - \sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{y}_i - y_i), \\ a\dot{v}_2 &= -\lambda v_1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{x}_i - x_i) - ag, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

где $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c)$ — радиус-вектор центра цилиндра относительно неподвижной системы координат Oxy , $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ — скорость цилиндра, $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ — вектор, соединяющий центр цилиндра с i -м вихрем, $\tilde{\mathbf{r}}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = \frac{R^2 \mathbf{r}_i}{r_i^2}$ — вектор, соединяющий центр цилиндра с инверсным образом i -го вихря (рис. 3.6), R — радиус цилиндра, a — константа, включающая массу и присоединенную массу цилиндра, ag — величина силы тяжести, действующей на цилиндр, λ и λ_i — постоянные, связанные с циркуляцией жидкости вокруг цилиндра и ин-

тенсивностью i -го вихря соотношениями $\lambda = \frac{\Gamma}{2\pi}$, $\lambda_i = \frac{\Gamma_i}{2\pi}$. Плотность жидкости полагается равной 2π . Функция $\tilde{\varphi}_i(\mathbf{r})$ является потенциалом течения $\varphi(\mathbf{r})$ идеальной жидкости вне цилиндра с исключенной особенностью в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{R^2}{r^2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \lambda \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_i}{x - \tilde{x}_i} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_i}{x - x_i} \right) \right). \quad (3.2.2)$$

Уравнения (3.2.1), описывающие движение цилиндра и вихря, как и в [19], отличаются от приведенных в [152] дополнительным слагаемым в уравнении для цилиндра, учитывающим действие силы тяжести.

Как и в работе [134] можно заметить, что конечномерная система (3.2.1), описывающая движение цилиндра и вихрей в поле силы тяжести, сохраняет инвариантную меру и может быть представлена в гамильтоновой форме.

Теорема 13. *Уравнения движения (3.2.1) можно представить в виде*

$$\dot{\zeta}_i = \{\zeta_i, H\} = \sum_k \{\zeta_i, \zeta_k\} \frac{\partial H}{\partial \zeta_k}, \quad (3.2.3)$$

где ζ_i — координаты фазового вектора системы (3.2.1)

$$\zeta = \{x_1, y_1, \dots, x_N, y_N, v_1, v_2, x_c, y_c\},$$

H — гамильтониан, а компоненты кососимметрического структурного тензора пуассоновой структуры $J_{ij}(\zeta) = \{\zeta_i, \zeta_j\}$ удовлетворяют тождеству Якоби:

$$\sum_l \left(J_{il} \frac{\partial J_{jk}}{\partial \zeta_l} + J_{kl} \frac{\partial J_{ij}}{\partial \zeta_l} + J_{jl} \frac{\partial J_{ki}}{\partial \zeta_l} \right) = 0, \quad \forall i, j, k.$$

Доказательство. Несложно непосредственной проверкой показать, что система (3.2.1) обладает первым интегралом, имеющим смысл интеграла энергии

$$H = \frac{1}{2}av^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\lambda_i^2 \ln(r_i^2 - R^2) - \lambda_i \lambda \ln r_i^2) + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \ln \frac{R^4 - 2R^2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + r_i^2 r_j^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} + agy_c. \quad (3.2.4)$$

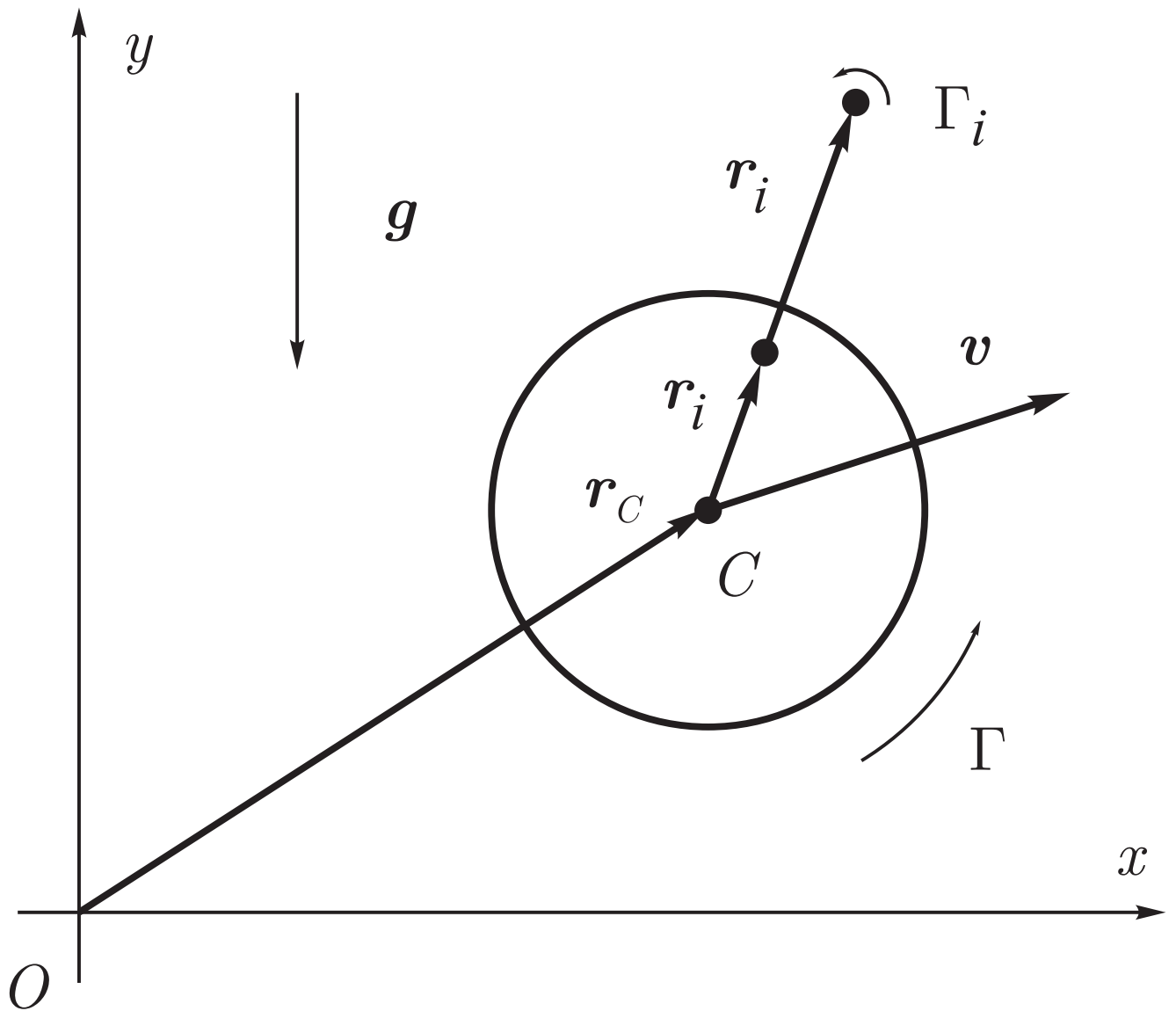


Рис. 3.6. Круговой цилиндр и точечные вихри в поле силы тяжести.

Считая H гамильтонианом системы, подберем компоненты J_{ij} , чтобы уравнения движения (3.2.3) совпали с системой (3.2.1). Отличные от нуля компоненты,

аналогично [134], имеют вид:

$$\begin{aligned}
\{v_1, x_i\} &= \frac{1}{a} \frac{r_i^4 - R^2(x_i^2 - y_i^2)}{r_i^4}, & \{v_1, y_i\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_i y_i}{r_i^4}, \\
\{v_2, x_i\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_i y_i}{r_i^4}, & \{v_2, y_i\} &= \frac{1}{a} \frac{r_i^4 + R^2(x_i^2 - y_i^2)}{r_i^4}, \\
\{v_1, v_2\} &= \frac{\lambda}{a^2} - \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i r_i^4 - R^4}{a^2 r_i^4}, & \{x_i, y_i\} &= -\frac{1}{\lambda_i}, \\
\{x_c, v_1\} &= \{y_c, v_2\} = \frac{1}{a}.
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Непосредственным вычислением проверяется, что компоненты структурного тензора (3.2.5) удовлетворяют тождеству Якоби. \square

Как известно гамильтонова форма уравнений (3.2.1) позволяет применить хорошо развитый формализм для качественного анализа, исследования устойчивости и пр.

3.2.3. Первые интегралы и редукция

Наличие выделенного направления, задаваемого силой тяжести, нарушает симметрию относительно поворотов системы, что в свою очередь влечет несохранение интеграла, существовавшего для аналогичной системы в отсутствие силы тяжести [134]. Тем не менее у рассматриваемой системы существует два первых интеграла, отвечающие трансляциям — автономный интеграл P , соответствующий горизонтальному импульсу системы, и неавтономный интеграл Q , соответствующий вертикальному импульсу:

$$\begin{aligned}
Q &= a(v_2 + gt) + \lambda x_c - \sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{x}_i - x_i), \\
P &= av_1 - \lambda y_c + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{y}_i - y_i).
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

По-видимому, других первых интегралов у системы нет, что подтверждается хаотическим поведением решений на сечении Пуанкаре (см. рис. 3.7, 3.8). Неинтегрируемость задачи падения цилиндрического тела произвольной формы с

циркуляцией показана в работе [165].

Очевидно, что в случае $N > 1$, как и в рассмотренном в предыдущем разделе случае $N = 1$, число независимых дополнительных первых интегралов недостаточно для полной интегрируемости по Лиувиллю. Подробнее о характере динамики системы при $N = 1$ будет сказано в следующем разделе.

3.3. Сечение Пуанкаре и хаотический характер динамики системы

Как известно, отсутствие достаточного количества аналитических интегралов уравнений движения тесно связано со сложным, хаотическим поведением траекторий системы. Строгие доказательства неинтегрируемости, как правило, опираются на применение сложнейшей математической техники. С другой стороны, наблюдение хаотического характера динамики при численном интегрировании уравнений движения указывает на отсутствие первых интегралов.

Воспользуемся вышеуказанным обстоятельством при исследовании системы (3.1.7). Это гамильтонова система, которая обладает двумя степенями свободы. Для исследования характера динамики указанной системы построим сечение Пуанкаре.

Фазовый вектор системы имеет вид

$$\zeta = \{x_1, y_1, v_1, v_2, \}.$$

Зафиксируем значение одной из фазовых переменных $y_1 = 0.9$, что определяет плоскость сечения Пуанкаре в окрестности относительного положения равновесия вихря. Для значения энергии $H_c = -17$ сечение Пуанкаре имеет вид, представленный на рисунке 3.7. Укажем значения остальных параметров системы: $a = 1$, $R = 0.5$, $g = 10$, $\Gamma = 10$, $\Gamma_1 = 8.4375$.

Штриховкой на рисунке 3.7 указаны точки на фазовой плоскости x_1v_1 , лежащие вне области возможности движения. На сечении видны области регу-

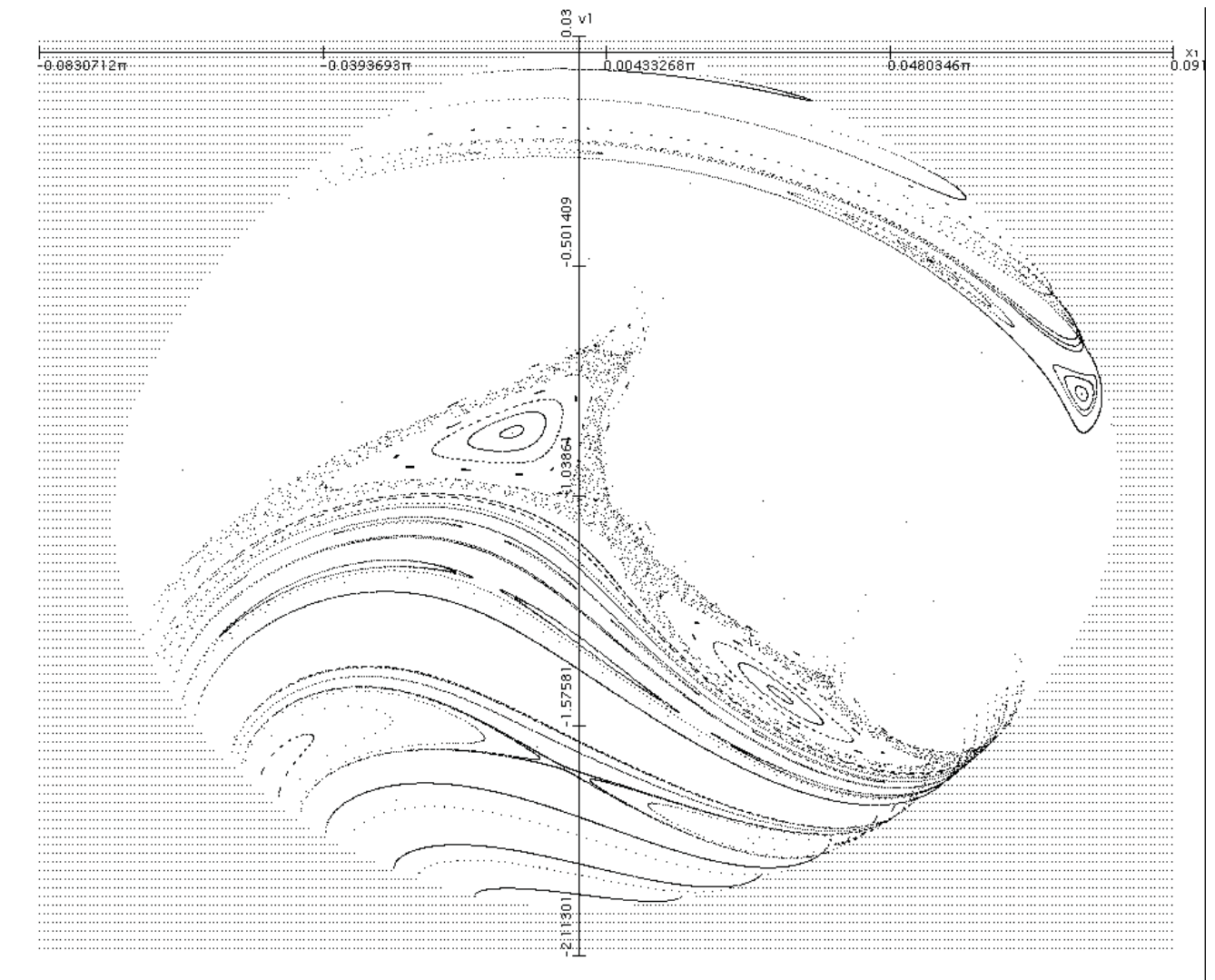


Рис. 3.7. Сечение Пуанкаре редуцированной системы «цилиндр-вихрь», демонстрирующее хаотический характер динамики системы.

лярной динамики, образованные пересечением с поверхностью уровня энергии инвариантных торов. В области, обрамляющей торы второго порядка, виден стохастический слой, появление которого свидетельствует о хаотическом характере динамики системы.

Также можно построить сечение Пуанкаре на поверхности уровня гамильтониана, что позволяет пространственно разделить точки, проекции которых на плоскость $x_1 v_1$ совпадают. Такое сечение изображено на рисунке 3.8.

Вид сечения на рисунке 3.8 также указывает на наличие регулярной и хаотической динамики системы при данных значениях параметров задачи. Ха-

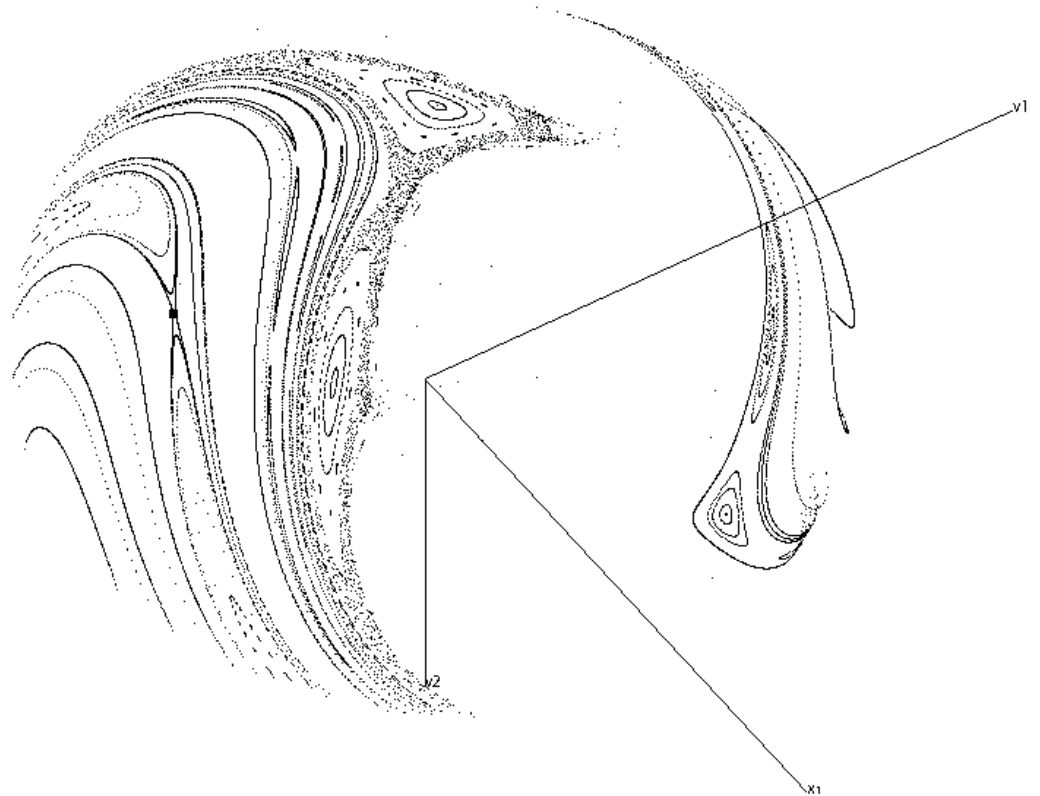


Рис. 3.8. Сечение Пуанкаре редуцированной системы «цилиндр-вихрь», при тех же значениях параметров, что и приведенное на рисунке 3.7, построенное на поверхности уровня энергии системы. Квадратиком выделено положение гиперболической неподвижной точки.

ос свидетельствует об отсутствии дополнительного интеграла и подтверждает первоначальную гипотезу о неинтегрируемости задачи. Интерес представляет дальнейшее исследование эволюции динамики и выяснение возможных сценариев перехода к хаосу.

Можно увидеть также, как изменяется картина сечения Пуанкаре в зависимости от выбора положения плоскости сечения. Для иллюстрации этой зависимости приведем ниже несколько изображений как двумерных сечений Пуанкаре (Рис. 3.9), так и сечений построенных на поверхности уровня гамиль-

тониана (Рис. 3.10,3.11).

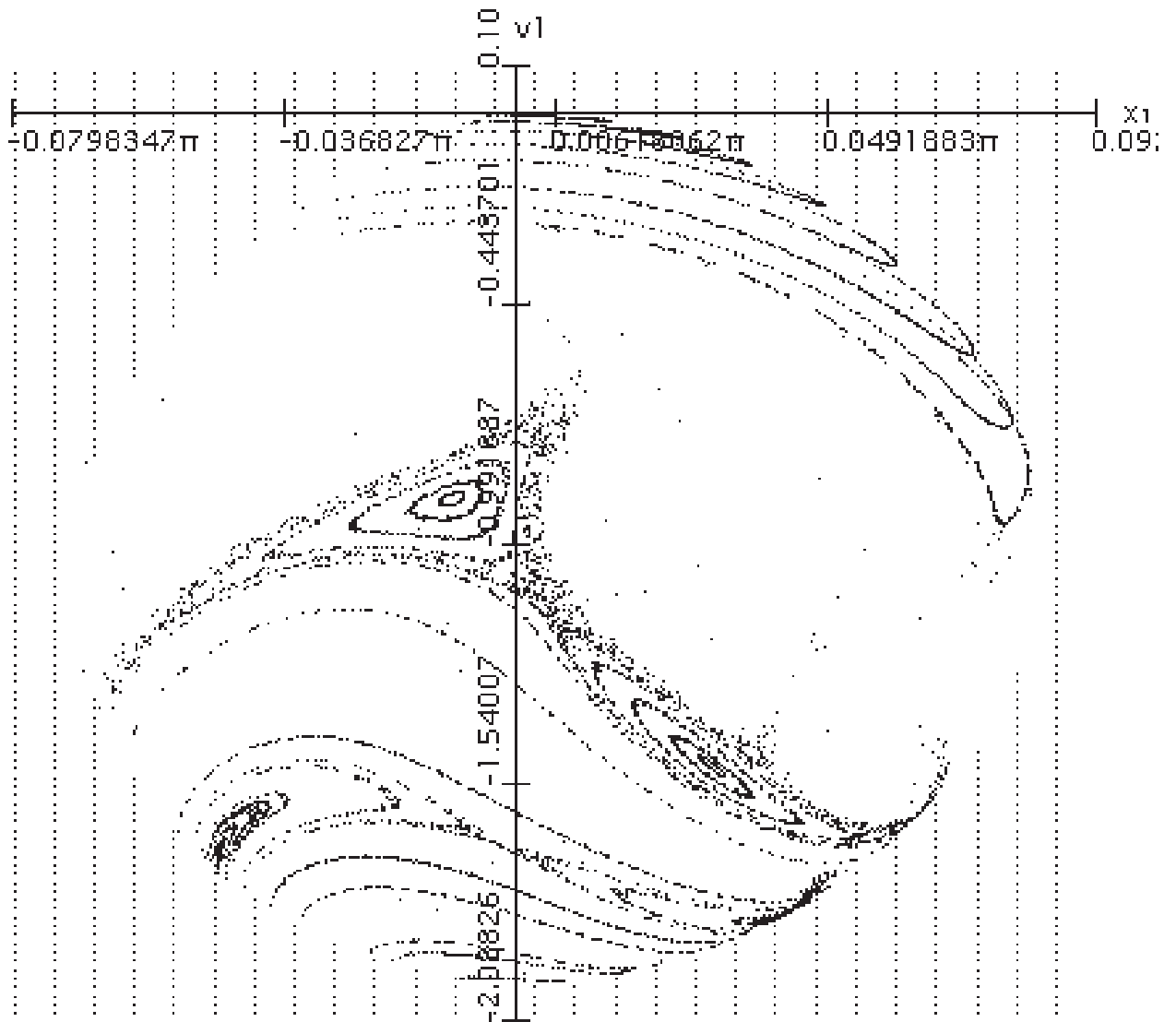


Рис. 3.9. Сечение Пуанкаре редуцированной системы «цилиндр-вихрь», демонстрирующее хаотический характер динамики системы.

В заключении отметим, что при численном исследовании характера динамики систем, рассмотренных в данной главе, построение сечений Пуанкаре представляет серьезные объективные трудности. Это связано с тем, что в отличие от классических интегрируемых и даже большинства более общих неинтегрируемых гамильтоновых систем, порождаемых полиномиальными гамильтонианами, системы вихревой динамики и гамильтоновы системы, описывающие

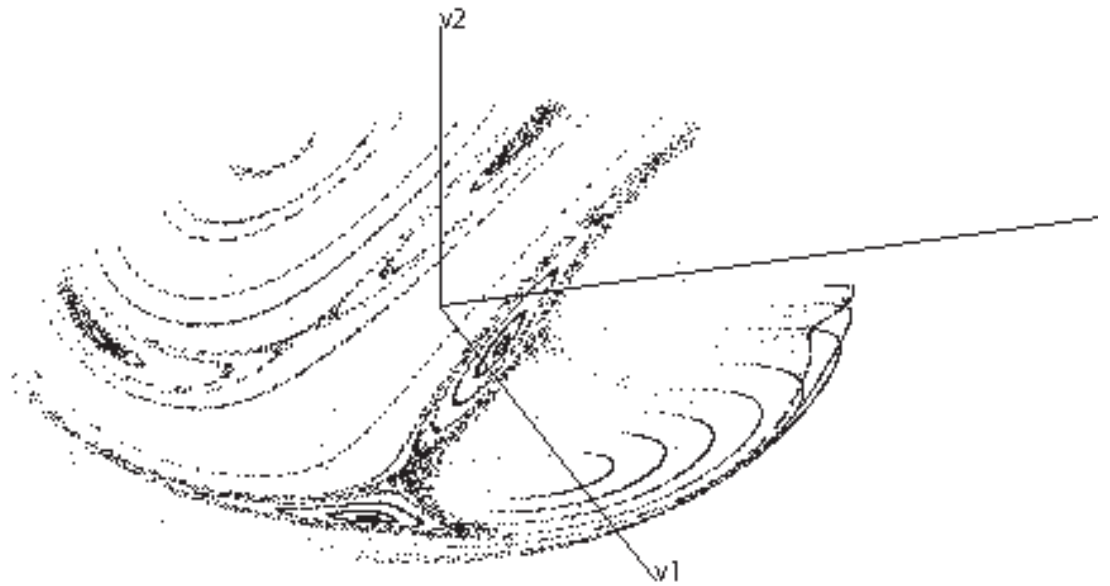


Рис. 3.10. Сечение Пуанкаре редуцированной системы «цилиндр-вихрь», при тех же значениях параметров, что и приведенное на рисунке 3.9, построенное на поверхности уровня энергии системы. Квадратиками выделено положение эллиптических неподвижных точек.

динамику твердых тел в идеальной жидкости, взаимодействующих с вихревыми нитями, обладают более сложными функциями Гамильтона. При этом поверхность уровня гамильтониана может быть некомпактной и, как следствие, траектории из многих областей, являющимися подмножествами области возможности движения покидают плоскость сечения.

3.4. Краткие итоги главы 3

В данной главе рассмотрена задача о движении под действием силы тяжести массивного кругового цилиндра, взаимодействующего с N точечными вихрями, в идеальной жидкости. Приведена гамильтонова форма уравнений движения. Указаны возможные типы движений системы. Найдены относительные равновесия системы и исследована их устойчивость. Следует отметить, что

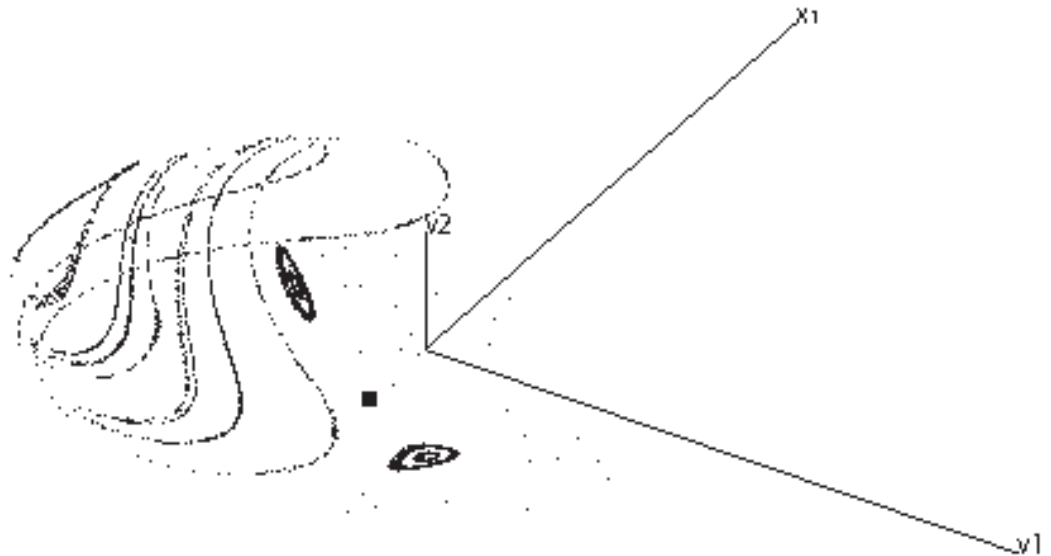


Рис. 3.11. Сечение Пуанкаре редуцированной системы «цилиндр-вихрь», при тех же значениях параметров, что и приведенное на рисунке 3.9, построенное на поверхности уровня энергии системы. Картина отличается от сечения, приведенного на рисунке 3.10, выбором начальных данных при численном интегрировании. Квадратиком выделено положение гиперболической неподвижной точки.

верхнее положение равновесия всегда является неустойчивым, нижнее положение равновесия также всегда неустойчиво. Наконец, среднее положение равновесия может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от параметров задачи.

Приведены сечения Пуанкаре, демонстрирующие хаотический характер динамики системы цилиндр-вихрь, что является подтверждением гипотезы о неинтегрируемости системы, высказанной в работах [18, 19].

Одним из возможных интересных частных решений задачи о движении цилиндра и нескольких вихрей является симметричная конфигурация двух вихрей, следующих за цилиндром, падающим в поле силы тяжести. Этот случай является обобщением известного решения Фёпля (например, [132, 167]). По-

дробному рассмотрению этого случая будет посвящена следующая глава диссертации.

В дальнейшем планируется исследовать движение цилиндрического тела произвольной формы. В рассмотренной задаче кругового цилиндра и вихря необходимо исследование на наличие периодических решений в окрестности найденных стационарных решений. Интерес представляет также вопрос о существовании хореографий. Среди нерешенных задач отметим еще вопрос о нахождении границы режимов движения цилиндра и вихря, изображенных на рисунке 3.2, как функции параметров, а также исследования бифуркационного характера смены числа положений равновесия редуцированной системы.

Глава 4

**Движение кругового цилиндра,
взаимодействующего с вихревой парой, в поле
силы тяжести в идеальной жидкости**

В данной главе рассмотрена задача о движении в поле силы тяжести твердого тела, обладающего формой кругового цилиндра, взаимодействующего с N точечными вихрями, в идеальной жидкости. В общем случае циркуляция жидкости вокруг цилиндра предполагается отличной от нуля. Уравнения движения системы представлены в гамильтоновой форме. Указаны первые интегралы системы - горизонтальная и вертикальная компоненты импульса - последний из которых, очевидно, неавтономный. Основное внимание сконцентрировано на исследовании конфигурации аналогичной задаче Фёппля: цилиндр движется в поле тяжести в сопровождении вихревой пары ($N = 2$). В этом случае циркуляция вокруг цилиндра равна нулю, а уравнения движения рассматриваются на некотором инвариантном многообразии. Показано, что, в отличие от конфигурации Фёппля, в поле силы тяжести относительное равновесие вихрей невозможно. Рассмотрена ограниченная задача: цилиндр предполагается достаточно тяжелым, вследствие чего вихри не оказывают влияния на его падение. Как полная, так и ограниченная задача исследована численно, в результате отмечено качественное сходство поведения решений: в большинстве случаев взаимодействие вихревой пары и цилиндра носит характер рассеяния. Для исходной системы рассмотрена процедура регуляризации и асимптотическая система.

Основные результаты данной главы опубликованы в работах [22, 25].

4.1. Предварительные сведения

Движение твердого тела в идеальной жидкости в присутствии вихревых структур является одной из фундаментальных проблем современной гидродинамики.

Обзор классических и современных работ по динамике точечных вихрей внутри и вне круговой области можно найти в одноименной главе книги [168]. Одним из первых исследования уравнений движения точечных вихрей на плоскости были выполнены Кирхгофом в работе [70]. Уже Гельмгольцем [69] было рассмотрено движение вихревых нитей, взаимодействующих с плоскостью. Общая форма уравнений движения точечных вихрей внутри и вне произвольной области была получена Раусом [102].

В работе Фёшля [167] исследовано движение вихревой пары вокруг кругового цилиндра в набегающем потоке. Устойчивость и хаотизация движения в задаче Фёшля были рассмотрены в [132], а также в ряде статей, указанных в списке литературы [132].

В данной главе рассматривается падение твердого тела в идеальной жидкости, взаимодействующего с симметричной парой точечных вихрей. Физически такая ситуация возникает если предполагать, что жидкость является не слишком вязкой, основные эффекты вязкости сосредоточены в пограничном слое, а в процессе движения вихри могут срывать с тела, а затем уже взаимодействие тела и вихрей происходит по законам идеальной жидкости. Аналогичная образом возникает циркуляция вокруг тела [164], но это, как правило, требует наличия острых кромок и дополнительно также приводит к образованию и срыву вихрей (вследствие постулата Кутта-Жуковского).

Влияние вязкости на падение тела состоит в наличии сопротивления движению, а сопротивление — это не только внутреннее трение жидкости, но и затраты энергии на генерацию вихрей. Поэтому представляется целесообразным и более простым с аналитической точки зрения рассмотрение вместо схода

вихрей в вязкой жидкости, движения тела в идеальной жидкости, в которой существует завихренность. Простейший эффект завихренности — это наличие циркуляции при обтекании тела. Падение тела с циркуляцией рассмотрено, например, в работах [18–21, 110, 163, 169]. В [169] показано, что при наличии циркуляции возникающая подъемная сила приводит к тому, что тело движется в некоторой горизонтальной полосе. Дальнейшим развитием представлений о влиянии завихренности на тела является задача о движении тела при наличии точечных вихрей. Гамильтонов формализм для точечных вихрей первоначально был развит Кирхгофом [70]. В работах [118, 120, 134] этот формализм был распространен на случай движения цилиндрического твердого тела и точечных вихрей в отсутствии тяжести. В работе [120] были получены *точные* уравнения движения, в статье [134] доказана интегрируемость задачи о движении цилиндра и вихря. В работе [118] указаны некоторые частные решения и исследована качественная картина движения цилиндра и вихря.

Следующим этапом в развитии послужила возникшая в 60-х годах XX века модель Брауна–Майкла (Brown–Michael), где сход вихрей с острой кромки тела постулируется (поскольку, как известно, возникать в идеальной жидкости вихри не могут), а их интенсивность меняется со временем. Движение твердого тела и вихрей исследуется с помощью модели Брауна–Майкла, например, в работе [164].

В отличие от точечных вихрей падение тела в присутствии распределенной завихренности («вихревая пелена») изучено в работе [153]. Но, хотя в работах [153, 164] получены точные уравнения, система из-за своей сложности исследуется авторами численно.

Отметим также работу [121], где исследовано движение вихря в предположении поступательного движения цилиндра. Таким образом, рассмотрение в [121] посвящено вопросам рассеяния, что не позволяет учесть влияние вихря на движение цилиндра. Основное внимание в работе [121] сконцентрировано на исследовании возможности хаотических режимов движения вихря и хаотического

рассеяния при возмущении движения цилиндра.

Исторически проявление стохастичности в задаче рассеяния вихревых диполей одними из первых рассмотрели авторы работы [170]. Современные результаты в задаче рассеяния вихревых пар можно найти в работе [171].

В дальнейшем, в работе [172] была рассмотрена задача взаимодействия симметричной вихревой пары с круговым цилиндром.

В работах [18, 19] исследовалась задача о движении тяжелого цилиндра и одного вихря в поле тяжести, при наличии отличной от нуля циркуляции. В [20, 21] эти результаты обобщены на случай N вихрей, а также приведены сечения Пуанкаре, свидетельствующие о неинтегрируемости задачи о движении цилиндра и одного вихря в поле тяжести. Этим вопросам была посвящена предыдущая глава.

В данной главе, следуя в основном результатам работ [22, 25], исследовано движение массивного кругового цилиндра и вихревой пары в поле тяжести. Циркуляция жидкости вокруг цилиндра всюду в настоящей главе предполагается равной нулю.

Стоит отметить, что ненулевая циркуляция разрушает зеркальную симметрию относительно вертикальной плоскости, перпендикулярной образующей цилиндра и вихревым нитям, и, как следствие, рассматриваемая задача с ненулевой циркуляцией больше не обладает подобием конфигурации Фёшля. Одной из тем дальнейших исследований может оказаться нетривиальный вопрос существования стационарных решений в случае отличной от нуля циркуляции.

4.2. Постановка задачи

Рассмотрим твердое тело, имеющее форму кругового цилиндра, которое движется в безграничном объеме идеальной жидкости в поле силы тяжести. Предполагается, что жидкость совершает плоскопараллельное движение и покоится на бесконечности. Образующие цилиндра ортогональны плоскости потока.

В жидкости движутся две прямолинейные вихревые нити, каждая из которых параллельна образующим цилиндра, и имеет интенсивность Γ_1 и Γ_2 .

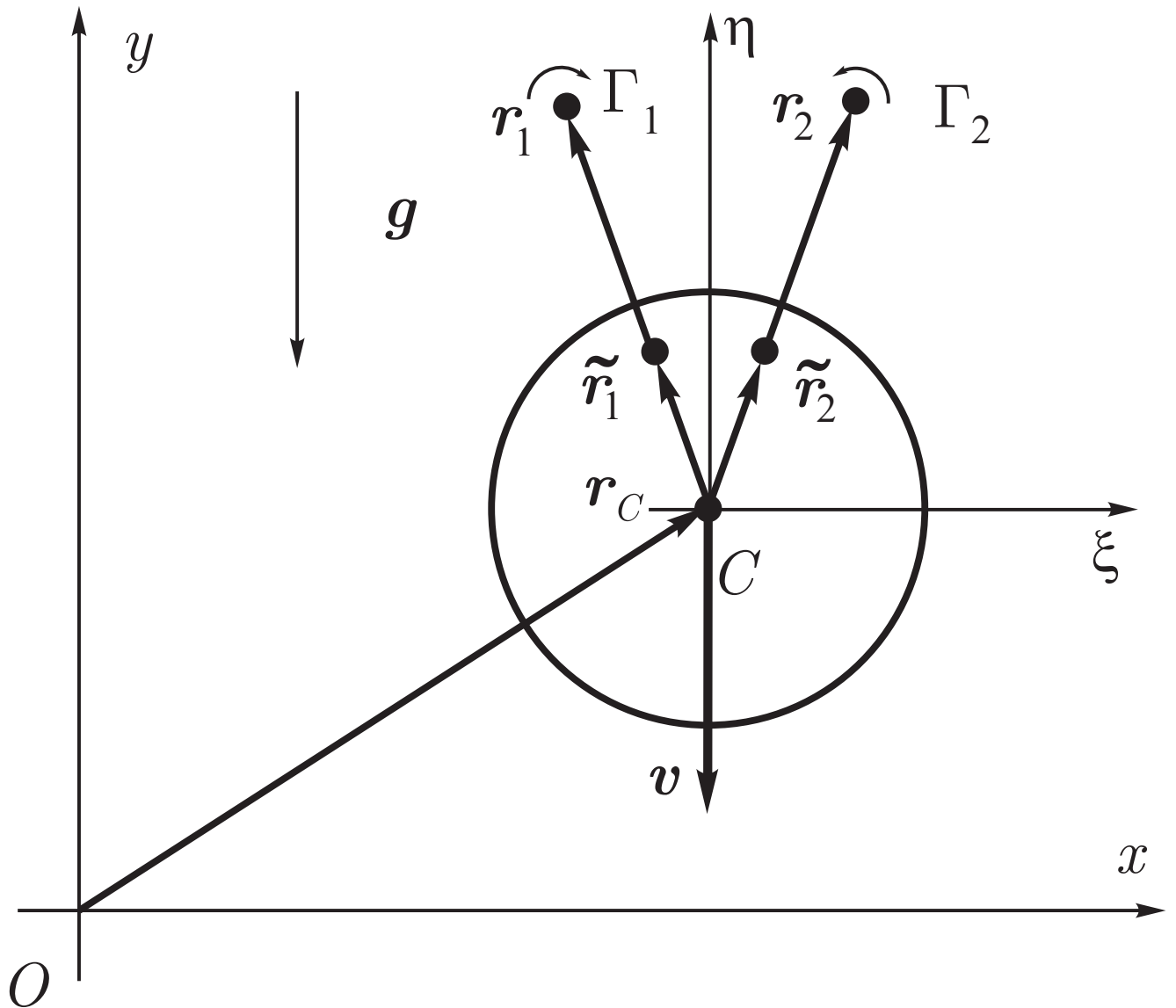


Рис. 4.1. Круговой цилиндр и пара точечных вихрей в поле силы тяжести.

Хорошо известны решения Фёппля [132, 167]: цилиндр обтекается стационарным набегающим потоком жидкости, симметрично относительно прямой, проходящей через центр цилиндра и параллельной направлению потока, неподвижно относительно цилиндра, расположены два вихря с противоположными по знаку и равными по абсолютной величине интенсивностями.

В этой главе рассматривается обобщение задачи Фёппля на случай движе-

ния в поле силы тяжести. Как и в классической постановка Фёпpla на интенсивности вихрей накладывается ограничение $\Gamma_1 = -\Gamma_2$. Выделенным направлением в нашей задаче является направление действия силы тяжести. В силу этого, вихри расположены симметрично относительно вертикальной прямой, проходящей через центр цилиндра. Для того, чтобы не нарушать симметрию задачи, цилиндр предполагается движущимся вдоль вертикали, жидкость при этом обтекает цилиндр с циркуляцией $\Gamma = 0$ (рис. 4.1). Из постановки ясно, что задача является двумерной. Требуется качественно исследовать движение системы.

4.3. Уравнения движения

В работах [19, 21] получены уравнения движения цилиндра и N точечных вихрей в поле силы тяжести. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i &= -\mathbf{v} + \text{grad } \tilde{\varphi}_i(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}, \\ \dot{\mathbf{r}}_c &= \mathbf{v}, \\ a\dot{v}_1 &= \lambda v_2 - \sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{y}_i - y_i), \\ a\dot{v}_2 &= -\lambda v_1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{x}_i - x_i) - ag, \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

где $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c)$ — радиус-вектор центра цилиндра относительно неподвижной системы координат Oxy , $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ — скорость цилиндра, $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ — вектор, соединяющий центр цилиндра с i -м вихрем, $\tilde{\mathbf{r}}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = \frac{R^2 \mathbf{r}_i}{r_i^2}$ — вектор, соединяющий центр цилиндра с инверсным образом i -го вихря (рис. 4.2), R — радиус цилиндра, a — константа, включающая массу и присоединенную массу цилиндра, ag — величина силы тяжести, действующей на цилиндр, λ и λ_i — постоянные, связанные с циркуляцией жидкости вокруг цилиндра и интенсивностью i -го вихря соотношениями $\lambda = \frac{\Gamma}{2\pi}$, $\lambda_i = \frac{\Gamma_i}{2\pi}$. Плотность жидкости полагается равной 2π . Функция $\tilde{\varphi}_i(\mathbf{r})$ является потенциалом течения $\varphi(\mathbf{r})$ иде-

альной жидкости вне цилиндра с исключенной особенностью в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{R^2}{r^2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \lambda \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_i}{x - \tilde{x}_i} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_i}{x - x_i} \right) \right). \quad (4.3.2)$$

Уравнения (4.3.1), описывающие движение цилиндра и вихря, уже были получены в предыдущих главах и отличаются от приведенных в [134] дополнительным слагаемым в уравнении для цилиндра, учитывающим действие силы тяжести.

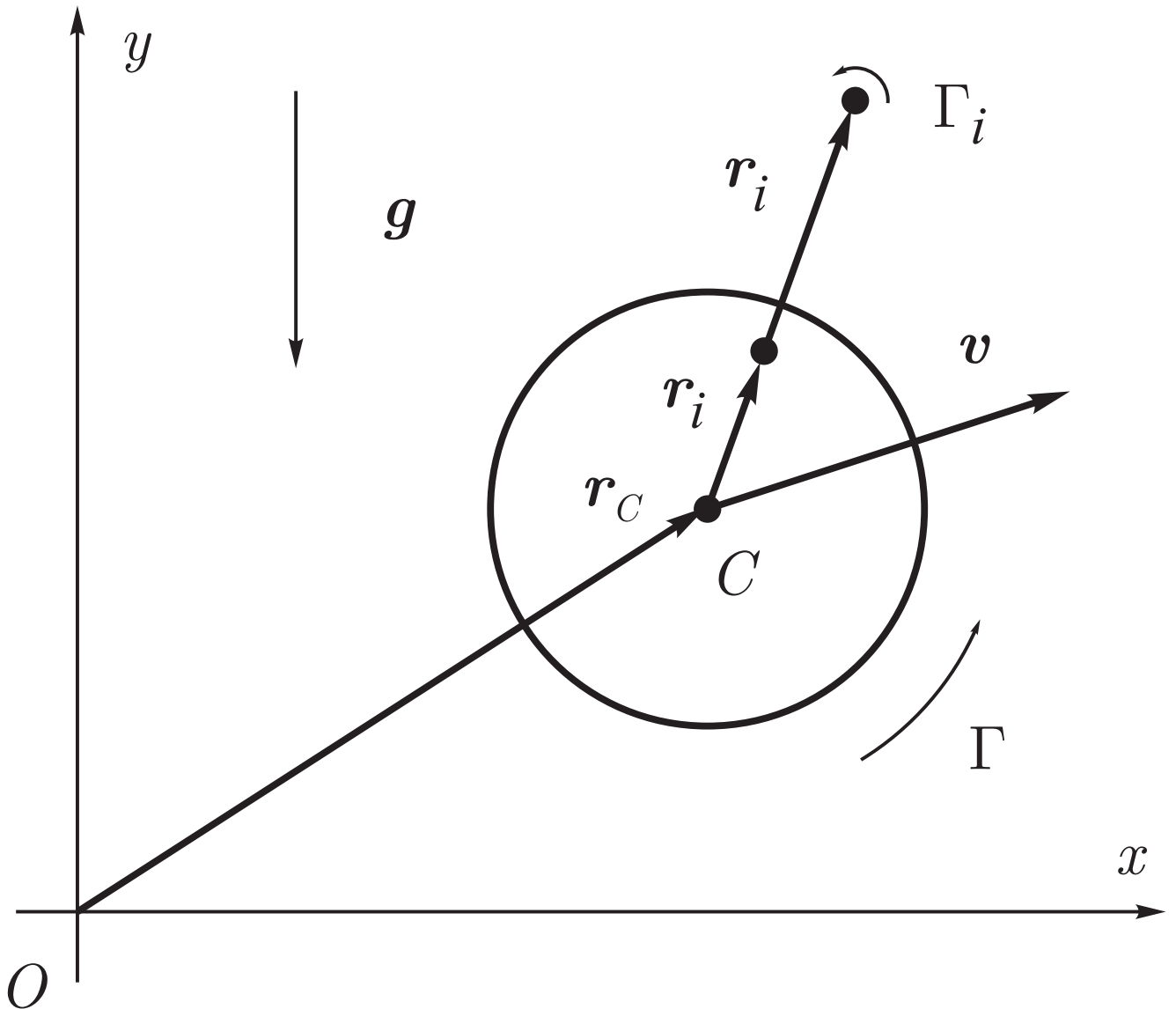


Рис. 4.2. Круговой цилиндр и точечные вихри в поле силы тяжести.

Как и в работе [134] можно заметить, что конечномерная система (4.3.1),

описывающая движение цилиндра и вихрей в поле силы тяжести, сохраняет инвариантную меру и может быть представлена в гамильтоновой форме.

Теорема 14. Уравнения движения (4.3.1) можно представить в виде

$$\dot{\zeta}_i = \{\zeta_i, H\} = \sum_k \{\zeta_i, \zeta_k\} \frac{\partial H}{\partial \zeta_k}, \quad (4.3.3)$$

где ζ_i — координаты фазового вектора системы (4.3.1)

$$\zeta = \{x_1, y_1, \dots, x_N, y_N, v_1, v_2, x_c, y_c\},$$

H — гамильтониан, а компоненты кососимметрического структурного тензора пуассоновой структуры $J_{ij}(\zeta) = \{\zeta_i, \zeta_j\}$ удовлетворяют тождеству

Якоби:

$$\sum_l \left(J_{il} \frac{\partial J_{jk}}{\partial \zeta_l} + J_{kl} \frac{\partial J_{ij}}{\partial \zeta_l} + J_{jl} \frac{\partial J_{ki}}{\partial \zeta_l} \right) = 0, \quad \forall i, j, k.$$

Доказательство. Несложно непосредственной проверкой показать, что система (4.3.1) обладает первым интегралом, имеющим смысл интеграла энергии

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} a v^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\lambda_i^2 \ln(r_i^2 - R^2) - \lambda_i \lambda \ln r_i^2) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \ln \frac{R^4 - 2R^2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + r_i^2 r_j^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} + a g y_c. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Считая H гамильтонианом системы, подберем компоненты J_{ij} , чтобы уравнения движения (4.3.3) совпали с системой (4.3.1). Отличные от нуля компоненты, аналогично [21], имеют вид:

$$\begin{aligned} \{v_1, x_i\} &= \frac{1}{a} \frac{r_i^4 - R^2(x_i^2 - y_i^2)}{r_i^4}, & \{v_1, y_i\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_i y_i}{r_i^4}, \\ \{v_2, x_i\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_i y_i}{r_i^4}, & \{v_2, y_i\} &= \frac{1}{a} \frac{r_i^4 + R^2(x_i^2 - y_i^2)}{r_i^4}, \\ \{v_1, v_2\} &= \frac{\lambda}{a^2} - \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i r_i^4 - R^4}{a^2 r_i^4}, & \{x_i, y_i\} &= -\frac{1}{\lambda_i}, \\ \{x_c, v_1\} &= \{y_c, v_2\} = \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Непосредственным вычислением проверяется, что компоненты структурного тензора (4.3.5) удовлетворяют тождеству Якоби. \square

Как известно, гамильтонова форма уравнений (4.3.1) позволяет применить хорошо развитый формализм для качественного анализа, исследования устойчивости и пр.

4.4. Первые интегралы

Наличие выделенного направления, задаваемого силой тяжести, нарушает симметрию относительно поворотов системы, что в свою очередь влечет несохранение интеграла, существовавшего для аналогичной системы в отсутствие силы тяжести [134]. Тем не менее у рассматриваемой системы существует два первых интеграла, отвечающие трансляциям — автономный интеграл P , соответствующий горизонтальному импульсу системы, и неавтономный интеграл Q , соответствующий вертикальному импульсу:

$$\begin{aligned} Q &= a(v_2 + gt) + \lambda x_c - \sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{x}_i - x_i), \\ P &= av_1 - \lambda y_c + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{y}_i - y_i). \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Других первых интегралов у системы нет, что подтверждается хаотическим поведением решений на сечении Пуанкаре, вид которых приведен в работах [20]. Неинтегрируемость задачи падения цилиндрического тела произвольной формы с циркуляцией показана в работе [165].

4.5. Задача Фёппля в поле тяжести

Рассмотрим подробно движение цилиндра и двух вихрей. Геометрия задачи изображена на рисунке 4.1. Уравнения (4.3.1) имеют вид

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -v_1 + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}_1}, \\
 \dot{y}_1 &= -v_2 + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}_1}, \\
 \dot{x}_2 &= -v_1 + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}_2}, \\
 \dot{y}_2 &= -v_2 + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}_2}, \\
 a\dot{v}_1 &= \lambda v_2 - \lambda_1(\tilde{y}_1 - \dot{y}_1) - \lambda_2(\tilde{y}_2 - \dot{y}_2), \\
 a\dot{v}_2 &= -\lambda v_1 + \lambda_1(\tilde{x}_1 - \dot{x}_1) + \lambda_2(\tilde{x}_2 - \dot{x}_2) - ag, \\
 \dot{x}_c &= v_1, \\
 \dot{y}_c &= v_2,
 \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

где, следуя (4.3.2), потенциалы с исключенной особенностью

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varphi}_1(\mathbf{r}) &= -\frac{R^2}{r^2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \lambda \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \lambda_1 \operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_1}{x - \tilde{x}_1} \right) + \\
 &+ \lambda_2 \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_2}{x - \tilde{x}_2} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_2}{x - x_2} \right) \right), \\
 \tilde{\varphi}_2(\mathbf{r}) &= -\frac{R^2}{r^2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \lambda \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \lambda_1 \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_1}{x - \tilde{x}_1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_1}{x - x_1} \right) \right) + \\
 &+ \lambda_2 \operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_2}{x - \tilde{x}_2} \right).
 \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

Гамильтониан (4.3.4) и интегралы движения (4.4.1) принимают вид

$$H = \frac{1}{2}av^2 + \frac{1}{2}(\lambda_1^2 \ln(r_1^2 - R^2) + \lambda_2^2 \ln(r_2^2 - R^2) - \lambda_1\lambda \ln r_1^2 - \lambda_2\lambda \ln r_2^2) + \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 \ln \frac{R^4 - 2R^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + r_1^2 r_2^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} + agy_c, \quad (4.5.3)$$

$$Q = a(v_2 + gt) + \lambda x_c - (\lambda_1(\tilde{x}_1 - x_1) + \lambda_2(\tilde{x}_2 - x_2)),$$

$$P = av_1 - \lambda y_c + (\lambda_1(\tilde{y}_1 - y_1) + \lambda_2(\tilde{y}_2 - y_2)).$$

Рассмотрим движения системы на инвариантном многообразии, определяемом соотношениями

$$\lambda = 0, x_2 = -x_1, y_2 = y_1, \lambda_2 = -\lambda_1, v_1 = 0, \quad (4.5.4)$$

следующими из требований симметрии задачи. Устойчивость этого многообразия пока нами не рассматривается. Отметим здесь исследования системы 4-х вихрей [71].

Система (4.5.1) в этом случае приобретает следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}_1}, \\ \dot{y}_1 &= -v_2 + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}_1}, \\ av_2 &= 2\lambda_1(\dot{\tilde{x}}_1 - \dot{x}_1) - ag, \\ \dot{x}_c &= 0, \\ \dot{y}_c &= v_2, \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

где потенциал (4.5.2)

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(\mathbf{r}) &= -\frac{R^2}{r^2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \lambda_1 \operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_1}{x - \tilde{x}_1} \right) - \\ &- \lambda_1 \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y - \tilde{y}_1}{x + \tilde{x}_1} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y - y_1}{x + x_1} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

а гамильтониан и интегралы (4.5.3)

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2}av^2 + \lambda_1^2 \ln(x_1^2 + y_1^2 - R^2) - \frac{1}{2}\lambda_1^2 \ln \frac{R^4 - 2R^2(y_1^2 - x_1^2) + (x_1^2 + y_1^2)^2}{4x_1^2} + agy_c, \\
 Q &= a(v_2 + gt) - 2\lambda_1(\tilde{x}_1 - x_1), \\
 P &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.5.7}$$

Заметим, что пятое уравнение системы (4.5.1) превращается в тождество и интеграл P обращается в ноль на инвариантном многообразии.

Будем, следуя Фёпплю, искать решения системы (4.5.5), соответствующие конфигурациям вихрей, неподвижным относительно цилиндра, то есть неподвижные точки отображения, задаваемого соответствующим фазовым потоком, тогда

$$x_1 = \text{const}, y_1 = \text{const}. \tag{4.5.8}$$

Используя (4.5.8) в (4.5.5), получим

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x} \right|_{r=\bar{r}_1} &= 0, \\
 \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial y} \right|_{r=\bar{r}_1} &= v_2, \\
 \dot{v}_2 &= -g, \\
 \dot{x}_c &= 0, \\
 \dot{y}_c &= v_2,
 \end{aligned}
 \tag{4.5.9}$$

Воспользовавшись (4.5.6) в (4.5.9), получаем для нахождения неподвижных то-

чек систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{R^2 x_1 y_1 v_2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} - \frac{2\lambda_1 (y_1 - \tilde{y}_1) x_1 \tilde{x}_1}{((x_1 - \tilde{x}_1)^2 + (y_1 - \tilde{y}_1)^2)((x_1 + \tilde{x}_1)^2 + (y_1 - \tilde{y}_1)^2)} &= 0, \\ v_2 &= v_2(0) - gt, \\ x_c &= x_c(0), \\ y_c &= y_c(0) + v_2(0)t - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned} \tag{4.5.10}$$

где $v_2(0)$, $x_c(0)$, $y_c(0)$ обозначают вертикальную скорость и положение цилиндра в начальный момент времени. Очевидно, что одновременно удовлетворить требованиям (4.5.8) и первому уравнению (4.5.10) невозможно, так как вертикальная скорость явно зависит от времени. Таким образом, вышеприведенные рассуждения содержат доказательство следующего факта.

Теорема 15. *В поле силы тяжести невозможно существование движений цилиндра и вихревой пары, при котором симметрично расположенные вихри остаются неподвижными относительно цилиндра.*

Замечание 1. *С физической точки зрения легко понять причину нереализуемости вышеописанной конфигурации. Как известно [132, 167], координаты равновесного положения вихрей в решении Фёппля зависят от скорости набегающего потока. В нашем случае скорость цилиндра меняется, что приводит к изменению координат положений равновесия.*

В связи с тем, что непосредственное нахождение аналитических решений системы (4.5.5) представляется на данный момент невозможным, исследуем ее численно.

Результат интегрирования системы представлен на рисунках 4.3, 4.4 и 4.5. На рисунке 4.3 сплошными линиями показаны траектории вихрей, а пунктиром траектория центра цилиндра. На рисунке 4.4 отображены те же движения вихрей, что и на рисунке 4.3, но в системе отсчета, связанной с цилиндром.

На рисунке 4.5 изображены движение цилиндра и многократное рассеяние вихревой пары, расстояние между вихрями и расстояние от вихрей до цилиндра, как функции времени. На рисунках 4.3а и 4.4а изображен «пролетный» случай, когда цилиндр проходит между вихрями пары и движется далее отдельно. На рисунках 4.3b и 4.4b представлен второй типичный сценарий рассеяния - вихревая пара движется перед цилиндром. На рисунке 4.5 представлен процесс многократного рассеяния по второму сценарию.

Рассмотрим подробнее особенности движения системы. Взаимодействие цилиндра с вихрями при падении в поле тяжести приводит к тому, что ускорение цилиндра при приближении к вихрям становится меньше, чем g . Движение вихрей в свою очередь отклоняется от прямолинейного. Тем не менее действие, оказываемое вихрями на цилиндр оказывается сосредоточенным в окрестности того участка траектории вихря, который лежит в непосредственной близости от вихрей. Дальнейшее движение цилиндра продолжается практически только под действием окружающей жидкости и силы тяжести. Более наглядно поведение вихрей можно представить, если рассмотреть картину их движения в системе отсчета, связанной с цилиндром, как показано на рисунке 4.4. На рисунке 4.4а видно как вихри начинают удаляться от цилиндра, затем на траекториях видны точки поворота, пройдя которые вихри приближаются к цилиндру. Наконец, вихри притягиваются к цилиндру, находясь при движении в непосредственной близости от него, а затем удаляются практически прямолинейно. Параметры изображенной на рисунках 4.3а, 4.4а системы $R = 0.5$, $a = 10$, $\lambda_1 = 23$, $g = 10$. Движение на рисунке 4.3 цилиндр начинает из начала координат из состояния покоя. Вихри находятся в точках с координатами $(-1, -1)$ и $(1, -1)$. Движение анализируется в течение времени $t_0 = 3.725$.

Другим сценарием движения цилиндра и вихревой пары, который демонстрирует характерные особенности системы, является падение цилиндра и движение вихревой пары перед цилиндром в виде объекта, размер которого мал по сравнению с размером цилиндра. Этот случай изображен ниже на рисунках

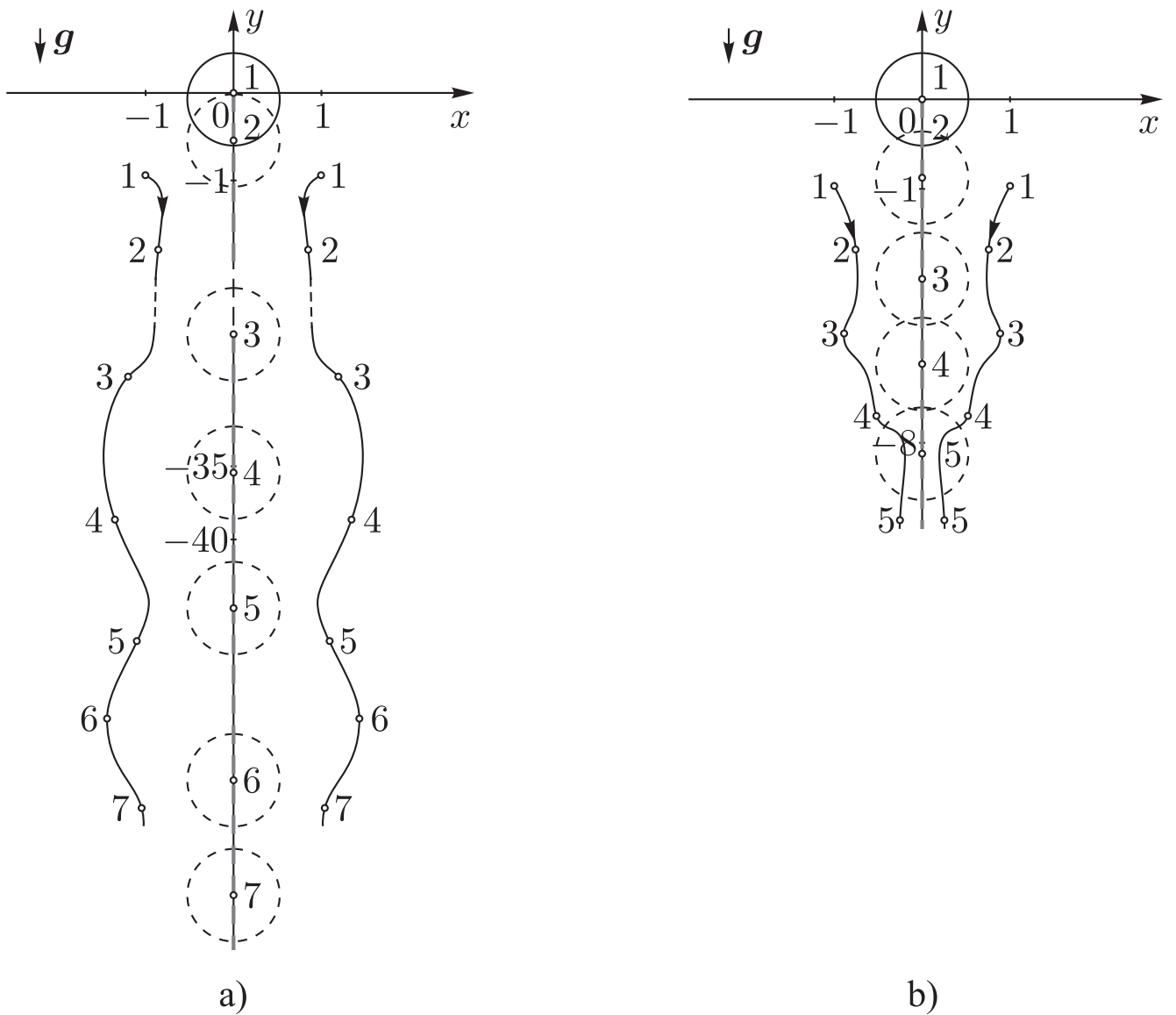


Рис. 4.3. Круговой цилиндр и пара точечных вихрей в поле силы тяжести. а) Вихревая пара рассеивается цилиндром, который продолжает движение отдельно. б) Пара движется перед цилиндром.

4.3b и 4.4b. Интересно, что вихревая пара в результате взаимодействия замедляет падение цилиндра, в то время как сама получает дополнительный импульс и удаляется от цилиндра в направлении его движения. На рисунке 4.4b видно, аналогично начальной стадии движения, изображенной на рисунке 4.4a, как вихри начинают удаляться от цилиндра, затем пройдя точки поворота, приближаются к цилиндру. Далее вихри притягиваются, образуя малый объект в виде пары, и, обгоняя цилиндр, движутся вниз. Параметры изображенной на рисун-

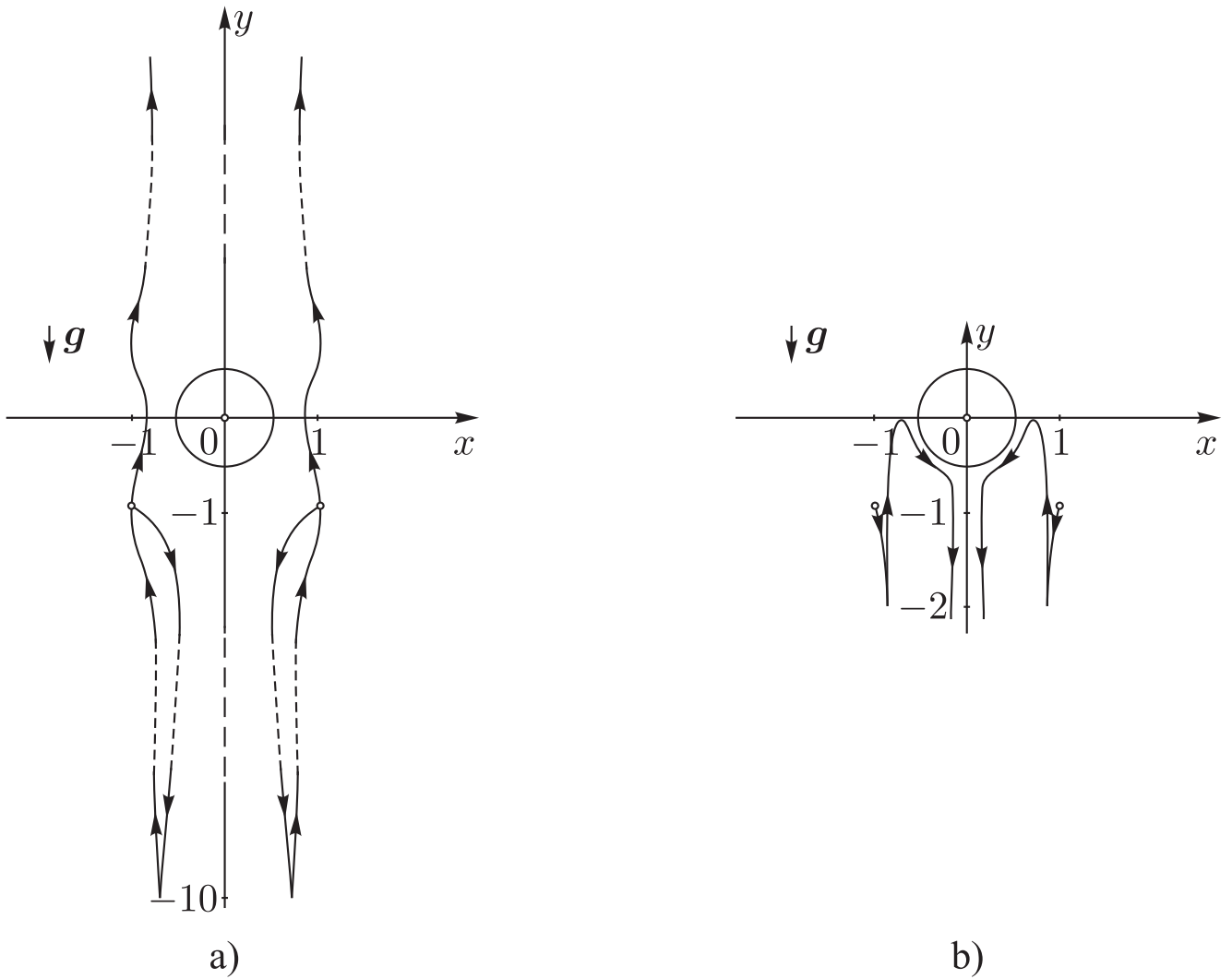


Рис. 4.4. Рассеяние вихревой пары круговым цилиндром в поле силы тяжести. а) Вихревая пара удаляется от цилиндра на бесконечность в результате рассеяния. б) Пара рассеивается "назад".

ках 4.3b и 4.4b системы $R = 0.5$, $a = 10$, $\lambda_1 = 7$, $g = 10$. Начальные данные выбраны аналогично предыдущему случаю. Движение анализируется в течение времени $t_0 = 1.25$.

Интересно исследовать поведение системы на больших временах. Общая картина движения изображена на рисунке 4.5а. Чтобы сделать процесс относительного перемещения более наглядным, на рисунках 4.5b и 4.5c изображены зависимости от времени расстояния между вихрями в паре $|x_1 - x_2|$ и расстояние от вихря до центра цилиндра $(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}$.

Из сопоставления зависимостей, представленных на рисунках 4.5а, 4.5b и 4.5с, очевидно, что траектории вихрей представляют собой последовательность из резких, кратковременных отклонений от траектории цилиндра, которые вызваны взаимодействием вихрей и цилиндра на близких расстояниях, и практически прямолинейных участков движения, которые наблюдаются при удалении вихревой пары от цилиндра. При численном исследовании наблюдается, как и описано выше, постепенное сближение вихрей, которые уменьшают ускорение цилиндра, а сама пара, отталкиваясь от цилиндра движется перед цилиндром как малый объект. В дальнейшем пара движется без влияния цилиндра с постоянной скоростью, а цилиндр ускоряемый силой тяжести нагоняет пару и рассеивает вихри, отклоняя их от линии своего движения в противоположные стороны. Далее вихри снова, сближаясь, замедляют движение цилиндра, в свою очередь приближаются друг к другу ближе, чем на предыдущем участке прямолинейного движения, и, отталкиваясь, удаляются от цилиндра, после чего движутся равномерно. Затем цилиндр вновь нагоняет пару и весь процесс повторяется подобным себе образом. На рисунке 4.5а показаны три первых сближения. Анализируемая система имеет параметры $R = 0.5$, $a = 10$, $\lambda_1 = 7$, $g = 10$. Время движения $t_0 = 16.05$.

Итак, мы видим движения системы, при которых процесс рассеяния цилиндром вихревой пары является многократным, причем каждое рассеяние выглядит подобным образом с единственным отличием: размер вихревой пары с каждым рассеянием становится все меньше.

Сложность системы (4.5.5) для непосредственного изучения приводит нас к необходимости дополнительных упрощений в постановке.

4.6. Ограниченная задача Фёппля в поле тяжести

Предположим, что цилиндр очень массивный – это означает, что движение цилиндра определяется действием силы тяжести и не зависит от движения вих-

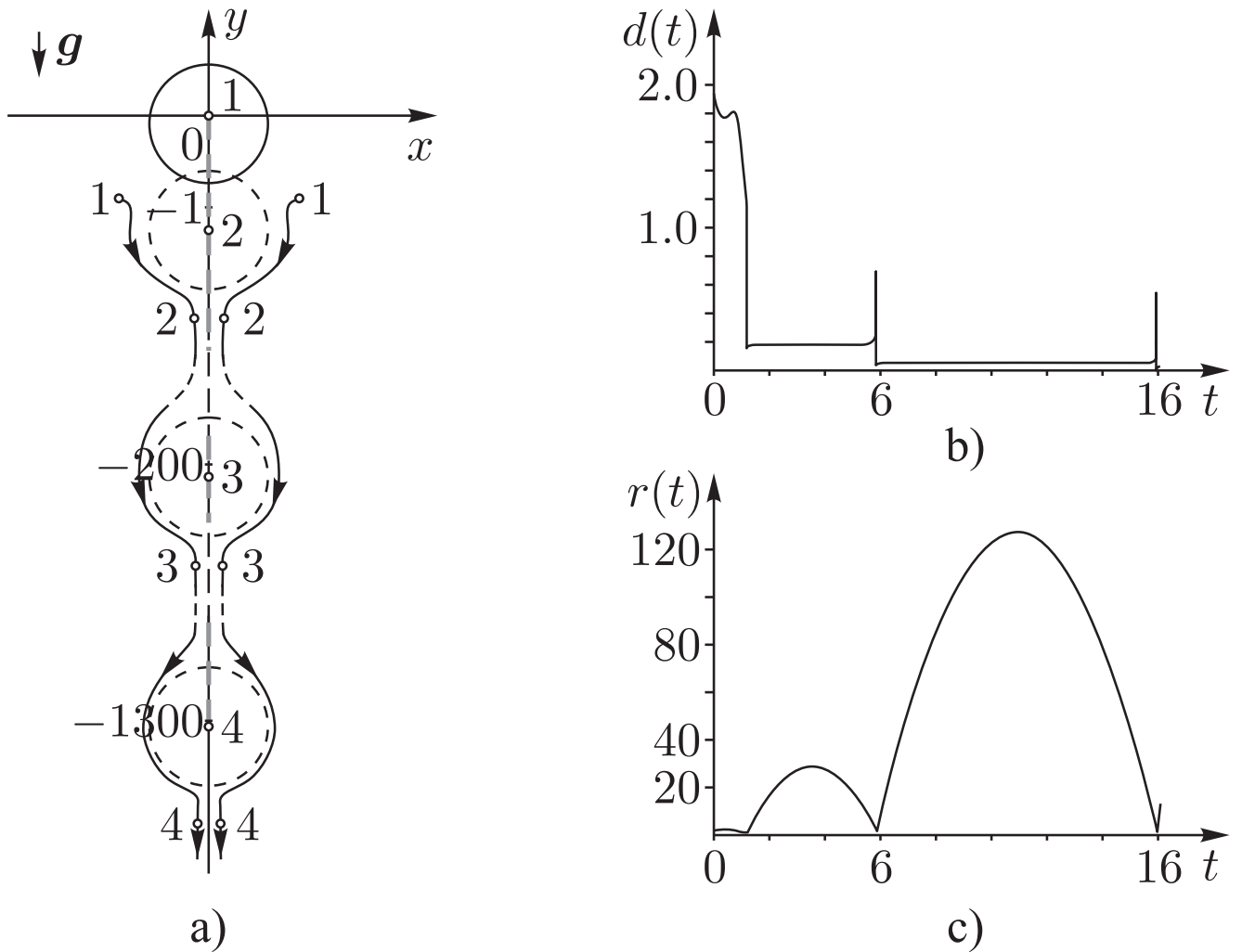


Рис. 4.5. Круговой цилиндр и пара точечных вихрей в поле силы тяжести. а) Вихревая пара движется перед цилиндром. Первые три рассеяния. б) Расстояние между вихрями. с) Расстояние от вихрей до цилиндра.

рей. Таким образом, мы получаем постановку ограниченной задачи Фёпеля в поле тяжести. Решение этой задачи, как мы увидим ниже, содержит в себе черты поведения решений исходной задачи, но с аналитической точки зрения существенно проще. Это соответствует рассмотрению движения системы (4.5.1) на инвариантном многообразии (подмногообразии инвариантного многообразия, рассмотренного в предыдущем пункте), определяемом соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda &= 0, x_2 = -x_1, y_2 = y_1, \lambda_2 = -\lambda_1, v_1 = 0, \\ v_2 &= v_2(0) - gt, x_c = x_c(0), y_c = y_c(0) + v_2(0)t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

Ограничение позволяет нам рассматривать только движение вихря, для которого из (4.5.1) получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{2R^2 x_1 y_1 v_2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} - \frac{4\lambda_1 (y_1 - \tilde{y}_1) x_1 \tilde{x}_1}{((x_1 - \tilde{x}_1)^2 + (y_1 - \tilde{y}_1)^2)((x_1 + \tilde{x}_1)^2 + (y_1 - \tilde{y}_1)^2)}, \\ \dot{y}_1 &= -v_2 - \frac{R^2 (x_1^2 - y_1^2) v_2}{(x_1^2 + y_1^2)^2} + \\ &+ \lambda_1 \left(\frac{1}{2x_1} + \frac{2\tilde{x}_1 (x_1^2 - \tilde{x}_1^2 - (y_1 - \tilde{y}_1)^2)}{((x_1 - \tilde{x}_1)^2 + (y_1 - \tilde{y}_1)^2)((x_1 + \tilde{x}_1)^2 + (y_1 - \tilde{y}_1)^2)} \right). \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Результаты численного интегрирования системы (4.6.2), представлены на рисунках 4.6, 4.7 и 4.8. Как и выше, при отображении результатов исследования полной задачи, на рисунке 4.6 сплошными линиями показаны траектории вихрей, а пунктиром – траектория центра цилиндра. На рисунке 4.7 отображены те же движения вихрей, что и на рисунке 4.6, но в системе отсчета, связанной с цилиндром. На рисунке 4.8, аналогично 4.5, изображены движение цилиндра и многократное рассеяние вихревой пары, расстояние между вихрями и расстояние от вихрей до цилиндра, как функции времени.

На рисунках 4.6а и 4.7а представлено движение цилиндра и вихревой пары при значениях параметров $R = 0.5$, $a = 10$, $\lambda_1 = 2$, $g = 10$. Время движения $t_0 = 1.25$. Из рисунка 4.6а виден процесс рассеяния вихревой пары в данном случае: цилиндр, взаимодействуя с вихревой парой, притягивает каждый из вихрей при своем приближении, при дальнейшем движении цилиндр удаляется от вихрей и движется отдельно. Пара остается в практически неподвижной. В этом случае интенсивность вихрей мала для того, чтобы вихри объединились в объект малого размера, который двигался в предыдущем случае перед цилиндром. Процесс удаления неизменяющейся вихревой пары от цилиндра, как и в предыдущем случае, наглядно иллюстрирует рисунок 4.7а.

Вторым сценарием, как и в полной задаче, рассмотрим процесс движения пары перед цилиндром. На рисунке 4.6b наглядно виден процесс рассеяния вихревой пары цилиндром: на начальной стадии вихри медленно приближаются к

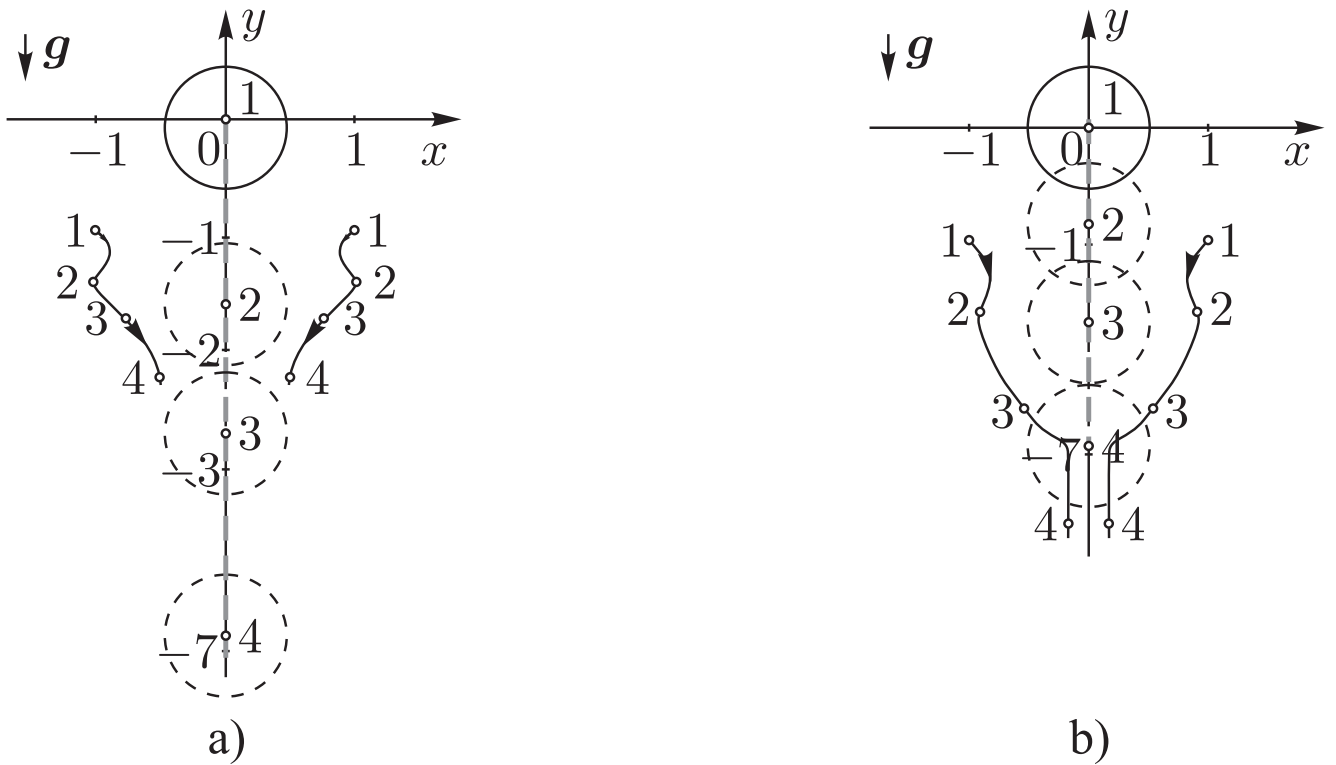


Рис. 4.6. Круговой цилиндр и пара точечных вихрей в поле силы тяжести. Ограниченная задача Фёпсла. а) Цилиндр движется отдельно от вихрей. б) Вихревая пара движется перед цилиндром.

цилиндру с разных сторон, а затем, притягиваясь друг к другу, образуют малую, по сравнению с размерами цилиндра, вихревую пару, которая движется перед цилиндром, не изменяя своих размеров. Аналогичную картину в системе отсчета, связанной с цилиндром, демонстрирует рисунок 4.7b. Параметры изображенной на рисунках 4.6b, 4.7b системы $R = 0.5$, $a = 10$, $\lambda_1 = 7$, $g = 10$. Время анализа $t_0 = 1.45$.

Как и в случае полной системы, интересно проследить за эволюцией системы на больших временах в ограниченной задаче. Движение цилиндра и вихрей изображено на рисунке 4.8a. Чтобы проиллюстрировать процесс относительного перемещения на рисунках 4.8b и 4.8c изображены зависимости от времени расстояния между вихрями в паре $|x_1 - x_2|$ и расстояние от вихря до центра цилиндра $(x_1^2 + y_1^2)^{(1/2)}$. Снова видно два повторяющихся фрагмента движения вихрей: резкие отклонения от траектории цилиндра, которые вызваны взаимо-

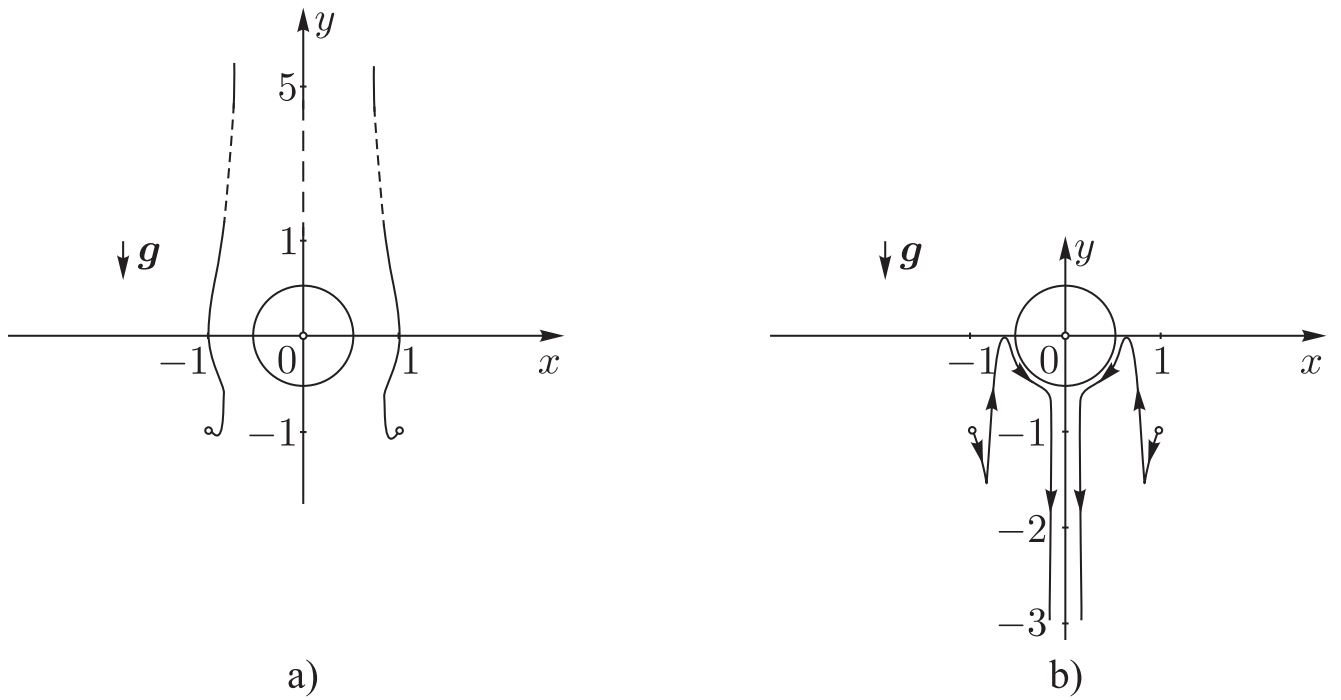


Рис. 4.7. Пара точечных вихрей, рассеивающаяся на цилиндре. Ограниченная задача Фёшля. а) Цилиндр движется отдельно от вихрей. б) Пара рассеивается "назад".

действием вихрей и цилиндра на близких расстояниях, и практически прямолинейные участки, которые наблюдаются при удалении вихревой пары от цилиндра. Как и описано выше, наблюдается постепенное сближение вихрей, которые, отталкиваясь от цилиндра движутся перед цилиндром как малый объект. В дальнейшем пара движется без влияния цилиндра с постоянной скоростью, а цилиндр ускоряемый силой тяжести нагоняет пару и рассеивает вихри, отклоняя их от линии своего движения в противоположные стороны. Далее вихри приближаются друг к другу ближе, чем на предыдущем участке прямолинейного движения, и, отталкиваясь, удаляются от цилиндра, после чего движутся равномерно. Затем цилиндр вновь нагоняет пару и весь процесс повторяется подобным себе образом. То есть ограниченная система демонстрирует поведение подобное исходной системе за исключением движения цилиндра, на движение которого наложено ограничение. На рисунке 4.8 показаны три первых сближения. Анализируемая система имеет параметры $R = 0.5$, $a = 10$, $\lambda_1 = 7$, $g = 10$.

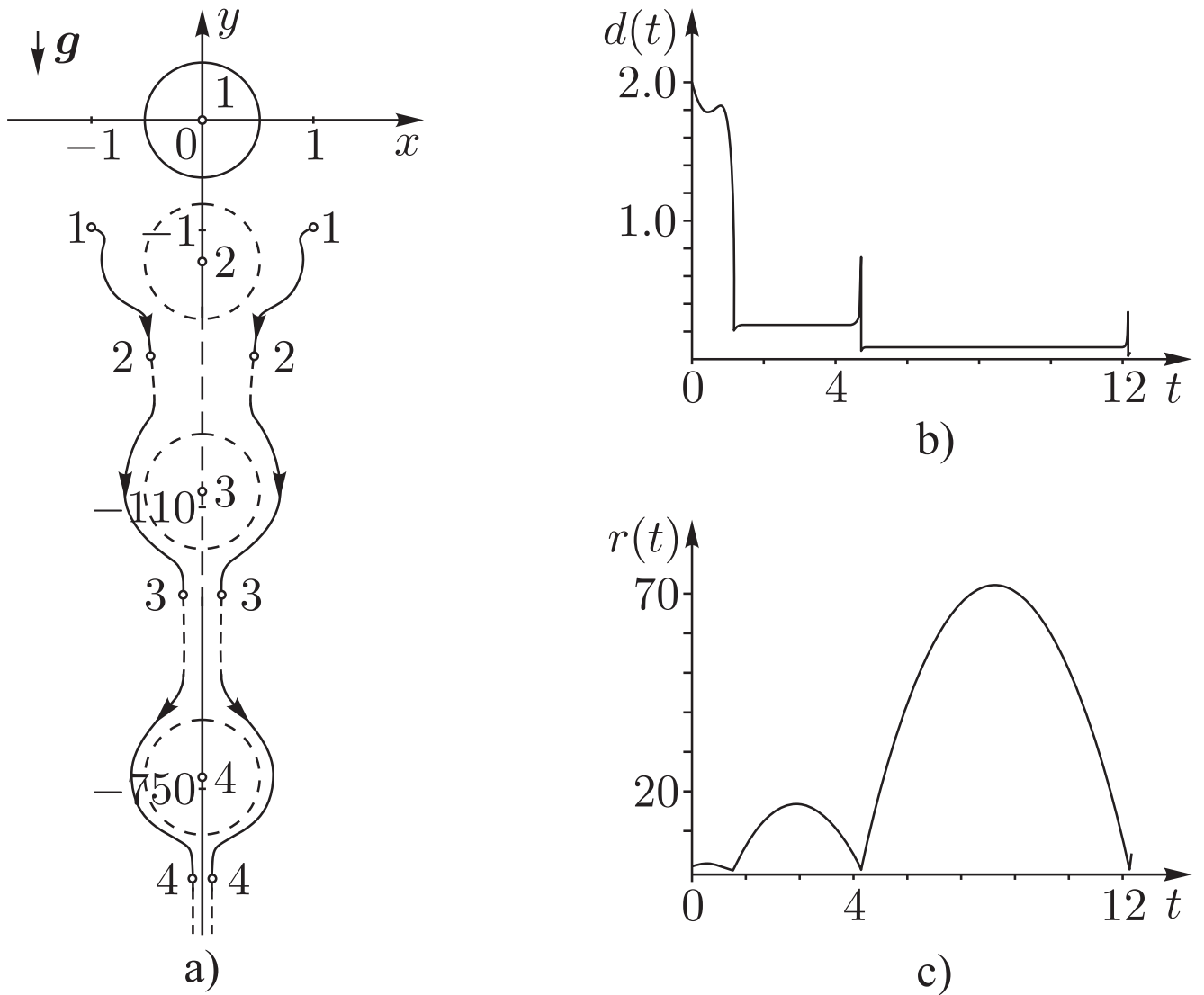


Рис. 4.8. Круговой цилиндр и пара точечных вихрей в поле силы тяжести. Ограниченная задача Фёшля. а) Вихревая пара движется перед цилиндром. Первые три рассеяния. б) Расстояние между вихрями. в) Расстояние от вихрей до цилиндра.

Время движения $t_0 = 12.25$.

Интересно заметить, что по-прежнему процесс рассеяния цилиндром вихревой пары выглядит каждый раз подобным образом.

4.7. Асимптотическая система. Регуляризация

Следуя изложению [113], будем исследовать поведение системы (4.6.2) на больших временах. Используя результаты численного интегрирования ограни-

ченной задачи, будем искать решения такие, что $x_1 \rightarrow 0$, y_1 ограничено при $t \rightarrow \infty$. В уравнениях (4.6.2) с учётом (4.5.10) и начальных данных, проведем замену $x_1 = \frac{x_1}{t}$, $t = \frac{1}{2}t^2$. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{2R^2 x_1 g}{y_1^3}, \\ \dot{y}_1 &= g \left(1 - \frac{R^2}{y_1^2}\right) + \frac{\lambda_1}{2x_1}. \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

Заметим, что асимптотическая система (4.7.1) является гамильтоновой с гамильтонианом

$$H = gR^2 \frac{x_1}{y_1^2} - gx_1 - \frac{\lambda_1}{2} \ln|x_1|.$$

Учитывая, что величины x_1 и y_1 отделены от нуля, мы видим, что векторное поле асимптотической системы не имеет особенностей, что свидетельствует о гладком поведении исходной системы на больших временах.

Численное исследование ограниченной задачи, как и в случае неограниченной, обнаруживает один из возможных типов движения системы, при котором происходит многократное сближение траекторий вихрей и поверхности цилиндра. При этом происходит сближение каждого из вихрей со своим инверсным образом, что приводит к неограниченному возрастанию компонент векторного поля (4.6.2). Численные процедуры становятся неустойчивыми, что требует дополнительного исследования сходимости численного решения к аналитическому. Рассмотрим процедуру регуляризации. Пусть в некоторой области M задано векторное поле $v(x)$, которое определяет на M дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x). \quad (4.7.2)$$

Заметим, что уравнение

$$\dot{x} = f(x)v(x),$$

где $f(x)$, некоторая положительная функция на M , имеет такие же интегральные кривые, что и уравнение (4.7.2). Это эквивалентно замене времени $d\tau = \frac{dt}{f(x)}$.

В нашей системе (4.6.2) можно положить

$$f(x_1, y_1) = ((x_1 - x_1^*)^2 + (y_1 - y_1^*)^2)((x_1 + x_1^*)^2 + (y_1 - y_1^*)^2).$$

Интегрирование получившейся системы демонстрирует гладкое поведение интегральных кривых в окрестности точек сближения вихрей с поверхностью цилиндра. Это позволяет сделать вывод о сходимости численных решений исходной системы к аналитическим, и, таким образом, завершить исследование ограниченной задачи Фёппля.

4.8. Краткие итоги главы 4

В данной главе рассмотрена задача о движении в поле силы тяжести кругового цилиндра, взаимодействующего с вихревой парой. Приведены полученные численно частные решения, соответствующие наиболее характерным сценариям динамики цилиндра и вихрей. Доказана невозможность существования в поле силы тяжести стационарной конфигурации цилиндра и вихревой пары, аналогичной решению Фёппля. Рассмотрена ограниченная задача.

Численные исследования полной и ограниченной задач позволяют сформулировать ряд гипотез.

1. *Как в случае полной системы, так и в случае ограниченной задачи, в зависимости от интенсивности вихрей могут реализовываться два типа движений:*

а) цилиндр "покидает" вихревую пару после однократного рассеяния и движется отдельно в направлении силы тяжести;

б) цилиндр многократно рассеивает вихревую пару, которая движется перед цилиндром со все возрастающей скоростью и уменьшающимся размером; каждый из актов рассеяния выглядит подобным образом.

2. *В случае полной системы движение цилиндра в среднем происходит с ускорением меньшим ускорения силы тяжести из-за взаимодействия с вих-*

ревой парой.

Стоит отметить, что высказанные выше гипотезы ставят вопросы, ответы на которые еще нужно получить.

Хаотическое рассеяние вихревой нити круговым цилиндром, движущимся в поле тяжести

В данной главе рассмотрена задача о движении в поле силы тяжести твердого тела, обладающего формой кругового цилиндра, взаимодействующего с точечным вихрем, в идеальной жидкости. В отличие от предыдущих глав 2,3 в настоящей главе, как и в главе 4, циркуляция жидкости вокруг цилиндра предполагается равной нулю. Уравнения движения системы представлены в гамильтоновой форме. Указаны первые интегралы системы - горизонтальная и вертикальная компоненты импульса - последний из которых, очевидно, неавтономный. Используя автономный интеграл, проведена редукция системы на одну степень свободы в ранее не рассматриваемом случае нулевой циркуляции. Показано, что в отличие от случая циркуляционного обтекания в отсутствие точечных вихрей, в котором движение цилиндра будет происходить в ограниченной горизонтальной полосе, при наличии вихрей и циркуляции равной нулю вертикальная координата цилиндра неограниченно убывает. Дальнейшее внимание в главе сконцентрировано на численном исследовании динамики системы, которая при нулевой циркуляции обладает некомпактными траекториями. Построены различные виды функций рассеяния вихря на цилиндре. Вид этих функций свидетельствует о хаотическом характере рассеяния и, следовательно, об отсутствии дополнительного аналитического интеграла.

Основные результаты данной главы опубликованы в работах [23, 24].

5.1. Краткий обзор

Задача о падении твёрдого тела в жидкости является одной из фундаментальных проблем, рассматривалась как в классических работах [104, 148, 149],

так и в современных, например, [113, 150, 165]. Некоторые физические феномены (авторотация твёрдого тела) можно описать только находясь в рамках модели вязкой жидкости, и, следовательно, их строгое рассмотрение должно опираться на уравнение Навье–Стокса с граничными условиями на подвижных границах. Решение таких задач обычно получают численно, а верификация полученных результатов возможна только при сравнении с данными экспериментов.

Падение тела в вязкой среде сопровождается сопротивлением движению, которое обусловлено с одной стороны внутренним трением жидкости, а с другой стороны потерями энергии на генерацию вихрей. В качестве первого приближения обычно рассматривают вместо схода вихрей в вязкой жидкости, движение тела в идеальной жидкости, в которой существует завихренность.

Завихренность может учитываться, как например, в работах [110, 151, 163, 165] посредством отличной от нуля циркуляции при обтекании тела. Дальнейшим развитием является задача о движении тела при наличии точечных вихрей, гамильтонов формализм для которых первоначально был развит уже Кирхгофом [71], а в работах [118, 134, 135, 173] этот формализм был распространён на случай движения цилиндрического твёрдого тела и точечных вихрей в отсутствии тяжести.

Далее в 60-х годах XX века была предложена модель Брауна–Майкла (Brown–Michael), где сход вихрей с острой кромки тела постулируется, а их интенсивность меняется со временем. Движение тела и вихрей исследуется с помощью модели Брауна–Майкла, например, в работе [164]. Наконец, в отличие от точечных вихрей падение тела в присутствии распределённой завихренности («вихревая пелена») изучено в работе [153].

В заключении отметим работы [121, 122], где рассмотрено движение вихря в предположении поступательного движения цилиндра, а также исследована возможность хаотических режимов движения вихря при возмущении движения цилиндра.

В работах [18–22] исследуется движение твёрдого тела, имеющего форму кругового цилиндра, под действием силы тяжести в безграничном объёме идеальной жидкости в присутствии точечных вихрей и отличной от нуля циркуляции. Первоначально в [18, 19] результаты [118, 134] были развиты в случае движения тела и одного точечного вихря в поле силы тяжести. В работах [20, 21] было получено обобщение на случай N вихрей. Наконец, в [22] была рассмотрена система цилиндра и двух вихрей, аналогичная по конфигурации решению Фёппля [167], но находящаяся в поле силы тяжести. Результаты вышеуказанных публикаций подробно обсуждаются в главах 3,4. В данной главе, как и в [18, 19] влияние завихренности на падение тела в жидкости рассмотрено на примере простейшей задачи о движении массивного цилиндра и вихря в поле тяжести.

5.2. Уравнения движения

Как и в работах [18, 19] исследуется движение твёрдого тела, имеющего форму кругового цилиндра, под действием силы тяжести в безграничном объёме идеальной жидкости, совершающей плоскопараллельное движение и покоящейся на бесконечности. Образующие цилиндра ортогональны плоскости потока. В жидкости движется прямолинейная вихревая нить, параллельная образующим цилиндра, имеющая интенсивность Γ_1 . В силу очевидной симметрии системы относительно перемещения вдоль образующих цилиндра, рассматривается плоская задача.

В отличие от предыдущих исследований [18–21] рассматривается такое обтекание цилиндра жидкостью, при котором циркуляция $\Gamma = 0$ (рис. 5.1). Требуется качественно исследовать движение системы.

Кратко напомним, что в главе 3 (см. также [18]) приведены уравнения движения в поле силы тяжести в идеальной жидкости цилиндра и точечного вихря, которые имеют гамильтонову форму для случая произвольной циркуля-

ции. Далее там же указаны первые интегралы, с помощью одного из которых была проведена редукция системы. Единственным ограничением, принятым в вышеуказанной главе, было предположение отличной от нуля циркуляции. При занулении циркуляции понижение порядка изложенным в главе 3 способом оказывалось невозможным.

Рассмотрим случай циркуляции равной нулю. Следуя обозначениям, принятым в [18], полагая $\Gamma = 0$, уравнения движения цилиндра и точечного вихря в поле силы тяжести получаем в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_1 &= -\mathbf{v} + \text{grad } \tilde{\varphi}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1}, \\ \dot{\mathbf{r}}_c &= \mathbf{v}, \\ a\dot{v}_1 &= -\lambda_1(\dot{\tilde{y}}_1 - \dot{y}_1), \\ a\dot{v}_2 &= \lambda_1(\dot{\tilde{x}}_1 - \dot{x}_1) - ag,\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

где $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c)$ — радиус-вектор центра цилиндра относительно неподвижной системы координат Oxy , $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ — скорость цилиндра, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$ — вектор, соединяющий центр цилиндра с вихрем, $\tilde{\mathbf{r}}_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = \frac{R^2 \mathbf{r}_1}{r_1^2}$ — вектор, соединяющий центр цилиндра с инверсным образом вихря (рис. 5.1), R — радиус цилиндра, a — константа, включающая массу и присоединённую массу цилиндра, ag — величина силы тяжести, действующей на цилиндр, λ и λ_1 — постоянные, связанные с циркуляцией жидкости вокруг цилиндра и интенсивностью вихря соотношениями $\lambda = \frac{\Gamma}{2\pi}$, $\lambda_1 = \frac{\Gamma_1}{2\pi}$. Плотность жидкости полагается равной 2π . Функция $\tilde{\varphi}(\mathbf{r})$ является потенциалом течения $\varphi(\mathbf{r})$ идеальной жидкости вне цилиндра с исключенной особенностью в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{R^2}{r^2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \lambda_1 \left(\arctg \left(\frac{y - \tilde{y}_1}{x - \tilde{x}_1} \right) - \arctg \left(\frac{y - y_1}{x - x_1} \right) \right).\tag{5.2.2}$$

Следуя рассуждениям, приведённым в [18] легко показать, что конечно-мерная система (5.2.1), описывающая движение цилиндра и вихря в поле силы тяжести, сохраняет инвариантную меру и может быть представлена в гамиль-

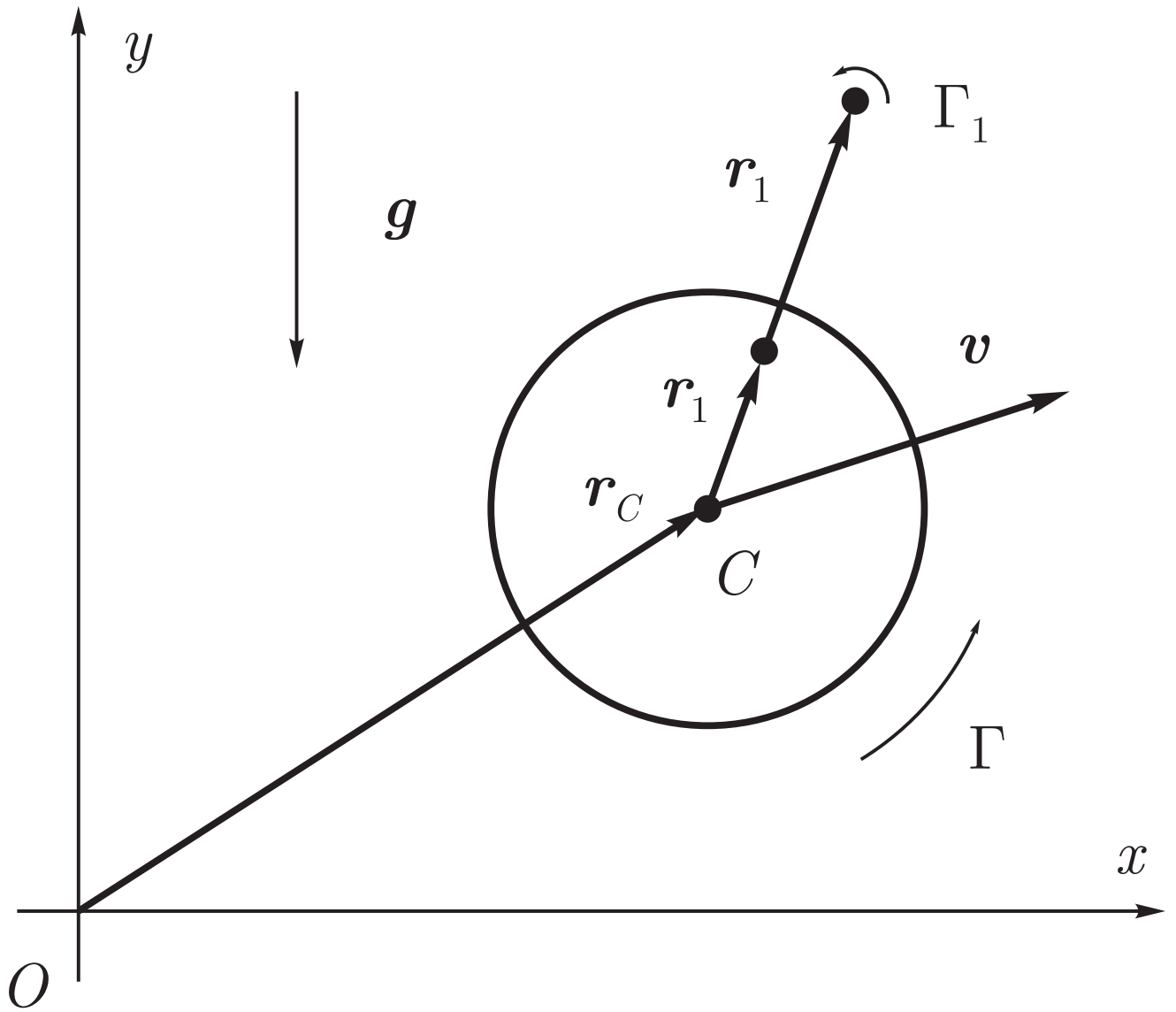


Рис. 5.1. Круговой цилиндр и точечный вихрь в поле силы тяжести

тоновой форме:

$$\dot{\zeta}_i = \{\zeta_i, H\} = \sum_k \{\zeta_i, \zeta_k\} \frac{\partial H}{\partial \zeta_k}, \quad (5.2.3)$$

где ζ_i — координаты фазового вектора системы (5.2.1)

$$\zeta = \{x_1, y_1, v_1, v_2, x_c, y_c\},$$

ГАМИЛЬТониан системы

$$H = \frac{1}{2}av^2 + \frac{1}{2}\lambda_1^2 \ln(r_1^2 - R^2) + agy_c, \quad (5.2.4)$$

отличные от нуля компоненты кососимметрического структурного тензора пуассоновой структуры

$$\begin{aligned}
 \{v_1, x_1\} &= \frac{1}{a} \frac{r_1^4 - R^2(x_1^2 - y_1^2)}{r_1^4}, & \{v_1, y_1\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_1 y_1}{r_1^4}, \\
 \{v_2, x_1\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_1 y_1}{r_1^4}, & \{v_2, y_1\} &= \frac{1}{a} \frac{r_1^4 + R^2(x_1^2 - y_1^2)}{r_1^4}, \\
 \{v_1, v_2\} &= -\frac{\lambda_1 r_1^4 - R^4}{a^2 r_1^4}, & \{x_1, y_1\} &= -\frac{1}{\lambda_1}, \\
 \{x_c, v_1\} &= \{y_c, v_2\} = \frac{1}{a}.
 \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

5.3. Первые интегралы и редукция

Наличие выделенного направления, задаваемого силой тяжести, нарушает симметрию относительно поворотов системы, что приводит к несохранению соответствующего интеграла момента. Тем не менее у системы существует два первых интеграла, отвечающие трансляциям — автономный интеграл P , соответствующий горизонтальному импульсу системы, и неавтономный интеграл Q , соответствующий вертикальному импульсу:

$$\begin{aligned}
 Q &= a(v_2 + gt) - \lambda_1(\tilde{x}_1 - x_1), \\
 P &= av_1 + \lambda_1(\tilde{y}_1 - y_1).
 \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Используя автономный интеграл P , можно понизить порядок исходной системы (5.2.1), обладающей тремя степенями свободы, на одну степень.

Рассмотрим систему на поверхности уровня интеграла P . Для этого положим $P = p$ в выражении (5.3.1), где константа p определяется начальными данными. Тогда, выразив из полученного равенства v_1 , подставим в первое из уравнений (5.2.1) и гамильтониан (5.2.4). Исключив из (5.2.1) уравнения на v_1

и x_c , получим редуцированную систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{\lambda_1}{a}(\tilde{y}_1 - y_1) - \frac{p}{a} + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right|_{r=r_1}, \\ \dot{y}_1 &= -v_2 + \left. \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \right|_{r=r_1}, \\ a\dot{v}_2 &= \lambda_1(\dot{\tilde{x}}_1 - \dot{x}_1) - ag, \\ \dot{y}_c &= v_2.\end{aligned}\tag{5.3.2}$$

с гамильтонианом

$$H_c = \frac{1}{2}a \left(v_2^2 + \left(\frac{p}{a} - \frac{\lambda_1}{a}(\tilde{y}_1 - y_1) \right)^2 \right) + \frac{1}{2}\lambda_1^2 \ln(r_1^2 - R^2) + agy_c,$$

и пуассоновой структурой, определяемой компонентами структурного тензора, получаемого из (5.2.5) вычёркиванием строк и столбцов, соответствующих переменным v_1 и x_c .

Отметим, что на поверхности уровня интеграла P , уравнение для v_1 системы (5.2.1) превращается в тождество.

5.4. Классификация возможных движений

В общем случае циркуляции отличной от нуля [18] найдены частные решения, позволяющие сказать о том, что существует три возможных типа движений системы «цилиндр-вихрь» (рис. 5.2):

- (1) цилиндр и вихрь движутся вместе в ограниченной полосе изменений координаты y (рис.5.2(a));
- (2) цилиндр «покидает» вихрь и движется в ограниченной полосе изменений координаты y (рис.5.2(b));
- (3) цилиндр «покидает» вихрь и движется в направлении действия силы тяжести (рис.5.2(c)).

По поводу приведённой классификации стоит отметить, что в системе наблюдаются движения с захватом вихря цилиндром, аналогичные описанным в работе [121], а также движения в ограниченной полосе, аналогичные описанным в работах [110, 151].

Отметим, что в рассматриваемом в данной главе случае $\lambda = 0$, можно доказать утверждение относительно характера движения системы в одном частном случае:

Предложение 1. *Если вихрь бесконечно удаляется от цилиндра, то дальнейшее движение цилиндра происходит при неограниченном убывании функции $y_c(t)$, то есть цилиндр «тонет».*

Доказательство. Предположим, что цилиндр «отрывается» от вихря. Тогда второе слагаемое в гамильтониане (5.2.4) неограниченно возрастает, при этом первое слагаемое, очевидно, неотрицательно. Из сохранения интеграла энергии с необходимостью следует утверждение о неограниченном убывании функции $y_c(t)$. □

5.5. Хаотическое рассеяние

В одной из пионерских работ [113] рассмотрена задача рассеяния двух составных объектов на примере рассеяния вихревых пар. Там же авторами описано свойство стохастичности двухчастичного рассеяния в случае наличия у «частиц» внутренней структуры. Дальнейшее развитие идей хаотического рассеяния вихревых систем можно найти, например, в работах [122, 171]. Основные результаты в вышеуказанных работах были приведены в виде функций рассеяния: зависимостей угла между скоростями разлетающихся вихревых пар от прицельного параметра, а также зависимостей времени прохождения пары некоей актуальной зоны взаимодействия от прицельного параметра.

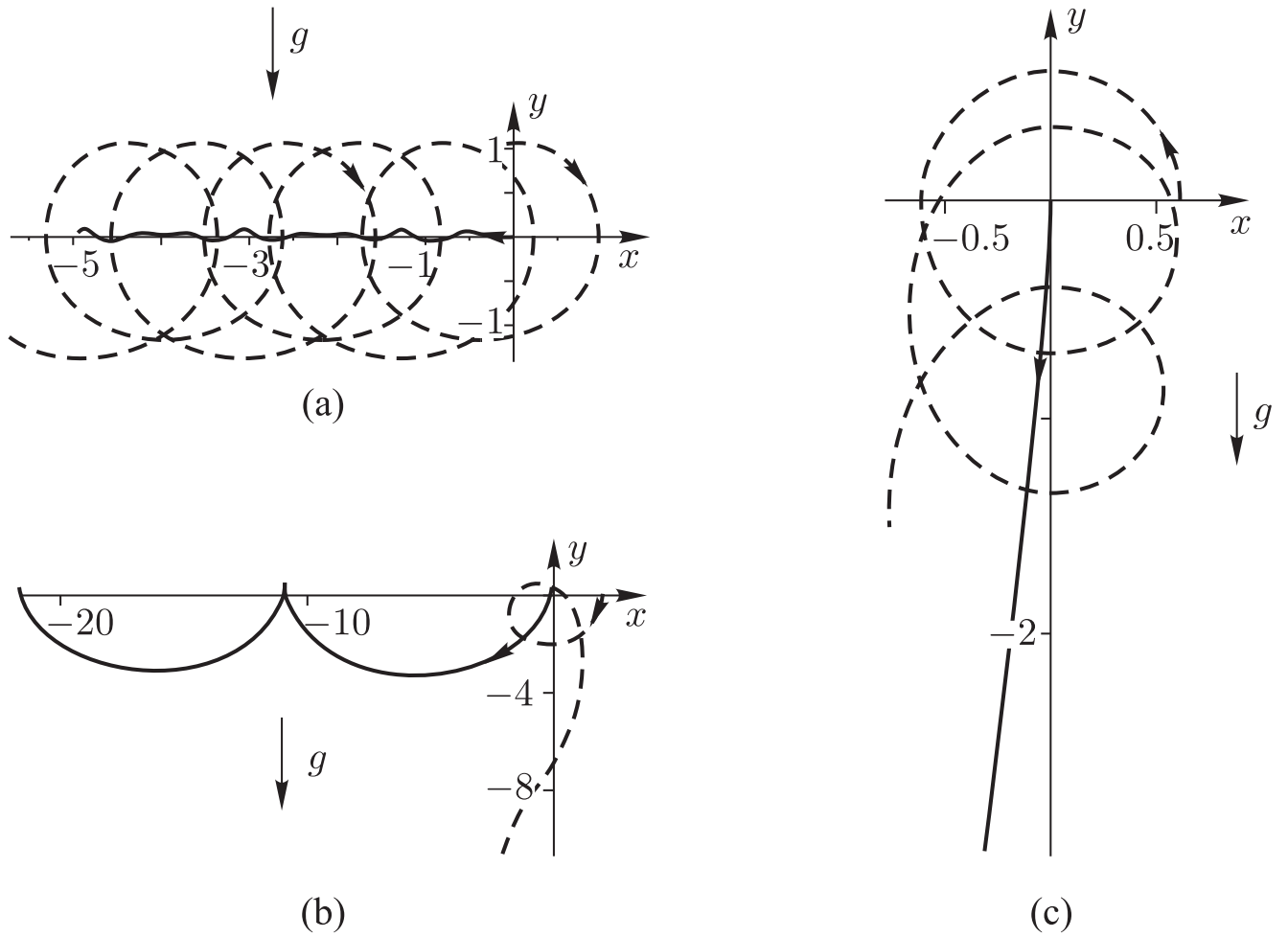


Рис. 5.2. Движение цилиндра (сплошная линия) и вихря (пунктир) в поле силы тяжести: (а) вихрь захвачен цилиндром, они движутся в ограниченной горизонтальной полосе; (б) цилиндр, покинув вихрь, движется в ограниченной горизонтальной полосе; (с) цилиндр, покинув вихрь, движется вниз.

Во всех работах [113, 122, 171] применение функции рассеяния для исследования динамики системы вихрей обусловлено невозможностью построения сечения Пуанкаре, вследствие некомпактности траекторий системы, принадлежащих поверхностям уровня гамильтониана.

В нашей задаче построение функции рассеяния в том же виде, что и в только что упомянутых работах, не представляется возможным. Это связано с тем, что в отличие от вихревой пары, которая в отсутствии внешних воздействий обладает возможностью двигаться в жидкости с постоянной скоростью, и, следовательно, допускает, как и в случае рассеяния частиц, классическую по-

становку задачи рассеяния двух таких пар, в ситуации уединённого вихря его самопродвижение в жидкости невозможно. Как только вихрь удаляется на значительное расстояние от цилиндра и, следовательно, от находящегося внутри границ тела инверсного образа, с которым он взаимодействует, вихрь практически перестаёт перемещаться.

В связи с этим для анализа динамики системы «цилиндр–вихрь» мы предлагаем применить функцию рассеяния модифицированную следующим образом: пусть фиксировано начальное положение и скорость цилиндра, а начальное положение вихря относительно цилиндра изменяется. При исследовании динамики такой системы было обнаружено, что вихрь отрывается от цилиндра, спустя различное количество времени, совершив то или иное количество оборотов вокруг движущегося цилиндра. Тогда можно исследовать зависимость времени τ_{cap} (времени захвата), которое вихрь находится в окрестности цилиндра, не удаляясь от него, как функцию начального расстояния d вихря от цилиндра. Начальное расстояние является, в определённом смысле, аналогом введённого в работах [113, 122, 171] прицельного параметра.

Зависимость времени захвата – времени жизни связанного состояния цилиндра и вихря – от начального расстояния имеет вид, приведённый на рисунке 5.3. Для построения приведённого на рисунке 3 графика для каждого значения $d \in (0.5, 0.75)$ с шагом 0.001 вычислялось время (с точностью 0.00001), спустя которое расстояние между центром цилиндра и вихрем станет больше, чем $1.5d$. График построен для следующего набора параметров: $y_1 = 0$, $x_1 = d$, $a = 10$, $R = 0.5$, $g = 10$, $\lambda_1 = 20$. Как видно, зависимость имеет нерегулярный характер, что особенно заметно при начальных положениях вихря вблизи поверхности цилиндра.

Чтобы проиллюстрировать фрактальный характер зависимости $\tau_{cap}(d)$, общий вид которой изображен на рисунке 5.3(а), мы приводим на рисунках 5.3(б) и 5.3(с) последовательно увеличенные изображения фрагмента, выделенного прямоугольной границей на исходной зависимости.

Отметим, что одним из проявлений сложной динамики рассматриваемой системы служит интервал $d \in (0.50482, 0.50598)$, где $\tau_{cap} = 0$. Другая особенность, которую необходимо отметить, это наличие мелкомасштабных скачкообразных изменений времени захвата на фоне плавного убывания, которое обусловлено уменьшением интенсивности взаимодействия вихря и образа при увеличении расстояния между ними.

Наконец, при увеличении масштаба (рис. 5.3(с)) отчётливо видно наличие особенностей функции $\tau_{cap}(d)$, которые имеют характер полюсов рассеяния. Пример асимптотического поведения времени захвата показан с помощью вертикальной прямой L , к которой, судя по данным численных экспериментов, зависимость времени захвата стремится экспоненциально. Особенности функции рассеяния сгущаются на наклонных участках.

Чтобы описать детально характер зависимости времени захвата цилиндра вихрем от взаимного расположения вихря и цилиндра, а также учесть влияние на вид функции рассеяния гравитационного поля, можно рассмотреть функцию $\tau_{cap}(x_1, y_1)$, где (x_1, y_1) - координаты вихря относительно центра цилиндра. Внешний вид подобной функции показан на рисунке 5.4. Начальные координаты вихря $x_1 \in (-5, 5)$, $y_1 \in (-5, 5)$, пространственное разрешение по x_1 и y_1 равно 0.01, время анализа $t \in (0, 20)$, шаг по времени 0.000001, для численного интегрирования системы использован метод Дорманда-Принса. Чёрный круг в центре рисунка обозначает местонахождение цилиндра и его 0.3-окрестность. Оттенки белого на рисунке распределены по продолжительности времени захвата – чем больше время жизни связанного состояния, тем светлее оттенок. Чёрный обозначает нулевое время захвата, белый - захват, продолжительностью не менее 3.5 (в исследуемой области τ_{cap} не превысило 3,667).

В процессе исследований была выдвинута гипотеза о связанности осцилляций функции $\tau_{cap}(d)$ с увеличением количества оборотов, совершаемых вихрем вокруг цилиндра (в системе координат, связанной с цилиндром), однако, результаты экспериментов, один из которых приведен на рисунке 5.5, не подтвердили

данной гипотезы – время захвата испытывает скачки даже при неизменном количестве оборотов. Отметим, что для того, чтобы изобразить обе функции в одном диапазоне изменения, значение функции $\tau_{cap}(d)$ было умножено на 5.

Для отображения одновременно времени захвата и количества оборотов, совершаемых вихрем вокруг цилиндра можно рассмотреть ещё одну разновидность функции рассеяния. Пусть под «временем захвата» $\tilde{\tau}_{cap}$ понимается время от начала движения и до момента, когда расстояние между цилиндром и вихрем становится в среднем неубывающей функцией времени. Условие неубывания в среднем является необходимым, поскольку даже при сравнительно большом удалении вихря от цилиндра, цилиндр может совершать вертикальные колебания, пересекая горизонтальную прямую, проведённую через вихрь. В таком случае расстояние между цилиндром и вихрем может незначительно убывать, однако будет неубывать в среднем.

На рисунке 5.6 представлен вид функции $\tilde{\tau}_{cap}(x_1, y_1)$, полученной с теми же условиями, что были при построении $\tau_{cap}(x_1, y_1)$ на рисунке 5.4. На рисунке 5.7 приведена зависимость количества оборотов $n(x_1, y_1)$ вихря вокруг цилиндра в зависимости от начальных координат вихря, вычисленная при аналогичных условиях. Стоит отметить, что все из перечисленных зависимостей (рис. 5.4, 5.6, 5.7) обладают явной асимметрией. Очевидно это связано с выбором определённого знака интенсивности вихря.

Отображение зависимости $\tilde{\tau}_{cap}(x_1, y_1)$ на рисунке 5.6 обладает достаточно низким разрешением по координатам. Для детального представления характера зависимости времени захвата от прицельного параметра рассмотрим фрагмент рисунка 5.6, при $y_1 = -1.5$, $x_1 \in (-1, 1)$, с шагом по x_1 равным 0.0001. На рисунке 5.8 представлен график времени захвата в зависимости от x_1 . Данные значения x_1 и y_1 были выбраны, поскольку цилиндр под действием силы тяжести «падает» на вихрь, что приближает рассмотрение к классической постановке задачи рассеяния.

На рисунке 5.8 видно, что время захвата для точки 1 существенно меньше,

чем для точки 2, несмотря на их близость (в точке 1 координата $x_1 = -0.0808$, а в точке 2 соответственно $x_1 = -0.0807$). Это обуславливается тем, что в точке 1 (рис. 5.9) цилиндр и вихрь после вращения некоторое время движутся вместе, а затем «разлетаются», тогда как в точке 2 цилиндр и вихрь после вращения движутся параллельно, а затем снова сближаются и совершают ещё один виток (рис. 5.10). Время движения вдоль траекторий на рисунках 5.9 и 5.10 одинаково и равно 2.5.

Как и в работах [113, 122, 171], опираясь на вышеперечисленные свойства функции рассеяния, мы можем сделать заключение о нерегулярном характере рассеяния и, видимо, об отсутствии дополнительного аналитического интеграла.

5.6. Краткие итоги главы 5

В данной главе рассмотрена задача о падении в поле тяжести в идеальной жидкости массивного кругового цилиндра, взаимодействующего с точечным вихрем, в частном случае нулевой циркуляции. Показано, что в отличие от случая циркуляционного обтекания в отсутствии точечных вихрей, при наличии вихрей и $\Gamma = 0$ цилиндр «тонет».

Исследована задача рассеяния вихря на цилиндре. Вид полученной функции рассеяния свидетельствует о хаотическом характере процесса рассеяния.

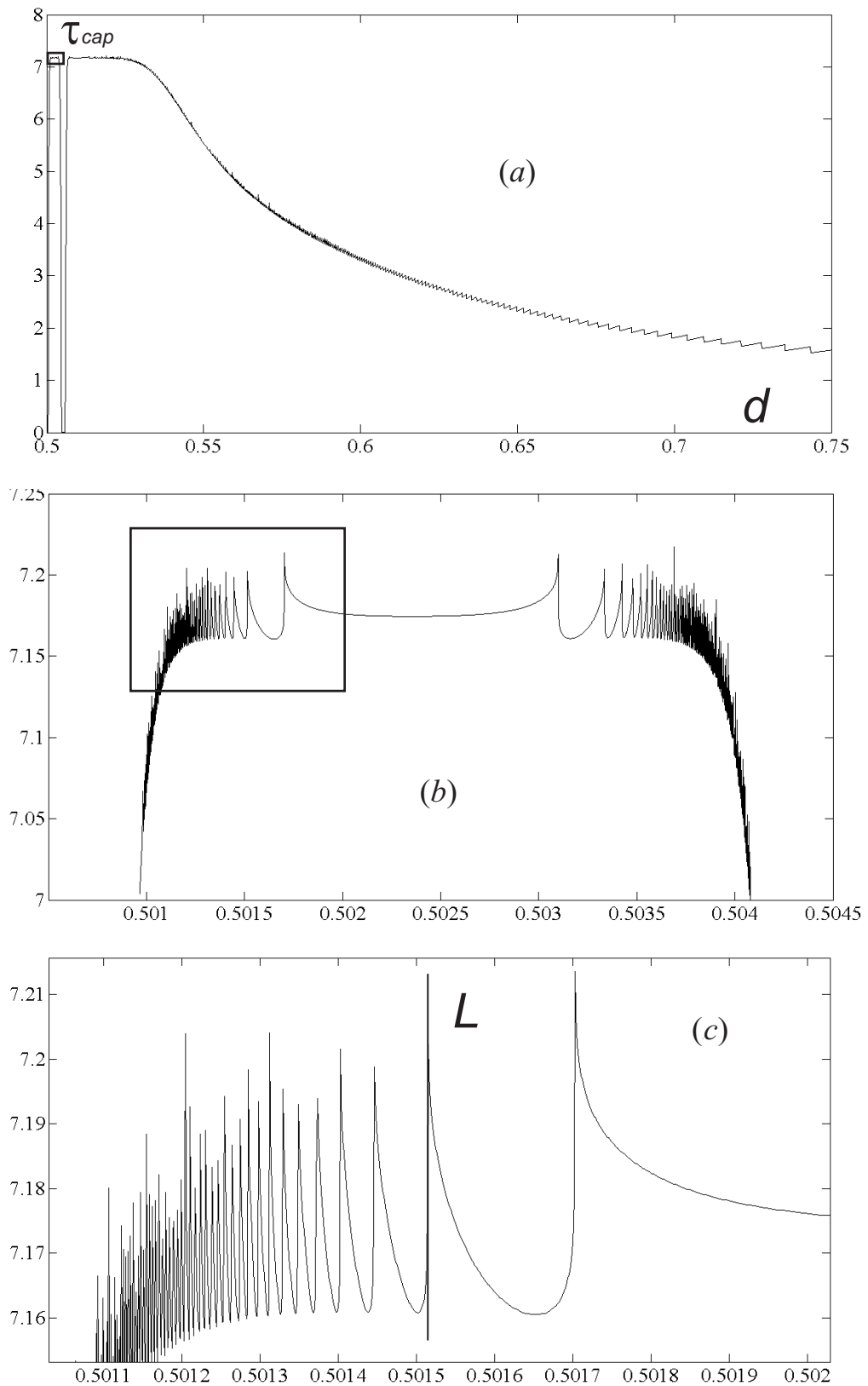


Рис. 5.3. Функция рассеяния: зависимость времени захвата цилиндром вихря от начального расстояния вихря до центра цилиндра. (а) Общий вид. (б) Увеличенный фрагмент рисунка (а), выделенного прямоугольником. (с) Детальное изображение фрагмента, выделенного на рисунке (б).

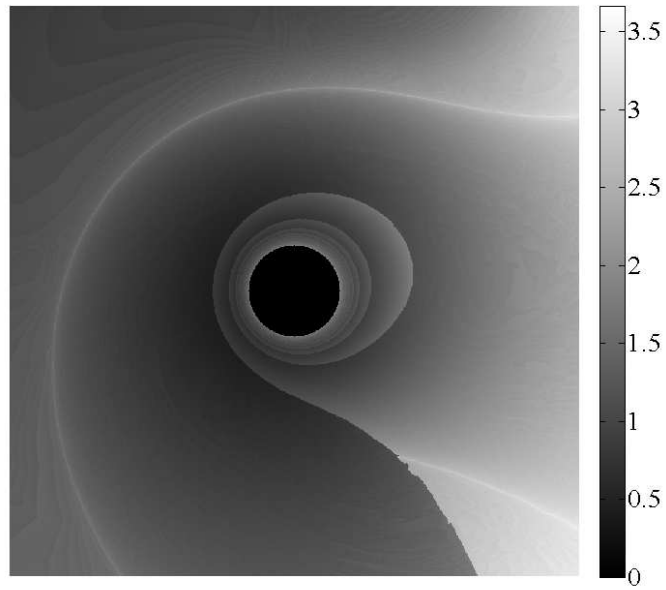


Рис. 5.4. Зависимость времени захвата цилиндром вихря от начальных координат вихря относительно цилиндра.

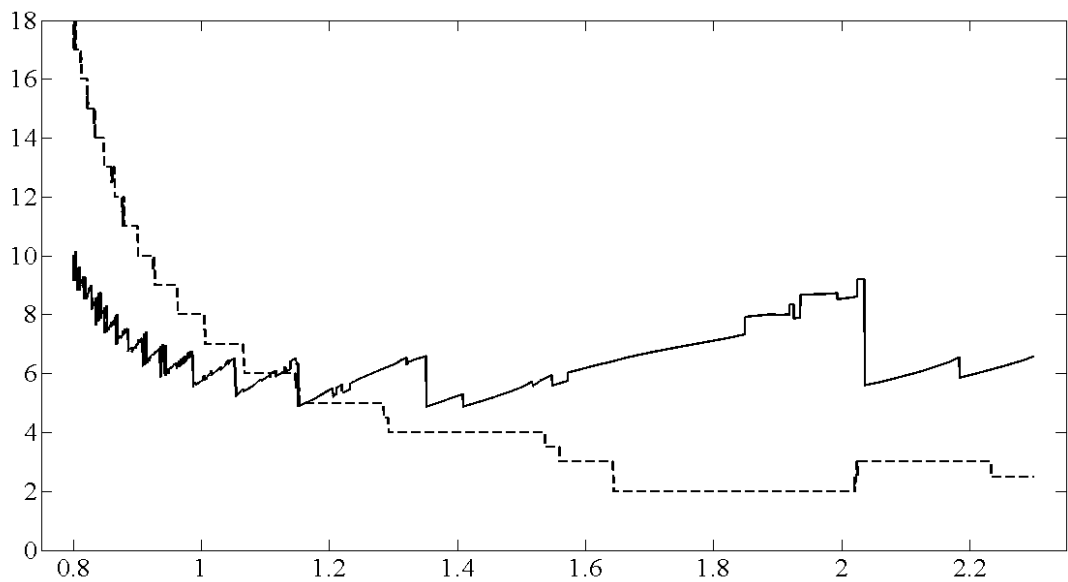


Рис. 5.5. Зависимости времени захвата и количества оборотов от прицельного параметра. Сплошной линией обозначено $\tau_{cap}(x_1, 0)$, пунктирной – количество оборотов $n(x_1, 0)$, совершаемых вихрем до отрыва от цилиндра.

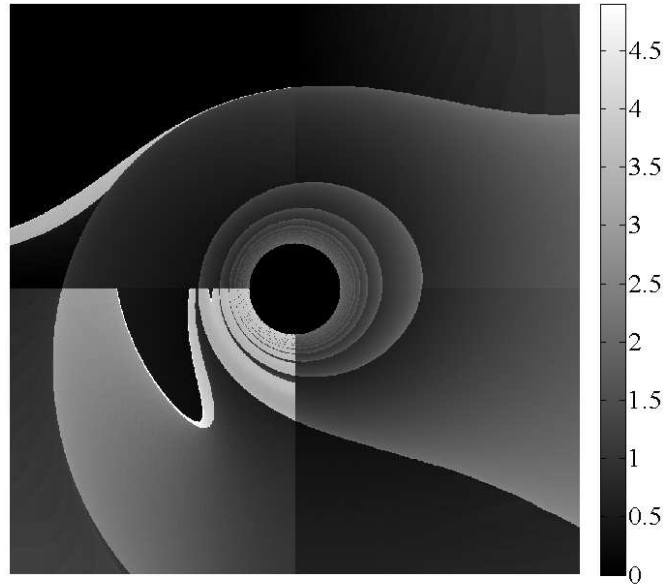


Рис. 5.6. Зависимость времени захвата $\tilde{\tau}_{cap}(x_1, y_1)$ от координат начального положения вихря относительно цилиндра.

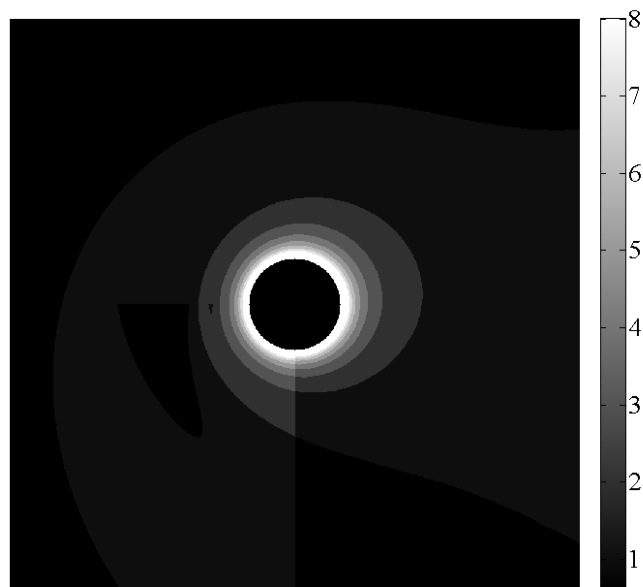


Рис. 5.7. Зависимость количества оборотов $n(x_1, y_1)$ от координат начального положения вихря относительно цилиндра.

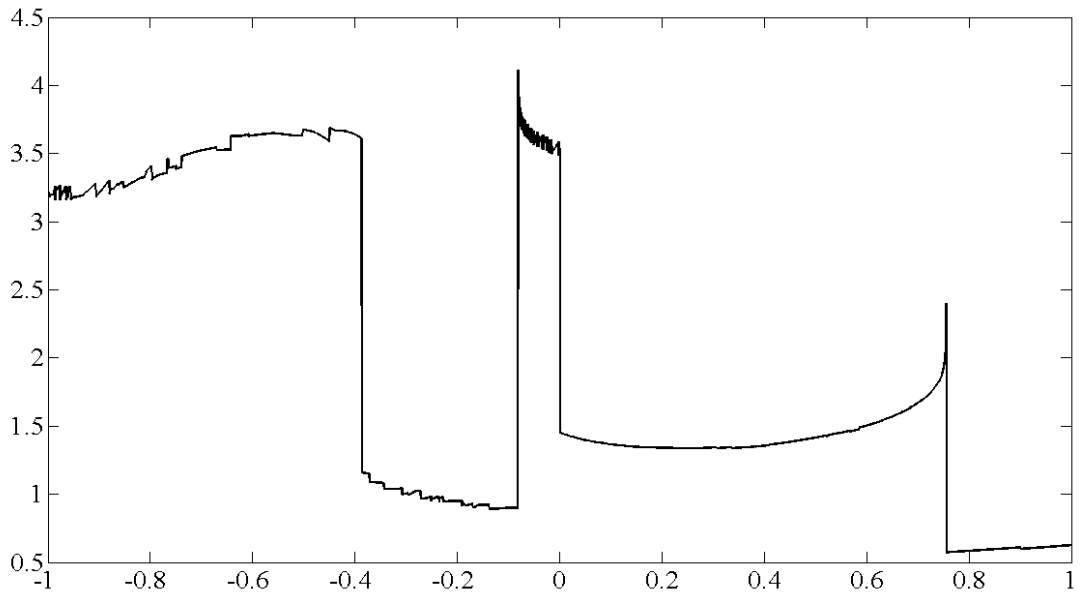


Рис. 5.8. Зависимость времени захвата $\tilde{\tau}_{cap}(x_1, y_1)$ при $y_1 = -1.5$, $x_1 \in (-1, 1)$ с шагом 0.0001.

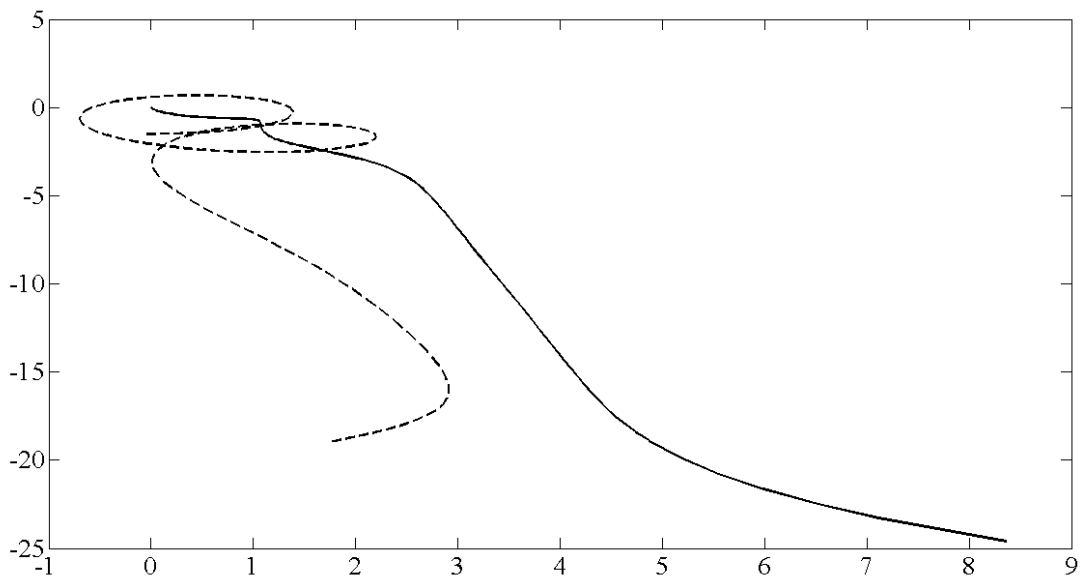


Рис. 5.9. Траектории цилиндра и вихря, соответствующие точке 1 на графике 5.8 ($x_1 = -0.0808$). Сплошной линией обозначена траектория цилиндра, пунктирной – вихря.

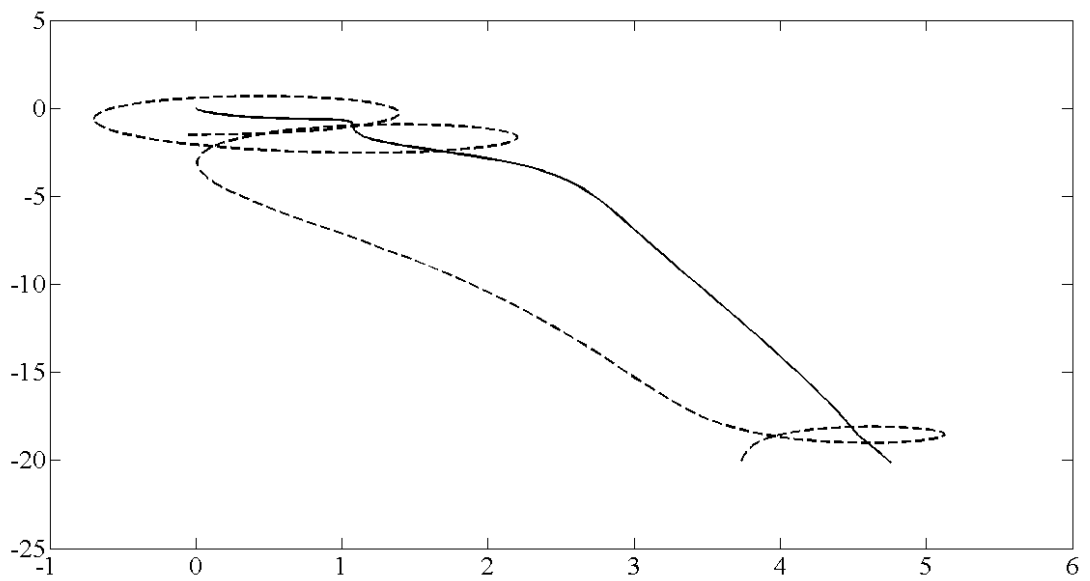


Рис. 5.10. Траектории цилиндра и вихря, соответствующие точке 2 на графике 5.8 ($x_1 = -0.0807$). Сплошной линией обозначена траектория цилиндра, пунктирной – вихря.

Обобщенный двухполевой гиростат и волчок Ковалевской в неевклидовом пространстве

Данная глава посвящена изложению некоторых результатов исследований, обобщающих один из важнейших классических результатов динамики твердого тела – интегрируемый случай движения твердого тела вокруг неподвижной точки, полученный С. В. Ковалевской. Не вдаваясь здесь в детали истории исследований в этом направлении, скажем только, что речь пойдет об обобщенном двухполевом гиростате и волчке Ковалевской в неевклидовом случае.

В первом разделе представлены результаты для явного нахождения периодических решений, в случае движения обобщенного двухполевого гиростата, и определения типа по Вильямсону этих критических движений.

Во втором разделе этой главы будут представлены новые инвариантные соотношения для одной критической подсистемы обобщенного двухполевого гиростата. В качестве приложения рассматривается нахождение типа движений в этой критической подсистеме с помощью полученных инвариантных соотношений.

Наконец, в третьем разделе приведено описание движения волчка Ковалевской в неевклидовом пространстве. Там же, используя технику развитую в работах Ковалевской и Кёттера, для неевклидового случая получены уравнения разделения. Применяя, как и в евклидовом случае, нетривиальные преобразования фазовых переменных, включающие как обобщённые координаты, так и сопряжённые импульсы, найдены уравнения Абеля–Якоби и приведены разделяющиеся переменные на плоскости.

Результаты данной главы опубликованы в работах [30, 32, 33].

6.1. Явное определение некоторых периодических движений для обобщенного двухполевого гиростата

В данном разделе рассмотрен случай движения обобщенного двухполевого гиростата, найденный В. В. Соколовым и А. В. Цыгановым. Данная система известна как вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система с тремя степенями свободы. Для этой системы мы находим особые периодические движения, при которых ранг отображения момента равен 1. Для таких движений все фазовые переменные могут быть выражены как алгебраические функции от единственной вспомогательной переменной и набора констант. Эта вспомогательная переменная удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое может быть проинтегрировано в эллиптических функциях времени. Показано, что соответствующие точки в трехмерном пространстве констант интегралов движения принадлежат пересечению двух листов дискриминантных поверхностей спектральной кривой, ассоциированной с соответствующей парой Лакса. В качестве приложения получены явные выражения характеристических показателей для определения типа особых периодических движений по Вильямсону.

В механике огромное внимание уделяется изучению особых движений механических систем (включая интегрируемых), их аналитическому описанию и исследованию их устойчивости. Это подтверждается огромным числом публикаций, посвященных этим темам. В последнее время (см. [145], [161]) разработан общий подход к проблеме устойчивости интегрируемых динамических систем. Этот подход основан на применении топологических методов для качественного анализа динамики механических систем. В частности, в работах упомянутых выше был введен *бифуркационный комплекс*, который был применен для исследования устойчивости некоторых классических механических систем с двумя степенями свободы.

В динамике твердого тела класс движений, который может быть выделен тем свойством, что ранг отображения момента равен 1, является предметом

пристального внимания. Такие траектории называются особыми периодически движениями (ОПД). К примеру, для классического волчка Ковалевской в поле силы тяжести все ОПД – это перманентные вращения вокруг вертикальной оси. В случае волчка Ковалевской под действием двух постоянных полей, как показано в [174], ОПД исчерпываются семействами маятниковых движений вокруг главных осей инерции (как было обнаружено в [175]) и семействами критических траекторий случая Делоне [176], которые были обнаружены в работе [177] и проинтегрированы в [178]. Отметим также статью [179], в которой были найдены аналитические выражения для ОПД.

В данном разделе для обобщенного двухполевого гиростата (интегрируемый случай Соколова–Цыганова) будут найдены некоторые ОПД, для которых отображение момента имеет ранг 1.

6.1.1. Уравнения движения и первые интегралы

Обозначим \mathfrak{v} алгебру Ли $so(3) \oplus (\mathbb{R}^3 + \mathbb{R}^3)$, которая является полупрямой суммой алгебры Ли $so(3)$ и двух копий \mathbb{R}^3 в стандартном представлении. Движение обобщенного двухполевого гиростата описывается следующей системой дифференциальных уравнений на сопряженном пространстве $\mathfrak{v}^* = \mathbb{R}^9(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ (уравнения Эйлера на сопряженном пространстве \mathfrak{v}^*) (см. [66]):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

с функцией Гамильтона [180]

$$\begin{aligned} H &= M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 - 2\varepsilon_2(\alpha_1 + \beta_2) + \\ &2\varepsilon_1(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2 + M_3\beta_1 - M_1\beta_3). \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Здесь $\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ обозначают полный кинетический момент и напряженности двух полей, рассматриваемые в подвижной системе координат, жестко связанной с

телом, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела. Гиростатический момент направлен вдоль оси динамической симметрии и его аксиальная составляющая обозначена с помощью λ . Параметры ε_1 и ε_2 называются *параметрами деформации*, так как их нулевые значения определяют важные частные случаи и с их помощью устанавливается связь с некоторыми ранее известными интегрируемыми случаями.

Рассматривая $\mathbb{R}^9 = \{(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\}$ как сопряженное пространство v^* к алгебре Ли v , мы получим скобку Ли–Пуассона

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= -\varepsilon_{ijk}M_k, & \{M_i, \alpha_j\} &= -\varepsilon_{ijk}\alpha_k, & \{M_i, \beta_j\} &= -\varepsilon_{ijk}\beta_k, \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0, & \{\alpha_i, \beta_j\} &= 0, & \{\beta_i, \beta_j\} &= 0, \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i), \quad 1 \leq i, j, k \leq 3.$$

По отношению к этой скобке система (6.1.1) может быть представлена в гамильтоновой форме

$$\dot{x} = \{x, H\}$$

где x обозначает любую из переменных M_i, α_j, β_k .

Отметим, что функции Казимира скобки (6.1.3) имеют вид $\boldsymbol{\alpha}^2$, $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$, и $\boldsymbol{\beta}^2$. Тогда мы можем определить фазовое пространство \mathcal{P} системы (6.1.1) как общий уровень этих функций

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = a^2, \quad \boldsymbol{\beta}^2 = b^2, \quad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = c, \quad (0 < b < a, |c| < ab).$$

Используя процедуру параметрической редукции, предложенную М. П. Харламовым в работе [181], мы можем положить параметр c равным нулю. Это существенно упростит дальнейшие вычисления.

В работе [180], для системы (6.1.1) с функцией Гамильтона (6.1.2), В. В. Соколов и А. В. Цыганов предъявили представление Лакса со спектральным параметром и тем самым доказали, что эта система является вполне интегрируемой по Лиувиллю. Это представление Лакса обобщает L - A -пару для гиростата Ко-

валевской в двойном поле, найденную А. Г. Рейманом и М. А. Семёновым-Тян-Шанским [67].

Для функции Гамильтона (6.1.2), мы представим дополнительные интегралы K и G как функции двух параметров деформации ε_1 и ε_2 [182]:

$$\begin{aligned} K &= Z_1^2 + Z_2^2 - \lambda[(M_3 + \lambda)(M_1^2 + M_2^2) + 2\varepsilon_2(\alpha_3 M_1 + \beta_3 M_2)] + \\ &\quad \lambda\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\beta}^2)M_3 + 2\lambda\varepsilon_1[\alpha_2 M_1^2 - \beta_1 M_2^2 - (\alpha_1 - \beta_2)M_1 M_2] - 2\lambda\varepsilon_1^2 \omega_\gamma, \\ G &= \omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2 + 2(M_3 + \lambda)\omega_\gamma - 2\varepsilon_2(\boldsymbol{\alpha}^2 \beta_2 + \boldsymbol{\beta}^2 \alpha_1) + \\ &\quad 2\varepsilon_1[\boldsymbol{\beta}^2(M_2 \alpha_3 - M_3 \alpha_2) - \boldsymbol{\alpha}^2(M_1 \beta_3 - M_3 \beta_1)] + \\ &\quad 2(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})[\varepsilon_2(\alpha_2 + \beta_1) + \varepsilon_1(\alpha_3 M_1 - \alpha_1 M_3 + \beta_2 M_3 - \beta_3 M_2)], \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{2}(M_1^2 - M_2^2) + \varepsilon_2(\alpha_1 - \beta_2) + \\ &\quad \varepsilon_1[M_3(\alpha_2 + \beta_1) - M_2 \alpha_3 - M_1 \beta_3] + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\beta}^2 - \boldsymbol{\alpha}^2), \\ Z_2 &= M_1 M_2 + \varepsilon_2(\alpha_2 + \beta_1) - \varepsilon_1[M_3(\alpha_1 - \beta_2) + \beta_3 M_2 - \alpha_3 M_1] - \varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}), \\ \omega_\alpha &= \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3, \quad \omega_\beta = \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + \beta_3 M_3, \\ \omega_\gamma &= M_1(\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) + M_2(\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) + M_3(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1). \end{aligned}$$

В специальном случае, когда $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 = 1$, мы имеем интегралы движения для задачи о движении гиростата Ковалевской под действием двух однородных силовых полей [67, 183].

Для пары Лакса Соколова–Цыганова [180], уравнение ассоциированной с ней спектральной кривой $\mathcal{E}(z, \zeta)$ может быть записано в следующем виде [182]

$$\mathcal{E}(z, \zeta) : d_4 \zeta^4 + d_2 \zeta^2 + d_0 = 0,$$

где

$$d_4 = -z^4 - \varepsilon_1^2(\alpha^2 + \beta^2)z^2 - \varepsilon_1^4[\alpha^2\beta^2 - (\alpha \cdot \beta)^2],$$

$$d_2 = 2z^6 + [\varepsilon_1^2(\alpha^2 + \beta^2) - h - \lambda^2]z^4 + [\varepsilon_2^2(\alpha^2 + \beta^2) - \varepsilon_1^2g]z^2 + 2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2[\alpha^2\beta^2 - (\alpha \cdot \beta)^2],$$

$$d_0 = -z^8 + hz^6 + f_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}z^4 + \varepsilon_2^2gz^2 - \varepsilon_2^4[\alpha^2\beta^2 - (\alpha \cdot \beta)^2].$$

Наиболее громоздкий коэффициент $f_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ при z^4 в d_0 может быть выражен с помощью констант первых интегралов h , k и g в следующем виде:

$$f_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \varepsilon_1^2g + k - \varepsilon_1^4(\alpha \cdot \beta)^2 - \frac{1}{4}[h^2 + 2\varepsilon_1^2(\alpha^2 + \beta^2)h + \varepsilon_1^4(\alpha^2 - \beta^2)^2] - \varepsilon_2^2(\alpha^2 + \beta^2).$$

Определим отображение

$$\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

положив $\mathcal{F}(x) = (g = G(x), k = K(x), h = H(x))$. Отображение \mathcal{F} называется *отображением момента* или *интегральным отображением*. С помощью \mathcal{C} обозначим множество критических точек \mathcal{F} , т.е. множество таких точек x , в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(x) < 3$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}^3$ называется *бифуркационной диаграммой*. Давайте будем называть периодические траектории, состоящие из критических точек ранга 1, *особыми периодическими движениями* (ОПД) [184]. Как было отмечено выше, для классического волчка Ковалевской в поле силы тяжести все ОПД являются перманентными вращениями вокруг вертикальной оси. Для волчка Ковалевской в двух постоянных полях ($\lambda = 0, \varepsilon_1 = 0$) множество ОПД, как показано в [174], состоит из трех семейств движений маятникового типа, найденных в [181] для произвольного твердого тела и семейств особых периодических движений случая Богоявленского [176]. Эти последние движения впервые описаны в работе [177] и явно проинтегрированы в [178]. Отметим, что такие маятниковые движения впервые были обнаружены Х. Яхья [185] без условий, накладываемых на моменты инерции, но при специальных ограничениях на положения центров приложения

силовых полей. Для интегрируемой системы Ковалевской–Яхья соответствующие ОПД были представлены в работах [186], [187]. Аналогичные исследования в задачах гидродинамики, динамике твердого тела и неголономной динамике были проведены в [19], [188], [27], [189], [190], [191], [192] и [73].

Основной целью данного раздела является описание некоторого класса периодических движений для обобщенного двухполевого гиростата. Для этого мы будем изучать особенности спектральной кривой, ассоциированной с L - A -парой Соколова–Цыганова.

6.1.2. Дискриминантные поверхности и явное интегрирование ОПД

Дискриминантная поверхность спектральной кривой $\mathcal{E}(z, \zeta)$ для L - A -пары Соколова–Цыганова была найдена в [193] и состоит из двух поверхностей Π_1 и Π_2 :

$$\Pi_1 : \begin{cases} g(h, t) = \frac{ht^2 - 2t^3}{\varepsilon_2^2} + \frac{2\varepsilon_2^2 a^2 b^2}{t}, \\ k(h, t) = 3t^2 - 2ht + \frac{\varepsilon_1^2(2t^3 - ht^2)}{\varepsilon_2^2} - \frac{\varepsilon_2^2 a^2 b^2(2\varepsilon_1^2 t + \varepsilon_2^2)}{t^2} + \\ + \frac{1}{4}\{h^2 + 2\varepsilon_1^2(a^2 + b^2)h + \varepsilon_1^4(a^2 - b^2)^2 + 4\varepsilon_2^2(a^2 + b^2)\} \end{cases}$$

и

$$\Pi_2 : \begin{cases} g(h, s) = -\frac{\varepsilon_1^4 \lambda^2 (a^2 - b^2)^2}{s} - \frac{+\{\varepsilon_1^2[\varepsilon_1^2(a^2 + b^2) + h + \lambda^2] + 2\varepsilon_2^2\}}{8\varepsilon_1^8 \lambda^2} s^2 + \\ \frac{1}{16} \frac{s^3}{\lambda^2 \varepsilon_1^8} + \frac{1}{2}\{\varepsilon_1^2(a^2 - b^2)^2 + (a^2 + b^2)(h + \lambda^2)\}, \\ k(h, s) = \frac{\varepsilon_1^8 \lambda^4 (a^2 - b^2)^2}{s^2} + \frac{\{\varepsilon_1^2[\varepsilon_1^2(a^2 + b^2) + h + \lambda^2] + 2\varepsilon_2^2\}}{2\varepsilon_1^4} s - \\ - \frac{3}{16} \frac{s^2}{\varepsilon_1^4} - \frac{1}{2} \lambda^2 [2\varepsilon_1^2(a^2 + b^2) + h + \frac{\lambda^2}{2}]. \end{cases}$$

Рассмотрим типичный пример пересечения дискриминантных поверхностей с поверхностью изоэнергетического уровня $\{h = \text{const}\}$ (см. Рис.6.1 и Рис.6.2).

Точки P_1, P_2, Q_1, Q_2 являются точками самопересечения дискриминантных поверхностей Π_1 и Π_2 . Координаты этих точек на изоэнергетическом уровне

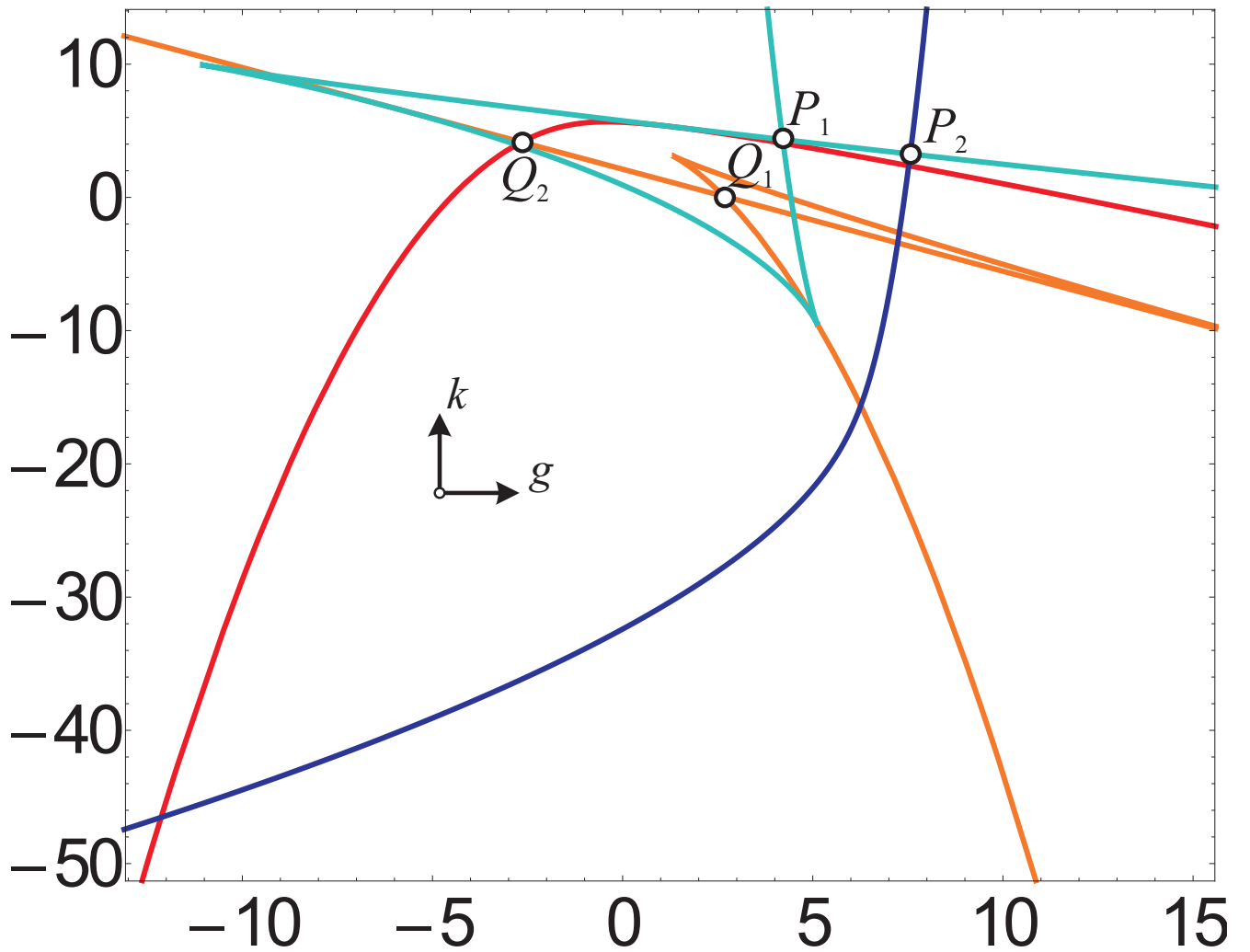


Рис. 6.1. Дискриминантные поверхности в сечении $\{h = \text{const}\}$ для значений параметров $a = 1$; $c = 0$; $\varepsilon_2 = 0.261$; $\varepsilon_1 = 0.851$; $b = 0.781$; $\lambda = 1.958$; $h = 3.41$.

$\{h = \text{const}\}$ определяются выражениями

$$P_1 : \begin{cases} g = b^2(h + \lambda^2) - \frac{1}{\varepsilon_1^2}(a^2 - b^2)(\varepsilon_2^2 + b^2\varepsilon_1^4), \\ k = \frac{1}{4}[\varepsilon_1^2(a^2 + b^2) + h]^2 + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2}(h + \lambda^2) + \frac{\varepsilon_2^4}{\varepsilon_1^4} + \varepsilon_2^2(a^2 + b^2) - \varepsilon_1^2 b^2 \lambda^2, \end{cases}$$

$$P_2 : \begin{cases} g = a^2(h + \lambda^2) + \frac{1}{\varepsilon_1^2}(a^2 - b^2)(\varepsilon_2^2 + a^2\varepsilon_1^4), \\ k = \frac{1}{4}[\varepsilon_1^2(a^2 + b^2) + h]^2 + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2}(h + \lambda^2) + \frac{\varepsilon_2^4}{\varepsilon_1^4} + \varepsilon_2^2(a^2 + b^2) - \varepsilon_1^2 a^2 \lambda^2, \end{cases}$$

$$Q_{1,2} : \begin{cases} g = \pm abh, \\ k = \frac{1}{4}(a \mp b)^2 [2\varepsilon_1^2 h + \varepsilon_1^4 (a \pm b)^2 + 4\varepsilon_2^2]. \end{cases}$$

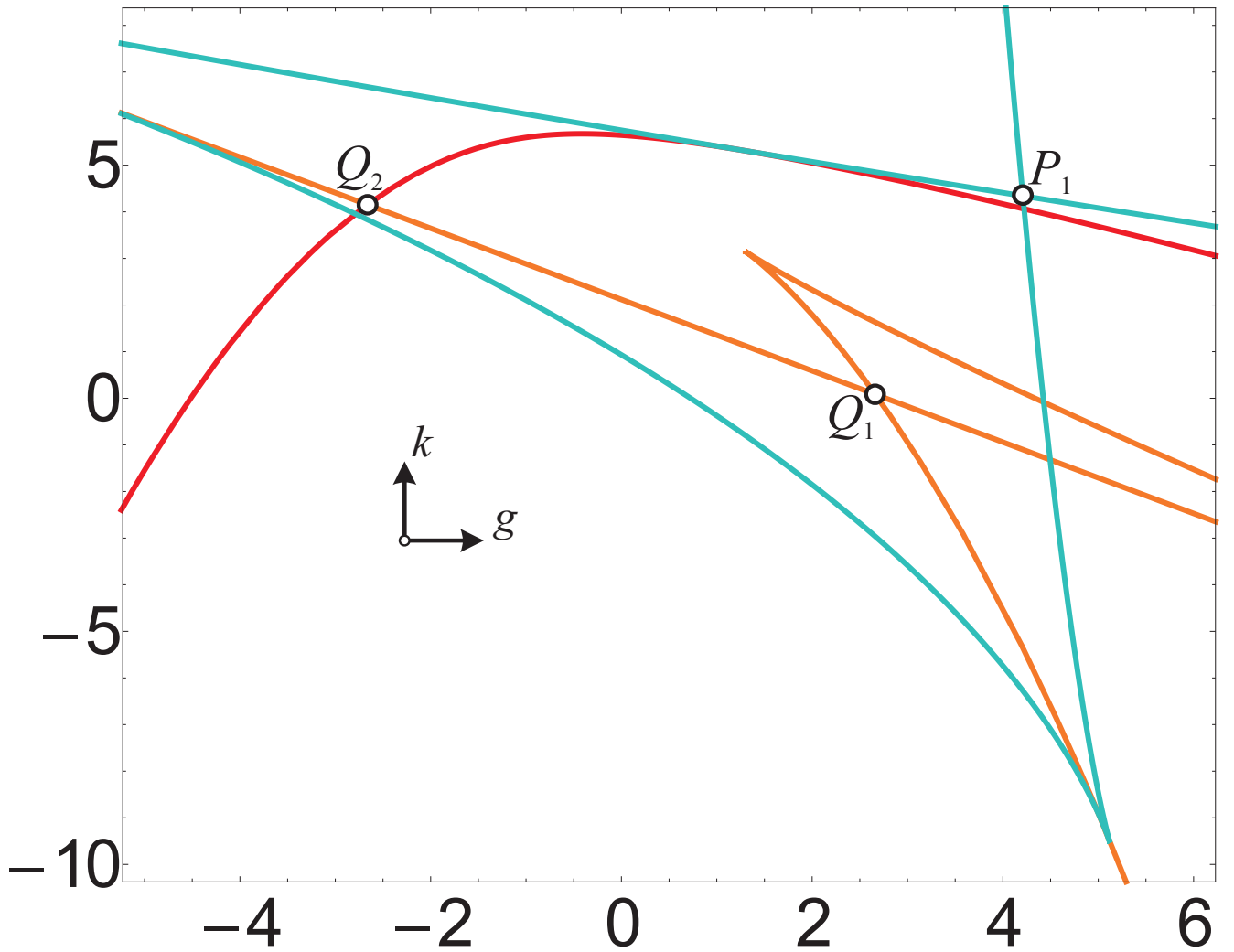


Рис. 6.2. Увеличенный фрагмент дискриминантных поверхностей, изображенных на Рис. 6.1.

Особенности (критические точки) ранга 1 или особые периодические движения содержатся в прообразе при отображении момента точек, указанных выше. Выражения для координат точек P_k и Q_k могут рассматриваться как параметрически заданные кривые $(g(h), k(h), h)$ с параметром h в пространстве $\mathbb{R}^3(g, k, h)$, прообразы которых содержат критические точки ранга 1 отображения момента. Таким образом векторы скорости этих кривых $(\frac{dg}{dh}, \frac{dk}{dh}, 1)$ имеют следующую форму:

$$P_1 : \left(b^2, \frac{h}{2} + \frac{\varepsilon_1^2}{2}(a^2 + b^2) + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2}, 1 \right), \quad P_2 : \left(a^2, \frac{h}{2} + \frac{\varepsilon_1^2}{2}(a^2 + b^2) + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2}, 1 \right), \quad (6.1.4)$$

$$Q_{1,2} : \left(\pm ab, \frac{\varepsilon_1^2}{2}(a \mp b)^2, 1 \right).$$

Далее мы рассмотрим 4 особых периодических движения, которые соответствуют особенностям ранга 1 отображения момента. На бифуркационной диа-

грамме каждое из этих ОПД дает однопараметрическое семейство точек $P_1(h)$, $P_2(h)$, $Q_1(h)$, $Q_2(h)$, изображенное на Рис. 6.1. Для семейства P_1 условия существования особенности ранга 1 будут получены. Эти условия будут представлены в виде линейных зависимостей между $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } G$. Используя эти уравнения, будет получено параметрическое представление соответствующих ОПД. Для таких движений все фазовые переменные могут быть выражены в виде алгебраических функций одной вспомогательной переменной. Эта переменная удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое проинтегрировано в эллиптических функциях времени. В качестве приложения получены явные выражения характеристических показателей для определения типа особых периодических движений по Вильямсону. Наконец, для точек $P_2(h)$, $Q_1(h)$, $Q_2(h)$ представлены аналогичные результаты.

6.1.3. Точки P_1

Рассмотрим кривую γ во множестве критических точек ранга 1 (а также в прообразе P_1), которая трансверсальна к уровню H . Затем мы можем рассматривать ее как $\gamma(h)$, т.е. считая величину H как параметр на γ . Если $\text{sgrad } H \neq 0$ в точках $\gamma(h)$, то должно выполняться следующее соотношение:

$$\text{sgrad}_{\gamma(h)} G = \lambda_1(h) \text{sgrad}_{\gamma(h)} H, \quad \text{sgrad}_{\gamma(h)} K = \lambda_2(h) \text{sgrad}_{\gamma(h)} H \quad (6.1.5)$$

для некоторых коэффициентов $\lambda_1(h)$, $\lambda_2(h)$ ($\text{sgrad}_x f$ означает $\text{sgrad } f$ в точке x).

Далее покажем, что коэффициенты $\lambda_1(h)$, $\lambda_2(h)$ являются соответственно функциями $\frac{dg}{dh}$, $\frac{dk}{dh}$ из соотношений (6.1.4) для вектора скорости соответствующей кривой $P_1(h)$ в $\mathbb{R}^3(g, k, h)$. Действительно, например, первое из соотношений (6.1.5) эквивалентно тому факту, что $d_{\gamma(h)} G - \lambda_1(h) d_{\gamma(h)} H$ принадлежит ядру скобки Пуассона, т.е. это линейная комбинация дифференциалов функций Казимира в точке $\gamma(h)$. Отсюда следует, что

$$(d_{\gamma(h)} G - \lambda_1(h) d_{\gamma(h)} H) \frac{d\gamma}{dh} = 0,$$

так как вектор скорости $\frac{d\gamma}{dh}$ касателен к симплектическому листу, который является общим уровнем функций Казимира. Таким образом мы имеем

$$\frac{dg}{dh} = \frac{d}{dh}G(\gamma(h)) = (d_{\gamma(h)}G)\frac{d\gamma}{dh} = \lambda_1(h)(d_{\gamma(h)}H)\frac{d\gamma}{dh} = \lambda_1(h)\frac{d}{dh}H(\gamma(h)) = \lambda_1(h).$$

Рассуждения в случае $\lambda_2(h)$ (и также для произвольного интеграла системы) аналогичны.

Таким образом, в случае точки P_1 мы имеем следующее соотношение

$$\text{sgrad } G = b^2 \text{sgrad } H$$

для точек ранга 1 и ее прообраза. Учитывая, что такие точки принадлежат общему уровню трех функций Казимира (с постоянными $a, b, 0$) и функции Гамильтона H (с постоянной h), мы получаем следующее 2-параметрическое представление (т.е., в терминах вспомогательных переменных ξ и η) семейства точек ранга 1 соответствующих $P_1(h)$:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{\sqrt{b^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2}[b(1 + \xi^2)(1 + \eta^2) + 2a\xi(1 - \eta^2)] - 2\lambda\varepsilon_1b(1 + \eta^2)\xi}{\varepsilon_1b(1 - \xi^2)(1 + \eta^2)}, \\ M_2 &= \varepsilon_2 \frac{\sqrt{b^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2}[a(1 + \xi^2)(1 - \eta^2) + 2b\xi(1 + \eta^2)] - \lambda\varepsilon_1b(1 + \xi^2)(1 + \eta^2)}{\varepsilon_1b\sqrt{b^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2}(1 - \xi^2)(1 + \eta^2)}, \\ M_3 &= \frac{a\sqrt{b^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2}(1 - \eta^2) - \lambda\varepsilon_1b(1 + \eta^2)}{\varepsilon_1b(1 + \eta^2)}, \\ \alpha_1 &= -2a \frac{\varepsilon_2(1 - \eta^2)\xi - b\varepsilon_1^2(1 - \xi^2)\eta}{b\varepsilon_1^2(1 + \eta^2)(1 + \xi^2)}, \quad \alpha_2 = a \frac{\sqrt{b^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2}(1 - \eta^2)}{b\varepsilon_1^2(1 + \eta^2)}, \\ \alpha_3 &= -a \frac{\varepsilon_2(1 - \eta^2)(1 - \xi^2) + 4b\varepsilon_1^2\eta\xi}{b\varepsilon_1^2(1 + \eta^2)(1 + \xi^2)}, \\ \beta_1 &= \frac{2\sqrt{b^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2}\xi}{\varepsilon_1^2(1 + \xi^2)}, \quad \beta_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2}, \quad \beta_3 = \frac{\sqrt{b^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2}(1 - \xi^2)}{\varepsilon_1^2(1 + \xi^2)}. \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

Здесь вспомогательные переменные ξ и η могут быть выражены в терминах фазовых переменных α_2 и β_3 следующим образом:

$$\eta^2 = \frac{a\sqrt{b^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2} - b\varepsilon_1^2\alpha_2}{a\sqrt{b^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2} + b\varepsilon_1^2\alpha_2}, \quad \xi^2 = \frac{\sqrt{b^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2} - \varepsilon_1^2\beta_3}{\sqrt{b^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2} + \varepsilon_1^2\beta_3},$$

Используя равенство $H = h$, мы можем исключить η . К сожалению, явные выражения для функции η в случае всех других фазовых переменных слишком громоздки. Тем не менее, с помощью исключения η мы можем получить одно уравнение относительно $\xi(t)$:

$$(\dot{\xi})^2 = \frac{1}{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2} (a_4 \xi^4 + a_3 \xi^3 + a_2 \xi^2 + a_1 \xi + a_0),$$

где

$$a_4 = -\varepsilon_2^2 (-\varepsilon_2^2 \varepsilon_1^2 \lambda^2 + 4q^2 \varepsilon_2^2 + 3q^4 + 2rq + \varepsilon_1^2 q^2 h),$$

$$a_3 = 4\varepsilon_2^2 \varepsilon_1 \lambda (q\varepsilon_2^2 + q^3 + r),$$

$$a_2 = -4\varepsilon_1^2 q^4 h - 8q^2 \varepsilon_2^4 + 4r^2 - 8q^6 - 18q^4 \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1^2 q^2 \varepsilon_2^2 h - 2\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^4 \lambda^2,$$

$$a_1 = 4\varepsilon_2^2 \varepsilon_1 \lambda (q\varepsilon_2^2 + q^3 - r),$$

$$a_0 = -\varepsilon_2^2 (-\varepsilon_2^2 \varepsilon_1^2 \lambda^2 + 4q^2 \varepsilon_2^2 - 2rq + 3q^4 + \varepsilon_1^2 q^2 h).$$

Здесь новые параметры q и r могут быть выражены в терминах a и b с помощью формул

$$q = \sqrt{b^2 \varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2},$$

$$r = \varepsilon_1^2 \sqrt{(b^2 \varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2) [\varepsilon_1^2 b^2 (h + 2\varepsilon_1^2 b^2) + \varepsilon_2^2 (a^2 + b^2)] - \lambda^2 b^2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2}.$$

Эти выражения могут быть использованы для построения характеристического многочлена симплектического оператора, который является линеаризацией векторного поля $\text{sgrad}(G - b^2 H)$. Это позволяет нам определить тип особенности ранга 1.

В общем случае характеристический полином может быть записан как:

$$\Delta(\mu) = \mu^4 - p_2 \mu^2 - p_4,$$

где

$$p_2 = \frac{1}{2} \text{trace } A_f^2,$$

$$p_4 = \frac{1}{4} [\text{trace } A_f^4 - \frac{1}{2} (\text{trace } A_f^2)^2].$$

Здесь A_f обозначает симплектический оператор, который является линеаризацией векторного поля $\text{sgrad } f$ в точках решения (6.1.6). Вычисление коэффициентов p_2 и p_4 для функции $G - b^2 H$ в точках P_1 приводит к следующим выражениям

$$p_2 = -\frac{4}{\varepsilon_1^2}(a^2 - b^2)[a^2 b^2 \varepsilon_1^4 - 2\varepsilon_2^2 a^2 - 3b^4 \varepsilon_1^4 - \varepsilon_1^2 b^2 (h + \lambda^2)],$$

$$p_4 = \frac{16}{\varepsilon_1^4}(a^2 - b^2)^3[(b^2 \varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2)(\varepsilon_1^2 b^2 (h + 2b^2) + \varepsilon_2^2 (a^2 + b^2)) - \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \lambda^2 b^2].$$

6.1.4. Точки P_2

Теперь мы можем описать периодические движения для точки P_2 . Совершенно аналогично предыдущему, только что рассмотренному выше случаю мы видим, что зависимость косых градиентов имеет вид

$$\text{sgrad } G = a^2 \text{sgrad } H,$$

и мы получаем следующее 2-параметрическое описание точек ранга 1 в этом случае:

$$M_1 = -\varepsilon_2 \frac{\sqrt{a^2 \varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2} [b(1 + \xi^2)(1 - \eta^2) + 2a\xi(1 + \eta^2)] + \lambda \varepsilon_1 a(1 + \xi^2)(1 + \eta^2)}{\varepsilon_1 a \sqrt{a^2 \varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2} (1 - \xi^2)(1 + \eta^2)},$$

$$M_2 = -\frac{\sqrt{a^2 \varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2} [a(1 + \xi^2)(1 + \eta^2) + 2b\xi(1 - \eta^2)] + 2\lambda \varepsilon_1 a(1 + \eta^2)\xi}{\varepsilon_1 a(1 - \xi^2)(1 + \eta^2)},$$

$$M_3 = -\frac{b\sqrt{a^2 \varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2} (1 - \eta^2) + \lambda \varepsilon_1 a(1 + \eta^2)}{\varepsilon_1 a(1 + \eta^2)},$$

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{2\sqrt{a^2 \varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2} \xi}{\varepsilon_1^2 (1 + \xi^2)}, \quad \alpha_3 = \frac{\sqrt{a^2 \varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2} (1 - \xi^2)}{\varepsilon_1^2 (1 + \xi^2)},$$

$$\beta_1 = \frac{b\sqrt{a^2 \varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2} (1 - \eta^2)}{a\varepsilon_1^2 (1 + \eta^2)}, \quad \beta_2 = -2b \frac{\varepsilon_2 (1 - \eta^2)\xi - a\varepsilon_1^2 (1 - \xi^2)\eta}{a\varepsilon_1^2 (1 + \xi^2)(1 + \eta^2)},$$

$$\beta_3 = -b \frac{\varepsilon_2 (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) + 4a\varepsilon_1^2 \xi \eta}{a\varepsilon_1^2 (1 + \xi^2)(1 + \eta^2)}.$$

(6.1.7)

Здесь вспомогательные переменные ξ и η , выраженные в терминах фазовых переменных α_2 и β_3 , имеют следующий вид

$$\eta^2 = \frac{a\sqrt{b^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2} - b\varepsilon_1^2\alpha_2}{a\sqrt{b^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2} + b\varepsilon_1^2\alpha_2}, \quad \xi^2 = \frac{\sqrt{b^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2} - \varepsilon_1^2\beta_3}{\sqrt{b^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2} + \varepsilon_1^2\beta_3},$$

Используя равенство $H = h$, мы вновь можем исключить η и таким образом получить одно уравнение относительно $\xi(t)$

$$(\dot{\xi})^2 = \frac{1}{\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2m^2}(b_4\xi^4 + b_3\xi^3 + b_2\xi^2 + b_1\xi + b_0),$$

где

$$b_4 = -\varepsilon_2^2(4\varepsilon_2^2m^2 - \varepsilon_1^2\lambda^2\varepsilon_2^2 + h\varepsilon_1^2m^2 - 2nm + 3m^4),$$

$$b_3 = -4\varepsilon_2^2\varepsilon_1\lambda(\varepsilon_2^2m - n + m^3),$$

$$b_2 = -2\varepsilon_2^4\varepsilon_1^2\lambda^2 - 4\varepsilon_1^2hm^4 - 8\varepsilon_2^4m^2 - 18\varepsilon_2^2m^4 + 4n^2 - 8m^6 - 2\varepsilon_1^2h\varepsilon_2^2m^2,$$

$$b_1 = -4\varepsilon_2^2\varepsilon_1\lambda(\varepsilon_2^2m + n + m^3),$$

$$b_0 = -\varepsilon_2^2(4\varepsilon_2^2m^2 - \varepsilon_1^2\lambda^2\varepsilon_2^2 + h\varepsilon_1^2m^2 + 3m^4 + 2nm).$$

Здесь новые параметры m и n могут быть выражены через a и b следующим образом:

$$m = \sqrt{a^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2},$$

$$n = \varepsilon_1^2\sqrt{(a^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2)[\varepsilon_1^2a^2(h + 2\varepsilon_1^2a^2) + \varepsilon_2^2(a^2 + b^2)] - \lambda^2a^2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2}.$$

Наконец, тип особенности ранга 1, который соответствует точке P_2 , может быть определен с помощью характеристического уравнения

$$\Delta(\mu) = \mu^4 - p'_2\mu^2 - p'_4,$$

где

$$p'_2 = -\frac{4}{\varepsilon_2^2}(a^2 - b^2)[a^2b^2\varepsilon_1^4 - 2\varepsilon_2^2b^2 - 3a^4\varepsilon_1^4 - \varepsilon_1^2a^2(h + \lambda^2)],$$

$$p'_4 = \frac{16}{\varepsilon_1^4}(a^2 - b^2)^3[(a^2\varepsilon_1^4 - \varepsilon_2^2)(\varepsilon_1^2a^2(h + 2a^2) + \varepsilon_2^2(a^2 + b^2)) - \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\lambda^2a^2].$$

6.1.5. Точки Q_1

Для точки Q_1 мы получаем решение в виде

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 = \alpha_3 = \beta_3 = 0, \\ \alpha_1 = \frac{a(1-x^2)}{1+x^2}, \alpha_2 = \frac{2ax}{1+x^2}, \\ \beta_1 = -\frac{2bx}{1+x^2}, \beta_2 = \frac{b(1-x^2)}{1+x^2}, \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

здесь мы ввели новую переменную x , которая имеет вид

$$x = \frac{\varepsilon_1 M_3 [2M_3(M_3 + \lambda) - h] - \varepsilon_2 R_1}{2\varepsilon_1^2(a+b)M_3^2 + 2\varepsilon_2 M_3(M_3 + \lambda) + 2\varepsilon_2^2(a+b) - \varepsilon_2 h + \varepsilon_1 M_3 R_1}.$$

Динамика переменной M_3 определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{M}_3 = R_1,$$

где с помощью R_1^2 мы обозначили полином

$$R_1^2 = -4M_3^4 - 8\lambda M_3^3 + 4[\varepsilon_1^2(a+b)^2 + h - \lambda^2]M_3^2 + 4\lambda h M_3 + 4\varepsilon_2^2(a+b)^2 - h^2.$$

Благодаря тому, что R_1^2 это квадратный трехчлен, все переменные могут быть выражены в эллиптических функциях времени.

Характеристическое уравнение для определения типа особенности для точки Q_1 может быть записано в виде

$$\mu^4 + d_2\mu + d_0 = 0,$$

где

$$d_2 = -2ab[(a-b)^2(h + 4\varepsilon_1^2 ab) - 4\lambda^2 ab],$$

$$d_0 = 8a^3 b^3 [2\varepsilon_2^2(a-b)^4 +$$

$$\varepsilon_1^2(a-b)^2((a-b)^2(h + 2\varepsilon_1^2 ab) - 4\lambda^2 ab) - \lambda^2(h(a-b)^2 - 2\lambda^2 ab)].$$

Заметим, что отрицательный знак величины

$$d_2^2 - 4d_0 = 4a^2 b^2 (a-b)^4 (h^2 - 16\varepsilon_2^2 ab)$$

показывает, что особенность ранга 1 имеет тип фокуса.

6.1.6. Точки Q_2

Для точки Q_2 мы получаем решение в виде

$$\begin{aligned} M_1 = M_2 = \alpha_3 = \beta_3 = 0, \\ \alpha_1 = -\frac{a(1-x^2)}{1+x^2}, \alpha_2 = \frac{2ax}{1+x^2}, \\ \beta_1 = \frac{2bx}{1+x^2}, \beta_2 = \frac{b(1-x^2)}{1+x^2}, \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

здесь мы ввели новую переменную x , которая имеет вид

$$x = \frac{\varepsilon_1 M_3 [2M_3(M_3 + \lambda) - h] + \varepsilon_2 R_2}{2\varepsilon_1^2(a-b)M_3^2 - 2\varepsilon_2 M_3(M_3 + \lambda) + 2\varepsilon_2^2(a-b) + \varepsilon_2 h + \varepsilon_1 M_3 R_2}.$$

Динамика переменной M_3 определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{M}_3 = R_2,$$

где с помощью R_2^2 мы обозначили полином

$$R_2^2 = -4M_3^4 - 8\lambda M_3^3 + 4[\varepsilon_1^2(a-b)^2 + h - \lambda^2]M_3^2 + 4\lambda h M_3 + 4\varepsilon_2^2(a-b)^2 - h^2.$$

Так как R_2^2 является полиномом четвертой степени, все фазовые переменные также могут быть выражены в терминах эллиптических функций времени.

Тип особенности соответствующей точке Q_2 может быть определен из характеристического уравнения

$$\mu^4 + d'_2 \mu + d'_0 = 0,$$

где

$$d'_2 = 2ab[(a+b)^2(h - 4\varepsilon_1^2 ab) + 4\lambda^2 ab],$$

$$d'_0 = -8a^3 b^3 [2\varepsilon_2^2(a+b)^4 +$$

$$\varepsilon_1^2(a+b)^2((a+b)^2(h - 2\varepsilon_1^2 ab) + 4\lambda^2 ab) - \lambda^2(h(a+b)^2 + 2\lambda^2 ab)].$$

Здесь значение выражения

$$d'_2{}^2 - 4d'_0 = 4a^2 b^2 (a+b)^4 (h^2 + 16\varepsilon_2^2 ab)$$

всегда остается неотрицательным.

В данном разделе мы построили периодические решения (6.1.6), (6.1.7), (6.1.8) и (6.1.9) являющиеся критическими точками ранга 1 отображения момента. Образы этих решений являются особыми точками на бифуркационной диаграмме. Эти решения играют ключевую роль при построении атласа бифуркационных диаграмм для обобщенного двухполевого гиростата. Аналогичные исследования атласа бифуркационных диаграмм были выполнены М. П. Харламовым для движения волчка Ковалевской в двойном поле сил.

6.2. Новые инвариантные соотношения одной критической подсистемы обобщенного двухполевого гиростата

В данном разделе приведены новые инвариантные соотношения для одной критической подсистемы интегрируемой гамильтоновой системы с тремя степенями свободы В. В. Соколова и А. В. Цыганова, известной как обобщенный двухполевой гиростат. Динамическая система, индуцируемая на четырехмерном инвариантном многообразии, является почти всюду гамильтоновой с двумя степенями свободы. Определен тип движений исходной системы с тремя степенями свободы на этом инвариантном многообразии.

6.2.1. Формулировка проблемы

Рассмотрим вполне интегрируемую гамильтонову систему с тремя степенями свободы, которая описывает динамику *обобщенного двухполевого гиростата* (случай интегрируемости Соколова – Цыганова) [194].

Движение обобщенного двухполевого гиростата описывается системой

уравнений Эйлера на ко-алгебре Ли $e(3, 2)^*$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

с функцией Гамильтона

$$\begin{aligned} H &= M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 - 2\varepsilon_1 \mathbf{M} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r}_2 \times \boldsymbol{\beta}) - \\ &- 2\varepsilon_2 (\mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{\beta}). \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Рассматривается твердое тело с неподвижной точкой O . Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ образуют ортонормированный базис системы координат, жестко связанной с телом, имеющей начало в точке O . Вектор $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ – это полный кинетический момент, радиус-векторы \mathbf{r}_k указывают центры приложения полей, $\mathbf{r}_k \perp \mathbf{e}_3$, $k = 1, 2$, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ – векторы напряженности силовых полей, неподвижные в инерциальном пространстве, α_i, β_j – координаты векторов $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ соответственно, в системе координат, жестко связанной с телом. Наконец, $\mathbf{M}_F = \mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r}_2 \times \boldsymbol{\beta}$ обозначает момент внешних сил относительно точки O . Параметры деформации обозначены через $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Отметим, что нулевые значения параметров деформации приводят к известным интегрируемым случаям в динамике твердого тела [169].

Дополнительный интеграл K , являющийся аналогом интеграла Ковалевской в случае обобщенного двухполевого гиростата, может быть представлен в форме [195]

$$K = Z_1^2 + Z_2^2,$$

где

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{2}(M_1^2 - M_2^2) + \varepsilon_2(\alpha_1 - \beta_2) + \\ &+ \varepsilon_1[M_3(\alpha_2 + \beta_1) - M_2\alpha_3 - M_1\beta_3] + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\beta}^2 - \boldsymbol{\alpha}^2), \\ Z_2 &= M_1M_2 + \varepsilon_2(\alpha_2 + \beta_1) - \varepsilon_1[M_3(\alpha_1 - \beta_2) + \beta_3M_2 - \alpha_3M_1] - \varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}). \end{aligned}$$

Второй дополнительный интеграл G , обобщающий интеграл площадей, имеет вид [195]

$$\begin{aligned} G = & \omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2 + 2M_3\omega_\gamma - 2\varepsilon_2(\alpha^2\beta_2 + \beta^2\alpha_1) \\ & + 2\varepsilon_1[\beta^2(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2) - \alpha^2(M_1\beta_3 - M_3\beta_1)] \\ & + 2(\alpha \cdot \beta)[\varepsilon_2(\alpha_2 + \beta_1) + \varepsilon_1(\alpha_3M_1 - \alpha_1M_3 + \beta_2M_3 - \beta_3M_2)], \end{aligned}$$

где

$$\omega_\alpha = M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + M_3\alpha_3,$$

$$\omega_\beta = M_1\beta_1 + M_2\beta_2 + M_3\beta_3,$$

$$\omega_\gamma = M_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + M_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + M_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).$$

Рассматривая $\mathbb{R}^9 = \{(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\}$ как ко-алгебру Ли $e(3, 2)^*$, определим скобку Ли-Пуассона [66]

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}M_k, \quad \{M_i, \alpha_j\} = \varepsilon_{ijk}\alpha_k, \quad \{M_i, \beta_j\} = \varepsilon_{ijk}\beta_k,$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, \quad \{\alpha_i, \beta_j\} = 0, \quad \{\beta_i, \beta_j\} = 0, \quad (6.2.3)$$

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i), \quad 1 \leq i, j, k \leq 3.$$

С помощью скобки (6.2.3) система (6.2.1) с гамильтонианом (6.2.2) может быть представлена в гамильтоновой форме

$$\dot{x} = \{H, x\},$$

где $x \in \mathbb{R}^9$. Отметим, что скобка (6.2.3) обладает тремя функциями Казимира $\alpha^2, \beta^2, \alpha \cdot \beta$. Из [169] известно, что любая задача о движении твердого тела в двух постоянных полях может быть сведена к задаче, в которой одна из пар $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ или $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ ортогональна. Используя процедуру параметрической редукции, предложенную Харламовым [196], можно *одновременно* ортогонализировать пары векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ и $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, причем одну из пар сделать ортонормированной

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_2,$$

$$\alpha^2 = a^2, \quad \beta^2 = b^2, \quad \alpha \cdot \beta = 0, \quad (a > b > 0).$$

В итоге фазовое пространство нашей системы может быть определено как совместная поверхность уровня казимиров следующим образом

$$\mathcal{P} = \{(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{R}^9 : \boldsymbol{\alpha}^2 = a^2, \boldsymbol{\beta}^2 = b^2, \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0\}, (a > b > 0).$$

Задача о движении обобщенного двухполюсового гиростата относится к интегрируемым гамильтоновым системам с тремя степенями свободы. Особую роль в изучении фазовой топологии таких систем играют критические подсистемы. Понятие критической подсистемы сформировалось в работах М. П. Харламова (см., например [196]). Идея критической подсистемы состоит в следующем.

Определим отображение момента $\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$, полагая

$$\mathcal{F}(x) = (G(x), K(x), H(x)),$$

где $x \in \mathcal{P}$. Пусть \mathcal{C} – множество критических точек отображения момента, т. е. точек, в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(x) < 3$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}^3$ называется *бифуркационной диаграммой*.

Пусть

$$\mathcal{L}(h, k, g) = 0$$

уравнение двумерной поверхности Π , которая содержит один из листов бифуркационной диаграммы Σ отображения момента \mathcal{F} .

Определим функцию

$$\Phi = \mathcal{L} \circ \mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Критической подсистемой \mathcal{M} называется замыкание множества критических точек ранга 2, которое принадлежит нулевому уровню интеграла Φ . Тогда \mathcal{M} является инвариантным подмножеством в \mathcal{P} , состоящим из критических точек отображения момента \mathcal{F} . Критическая подсистема \mathcal{M} задается системой уравнений

$$\Phi = 0, \quad d\Phi = 0. \tag{6.2.4}$$

Некоторые критические подсистемы и уравнения поверхностей Π в рассматриваемой задаче найдены в [195], [193].

Цель настоящего раздела получить новые инвариантные соотношения одной критической подсистемы для обобщенного двухполевого гиростата. В качестве приложения инвариантные соотношения используются для определения типа движений в исходной системе с тремя степенями свободы.

6.2.2. Новые инвариантные соотношения

Рассмотрим функциональное тождество, приведенное в [195], которое справедливо во всех точках фазового пространства \mathcal{P}

$$Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = \{\varepsilon_1^2[\varepsilon_1^2(\alpha^2 + \beta^2) + H] + 2\varepsilon_2^2\}^2 - 4\varepsilon_1^4 K, \quad (6.2.5)$$

где

$$Q_1 = 2\varepsilon_1[(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3)\varepsilon_1^3 + (\alpha_2M_1 + \beta_2M_2 + \beta_3M_3)\varepsilon_1^2 - (M_1M_3 + \varepsilon_2\alpha_3)\varepsilon_1 - M_2\varepsilon_2],$$

$$Q_2 = 2\varepsilon_1[(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\varepsilon_1^3 + (\alpha_1M_1 + \beta_1M_2 + \alpha_3M_3)\varepsilon_1^2 + (M_2M_3 + \varepsilon_2\beta_3)\varepsilon_1 - M_1\varepsilon_2],$$

$$Q_3 = 2\{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\varepsilon_1^4 + M_3(\beta_1 - \alpha_2)\varepsilon_1^3 + [M_3^2 - \varepsilon_2(\alpha_1 + \beta_2)]\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2\}.$$

Выберем постоянные первых интегралов, удовлетворяющих соотношению

$$k = \frac{1}{4\varepsilon_1^4} \{\varepsilon_1^2[\varepsilon_1^2(a^2 + b^2) + h] + 2\varepsilon_2^2\}^2.$$

Тогда (6.2.5) приводит к системе уравнений

$$Q_k = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6.2.6)$$

Определим выражения

$$W_1 = 2\{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\varepsilon_1^4 + M_3(\beta_1 - \alpha_2)\varepsilon_1^3 + [M_3^2 - \varepsilon_2(\alpha_1 + \beta_2)]\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2\} \times \\ \times \{\varepsilon_1^2[(M_1 - \varepsilon_1\beta_3)^2 + (M_3 + \varepsilon_1\beta_1)^2] + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2\beta_2)^2\}^{1/2} \times \\ \times [\varepsilon_1^2(M_3 + \varepsilon_1\beta_1)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2\beta_2)^2]^{-1/2},$$

$$W_2 = 2\varepsilon_1\{\boldsymbol{\beta}^2\alpha_3\varepsilon_1^5 + [\boldsymbol{\beta}^2M_2 - \alpha_3\beta_3M_1 + (2\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)M_3 + (\beta_2M_3 - \beta_3M_2) \times \\ \times \beta_3 + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})(M_1 - \varepsilon_1\beta_3)]\varepsilon_1^4 + [[(\alpha_2 + \beta_1)\beta_3 - 2\alpha_3\beta_2]\varepsilon_2 + (\alpha_1 - \beta_2) \times \\ \times M_1M_3 + (\alpha_3M_3 + 2\beta_1M_2)M_3]\varepsilon_1^3 + [M_2M_3^2 - [(\alpha_2 + \beta_1)M_1 + 2\beta_2M_2]\varepsilon_2] \times \\ \times \varepsilon_1^2 + (M_2 + \varepsilon_1\alpha_3)\varepsilon_2^2\}[\varepsilon_1^2(M_3 + \varepsilon_1\beta_1)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2\beta_2)^2]^{-1/2}.$$

Тогда имеет место тождество

$$Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = W_1^2 + W_2^2.$$

Очевидно, что решения системы (6.2.6) являются решениями системы

$$W_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (6.2.7)$$

Определим множество решений системы (6.2.6) как

$$\mathcal{M} = \{(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{P} : W_1 = 0, W_2 = 0\}. \quad (6.2.8)$$

Теорема 16. Система соотношений (6.2.7) определяет инвариантное четырехмерное подмногообразие \mathcal{M} фазового пространства \mathcal{P} уравнений (6.2.1) с гамильтонианом (6.2.2). Множество \mathcal{M} является критической подсистемой интегрируемого случая Соколова–Цыганова, порожденной функцией

$$\Phi = \{\varepsilon_1^2[\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\beta}^2) + H] + 2\varepsilon_2^2\}^2 - 4\varepsilon_1^4K. \quad (6.2.9)$$

Доказательство. Справедливы равенства

$$\dot{W}_1 = \{H, W_1\} = \eta W_2,$$

$$\dot{W}_2 = \{H, W_2\} = -\eta W_1,$$

где множитель η , который является функцией фазовых переменных, имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \eta = & 2\varepsilon_1 \{ \beta^2 (\beta_1 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3) \varepsilon_1^6 + [M_3 \beta_3 [\beta^2 + \beta_1 (\alpha_2 + 2\beta_1) - \alpha_1 \beta_2] + 2\beta_2 \alpha_3 (M_1 \beta_3 - \\ & - M_3 \beta_1) - 2\beta_3^2 \beta_1 M_1] \varepsilon_1^5 + [[\beta^2 \alpha_3 - 2\beta_2 (\beta_1 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3)] \varepsilon_2 + M_1 M_3 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 - \\ & - 2\beta_3^2) + (\beta_1 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3) (M_1^2 + M_3^2) + M_3^2 \beta_3 (\beta_1 + \alpha_2)] \varepsilon_1^4 + [[2\alpha_3 (M_3 \beta_1 - M_1 \beta_3) + \\ & + \beta_3 M_3 (\alpha_1 - \beta_2)] \varepsilon_2 + M_1 M_3 [M_3 (\beta_1 - \alpha_2) + M_1 \beta_3]] \varepsilon_1^3 + [(\beta_1 \beta_3 - 3\beta_2 \alpha_3) \varepsilon_2^2 + \\ & + [(M_1^2 + M_3^2) \alpha_3 - M_1 M_3 (\alpha_1 + \beta_2)] \varepsilon_2 + M_3^3 M_1] \varepsilon_1^2 + (M_1 M_3 + \varepsilon_2 \alpha_3) \varepsilon_2^2 \} \times \\ & \times [\varepsilon_1^2 (M_3 + \varepsilon_1 \beta_1)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2 \beta_2)^2]^{-1} [\varepsilon_1^2 [(M_3 + \varepsilon_1 \beta_1)^2 + (M_1 - \varepsilon_1 \beta_3)^2] + \\ & + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2 \beta_2)^2]^{-1/2}. \end{aligned}$$

В силу соотношений (6.2.8) имеем $\dot{W}_1 = 0$, $\dot{W}_2 = 0$. Прямым вычислением убеждаемся, что функция (6.2.9) удовлетворяет системе уравнений (6.2.4). \square

Теорема 17. На \mathcal{M} определен частный интеграл F_0

$$F_0 = \frac{\sqrt{(M_1 - \varepsilon_1 \beta_3)^2 + (M_2 + \varepsilon_1 \alpha_3)^2} (\varepsilon_1^2 \omega_\beta - \varepsilon_2 M_2)}{M_1 - \varepsilon_1 \beta_3}, \quad (6.2.10)$$

пропорциональный скобке $\{W_1, W_2\}$. Нулевой уровень интеграла F_0 является множеством вырождения симплектической структуры, индуцированной на \mathcal{M} .

Доказательство. Непосредственным вычислением можно убедиться, что в точках подмногообразия \mathcal{M} справедливо равенство

$$\dot{F}_0 = \{H, F_0\} = 0.$$

Заметим, что в точках подмногообразия \mathcal{M} справедливы соотношения

$$\{W_1, W_2\} = \varkappa \cdot F_0 = -\frac{F_0^2}{S}, \quad (6.2.11)$$

где множитель \varkappa имеет вид

$$\begin{aligned} \varkappa = & \frac{-4\varepsilon_1^2[(M_1 - \varepsilon_1\beta_3)^2 + (M_2 + \varepsilon_1\alpha_3)^2]^{\frac{1}{2}}}{M_1 - \varepsilon_1\beta_3} \times \\ & \times \{\varepsilon_1^2[(M_1 - \varepsilon_1\beta_3)^2 + (M_3 + \varepsilon_1\beta_1)^2] + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2\beta_2)^2\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

а S – частный интеграл, который определяется формулой

$$S = \frac{\varepsilon_1^2\omega_\beta - \varepsilon_2M_2}{4\varepsilon_1^2\sqrt{\varepsilon_1^2[(M_1 - \varepsilon_1\beta_3)^2 + (M_3 + \varepsilon_1\beta_1)^2] + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2\beta_2)^2}}. \quad (6.2.12)$$

С учетом того, что коэффициент пропорциональности \varkappa не обращается в ноль, а также вида (6.2.11), получаем второе утверждение теоремы. \square

Отметим также, что между общими интегралами H , G , казимирами и частным интегралом F_0 существует функциональная связь в виде

$$\varepsilon_1^2F_0^2 - \varepsilon_1^2\left\{\varepsilon_1^4[G + 2[\boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\beta}^2 - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^2]\varepsilon_1^2] - H\varepsilon_2^2\right\} + 2\varepsilon_2^4 = 0.$$

6.2.3. Приложение

Систему инвариантных соотношений (6.2.7) можно использовать для определения типа критической точки x_0 ранга 2 отображения момента в исходной интегрируемой системе с тремя степенями свободы. Рассмотрим интеграл Φ , регулярный в окрестности точки $x_0 \in \mathcal{M}$, за исключением самой точки x_0 , в которой $d\Phi(x_0) = 0$. Его линеаризация есть симплектический оператор A_Φ . Характеристический многочлен имеет вид

$$Z_\Phi(\mu) = \mu^7(\mu^2 - C_\Phi), \quad C_\Phi = \frac{1}{2}\text{trace}(A_\Phi^2).$$

Если $C_\Phi < 0$, то мы получаем «эллиптический» тип точки (соответствующие двумерные торы являются устойчивыми многообразиями в фазовом пространстве и представляют собой предел концентрического семейства трехмерных регулярных торов). Если $C_\Phi > 0$, то мы получаем «гиперболический» тип точки (соответствующие двумерные торы являются неустойчивыми). Исследование невырожденности и типа особенностей отображения момента с помощью

характеристического многочлена для систем с двумя степенями свободы было проведено в [3].

Теорема 18. *Любой тор, который принадлежит совместной поверхности уровня $\{H = h, F_0 = f_0\}$, является эллиптическим (невыврожденной особенностью ранга 2 эллиптического типа), кроме точек вырождения симплектической структуры.*

Доказательство. Для доказательства необходимо вычислить характеристический многочлен симплектического оператора A_Φ . Здесь интеграл Φ определяется формулой (6.2.9). Характеристический многочлен симплектического оператора A_Φ имеет вид

$$Z_\Phi(\mu) = \mu^7(\mu^2 - C_\Phi).$$

Здесь

$$C_\Phi = -\frac{4f_0^4}{s^2}, \quad (6.2.13)$$

где f_0, s – постоянные частных интегралов (6.2.10) и (6.2.12) соответственно. Вид выражения (6.2.13) завершает доказательство. \square

Таким образом, в данном разделе получены новые инвариантные соотношения (6.2.7), с помощью которых определен тип движений в системе с тремя степенями свободы – обобщенном двухполевом гиростате. Эта система на данный момент является самым сложным случаем интегрируемости, обобщающим классический результат Ковалевской. Для этого случая еще не закончен полный анализ фазовой топологии и перестроек торов Лиувилля. Поэтому инвариантные соотношения полученные для одной из критических подсистем этой задачи непременно найдут место в исследованиях по построению атласа бифуркационных диаграмм обобщенного двухполевого гиростата.

6.3. Разделение переменных для интегрируемого случая Ковалевской в неевклидовом пространстве

В данном разделе рассмотрена задача о движении волчка Ковалевской в неевклидовом пространстве. Применяя, как и в евклидовом случае, рассмотренном в классических работах Ковалевской и Кёттера, нетривиальные преобразования фазовых переменных, включающие как обобщённые координаты, так и сопряжённые импульсы, найдены уравнения Абеля–Якоби и приведены разделяющиеся переменные на плоскости.

Как известно (см. например работу [140]), Г. Гельмгольцем было предложено при аксиоматическом построении механики отказаться от свойства евклидовости пространства, а постулировать только типичную для всех римановых пространств постоянной кривизны возможность движения твердого тела. В свете этого очевидно, что изучение динамики твердого тела в пространствах постоянной кривизны имеет первоочередное значение.

Отсылая к недавно вышедшему обзору [140] за подробным изложением истории исследований, а также современными постановками задач в этой актуальной области, отметим только, что в классических работах внимание сконцентрировано на получении уравнений движения и поиске дополнительных интегралов. В данном разделе мы, следуя работам Ковалевской [197] и Кёттера [198], получим разделенные уравнения для задачи о движении волчка Ковалевской в неевклидовом пространстве.

6.3.1. Уравнения движения

Интегрируемым случаем Ковалевской в неевклидовом пространстве принято [140] называть следующую систему *псевдосферических дифференциальных уравнений Эйлера–Пуассона*

$$\dot{\mathbf{m}} = (g\mathbf{m}) \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}} + (g\boldsymbol{\gamma}) \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = (g\boldsymbol{\gamma}) \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}} \quad (6.3.1)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 - 2k^2m_3^2) - b_1\gamma_1 \quad (6.3.2)$$

и пуассоновой структурой

$$\Pi_r = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & k^2m_3 & m_2 & 0 & k^2\gamma_3 & \gamma_2 \\ -k^2m_3 & 0 & -m_1 & -k^2\gamma_3 & 0 & -\gamma_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 & -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 \\ \hline 0 & k^2\gamma_3 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k^2\gamma_3 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (6.3.3)$$

Здесь $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ – вектор кинетического момента, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор оси симметрии. Параметр k^2 отвечает неевклидовой структуре, а $g = \text{diag}(1, 1, -k^2)$ – диагональная матрица.

Функциями Казимира пуассоновой структуры являются

$$\begin{aligned} C &= \langle \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma} \rangle_g = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - k^2\gamma_3^2, \\ L &= \langle \mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma} \rangle_g = m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 - k^2m_3\gamma_3. \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

Здесь через $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ обозначено скалярное произведение, которое задается соотношением

$$\langle \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle_g = (\mathbf{R}, g\mathbf{R}) = R_1^2 + R_2^2 - k^2R_3^2. \quad (6.3.5)$$

Дополнительный интеграл F совпадает с классическим

$$F = \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{2} + b_1\gamma_1 \right)^2 + (m_1m_2 + b_1\gamma_2)^2. \quad (6.3.6)$$

Заметим, что для уравнений Эйлера–Пуассона (6.3.1) справедливо следующее наблюдение [140]: *всем известным интегрируемым случаям динамики твердого тела соответствует их обобщение на группу $SO(2, 1)$* . Скобка Пуассона (6.3.3) отвечает алгебре $so(2, 1)$.

6.3.2. Разделение переменных

Далее мы приводим вывод разделения переменных для случая интегрируемости Ковалевской в неевклидовом пространстве, который следует классическим работам Ковалевской [197] и Кёттера [198] о движении волчка в евклидовом пространстве, а также изложению в [169] и [199]. Полученные аналитические выражения необходимы для исследования фазовой топологии. Обозначим через Z_1 и Z_2 следующие выражения

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{2}(m_1^2 - m_2^2) + b_1\gamma_1, \\ Z_2 &= m_1m_2 + b_1\gamma_2. \end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Следуя Ковалевской, положим

$$\begin{aligned} \xi_1 &= Z_1 + iZ_2, \quad x_1 = m_1 + im_2, \quad y_1 = \gamma_1 + i\gamma_2, \\ \xi_2 &= Z_1 - iZ_2, \quad x_2 = m_1 - im_2, \quad y_2 = \gamma_1 - i\gamma_2. \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2}x_1^2 + b_1y_1, \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}x_2^2 + b_1y_2. \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

Дополнительный интеграл F запишется в виде

$$F = \xi_1\xi_2 = f. \tag{6.3.10}$$

Составим дифференциальные соотношения

$$\begin{aligned} x_1' &= k^2(m_3x_1 + b_1\gamma_3), \\ x_2' &= -k^2(m_3x_2 + b_1\gamma_3). \end{aligned} \tag{6.3.11}$$

Здесь введено обозначение $(\quad)' = d/d(it)$. Из (6.3.11) найдем

$$\begin{aligned} m_3 &= -\frac{i(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)}{k^2(x_1 - x_2)}, \\ \gamma_3 &= \frac{i(\dot{x}_1x_2 + x_1\dot{x}_2)}{k^2b_1(x_1 - x_2)}. \end{aligned} \tag{6.3.12}$$

Используя (6.3.8) и (6.3.9), находим

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{x_1^2 - 2\xi_1}{2b_1}, \quad \gamma_1 = -\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2(\xi_1 + \xi_2)}{4b_1}, \\ y_2 &= -\frac{x_2^2 - 2\xi_2}{2b_1}, \quad \gamma_2 = \frac{i[x_1^2 - x_2^2 - 2(\xi_1 - \xi_2)]}{4b_1}. \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

Введем многочлены

$$\begin{aligned} R_{12} &= R(x_1, x_2) = k^2 \left[-\frac{1}{4}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{2}h(x_1^2 + x_2^2) + \ell b_1(x_1 + x_2) + (cb_1^2 - f) \right], \\ R_1 &= R(x_1, x_1) = k^2 \left[-\frac{1}{4}x_1^4 + hx_1^2 + 2\ell b_1x_1 + (cb_1^2 - f) \right], \\ R_2 &= R(x_2, x_2) = k^2 \left[-\frac{1}{4}x_2^4 + hx_2^2 + 2\ell b_1x_2 + (cb_1^2 - f) \right]. \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

Здесь c, ℓ, h, f – константы функций Казимира C, L , функции Гамильтона H и дополнительного интеграла F соответственно. Заметим, что имеет место тождество

$$R_{12} = \frac{1}{2} \left[R_1 + R_2 + \frac{1}{4}k^2(x_1^2 - x_2^2)^2 \right]. \quad (6.3.15)$$

Тогда получим дифференциальные соотношения

$$\begin{aligned} (i\dot{x}_1)^2 + R_1 + \frac{1}{2}k^2\xi_1(x_1 - x_2)^2 &= 0, \\ (i\dot{x}_2)^2 + R_2 + \frac{1}{2}k^2\xi_2(x_1 - x_2)^2 &= 0, \\ (i\dot{x}_1)(i\dot{x}_2) - R_{12} + \frac{1}{2}hk^2(x_1 - x_2)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

С учетом (6.3.10) исключим из (6.3.16) переменные ξ_1 и ξ_2

$$[\dot{x}_1^2 - R_1][\dot{x}_2^2 - R_2] = \frac{1}{4}k^4\xi_1\xi_2(x_1 - x_2)^4 = \frac{1}{4}k^4f(x_1 - x_2)^4. \quad (6.3.17)$$

Составим дифференциальные соотношения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{R_1}} + \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{R_2}} \right)^2 &= \left(1 + \frac{\dot{x}_1\dot{x}_2}{\sqrt{R_1R_2}} \right)^2 - \frac{(R_1 - \dot{x}_1^2)(R_2 - \dot{x}_2^2)}{R_1R_2} = \\ &= \left(1 + \frac{\dot{x}_1\dot{x}_2}{\sqrt{R_1R_2}} \right)^2 - \frac{k^4f(x_1 - x_2)^4}{4R_1R_2} \equiv f_1, \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

и

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{R_1}} - \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{R_2}} \right)^2 &= \left(1 - \frac{\dot{x}_1 \dot{x}_2}{\sqrt{R_1 R_2}} \right)^2 - \frac{(R_1 - \dot{x}_1^2)(R_2 - \dot{x}_2^2)}{R_1 R_2} = \\ &= \left(1 - \frac{\dot{x}_1 \dot{x}_2}{\sqrt{R_1 R_2}} \right)^2 - \frac{k^4 f(x_1 - x_2)^4}{4R_1 R_2} \equiv f_2. \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

Далее, следуя Ковалевской, перейдем от переменных x_1 и x_2 к переменным разделения s_1 и s_2 с помощью формул

$$s_1 = \frac{R_{12} - \sqrt{R_1 R_2}}{(x_1 - x_2)^2}, \quad s_2 = \frac{R_{12} + \sqrt{R_1 R_2}}{(x_1 - x_2)^2}. \quad (6.3.20)$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что переменные разделения коммутируют:

$$\{s_1, s_2\} = 0.$$

Переменные Ковалевской (6.3.20) являются решениями квадратного уравнения

$$S(x_1, x_2, s) \equiv (x_1 - x_2)^2 s^2 - 2R_{12}s - G = 0, \quad (6.3.21)$$

где

$$\begin{aligned} G &= \frac{R_1 R_2 - R_{12}^2}{(x_1 - x_2)^2} = -\frac{1}{4}k^4(cb_1^2 - f + h^2)(x_1 + x_2)^2 - \\ &- k^4 \left[\ell b_1 \left(h + \frac{1}{2}x_1 x_2 \right) (x_1 + x_2) + \ell^2 b_1^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.3.22)$$

Преобразуем левые части дифференциальных соотношений (6.3.18) и (6.3.19). Для этого представим функцию S как квадратный трехчлен от каждой из переменных s , x_1 и x_2

$$S(x_1, x_2, s) \equiv (x_1 - x_2)^2 s^2 - 2R_{12}s - G = 0,$$

$$S(x_1, x_2, s) \equiv A_1 x_1^2 + B_1 x_1 + C_1 = 0, \quad (6.3.23)$$

$$S(x_1, x_2, s) \equiv A_2 x_2^2 + B_2 x_2 + C_2 = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= s^2 + \frac{1}{2}k^2(x_2^2 - 2h)s + \frac{1}{4}k^4[(cb_1^2 - f + h^2) + 2\ell b_1 x_2], \\
 B_1 &= -2x_2 s^2 - 2k^2 \ell b_1 s + \frac{1}{2}k^4[(cb_1^2 - f + h^2)x_2 + \ell b_1(x_2^2 + 2h)], \\
 C_1 &= x_2^2 s^2 - 2k^2 \left(\frac{1}{2}hx_2^2 + \ell b_1 x_2 + cb_1^2 - f \right) s + \\
 &+ k^4 \left[\frac{1}{4}(cb_1^2 - f + h^2)x_2^2 + \ell b_1 h x_2 + \ell^2 b_1^2 \right],
 \end{aligned} \tag{6.3.24}$$

и

$$\begin{aligned}
 A_2 &= A_1(x_2 \rightarrow x_1), \\
 B_2 &= B_1(x_2 \rightarrow x_1), \\
 C_2 &= C_1(x_2 \rightarrow x_1).
 \end{aligned} \tag{6.3.25}$$

Далее последовательно находим частные производные

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial S}{\partial s} \right) &= 2(x_1 - x_2)^2 s - 2R_{12}, \\
 \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right) &= 2A_1 x_1 + B_1, \\
 \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right) &= 2A_2 x_2 + B_2.
 \end{aligned}$$

возводим полученные выражения в квадрат

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial S}{\partial s} \right)^2 &= 4\{(x_1 - x_2)^2[(x_1 - x_2)^2 s^2 - 2R_{12}s] + R_{12}^2\}, \\
 \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 &= 4A_1(A_1 x_1^2 + B_1 x_1) + B_1^2, \\
 \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 &= 4A_2(A_2 x_2^2 + B_2 x_2) + B_2^2.
 \end{aligned} \tag{6.3.26}$$

Исключая последовательно из каждого выражения (6.3.26) с помощью выражений (6.3.23) переменные s , x_1 и x_2 , приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)^2 &= 4[G(x_1 - x_2)^2 + R_{12}^2], \\ \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 &= B_1^2 - 4A_1C_1, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 &= B_2^2 - 4A_2C_2.\end{aligned}\tag{6.3.27}$$

Подставляя в полученные выражения их определения, приходим окончательно к соотношениям

$$\left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)^2 = 4R_1R_2, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 = 8\varphi(s)R_2, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 = 8\varphi(s)R_1.$$

Здесь $\varphi(s)$ – многочлен, связанный с резольвентой Эйлера для полинома $R(x)$

$$\varphi(s) = s^3 - hk^2s^2 + \frac{1}{4}k^4(cb_1^2 - f + h^2)s - \frac{1}{8}k^6\ell^2b_1^2,$$

$$R(x) = x^4 - 4hx^2 - 8\ell b_1x - 4cb_1^2 + 4f.$$

Резольвента Эйлера для многочлена

$$x^4 + px^2 + qx + r$$

определяется формулой

$$Res(z) = z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}z - \frac{q^2}{64}.$$

Если в приведённые выше уравнения подставить следующие значения коэффициентов многочлена $R(x)$

$$p = -4h, \quad q = -8\ell b_1, \quad r = -4cb_1^2 + 4f,$$

то получим $\frac{k^6}{8}Res\left(\frac{2s}{k^2}\right) = \varphi(s)$. Одно из достоинств резольвенты Эйлера состоит в том, что условие кратности корней уравнения $R(x) = 0$ совпадает с условием кратности корней резольвенты $\varphi(s)$.

Составим полный дифференциал функции S

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial S}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial S}{\partial s} ds = 0. \quad (6.3.28)$$

Подставляя значения производных и выбирая надлежащим образом знаки у радикалов, приходим к дифференциальным соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{R_1}} + \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{R_2}} &= \frac{\dot{s}_1}{\sqrt{2\varphi(s_1)}}, \\ \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{R_1}} - \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{R_2}} &= \frac{\dot{s}_2}{\sqrt{2\varphi(s_2)}}. \end{aligned} \quad (6.3.29)$$

Перейдем теперь к определению f_1 и f_2 правых частей (6.3.18) и (6.3.19).

Из (6.3.20) выразим

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{1}{2}(s_1 + s_2)(x_1 - x_2)^2, \\ \sqrt{R_1 R_2} &= \frac{1}{2}(s_2 - s_1)(x_1 - x_2)^2. \end{aligned} \quad (6.3.30)$$

Используя (6.3.16), находим

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(1 + \frac{\dot{x}_1 \dot{x}_2}{\sqrt{R_1 R_2}}\right)^2 - \frac{k^4 f(x_1 - x_2)^4}{4R_1 R_2} = \\ &= \left(1 + \frac{-R_{12} + \frac{1}{2} h k^2 (x_1 - x_2)^2}{\sqrt{R_1 R_2}}\right)^2 - \frac{k^4 f(x_1 - x_2)^4}{4R_1 R_2} = \\ &= \left(1 + \frac{-(s_1 + s_2) + h k^2}{(s_2 - s_1)}\right)^2 - \frac{k^4 f}{(s_2 - s_1)^2} = \frac{P(s_1)}{(s_2 - s_1)^2} \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

и

$$\begin{aligned} f_2 &= \left(1 - \frac{\dot{x}_1 \dot{x}_2}{\sqrt{R_1 R_2}}\right)^2 - \frac{k^4 f(x_1 - x_2)^4}{4R_1 R_2} = \\ &= \left(1 - \frac{-R_{12} + \frac{1}{2} h k^2 (x_1 - x_2)^2}{\sqrt{R_1 R_2}}\right)^2 - \frac{k^4 f(x_1 - x_2)^4}{4R_1 R_2} = \\ &= \left(1 - \frac{-(s_1 + s_2) + h k^2}{(s_2 - s_1)}\right)^2 - \frac{k^4 f}{(s_2 - s_1)^2} = \frac{P(s_2)}{(s_2 - s_1)^2}. \end{aligned} \quad (6.3.32)$$

В результате система разделенных уравнений для интегрируемого случая

Ковалевской в неевклидовом пространстве имеет вид

$$\begin{cases} (s_1 - s_2)^2 \dot{s}_1^2 = 2\varphi(s_1)P(s_1), \\ (s_1 - s_2)^2 \dot{s}_2^2 = 2\varphi(s_2)P(s_2). \end{cases}$$

Здесь $\varphi(s)$ и $P(s)$ полиномы

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= s^3 - k^2 h s^2 + \frac{1}{4} k^4 (c b_1^2 - f + h^2) s - \frac{1}{8} k^6 \ell^2 b_1^2, \\ P(s) &= (2s - k^2 h)^2 - k^4 f. \end{aligned}$$

Таким образом интегрирование исходной задачи сведено к гиперэллиптическим квадратурам.

В данном разделе получены разделенные уравнения для случая интегрируемости Ковалевской в неевклидовом пространстве. Приведённые аналитические выражения могут быть использованы для последующего анализа фазовой топологии.

Перечислим некоторые из нерешенных проблем. В дальнейшем необходимо получить связь между переменными разделения и фазовыми переменными, получить дискриминантные поверхности, выделить критические подсистемы и исследовать фазовую топологию данного случая.

6.4. Краткие итоги главы 6

В данной главе были построены периодические решения, являющиеся критическими точками ранга 1 отображения момента интегрируемого случая динамики твердого тела, так называемого обобщенного двухполевого гиростата – системы с тремя степенями свободы. Образы этих решений являются особыми точками на бифуркационной диаграмме. Определен тип этих критических движений по Вильямсону. Эти решения играют ключевую роль при построении атласа бифуркационных диаграмм для обобщенного двухполевого гиростата.

Также были получены новые инвариантные соотношения (6.2.7), с помощью которых определен тип движений в системе описывающей движения обоб-

щенного двухполевого гиростата. Эта система на данный момент является самым сложным случаем интегрируемости, обобщающим классический результат Ковалевской. Для этого случая еще не закончен полный анализ фазовой топологии и перестроек торов Лиувилля. Поэтому инвариантные соотношения, полученные для одной из критических подсистем этой задачи, также непременно найдут место в исследованиях по построению атласа бифуркационных диаграмм обобщенного двухполевого гиростата.

Наконец, были получены разделенные уравнения для случая интегрируемости Ковалевской в неевклидовом пространстве. Приведённые аналитические выражения являются одним из первых результатов в данном направлении и должны быть положены в основу будущих исследований фазовой топологии этой задачи.

Интегрируемый случай Адлера – ван Мёрбеке

Данная глава посвящена актуальной проблеме изучения фазовой топологии и механической интерпретации одного из самых сложных интегрируемых случаев на алгебре Ли $so(4)$ с дополнительным интегралом четвертой степени – случаю Адлера – ван Мёрбеке. Несмотря на то, что интегрируемость указанной системы была доказана алгебро-геометрическими методами достаточно давно, вопросы, затронутые в данной главе, оставались до последнего времени без ответа.

В первом разделе представлены результаты аналитического исследования фазовой топологии рассматриваемого случая. Полученная форма дополнительного интеграла позволила в явном виде получить критические точки ранга 0 отображения момента. В частности, описанная структура критических точек интегрируемого случая Адлера – ван Мёрбеке показывает, что он топологически неэквивалентен другим известным интегрируемым случаям на алгебре Ли $so(4)$. Построена бифуркационная диаграмма системы Адлера – ван Мёрбеке.

Во втором разделе приведена возможная механическая интерпретация рассматриваемого случая. Рассмотрена связь с несколькими классическими интегрируемыми задачами механики. Обсуждаются условия физической реализуемости механической модели.

В третьем разделе, основываясь на результатах предыдущих разделов, посвященных исследованию фазовой топологии, предложен способ визуализации перестроек торов Лиувилля.

Основные результаты данной главы опубликованы в работах [27–29].

7.1. Интегрируемый случай Адлера – ван Мёрбеке.

Дискриминантное множество и бифуркационная диаграмма

В разделе 7.1 будут изложены основные результаты исследования интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке уравнений Эйлера на алгебре Ли $so(4)$. Для L – A - пары, найденной для этой системы Рейманом и Семеновым-Тян-Шанским, мы представим спектральную кривую в явном виде и построим соответствующее дискриминантное множество. Здесь мы также обсудим особенности отображения момента интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке и представим бифуркационную диаграмму отображения момента этого случая. Мы явно опишем критические точки ранга 0, определим их тип и покажем, что образы критических точек ранга 0 при отображении момента совпадают с точками самопересечения действительной части дискриминантного множества. В частности, описанная структура критических точек интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке показывает, что он топологически неэквивалентен другим известным интегрируемыми случаям на алгебре Ли $so(4)$.

7.1.1. Предварительные сведения

В данном разделе исследуется известный интегрируемый случай Адлера–ван Мёрбеке [200], который был открыт более 30 лет назад при применении алгебро-геометрических методов для изучения геодезических потоков левоинвариантных метрик на группе Ли $SO(4)$. Эта система описывается уравнениями, которые в механике известны также как уравнения Эйлера на алгебре Ли $so(4)$. Эта задача может быть снабжена различными физическими интерпретациями. Одна из них — это движение вокруг неподвижной точки твердого тела с эллипсоидальными полостями, полностью заполненными идеальной однородной вихревой несжимаемой жидкостью, которое описывается уравнениями

Стеклова–Пуанкаре–Жуковского–Ламба [201]. Также система с квадратичным гамильтонианом на $so(4)$ может быть интерпретирована как уравнения движения твердого тела в идеальной жидкости (уравнения Кирхгофа) на трехмерной сфере, являющейся компактным пространством постоянной кривизны. Интересный предельный случай уравнений Эйлера на $so(4)$ рассмотрен в работе [202], где указано счетное семейство интегралов движения, имеющих сколь угодно высокую степень по импульсам. Наконец, уравнения Стеклова–Пуанкаре–Жуковского–Ламба с медленно меняющимися параметрами были исследованы с помощью теории адиабатических инвариантов в [203].

Кроме классических случаев интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$, имеющих линейные и квадратичные дополнительные интегралы, принадлежащие Пуанкаре [204] и Стеклову [201], известно еще три интегрируемых случая, в которых дополнительный интеграл имеет вид однородной функции четвертой степени. Один из них — это упомянутый случай Адлера–ван Мёрбеке. Позже были обнаружены интегрируемые случаи Борисова–Мамаева–Соколова [64], Соколова–Цыганова–Горемыкина [205–207]. Для последних двух интегрируемых случаев бифуркационные диаграммы и топология слоения Лиувилля были исследованы соответственно в работах [189, 190] и [208] соответственно. Отметим, что ни для одного из перечисленных интегрируемых случаев с интегралом четвертой степени пока не найдено разделение переменных и не выполнен качественный анализ движений.

Для изучения интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке мы пользуемся хорошо известными методами топологического анализа, дополняя их современными методами теории устойчивости интегрируемых систем, развитой в работах [145] и [138]. Для исследования мы частично используем один полезный инструмент, а именно L - A -пару Реймана и Семенова–Тян–Шанского, полученную в работе [209]. Ее связь с теорией бигамильтоновых систем и методом сдвига аргумента, разработанного Мищенко и Фоменко [210, 211], содержится в работе [212]. Интересно (см. [213]), что особенности отображения момента можно

извлекать непосредственно из самой бигамильтоновой структуры, не используя первые интегралы. Необходимо также отметить, что вопросам анализа особенностей спектральной кривой и ее связи с бифуркационной диаграммой отображения момента посвящена серия работ [214–217]. В представленном разделе 7.1 главы 7 для исследования мы исходим непосредственно из выражений для первых интегралов.

В этом разделе мы, в частности, описываем положения равновесия для случая Адлера–ван Мёрбеке и показываем, что их образ при отображении момента содержится в множестве точек самопересечения кривых, образующих дискриминантное множество для спектральной кривой, ассоциированной с L – A -парой [209]. Интересно отметить, что уже информация о положениях равновесия исследуемой системы позволяет сделать вывод о том, что фазовая топология случая Адлера–ван Мёрбеке качественно отличается от других известных интегрируемых случаев на $so(4)$ с интегралами четвертой степени.

Наконец, отметим также, что интересной задачей является исследование физической реализуемости системы Адлера–ван Мёрбеке. Для этого необходимо исследовать некоторую алгебраическую систему, содержащую неравенства, подобные неравенству треугольника для моментов инерции, позволяющие (см. [97]) определить размеры эллипсоидальной полости и инерционные характеристики твердого тела и жидкости. Данная задача актуальна не только для случая Адлера–ван Мёрбеке, но и для других интегрируемых случаев с интегралом четвертой степени на $so(4)$. Одна из возможных механических интерпретаций интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке будет рассмотрена ниже в разделе 7.2 данной главы.

7.1.2. Гамильтониан, фазовое пространство и дополнительный интеграл

Для алгебры Ли $so(4)$, представленной в виде прямой суммы $so(3) \oplus so(3)$, мы рассматриваем ее коалгебру $so(4)^*$ как $\mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \mathbf{S})$, где \mathbf{M}, \mathbf{S} это трехмерные

векторы, компоненты которых M_i, S_i ($i = 1, 2, 3$) являются координатами на $so(4)^*$ такими, что соответствующая скобка Ли–Пуассона имеет вид

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk}M_k, \quad \{M_i, S_j\} = 0, \quad \{S_i, S_j\} = \frac{1}{3}\varepsilon_{ijk}S_k. \quad (7.1.1)$$

Тогда для заданной функции Гамильтона H на $so(4)^* = \mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \mathbf{S})$ уравнения Эйлера имеют следующий вид:

$$\dot{x} = \{x, H\}, \quad (7.1.2)$$

где x любая из переменных M_i, S_j , или, в векторной форме,

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{3}\mathbf{S} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{S}}. \quad (7.1.3)$$

Отметим, что обычно уравнения Эйлера на алгебре Ли $so(4)$ записываются без коэффициента $\frac{1}{3}$, т.е. наши координаты S_i это обычные координаты умноженные на 3, что не существенно, но удобно для последующих выражений и вычислений.

Скобка (7.1.1) имеет две функции Казимира

$$F_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \quad F_2 = (\mathbf{S}, \mathbf{S}). \quad (7.1.4)$$

На совместном уровне функций Казимира

$$\mathcal{P}_{a,b}^4 = \{F_1 = a^2, F_2 = b^2\} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, \quad (7.1.5)$$

индуцированная скобка Пуассона невырождена и ограничение системы (7.1.2) дает нам гамильтонову систему с двумя степенями свободы.

Рассмотрим следующий гамильтониан

$$H = (\mathbf{M}, A\mathbf{M}) + 2(\mathbf{M}, B\mathbf{S}) + (\mathbf{S}, C\mathbf{S}), \quad (7.1.6)$$

где диагональные 3×3 -матрицы A, B, C имеют следующий вид

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}[\alpha_2^2\alpha_3^2, \alpha_1^2\alpha_3^2, \alpha_1^2\alpha_2^2]; \\ B &= \text{diag}[-\alpha_2\alpha_3(\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_1^2), -\alpha_1\alpha_3(\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2^2), -\alpha_1\alpha_2(\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_3^2)]; \\ C &= \text{diag}[\alpha_2\alpha_3(\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_1^2), \alpha_1\alpha_3(\alpha_1\alpha_3 - 4\alpha_2^2), \alpha_1\alpha_2(\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_3^2)]. \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

Мы будем далее предполагать, что параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ находятся в общем положении, т.е. отличны от нуля и попарно различны.

Чтобы утверждать, что система является вполне интегрируемой по Лиувиллю, необходимо указать еще один независимый первый интеграл, находящийся в инволюции с гамильтонианом (7.1.6). Мы приводим дополнительный интеграл в следующей симметричной форме

$$\begin{aligned}
K = & (2\alpha_1^2 + \alpha_2\alpha_3)M_1S_1^3 + (2\alpha_2^2 + \alpha_3\alpha_1)M_2S_2^3 + (2\alpha_3^2 + \alpha_1\alpha_2)M_3S_3^3 + \\
& + 3 \left[\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)M_1S_1S_2^2 + \alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)M_2S_2S_3^2 + \alpha_1(\alpha_3 - \alpha_1)M_3S_3S_1^2 + \right. \\
& + \alpha_3(\alpha_1 - \alpha_3)M_1S_1S_3^2 + \alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1)M_2S_2S_1^2 + \alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)M_3S_3S_2^2 \left. \right] - \\
& - (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) \left[\alpha_2\alpha_3M_1S_1 + \alpha_3\alpha_1M_2S_2 + \alpha_1\alpha_2M_3S_3 + \right. \\
& + 2(\alpha_2^2 + \alpha_3^2)S_1^2 + 2(\alpha_3^2 + \alpha_1^2)S_2^2 + 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)S_3^2 \left. \right].
\end{aligned} \tag{7.1.8}$$

Отметим, что выражение (7.1.8) отличается от форм дополнительного интеграла, использованных в оригинальных работах, посвященных доказательству алгебраической интегрируемости (см. [200]). Дополнительный интеграл (7.1.8) наиболее приближен по виду к интегралам, указанным в работе [212] и в книге [169].

Теорема 19. $\{H, K\} = 0$, если $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

7.1.3. L - A -пара и ассоциированная спектральная кривая

В работе [209] А. Г. Рейман и М. А. Семёнов-Тян-Шанский привели представление Лакса со спектральным параметром $\dot{L}(z) = [L(z), A(z)]$ для интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке. Следуя [209], мы рассмотрим следующую L - A -пару

$$\dot{L}(z) = [L(z), A(z)],$$

здесь матрицы L и A могут быть записаны как

$$L(z) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{M_3+S_3}{2} & \frac{M_2+S_2}{2} & -\frac{M_1-S_1}{2} & 0 & 0 & \alpha_1 z \\ \frac{M_3+S_3}{2} & 0 & -\frac{M_1+S_1}{2} & -\frac{M_2-S_2}{2} & 0 & \alpha_2 z & 0 \\ -\frac{M_2+S_2}{2} & \frac{M_1+S_1}{2} & 0 & -\frac{M_3-S_3}{2} & \alpha_3 z & 0 & 0 \\ \frac{M_1-S_1}{2} & \frac{M_2-S_2}{2} & \frac{M_3-S_3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 z & 0 & 0 & S_1 & -S_2 \\ 0 & \alpha_2 z & 0 & 0 & -S_1 & 0 & S_3 \\ \alpha_1 z & 0 & 0 & 0 & S_2 & -S_3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(u_3 + v_3) & \frac{1}{2}(u_2 + v_2) & -\frac{1}{2}(u_1 - v_1) & 0 & 0 & b_1 z \\ \frac{1}{2}(u_3 + v_3) & 0 & -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) & -\frac{1}{2}(u_2 - v_2) & 0 & b_2 z & 0 \\ -\frac{1}{2}(u_2 + v_2) & \frac{1}{2}(u_1 + v_1) & 0 & -\frac{1}{2}(u_3 - v_3) & b_3 z & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(u_1 - v_1) & \frac{1}{2}(u_2 - v_2) & \frac{1}{2}(u_3 - v_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 z & 0 & 0 & v_1 & -v_2 \\ 0 & b_2 z & 0 & 0 & -v_1 & 0 & v_3 \\ b_1 z & 0 & 0 & 0 & v_2 & -v_3 & 0 \end{bmatrix},$$

где мы должны провести следующую подстановку

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{3}{4}\alpha_2\alpha_3(S_1\alpha_2\alpha_3 - M_1\alpha_2\alpha_3 - 4S_1\alpha_1^2 - 2M_1\alpha_1^2), \\ v_2 &= \frac{3}{4}\alpha_3\alpha_1(S_2\alpha_3\alpha_1 - M_2\alpha_3\alpha_1 - 4S_2\alpha_2^2 - 2M_2\alpha_2^2), \\ v_3 &= \frac{3}{4}\alpha_1\alpha_2(S_3\alpha_1\alpha_2 - M_3\alpha_1\alpha_2 - 4S_3\alpha_3^2 - 2M_3\alpha_3^2), \\ u_1 &= \frac{9}{4}\alpha_2\alpha_3(M_1\alpha_2\alpha_3 - S_1\alpha_2\alpha_3 - 2S_1\alpha_1^2), \\ u_2 &= \frac{9}{4}\alpha_3\alpha_1(M_2\alpha_3\alpha_1 - S_2\alpha_3\alpha_1 - 2S_2\alpha_2^2), \\ u_3 &= \frac{9}{4}\alpha_1\alpha_2(M_3\alpha_1\alpha_2 - S_3\alpha_1\alpha_2 - 2S_3\alpha_3^2), \\ b_1 &= \frac{3}{2}\alpha_1\alpha_2\alpha_3(2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1^2), \\ b_2 &= \frac{3}{2}\alpha_1\alpha_2\alpha_3(2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2), \\ b_3 &= \frac{3}{2}\alpha_1\alpha_2\alpha_3(2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3^2). \end{aligned}$$

Как известно, согласно определению спектральная кривая $\mathcal{E}(z, \zeta)$, ассоциированная с матрицей Лакса $L(z)$, это алгебраическая кривая

$$\mathcal{E}(z, \zeta) = \{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : \det(L(z) - \zeta E) = 0\}, \quad (7.1.9)$$

где E это единичная матрица.

Для $L - A$ пары Реймана – Семенова-Тян-Шанского ассоциированная спектральная кривая (7.1.9) может быть явно записана следующим образом

$$\mathcal{E}(z, \zeta) : \quad \zeta \cdot \left(\sum_{i=0}^3 d_{2i} \zeta^{2i} \right) = 0, \quad (7.1.10)$$

здесь

$$d_6 = 16, \quad d_4 = -16(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)z^2 + 8(a^2 + 3b^2),$$

$$d_2 = [a^2 + 3b^2 - 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)z^2]^2,$$

$$d_0 = -16\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2z^6 + 4hz^4 - 2[b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + 2k]z^2 + b^2(a^2 - b^2)^2,$$

где величины a, b, h, k обозначают константы функций Казимира F_1, F_2 и первых интегралов H, K , соответственно.

Спектральная кривая в такой форме представлена здесь впервые. Необходимо отметить, что согласно общему свойству дополнительный интеграл (7.1.8) был получен именно в виде коэффициента d_0 спектральной кривой.

7.1.4. Дискриминантное множество спектральной кривой системы

Адлера – ван Мёрбеке

Спектральная кривая (7.1.10) является нулевым уровнем следующего отображения $\mathcal{E} : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Введем множество $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^4(a, b, k, h)$, которое включает в себя множество таких констант первых интегралов, для которых 0 является критическим значением вышеуказанного отображения \mathcal{E} . Множество $\tilde{\Sigma}$ в конечных точках декартова квадрата расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ находится как решение следующей системы уравнений

$$\mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{E}(z, \zeta) = 0. \quad (7.1.11)$$

Множество $\tilde{\Sigma}$ согласно терминологии, введённой в работах [214, 215], называется дискриминантным множеством спектральной кривой $\mathcal{E}(z, \zeta)$.

Теорема 20. *Дискриминантное множество $\tilde{\Sigma}$ спектральной кривой $\mathcal{E}(z, \zeta)$ случая Адлера – ван Мёрбеке исчерпывается объединением поверхностей кратных корней многочленов $P(t)$ и $Q(s)$, имеющих следующий вид*

$$\begin{aligned} P(t) &= 16\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2t^3 - 4ht^2 + 2[b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + 2k]t - b^2(a^2 - b^2)^2, \\ Q(s) &= 16(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2s^3 + 12[9h - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^2(a^2 + \\ &\quad + 3b^2)]s^2 + 6[a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(a^2 - 21b^2) - 18k]s - a^2(a^2 - 9b^2)^2. \end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства будем рассматривать для исследуемой спектральной кривой $\mathcal{E}(z, \zeta)$ только ее нетривиальную часть:

$$\sum_{i=0}^3 d_{2i}\zeta^{2i} = 0.$$

При этом система уравнений (7.1.11) приводит к двум возможным случаям:

первый случай

$$\zeta = 0,$$

$$P(t) = P'(t) = 0$$

или второй случай

$$\left\{ \begin{aligned} &16s^3 + [8a^2 + 24b^2 - (16\alpha_1^2 + 16\alpha_2^2 + 16\alpha_3^2)t]s^2 + \\ &\quad + [3b^2 + a^2 - (4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_2^2)t]^2s - 16\alpha_3^2t^3\alpha_2^2\alpha_1^2 + 4ht^2 + \\ &\quad - [4b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + 4k]t + b^2(a^2 - b^2)^2 = 0, \\ &- 4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)s^2 - 2[3b^2 + a^2 - 4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)t](\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)s - \\ &\quad - 12\alpha_3^2\alpha_2^2\alpha_1^2t^2 + 2ht - b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) - k = 0, \\ &48s^2 + 16[a^2 + 3b^2 - 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)t]s + [3b^2 + a^2 - 4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \\ &\quad + \alpha_2^2)t]^2 = 0. \end{aligned} \right. \quad (7.1.12)$$

Выше для обеих возможностей мы ввели новые переменные $t = z^2, s = \zeta^2$.

Используем в выражениях (7.1.12) соотношение $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ (к примеру, подставив всюду $\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2$). Действуя таким образом мы получаем возможность третье выражение в (7.1.12) факторизовать следующим образом:

$$[4s - 4t(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + a^2 + 3b^2][12s - 4t(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + a^2 + 3b^2] = 0.$$

В результате получим

$$s = \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)t - \frac{1}{4}(a^2 + 3b^2) \quad (7.1.13)$$

или

$$s = \frac{1}{6}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)t - \frac{1}{12}(a^2 + 3b^2). \quad (7.1.14)$$

При использовании выражения (7.1.13) в первых двух уравнениях системы (7.1.12) мы получим поверхность кратных корней полинома $P(t)$, т.е. $P(t) = P'(t) = 0$, при использовании соотношения (7.1.14) получим $Q(t) = Q'(t) = 0$. \square

Следующим шагом на пути к параметрическому представлению дискриминантного множества служит

Предложение 2. *Полиномы $P(t)$ и $Q(s)$ имеют поверхности кратных корней, которые могут быть параметризованы в следующем виде:*

$$\gamma_1 : \begin{cases} h(t) = 8\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2t + \frac{b^2(a^2 - b^2)^2}{4t^2}; \\ k(t) = 4\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2t^2 - \frac{1}{2}b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \frac{b^2(a^2 - b^2)^2}{2t}. \end{cases}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} h(s) = -\frac{8}{27}(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2s - \frac{a^2(a^2 - 9b^2)^2}{108s^2} + \\ \quad + \frac{1}{9}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^2(a^2 + 3b^2); \\ k(s) = -\frac{4}{27}(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2s^2 - \frac{a^2(a^2 - 9b^2)^2}{54s} + \\ \quad + \frac{a^2(a^2 - 21b^2)}{18}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2). \end{cases}$$

Доказательство. Чтобы доказать это утверждение для поверхности γ_1 достаточно разрешить систему уравнений $P(t) = P'(t) = 0$ относительно h и k . В

случае кривой γ_2 разрешаем относительно h и k систему уравнений $Q(s) = Q'(s) = 0$. \square

Вещественная часть дискриминантного множества $\tilde{\Sigma}$ для набора параметров, имеющих числовые значения $a = 0.66; b = 0.86; \alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0.77$, изображена на Рис. 7.1.

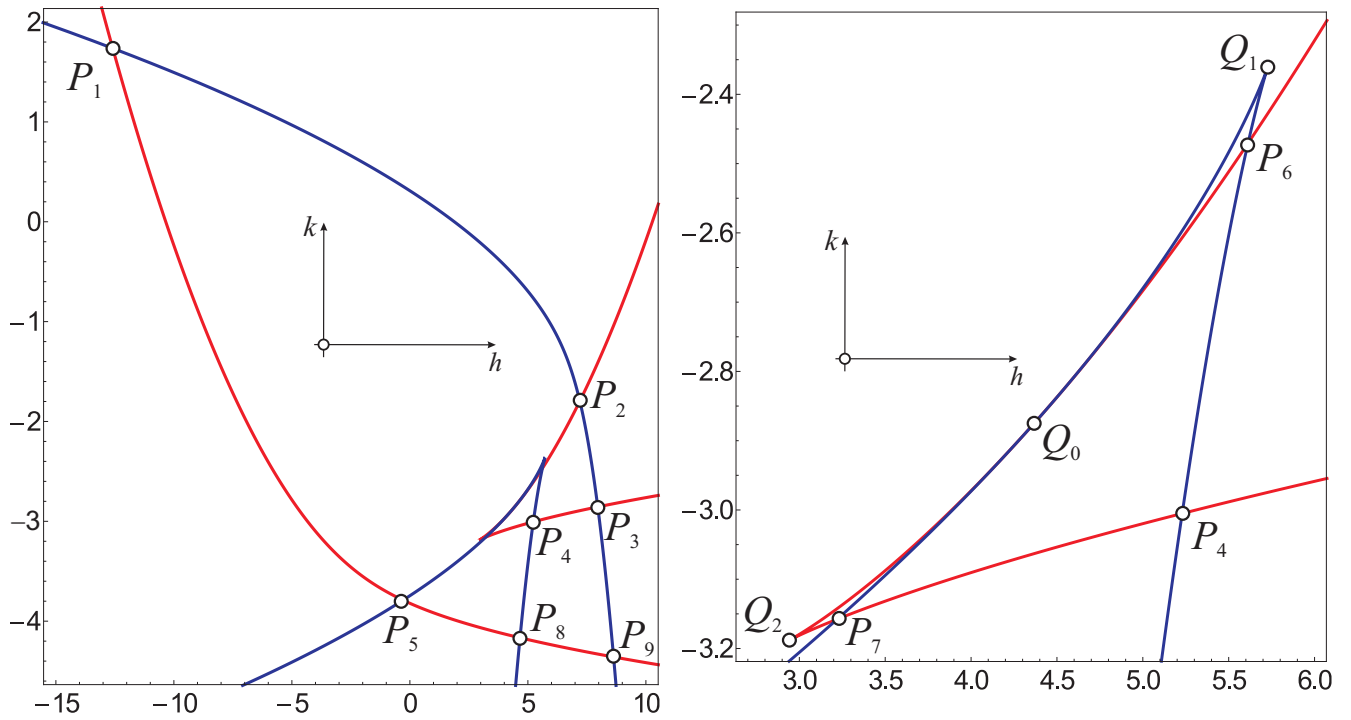


Рис. 7.1. Вещественная часть дискриминантного множества $\tilde{\Sigma}$ и ее увеличенный фрагмент для значений параметров $a = 0.66; b = 0.86; \alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0.77$. На фрагменте видно касание нечетного порядка в точке Q_0 дискриминантных кривых.

С помощью полученного выше параметрического представления можно получить значения параметров t_i, s_i и h_i, k_i соответствующих точкам пересечения

P_i дискриминантных кривых:

$$P_1 : t_1 = -\frac{b(a+b)}{2\alpha_1\alpha_2}, \quad s_1 = \frac{a(a-3b)}{2(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)},$$

$$h_1 = \alpha_1\alpha_2[(a-b)^2\alpha_1\alpha_2 - 4b(a+b)\alpha_3^2],$$

$$k_1 = ab[(b^2 - a^2 + 4ab)\alpha_1\alpha_2 + 2b(b-a)\alpha_3^2],$$

$$P_2 : t_2 = -\frac{b(a+b)}{2\alpha_2\alpha_3}, \quad s_2 = \frac{a(a-3b)}{2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)},$$

$$h_2 = \alpha_2\alpha_3[(a-b)^2\alpha_2\alpha_3 - 4b(a+b)\alpha_1^2],$$

$$k_2 = ab[(b^2 - a^2 + 4ab)\alpha_2\alpha_3 + 2b(b-a)\alpha_1^2],$$

$$P_3 : t_3 = \frac{b(a-b)}{2\alpha_3\alpha_1}, \quad s_3 = \frac{a(a+3b)}{2(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)},$$

$$h_3 = \alpha_3\alpha_1[(a+b)^2\alpha_3\alpha_1 + 4b(a-b)\alpha_2^2],$$

$$k_3 = ab[(a^2 - b^2 + 4ab)\alpha_3\alpha_1 - 2b(a+b)\alpha_2^2],$$

$$\begin{aligned}
P_4 : \quad t_4 &= \frac{b(a-b)}{2\alpha_2\alpha_3}, \quad s_4 = \frac{a(a+3b)}{2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)}, \\
h_4 &= \alpha_2\alpha_3[(a+b)^2\alpha_2\alpha_3 + 4b(a-b)\alpha_1^2], \\
k_4 &= ab[(a^2-b^2+4ab)\alpha_2\alpha_3 - 2b(a+b)\alpha_1^2], \\
P_5 : \quad t_5 &= \frac{b(a-b)}{2\alpha_1\alpha_2}, \quad s_5 = \frac{a(a+3b)}{2(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)}, \\
h_5 &= \alpha_1\alpha_2[(a+b)^2\alpha_1\alpha_2 + 4b(a-b)\alpha_3^2], \\
k_5 &= ab[(a^2-b^2+4ab)\alpha_1\alpha_2 - 2b(a+b)\alpha_3^2], \\
P_6 : \quad t_6 &= -\frac{b(a+b)}{2\alpha_3\alpha_1}, \quad s_6 = \frac{a(a-3b)}{2(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}, \\
h_6 &= \alpha_3\alpha_1[(a-b)^2\alpha_3\alpha_1 - 4b(a+b)\alpha_2^2], \\
k_6 &= ab[(b^2-a^2+4ab)\alpha_3\alpha_1 + 2b(b-a)\alpha_2^2], \\
P_7 : \quad t_7 &= \frac{b^2-a^2}{4\alpha_1\alpha_2}, \quad s_7 = \frac{9b^2-a^2}{4(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)}, \\
h_7 &= 2\alpha_1\alpha_2[2b^2\alpha_1\alpha_2 + (b^2-a^2)\alpha_3^2], \\
k_7 &= b^2(a^2+3b^2)\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{4}(a^4-3b^4-14a^2b^2)\alpha_3^2, \\
P_8 : \quad t_8 &= \frac{b^2-a^2}{4\alpha_2\alpha_3}, \quad s_8 = \frac{9b^2-a^2}{4(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)}, \\
h_8 &= 2\alpha_2\alpha_3[2b^2\alpha_2\alpha_3 + (b^2-a^2)\alpha_1^2], \\
k_8 &= b^2(a^2+3b^2)\alpha_2\alpha_3 + \frac{1}{4}(a^4-3b^4-14a^2b^2)\alpha_1^2, \\
P_9 : \quad t_9 &= \frac{b^2-a^2}{4\alpha_3\alpha_1}, \quad s_9 = \frac{9b^2-a^2}{4(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)}, \\
h_9 &= 2\alpha_3\alpha_1[2b^2\alpha_3\alpha_1 + (b^2-a^2)\alpha_2^2], \\
k_9 &= b^2(a^2+3b^2)\alpha_3\alpha_1 + \frac{1}{4}(a^4-3b^4-14a^2b^2)\alpha_2^2.
\end{aligned}$$

Аналогично с помощью параметрического задания дискриминантных кривых можно найти величины t_i , s_i и h_i , k_i для точек каспидальных особенностей и точки касания. Ввиду чрезвычайной громоздкости выражений h и k , для точек возврата и касания приведем только значения соответствующих параметров t

и s :

$$\begin{aligned}
 Q_1 : \quad s_{\text{cusp}} &= \sqrt[3]{\frac{a^2(a^2 - 9b^2)^2}{16(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2}}, \\
 Q_2 : \quad t_{\text{cusp}} &= \sqrt[3]{\frac{b^2(a^2 - b^2)^2}{16\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2}}, \\
 Q_0 : \quad t_0 = s_0 &= \frac{(a^2 + 3b^2)}{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)}.
 \end{aligned}$$

7.1.5. Критические точки ранга 0 интегрального отображения

В данном разделе мы опишем особенности ранга 0 для рассматриваемой гамильтоновой системы и покажем, что они соответствуют точкам пересечения вещественной части дискриминантной кривой P_1 – P_6 . Более точно, для каждой точки P_1 – P_6 ее прообраз при отображении момента содержит в точности две критические точки ранга 0.

Для удобства напомним основные определения. Зафиксировав величины постоянных a^2 и b^2 функций Казимира, мы получим 4-мерное инвариантное подмногообразие $\mathcal{P}_{a,b}^4$ (симплектический лист скобки (7.1.1)) и *отображение момента*

$$\mathcal{F} : \mathcal{P}_{a,b}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

определенного следующим образом: $\mathcal{F}(x) = (H(x), K(x)) = (h, k)$. Отображение момента также называют *интегральным отображением*. Пусть с помощью \mathcal{C} обозначено множество всех критически точек отображения момента, т.е. множество $\{x : \text{rank } d\mathcal{F}(x) < 2\}$. Множество \mathcal{C} стратифицировано рангом отображения момента: $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0 \cup \mathcal{C}^1$, где $\mathcal{C}^r = \{x : \text{rank } d\mathcal{F}(x) = r\}$. Множество критических значений отображения момента $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P}_{a,b}^4)$ называется *бифуркационной диаграммой*.

Симплектические листы $\mathcal{P}_{a,b}^4$ параметризованы двумя числами a и b , но поскольку функции Казимира, функция Гамильтона и дополнительный интеграл являются однородными функциями, то понятно, что гомотетия $(M_i, S_i) \rightarrow (pM_i, pS_i)$ не может изменить структуру критически точек, бифуркационную

диаграмму и т.п. Таким образом, фактически мы имеем только однопараметрическое семейство симплектических листов, интегрируемых систем на них и соответствующих им бифуркационных диаграмм.

Теорема 21. *За исключением конечного числа значений параметра $\frac{a}{b}$, множество критических точек \mathcal{C}^0 интегрируемой системы на $\mathcal{P}_{a,b}^4$ с гамильтонианом (7.1.6), (7.1.7) и интегралом (7.1.8) состоит из следующих 12 точек, которые являются невырожденными особенностями типа центр-центр, центр-седло или седло-седло:*

$$\begin{aligned}
 P_1 : & \begin{cases} c_{11} = (M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = a, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = b), \\ c_{21} = (M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = -a, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = -b), \end{cases} \\
 P_2 : & \begin{cases} c_{12} = (M_1 = a, M_2 = 0, M_3 = 0, S_1 = b, S_2 = 0, S_3 = 0), \\ c_{22} = (M_1 = -a, M_2 = 0, M_3 = 0, S_1 = -b, S_2 = 0, S_3 = 0), \end{cases} \\
 P_3 : & \begin{cases} c_{13} = (M_1 = 0, M_2 = a, M_3 = 0, S_1 = 0, S_2 = -b, S_3 = 0), \\ c_{23} = (M_1 = 0, M_2 = -a, M_3 = 0, S_1 = 0, S_2 = b, S_3 = 0), \end{cases} \\
 P_4 : & \begin{cases} c_{14} = (M_1 = a, M_2 = 0, M_3 = 0, S_1 = -b, S_2 = 0, S_3 = 0), \\ c_{24} = (M_1 = -a, M_2 = 0, M_3 = 0, S_1 = b, S_2 = 0, S_3 = 0), \end{cases} \\
 P_5 : & \begin{cases} c_{15} = (M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = a, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = -b), \\ c_{25} = (M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = -a, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = b), \end{cases} \\
 P_6 : & \begin{cases} c_{16} = (M_1 = 0, M_2 = a, M_3 = 0, S_1 = 0, S_2 = b, S_3 = 0), \\ c_{26} = (M_1 = 0, M_2 = -a, M_3 = 0, S_1 = 0, S_2 = -b, S_3 = 0). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Заметим, что образами вышеперечисленных точек $c_{ij} \in \mathcal{P}_{a,b}^4$ при отображении момента являются точки P_1 – P_6 , которые являются точками пересечения дискриминантных кривых, описанных в Теореме 20 и Предложении 2. Точки P_7 – P_9 не содержат критических точек ранга 0 в прообразе.

Доказательство. Косой градиент функции Гамильтона в виде (7.1.6) по отношению к скобке (7.1.1) дается формулой

$$\text{sgrad } H = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} \times \mathbf{M}, \frac{1}{3} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{S}} \times \mathbf{S} \right).$$

Таким образом, для критических точек (\mathbf{M}, \mathbf{S}) ранга 0 мы имеем условие

$$\text{sgrad } H(\mathbf{M}, \mathbf{S}) = 2 \left((A\mathbf{M} + B\mathbf{S}) \times \mathbf{M}, \frac{1}{3}(B\mathbf{M} + C\mathbf{S}) \times \mathbf{S} \right) = 0,$$

из которого немедленно следует

$$A\mathbf{M} + B\mathbf{S} = \lambda_1\mathbf{M}, \quad B\mathbf{M} + C\mathbf{S} = \lambda_2\mathbf{S}$$

для некоторых констант λ_1, λ_2 . Учитывая тот факт, что A, B, C являются диагональными матрицами с элементами A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, 3$), мы получаем

$$(\lambda_1 - A_i)M_i = b_i S_i, \quad (\lambda_2 - C_i)S_i = b_i M_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.1.15)$$

Следовательно для каждого $i = 1, 2, 3$ справедливо одно из следующих условий:

$$(\lambda_1 - A_i)(\lambda_2 - C_i) = b_i^2 \quad \text{или} \quad M_i = S_i = 0. \quad (7.1.16)$$

Благодаря тому, что $(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = a^2 \neq 0$ и $(\mathbf{S}, \mathbf{S}) = b^2 \neq 0$, по меньшей мере одно из первых условий (7.1.16) выполнено. Если первое условие справедливо в точности для одного индекса $i \in 1, 2, 3$, то четыре координаты с остальными индексами равны нулю. Учитывая, что $(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = a^2$ и $(\mathbf{S}, \mathbf{S}) = b^2$, мы получаем 12 критических точек (\mathbf{M}, \mathbf{S}) :

$$(\pm a, 0, 0, \pm b, 0, 0), \quad (0, \pm a, 0, 0, \pm b, 0), \quad (0, 0, \pm a, 0, 0, \pm b). \quad (7.1.17)$$

Используя явные выражения для гамильтониана (7.1.6), (7.1.7) и дополнительного интеграла (7.1.8), легко убедиться, что образами точек (7.1.17) являются точки P_1 – P_6 .

Теперь рассмотрим оставшиеся случаи когда два или три первых условия (7.1.16) выполнены, и покажем, что это невозможно. Заметим, что это будет означать, что $\text{sgrad } K$ также равен нулю в точках (7.1.17) так как они изолированы на $\mathcal{P}_{a,b}^4$ и $\{H, K\} \equiv 0$.

Предположим, например, что в точности для $i = 1, 2$ первое условие (7.1.16) выполнено. Тогда $M_3 = S_3 = 0$ и

$$(A_1 - \lambda_1)(C_1 - \lambda_2) = B_1^2, \quad (A_2 - \lambda_1)(C_2 - \lambda_2) = B_2^2. \quad (7.1.18)$$

Разрешая систему (7.1.18) относительно λ_1, λ_2 для A_i, B_i, C_i определенных с помощью (7.1.7), мы получаем

$$\lambda_1 = -2\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2, \quad \lambda_2 = 2\alpha_1\alpha_2(\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2). \quad (7.1.19)$$

Подставляя A_i, B_i, C_i из (7.1.7) и λ_1, λ_2 из (7.1.19) в (7.1.15), мы получим

$$\alpha_3 M_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)S_1, \quad \alpha_3 M_2 = (\alpha_2 - \alpha_1)S_2. \quad (7.1.20)$$

Эти формулы совместно с условиями $M_1^2 + M_2^2 = a^2$ и $S_1^2 + S_2^2 = b^2$ влекут справедливость следующего соотношения

$$\alpha_3^2 a^2 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 b^2,$$

т.е. ситуация, когда ровно два первых условия (7.1.16) справедливы, возможна только для особых значений $\frac{a^2}{b^2} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{\alpha_3^2}$ параметров из семейства симплектических листов $\mathcal{P}_{a,b}^4$. В этом случае некоторые пары точек (7.1.17) могут быть вырожденными, но это имеет место только для конечного числа значений параметров.

Последний случай, при котором все три первых условия (7.1.16) выполнены, невозможен, так как мы предположили, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ отличны от нуля и попарно различны. Это легко понять с помощью явных выражений (7.1.19) для λ_1, λ_2 .

Приступим к доказательству последнего утверждения теоремы о невырожденности и типе точек (7.1.17). Эти характеристики критической точки x ранга 0, которые определяются собственными значениями оператора \mathcal{A}_H , полученного линеаризацией гамильтонова векторного поля $\text{sgrad } H$ в точке x . Хорошо известно [42], что характеристический полином $P(\lambda)$ для такого оператора $\mathcal{A}_H : \mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \mathbf{S}) \rightarrow \mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \mathbf{S})$ содержит только четные степени параметра λ . Также понятно, что полином $P(\lambda)$ имеет два нулевых корня, так как скобка (7.1.1) имеет двумерное ядро. Пусть $\varrho_H(\lambda)$ обозначает характеристический полином $P(\lambda)$ без множителя λ^2 . Полином $\varrho_H(\lambda)$ является биквадратным. По-

лагая $\mu = \lambda^2$, мы можем решить соответствующее квадратное уравнение. Выпишем ниже выражения для квадратов корней полинома $\varrho_H(\lambda)$ в точках P_k , $k = 1, \dots, 6$:

$$\begin{aligned}
 P_1 : & \begin{cases} \mu_1 = -4[a\alpha_1 + b(\alpha_2 - \alpha_3)][a\alpha_2 + b(\alpha_1 - \alpha_3)]\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3), \\ \mu_2 = -\frac{4}{9}[a\alpha_1 + b(\alpha_2 - \alpha_3)][a\alpha_2 + b(\alpha_1 - \alpha_3)]\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2, \end{cases} \\
 P_2 : & \begin{cases} \mu_1 = -4[a\alpha_2 + b(\alpha_3 - \alpha_1)][a\alpha_3 + b(\alpha_2 - \alpha_1)]\alpha_2^2\alpha_3^2(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1), \\ \mu_2 = -\frac{4}{9}[a\alpha_2 + b(\alpha_3 - \alpha_1)][a\alpha_3 + b(\alpha_2 - \alpha_1)]\alpha_2\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2, \end{cases} \\
 P_3 : & \begin{cases} \mu_1 = -4[a\alpha_3 + b(\alpha_2 - \alpha_1)][a\alpha_1 + b(\alpha_2 - \alpha_3)]\alpha_3^2\alpha_1^2(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2), \\ \mu_2 = -\frac{4}{9}[a\alpha_3 + b(\alpha_2 - \alpha_1)][a\alpha_1 + b(\alpha_2 - \alpha_3)]\alpha_3\alpha_1(\alpha_3 - \alpha_2)^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2. \end{cases} \\
 P_4 : & \begin{cases} \mu_1 = -4[a\alpha_2 + b(\alpha_1 - \alpha_3)][a\alpha_3 + b(\alpha_1 - \alpha_2)]\alpha_2^2\alpha_3^2(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1), \\ \mu_2 = -\frac{4}{9}[a\alpha_2 + b(\alpha_1 - \alpha_3)][a\alpha_3 + b(\alpha_1 - \alpha_2)]\alpha_2\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1)^2(\alpha_3 - \alpha_1)^2, \end{cases} \\
 P_5 : & \begin{cases} \mu_1 = -4[a\alpha_1 + b(\alpha_3 - \alpha_2)][a\alpha_2 + b(\alpha_3 - \alpha_1)]\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3), \\ \mu_2 = -\frac{4}{9}[a\alpha_1 + b(\alpha_3 - \alpha_2)][a\alpha_2 + b(\alpha_3 - \alpha_1)]\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2, \end{cases} \\
 P_6 : & \begin{cases} \mu_1 = -4[a\alpha_3 + b(\alpha_1 - \alpha_2)][a\alpha_1 + b(\alpha_3 - \alpha_2)]\alpha_3^2\alpha_1^2(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2), \\ \mu_2 = -\frac{4}{9}[a\alpha_3 + b(\alpha_1 - \alpha_2)][a\alpha_1 + b(\alpha_3 - \alpha_2)]\alpha_3\alpha_1(\alpha_3 - \alpha_2)^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Эти соотношения показывают, что $\varrho_H(\lambda)$ может иметь нулевые или кратные корни только для некоторых специальных значениях параметра $\frac{a}{b}$. Таким образом, для всех значений этого параметра за исключением конечного числа критические точки (7.1.17) являются невырожденными.

Напомним, что тип критической точки ранга 0 определяется квадратами корней характеристического полинома для линеаризации гамильтонова векторного поля в критической точке [2, 218]. Положительные квадраты соответствуют компонентам типа седло, отрицательные квадраты соответствуют эллиптическим компонентам и комплексные квадраты корней означают, что это критическая точка типа фокус-фокус. Из последних выражений легко увидеть, что все квадраты корней вещественные числа. Следовательно, рассматриваемая си-

стема не может иметь особенностей типа фокус-фокус. \square

7.1.6. Краткие итоги раздела 7.1

Подводя промежуточные итоги данного раздела, необходимо отметить, что мы имеем представленную в явном виде спектральную кривую, коэффициенты которой являются первыми интегралами рассматриваемого интегрируемого случая Адлера – ван Мёрбеке. Дискриминантное множество спектральной кривой является объединением поверхностей кратных корней двух многочленов. Во многих хорошо известных примерах интегрируемых гамильтоновых систем бифуркационная диаграмма является подмножеством вещественной части дискриминантного множества. Мы показали, что образы критических точек ранга 0 при отображении момента содержатся во множестве точек самопересечения кривых, образующих дискриминантное множество.

Критические точки ранга 1 интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы образуют двумерные подмногообразия в фазовом пространстве, которые заполнены особыми периодическими траекториями системы. Образами таких подмногообразий при отображении момента являются бифуркационные кривые. Если мы предположим, что бифуркационные кривые для интегрируемого случая Адлера – ван Мёрбеке содержатся в вещественной части дискриминантного множества, то мы можем найти критические точки ранга 1 в прообразах точек дискриминантного множества при отображении момента. Это означает, что для некоторых дуг дискриминантных кривых, соединяющих критические точки ранга 0 P_1 – P_6 , их точки в действительности содержат критические точки ранга 1 в прообразе. Это может быть проверено с помощью исследования точек $(\mathbf{M}, \mathbf{S}) \in \mathbb{R}^6$ при $M_i = S_i = 0$ для некоторых $i = 1, 2, 3$. Это значит, что соответствующие особые периодические траектории пересекают 4-мерные гиперплоскости $\{M_i = S_i = 0\}$ в $\mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \mathbf{S})$ и, следовательно, их образы при отображении момента содержатся в дискриминантном множестве. Более того, мы можем проверить что для каждой точки P_1 – P_6 в точности две

транскверсально пересекающиеся дуги дискриминантных кривых, проходящих через данную точку, являются образами критических точек ранга 1 (описываемого типа, т.е. $\{M_i = S_i = 0\}$). Это наблюдение позволяет нам утверждать, что такие дуги дискриминантного множества принадлежат бифуркационной диаграмме. Наше предположение, основанное на исследованиях фазовой топологии большого числа конкретных интегрируемых гамильтоновых систем, состоит в том, что описанные дуги дискриминантного множества дают всю бифуркационную диаграмму интегрируемого случая Адлера – ван Мёрбеке. Бифуркационная диаграмма для некоторых частных значений параметров a, b, α_i показана на Рис. 7.2.

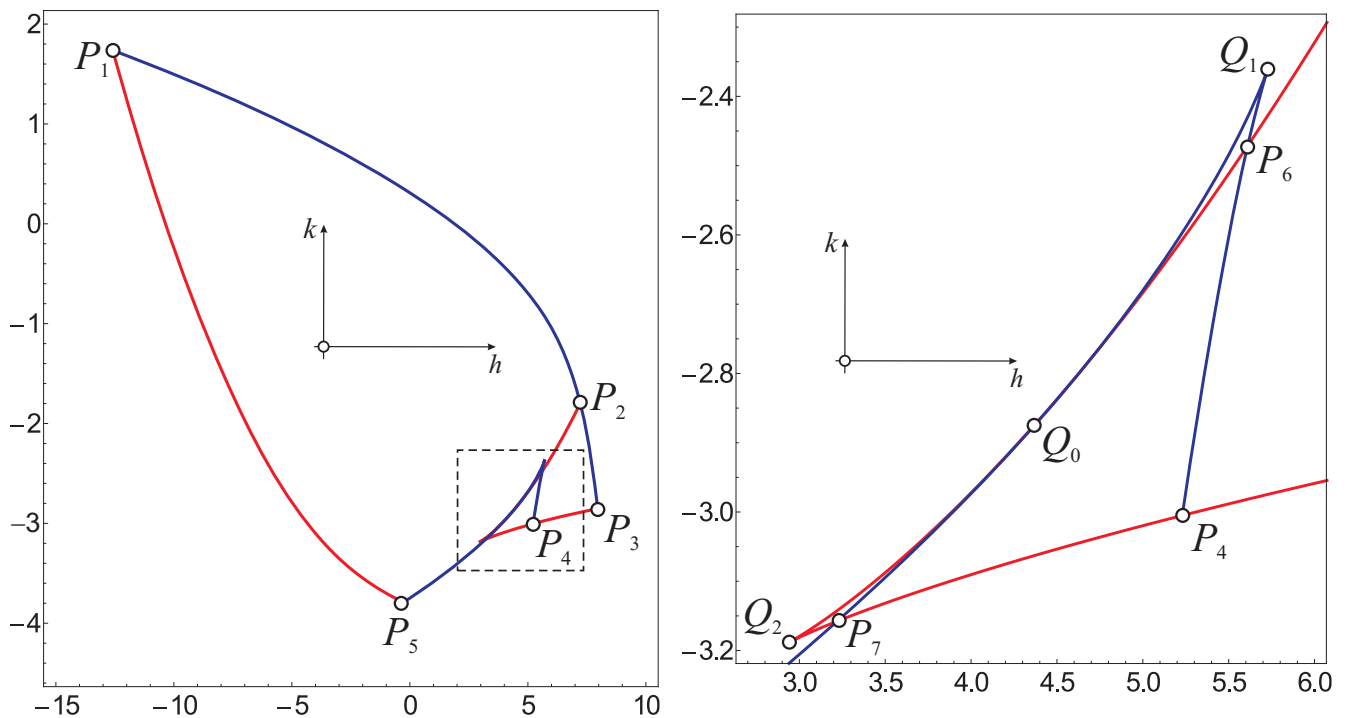


Рис. 7.2. Бифуркационная диаграмма Σ и ее увеличенный фрагмент для значений параметров $a = 0.66; b = 0.86; \alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0.77$.

Точная форма бифуркационных диаграмм для всех возможных значений параметров интегрируемого случая Адлера – ван Мёрбеке, а также их связь с дискриминантным множеством являются актуальными задачами для дальнейших исследований. Тем не менее, мы должны заметить, что полученные результаты позволяют утверждать, что интегрируемый случай Адлера – ван Мёрбеке

отличается от других известных случаев интегрируемости на алгебре Ли $so(4)$ с топологической точки зрения. Это следует не только из вида бифуркационной диаграммы, но и из полученных выражений, определяющих критические точки ранга 0. Действительно, топологический анализ случаев интегрируемости Стеклова, Манакова, Борисова–Мамаева–Соколова, Соколова–Цыганова (см. [189, 219, 220] и [208], соответственно) показывает, что в этих случаях мы имеем также критические точки ранга 0 типа фокус–фокус или различное число критических точек ранга 0 на симплектических листах $\mathcal{P}_{a,b}^4$.

7.2. Механическая интерпретация случая Адлера–ван Мёрбеке

В данном разделе рассмотрен интегрируемый случай Адлера–ван Мёрбеке. Указана наиболее удобная для анализа форма дополнительного интеграла. Приведена возможная механическая интерпретация рассматриваемого случая. Рассмотрена связь с несколькими классическими интегрируемыми задачами механики. Обсуждаются условия физической реализуемости механической модели.

Случай интегрируемости, найденный М. Адлером и П. ван Мёрбеке [200], является одним из самых сложных и одновременно наименее изученных в динамике твердого тела. Его появлению мы обязаны прежде всего работам А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [210], [211], посвященным интегрированию уравнений Эйлера на конечномерных группах Ли. В результате на $so(4)$ возникает новое семейство интегрируемых квадратичных гамильтонианов с дополнительным интегралом четвертой степени. Инвариантные соотношения третьей степени для одного интегрируемого случая на $so(4)$ получены в работе [64]. Существование дополнительного интеграла четвертой степени, найденного в [200], связано с особой симметрией $so(4)$, допускающей вещественное представление в виде прямой суммы $so(3) \oplus so(3)$.

В работах [27] и [221] начато исследование фазовой топологии интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке. В качестве первого шага приводится в явном виде спектральная кривая и дискриминантное множество. Предъявлены характеристические показатели для определения типа критических точек ранга 0 и 1 отображения момента. Показано, как с помощью невырожденных особенностей ранга 0 и 1 отображения момента можно выделить бифуркационную диаграмму отображения момента из вещественной части дискриминантного множества спектральной кривой, ассоциированной с L - A парой интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке. Получены примеры бифуркационных диаграмм. В отличие от классического анализа орбитальной устойчивости (см. например [222],[223]), в работе [27] были применены методы анализа устойчивости, свойственные для вполне интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем, развитые в [3].

Хотелось бы отметить, что актуальной задачей является исследование механической интерпретации системы Адлера–ван Мёрбеке. Для этого необходимо исследовать возможность приведения уравнений системы Адлера–ван Мёрбеке при частном соотношении параметров к виду известных интегрируемых случаев динамики твердого тела. Данная задача важна не только для случая Адлера–ван Мёрбеке, но и для систем Соколова [205] и Борисова–Мамаева–Соколова [64].

7.2.1. Гамильтониан, интеграл и фазовое пространство

Уравнения движения в задаче Адлера–ван Мёрбеке имеют вид уравнений Эйлера на алгебре Ли $so(4) = so(3) \oplus so(3)$,

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{3} \mathbf{S} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{S}}. \quad (7.2.1)$$

На ко-алгебре $\mathfrak{g} = so(4)^*$ ($so(4) = so(3) \oplus so(3)$) с координатными функциями $\mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \mathbf{S})$ определены скобки Ли–Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, S_j\} = 0, \quad \{S_i, S_j\} = \frac{1}{3} \varepsilon_{ijk} S_k. \quad (7.2.2)$$

Скобка (7.2.2) имеет две функции Казимира

$$\mathbf{F}_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \quad \mathbf{F}_2 = (\mathbf{S}, \mathbf{S}). \quad (7.2.3)$$

Как известно, для заданной функции Гамильтона H от \mathbf{M}, \mathbf{S} уравнения движения с помощью скобки Ли-Пуассона можно записать в гамильтоновой форме

$$\dot{x} = \{H, x\}. \quad (7.2.4)$$

Здесь x любая из переменных M_i, S_j .

На совместном уровне функций Казимира

$$\mathcal{P}_{a,b}^4 = \{\mathbf{F}_1 = a^2, \mathbf{F}_2 = b^2\} \cong \mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2, \quad (7.2.5)$$

индуцированная скобка Пуассона невырождена и ограничение системы (7.2.4) дает гамильтонову систему с двумя степенями свободы.

Рассмотрим следующий гамильтониан

$$H = (\mathbf{M}, \mathbf{AM}) + 2(\mathbf{M}, \mathbf{BS}) + (\mathbf{S}, \mathbf{CS}), \quad (7.2.6)$$

где диагональные 3×3 -матрицы A, B, C имеют, в отличие от (7.1.7), следующий вид

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}[\alpha_2^2 \alpha_3^2, \alpha_1^2 \alpha_3^2, \alpha_1^2 \alpha_2^2]; \\ B &= \text{diag}[(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_2 \alpha_3, (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_1 \alpha_3, \\ &(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_1 \alpha_2]; \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

$$C = \text{diag}[\alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2 \alpha_3 - 4\alpha_1^2), \alpha_1 \alpha_3 (\alpha_1 \alpha_3 - 4\alpha_2^2), \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 \alpha_2 - 4\alpha_3^2)].$$

Чтобы утверждать, что система является вполне интегрируемой по Лиувиллю, необходимо указать еще один независимый первый интеграл, находящийся в инволюции с гамильтонианом (7.2.6). Мы приводим дополнительный интеграл в следующей, отличной от (7.1.8), симметричной форме

$$\begin{aligned} K &= 3 \sum_{i,j} \alpha_i (\alpha_j - \alpha_i) M_j S_j S_i^2 + \sum_i (\alpha_i - \alpha_j)(\alpha_i - \alpha_k) M_i S_i^3 - \\ &-(\mathbf{M}, \mathbf{M}) \sum_i [\alpha_j \alpha_k M_i S_i + 2(\alpha_j^2 + \alpha_k^2) S_i^2]. \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

Во втором и третьем выражении использовано суммирование, введенное С. В. Ковалевской. Здесь индекс i пробегает значения от 1 до 3 и для заданного i индексы j, k принимают значения из множества $\{1, 2, 3\}$ не равные i .

Как уже было отмечено выше выражение (7.2.8) отличается от форм дополнительного интеграла, использованных в оригинальных работах, посвященных доказательству алгебраической интегрируемости (см. [200]). Дополнительный интеграл (7.2.8) наиболее приближен по виду к интегралам, указанным в работе [212] и в книге [169].

Теорема 22. $\{H, K\} = 0$, если $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

7.2.2. Механическая интерпретация

Уравнения движения в задаче Адлера–ван Мёрбеке (7.2.1), как уже было отмечено выше, имеют вид уравнений Эйлера на алгебре Ли $so(4) = so(3) \oplus so(3)$, которые также описывают вращение твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение [224], [225], [204], [226]. Эти уравнения исследовал В. А. Стеклов [201] в качестве модели вращения Земли. Современный обзор интегрируемых семейств метрик определенного вида на $so(4)$ и их механическая интерпретация содержится в книгах [227], [228], [55], [56], [169], [229].

Рассматриваемый в настоящей главе случай Адлера–ван Мёрбеке является интегрируемой гамильтоновой системой на алгебре $so(4)$ с дополнительным интегралом четвертой степени. В данном разделе нами используется одна из возможных систем переменных (\mathbf{M}, \mathbf{S}) , соответствующая известному разложению алгебры $(so(4) = so(3) \oplus so(3))$ со скобкой Ли-Пуассона (7.2.2), обладающей двумя центральными функциями (7.2.3). Здесь трехмерный вектор \mathbf{M} имеет смысл кинетического момента системы «тело + жидкость», а компоненты трехмерного вектора \mathbf{S} пропорциональны компонентам вектора *завихренности жидкости*.

Очевидно, что информация об эволюции вектора кинетического момента и вектора завихренности имеет важное значение при анализе динамики таких объектов, как топливные баки летательных аппаратов. В частности, рассматриваемые условия интегрируемости гамильтоновой системы являются необходимыми требованиями при анализе динамики модельных систем, так как при их нарушении возникают хаотические режимы движения жидкости и всей системы в целом, что затрудняет решение задачи управления движением летательного аппарата.

Уравнения движения (7.2.1) в случае квадратичного гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{AM}) + (\mathbf{M}, \mathbf{BS}) + \frac{1}{2}(\mathbf{S}, \mathbf{CS}), \quad (7.2.9)$$

где матрицы A, C – симметричные, матрица B – произвольная, называются уравнениями Пуанкаре-Жуковского. Как указано выше они описывают движение вокруг неподвижной точки твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость, полностью заполненную однородной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей вихревое движение [225], [204]. Вывод этих уравнений можно найти в [169].

В работе [204] Пуанкаре указал явное сведение к квадратурам случая осевой симметрии. Это простейший случай интегрируемости уравнений (7.2.1), для которого в силу требований симметрии для каждой из матриц диагональных матриц A, B, C совпадает пара собственных значений

$$a_{11} = a_{22}, \quad b_{11} = b_{22}, \quad c_{11} = c_{22}. \quad (7.2.10)$$

Тогда гамильтониан (7.2.9) после исключения функций Казимира (7.2.3) принимает вид

$$H = \frac{1}{2}aM_3^2 + b_{11}(M_1S_1 + M_2S_2) + b_{33}M_3S_3 + \frac{1}{2}cS_3^2, \quad (7.2.11)$$

где $a = a_{33} - a_{11}$, $c = c_{33} - c_{11}$. Дополнительный интеграл имеет вид $K = M_3 + S_3$ и может быть отнесен к типу Лагранжа.

Возвращаясь к гамильтониану задачи Адлера–ван Мёрбеке (7.2.6), мы видим, что в частном случае $\alpha_1 = \alpha_2$ матрицы (7.2.7) удовлетворяют требованиям (7.2.10). Положив в гамильтониане (7.2.6)

$$\begin{aligned} 2(\alpha_3^2 - \alpha_1^2) &= a, \\ 2(\alpha_3 - \alpha_1)^2 &= b_{33}, \quad 0 = b_{11} \\ 2(5\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_3 - \alpha_1^2) &= c, \end{aligned} \tag{7.2.12}$$

получим его в виде (7.2.11).

Мы видим, что в частном случае равенства любых двух параметров α_i динамика системы Адлера–ван Мёрбеке совпадает с динамикой интегрируемого случая осевой симметрии, рассмотренного Пуанкаре. В случае произвольного соотношения параметров α_i система Адлера–ван Мёрбеке, с механической точки зрения, является обобщением интегрируемого случая Пуанкаре.

Непосредственное исследование сложной динамики системы Адлера–ван Мёрбеке в случае произвольного соотношения параметров и дополнительного интеграла четвертой степени является перспективным направлением будущих исследований.

В данном разделе рассмотрен интегрируемый случай Адлера–ван Мёрбеке. Представлена одна из возможных механических интерпретаций уравнений этой задачи. Рассматриваются условия, которым должны удовлетворять параметры системы, чтобы данная механическая модель возникала. В качестве следующих актуальных проблем можно перечислить другие случаи интегрируемости на $so(4)$, такие как случай Соколова [205], Борисова–Мамаева–Соколова [64], в которых вопросы механической интерпретации и физической реализуемости на данный момент остаются открытыми.

7.3. Интегрируемый случай Адлера–ван Мёрбеке.

Визуализация бифуркаций торов Лиувилля

В данном разделе мы продолжаем рассмотрение интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке. Основываясь на результатах предыдущих глав, посвященных исследованию фазовой топологии, предложен способ визуализации перестроек торов Лиувилля.

В последние годы активно исследуются интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли с дополнительным полиномиальным интегралом степени выше второй. В частности, случай Адлера–ван Мёрбеке [200, 209] является актуальным объектом исследования. Отправной точкой послужили работы Мищенко и Фоменко [210], [211], посвященные интегрированию уравнений Эйлера на конечномерных группах Ли. В результате на $so(4)$ возникло новое семейство интегрируемых квадратичных гамильтонианов с дополнительным интегралом четвертой степени. Инвариантные соотношения третьей степени для одного интегрируемого случая на $so(4)$ получены в работе [64]. Уравнения Эйлера на алгебре Ли $so(4)$ также описывают вращение твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение [204, 224–226]. Эти уравнения исследовал В. А. Стеклов [201] в качестве модели вращения Земли. Современный обзор интегрируемых семейств метрик определенного вида на $so(4)$ и их механическая интерпретация содержится в книгах [55, 56, 169, 227–229].

Вопросам анализа особенностей спектральной кривой и ее связи с бифуркационной диаграммой отображения момента посвящены работы [193, 213–217, 230, 231]. Исследования фазовой топологии случая Адлера–ван Мёрбеке были начаты в [27, 221]. На первом этапе топологического анализа были приведены в явном виде спектральная кривая и дискриминантное множество, характеристические показатели для определения типа критических точек ранга 0 и 1. Далее с помощью невырожденных особенностей ранга 0 и 1 отображения мо-

мента была выделена бифуркационная диаграмма из вещественной части дискриминантного множества спектральной кривой, ассоциированной с L - A парой интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке.

В настоящем разделе излагается алгоритм построения связанных компонент инвариантных многообразий интегрируемой гамильтоновой системы Адлера – ван Мербеке для заданных значений констант первых интегралов и функций Казимира. С помощью этого метода проиллюстрированы перестройки торов Лиувилля при пересечении ветвей бифуркационной диаграммы.

7.3.1. Гамильтониан, интеграл и фазовое пространство

Уравнения движения интегрируемого случая Адлера–ван Мербеке [200, 209] имеют вид уравнений Эйлера на алгебре $so(4)$ [27, 221]

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{3} \mathbf{S} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{S}}, \quad (7.3.1)$$

где трехмерный вектор \mathbf{M} имеет смысл кинетического момента системы «тело + жидкость», а компоненты трехмерного вектора \mathbf{S} пропорциональны компонентам вектора *завихренности жидкости*.

На ко-алгебре $\mathfrak{g} = so(4)^*$ ($so(4) = so(3) \oplus so(3)$) с координатными функциями $\mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \mathbf{S})$ определены скобки Ли–Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, S_j\} = 0, \quad \{S_i, S_j\} = \frac{1}{3} \varepsilon_{ijk} S_k. \quad (7.3.2)$$

Скобка (7.3.2) имеет две функции Казимира

$$\mathbf{F}_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \quad \mathbf{F}_2 = (\mathbf{S}, \mathbf{S}). \quad (7.3.3)$$

Как известно, для заданной функции Гамильтона H от \mathbf{M}, \mathbf{S} уравнения движения с помощью скобки Ли–Пуассона можно записать в гамильтоновой форме

$$\dot{x} = \{H, x\}. \quad (7.3.4)$$

Здесь x любая из переменных M_i, S_j .

На совместном уровне функций Казимира

$$\mathcal{P}_{a,b}^4 = \{\mathbf{F}_1 = a^2, \mathbf{F}_2 = b^2\} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, \quad (7.3.5)$$

индуцированная скобка Пуассона невырождена и ограничение системы (7.3.4) дает гамильтонову систему с двумя степенями свободы.

Рассмотрим следующий гамильтониан

$$H = (\mathbf{M}, A\mathbf{M}) + 2(\mathbf{M}, B\mathbf{S}) + (\mathbf{S}, C\mathbf{S}), \quad (7.3.6)$$

где диагональные 3×3 -матрицы A, B, C имеют следующий вид

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}[\alpha_2^2\alpha_3^2, \alpha_1^2\alpha_3^2, \alpha_1^2\alpha_2^2]; \\ B &= \text{diag}[(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_2\alpha_3, (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_1\alpha_3, \\ &(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_1\alpha_2]; \\ C &= \text{diag}[\alpha_2\alpha_3(\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_1^2), \alpha_1\alpha_3(\alpha_1\alpha_3 - 4\alpha_2^2), \alpha_1\alpha_2(\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_3^2)]. \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

Чтобы утверждать, что система является вполне интегрируемой по Лиувиллю, необходимо указать еще один независимый первый интеграл, находящийся в инволюции с гамильтонианом (7.3.6). Мы приводим дополнительный интеграл в следующей симметричной форме

$$\begin{aligned} K &= 3 \sum_{i,j} \alpha_i(\alpha_j - \alpha_i)M_jS_jS_i^2 + \sum_i (\alpha_i - \alpha_j)(\alpha_i - \alpha_k)M_iS_i^3 - \\ &-(\mathbf{M}, \mathbf{M}) \sum_i [\alpha_j\alpha_kM_iS_i + 2(\alpha_j^2 + \alpha_k^2)S_i^2]. \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

Во втором и третьем выражении использовано суммирование, введенное С. В. Ковалевской. Здесь индекс i пробегает значения от 1 до 3 и для заданного i индексы j, k принимают значения из множества $\{1, 2, 3\}$ не равные i .

Отметим, что выражение (7.3.8) отличается от форм дополнительного интеграла, использованных в оригинальных работах, посвященных доказательству алгебраической интегрируемости (см. [200]). Дополнительный интеграл (7.3.8) наиболее приближен по виду к интегралам, указанным в работе [212] и в книге [169].

Непосредственно можно убедиться, что справедлива следующая

Теорема 23. $\{H, K\} = 0$, если $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

Рассмотрим далее алгоритм построения торов Лиувилля для фиксированных значений первых интегралов системы.

7.3.2. Визуализация торов Лиувилля

Заметим, что гамильтониан (7.3.6), дополнительный интеграл (7.3.8) и функции Казимира (7.3.3) инвариантны относительно следующей инверсии $M_i \rightarrow -M_i, S_i \rightarrow -S_i, \forall i = 1, 2, 3$. Следовательно, совместная поверхность уровня должна обладать зеркальной симметрией относительно гиперплоскостей $M_i = 0, S_i = 0, \forall i = 1, 2, 3$. Будем искать точки пересечения совместной поверхности уровня с этими гиперплоскостями.

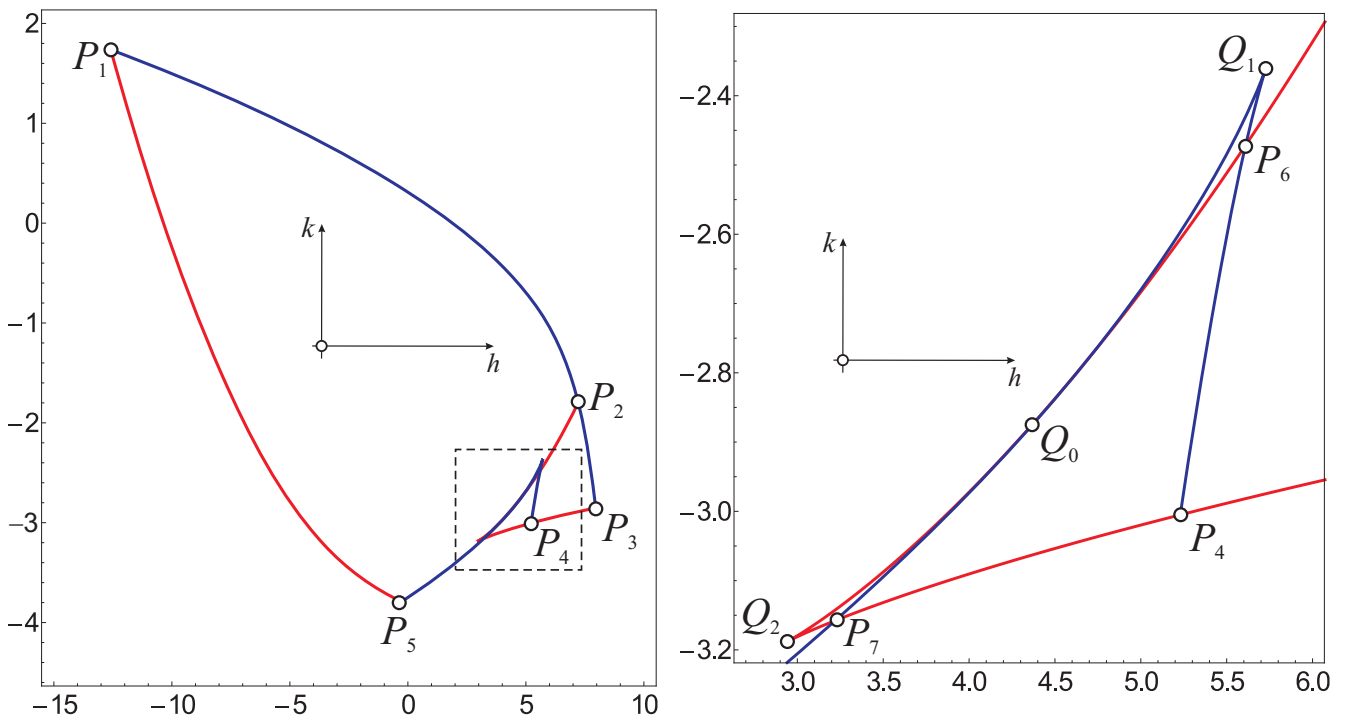


Рис. 7.3. Бифуркационная диаграмма Σ и ее увеличенный фрагмент для $a = 0.66; b = 0.86; \alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0.77$.

Рассмотрим, например, точки, координаты которых удовлетворяют урав-

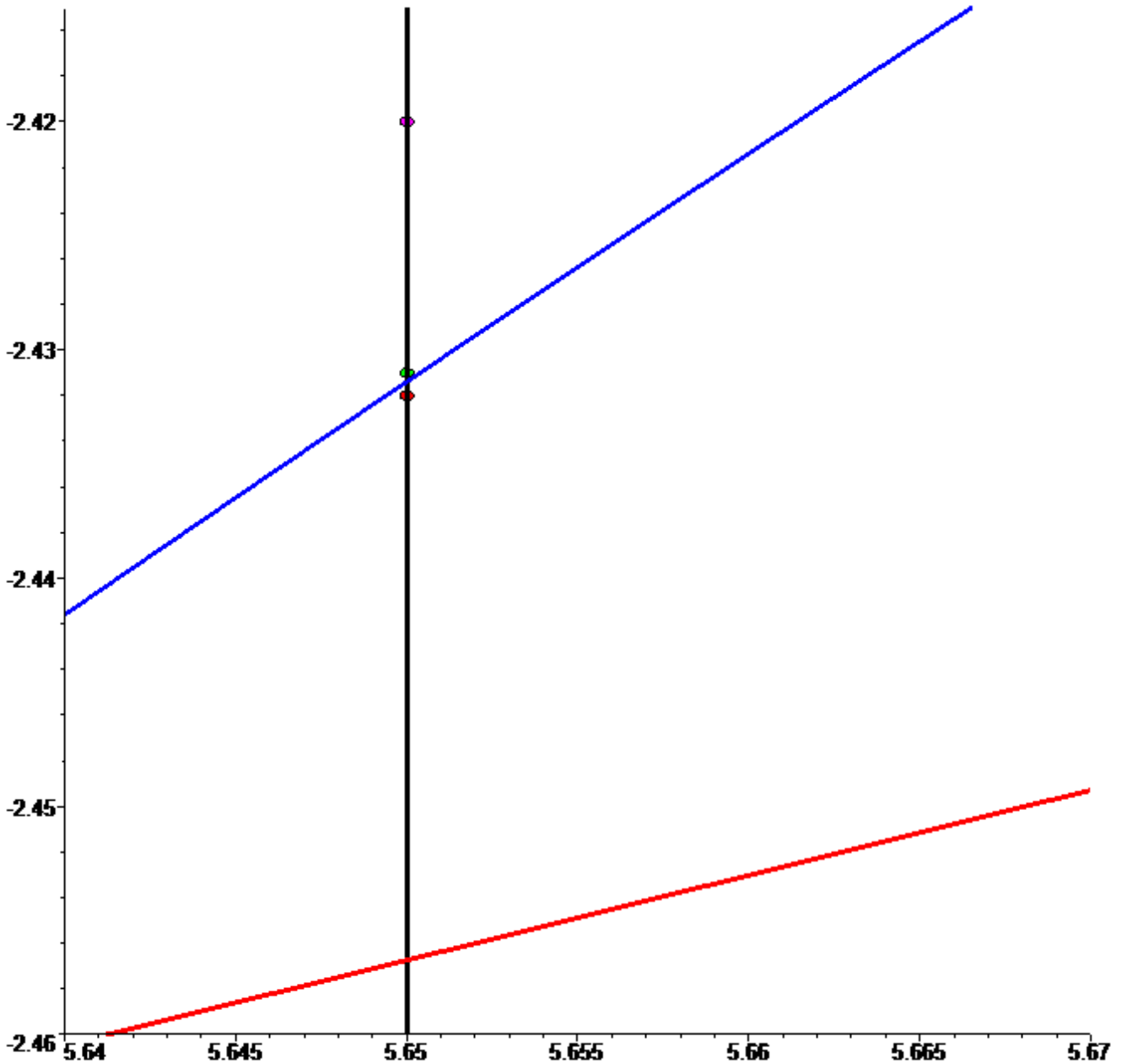


Рис. 7.4. Фрагмент бифуркационной диаграммы Σ , изображенной на Рис. 7.3.

нениям системы

$$\mathbf{F}_1 = a^2, \mathbf{F}_2 = b^2, H = h, K = k, M_1 = 0, S_1 = 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad (7.3.9)$$

где a, b, h, k обозначены постоянные казимиров и интегралов.

1) Последовательно исключая из уравнений системы (7.3.9) переменные M_2, M_3, S_2 и проводя замену $S_3^2 = z$, мы получаем уравнение четвертой степени относительно z , коэффициенты которого зависят от постоянных интегралов, казимиров, а также от параметров α_i . Явные зависимости коэффициентов мы

здесь не приводим ввиду их чрезвычайной громоздкости.

2) Разрешая это уравнение и проводя обратную подстановку в уравнения системы (7.3.9), получаем значения координат точки, принадлежащей совместной поверхности уровня интегралов.

3) Наконец, используем координаты этой точки в качестве начальных условий задачи Коши для уравнений (7.3.1) и интегрируем их численно. В случае когда значения констант интегралов попадают внутрь камеры бифуркационной диаграммы, мы, в результате численного интегрирования, получаем обмотку регулярного инвариантного тора.

4) Проецируя полученную интегральную кривую на одно из возможных подпространств фазового пространства системы мы получаем наглядный образ инвариантного тора, заметаемого всюду плотной обмоткой.

5) Повторяем действия 3) и 4) для всех корней уравнения, полученных в пункте 2), мы получаем образы нескольких торов, число которых равняется числу компонент связности инвариантных многообразий интегрируемой системы.

7.3.3. Перестройки торов Лиувилля

В работе [27] подробно описаны особенности ранга 0 и 1 отображения момента, дискриминантное множество спектральной кривой, ассоциированной с L - A парой интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке, а также построена бифуркационная диаграмма для конкретных значений параметров задачи (Рис. 7.3).

Особый интерес для применения техники, изложенной в предыдущем разделе, представляет визуализация перестроек торов Лиувилля при пересечении ветвей бифуркационной диаграммы. Для получения картины таких перестроек рассмотрим подробнее бифуркационную диаграмму, изображенную на Рис. 7.3, в окрестности одной из ее ветвей (Рис. 7.4).

Фиксируем значение постоянной гамильтониана $h = 5.65$ и будем изменять

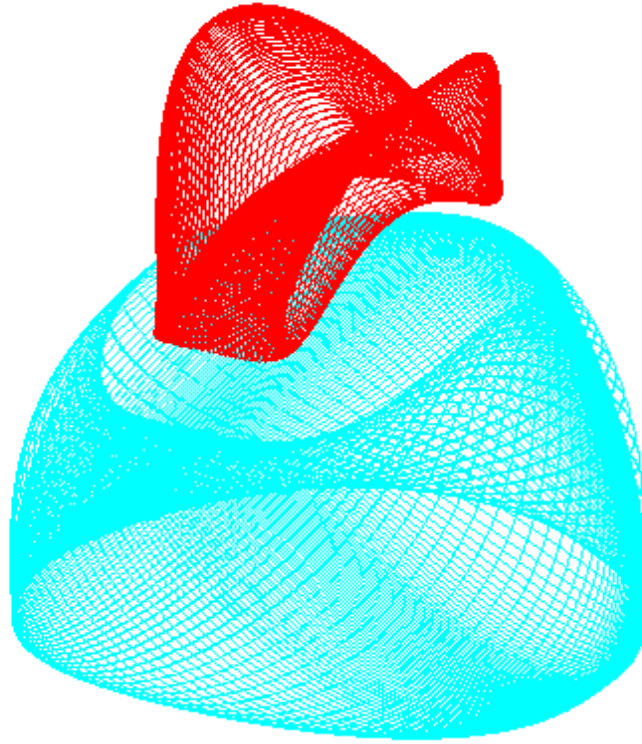


Рис. 7.5. Бифуркация двух торов Лиувилля в один при пересечении ветви бифуркационной диаграммы Σ , изображенной на Рис. 7.4. Фрагмент соответствует верхней точке.

значение постоянной интеграла K , постепенно приближаясь сверху к синей ветви бифуркационной диаграммы и пересекая ее. Согласно результатам топологического анализа, проведенного в [27], при пересечении этой ветви мы должны наблюдать бифуркацию типа B , то есть перестройку двух торов в один.

Применяя алгоритм, изложенный в предыдущем разделе, для построения торов, при значениях постоянных интегралов, соответствующих точкам, отме-

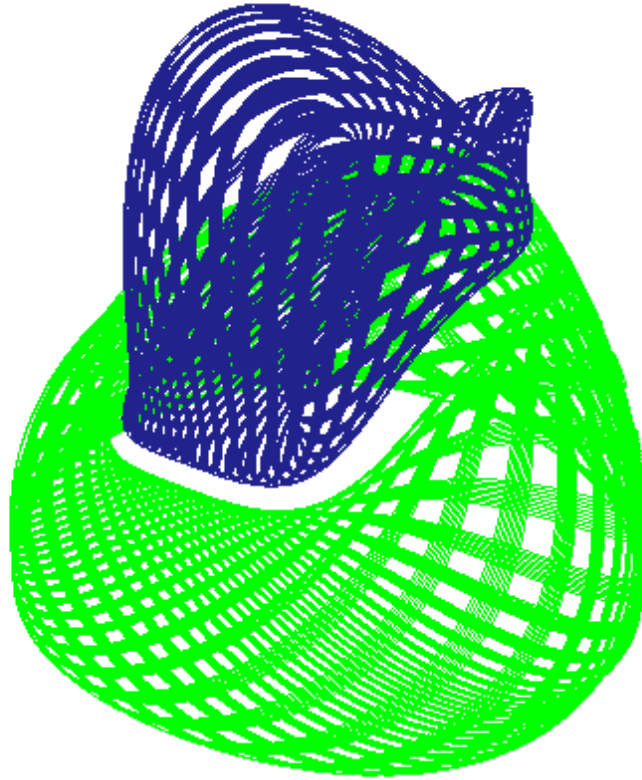


Рис. 7.6. Бифуркация двух торов Лиувилля в один при пересечении ветви бифуркационной диаграммы Σ , изображенной на Рис. 7.4. Фрагмент соответствует средней точке.

ченным на Рис. 7.4, мы можем наблюдать перестройку типа B на серии изображений, представленных на Рис. 7.5,7.6,7.7.

Действуя аналогично, мы можем наглядно увидеть бифуркацию типа C_2 , при которой два тора перестраиваются в два. Для этого сначала приведем увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы в окрестности ветви, при пересечении которой наблюдается перестройка нужного нам типа. Отметим точки,

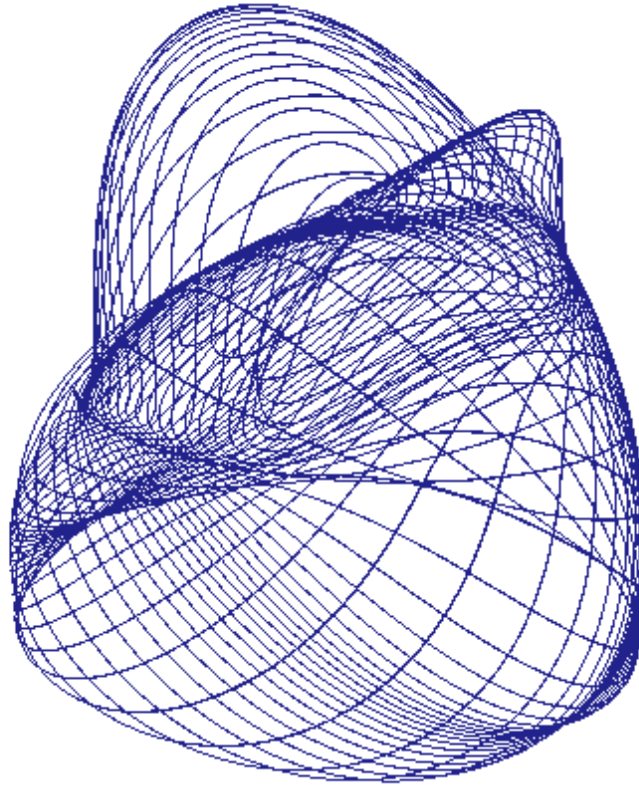


Рис. 7.7. Бифуркация двух торов Лиувилля в один при пересечении ветви бифуркационной диаграммы Σ , изображенной на Рис. 7.4. Фрагмент соответствует нижней точке.

в прообразе отображения момента которых будем строить торы.

Далее получим торы, при значениях постоянных интегралов, соответствующих точкам, отмеченным на Рис. 7.8. В результате мы можем наблюдать перестройку типа C_2 на серии изображений, представленных на Рис. 7.9,7.10.

Стоит отметить, что помимо наглядности представления результатов исследования перестроек торов Лиувилля, изложенный выше алгоритм обладает

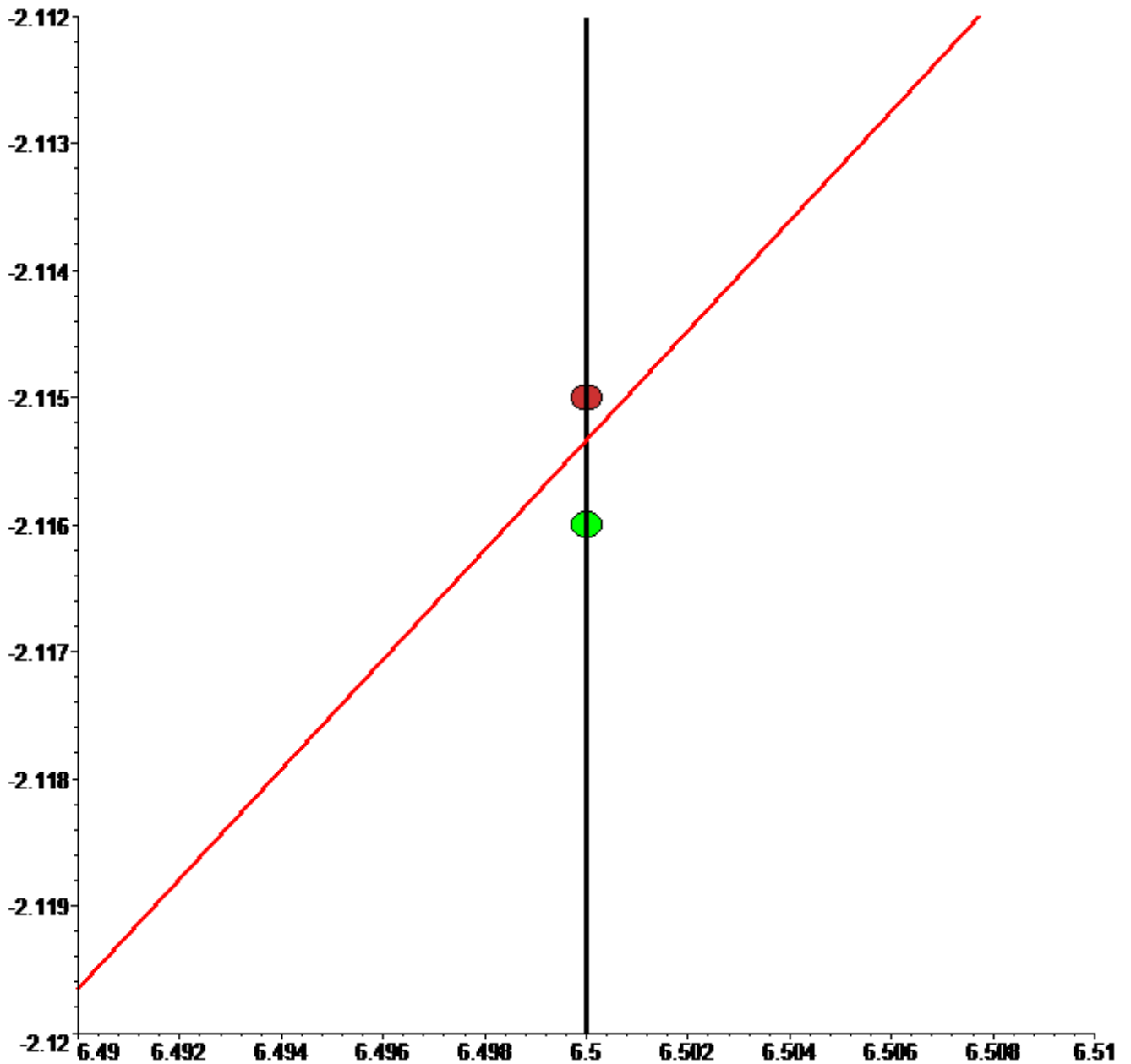


Рис. 7.8. Фрагмент бифуркационной диаграммы Σ , изображенной на Рис. 7.3.

одним неоспоримым достоинством. В случае сложного строения совместной поверхности уровня первых интегралов, как в рассматриваемой проблеме с дополнительным интегралом четвертой степени, вышеуказанная методика позволяет в отсутствие явных аналитических выражений для параметризации инвариантных торов (как в ситуации разделенных переменных), получить информацию о строении торов и, главное, об их количестве, что дополняет классические методы исследования фазовой топологии. Обладая методом, позволяющим по

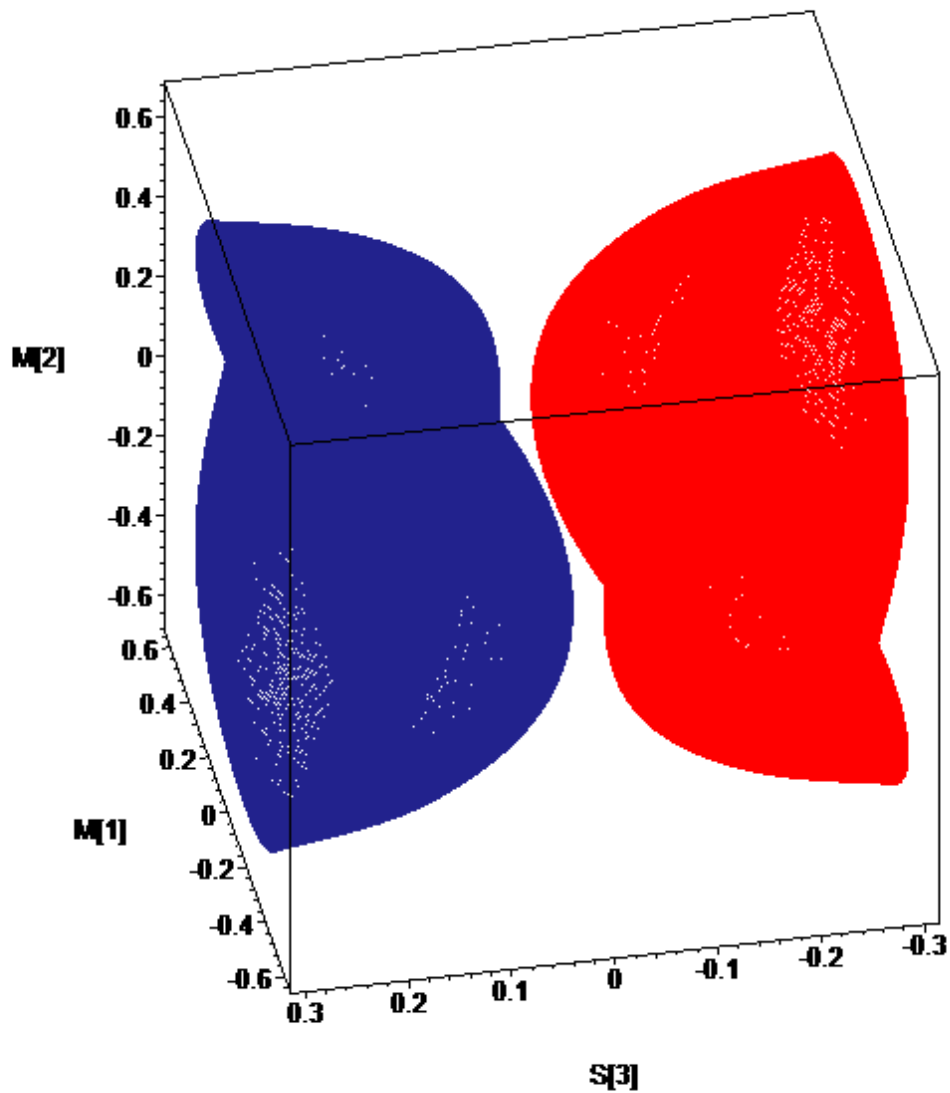


Рис. 7.9. Бифуркация двух торов Лиувилля в два при пересечении ветви бифуркационной диаграммы Σ , изображенной на Рис. 7.8. Фрагмент соответствует верхней точке.

координатам точки внутри каждой камеры бифуркационной диаграммы (т.е. фактически по значениям констант первых интегралов) дать ответ на вопрос о количестве компонент связности инвариантных многообразий в прообразе отображения момента, мы получаем возможность дополнительной верификации типов бифуркаций торов Лиувилля в системе при пересечении той или иной ветви бифуркационной диаграммы.

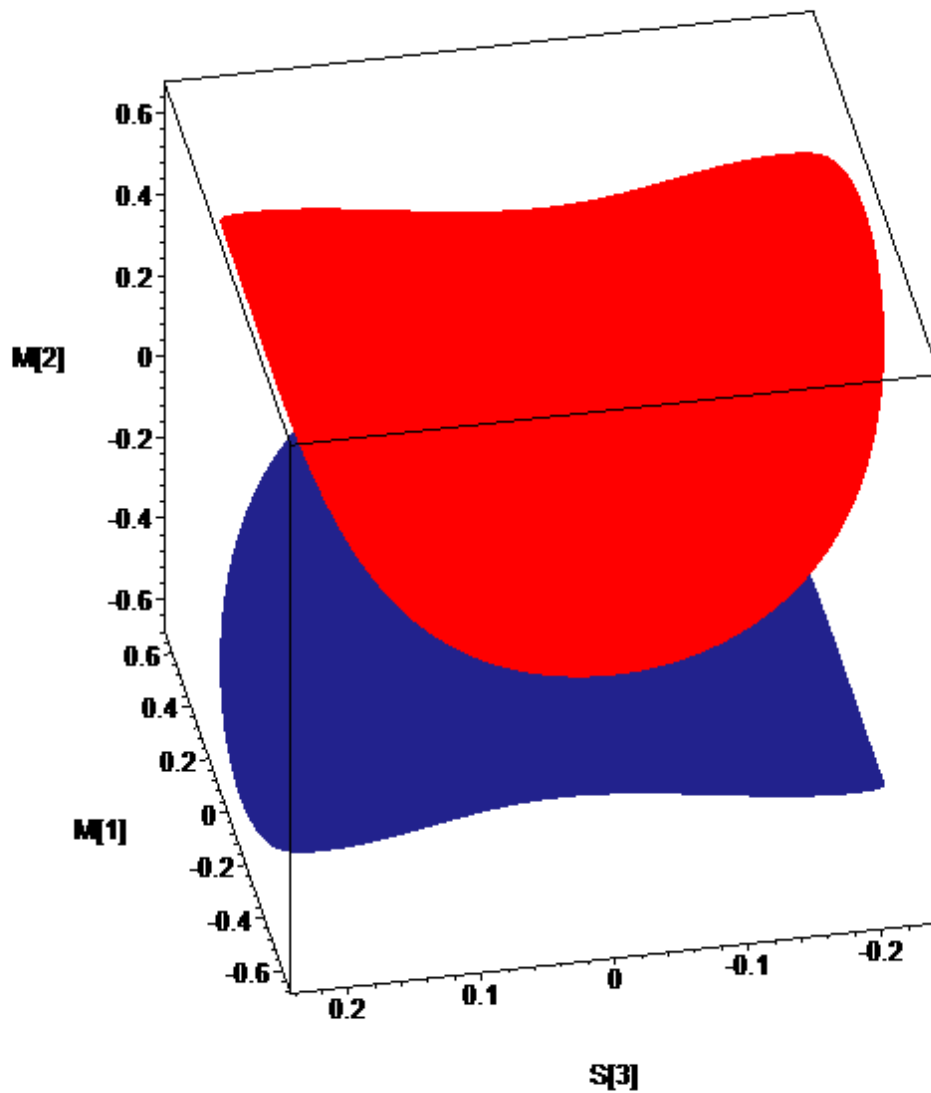


Рис. 7.10. Бифуркация двух торов Лиувилля в два при пересечении ветви бифуркационной диаграммы Σ , изображенной на Рис. 7.8. Фрагмент соответствует нижней точке.

В настоящем разделе представлен алгоритм построения связных компонент инвариантных многообразий интегрируемой гамильтоновой системы Адлера–ван Мербеке для заданных значений констант первых интегралов и функций Казимира. С помощью этого метода для бифуркационной диаграммы, приведенной в [27], проиллюстрированы перестройки торов Лиувилля при пересечении ветвей бифуркационной диаграммы.

7.4. Краткие итоги главы 7

В заключении еще раз перечислим основные полученные в данной главе результаты. Прежде всего необходимо отметить, что представлена в явном виде спектральная кривая, коэффициенты которой являются первыми интегралами рассматриваемого интегрируемого случая Адлера – ван Мёрбеке. Дискриминантное множество спектральной кривой является объединением поверхностей кратных корней двух многочленов. Получено параметрическое представление вещественной части дискриминантного множества. Получены строгие доказательства для выражений, определяющих критические точки ранга 0. Мы показали, что образы критических точек ранга 0 при отображении момента содержатся во множестве точек самопересечения кривых, образующих дискриминантное множество. Построена бифуркационная диаграмма отображения момента интегрируемого случая Адлера – ван Мёрбеке.

Полученные результаты позволяют утверждать, что интегрируемый случай Адлера – ван Мёрбеке отличается от других известных случаев интегрируемости на алгебре Ли $so(4)$ с топологической точки зрения. Это следует не только из вида бифуркационной диаграммы, но и из полученных выражений, определяющих критические точки ранга 0. Действительно, топологический анализ случаев интегрируемости Стеклова, Манакова, Борисова – Мамаева – Соколова, Соколова – Цыганова (см. [189, 219, 220] и [208], соответственно) показывает, что в перечисленных случаях мы имеем также критические точки ранга 0 типа фокус–фокус или различное число критических точек ранга 0 на симплектических листах $\mathcal{P}_{a,b}^4$.

Представлена одна из возможных механических интерпретаций уравнений этой задачи. Рассматриваются условия, которым должны удовлетворять параметры системы, чтобы данная механическая модель возникала. Указана связь интегрируемого случая Адлера – ван Мёрбеке с другими классическими механическими системами.

Изложен алгоритм построения связных компонент инвариантных многообразий интегрируемой гамильтоновой системы Адлера–ван Мербеке для заданных значений констант первых интегралов и функций Казимира. С помощью этого метода для бифуркационной диаграммы, приведенной в [27], проиллюстрированы перестройки торов Лиувилля при пересечении ветвей бифуркационной диаграммы. Наиболее очевидным применением изложенного алгоритма построения связных компонент инвариантных многообразий является верификация количества торов Лиувилля в прообразе произвольной точки камеры бифуркационной диаграммы отображения момента.

Заключение

В заключении необходимо отметить тот факт, что методы топологического и качественного исследования динамических систем, развитые в задачах динамики твердых тел в идеальной жидкости в присутствии вихревых структур, а также в задачах динамики твердого тела, содержащего полости, заполненные идеальной жидкостью, совершающей вихревое движение, несомненно найдут еще более широкое применение в современных задачах, связанных с анализом динамических свойств вихрей в сильнокоррелированных системах, таких, например, как бозе-эйнштейновский конденсат, объекты современной физики конденсированного состояния, а также задачах вихревой динамики атмосферы и океана. Перечислим также основные результаты, изложенные в диссертации.

Положения, выносимые на защиту:

- Изложены строго обоснованные результаты по качественному и топологическому анализу интегрируемого случая двух прямолинейных вихревых нитей в идеальной жидкости, внутри круговой цилиндрической области для произвольного соотношения интенсивностей вихрей: получено однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтонианов, которое содержит в виде частных случаев системы в классической идеальной жидкости и в бозе-эйнштейновском конденсате; представлена полная классификация бифуркаций торов Лиувилля, возникающих в особых периодических движения (критических точках ранга 1 отображения момента); найдены все разделяющие значения отношения интенсивностей вихрей при классификации бифуркационных диаграмм; обоснованы результаты об устойчивости периодических решений, полученные при помощи построенных бифуркационных комплексов; приведено полное описание динамики системы в окрестности особых (критических) периодических траекторий; обнаружены новые динамические эффекты в абсолютной динамике вихрей.

- Приведены строгие результаты по качественному и топологическому анализу интегрируемого случая движения кругового цилиндра, взаимодействующего с вихревой нитью, в идеальной жидкости при отличной от нуля циркуляции в отсутствие поля тяжести: построены бифуркационные диаграммы отображения момента и бифуркационные комплексы в случае компактности интегрального многообразия и различной топологии симплектического листа; дана классификация всех возможных особых периодических движений, соответствующих бифуркационным кривым, и определена их устойчивость с помощью построенных бифуркационных комплексов.
- В задаче о движении кругового цилиндра, взаимодействующего с N точечными вихрями, в идеальной жидкости с отличной от нуля циркуляцией под действием силы тяжести получены строго обоснованные результаты: уравнения движения в гамильтоновой форме с нелинейной скобкой Пуассона; первые интегралы, с помощью которых проведена редукция системы; частные решения, которые позволяют указать возможные типы движений системы; относительные равновесия и исследована их устойчивость; показано, что система уже при $N = 1$ является неинтегрируемой, что подтверждается появлением стохастического слоя на сечении Пуанкаре редуцированной системы; при $N = 2$ доказано, что система не может обладать решениями аналогичными конфигурации Фёппля, рассмотрена ограниченная задача, для исходной системы рассмотрена процедура регуляризации и асимптотическая система, указаны возможные типы движений, продемонстрировано, что в большинстве случаев взаимодействие вихревой пары и цилиндра носит характер рассеяния; в случае $N = 1$ и нулевой циркуляции построены различные типы функций рассеяния вихря на цилиндре, вид которых свидетельствует о хаотическом характере рассеяния и, следовательно, об отсутствии интегрируемости.

- Для обобщенного двухполевого гиростата (случай интегрируемости Соколова–Цыганова) найдены особые периодические движения, при которых ранг отображения момента равен 1. Для таких движений все фазовые переменные могут быть выражены как алгебраические функции от единственной вспомогательной переменной и набора констант. Для этой вспомогательной переменной получены дифференциальные уравнения, которые могут быть проинтегрированы в эллиптических функциях времени. Показано, что соответствующие точки в трехмерном пространстве констант интегралов движения принадлежат пересечению двух листов дискриминантных поверхностей спектральной кривой, ассоциированной с соответствующей парой Лакса. Получены явные выражения характеристических показателей для определения типа найденных особых периодических движений по Вильямсону. Получены новые инвариантные соотношения для одной критической подсистемы обобщенного двухполевого гиростата, определяющие четырехмерное инвариантное многообразие. Определен тип движений системы с тремя степенями свободы на этом инвариантном многообразии. Для волчка Ковалевской в неевклидовом пространстве найдены уравнения Абеля–Якоби и приведены разделяющиеся переменные на плоскости.
- Для интегрируемого случая Адлера – ван Мёрбеке на алгебре Ли $so(4)$ получены строго обоснованные результаты: аналитически исследована фазовая топологии рассматриваемого случая; представлена в явном виде спектральная кривая, коэффициенты которой являются первыми интегралами рассматриваемого интегрируемого случая; таким образом получено новое представление первого интеграла; получено дискриминантное множество спектральной кривой, как объединение поверхностей кратных корней двух многочленов; найдены критические точки ранга 0, образы которых содержатся во множестве точек самопересечения дискриминантных кри-

вых; построена бифуркационная диаграмма отображения момента; вид бифуркационной диаграммы и структура особенностей ранга 0 случая Адлера – ван Мёрбеке показывает, что он топологически неэквивалентен другим интегрируемым случаям на алгебре Ли $so(4)$; приведена возможная механическая интерпретация данного случая; алгоритм построения связанных компонент инвариантных многообразий системы Адлера–ван Мёрбеке для заданных значений констант первых интегралов и функций Казимира, с помощью которого визуализированы перестройки торов Лиувилля при пересечении ветвей бифуркационной диаграммы.

Список литературы

1. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. — Москва : Изд-во МГУ, 1980.
2. *Bolsinov A. V., Fomenko A. T.* Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification. — Chapman & Hall/CRC, 2004. — P. 730.
3. *Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С.* Топология и устойчивость интегрируемых систем // *УМН*. — 2010. — Т. 65, № 2(392). — С. 71–132.
4. *Москвин А. Ю.* Шар Чаплыгина с гиростатом: особые решения // *Нелинейная динамика*. — 2009. — Т. 5, № 3. — С. 345–356.
5. *Kamchatnov A. M. and Sokolov V. V.* Nonlinear waves in two-component bose-einstein condensates: Manakov system and kowalevski equations // *Phys. Rev. A*. — 2015. — Vol. 91. — P. 043621–0436211.
6. *Иртегов В. Д.* Об устойчивости маятниковых колебаний гироскопа С.В. Ковалевской // *Тр. Казан. авиац. ин-та*. — 1968. — № 97. — С. 38–40.
7. *Брюм А. З.* Исследование орбитальной устойчивости при помощи первых интегралов // *ПММ*. — 1989. — Т. 53, № 6. — С. 873–879.
8. *Маркеев А. П.* Об ограниченности траекторий в окрестности орбитально неустойчивого периодического движения гамильтоновой системы // *ПММ*. — 2002. — Т. 66, № 1. — С. 24–32.
9. *Маркеев А. П.* Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // *ПММ*. — 2001. — Т. 65, № 1. — С. 51–58.
10. *Маркеев А. П., Медведев С. В., Чеховская Т. Н.* К задаче об устойчивости маятниковых движений твердого тела в случае Ковалевской // *Изв. РАН. МТТ*. — 2003. — № 1. — С. 3–9.
11. *Маркеев А. П.* О маятникообразных движениях твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // *ПММ*. — 2004. — Т. 68, № 2. — С. 282–293.
12. *Карапетян А. В.* Инвариантные множества в задаче Горячева–Чаплыгина: существование, устойчивость, ветвление // *ПММ*. — 2006. — № 2. —

- С. 221–224.
13. Маркеев А. П. О плоских и близких к плоским вращениях тяжёлого твёрдого тела вокруг неподвижной точки // *Изв. АН СССР МТТ.* — 1988. — № 4. — С. 29–36.
 14. Маркеев А. П. О движении твёрдого тела с одной неподвижной точкой в случае Стеклова // *Изв. РАН. МТТ.* — 2005. — № 1. — С. 20–33.
 15. Бардин Б. С. К задаче об устойчивости маятникообразных движений твёрдого тела в случае Горячева–Чаплыгина // *Изв. РАН. МТТ.* — 2007. — № 2. — С. 14–21.
 16. Бардин Б. С. Об орбитальной устойчивости маятникообразных движений твёрдого тела в случае Бобылева–Стеклова // *Нелинейная динамика.* — 2009. — Т. 5, № 4. — С. 535–550.
 17. Бардин Б. С. Савин А. А. Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений симметричного твёрдого тела с неподвижной точкой // *Нелинейная динамика.* — 2012. — Т. 8, № 2. — С. 249–266.
 18. Соколов С. В., Рамоданов С. М. Движение кругового цилиндрического твёрдого тела, взаимодействующего с точечным вихрем, в поле силы тяжести // *Нелинейная динамика.* — 2012. — Т. 8, № 3. — С. 617–628.
 19. Sokolov S. V., Ramodanov S. M. Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with a point vortex // *Regular and Chaotic Dynamics.* — 2013. — Vol. 18, no. 1–2. — P. 184–193.
 20. Sokolov S. V. Falling motion of a circular cylinder interacting dynamically with N point vortices // *Nonlinear Dynamics and Mobile Robotics.* — 2013. — Vol. 1, no. 2. — P. 193–207.
 21. Соколов С. В. Движение кругового цилиндрического твёрдого тела, взаимодействующего с N точечными вихрями, в поле силы тяжести // *Нелинейная динамика.* — 2014. — Т. 10, № 1. — С. 59–72.
 22. Соколов С. В. Движение кругового цилиндра, взаимодействующего с вихревой парой, в поле силы тяжести в идеальной жидкости // *Вестн. Уд-*

- муртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.* — 2014. — № 2. — С. 86–99.
23. Соколов С. В., Кольцов И. С. Хаотическое рассеяние точечного вихря круговым цилиндром, движущимся в поле силы тяжести // *Доклады Академии наук.* — 2015. — Т. 465, № 2. — С. 174–177.
 24. Соколов С. В., Кольцов И. С. Хаотическое рассеяние точечного вихря круговым цилиндрическим твердым телом, движущимся в поле тяжести // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.* — 2015. — Т. 25, № 2. — С. 184–196.
 25. Соколов С. В. К вопросу о движении в идеальной жидкости кругового цилиндра и вихревой пары в поле тяжести // *Доклады Академии наук.* — 2016. — Т. 470, № 4. — С. 393–396.
 26. Борисов А. В., Рябов П. Е., Соколов С. В. Бифуркационный анализ задачи о движении цилиндра и точечного вихря в идеальной жидкости // *Матем. заметки.* — 2016. — Т. 99, № 6. — С. 848–854.
 27. Ryabov P. E., Oshemkov A. A., Sokolov S. V. The integrable case of Adler – van Moerbeke. Discriminant set and bifurcation diagram // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2016. — Vol. 21, no. 5. — P. 581–592.
 28. Соколов С. В. Интегрируемый случай М. Адлера и П. ван Мёрбеке. Механическая интерпретация. // *Тр. МАИ.* — 2017. — № 95.
 29. Соколов С. В. Интегрируемый случай Адлера–ван Мёрбеке. Визуализация бифуркаций торов Лиувилля // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.* — 2017. — Т. 27, № 3. — С. 532–540.
 30. Соколов С. В. Новые инвариантные соотношения одной критической подсистемы обобщенного двухполевого гиростата // *Доклады Академии наук.* — 2017. — Т. 477, № 6. — С. 660–663.
 31. Sokolov S. V., Ryabov P. E. Bifurcation analysis of the dynamics of two vortices in a Bose-Einstein condensate. the case of intensities of opposite signs // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2017. — Vol. 22, no. 8. — P. 976–995.
 32. Oshemkov A. A., Ryabov P. E., Sokolov S. V. Explicit determination of cer-

- tain periodic motions of a generalized two-field gyrostat // *Russian Journal of Mathematical Physics*. — 2017. — Vol. 24, no. 4. — P. 526–534.
33. *Соколов С. В.* Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных // *Тр. МАИ*. — 2018. — № 100.
 34. *Соколов С. В., Рябов П. Е.* Бифуркационная диаграмма системы двух вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате, имеющих интенсивности одинаковых знаков // *Доклады Академии наук*. — 2018. — Т. 480, № 6. — С. 652–656.
 35. *Пуанкаре А.* Избранные труды. В 3 т. — Москва : Наука, 1971.
 36. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.–Л. : ГТТИ, 1947.
 37. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. — Ижевск : Издательский дом "Удмуртский университет", 1999.
 38. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — Москва : Физматгиз, 1959.
 39. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения; работы по аналитической механике. — Москва : Изд-во АН СССР, 1962.
 40. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.–Л. : Гостехиздат, 1949.
 41. *Зигель К. Л.* Лекции по небесной механике. — Москва : Изд-во иностр. лит., 1959.
 42. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — Москва : Наука, 1966. — С. 532.
 43. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. — М.–Л. : Изд-во АН СССР, 1956.
 44. *Маркеев А. П.* Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите // *Космич. исслед.* — 1975. — Т. 13, № 3. — С. 322–336.
 45. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — Москва : Наука, 1979.
 46. *Джакальья Г. Е.* Методы возмущений для нелинейных систем. — Москва :

- Наука, 1979.
47. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — Москва : Гостехиздат, 1956.
 48. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — Москва : Наука, 1981.
 49. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. — Москва : Наука, 1974.
 50. *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. — Москва : Мир, 1984.
 51. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // *ДАН СССР*. — 1954. — Т. 98, № 4. — С. 527–530.
 52. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // *УМН*. — 1963. — Т. 18, № 5(113). — С. 13–40.
 53. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // *Успехи мат. наук*. — 1963. — Т. 18, № 6. — С. 91–192.
 54. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. — Москва : Мир, 1973.
 55. *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. — Ижевск : Изд-во Удмуртского университета, 1995. — С. 432.
 56. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Современные методы теории интегрируемых систем. — Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. — С. 296.
 57. *Smale S.* Topology and mechanics // *Inventiones Math.* — 1970. — Vol. 10, no. 4. — P. 305–331.
 58. *Харламов М. П.* Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. — Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1988.
 59. *Болсинов А. В., Рихтер П., Фоменко А. Т.* Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // *Математический сборник*. — 2000. — Т.

- 191, № 2. — С. 3–42.
60. Комаров И. В. Базис Ковалевской для атома водорода // *Теоретическая и математическая физика*. — 1981. — Т. 47, № 1. — С. 67–72.
61. Komarov I. V., Kuznetsov V. B. Kowalewski's top on the lie algebras $o(4)$, $e(3)$ and $o(3,1)$ // *J. Phys. A: Math. & Gen.* — 1990. — Vol. 23. — P. 841–846.
62. Yehia H. M. New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // *Mechanics Research Communications*. — 1986. — Vol. 13, no. 3. — P. 173–180.
63. Sokolov V. V. A generalized Kowalewski hamiltonian and new integrable cases on $e(3)$ and $so(4)$ // In "Kowalevski property", ed. V.B. Kuznetsov, CRM Proceedings and Lect. Notes, AMS. — 2002. — P. 304–315.
64. Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколов В. В. Новый интегрируемый случай на $so(4)$ // *Доклады Академии Наук*. — 2001. — Т. 381, № 5. — С. 614–615.
65. Борисов А. В., Мамаев И. С. Нелинейные скобки Пуассона и изоморфизмы в динамике // *Регулярная и хаотическая динамика*. — 1997. — Т. 2, № 3–4. — С. 72–89.
66. Bogoyavlensky O. I. Euler equations on finite-dimension Lie algebras arising in physical problems // *Commun. Math. Phys.* — 1984. — Vol. 95, no. 3. — P. 307–315.
67. Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A. Lax representation with a spectral parameter for the Kowalewski top and its generalizations // *Lett. Math. Phys.* — 1987. — Vol. 14, no. 1. — P. 55–61.
68. Козлов В. В. Общая теория вихрей. — Ижевск : Изд-во Удмуртского университета, 1998. — С. 238.
69. Гельмгольц Г. Основы вихревой теории. — Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. — С. 82.
70. Kirchhoff G. R. Vorlesungen über Mathematische Physik. — Leipzig : Teubner, 1876. — Vol. I.
71. Aref H., Stremmer M. A. Four-vortex motion with zero total circulation and

- impulse // *Phys. of Fluids*. — 1999. — Vol. 11. — P. 3704.
72. Gröbli W. Speziale probleme über die bewegung geradliniger paralleler wirbelfäden // *Vierteljahrsh. d. Naturforsch. Geselsch.* — 1877. — Vol. 22. — P. 37–81.
73. Borisov A. V., Lebedev V. G. Dynamics of three vortices on a plane and a sphere – II. General compact case // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 1998. — Vol. 3, no. 2. — P. 99–114.
74. Borisov A. V., Lebedev V. G. Dynamics of three vortices on a plane and a sphere – III. Noncompact case. Problems of collaps and scattering // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 1998. — Vol. 3, no. 4. — P. 74–86.
75. Kidambi R., Newton P. K. Motion of three point vortices on a sphere // *Physica D*. — 1998. — Vol. 116. — P. 143–175.
76. Kidambi R., Newton P. K. Collision of three vortices on a sphere // *Il Nuovo Cimento*. — 1999. — Vol. 22, no. C(6). — P. 779–791.
77. Богомолов В. А. Модель колебаний центров действия атмосферы // *Физика атмосферы и океана*. — 1979. — Т. 15, № 3. — С. 243–249.
78. Borisov A. V., Kilin A. A. Stability of Thomson’s configurations of vortices on a sphere // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2000. — Vol. 5, no. 2. — P. 189–200.
79. Куракин Л. Г. О нелинейной устойчивости правильных вихревых многоугольников и многогранников на сфере // *ДАН*. — 2003. — Т. 388, № 4. — С. 482–487.
80. Борисов А. В., Мамаев И. С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. — Москва–Ижевск : РХД, 1999.
81. Aref H., Newton P. K., Stremmer M. A., Tokieda T., Vainchtein D. L. Vortex crystals // *Adv. Appl. Mech.* — 2003. — Vol. 29. — P. 1–79.
82. Зиглин С. Л. Неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей // *ДАН СССР*. — 1979. — Т. 250, № 6. — С. 1296–1300.
83. Новиков Е. А., Седов Ю. Б. Стохастические свойства системы четырех вихрей // *ЖЭТФ*. — 1978. — Т. 75, № 3. — С. 868–876.

84. Багрец А. А., Багрец Д. А. Неинтегрируемость гамильтоновых систем вихревой динамики // *Рег. и хаот. дин.* — 1997. — Т. 2, № 1. — С. 36–43.
85. Багрец А. А., Багрец Д. А. Неинтегрируемость гамильтоновых систем вихревой динамики // *Рег. и хаот. дин.* — 1997. — Т. 2, № 2. — С. 58–65.
86. Bagrets A. A., Bagrets D. A. Nonintegrability of two problems in vortex dynamics // *Chaos.* — 1997. — Vol. 7, no. 3. — P. 368–375.
87. Khanin K. M. Quasi-periodic motions of vortex systems // *Physica D.* — 1982. — Vol. 4. — P. 261–269.
88. Lim C. C. A combinatorial perturbation method and Arnold's whiskered tori in vortex dynamics // *Physica D.* — 1993. — Vol. 64. — P. 163–184.
89. Celletti A., Falconi C. A remark on the kam theorem applied to a four-vortex system // *J. Stat. Phys.* — 1998. — Vol. 52, no. 1–2. — P. 471–477.
90. Newton P. K. The N -Vortex problem. Analytical Techniques. — Springer, 2001.
91. Сэффмэн Ф. Динамика вихрей. — Москва : Научный мир, 2000.
92. Ткаченко В. М. Устойчивость вихревых решеток // *ЖЭТФ.* — 1966. — Т. 50, № 6. — С. 1573–1585.
93. O'Neil K. A. On the hamiltonian dynamics of vortex lattices // *J. Math. Phys.* — 1989. — Vol. 30, no. 6. — P. 1373–1372.
94. Aref H., Stremmer M. A. On the motion of three point vortices in a periodic strip // *J. Fluid. Mech.* — 1996. — Vol. 314. — P. 1–25.
95. Stremmer M. A., Aref H. Motion of three point vortices in a periodic parallelogram // *J. Fluid. Mech.* — 1999. — Vol. 392. — P. 101–128.
96. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. — М : Гостехиздат, 1955.
97. Lamb H. Hydrodynamics, 6th ed. — New York : Dover, 1945. — P. 768.
98. von Karman T. Über den mechanismus des widerstands, den ein bewegter körper in einer flüssigkeit erfährt // *Göttingen Nach. Math. Phys.* — 1911. — Vol. K1. — P. 509–519.

99. Фридман А.А., Полубаринова П.Я. О перемещающихся особенностях плоского движения несжимаемой жидкости // *Геофизический сборник*. — 1928. — С. 9–23.
100. Aref H. Chaos in the dynamics of a few vortices – fundamentals and applications // *Proceedings of the Sixteenth IUTAM Congress. (invited lecture) Denmark, August 19-25, 1984*. — 1985. — P. 43–68.
101. Weiss C. C., McWilliams J. C. Nonergodicity of point vortices // *Phys. Fluids. A*. — 1991. — Vol. 3, no. 5. — P. 835–844.
102. Routh E. J. Some application of conjugate function // *Proc. Lond. Math. Soc.* — 1881. — Vol. 12, no. 170/171. — P. 73–89.
103. Greenhill A. G. Plane vortex motion // *Quart. J. Pure Appl. Math.* — 1877/78. — Vol. 15, no. 58. — P. 10–27.
104. Жуковский Н.Е. О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси. Статья первая // *Собр. соч.: В 7 тт. М.-Л.: Глав. ред. авиац. лит.* — 1937. — Т. 5. — С. 72–80.
105. Жуковский Н.Е. О парении птиц // *Полн. собр. соч. М.-Л.,: Глав. ред. авиац. лит.* — 1937. — Т. 5. — С. 7–35.
106. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — Москва : Наука, 1986.
107. Чаплыгин С. А. О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло // *Полн. собр. соч., Изв. АН СССР*. — 1933. — Т. 3. — С. 3–64.
108. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых твердых тел в несжимаемой жидкости // *Полн. собр. соч., Изв. АН СССР*. — 1933. — Т. 1. — С. 133–150.
109. Козлов В. В. О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ.* — 1989. — № 5. — С. 10–17.
110. Козлов В.В. О падении тяжелого цилиндрического твердого тела в жидкости // *Изв. РАН. МТТ*. — 1993. — № 4. — С. 113–117.
111. Рамоданов С.М. К пространственной задаче о движении твердого тела

- в жидкости под действием следящей силы // *Изв. АН СССР, МТТ.* — 1995. — № 5.
112. *Рамоданов С.М.* Асимптотика решений уравнения Чаплыгина // *Вестник МГУ, сер. матем. мех.* — 1995. — Т. 1, № 3.
113. *Borisov A. V., Kozlov V. V., Mamaev I. S.* Asymptotic stability and associated problems of dynamics of falling rigid body // *Regular and Chaotic Dynamics.* — 2007. — Vol. 12, no. 5. — P. 531–565.
114. *Рамоданов С.М.* К задаче о движении двух массовых вихрей в идеальной жидкости // *Нелинейная Динамика.* — 2006. — Т. 2, № 3. — С. 435–443.
115. *Vjerknæs V.* Fields of force The N -Vortex problem. Analytical Techniques. — N. Y., Columbia Univ. Press, 1906.
116. *Жуковский Н.Е.* Обобщение задачи Бьеркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы // *Труды Отд. физ. наук Общ-ва любителей естествознания.* — 1896. — Т. VIII, № 2.
117. *Ramodanov S. M.* Motion of a circular cylinder and N point vortices in a perfect fluid // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2002. — Vol. 7, no. 3. — P. 291–298.
118. *Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M.* Dynamics of a circular cylinder interacting with point vortices // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.* — 2005. — Vol. 5, no. 1. — P. 35–50.
119. *Ramodanov S. M.* Motion of two circular cylinders in a perfect fluid // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2003. — Vol. 8, no. 3. — P. 313–318.
120. *Shashikanth B. N., Marsden J. E., Burdick J. W., Kelly S. D.* The hamiltonian structure of a 2D rigid circular cylinder interacting dynamically with N point vortices // *Phys. of Fluids.* — 2002. — Vol. 14. — P. 1214–1227.
121. *Kadtke J. B., Novikov E. A.* Chaotic capture of vortices by a moving body. I. The single point vortex case // *Chaos.* — 1993. — Vol. 3, no. 4. — P. 543–553.
122. *Luithardt H. H., Kadtke J. B., Pedrizzetti G.* Chaotic capture of vortices by a moving body. II. Bound pair model // *Chaos.* — 1994. — Vol. 4, no. 4. —

- P. 681–691.
123. *Novikov E. A.* Chaotic vortex–body interaction // *Phys. Lett. A.* — 1991. — Vol. 152, no. 8. — P. 393–396.
 124. *Kanso E., Oskouei B. G.* Stability of a coupled body–vortex system // *J. Fluid Mech.* — 2008. — Vol. 600. — P. 77–94.
 125. *Torres P. J., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J., Carretero-Gonzalez R., Schmelcher P., Hall D. S.* Dynamics of vortex dipoles in confined Bose–Einstein condensates // *Phys. Lett. A.* — 2011. — Vol. 375, no. 33. — P. 3044–3050.
 126. *Pitaevskii L., Stringari S.* Bose-Einstein Condensation. — NY : Oxf. Univ. Press, 2003.
 127. *Fetter A. L., Svidzinsky A. A.* Vortices in a trapped dilute Bose-Einstein condensate // *J.Phys.: Condens. Matter.* — 2001. — Vol. 13, no. 12. — P. R135–R194.
 128. *Fetter A. L.* Rotating trapped Bose-Einstein condensates // *Rev. Mod. Phys.* — 2009. — no. 81. — P. 647.
 129. *Middelkamp S., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J., Carretero-Gonzalez R., Schmelcher P.* Bifurcations, stability, and dynamics of multiple matter-wave vortex states // *Phys. Rev. A.* — 2010. — Vol. 82. — P. 013646.
 130. *Murray A. V., Groszek A. J., Kuopanportti P., Simula T.* Hamiltonian dynamics of two same-sign point vortices // *Phys. Rev. A.* — 2016. — Vol. 93, no. 3. — P. 033649.
 131. *Freillich D. V., Bianchi D. M., Kaufman A. M., Langin T. K., Hall D. S.* Real-time dynamics of single vortex lines and vortex dipoles in a Bose-Einstein condensate // *Science.* — 2010. — Vol. 329. — P. 011603.
 132. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Математические методы динамики вихревых структур. — Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2005. — С. 368.
 133. *Lin C. C.* On the motion of vortices in two dimensions – I and II // *Proc*

- Natl Acad Sci USA.* — 1941. — Vol. 27, no. 12. — P. 570–577.
134. *Borisov A. V., Mamaev I. S.* An integrability of the problem on motion of cylinder and vortex in the ideal fluid // *Regular and Chaotic Dynamics.* — 2003. — Vol. 8, no. 2. — P. 163–166.
135. *Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M.* Dynamic interaction of point vortices and a two-dimensional cylinder // *Journal of Mathematical Physics.* — 2007. — Vol. 48, no. 6. — P. 065403.
136. *Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M.* Motion of a circular cylinder and N point vortices in a perfect fluid // *Regular and Chaotic Dynamics.* — 2003. — Vol. 8, no. 4. — P. 449–462.
137. *Харламов М. П.* Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. — Ленинград : Изд. ЛГУ, 1988.
138. *Borisov A. V., Mamaev I. S.* Topological analysis of an integrable system related to the rolling of a ball on a sphere // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2013. — Vol. 18, no. 4. — P. 356–371.
139. *Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S.* Generalized Chaplygin's transformation and explicit integration of a system with a spherical support // *Regular and Chaotic Dynamics.* — 2012. — Vol. 17, no. 2. — P. 170–190.
140. *Borisov A. V., Mamaev I. S.* Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // *Rus. J. Math. Phys.* — 2016. — Vol. 23, no. 4. — P. 431–454.
141. *Borisov A. V., Fedorov Y. N., Mamaev I. S.* Chaplygin ball over a fixed sphere: An explicit integration // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2008. — Vol. 13, no. 6. — P. 557–571.
142. *Килин А.А., Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика точечных вихрей внутри и вне круговой области // *В сб.: Борисов А.В., Мамаев И.С., Соколовский М. А. (ред.), Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей.* — 2003. — С. 414–448.
143. *Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S.* The dynamics of three vortex sources, regular and chaotic dynamics // *Regular and Chaotic Dynamics.* —

2014. — Vol. 19, no. 6. — P. 694–701.
144. *Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S.* The dynamics of vortex sources in a deformation flow // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2016. — Vol. 21, no. 3. — P. 367–376.
145. *Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S.* Topology and stability of integrable systems // *Russian Math. Surveys*. — 2010. — Vol. 65, no. 2. — P. 259–318.
146. Topology and bifurcations in nonholonomic mechanics / I. A. Bizyaev, A. V. Bolsinov, A. V. Borisov, I. S. Mamaev // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2015. — Vol. 25, no. 10. — P. 1530028.
147. *Kharlamov M. P.* Extensions of the applet classes for the generalized gyrost in a double force field // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2014. — Vol. 19, no. 2. — P. 226–244.
148. *Maxwell J. K.* On a particular case of descent of a heavy body in a resisting medium // *Cambridge and Dublin Math. Journ.* — 1854. — Vol. 9. — P. 145–148.
149. *Жуковский Н.Е.* О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси. Статья вторая // *Собр. соч.: В 7 тт. М.–Л.: Глав. ред. авиац. лит.* — 1937. — Т. 5. — С. 100–115.
150. *Козлов В. В.* К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ.* — 1990. — № 1. — С. 79–86.
151. *Рамоданов С. М.* О влиянии циркуляции на характер падения тяжелого твердого тела в жидкости // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ.* — 1996. — № 5. — С. 19–24.
152. *Ramodanov S. M.* Motion of a circular cylinder and a vortex in an ideal fluid // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2001. — Vol. 6, no. 1. — P. 33–38.
153. *Jones M. A., Shelly M. J.* Falling cards // *J. Fluid Mech.* — 2005. — Vol. 540. — P. 393–425.

154. *Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M.* Coupled motion of a rigid body and point vortices on a two-dimensional spherical surface // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2010. — Vol. 15, no. 4–5. — P. 440–461.
155. *Бизяев И. А., Козлов В. В.* Однородные системы с квадратичными интегралами, квазискобки Ли-Пуассона и метод Ковалевской // *Математический сборник*. — 2015. — Т. 206, № 12. — С. 29–54.
156. *Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S.* Lie algebras in vortex dynamics and celestial mechanics - IV // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 1999. — Vol. 4, no. 1. — P. 23–50.
157. *Нехорошев Н. Н.* Переменные действие-угол и их обобщения // *Труды Моск. мат. об-ва*. — 1972. — Т. 26. — С. 181–198.
158. *Waalkens H., Dullin H. R., Richter H.* The problem of two fixed centers: Bifurcations, actions, monodromy // *Phys. D*. — 2004. — Vol. 196, no. 3–4. — P. 265–310.
159. *Ryabov P. E.* Bifurcation sets in an integrable problem on motion of a rigid body in fluid // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 1999. — Vol. 4, no. 4. — P. 59–76.
160. *Gavrilov L.* Bifurcations of invariant manifolds in the generalized Henon-Heiles system // *Phys. D*. — 1989. — Vol. 34, no. 1–2. — P. 223–239.
161. *Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S.* Bifurcation analysis and the Conley index in mechanics // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2012. — Vol. 17, no. 5. — P. 451–478.
162. *Tanabe Y., Kaneko K.* Behavior of a falling paper // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 73, no. 10. — P. 1372–1375.
163. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // *Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР*. — 1933. — Т. 1. — С. 133–150.
164. *Michelin S., Smith S. G. L.* Falling cards and flapping flags: understanding fluid-solid interaction using an unsteady point vortex model // *Theor. Comput. Fluid Dyn.* — 2010. — Vol. 24. — P. 195–200.

165. *Borisov A. V., Mamaev I. S.* On the motion of a heavy rigid body in an ideal fluid with circulation // *Chaos*. — 2006. — Vol. 16, no. 1. — P. 013118.
166. *Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С.* Бифуркационный анализ и индекс Конли в механике // *Нелинейная динамика*. — 2011. — Т. 7, № 3. — С. 649–681.
167. *Föppl L.* Wirbelbewegung hinter einem kreiszylinder. *sitzungsber.* // *K. Vaëyr Akad. Wiss.* — 1913. — Vol. I.
168. *Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколовский М. А. (ред.).* Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей. — Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. — С. 704.
169. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. — Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2005. — С. 576.
170. *Манаков С. В., Щур Л. Н.* Стохастичность в двухчастичном рассеянии // *Письма в ЖЭТФ*. — 1983. — Т. 37, № 1. — С. 45–48.
171. *Tophøj L., Aref H.* Chaotic scattering of two identical point vortex pairs revisited // *Phys. of fluids*. — 2008. — Vol. 20. — P. 093605.
172. *Shashikanth B. N.* Symmetric pairs of point vortices interacting with a neutrally buoyant two-dimensional circular cylinder // *Phys. of Fluids*. — 2006. — Vol. 18. — P. 127103.
173. *Shashikanth B. N.* Poisson brackets for the dynamically interacting system of a 2D rigid cylinder and N point vortices: the case of arbitrary smooth cylinder shapes // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2005. — Vol. 10, no. 1. — P. 1–14.
174. *Kharlamov M. P.* Regions of existence of critical motions of the generalized Kowalevski top and bifurcation diagrams // *Mekh. Tverd. Tela*. — 2006. — Vol. 36. — P. 13–22.
175. *Kharlamov M. P.* Critical set and bifurcation diagram on the problem of motion of the Kowalevski top in two fields // *Mekh. Tverd. Tela*. — 2004. —

- Vol. 34. — P. 47–58.
176. *Bogoyavlensky O. I.* Two integrable cases of a rigid body dynamics in the field of force // *Dokl. Akad. Nauk USSR.* — 1984. — Vol. 275, no. 6. — P. 1359–1363.
 177. *Zotев D. B.* Fomenko—Zieschang invariant in the Bogoyavlenskyi case // *Regular and Chaotic Dynamics.* — 2000. — Vol. 5, no. 4. — P. 437–458.
 178. *Kharlamov M. P.* Special periodic solutions in the generalized Delone case // *Mekh. Tverd. Tela.* — 2006. — Vol. 36. — P. 23–33.
 179. *Ryabov P. E.* Explicit integration and the topology of the D.N.Goryachev case // *Doklady Mathematics.* — 2011. — Vol. 84, no. 1. — P. 502–505.
 180. *Sokolov V. V., Tsiganov A. V.* Lax pairs for the deformed Kowalevski and Goryachev–Chaplygin tops // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2002. — Vol. 131, no. 1. — P. 543–549.
 181. *Kharlamov M. P.* Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // *Regular and Chaotic Dynamics.* — 2005. — Vol. 10, no. 4. — P. 381–398. — 0803.0893.
 182. *Ryabov P. E.* Phase topology of one irreducible integrable problem in the dynamics of a rigid body // *Theoret. and Math. Phys.* — 2013. — Vol. 176, no. 2. — P. 1000–1015.
 183. *Bobenko A. I., Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A.* The Kowalevski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions // *Commun. Math. Phys.* — 1989. — Vol. 122, no. 2. — P. 321–354.
 184. *Kharlamov M. P.* Periodic motions of the Kowalevski gyrostat in two constant fields // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.* — 2008. — Vol. 41, no. 27. — P. 275207.
 185. *Yehia H. M.* On certain integrable motions of a rigid body acted upon by gravity and magnetic fields // *Int. J. Non-Linear Mech.* — 2001. — Vol. 36. — P. 1173–1175.
 186. *Kharlamov P. V.* One case of integrability of the equations of the motion of

- a rigid body having a fixed point // *Mekh. Tverd. Tela.* — 1971. — Vol. 3. — P. 57–64.
187. *Kharlamova E. I., Kharlamov P. V.* New solution of the differential equations of the motion of a body having a fixed point under the conditions of S.V. Kovalevskaya // *Mekh. Tverd. Tela.* — 1969. — Vol. 189, no. 5. — P. 967—968.
188. *Bezglasnyi S.* Stabilization of stationary motions of a gyrostat with a cavity filled with viscous fluid // *Russian Aeronautics (Iz VUZ).* — 2014. — Vol. 57, no. 4. — P. 333–338.
189. *Akbarzadeh R., Haghighatdoost G.* The topology of Liouville foliation for the Borisov–Mamaev–Sokolov integrable case on the Lie algebra $so(4)$ // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2015. — Vol. 20, no. 3. — P. 317–344.
190. *Akbarzadeh R.* Topological analysis corresponding to the Borisov – Mamaev–Sokolov integrable system on the Lie algebra $so(4)$ // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2016. — Vol. 21, no. 1. — P. 1–17.
191. *Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S.* Dynamics of the Chaplygin sleigh on a cylinder // *Regular and Chaotic Dynamics.* — 2016. — Vol. 21, no. 1. — P. 136–146.
192. *Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A.* The spatial problem of 2 bodies on a sphere. reduction and stochasticity // *Regular and Chaotic Dynamics.* — 2016. — Vol. 21, no. 5. — P. 556–580.
193. *Ryabov P. E.* New invariant relations for the generalized two-field gyrostat // *Journal of Geometry and Physics.* — 2015. — Vol. 87. — P. 415–421.
194. *Соколов В. В., Цыганов А. В.* Пары Лакса для деформированных волчков Ковалевской и Горячева–Чаплыгина // *ТМФ.* — 2002. — Т. 131, № 1. — С. 118–125.
195. *Рябов П. Е.* Фазовая топология одной неприводимой интегрируемой задачи динамики твердого тела // *ТМФ.* — 2013. — Т. 176, № 2. — С. 205–221.
196. *Kharlamov M. P.* Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant

- fields // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2005. — Vol. 10, no. 4. — P. 381–398.
197. *Kowalevski S.* Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // *Acta Math.* — 1889. — Vol. 12. — P. 177–232.
198. *Kötter F.* Sur le cas traité par m-me Kowalevski de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // *Acta Math.* — 1893. — Vol. 17, no. 1–2.
199. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. — Москва : Гостехиздат, 1946.
200. *Adler M., van Moerbeke P.* A new geodesic flow on $SO(4)$ // *Probability, Statistical Mechanics, and Number Theory. Adv. Math. Suppl. Stud. Orlando, Fla.: Acad. Press.* — 1986. — Vol. 9. — P. 81–96.
201. *Stekloff V. A.* Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes // *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* — 1909. — Vol. 1, no. 3. — P. 145–256.
202. *Borisov A. V., Tsygvintsev A. V.* Kowalevskaya's method in rigid body dynamics // *Appl. Math. Mech.* — 1997. — Vol. 61, no. 1. — P. 27–32.
203. *Borisov A. V., S.Mamaev I.* Adiabatic invariants, diffusion and acceleration in rigid body dynamics // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2016. — Vol. 21, no. 2. — P. 232–248.
204. *Poincaré H.* Sur la précession des corps déformables // *Bull. Astron.* — 1910. — Vol. 27. — P. 321–356.
205. *Sokolov V. V.* One class of quadratic $so(4)$ hamiltonians // *Dokl. Math.* — 2004. — Vol. 69, no. 1. — P. 108–111.
206. *Tsiganov A. V.* On integrable deformation of the Poincaré system // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2002. — Vol. 7, no. 3. — P. 331–336.
207. *Tsiganov A. V., Goremykin O. V.* Integrable systems on $so(4)$ related to XXX spin chains with boundaries // *J. Phys. A.* — 2004. — Vol. 37, no. 17. — P. 4843–4849.
208. *Haghighatdoost G., Oshemkov A. A.* The topology of Liouville foliation for

- the Sokolov integrable case on the Lie algebra $so(4)$ // *Sb. Math.* — 2009. — Vol. 200, no. 6. — P. 899–921.
209. *Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A.* A new integrable case of the motion of the 4-dimensional rigid body // *Comm. Math. Phys.* — 1986. — Vol. 105, no. 3. — P. 461–472.
210. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1978. — Т. 42, № 2. — С. 396–415.
211. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли // *Труды семинара по векторному тензорному анализу.* — 1979. — Т. 19. — С. 3–94.
212. *Болсинов А. В., Борисов А. В.* Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли // *Матем. заметки.* — 2002. — Т. 72, № 1. — С. 11–34.
213. *Bolsinov A. V., Oshemkov A. A.* Bi-hamiltonian structures and singularities of integrable systems // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2009. — Vol. 14, no. 4–5. — P. 431–454.
214. *Brailov Y. A.* Geometry of translations of invariants on semisimple Lie algebras // *Sb. Math.* — 2003. — Vol. 194, no. 11–12. — P. 1585–1598.
215. *Konyaev A. Y.* The bifurcation diagram and discriminant of a spectral curve of integrable systems on Lie algebras // *Sb. Math.* — 2010. — Vol. 201, no. 9–10. — P. 1273–1305.
216. *Bolsinov A., Izosimov A.* Singularities of bi-hamiltonian systems // *Comm. Math. Phys.* — 2014. — Vol. 331, no. 2. — P. 507–543.
217. *Izosimov A.* Singularities of integrable systems and algebraic curves // *Int. Math. Res. Notices.* — 2016. — Vol. 2016. — P. 1–50.
218. *Lerman L. M., Umanskii Y. L.* Structure of the poisson action of \mathbf{R}^2 on a four-dimensional symplectic manifold: 1 // *Selecta Math. Sov.* — 1987. — Т. 6, № 4. — С. 365–396.
219. *Khorshidi K.* The topology of an integrable hamiltonian system for the Steklov case on the Lie algebra $so(4)$ // *Moscow Univ. Math. Bull.* — 2006. —

- Vol. 61, no. 5. — P. 40–44.
220. *Oshemkov A. A.* The topology of surfaces of constant energy and bifurcation diagrams for integrable cases of the dynamics of a rigid body on $so(4)$ // *Russian Math. Surveys.* — 1987. — Vol. 42, no. 6. — P. 241–242.
221. *Рябов П. Е., Бирючева Е. О.* Дискриминантное множество и бифуркационная диаграмма интегрируемого случая М. Адлера и П. ван Мёрбеке // *Нелинейная динам.* — 2016. — Т. 12, № 4. — С. 633–650.
222. *Bardin B. S., Savin A. A.* On the orbital stability of pendulum-like oscillations and rotations of a symmetric rigid body with a fixed point // *Regular and Chaotic Dynamics.* — 2012. — Vol. 17, no. 3–4. — P. 243–257.
223. *Bardin B. S., Rudenko T. V., Savin A. A.* On the orbital stability of planar periodic motions of a rigid body in the bobylev–steklov case // *Regular and Chaotic Dynamics.* — 2012. — Vol. 17, no. 6. — P. 533–546.
224. *Greenhill A. G.* On the general motion of a liquid ellipsoid // *Proc. Cambr. Phil. Soc.* — 1980. — Vol. IV, no. 4.
225. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // *Журнал Русского физико-химического общества, ч. физическая.* — 1885. — Т. XVII, 1, № 6. — С. 81–113.
226. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — Москва : Наука, 1965.
227. *Фоменко А. Т.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения. — Москва : Изд-во МГУ, 1988. — С. 413.
228. *Adler M., van Moerbeke P., Vanhaecke P.* Algebraic Integrability, Painlevé Geometry and Lie Algebras. *Ergeb. Math. Grenzgeb.(3)*, vol. 47. — Berlin-Heidelberg : Springer, 2004.
229. *Богоявленский О. И.* Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. — Москва : Наука, Гл. ред. физ. мат. лит., 1991. — С. 320.
230. *Оден М.* Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем. — Ижевск :

Изд-во РХД, 1999.

231. *Рябов П. Е.* Алгебраические кривые и бифуркационные диаграммы двух интегрируемых задач // *Механика твердого тела.* — 2007. — № 37. — С. 97–111.