

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

на правах рукописи



**Комиссарова Татьяна Николаевна**

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ  
ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСТЕННЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель: к.т.н., профессор В.Е. Хроматов

Москва – 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
Глава 1 Основные гипотезы и уравнения колебаний ферромагнитных пластин в магнитном поле .....	9
1.1 Обзор литературных источников.....	9
1.2 Основные гипотезы и допущения о взаимодействии магнитного поля с деформируемыми ферромагнитными телами.....	16
1.3 Колебания пластин в магнитном поле.....	18
1.4 Основные положения асимптотического метода В.В Болотина .....	24
Глава 2 Исследование колебаний ферромагнитных пластин в поперечном магнитном поле .....	26
2.1 Построение решений типа динамических краевых эффектов для жестко заземленного края пластины в поперечном магнитном поле .....	26
2.2 Построение решений типа динамических краевых эффектов для свободного края пластины в поперечном магнитном поле.....	31
2.3 Построение решений для частот колебаний пластин с различными условиями закрепления краев в поперечном магнитном поле.....	34
2.4 Численный анализ влияния поперечного магнитного поля на частоты и формы колебаний пластин с различными граничными условиями.....	36
Глава 3 Исследование колебаний пластин в продольном магнитном поле .....	45
3.1 Построение решений типа динамических краевых эффектов для жестко заземленного края пластины в продольном магнитном поле .....	45
3.2 Построение решений типа динамических краевых эффектов свободного края пластины в продольном магнитном поле .....	48
3.3 Построение решений для частот колебаний пластин с различными условиями закрепления краев в продольном магнитном поле .....	50
3.4 Численный анализ влияния продольного магнитного поля на частоты колебаний пластин с различными граничными условиями .....	52
Глава 4. Динамическая устойчивость ферромагнитных пластин в поперечном магнитном поле .....	60

4.1 Устойчивость диэлектрической ферромагнитной пластины в переменном поперечном магнитном поле.....	60
4.2 Устойчивость диэлектрической ферромагнитной пластины под действием переменных продольных сил в поперечном магнитном поле.....	65
Глава 5. Исследование колебаний ферромагнитных цилиндрических оболочек в магнитном поле .....	70
5.1 Основные уравнения колебаний цилиндрических оболочек в магнитном поле, создаваемом постоянным линейным током, протекающим по оси цилиндра.....	70
5.2 Расчет спектров частот шарнирно опертых круговых цилиндрических оболочек в магнитном поле .....	74
5.3 Эмпирические и асимптотические плотности частот колебаний цилиндрических оболочек в магнитном поле.....	80
Сводка результатов и выводы.....	86
Список сокращений .....	88
Список литературы .....	89
Приложение А Описание программного комплекса «Магнитоупругость».....	100
Приложение Б Акт о внедрении результатов кандидатской диссертации.....	106

## ВВЕДЕНИЕ

*Актуальность проблемы.* Проектирование электрических аппаратов и машин, электротехнического оборудования предполагает решение комплексных задач, относящихся как к области наук об электричестве и магнетизме, так и к области механики деформируемого твердого тела

Создание оптимальных конструкций для многих объектов электротехнического и энергетического машиностроения связано с вопросами широкого использования конструктивных элементов типа стержней, пластин и оболочек, на упругие колебания которых существенное влияние оказывают магнитные поля

Данная картина взаимодействия упругих и электромагнитных явлений довольно сложна и ее можно рассматривать на основе анализа совместной системы уравнений движения упругой среды и уравнений электромагнитного поля.

Задачам колебаний тонкостенных элементов конструкций в магнитных полях посвящено достаточно большое количество публикаций. На особенности поведения упругих систем в магнитных полях указывалось еще в 1964 г. в работах отечественной школы механиков Я.Г. Пановко и И.И.Губановой и нашло подтверждение в экспериментальных исследованиях, опубликованных в трудах американского общества инженеров-механиков в 1969 г. Ф. С. Муна, Пао И-синь. Установлено хорошее соответствие между теоретическими и экспериментально полученными значениями частот колебаний стержней в поперечном однородном магнитном поле. Достаточно простых и надежных теоретических моделей, описывающих колебания пластин и оболочек в магнитном поле в то время предложено не было. Первыми работами посвященными исследованию магнитоупругих колебаний пластин и оболочек были монографии С.А. Амбрацумяна, Г.Е. Багдасаряна, М.В. Белубекяна [1-3].

Применение асимптотического метода В.В. Болотина (АМБ) позволяет рассмотреть задачи колебаний пластин с различными краевыми условиями,

распределение собственных частот колебаний пологих оболочек, выполненных как из немагнитных, так и из ферромагнитных материалов в магнитных полях.

**Целью работы** является изучение колебаний тонкостенных элементов конструкций, изготовленных из ферромагнитных материалов, в магнитном поле:

расчет спектров собственных частот колебаний прямоугольных ферромагнитных пластин с различными условиями закрепления краев;

исследование влияния индукции поперечного и продольного магнитного поля на значения собственных частот и их распределение;

исследование динамической устойчивости плоской формы равновесия ферромагнитной пластины, находящейся в поперечном магнитном поле с гармонически изменяющейся индукцией внешнего магнитного поля, исследование устойчивости сжатой переменными силами пластины в магнитном поле;

исследование спектров колебаний и распределение собственных частот круговых цилиндрических ферромагнитных оболочек в магнитном поле, создаваемом постоянным линейным током, протекающим по оси цилиндра.

**Методы исследования** определились спецификой изучаемых объектов. В работе использовались методы механики деформируемого твердого тела, аналитических вычислений и математического моделирования, современные математические пакеты и программные средства. В постановке задачи использовались уравнения теории упругости, теории пластин и оболочек, уравнения Максвелла.

Для решения задач колебаний пластин использовался асимптотический метод В. В. Болотина. Для проведения расчетов был разработан специальный комплекс программ.

**Научная новизна.** В работе впервые получены аналитические решения для расчета частот колебаний ферромагнитных пластин с различной комбинацией краевых условий. Проведен численный анализ спектров колебаний прямоугольных ферромагнитных пластин с различными условиями закрепления краев, исследовано влияние поперечного и продольного магнитного поля на

спектры частот, условия потери статической устойчивости пластин в магнитном поле. Получены соотношения для частот и асимптотической плотности частот собственных колебаний в магнитном поле круговых цилиндрических оболочек, соотношения для параметров внешнего магнитного поля, приводящего к потере статической устойчивости оболочки. Обнаружены новые эффекты, которые оказывает магнитное поле, на распределение собственных частот.

На основании выведенных аналитических соотношений разработан программный комплекс для проектирования и расчета динамических характеристик упругих пластин и оболочек в магнитных полях

***Достоверность полученных результатов*** обеспечивается корректной постановкой задач, применением прикладных математических методов, современных программных средств и сравнением полученных теоретических результатов с экспериментальными исследованиями, опубликованных в трудах Ф. С. Муна, Пао И-синь, А. А. Ванцяна, Ю. С. Сафаряна, полученными другими исследователями и приведенными в научных публикациях.

***Практическая значимость результатов работы.*** Полученные в работе результаты позволяют уточнить существующее представление о характере поведения тонкостенных элементов конструкций в продольном и поперечном магнитном поле. Разработанная в диссертации методика расчета собственных частот может быть использован при проектировании и расчете динамических характеристик тонкостенных элементов конструкций типа пластин и оболочек в магнитных полях, при проектировании магнитоуправляемых элементов электрических аппаратов и приборов, магнитоуправляемых контактов (герконов).

***Основные положения, выносимые на защиту.***

Получены аналитические решения для расчета частот колебаний ферромагнитных пластин с различной комбинацией краевых условий;

Приведены результаты численного анализа спектров колебаний прямоугольных ферромагнитных пластин с различными условиями закрепления краев;

Исследование динамической устойчивости плоской формы равновесия ферромагнитной пластины, находящейся в поперечном магнитном поле;

Получены соотношения для спектров и плотности частот собственных колебаний круговых цилиндрических оболочек в магнитном поле и проведен численный анализ.

***Апробация работы и публикации.*** Материалы диссертационной работы докладывались и обсуждались:

- на третьей международной научно-практической конференции, «Магнитоуправляемые контакты (герконы) и изделия на их основе». (Рязань: ОАО «РЗМКП», 2011).
- на международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. (Ярополец, 2011-2014);
- на международной научно-технической конференции студентов и аспирантов «Радиотехника, электротехника и энергетика» (Москва, МЭИ, 2012);
- на XIV международной конференции «Электромеханика, электротехнологии, электротехнические материалы и компоненты» (МКЭЭЭ-2006). (Алушта, 2012);
- на международной научно-технической конференции «Машиностроение и техносфера XXI века». (г. Севастополь, 2011);
- на XXVI международной инновационно-ориентированной конференции молодых ученых и студентов «МИКМУС». (Москва, 2014);
- на XXI международной научно-технической конференции «Информационные средства и технологии». (Москва, 2013);
- на 11 студенческой научной конференции “Future Information technology solutions”. (Bedlewo, 2013);
- на IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 2012 г.);

По теме диссертации опубликовано 16 работ. Из них 5 статей опубликованы изданиях рекомендованных ВАК.

***Структура и объем диссертации.*** Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, сводки результатов и выводов, списка литературы, приложений. Объем работы – 110 страницы, включая 32 рисунка и 6 таблиц. Список литературы включает 89 наименования.

# ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ И УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПЛАСТИН В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

## 1.1 Обзор литературных источников

Работы [1-3] по магнитоупругости посвящены как научным, так и методологическим аспектам совместного анализа уравнений механики и электродинамики, построены теоретические модели деформирования и колебаний упругих тел в магнитном поле.

В работе [1], исходя из гипотезы Кирхгофа о недеформируемых нормалях и гипотез магнитоупругости тонких идеально проводящих пластин и оболочек, получена замкнутая двумерная система уравнений магнитоупругости тонких пластин и оболочек во внешнем стационарном магнитном поле. В работе [2] исследуется влияние магнитного поля на устойчивость и колебания пластин и оболочек с конечной электропроводностью. Основные уравнения колебаний тонкостенных пластин, выполненных из ферромагнитных материалов приведены в [3].

На особенности поведения упругих систем в магнитных полях указывалось еще в 1967 г. в монографии [4] и нашло подтверждение в экспериментальных исследованиях, опубликованных в трудах американского общества инженеров-механиков [5-7]. Установлено хорошее соответствие [5] между теоретическими и экспериментально полученными значениями частот колебаний стержней в поперечном однородном магнитном поле.

Наряду с численными методами исследования динамического поведения конструкций продолжают развиваться и аналитические методы, основанные на построении решений дифференциальных уравнений. Весьма эффективным для исследования колебаний и устойчивости упругих систем является асимптотический метод В. В. Болотина [8-10]. В основе этого метода, называемого в дальнейшем АМБ, лежит представление собственных функций в виде суммы решения для внутренней области, не зависящего от граничных

условий, и корректирующего решения типа динамического краевого эффекта. Это позволяет получить асимптотические решения для широкого класса упругих систем. Обзор работ по применению АМБ для исследования спектров частот упругих систем дан в [10].

Теоретическим исследованиям колебаний пластин, выполненных из немагнитных материалов (диамагнетиков и парамагнетиков), посвящены работы [1, 11 - 14]. В работе [11] приведены основные уравнения колебаний пластин в магнитном поле. В [12-14] на основе АМБ [8, 9] выведены соотношения для нахождения частот колебаний диа- и парамагнитных пластин в магнитном поле при различных краевых условиях и исследовано влияние магнитного поля на спектры частот колебаний прямоугольных пластин.

Одним из примеров практического приложения решения поставленной задачи являются герконы - герметизированные магнитоуправляемые контакты, изменяющий состояние электрической цепи посредством механического ее замыкания или размыкания контактов при воздействии управляющего внешнего магнитного поля. Для анализа динамического поведения контактных сердечников необходима информация о спектре собственных частот колебаний. В [14] приведены некоторые методы оценки собственных частот колебаний стержневых и пластинчатых элементов электрических аппаратов, выполненных из диамагнитных и парамагнитных материалов. Полученные в [14] формулы можно применять для определения собственных частот колебаний контактных сердечников герконов в магнитном поле и оценить влияние магнитного поля на спектр частот.

Исследованию колебаний оболочек из немагнитных материалов в продольном и поперечном магнитном поле посвящены работы [15-23]. В [15] на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел и уточненной теории оболочек получены уравнения движения пологих оболочек в магнитном поле. В [15] рассматриваются задачи о динамическом поведении анизотропных магнитоупругих тонких пологих оболочек. Используется уточненная теория С. А. Амбарцумяна. В дифференциальной форме получены уравнения движения

ортотропной полой оболочке с учетом поперечных сдвигов. Приводятся результаты параметрического анализа.

Колебания цилиндрических оболочек в продольном магнитном поле рассматриваются в работах [16,17]. Установлено смещение точек сгущения в спектре собственных частот колебаний цилиндрических и сферических оболочек под действием магнитного поля [17,22]. Влияние тангенциальных сил инерции на собственные частоты колебаний оболочек исследуется в [18, 19]. Работы [20-22] посвящены колебаниям пологих диамагнитных и парамагнитных оболочек в поперечном магнитном поле. Построение решений типа динамических краевых эффектов при колебаниях оболочек в магнитных полях приведено в [23].

Исследованиям колебаний пластин выполненных из немагнитных материалов по модели идеально проводящей пластины, и пластины с конечной электропроводностью посвящены работы [2, 24-31]. В работе [24] приведены основные уравнения и соотношения для нахождения собственных частот колебаний пластин выполненных из идеально проводящего немагнитного материала.

В [25] уже рассмотрены колебания электропроводящей пластины в поперечном магнитном поле. В [26] представлены колебания проводящей пластинки в продольном магнитном поле. Сравнение частот колебаний пластин выполненных из немагнитных идеально и конечно проводящих материалов в поперечном магнитном поле приведено в [27-30]. Исследованию колебаний пластин из идеально и конечно проводящих материалов в продольном магнитном поле посвящены работы [28-31]. В [31] выведены соотношения для собственных частот и форм колебаний конечно и идеально проводящих прямоугольных пластин. На основе АМБ исследовано влияние продольного магнитного поля на частоты колебаний пластин с различными условиями закрепления краев.

Задача о колебаниях токонесущей пластины в поперечном магнитном поле решена в работах [32-34]. На основе гипотез магнитоупругости тонких тел исследуется влияние поперечного магнитного поля и плотности тока,

проходящего через пластину-полосу, на собственные частоты колебаний пластины.

Дальнейшее развитие исследований задач магнитоупругости позволило создать соответствующую теорию для изучения динамики упругих тел, выполненных из ферромагнитных материалов. Изучению влияния магнитного поля на ферромагнитные тела посвящены работы [3,5-7,35-41].

В [5, 35] исследуется влияние магнитного поля на колебания стержней, изготовленных из ферромагнитных материалов. Приведенная в [5] теоретическая модель колебаний стержней в поперечном магнитном поле дает результаты расчета частот, совпадающих с экспериментальными значениями.

Основные уравнения колебаний тонкостенных пластин из ферромагнитных материалов приведены в [3, 39].

В [36-39] приведены исследования колебаний ферромагнитных пластин в продольном магнитном поле. В [36, 37] решаются задачи устойчивости ферромагнитных пластин в продольном магнитном поле

В [39, 40] исследуется поведение пластин в поперечном магнитном поле. В [39] приведен способ сведения трехмерной задачи колебаний ферромагнитных пластин к двумерной. В [40] выведены уравнения колебаний пластин в поперечном магнитном поле в пространственном подходе. Приведены численные результаты расчета собственных частот колебаний.

В [41] на основе точного подхода проведено исследование изгибных свободных колебаний тонкой ферромагнитной цилиндрической оболочки. Получено точное дисперсионное уравнение в виде детерминанта шестого порядка, которое для случая магнитоупругой тонкой оболочки решается численно. Результаты расчетов приведены в таблицах и сравниваются с рассчитанными по гипотезе Кирхгофа. Показано существенное различие результатов, даже для низшей частоты.

Вопросам экспериментального изучения поведения стержней, пластин и оболочек посвящены работы [5-7, 42-49].

Первые результаты экспериментальных исследований влияния магнитных полей на колебания стержней и пластин приведены в [5-7]. Установлено хорошее соответствие теоретических моделей и экспериментальных данных.

В [42] для исследования магнитоупругого эффекта в ферромагнитном стержне была собрана установка, в которой с помощью ультразвукового излучателя в ферромагнитном стержне возбуждались продольные колебания. При определенной частоте колебаний в образце устанавливалась стоячая волна. Стержень помещался в магнитное поле, создаваемое катушками Гельмгольца.

В [43] экспериментально установлен эффект понижения собственных частот колебаний консольной ферромагнитной балки-пластины, помещенной в плоское продольное магнитное поле. На основе применения энергетического вариационного принципа построена физико-математическая модель. Результаты численного теоретического прогнозирования собственных частот и коэффициентов магнитного демпфирования сопоставлены с имеющимися экспериментальными данными, причем отмечено их хорошее согласование.

В [44] проводится опытный анализ колебаний стальной пластины на стенде с управляемой электромагнитной левитацией. Обсуждается гашение упругих колебаний пластины в вариантах оптимального и субоптимального управления.

В [45] с учетом магнитоупругих взаимодействий предпринят совместный экспериментально-теоретический анализ показателей изгиба пластин из мягкого ферромагнитного конструкционного материала. Полученные опытные данные программных испытаний на изгиб сравнивают с результатами численного моделирования.

В [46] экспериментально изучается влияние как продольных, так и поперечных постоянных магнитных полей на амплитуды перемещения, скорости и ускорения колебания электропроводящих пластин. Показано, что при сравнительно небольших полях, порядка 0,05 Тл для продольного и порядка 0,5 Тл для поперечного поля имеет место значительное увеличение амплитуд.

В [47] выведены асимптотические для малых магнитных полей и точные для произвольных магнитных полей дисперсионные уравнения в случае

начальных деформаций и напряжений, связанных законом Гука. Проведены соответствующие численные расчеты.

В [48] экспериментальным путем рассмотрено влияние магнитного поля на амплитуды, скорости и ускорения вынужденных колебаний ферромагнитных пластин.

В [49] излагаются результаты совместной программы опытного изучения и расчета показателей магнитоупругих взаимодействий проводящих балок в качестве возможных средств активного гашения колебаний. Описываются данные испытаний консольной балки с концентрической обмоткой в постоянном магнитном поле. Отмечается эффективность системы управления электромагнитным демпфированием на основе отрицательной обратной связи. Полученные опытные данные сравниваются с результатами анализа методом конечных разностей.

К классическим монографиям, посвященным решению связанных задач статики и динамики деформируемых твердых тел, взаимодействующих с магнитными полями можно отнести работы [50-55]. Постановка задач теории упругости и вывод основных уравнений равновесия твердых тел дано в [50-52]. Пьезоэлектрические и акустоэлектромагнитные эффекты в твердых телах рассмотрены в [53, 54]. В работе [55] дан вывод основных уравнений статики деформируемых трехмерных тел, взаимодействующих с внешним магнитным полем. Вместе с тем проблемы возникающие при расчетах и проектировании реальных электрических аппаратов и машин [56-58] не могут быть решены на основе уравнений работ [50-52, 55].

Расчет частот и форм колебаний тонкостенных элементов конструкций электротехнического оборудования наиболее эффективно может быть произведен на основе системы уравнений магнитоупругости, представленных в [1-3, 24, 39]. Исследованию поведения тонкостенных ферромагнитных пластин и оболочек, взаимодействующих с магнитными полями, посвящены работы [59-70]. В работах [71-75] приведено описание программного обеспечения для расчета

динамических характеристик тонкостенных элементов конструкций в магнитных полях.

В работах [79-84] рассматриваются одномерные нестационарные связанные задачи электромагнитоупругости для однородных изотропных проводников в прямоугольной декартовой и сферической системах координат.

## **1.2 Основные гипотезы и допущения о взаимодействии магнитного поля с деформируемыми ферромагнитными телами**

Рассматривается электропроводное деформируемое тело, изготовленное из ферромагнитного материала, который обладает высокой магнитной проницаемостью, с линейными характеристиками. Считается, что тело находится во внешнем магнитном поле, создаваемом источником, находящимся на каком-либо расстоянии от тела. Электродинамические свойства среды, окружающей тело, эквивалентны свойствам вакуума.

Известно, что при помещении ферромагнитного тела в магнитное поле происходит намагничивание материала, приводящее как к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве, так и к появлению массовых и поверхностных сил.

В дальнейшем под магнитоупругой системой будем понимать упругую ферромагнитную среду (упругое ферромагнитное тело) и магнитное поле. Рассматривается два состояния магнитоупругой системы. Первое состояние будем называть невозмущенным. Второе состояние будем называть возмущенным, все величины, относящиеся ко второму состоянию, будем представлять в виде суммы величин, относящихся к невозмущенному состоянию и возмущений соответствующих величин. Возмущения будем считать малыми величинами по сравнению с соответствующими величинами невозмущенного состояния.

Исходной системой уравнений, определяющих магнитное поле, являются уравнения Максвелла для возмущенного и невозмущенного состояния для среды во внутренней области и для внешней среды, которую в дальнейшем, если это специально не оговорено, будем рассматривать в приближении вакуума [1-3].

В основе построения теории магнитоупругости тонких пластин лежат линеаризованные уравнения электродинамики, полученные на основе теории малых деформаций, согласно которой относительные удлинения, сдвиги и ковариантные производные от составляющих вектора перемещений являются

малыми величинами по сравнению с единицей и ими по сравнению с единицей можно пренебречь [1-3].

Система уравнений электродинамики является незамкнутой, для замыкания необходимы дополнительные уравнения, которыми являются уравнения состояния для рассматриваемой магнитоупругой среды. Уравнения электродинамики и уравнения состояния, взятые вместе, составляют полную замкнутую систему дифференциальных уравнений магнитоупругости проводящего упругого деформируемого тела. Помимо этого к системе дифференциальных уравнений, определяющих поведение магнитного поля и движущегося в нем упругого проводящего тела, должны быть присоединены граничные условия.

Таким образом, задача движения электропроводящего деформируемого тела в магнитном поле сводится к совместному исследованию уравнений электродинамики для возмущенного и невозмущенного состояния в области, занимаемой телом, уравнений электродинамики в области, окружающей тело, уравнений движения деформируемого тела, а также механических и электродинамических краевых условий.

### 1.3 Колебания пластин в магнитном поле

Рассматривается упругая изотропная пластина постоянной толщины  $2h$ , изготовленная из электропроводящего магнитомягкого ферромагнитного материала, не обладающего магнестрикционными свойствами (т. е. при изменении состояния намагниченности тела его объём и линейные размеры не изменяются). Пластина отнесена к триортогональной системе координат  $Ox_1x_2x_3$  так, что срединная плоскость недеформированной пластины совпадает с координатной плоскостью  $Ox_1x_2$ .

Исследование колебаний пластин будем проводить на основе следующих предположений [3,39]:

- гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях;
- магнитное поле в колеблющейся пластине в любой момент времени определяется магнитным полем стационарной пластины, имеющей мгновенную конфигурацию реальной пластины;
- влияние токов проводимости пренебрежимо мало.

Рассмотрим колебания пластины во внешнем постоянном магнитном поле с заданным вектором индукции  $\vec{B}(B_1, B_2, B_3)$ .

Задача движения электропроводящей ферромагнитной пластины в магнитном поле, приводится к совместному исследованию уравнений электродинамики в области, занимаемой пластиной, уравнений электродинамики в области, окружающей пластину и уравнений движения пластины с учетом поверхностных условий, начальных условий, условий на бесконечности, а также, механических и электродинамических условий на торцах пластины.

Двумерные уравнения магнитоупругой устойчивости рассматриваемой пластины относительно функций возмущения перемещений точек срединной поверхности  $u(x_1, x_2, t)$ ,  $v(x_1, x_2, t)$  и  $w(x_1, x_2, t)$  имеют вид [3,39]:

$$\begin{aligned}
L_1(u,v) + \frac{(1-\nu^2)}{2Eh}(\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-) + \frac{(1-\nu^2)}{2Eh} \int_{-h}^h f_1 dx_3 &= \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
L_2(u,v) + \frac{(1-\nu^2)}{2Eh}(\sigma_{23}^+ - \sigma_{23}^-) + \frac{(1-\nu^2)}{2Eh} \int_{-h}^h f_2 dx_3 &= \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - t_{11}^- \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - 2t_{12}^- \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - t_{22}^- \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - (\sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^-) - h \frac{\partial}{\partial x_1} (\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-) - \\
-h \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{23}^+ + \sigma_{23}^-) - \int_{-h}^h [f_3 + x_3 K] dx_3 &= 0
\end{aligned} \tag{1.1}$$

В уравнении индексами “+” и “-” отмечены значения соответствующих величин на поверхностях пластины  $x_3=h$  и  $x_3=-h$  соответственно.

$$\begin{aligned}
L_1(u,v) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}, & L_2(u,v) &= \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
K &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right), & \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad - \text{оператор Лапласа,} & t_{ik}^0 &= \int_{-h}^h \sigma_{ik}^0 dx_i \quad - \text{усилия,}
\end{aligned}$$

характеризующие невозмущенное состояние пластины,  $\sigma_{ik}^0$  - тензор упругих напряжений невозмущенного состояния, определяемый из задачи классической теории упругости;  $t$  - время;  $f_1, f_2, f_3$  - объемные силы;  $D = 2Eh^3 / 3(1-\nu^2)$  - цилиндрическая жесткость,  $E$  - модуль упругости,  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $\rho$  - плотность материала пластины.

Входящие в уравнения (1.1) неизвестные величины  $\sigma_{i3}^\pm$  ( $j=1,2,3$ ) определяем, используя поверхностные условия при  $x_3=\pm h$  [3,39]. Из этих условий имеем:

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^\pm &= \frac{\chi}{\mu_0 \mu_r} B_{03}^{(e)2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\chi B_{01}^{(e)}}{\mu_0} \left[ B_{01}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_1} + B_{02}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] \\
\sigma_{23}^\pm &= \frac{\chi}{\mu_0 \mu_r} B_{03}^{(e)2} \frac{\partial w}{\partial x_2} - \mu_0 \frac{\chi H_{02}^{(e)}}{\mu_0} \left[ B_{01}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_1} + B_{02}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] \\
\sigma_{33}^\pm &= \frac{\chi^2 B_{03}^{(e)}}{\mu_r} h_3^\pm - \frac{\chi^2 B_{03}^{(e)}}{\mu_0 \mu_r} \left( B_{01}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_1} + B_{02}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Поверхностные условия:

$$\begin{aligned}
 h_1^\pm - h_1^{(e)\pm} &= \frac{\chi}{\mu_0 \mu_r} B_{03}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad h_2^\pm - h_2^{(e)\pm} = \frac{\chi}{\mu_0 \mu_r} B_{03}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_2} \\
 \mu_r h_3^\pm - h_3^{(e)\pm} &= \frac{\chi}{\mu_0} \left[ B_{01}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_1} + B_{02}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] \\
 e_1^\pm - e_1^{(e)\pm} &= \chi \mu_0 H_{02}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial t}, \quad e_2^\pm - e_2^{(e)\pm} = -\chi \mu_0 H_{01}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

$\chi = (\mu_r - 1)$  - магнитная восприимчивость,  $\mu_r$  - относительная магнитная проницаемость материала пластины,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная;  $e_i^\pm$ ,  $e_i^{(e)\pm}$  - компоненты вектора напряженности индуцированного электрического поля в теле и в вакууме соответственно.

Индекс «e» - означает принадлежность рассматриваемой величины к внешней среде.

После подстановки (1.2) и (1.3) в (1.1) видно, что в двумерные уравнения колебаний пластины кроме основных неизвестных функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$  входят значения компонент  $H_{0i}$  и  $H_{0i}^{(e)}$  невозмущенного магнитного поля и значения возмущений  $h_i$  и  $h_i^{(e)}$ , которые являются решением трехмерных задач. Эти задачи нельзя решить в явном виде. Поэтому решение задачи относительно  $H_{0i}$  и  $H_{0i}^{(e)}$ ,  $h_i$  и  $h_i^{(e)}$  строим приближенно, принимая пластину бесконечной [3,39]. Тогда величины  $H_i$  и  $H_i^{(e)}$  определяются формулами:

$$\begin{aligned}
 \vec{H}^{(e)} &= \vec{H}_0 \\
 \vec{B}^{(e)} &= \mu_0 \vec{H}_0 = \vec{B}_0 \\
 \vec{B} &= \mu_0 \mu_r \vec{H} \\
 H_1 &= H_{01}, \quad H_2 = H_{02}, \quad H_3 = \frac{1}{\mu_r} H_{03}
 \end{aligned}$$

При определении граничных значений  $h_i$  и  $h_i^{(e)}$  принимается, что пластинка бесконечна. В этом случае введением потенциальной функции  $\varphi$  и  $\varphi^{(e)}$  посредством

$$h = \text{grad} \varphi, \quad h^{(e)} = \text{grad} \varphi^{(e)} \quad (1.4)$$

Решение сводится к отысканию таких функций  $\varphi$  и  $\varphi^{(e)}$ , которые являются решением уравнений [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0, \quad \text{при } |x_3| < h \\ \frac{\partial^2 \varphi^{(e)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(e)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(e)}}{\partial x_3^2} = 0, \quad \text{при } |x_3| > h \end{aligned} \quad (1.5)$$

и удовлетворению условиям на поверхности  $x_3 = \pm h$ :

$$\varphi = \varphi^{(e)} + \frac{\chi B_{03} w}{\mu_0 \mu_r}, \quad \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x_3} = \mu_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \quad (1.6)$$

и условиям затухания на бесконечности.

Решения задачи, определяющей  $\varphi$  и  $\varphi^{(e)}$ , будем искать в классе гармонических волн, представляя искомые магнитоупругие возмущения в виде:

$$\begin{aligned} (u, v, w) &= (u_0, v_0, w_0) \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)] \\ \varphi &= f(x_3) \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \quad |x_3| < h \\ \varphi^{(e)} &= f_1(x_3) \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \quad x_3 > h \\ \varphi^{(e)} &= f_2(x_3) \exp[i(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2)], \quad x_3 < -h \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $\omega$  - частота колебаний,  $k_1$  и  $k_2$  - волновые числа

Подставляя (1.7) в уравнения (1.5) и удовлетворяя поверхностным условиям (1.6) и условиям затухания возмущений на бесконечности, определяем указанные неизвестные функции и следовательно потенциалы магнитного поля:

$$\varphi = \frac{\chi B_0 \text{ch} k x_3}{\mu_0 \mu_r \delta_1} w, \quad \varphi^{(e)} = \frac{\chi B_0 \text{sh} k x_3}{\mu_0 \delta_1} w \begin{cases} e^{-k(x_3-h)}, & \text{при } x_3 > h \\ e^{k(x_3+h)}, & \text{при } x_3 < -h \end{cases} \quad (1.8)$$

где  $\delta_1 = \mu_r \text{sh}(kh) + \text{ch}(kh)$ ,  $k^2 = (k_1^2 + k_2^2)$ ,  $k_1$  и  $k_2$  - волновые числа.

Подставляя (1.8) в (1.4), определяем возмущения начального магнитного поля во всем пространстве. Для магнитных возмущений в области пластинки получаем:

$$h_1 = \frac{\chi B_0 \operatorname{ch} k x_3}{\mu_0 \mu_r \delta_1} \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad h_2 = \frac{\chi B_0 \operatorname{ch} k x_3}{\mu_0 \mu_r \delta_1} \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad h_3 = \frac{\chi B_0 \operatorname{sh} k x_3}{\mu_0 \mu_r \delta_1} w \quad (1.9)$$

Также будем принимать, что края пластины неподвижны в своей плоскости. В этом случае задачи продольных и поперечных магнитоупругих колебаний пластины для рассматриваемого случая разделяются и описываются следующими уравнениями:

В случае поперечного магнитного поля (рисунок 1.1):

$$D \Delta \Delta w + N \Delta w - C \frac{\partial \Delta w}{\partial t} + 2 \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1.10)$$

где  $N, C$  - величины, зависящие от параметров магнитного поля:

$$N = \frac{2 \chi h B_3^2}{\mu_0 \mu_r} \left( 1 + \frac{\chi(\chi+2) \operatorname{sh}(kh)}{\mu_r \delta_1} \frac{\chi \operatorname{ch}(kh)}{kh} \right), \quad C = \frac{2 h^3 \sigma B_3^2}{3} \left( 1 + \frac{\chi}{\mu_r} + \frac{\chi}{(1 + \mu_r kh)} \right) \quad (1.11)$$

В случае продольного магнитного поля (рисунок 1.2)

$$\left[ 1 + \frac{\mu_0 \sigma h}{k} \frac{\partial}{\partial t} \right] (D \Delta \Delta w + 2 \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) + N_* \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - C_* \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial t} = 0, \quad (1.12)$$

где  $N_*, C_*$  - величины, зависящие от параметров магнитного поля:

$$N_* = \frac{2 \chi h B_1^2}{\mu_0 \mu_r}, \quad C_* = \frac{2 h \sigma}{k^2} B_1^2 \quad (1.13)$$

здесь  $w$  - прогиб пластины,  $B_3$  - нормальная составляющая вектора магнитной индукции в вакууме,  $B_1$  - продольная составляющая вектора магнитной индукции в вакууме,  $\sigma$  - коэффициент электропроводности пластины,  $\delta_1 = \mu_r \operatorname{sh}(kh) + \operatorname{ch}(kh)$ ,  $k^2 = (k_1^2 + k_2^2)$ ,  $k_1$  и  $k_2$  - волновые числа

В данные уравнения входят неизвестные волновые числа  $k_1$  и  $k_2$ . К уравнениям (1.10), (1.12) в каждой конкретно задаче необходимо присоединить условия закрепления краев пластины.

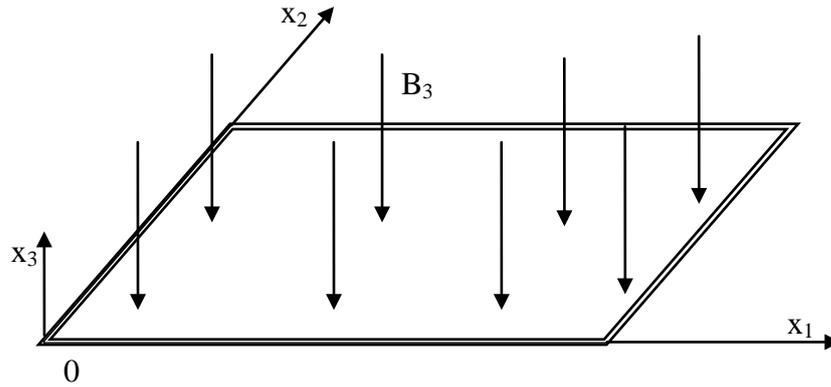


Рисунок 1.1 Прямоугольная пластина в поперечном магнитном поле ( $Ox_1x_2x_3$  - декартова система координат;  $\vec{B}(0;0;B_3)$  - вектор магнитной индукции)

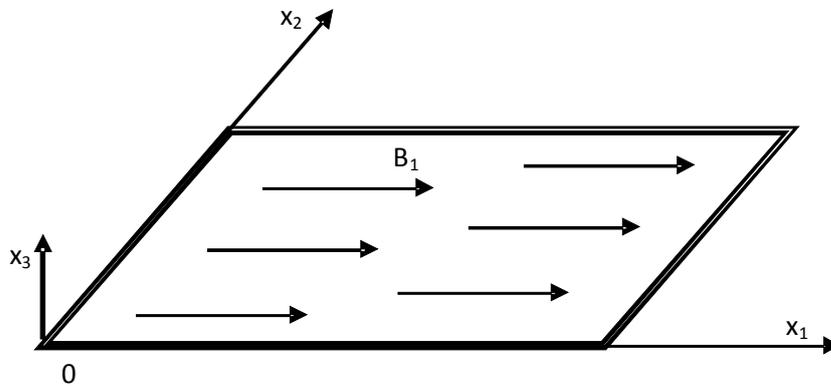


Рисунок 1.2 Прямоугольная пластина в продольном магнитном поле ( $Ox_1x_2x_3$  - декартова система координат;  $\vec{B}(B_1;0;0)$  - вектор магнитной индукции)

Для диэлектрической ферромагнитной пластины ( $\sigma \rightarrow 0$ ) демпфирующее влияние магнитного поля исчезает и уравнение поперечных колебаний представляется в виде:

В случае поперечного магнитного поля (рисунок 1.1):

$$D\Delta\Delta w + N\Delta w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1.14)$$

В случае продольного магнитного поля (рисунок 1.2)

$$D\Delta\Delta w + N_* \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1.15)$$

#### 1.4 Основные положения асимптотического метода В.В Болотина

Асимптотический метод Болотина В.В. (АМБ) предназначен для эффективного определения высших частот и форм, однако в ряде случаев оказывается пригодным и при определении основных частот и форм колебаний. Этот метод применим для упругих тел, занимающих прямоугольную область в пространстве  $0 \leq x_\alpha \leq a_\alpha$  ( $\alpha=1,2$ ).

Идея метода заключается в том, что асимптотическое решение для форм свободных колебаний выражается в виде суммы внутреннего решения и поправочных решений, которые называют динамическими краевыми эффектами.

Согласно АМБ порождающее решение имеет вид [8, 9]

$$w(x_1, x_2) = f \sin[k_1(x_1 - \xi_1)] \sin[k_2(x_2 - \xi_2)], \quad (1.16)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  – неизвестные волновые числа,  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – фазы порождающего решения.

Для каждой границы тела строят решения, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям и условиям на соответствующей границе. Число таких выражений равно числу границ. Затем полученные решения склеивают, но, вообще говоря, это склеивание может быть выполнено только приближенно. Чем быстрее затухают краевые эффекты, тем меньше ошибка асимптотического решения. Процедура склеивания позволяет получить систему трансцендентных уравнений для параметров, определяющих как внутреннее решение, так и краевые эффекты.

Требование, чтобы с точностью до динамических краевых эффектов все решения совпадали, сводится к условию, чтобы фазовые постоянные, найденные для двух противоположных сторон, отличались на число, кратное  $\pi$ . Это дает условия склеивания [8, 9]

$$\begin{cases} k_1 \cdot a_1 = \arctg u_{11}(k_1, k_2) + \arctg u_{12}(k_1, k_2) + m_1 \cdot \pi, \\ k_2 \cdot a_2 = \arctg u_{21}(k_1, k_2) + \arctg u_{22}(k_1, k_2) + m_2 \cdot \pi. \end{cases} \quad (1.17)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – целые числа или нуль, функции  $u_{\alpha\beta}(k_1, k_2)$  равны тангенсам фазовых постоянных  $\xi_\alpha$ , найденных из граничных условий  $x_\alpha=0$  и  $x_\alpha=a_\alpha$  соответственно, и, следовательно, зависят только от граничных условий.

Затем может быть получено асимптотическое выражение для собственных частот. Что касается асимптотического выражения для форм колебаний, то оно может быть построено для всей области, исключая окрестности углов и ребер.

Из формулы (1.17) можно вывести следующее более грубое приближение

$$k_1 \cdot a_1 = m_1 \cdot \pi + O(1); \quad k_2 \cdot a_2 = m_2 \cdot \pi + O(1). \quad (1.18)$$

Формулы (1.18) аналогичны хорошо известным асимптотическим оценкам Куранта и для мембран и тонких пластин. Существенно, что для оболочек эти асимптотические оценки верны лишь в том случае, если динамический краевой эффект не вырождается.

## ГЛАВА 2 ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПЛАСТИН В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

### 2.1 Построение решений типа динамических краевых эффектов для жестко защемленного края пластины в поперечном магнитном поле

Рассмотрим колебания ферромагнитной пластины во внешнем постоянном поперечном магнитном поле. Уравнение колебаний проводящей ферромагнитной пластины в поперечном магнитном поле имеет вид (1.10).

Представим решение для функции прогибов в виде

$$w(x_1, x_2, t) = \phi(x_1, x_2)e^{i\omega t} \quad (2.1)$$

и подставим его в уравнение (1.10), в результате получим уравнение

$$D\Delta\Delta\phi - 2\rho h\omega^2\phi + N\Delta\phi - Ci\omega\Delta\phi = 0 \quad (2.2)$$

Здесь  $\omega$  – частота магнитоупругих колебаний пластины,  $\phi(x_1, x_2)$  – форма прогиба пластины,  $N$ ,  $C$  – величина, зависящая от параметров магнитного поля и определяется по формуле (1.11).

Согласно асимптотическому методу В.В. Болотина (АМБ) запишем порождающее решение [9]

$$\phi(x_1, x_2) = \sin k_1(x_1 - \xi_1) \cdot \sin k_2(x_2 - \xi_2), \quad (2.3)$$

где  $k_1$ ,  $k_2$  – волновые числа,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  – фазы порождающего решения.

Подставив решение (2.3) в уравнение (2.2), получим выражение для собственных частот магнитоупругих колебаний

$$\omega = \frac{C}{4\rho h}(k_1^2 + k_2^2)i + \left[ \frac{1}{2\rho h}(D(k_1^2 + k_2^2)^2 - N(k_1^2 + k_2^2)) - \frac{C^2}{16\rho^2 h^2}(k_1^2 + k_2^2)^2 \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

Действительная часть выражения (2.4) – это собственная частота упругих колебаний:

$$\operatorname{Re} \omega = \left[ \frac{1}{2\rho h}(D(k_1^2 + k_2^2)^2 - N(k_1^2 + k_2^2)) - \frac{C^2}{16\rho^2 h^2}(k_1^2 + k_2^2)^2 \right]^{1/2} \quad (2.5)$$

Мнимая часть выражения (2.4) – коэффициент демпфирования упругих колебаний:

$$\operatorname{Im} \omega = \frac{C}{4\rho h} (k_1^2 + k_2^2) \quad (2.6)$$

Для диэлектрической ферромагнитной пластины демпфирующее влияние магнитного поля исчезает ( $\sigma \rightarrow 0$ ) и уравнение поперечных колебаний представляется в виде (1.14).

Подставляя решение для прогиба в виде (2.1) в уравнение (1.9) получим уравнение для форм колебаний

$$D\Delta\Delta\varphi - 2\rho h\omega^2\varphi + N\Delta\varphi = 0 \quad (2.7)$$

Частота упругих колебаний диэлектрической пластины определяется по формуле:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2\rho h} (D(k_1^2 + k_2^2)^2 - N(k_1^2 + k_2^2))}. \quad (2.8)$$

Для шарнирно опертой пластины волновые числа  $k_1$  и  $k_2$  известны, и определяются по формуле

$$k_1 = m_1\pi / a_1, \quad k_2 = m_2\pi / a_2. \quad (2.9)$$

Рассмотрим жестко заземленный край пластины, которая находится в поперечном магнитном поле. Граничные условия имеют вид

$$x_1=0 \quad \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = 0. \quad (2.10)$$

Решение вблизи границы  $x_1=0$  ищем в виде

$$\varphi(x_1, x_2) = \Phi(x_1) \cdot \sin[k_2 \cdot (x_2 - \xi_2)]. \quad (2.11)$$

Подставляем решение (2.11) и выражение для собственной частоты (2.8) в уравнение (2.7), получим дифференциальное уравнение

$$\Phi^{IV} - \left(2k_2^2 - \frac{N}{D}\right) \cdot \Phi'' + \left[k_2^4 - (k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{N}{D} \cdot k_1^2\right] \cdot \Phi = 0. \quad (2.12)$$

Будем искать решение уравнения (2.12) в виде

$$\Phi(x_1) = C \cdot e^{\lambda \cdot x_1}. \quad (2.13)$$

После подстановки (2.13) в (2.12) получим характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \left(2k_2^2 - \frac{N}{D}\right) \cdot \lambda^2 + k_2^4 - (k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{N}{D} \cdot k_1^2 = 0. \quad (2.14)$$

Решение этого уравнения будет иметь вид

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left( 2 \cdot k_2^2 - \frac{N}{D} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( 2 \cdot k_2^2 - \frac{N}{D} \right)^2 - 4 \left[ k_2^4 - (k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{N}{D} \cdot B_3^2 \right]}$$

Упростив выражения, получим

$$\lambda_1^2 = \left( k_1^2 + 2 \cdot k_2^2 - \frac{N}{D} \right)$$

$$\lambda_2^2 = -k_1^2$$

Обозначим

$$r_1 = \sqrt{k_1^2 + 2 \cdot k_2^2 - N/D}. \quad (2.15)$$

Получим корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \pm r_1; \quad \lambda_{3,4} = \pm i \cdot k_1. \quad (2.16)$$

Мнимые корни соответствуют порождающему решению, действительные корни – корректирующим решениям. Общее решение уравнения (2.12) имеет вид

$$\Phi(x_1) = C_1 \cdot \sin(k_1 \cdot x_1) + C_2 \cdot \cos(k_1 \cdot x_1) + C_3 \cdot \exp[-r_1 \cdot x_1] + C_4 \cdot \exp[r_1 \cdot x_1]. \quad (2.17)$$

Если рассматривается граница  $x_1=0$ , то последний член в выражении (2.17) отбрасывается, т.к. корректирующее решение вдали от границы должно затухать. Среди оставшихся членов первые два полностью соответствуют порождающему решению (2.3), а первые три члена, взятые вместе

$$\Phi(x_1) = C_1 \cdot \sin(k_1 \cdot (x_1 - \xi_1)) + C_2 \cdot \exp[-r_1 \cdot x_1] \quad (2.18)$$

описывают динамический краевой эффект (ДКЭ).

Подставим решение (2.18) в граничные условия (2.10) при  $x_1=0$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi=0: & C_2 - C_1 \cdot \sin(k_1 \cdot \xi_1) = 0 \\ \varphi'=0: & -r_1 \cdot C_2 + k_1 \cdot C_1 \cdot \cos(k_1 \cdot \xi_1) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Данная система имеет нетривиальное решение, если определитель системы равен нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & -\sin(k_1 \cdot \xi_1) \\ -r_1 & k_1 \cdot \cos(k_1 \cdot \xi_1) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.20)$$

Раскрыв данный определитель, получим

$$k_1 \cdot \xi_1 = \arctg \frac{k_1}{r_1} + m_1 \cdot \pi \quad (2.21)$$

Для жестко заземленной пластины, находящейся в поперечном магнитном поле (рисунок 2.1), граничные условия имеют вид

$$x_1=0, a_1 \quad \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0; \quad x_2=0, a_2 \quad \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0. \quad (2.22)$$

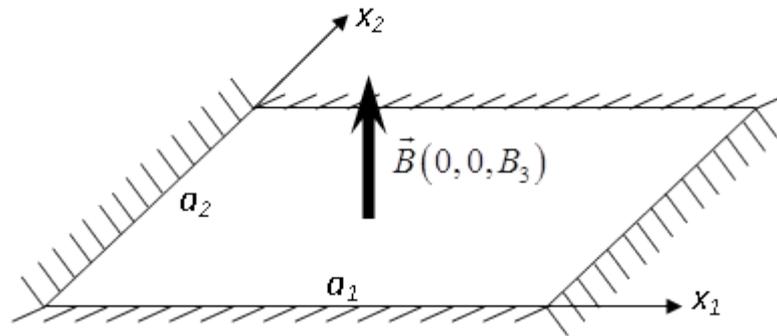


Рисунок 2.1 Пластина с жестко заземленными краями

Исходя из выражения (2.21), полученного для края  $x_1=0$ , по аналогии получаем следующее соотношение для края  $x_1=a_1$

$$k_1 \cdot a_1 - k_1 \cdot \eta_1 = \arctg \frac{k_1}{r_1} + m_1 \cdot \pi. \quad (2.23)$$

Условия стыковки данных решений (2.21) и (2.23) имеют вид

$$\xi_1 = \eta_1. \quad (2.24)$$

Сложим выражения (2.21) и (2.23), учтем условие (2.24), получим

$$k_1 \cdot a_1 = 2 \cdot \arctg \frac{k_1}{r_1} + m_1 \cdot \pi. \quad (2.25)$$

Далее рассматриваем граничные условия при  $x_2=0, a_2$ . Все вычисления в этом случае аналогичны предыдущим. В выражениях (2.11) – (2.21) просто производится замена индексов ("1" ↔ "2"). Запишем окончательное выражение, аналогичное (2.25)

$$k_2 \cdot a_2 = 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{k_2}{r_2} + m_2 \cdot \pi, \quad (2.26)$$

где введено обозначение

$$r_2 = \sqrt{k_2^2 + 2 \cdot k_1^2 - N/D}. \quad (2.27)$$

В результате получили систему трансцендентных уравнений относительно волновых чисел  $k_1$  и  $k_2$  для жестко заземленной по всем краям пластины (рисунок 2.1)

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{a_1} \left( 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{k_1}{r_1} + m_1 \cdot \pi \right) \\ k_2 = \frac{1}{a_2} \left( 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{k_2}{r_2} + m_2 \cdot \pi \right) \end{cases} \quad (2.28)$$

Определив волновые числа  $k_1$  и  $k_2$  из решения системы трансцендентных уравнений (2.28) и подставив их в соотношение (2.8), можем вычислить собственные частоты колебаний жестко заземленной диэлектрической ферромагнитной пластины.

## 2.2 Построение решений типа динамических краевых эффектов для свободного края пластины в поперечном магнитном поле

Рассмотрим построение решения для свободного края пластины, которая находится в поперечном магнитном поле. Граничные условия имеют вид

$$x_1=0 \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Решение вблизи границы  $x_1=0$  ищем в виде (2.11). Общее решение имеет вид (2.17).

После подстановки решения (2.18), описывающего динамический краевой эффект, в граничные условия (2.29), получим систему уравнений

$$\begin{cases} r_1^2 \cdot C_2 + k_1^2 \cdot C_1 \cdot \sin(k_1 \cdot \xi_1) - \nu \cdot k_2^2 \cdot C_2 + \nu \cdot k_2^2 \cdot C_1 \cdot \sin(k_1 \cdot \xi_1) = 0 \\ -r_1^3 \cdot C_2 - k_1^3 \cdot C_1 \cdot \cos(k_1 \cdot \xi_1) + (2-\nu) \cdot k_2^2 \cdot [r_1 \cdot C_2 - k_1 \cdot C_1 \cdot \cos(k_1 \cdot \xi_1)] = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Данная система имеет нетривиальное решение, если определитель системы равен нулю

$$\begin{vmatrix} r_1^2 - \nu \cdot k_2^2 & (k_1^2 + \nu \cdot k_2^2) \cdot \sin(k_1 \cdot \xi_1) \\ -r_1 [r_1^2 - (2-\nu) \cdot k_2^2] & -k_1 (k_1^2 + (2-\nu) \cdot k_2^2) \cdot \cos(k_1 \cdot \xi_1) \end{vmatrix} = 0$$

Раскрыв данный определитель, получим

$$k_1 \cdot \xi_1 = \arctg \frac{k_1 \cdot (k_1^2 + (2-\nu) \cdot k_2^2) \cdot (r_1^2 - \nu \cdot k_2^2)}{r_1 \cdot [r_1^2 - (2-\nu) \cdot k_2^2] \cdot (k_1^2 + \nu \cdot k_2^2)} + m_1 \cdot \pi. \quad (2.31)$$

Для пластины со свободными краями, находящейся в поперечном магнитном поле (рисунок. 2.2), граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}
 x_1=0, a_1 & \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0 \end{cases} \\
 x_2=0, a_2 & \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_2^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1^2} = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

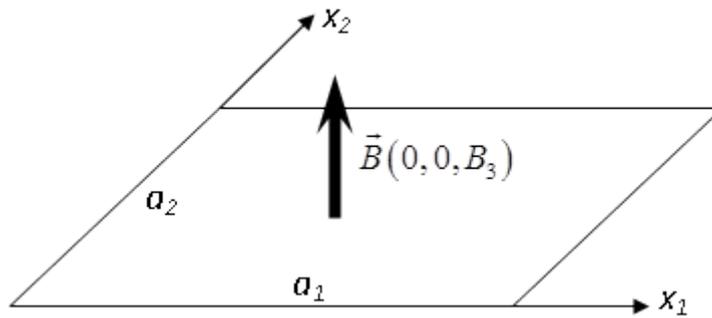


Рисунок 2.2 Пластина со свободными краями

Исходя из выражения (2.31), полученного для края  $x_1=0$ , по аналогии получаем соотношение для края  $x_1=a_1$ . Из условия стыковки решений получим первое трансцендентное уравнение для определения волновых чисел для пластины с двумя противоположными свободными краями

$$k_1 \cdot a_1 = 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{k_1 \cdot (k_1^2 + (2-\nu) \cdot k_2^2) \cdot (r_1^2 - \nu \cdot k_2^2)}{r_1 \cdot [r_1^2 - (2-\nu) \cdot k_2^2] \cdot (k_1^2 + \nu \cdot k_2^2)} + m_1 \cdot \pi. \tag{2.33}$$

Далее рассматриваем граничные условия при  $x_2=0, a_2$ . Все вычисления в этом случае аналогичны предыдущим. В выражении (2.33) просто производится замена индексов (" $1 \leftrightarrow 2$ "). Окончательное выражение, аналогичное (2.33), имеет вид

$$k_2 \cdot a_2 = 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{k_2 \cdot (k_2^2 + (2-\nu) \cdot k_1^2) \cdot (r_2^2 - \nu \cdot k_1^2)}{r_2 \cdot [r_2^2 - (2-\nu) \cdot k_1^2] \cdot (k_2^2 + \nu \cdot k_1^2)} + m_2 \cdot \pi. \tag{2.34}$$

В результате получили систему трансцендентных уравнений относительно волновых чисел  $k_1$  и  $k_2$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{a_1} \left( 2 \cdot \arctg \frac{k_1 \cdot (k_1^2 + (2-\nu) \cdot k_2^2) \cdot (r_1^2 - \nu \cdot k_2^2)}{r_1 \cdot [r_1^2 - (2-\nu) \cdot k_2^2] \cdot (k_1^2 + \nu \cdot k_2^2)} + m_1 \cdot \pi \right) \\ k_2 = \frac{1}{a_2} \left( 2 \cdot \arctg \frac{k_2 \cdot (k_2^2 + (2-\nu) \cdot k_1^2) \cdot (r_2^2 - \nu \cdot k_1^2)}{r_2 \cdot [r_2^2 - (2-\nu) \cdot k_1^2] \cdot (k_2^2 + \nu \cdot k_1^2)} + m_2 \cdot \pi \right) \end{cases} \quad (2.35)$$

Здесь  $r_1$  – соответствует выражению (2.11),  $r_2$  – выражению (2.27).

Определив волновые числа  $k_1$  и  $k_2$  из решения системы трансцендентных уравнений (2.35) и подставив их в соотношение (2.8), можем вычислить собственные частоты колебаний свободной по всем краям диэлектрической ферромагнитной пластины.

### 2.3 Построение решений для частот колебаний пластин с различными условиями закрепления краев в поперечном магнитном поле

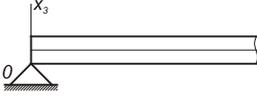
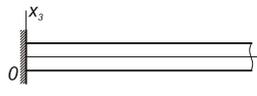
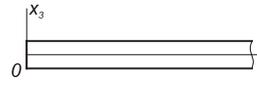
Для построения системы уравнений типа (2.28) и (2.35) для определения волновых чисел для пластин с другими типами закрепления краев согласно АМБ удобно воспользоваться общей процедурой условий склеивания решений [9]. Требование, чтобы с точностью до динамических краевых эффектов все четыре решения совпадали, сводится к условию, чтобы фазовые постоянные, найденные для двух противоположных сторон, отличались на число, кратное  $\pi$ . Условия склеивания имеют вид

$$\begin{cases} k_1 \cdot a_1 = \arctg u_{11}(k_1, k_2) + \arctg u_{12}(k_1, k_2) + m_1 \cdot \pi, \\ k_2 \cdot a_2 = \arctg u_{21}(k_1, k_2) + \arctg u_{22}(k_1, k_2) + m_2 \cdot \pi. \end{cases} \quad (2.36)$$

Соответствующие функции  $u_{\alpha\beta}(k_1, k_2)$  и отношения коэффициентов  $C_2/C_1$  порождающего решения (2.18) для основных типов закрепления краев пластин приведены в таблице 2.1.

Построив систему трансцендентных уравнений для определения волновых чисел и последующего вычисления собственных частот колебаний по (2.8), можно произвести расчет спектров частот колебаний пластин в поперечном магнитном поле с любыми краевыми условиями.

Таблица 2.1 Функции  $u_{\alpha\beta}(k_1, k_2)$  и отношения коэффициентов  $C_2/C_1$  при различных граничных условиях на краю  $x_1=0$

Тип закрепления	Граничные условия	$u_{11}(k_1, k_2)$	$C_2/C_1$	Примечание
Шарнирное оперение 	$x_1=0; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0$	0	0	–
Заделка 	$x_1=0; \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$	$\frac{k_1}{r_1}$	$\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + r_1^2}}$	$r_1 = \sqrt{k_1^2 + 2 \cdot k_2^2 - N/D}$ , $N = \frac{2\chi h B_3^2}{\mu_0 \mu_r} \left( 1 + \frac{\chi(\chi+2)}{\mu_r \delta_1} \frac{\text{sh}(kh)}{kh} - \frac{\chi \text{ch}(kh)}{\mu_r \delta_1} \right)$
Свободный край 	$x_1=0; \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0 \end{cases}$	$\frac{k_1 \cdot (k_1^2 + (2-\nu) \cdot k_2^2) \cdot (r_1^2 - \nu \cdot k_2^2)}{r_1 \cdot [r_1^2 - (2-\nu) \cdot k_2^2] \cdot (k_1^2 + \nu \cdot k_2^2)}$	$\frac{(k_1^2 + \nu k_2^2)}{[r_1^2 - \nu k_2^2]} \cdot \frac{u_{11}(k_1, k_2)}{\sqrt{1 + u_{11}^2(k_1, k_2)}}$	$r_1 = \sqrt{k_1^2 + 2 \cdot k_2^2 - N/D}$ , $N = \frac{2\chi h B_3^2}{\mu_0 \mu_r} \left( 1 + \frac{\chi(\chi+2)}{\mu_r \delta_1} \frac{\text{sh}(kh)}{kh} - \frac{\chi \text{ch}(kh)}{\mu_r \delta_1} \right)$

## 2.4 Численный анализ влияния поперечного магнитного поля на частоты и формы колебаний пластин с различными граничными условиями

Используя полученные системы трансцендентных уравнений, находим волновые числа и собственные частоты пластин с использованием математического пакета *MATLAB 7.0*.

Собственные частоты определялись для квадратных пластин, изготовленных из стали (модуль упругости  $E = 200$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,28$ , плотность  $\rho = 7700$  кг/м<sup>3</sup>, магнитная проницаемость  $\mu_r = 5000$  и электропроводность  $\sigma = 0,21 \cdot 10^7$  (Ом м)<sup>-1</sup>) и никеля (модуль упругости  $E = 215$  ГПа, плотность  $\rho = 8800$  кг/м<sup>3</sup>, магнитная проницаемость  $\mu_r = 35$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,29$ , электропроводность  $\sigma = 1,47 \cdot 10^7$  (Ом м)<sup>-1</sup>) с различными условиями закрепления при различных значениях индукции поперечного магнитного поля.

На рисунках 2.3-2.4 приведены зависимости основной частоты колебаний  $\omega_{11}$  от индукции магнитного поля для железной и никелевой шарнирно закрепленных пластин в поперечном магнитном поле при различных толщинах пластины ( $2h = 1, 2, 3$  мм). Чем тоньше пластина, тем сильнее влияние магнитного поля. Сплошная кривая построена для модели конечно проводящей пластины, штриховая кривая соответствует модели диэлектрической пластины. Значения частот диэлектрических пластин и конечно проводящих весьма близки. Частоты колебаний никелевой пластины при одних и тех же значениях индукции магнитного поля выше, чем у стальной пластины.

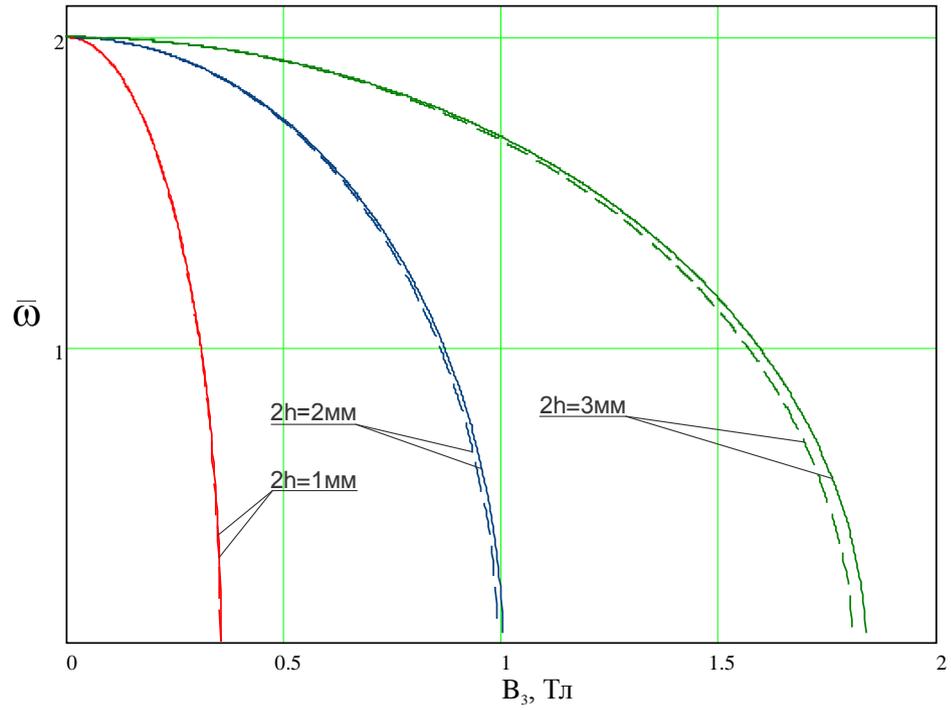


Рисунок 2.3 Зависимость частоты колебаний стальной пластины от индукции  
МАГНИТНОГО ПОЛЯ

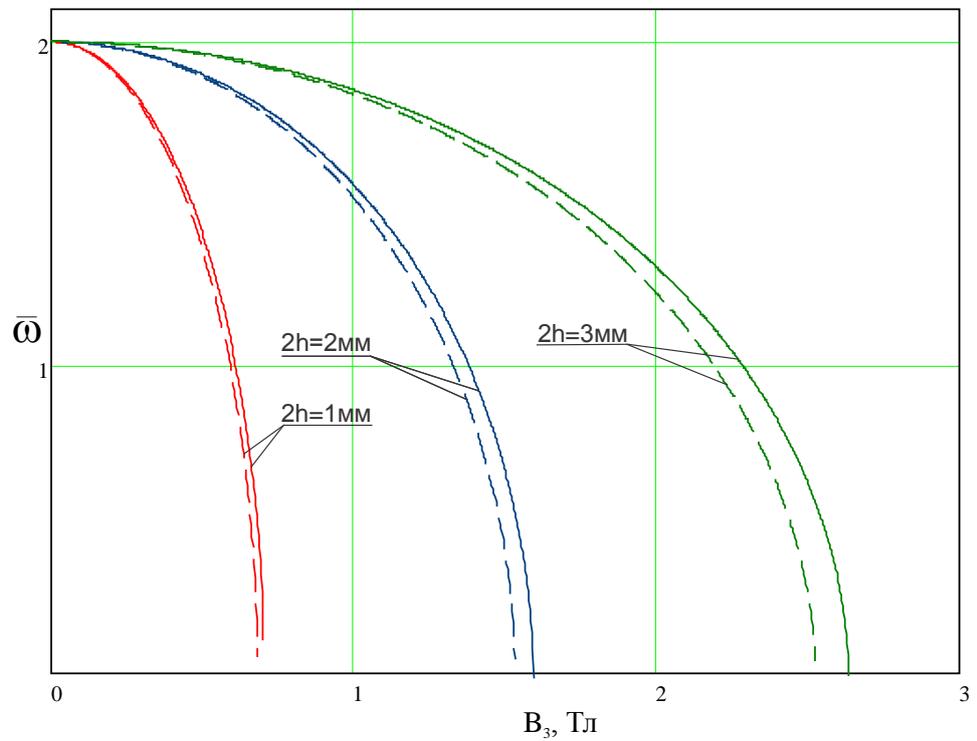


Рисунок 2.4 Зависимость частоты колебаний никелевой пластины от индукции  
МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Поперечное магнитное поле понижает собственные частоты колебаний конечно проводящих и диэлектрических пластин, изготовленных из ферромагнетиков. Поперечное магнитное поле оказывает эффект сжимающих усилий в срединной плоскости пластины и при определенных значениях индукции магнитного поля пластина теряет устойчивость (при  $\omega = 0$ ). Для диэлектрических пластин соотношение для критического значения магнитной индукции  $B_{3*}$ , при котором шарнирно-опертая пластина теряет устойчивость имеет вид:

$$B_{3*} = \frac{D(k_1^2 + k_2^2)\mu_0\mu_r}{2\chi h \left(1 + \frac{\chi(\chi + 2)}{\mu_r \delta_1} \frac{sh(kh)}{kh} - \frac{\chi ch(kh)}{\mu_r \delta_1}\right)} \quad (2.137)$$

Для технически реальных значений индукции внешнего магнитного поля различия в значениях собственных частот колебаний пластин, вычисленных по модели диэлектрической пластины (2.8) и конечно проводящей пластины (2.5), не существенны, и поэтому для расчета собственных частот колебаний пластин с различными краевыми условиями можно применять асимптотический метод В. В. Болотина [8,9], основываясь на уравнениях для диэлектрических пластин.

В таблицах 2.2-2.3 приведены значения собственных частот колебаний для пластины, изготовленной из железа с параметрами:  $a_1 = a_2 = 20$  см,  $2h = 2$  мм с различными условиями закрепления при различных значениях чисел  $m_1$ ,  $m_2$  и индукции магнитного поля  $B_3 = 0$  и  $B_3 = 0.5$  Тл. Как видно из таблиц наименьшее значение основной собственной частоты соответствует консольной пластине. Наибольшее значение основной частоты соответствует жестко заземленной пластине.

Таблица 2.2 Значения безразмерных собственных частот колебаний

$\bar{\omega} = \frac{\omega \cdot a_1 a_2}{\pi^2} \sqrt{\frac{2\rho h}{D}}$  по формам квадратных пластин с параметрами  $a_1 = a_2 = 20$  см,

$2h = 2$  мм при различных видах закрепления

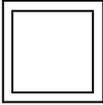
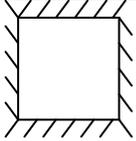
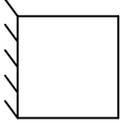
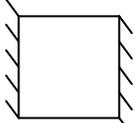
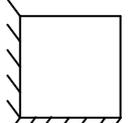
$m_1$	$m_2$	 Шарнирно-опертая		 Жестко зашечеленная	
		$B_3 = 0$	$B_3 = 0.5$	$B_3 = 0$	$B_3 = 0.5$
1	1	<b>2</b>	-	<b>3.5556</b>	-
1	2	5	0.5368	7.3866	2.1093
1	3	10	3.8138	13.3368	6.1399
1	4	17	8.8758	21.3141	12.1626
2	1	5	0.5368	7.3866	2.1093
2	2	8	1.7272	10.8889	3.4136
2	3	13	4.8339	16.6559	7.2783
2	4	20	9.882	24.5397	13.2508
3	1	10	3.8138	13.3368	6.1399
3	2	13	4.8339	16.6559	7.2783
3	3	18	7.8685	22.2222	10.7936
3	4	25	12.896	29.9605	16.5756
4	1	17	8.8758	21.3141	12.1626
4	2	20	9.882	24.5397	13.2508
4	3	25	12.896	29.9605	16.5756
4	4	32	17.9108	37.5556	22.1504

Таблица 2.3 Значения безразмерных собственных частот колебаний

$$\bar{\omega} = \frac{\omega \cdot a_1 a_2}{\pi^2} \sqrt{\frac{2\rho h}{D}} \text{ по формам квадратных пластин с параметрами } a_1 = a_2 = 20 \text{ см,}$$

$2h = 2 \text{ мм}$  при различных видах закрепления

$m_1$	$m_2$						
		$B_3 = 0$	$B_3 = 0.5$	$B_3 = 0$	$B_3 = 0.5$	$B_3 = 0$	$B_3 = 0.5$
		КОНСОЛЬНАЯ		С двух противоположных сторон закреплена, с двух свободна		С двух смежных сторон закреплена, с двух других свободна	
		$B_3 = 0$	$B_3 = 0.5$	$B_3 = 0$	$B_3 = 0.5$	$B_3 = 0$	$B_3 = 0.5$
0	0	<b>0.7891</b>	<b>0.8314</b>			-	-
0	1	2.6614	2.6002			<b>2.5384</b>	<b>2.4508</b>
0	2	6.5398	6.4717			6.4717	6.3921
0	3	12.4618	12.4099			12.4219	12.3623
0	4	20.4013	20.366			20.3777	20.3359
1	0	3.0461	2.9974	<b>2.7085</b>	<b>2.607</b>	<b>2.5384</b>	<b>2.4508</b>
1	1	5.3915	5.3588	4.5151	4.4317	4.7748	4.7111
1	2	9.3299	9.3049	8.1665	8.0929	8.7701	8.7199
1	3	15.1642	15.1458	13.9207	13.8561	14.6938	14.655
1	4	23.0072	22.9956	21.7673	21.7108	22.6168	22.5885
2	0	7.055	7.0064	6.8176	6.7436	6.4717	6.3921
2	1	9.7324	9.7166	8.9331	8.878	8.7701	8.7199
2	2	13.9955	14.0032	12.7037	12.6663	12.9553	12.9296
2	3	19.9783	19.9992	18.3563	18.3284	18.978	18.9667
2	4	27.8394	27.8674	26.0286	26.0052	26.9238	26.9217
3	0	13.0144	12.9823	12.8424	12.7931	12.4219	12.3623
3	1	15.846	15.8433	15.1571	15.1221	14.6938	14.655
3	2	20.3749	20.4025	19.1293	19.1134	18.978	18.9667
3	3	26.5997	26.6488	24.8877	24.8864	25.1358	25.1446
3	4	34.6107	34.6729	32.5523	32.5593	33.174	33.1954
4	0	20.9604	20.946	20.8316	20.8033	20.3777	20.3359
4	1	23.8667	23.8758	23.2793	23.2609	22.6168	22.5885
4	2	28.5627	28.6032	27.4139	27.4132	26.9238	26.9217
4	3	35.001	35.0686	33.3176	33.334	33.174	33.1954
4	4	43.2038	43.2912	41.0701	41.0993	41.3163	41.3549

На основе полученных АМБ соотношений для частот и форм колебаний пластин можно построить формы колебаний. На рисунках 2.5-2.6 приведены формы колебаний для консольной (жестко заземленной со стороны  $x_1 = 0$ ) стальной пластины, находящейся в поперечном магнитном поле с магнитной индукцией  $B_3 = 0.5 \text{ Тл}$  при  $m_1 = 1, m_2 = 1$  рисунок 2.5 и  $m_1 = 2, m_2 = 2$  рисунок 2.6.

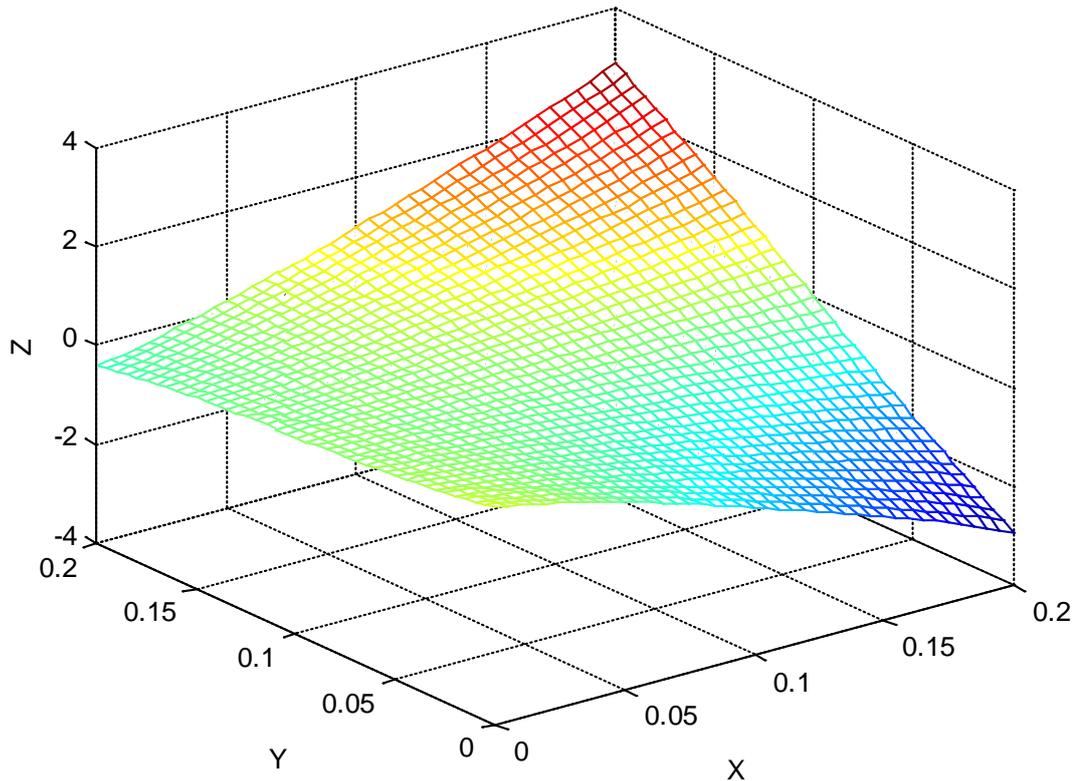


Рисунок 2.5 Форма колебаний консольной пластины при  $m_1 = 1, m_2 = 1$

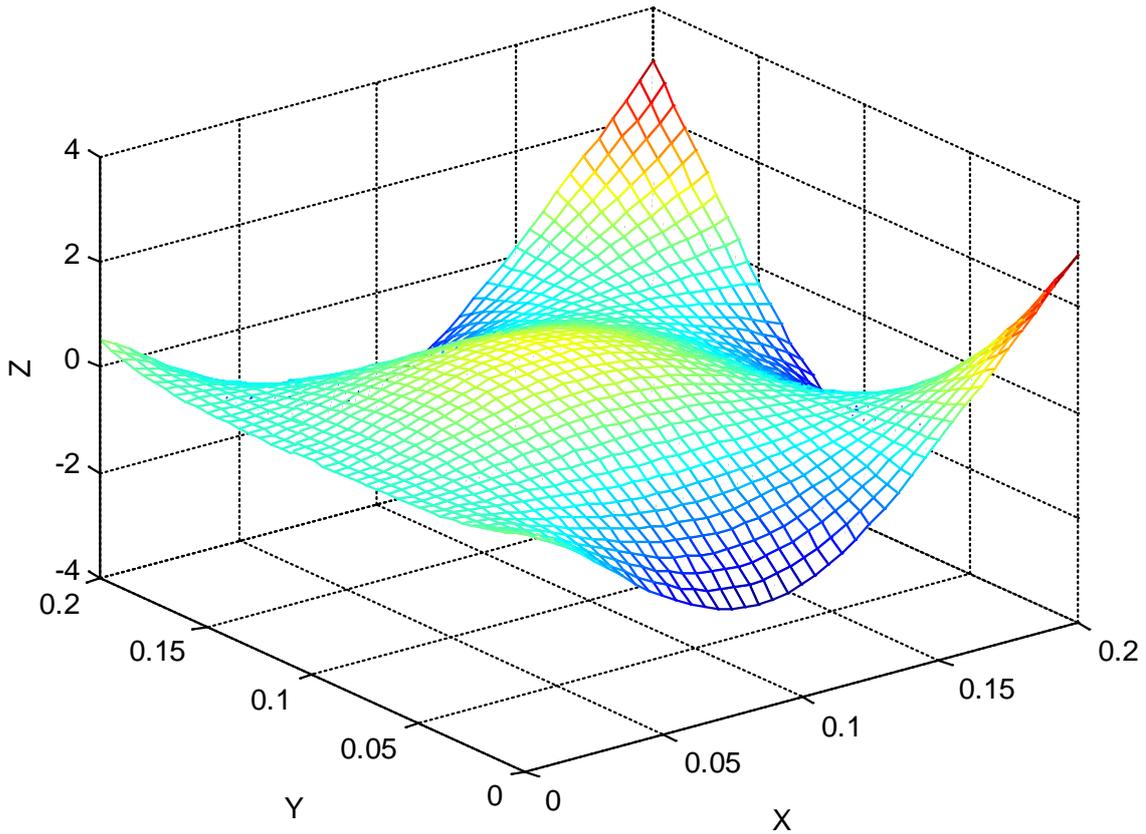


Рисунок 2.6 Форма колебаний консольной пластины при  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 2$

Разработанная методика расчета спектров частот магнитоупругих колебаний ферромагнитных прямоугольных пластин при различных условиях закрепления краев позволяет производить проектирование тонкостенных элементов конструкций электротехнического оборудования.

Для случая цилиндрического изгиба консольной пластины (стержневая модель,  $k_2 = 0$ ) соотношение для частот и трансцендентное уравнение для определения волновых чисел имеют вид:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2\rho h} \left( Dk_1^4 - \frac{2\chi h B_3^2}{\mu_0 \mu_r} k_1^2 \left( 1 + \frac{\chi(\chi+2)}{\mu_r(\mu_r \operatorname{sh}(k_1 h) + \operatorname{ch}(k_1 h))} \frac{\operatorname{sh}(k_1 h)}{kh} - \frac{\chi \operatorname{ch}(k_1 h)}{\mu_r(\mu_r \operatorname{sh}(k_1 h) + \operatorname{ch}(k_1 h))} \right) \right)}$$

$$k_1 a_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 - \frac{2\chi h B_3^2}{\mu_0 \mu_r D} \left( 1 + \frac{\chi(\chi+2)}{\mu_r(\mu_r \operatorname{sh}(k_1 h) + \operatorname{ch}(k_1 h))} \frac{\operatorname{sh}(k_1 h)}{k_1 h} - \frac{\chi \operatorname{ch}(k_1 h)}{\mu_r(\mu_r \operatorname{sh}(k_1 h) + \operatorname{ch}(k_1 h))} \right)}} + m_1 \pi$$

Одним из примеров рассматриваемых конструкций электротехнического оборудования является геркон (герметизированный магнитоуправляемый контакт) [57, 58], изменяющий состояние электрической цепи посредством механического ее замыкания или размыкания контактов 1,2,3 при воздействии управляющего внешнего магнитного поля, создаваемого проходящим по обмотке 5 электрическим током или внешним магнитом 6 (рисунок 2.7). Для анализа динамического поведения контактных сердечников необходима информация о спектре собственных частот колебаний.

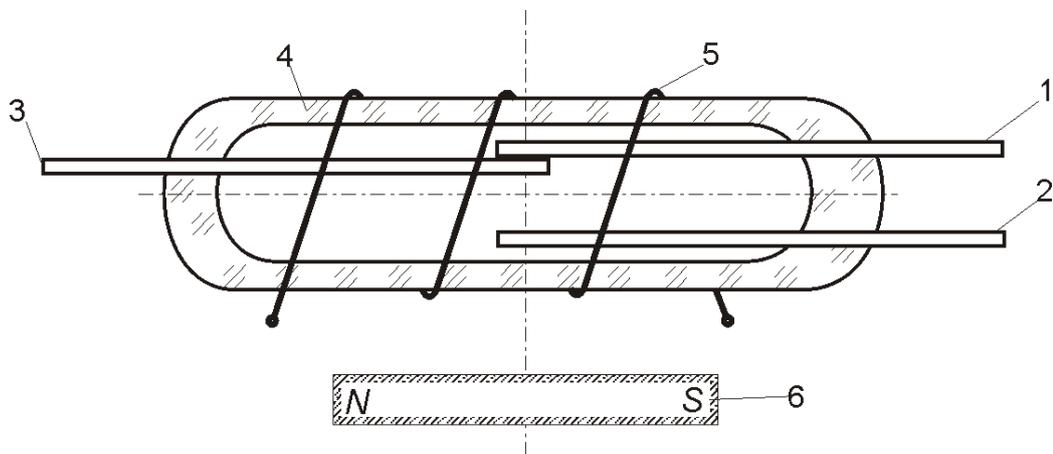


Рисунок 2.7 Принципиальная схема герконового реле: 1, 2, 3 - контактные сердечники (1 - неподвижный алюминиевый; 2, 3 - подвижные ферромагнитные); 4 - герметизирующий баллон; 5 и 6 - элементы управления (5 - обмотка; 6 - постоянный магнит)

На рисунок 2.8 приведены первая и вторая соответственно собственные частоты колебаний консольной пластины при цилиндрической изгибе. Пластина изготовлена из ферромагнитного материала, применяемого для контактных сердечников герконов КЭМ-1, и имеет размеры  $a_1 = 25$  мм,  $2h = 1.5$  мм [60]. Как видно из графиков первая собственная частота колебаний пластины при увеличении индукции магнитного поля уменьшается и при определенном значении напряженности магнитного поля пластина теряет устойчивость.

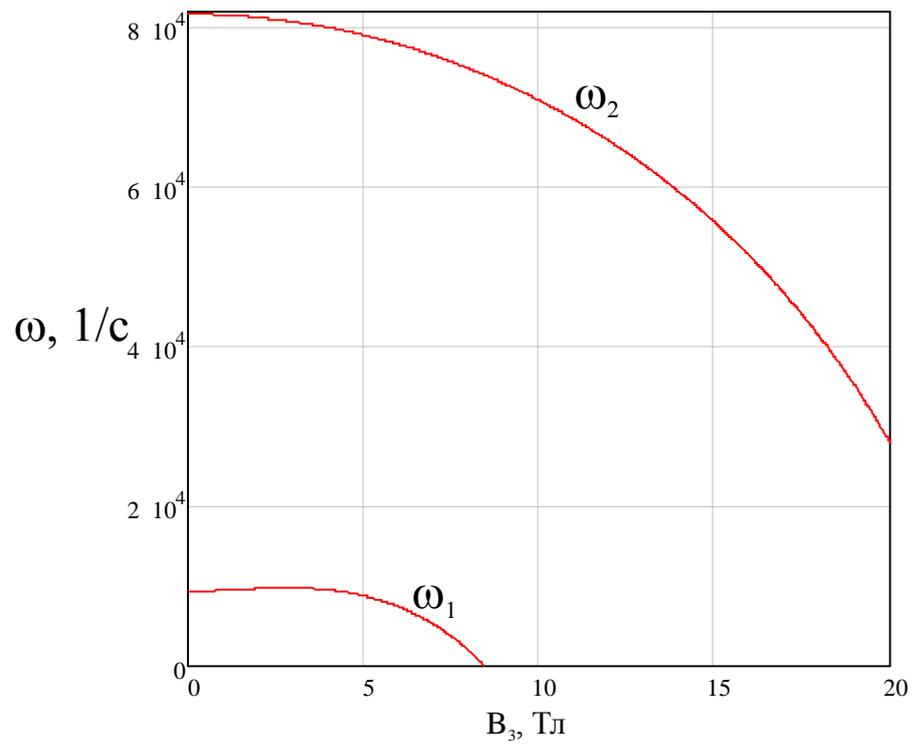


Рисунок 2.8 Зависимость первой и второй частот колебаний железной пластины от индукции магнитного поля при цилиндрическом изгибе

## ГЛАВА 3 ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

### 3.1 Построение решений типа динамических краевых эффектов для жестко заземленного края пластины в продольном магнитном поле

Рассмотрим колебания ферромагнитной пластины во внешнем постоянном продольном магнитном поле. Уравнение колебаний проводящей ферромагнитной пластины в продольном магнитном поле имеет вид (1.12).

Представим решение для функции прогибов в виде (2.1) и подставим его в уравнение (1.12), в результате получим уравнение [3]

$$\left[1 + \frac{\mu_0 \sigma h}{k} i\omega\right] (D\Delta\Delta\varphi + 2\rho h\omega^2) + N_* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - C_* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} i\omega = 0. \quad (3.1)$$

где  $N_*$ ,  $C_*$  - величина, зависящая от параметров магнитного поля и определяется по формуле (1.13).

Согласно асимптотическому методу В.В. Болотина (АМБ) порождающее решение имеет вид (2.3). Подставив решение (2.3) в уравнение (3.1), получим уравнение для нахождения собственных частот магнитоупругих колебаний ферромагнитной пластины в продольном магнитном поле

$$\left[1 + \frac{\mu_0 \sigma h}{k} i\omega\right] (D(k_1^2 + k_2^2)^2 - 2\rho h\omega^2) - N_* k_1^2 + C_* i\omega k_1^2 = 0. \quad (3.2)$$

Решение уравнения производим с помощью математического пакета MathCad 14. В результате получаем комплексные значения, действительная часть которых – собственные частоты колебаний пластин, мнимая часть - коэффициент демпфирования упругих колебаний.

Для диэлектрической ферромагнитной пластины ( $\sigma \rightarrow 0$ ) демпфирующее влияние магнитного поля исчезает и уравнение поперечных колебаний представляется в виде (1.15). Подставляя решение для прогиба в виде (2.1) в уравнение (1.15) получим уравнение для форм колебаний

$$D\Delta\Delta\varphi - 2\rho h\omega^2\varphi + N_*\Delta\varphi = 0 \quad (3.3)$$

Частота упругих колебаний диэлектрической пластины определяется по формуле:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{1}{2\rho h} (D(k_1^2 + k_2^2)^2 - N_* k_1^2)}. \quad (3.4)$$

где  $N_*$  определяется по формуле (1.8)

Для шарнирно опертой пластины волновые числа  $k_1$  и  $k_2$  известны, и определяются по формуле (2.9).

Рассмотрим жестко защемленный край ферромагнитной пластины, которая находится в продольном магнитном поле. Граничные условия имеют вид (2.10). Решение вблизи границы  $x_1=0$  ищем в виде (2.11)

Подставляем решение (2.11) и выражение для собственной частоты (3.4) в уравнение (3.3), получим дифференциальное уравнение

$$\Phi^{IV} - \left(2 \cdot k_2^2 - \frac{N_*}{D}\right) \cdot \Phi'' + \left[k_2^4 - (k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{N_*}{D} \cdot k_1^2\right] \cdot \Phi = 0. \quad (3.5)$$

Будем искать решение уравнения (3.5) в виде (2.13). После подстановки (2.13) в (3.5) получим характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \left(2 \cdot k_2^2 - \frac{N_*}{D}\right) \cdot \lambda^2 + k_2^4 - (k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{N_*}{D} \cdot k_1^2 = 0. \quad (3.6)$$

Решение этого уравнения будет иметь вид

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left(2 \cdot k_2^2 - \frac{N_*}{D}\right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(2 \cdot k_2^2 - \frac{N_*}{D}\right)^2 - 4 \left[k_2^4 - (k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{N_*}{D} \cdot k_1^2\right]}$$

Упростив выражения, получим

$$\lambda_1^2 = \left(k_1^2 + 2 \cdot k_2^2 - \frac{N_*}{D}\right)$$

$$\lambda_2^2 = -k_1^2$$

Обозначим

$$r_1 = \sqrt{k_1^2 + 2 \cdot k_2^2 - N_*/D}. \quad (3.7)$$

Получим корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \pm r_1; \quad \lambda_{3,4} = \pm i \cdot k_1. \quad (3.8)$$

Мнимые корни соответствуют порождающему решению, действительные корни – корректирующим решениям. Общее решение уравнения (3.5) имеет вид (2.17).

Дальнейшее построение решений типа ДКЭ согласно процедуре АМБ аналогично случаю колебаний в поперечном магнитном поле. В итоге получим соотношения для определения фазовых постоянных, имеющие вид (2.21), где  $r_1$  определяется согласно (3.7).

Для жестко заземленной по всем краям пластины, находящейся в продольном магнитном поле, граничные условия имеют вид (2.22).

Аналогично случаю колебаний жестко заземленной пластины в поперечном магнитном поле, для продольного магнитного поля будем иметь систему трансцендентных уравнений относительно волновых чисел  $k_1$  и  $k_2$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{a_1} \left( 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{k_1}{r_1} + m_1 \cdot \pi \right) \\ k_2 = \frac{1}{a_2} \left( 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{k_2}{r_2} + m_2 \cdot \pi \right) \end{cases} \quad (3.9)$$

где введено обозначение

$$r_2 = \sqrt{k_2^2 + 2 \cdot k_1^2 - N_* / D} \quad (3.10)$$

Определив волновые числа  $k_1$  и  $k_2$  из решения системы трансцендентных уравнений (3.9) и подставив их в соотношение (3.4), можем вычислить собственные частоты колебаний жестко заземленной пластины в продольном магнитном поле.

### 3.2 Построение решений типа динамических краевых эффектов свободного края пластины в продольном магнитном поле

Рассмотрим свободный край пластины, которая находится в продольном магнитном поле. Граничные условия имеют вид (2.29).

Решение вблизи границы  $x_1=0$  ищем в виде (2.11). Общее решение имеет вид (2.17).

После подстановки решения (2.18), описывающего динамический краевой эффект, в граничные условия (2.29), получим систему уравнений

$$\begin{cases} r_1^2 \cdot C_2 + k_1^2 \cdot C_1 \cdot \sin(k_1 \cdot \xi_1) - \nu \cdot k_2^2 \cdot C_2 + \nu \cdot k_2^2 \cdot C_1 \cdot \sin(k_1 \cdot \xi_1) = 0 \\ -r_1^3 \cdot C_2 - k_1^3 \cdot C_1 \cdot \cos(k_1 \cdot \xi_1) + (2-\nu) \cdot k_2^2 \cdot [r_1 \cdot C_2 - k_1 \cdot C_1 \cdot \cos(k_1 \cdot \xi_1)] = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Данная система имеет нетривиальное решение, если определитель системы равен нулю

$$\begin{vmatrix} r_1^2 - \nu \cdot k_2^2 & (k_1^2 + \nu \cdot k_2^2) \cdot \sin(k_1 \cdot \xi_1) \\ -r_1 \cdot [r_1^2 - (2-\nu) \cdot k_2^2] & -k_1 \cdot (k_1^2 + (2-\nu) \cdot k_2^2) \cdot \cos(k_1 \cdot \xi_1) \end{vmatrix} = 0$$

Раскрыв данный определитель, получим

$$k_1 \cdot \xi_1 = \arctg \frac{k_1 \cdot (k_1^2 + (2-\nu) \cdot k_2^2) \cdot (r_1^2 - \nu \cdot k_2^2)}{r_1 \cdot [r_1^2 - (2-\nu) \cdot k_2^2] \cdot (k_1^2 + \nu \cdot k_2^2)} + m_1 \cdot \pi. \quad (3.12)$$

Для пластины со свободными краями, находящейся в продольном магнитном поле, граничные условия имеют вид (2.32).

Исходя из выражения (3.12), полученного для края  $x_1=0$ , по аналогии получаем соотношение для края  $x_1=a_1$ . Из условия стыковки решений получим первое трансцендентное уравнение для определения волновых чисел для пластины с двумя противоположными свободными краями

$$k_1 \cdot a_1 = 2 \cdot \arctg \frac{k_1 \cdot (k_1^2 + (2-\nu) \cdot k_2^2) \cdot (r_1^2 - \nu \cdot k_2^2)}{r_1 \cdot [r_1^2 - (2-\nu) \cdot k_2^2] \cdot (k_1^2 + \nu \cdot k_2^2)} + m_1 \cdot \pi. \quad (3.13)$$

Далее рассматриваем граничные условия при  $x_2=0, a_2$ . Все вычисления в этом случае аналогичны предыдущим. В выражении (3.13) просто производится

замена индексов ("1"↔"2"). Окончательное выражение, аналогичное (3.13), имеет вид

$$k_2 \cdot a_2 = 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{k_2 \cdot (k_2^2 + (2-\nu) \cdot k_1^2) \cdot (r_2^2 - \nu \cdot k_1^2)}{r_2 \cdot [r_2^2 - (2-\nu) \cdot k_1^2] \cdot (k_2^2 + \nu \cdot k_1^2)} + m_2 \cdot \pi. \quad (3.14)$$

Проделав выкладки, аналогичные 2.2, приходим к системе трансцендентных уравнений для определения волновых чисел пластины со свободными краями, совершающей колебания в продольном магнитном поле

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{a_1} \left( 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{k_1 \cdot (k_1^2 + (2-\nu) \cdot k_2^2) \cdot (r_1^2 - \nu \cdot k_2^2)}{r_1 \cdot [r_1^2 - (2-\nu) \cdot k_2^2] \cdot (k_1^2 + \nu \cdot k_2^2)} + m_1 \cdot \pi \right) \\ k_2 = \frac{1}{a_2} \left( 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{k_2 \cdot (k_2^2 + (2-\nu) \cdot k_1^2) \cdot (r_2^2 - \nu \cdot k_1^2)}{r_2 \cdot [r_2^2 - (2-\nu) \cdot k_1^2] \cdot (k_2^2 + \nu \cdot k_1^2)} + m_2 \cdot \pi \right) \end{cases} \quad (3.15)$$

Здесь  $r_1$  – соответствует выражению (3.7),  $r_2$  – выражению (3.10).

Определив волновые числа  $k_1$  и  $k_2$  из решения системы трансцендентных уравнений (3.15) и подставив их в соотношение (3.4), можем вычислить собственные частоты колебаний свободной по всем краям пластины в продольном магнитном поле.

### 3.3 Построение решений для частот колебаний пластин с различными условиями закрепления краев в продольном магнитном поле

Для построения системы уравнений типа (3.9) и (3.15) для определения волновых чисел для пластин, совершающих колебания в продольном магнитном поле, с другими типами закрепления краев удобно воспользоваться общей процедурой условий склеивания решений [9].

Требование, чтобы с точностью до динамических краевых эффектов все четыре решения совпадали, сводится к условию, чтобы фазовые постоянные, найденные для двух противоположных сторон, отличались на число, кратное  $\pi$ .

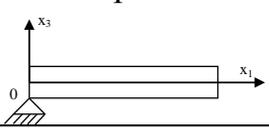
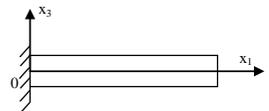
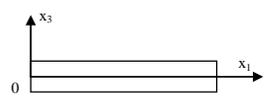
Условия склеивания имеют вид

$$\begin{cases} k_1 \cdot a_1 = \arctg u_{11}(k_1, k_2) + \arctg u_{12}(k_1, k_2) + m_1 \cdot \pi, \\ k_2 \cdot a_2 = \arctg u_{21}(k_1, k_2) + \arctg u_{22}(k_1, k_2) + m_2 \cdot \pi. \end{cases} \quad (3.16)$$

В случае продольного магнитного поля соответствующие функции  $u_{\alpha\beta}(k_1, k_2)$  и отношения коэффициентов  $C_2/C_1$  порождающего решения (2.18) для основных типов закрепления краев пластин приведены в таблице 3.1.

Построив систему трансцендентных уравнений для определения волновых чисел и последующего вычисления собственных частот колебаний по (3.4), можно произвести расчет спектров частот колебаний пластин в продольном магнитном поле с любыми краевыми условиями.

Таблица 3.1 Функции  $u_{\alpha\beta}(k_1, k_2)$  и отношения коэффициентов  $C_2/C_1$  при различных граничных условиях на краю  $x_1=0$

Тип закрепления	Граничные условия	Выражения для нахождения волновых чисел $F(k_1, k_2)$	Константа интегрирования $C$
<p>Шарнирное оперение</p> 	$x_1 = 0 \quad \begin{cases} \phi = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0 \end{cases}$	$k_1 = \frac{m_1 \pi}{a_1}; \quad k_2 = \frac{m_2 \pi}{a_2}$	0
<p>Заделка</p> 	$x_1 = 0 \quad \begin{cases} \phi = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$	$k_1 \xi_1 = \arctg \frac{k_1}{r} + m_1 \pi$	$C_2 = \frac{k_1}{\sqrt{r^2 + k_1^2}}$
<p>Свободный край</p> 	$x_1 = 0 \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_1^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_1 \partial x_2^2} = 0 \end{cases}$	$k_1 \xi_1 = \arctg \frac{k_1 (k_1^2 + (2 - \nu) k_2^2) (r^2 - \nu k_2^2)}{r (r^2 - (2 - \nu) k_2^2) (k_1^2 + \nu k_2^2)} + m_1 \pi$	$C_2 = -\frac{\operatorname{tg}(k_1 \xi_1)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(k_1 \xi_1)}} \frac{(k_1^2 + \nu k_2^2)}{r^2 - \nu k_2^2}, \text{ где}$ $\operatorname{tg}(k_1 \xi_1) = \frac{k_1 (k_1^2 + (2 - \nu) k_2^2) (r^2 - \nu k_2^2)}{r (r^2 - (2 - \nu) k_2^2) (k_1^2 + \nu k_2^2)}$

### 3.4 Численный анализ влияния продольного магнитного поля на частоты колебаний пластин с различными граничными условиями

Используя полученные системы трансцендентных уравнений, находим волновые числа и собственные частоты пластин с использованием математического пакета *MATLAB 7.0*.

Собственные частоты определялись для квадратных пластин, изготовленных из стали - модуль упругости  $E = 200 \cdot \text{ГПа}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,28$ , плотность  $\rho = 7700 \text{ кг/м}^3$ , магнитная проницаемость  $\mu_r = 5000$  и электропроводность  $\sigma = 0,21 \cdot 10^7 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$  и из феррита Ф-107 - модуль упругости  $E = 172 \cdot \text{ГПа}$ , плотность  $\rho = 5260 \text{ кг/м}^3$ , магнитная проницаемость  $\mu_r = 30$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,30$ , электропроводность  $\sigma = 1,00 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$ . с различными условиями закрепления при различных значениях индукции поперечного магнитного поля. В расчетах принято  $a_1 = a_2 = 0,2 \text{ м}$ ,  $2h = 1 \text{ мм}$ ,  $2h = 2 \text{ мм}$  и  $2h = 3 \text{ мм}$ .

Численные результаты приводятся для безразмерных собственных частот колебаний пластины:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega \cdot a_1 a_2}{\pi^2} \sqrt{\frac{2\rho h}{D}}, \quad (3.12)$$

где  $\omega$  определяется из уравнения (3.2) для конечно проводящих пластин и по формуле (3.4) для диэлектрической пластин.

На рисунке 3.1 приведены зависимости основной частоты колебаний  $\omega_{11}$  от индукции магнитного поля для ферритовой пластин в продольном магнитном поле при различных толщинах пластины ( $2h = 1 \text{ мм}$ ,  $2 \text{ мм}$ ,  $3 \text{ мм}$ ). Чем тоньше пластина, тем сильнее влияние магнитного поля. Сплошная кривая построена для модели конечно проводящей пластины, штриховая кривая соответствует модели диэлектрической пластины.

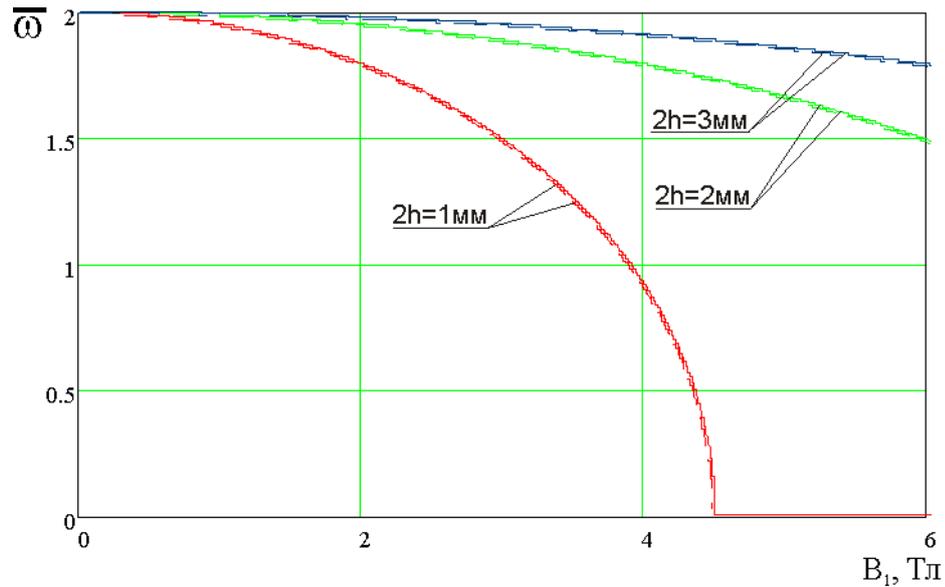


Рисунок 3.1 Зависимость частоты колебаний  $\bar{\omega}$  ферритовой пластины от индукции магнитного поля  $B_1$

( $2h$  - толщина пластины; сплошные кривые – модель конечно проводящей пластины, штриховые кривые – модель диэлектрической пластины)

При колебаниях в продольном магнитном поле конечно проводящей ферромагнитной стальной пластины при определенных значениях толщины пластины частота при увеличении индукции начинает быстро убывать (рисунок 3.1) и при некоторых значениях индукции принимает нулевое значение. Для более толстых пластин ( $2h=3$  мм) наблюдается непрерывное изменение частоты магнитоупругих колебаний с ростом индукции  $B_1$  продольного магнитного поля (рисунок 3.1), что качественно совпадает с результатами экспериментов, приведенных другими авторами в [47].

Продольное магнитное поле понижает собственные частоты колебаний ферромагнитных пластин, изготовленных из диэлектрических материалов. Значения частот диэлектрических пластин и конечно проводящих весьма близки (рисунок 3.1). При определенных значениях индукции магнитного поля пластина теряет устойчивость. Приравняв  $\omega = 0$  получим соотношение для критического

значения магнитной индукции  $B_{1*}$  диэлектрических пластин, при котором пластина теряет устойчивость:

$$B_{1*} = \sqrt{\frac{D(k_1^2 + k_2^2)^2 \mu_0 \mu_r}{2\chi h k_1^2}}. \quad (3.13)$$

Для технически реальных значений индукции внешнего магнитного поля ( $B_1 \leq 2$  Тл) различия в значениях собственных частот колебаний пластин, вычисленных по модели диэлектрической пластины (3.4) и конечно проводящей пластины (3.2), не существенны, и поэтому для расчета собственных частот колебаний пластин с различными краевыми условиями можно применять асимптотический метод В. В. Болотина (АМБ) [9], основываясь на уравнениях для диэлектрических пластин.

В таблице 3.2 приведены значения собственных частот колебаний для консольной (жестко заземленной со стороны  $x_1 = 0$ ) пластины изготовленной из стали с параметрами:  $a_1 = a_2 = 20$  см,  $2h = 1$  мм при различных значениях чисел  $m_1$ ,  $m_2$  и индукции магнитного поля  $B_1 = 0$  и  $B_1 = 1.0$  Тл. В таблице 3.3 приведены значения собственных частот колебаний для пластины, изготовленной из стали с параметрами:  $a_1 = a_2 = 20$  см,  $2h = 1$  мм шарнирно-опертых и жестко-заземленных при различных значениях чисел  $m_1$ ,  $m_2$  и индукции магнитного поля  $B_3 = 0$  и  $B_3 = 1$  Тл. Как видно из таблиц 3.2-3.3 наименьшее значение основной собственной частоты соответствует консольной пластине. Наибольшее значение основной частоты соответствует жестко заземленной пластине.

Значения частот колебаний пластин в вакууме при других краевых условиях, рассчитанных с помощью программного комплекса [71-75], совпадают со значениями частот, представленных в [9].

Таблица 3.2 Значения собственных частот колебаний консольной квадратной пластины

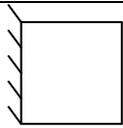
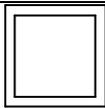
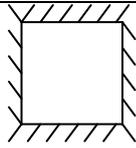
номер частоты	 КОНСОЛЬНАЯ			
	$B_3 = 0$ Тл	$B_3 = 1.0$ Тл	$m_1$	$m_2$
1	<b>0.8064</b>	<b>0.8850</b>	0	0
2	2.6828	2.7312	0	1
3	3.0757	3.0640	1	0
4	5.4385	5.4435	1	1
5	6.5629	6.5929	0	2
6	7.0907	7.0462	2	0
7	9.3826	9.3922	1	2
8	9.7922	9.7659	2	1
9	12.4887	12.5103	0	3
10	13.0567	12.9979	3	0
11	14.0723	14.0588	2	2
12	15.2169	15.2268	1	3
13	15.9118	15.8666	3	1
14	20.0625	20.0563	2	3
15	20.4650	20.4331	3	2

Таблица 3.3 Значения собственных частот колебаний жестко заземленной и шарнирно-опертой квадратной пластины

$m_1$	$m_2$	 Шарнирно-опертая		 Жестко заземленная	
		$B_3 = 0$ Тл	$B_3 = 1$ Тл	$B_3 = 0$ Тл	$B_3 = 1$ Тл
1	1	2	<b>1.9549</b>	<b>3.5556</b>	<b>3.5357</b>
1	2	5	4.9821	7.3866	7.3876
1	3	10	9.9911	13.3368	13.3426
1	4	17	16.9948	21.3141	21.3208
2	1	5	4.9821	7.3866	7.3876
2	2	8	7.9553	10.8889	10.8583
2	3	13	12.9725	16.6559	16.6404
2	4	20	19.9822	24.5397	24.5322
3	1	10	9.9911	13.3368	13.3426
3	2	13	12.9725	16.6559	16.6404
3	3	18	17.9554	22.2222	22.1875
3	4	25	24.9679	29.9605	29.9371
4	1	17	16.9948	21.3141	21.3208
4	2	20	19.9822	24.5397	24.5322
4	3	25	24.9679	29.9605	29.9371
4	4	32	31.9554	37.5556	37.5185

На основе полученных АМБ соотношений для частот и форм колебаний пластин можно построить формы колебаний. На рисунках 3.2-3.3 приведены формы колебаний для ферритовой пластины с двух противоположных сторон жестко заземленной и с двух свободной, находящейся в продольном магнитном поле с магнитной индукцией  $B_3 = 0.5$  Тл при  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0$  рисунок 3.2 и  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 1$  рисунок 3.3.

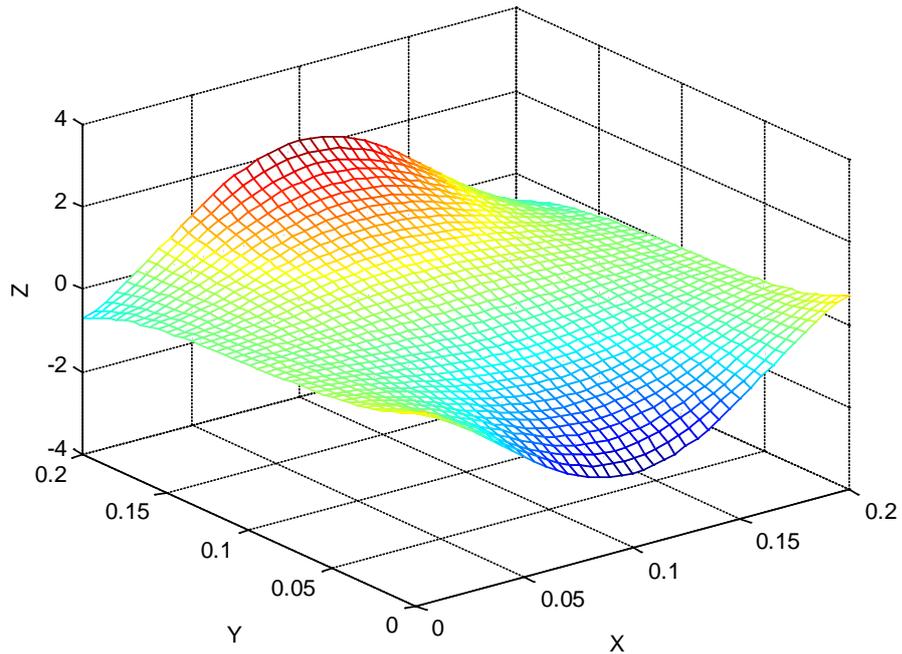


Рисунок 3.2 Форма колебаний пластины с двух противоположных сторон жестко защемленной и с двух свободной при  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0$

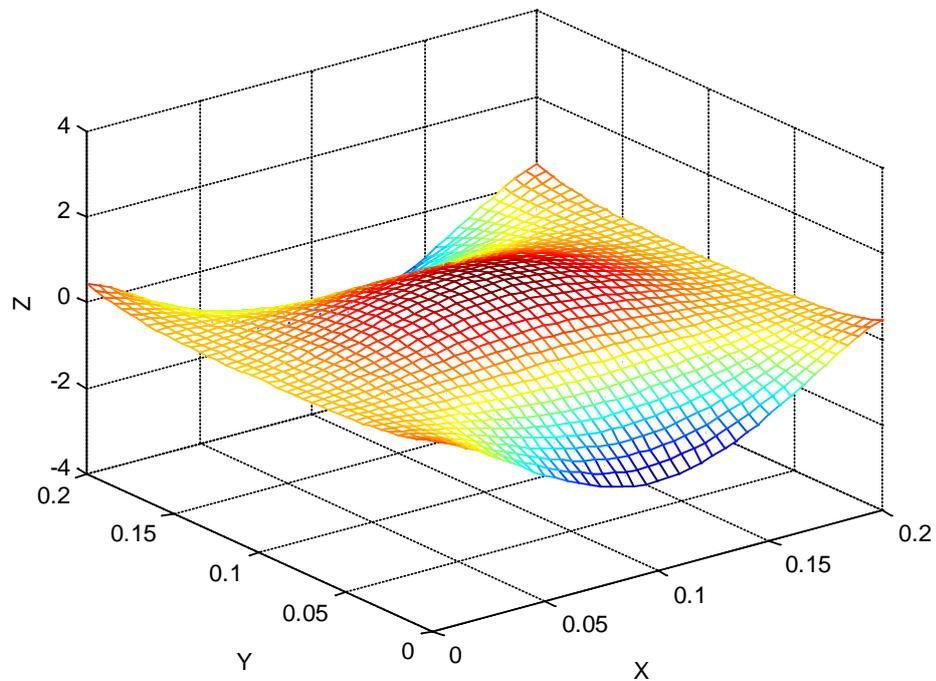


Рисунок 3.3 Форма колебаний пластины с двух противоположных сторон жестко защемленной и с двух свободной при  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 1$

Разработанная методика расчета спектров частот магнитоупругих колебаний ферромагнитных прямоугольных пластин при различных условиях закрепления краев позволяет производить проектирование тонкостенных элементов конструкций электротехнического оборудования.

Для случая цилиндрического изгиба консольной пластины (стержневая модель,  $k_2 = 0$ ) соотношение для частот и трансцендентное уравнение для определения волновых чисел имеют вид:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2\rho h} (Dk_1^4 - N_*k_1^2)} \quad (3.14)$$

$$k_1 a_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 - \frac{N_*}{D}}} + m_1 \pi \quad (3.15)$$

где  $N_* = \frac{2\chi h B_1^2}{\mu_0 \mu_r}$

В качестве примера для расчета частот колебаний консольного стержня рассматривался контактный сердечник (КС) геркона КЭМ-1, изготовленный из ферромагнитного материала и имеющий размеры  $a_1 = 20$  мм,  $2h = 1$  мм. Результаты расчетов первой и второй собственных частот колебаний КС в зависимости от величины индукции магнитного поля приведены на рисунке 3.4 (кривые 1,2 соответственно). Как видно из графиков первая собственная частота колебаний пластины при увеличении индукции магнитного поля уменьшается и при определенном значении напряженности магнитного поля стержень-пластина теряет устойчивость.

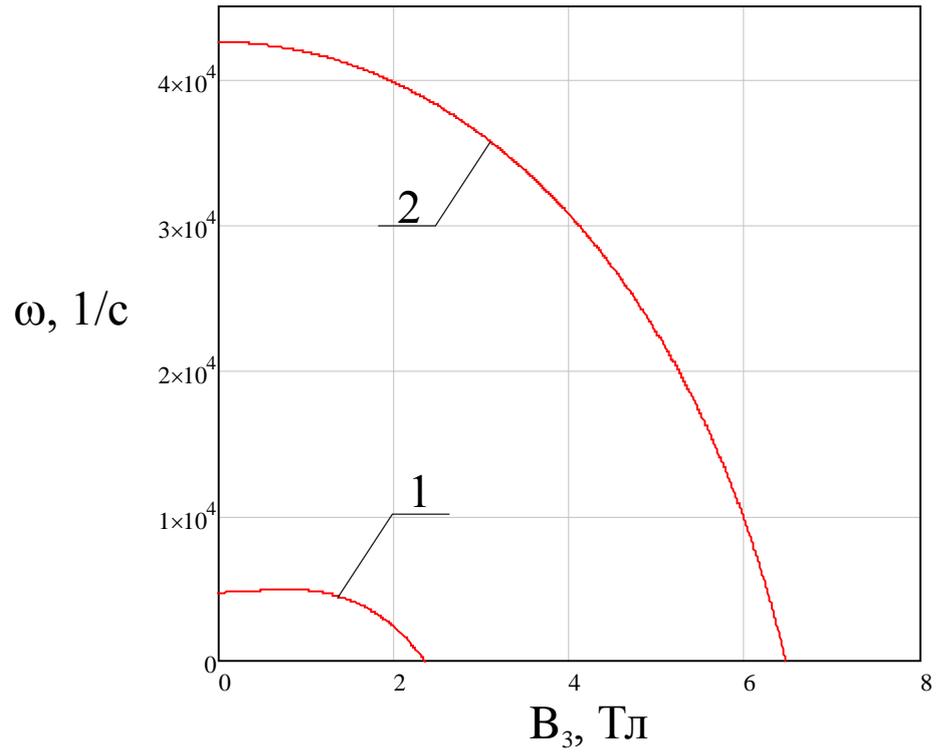


Рисунок 3.4 Зависимость первой и второй частот колебаний железной пластины-стержня от индукции продольного магнитного поля

## ГЛАВА 4. ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПЛАСТИН В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

### 4.1 Устойчивость диэлектрической ферромагнитной пластины в переменном поперечном магнитном поле

Рассмотрим упругую шарнирно-опертую по краям  $x_1 = 0, l$  прямоугольную пластину толщиной  $2h$ , отнесенную к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  и которая в силу нагружения и закрепления находится в состоянии цилиндрического изгиба. Систему координат  $Ox_1x_2$  свяжем со срединной плоскостью пластины, а длину стороны в направлении оси  $Ox_1$  обозначим через  $l$ . Прогиб пластины обозначим через  $w(x_1, t)$ .

Пластина изготовлена из упругого магнитомягкого диэлектрического ферромагнитного материала и колеблется во внешнем переменном поперечном магнитном поле с вектором магнитной индукции  $\vec{B}(0; 0; B_3)$ , нормальным к поверхности пластины (рисунок 4.1).

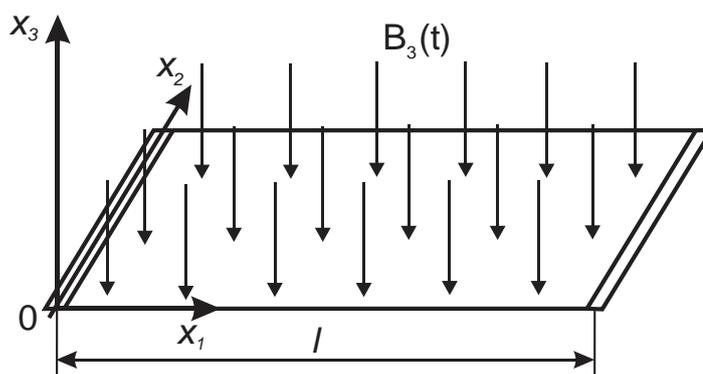


Рисунок 4.1 Пластина в поперечном магнитном поле

На основе допущений, изложенных в [3] считаем, что влиянием токов проводимости можно пренебречь, магнитное поле в колеблющейся пластине в любой момент времени определяется магнитным полем стационарной пластины, имеющей мгновенную конфигурацию реальной пластины.

Внешнее магнитное поле меняется по гармоническому закону:

$$B_3(t) = B_0 \cos \Omega t, \quad (4.1)$$

и предполагается однородным, но зависящим от времени с достаточно низкой частотой для того, чтобы не нарушать предположение о квазистатичности -  $\Omega < 2 / \mu_0 \mu_r \sigma h^2$ . Здесь  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$  – магнитная постоянная,  $\mu_r$  – относительная магнитная проницаемость материала пластины,  $\sigma$  – коэффициент электропроводности пластины.

Уравнения связанных магнитоупругих колебаний пластин в магнитном поле дополняются уравнениями Максвелла для определения компонент невозмущенного и возмущенного магнитного поля. В работах [1,2], для тонкостенной пластины получены сингулярные интегро-дифференциальные уравнения относительно параметров магнитного поля. При определении параметров магнитного поля решения для возмущений и потенциалов, входящих в уравнение движения пластины, искали в классе гармонических функций [1,2], зависящих от неизвестных волновых чисел. На основе принятых предположений имеем следующее уравнение колебаний диэлектрической ферромагнитной пластины в поперечном магнитном поле [3]:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (4.2)$$

где  $w(x_1, t)$  – нормальный прогиб пластины,  $D = 2Eh^3 / 3(1 - \nu^2)$  – цилиндрическая жесткость,  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\rho$  – плотность материала пластины,  $N_1$  – коэффициент, зависящий от индукции магнитного поля  $B_3$  и магнитных характеристик материала пластины [3, 5]:

$$N_1 = \frac{2\chi h B_3^2(t)}{\mu_0(1 + \mu_r k_1 h)}, \quad (4.3)$$

где  $\chi = (\mu_r - 1)$  – магнитная восприимчивость,  $k_1$  – волновое число,

Для случая шарнирно опертой по обоим краям пластины функция прогибов для гармонических колебаний имеет вид [8, 9]:

$$w(x_1, t) = f(t) \sin(k_1 x_1), \quad (4.4)$$

где  $k_1$  - волновое число, которое для шарнирно опертой пластины имеет вид:  
 $k_1 = m_1 \pi / a_1$  ( $m_1 = 1, 2, \dots$ ).

Подставляя (4.4) в (4.2) получаем уравнение для определения функции  $f(t)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{Dk_1^4}{2\rho h} \left(1 - \frac{N_1}{Dk_1^2}\right) f = 0. \quad (4.5)$$

После подстановки в (4.5) соотношения (4.3) и ряда преобразований получим следующее уравнение для функции  $f(t)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_m^2 \left(1 - \frac{B_3^2(t)}{B_{кр}^2}\right) f = 0, \quad (4.6)$$

где  $\omega_m^2 = Dk_1^4 / 2\rho h$  - квадрат частоты колебаний пластины при отсутствии магнитного поля,  $B_{кр}^2 = Dk_1^2 \mu_0 (1 + \mu_r k_1 h) / (2\chi h)$  - значение индукции внешнего поперечного магнитного поля, при котором происходит потеря статической устойчивости в магнитном поле [2, 5].

Для гармонического закона изменения индукции внешнего магнитного поля (4.1) уравнение (4.6) с учетом соотношения  $B_3^2(t) = B_0^2 \cos^2 \Omega t = B_0^2 (1 + \cos 2\Omega t) / 2$  принимает вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_{bm}^2 (1 - 2\eta_m \cos \Omega t) f = 0, \quad (4.7)$$

где

$$\omega_{bm}^2 = \omega_m^2 (1 - B_0^2 / 2B_{эд}^2), \quad (4.8)$$

$$2\eta_m = B_0^2 / (2B_{эд}^2 - B_0^2). \quad (4.9)$$

Уравнение (4.7) представляет собой уравнение Матье. Его решение может быть неустойчивым и устойчивым во времени в зависимости от значений как параметров  $\omega_{bm}$  и  $\eta_m$ , так и частоты возбуждения  $\Omega$ .

Для построения границ областей неустойчивости воспользуемся трансцендентным выражением, полученным Хиллом [9] (при достаточно малых значениях параметра  $\eta_m$ ):

$$\Omega = \frac{2\omega_{bm}}{p} \sqrt{1 \pm \eta_m}. \quad (4.10)$$

В соответствии с теоремой Хаупта:

$$\sqrt{1-\eta_m} < \frac{\Omega}{2\omega_{bm}} < \sqrt{1+\eta_m}$$

при  $p = 1$ , имеем главную область параметрического резонанса:

$$\Omega = 2\omega_{bm}\sqrt{1\pm\eta_m}. \quad (4.11)$$

Рассмотрим решение этого уравнения на плоскости  $(\Omega/\omega_m)$ - $\eta_m$ . После преобразований (4.10) получим:

$$\Omega/\omega_m = \sqrt{\frac{4(1\pm\eta_m)}{p^2(1+2\eta_m)}}. \quad (4.12)$$

Здесь  $\eta_m$  определяется соотношением (4.9)

На рисунке 4.2 показаны результаты численного построения областей неустойчивости для основной формы колебаний ( $m_1=1$ ). Вдоль линий, отмеченных символами  $a_1$  и  $b_1$ , решения являются периодическими с периодом  $2\pi/\Omega$ . Площадь, ограниченная этими двумя линиями отмечена вертикальной штриховкой и является главной областью неустойчивости.

Вдоль линий, отмеченных символами  $a_2$  и  $b_2$ , решения являются периодическими с периодом  $4\pi/\Omega$ . Они ограничивают вторую область неустойчивости для основной формы колебаний, отмеченной горизонтальной штриховкой. Поперечное переменное магнитное поле может приводить к динамической потере устойчивости.

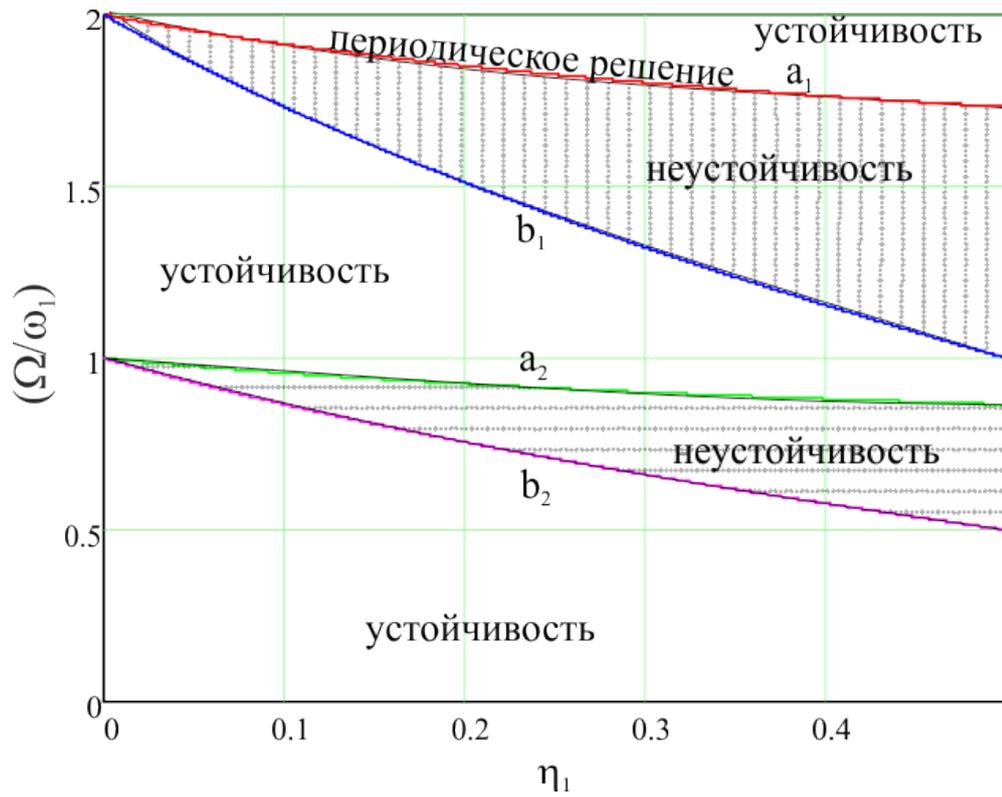


Рисунок 4.2 Теоретические области неустойчивости пластины в осциллирующем магнитном поле

## 4.2 Устойчивость диэлектрической ферромагнитной пластины под действием переменных продольных сил в поперечном магнитном поле

Рассмотрим шарнирно-опертую пластину, находящуюся в постоянном поперечном магнитном поле с индукцией  $B_3$  и нагруженную сжимающими усилиями  $P(t)$  переменными во времени (рисунок 4.3):

$$P(t) = P_0 + P_1 \cos \Omega t. \quad (4.13)$$

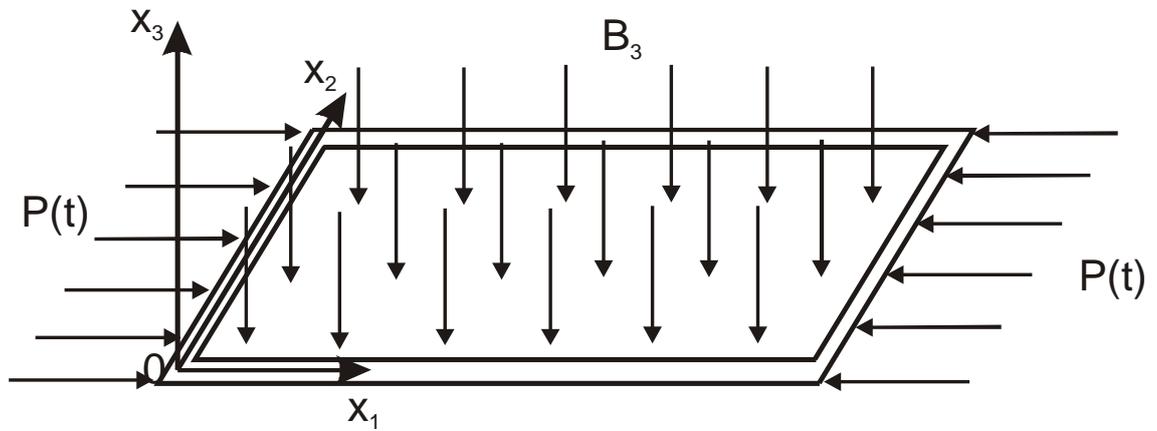


Рисунок 4.3 Пластина в постоянном поперечном магнитном поле при сжатии в продольном направлении

Уравнение колебаний диэлектрической пластины в поперечном магнитном поле имеет вид [3]:

$$D\Delta\Delta w + N\Delta w + P(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (4.14)$$

здесь  $N$  - коэффициент, зависящий от индукции магнитного поля  $B_3$  и магнитных характеристик материала пластины [2, 5]:

$$N = \frac{2\chi h B_3^2}{\mu_0(1 + \mu_r kh)}, \quad (4.15)$$

где  $k^2 = (k_1^2 + k_2^2)$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  - волновые числа.

Для случая шарнирно опертой по обоим краям пластины функция прогибов для гармонических колебаний имеет вид [9]:

$$w(x_1, x_2, t) = f(t) \sin(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2). \quad (4.16)$$

Волновые числа для шарнирно опертой пластины имеют вид:  $k_1 = m\pi/a_1$ ,  
 $k_2 = n\pi/a_2$  ( $m, n=1, 2, \dots$ ).

Подставляя (4.16) в (4.14) получаем уравнение, которому должна удовлетворять функция  $f(t)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{D(k_1^2 + k_2^2)^2}{2\rho h} \left(1 - \frac{P(t)k_1^2}{D(k_1^2 + k_2^2)^2} - \frac{N}{D(k_1^2 + k_2^2)}\right) f = 0 \quad (4.17)$$

или

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{P(t)}{P_{mn}} - \frac{B_3^2}{B_{\epsilon\delta}^2}\right) f = 0, \quad (4.18)$$

где  $\omega_m^2 = D(k_1^2 + k_2^2)^2 / 2\rho h$  - квадрат частоты колебаний пластины при отсутствии магнитного поля,  $B_{кр}^2 = D(k_1^2 + k_2^2)\mu_0(1 + \mu_r kh) / 2\chi h$  - значение индукции внешнего поперечного магнитного поля, приводящего к потере статической устойчивости ненагруженной пластины;  $P_{mn} = \frac{D(k_1^2 + k_2^2)^2}{k_1^2}$  - значение критического усилия при потере статической устойчивости пластины в отсутствии магнитного поля.

Для случая гармонического изменения продольных сил (4.13) уравнение (4.18) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_{bmn}^2 (1 - 2\eta_m \cos \Omega t) f = 0, \quad (4.19)$$

где

$$\omega_{bmn}^2 = \omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{P_0}{P_{mn}} - \frac{B_3^2}{B_{кр}^2}\right), \quad (4.20)$$

$$2\eta_{mn} = \frac{P_1}{P_{mn}} \left(1 - \frac{P_0}{P_{mn}} - \frac{B_3^2}{B_{кр}^2}\right)^{-1} \quad (4.21)$$

Из (4.19) в случае, когда пластина сжимается статической силой  $P_0$ , ее критическое значение равно:

$$P_{0кр} = P_{mn} \left(1 - \frac{B_3^2}{B_{кр}^2}\right) \quad (4.22)$$

На рисунке 4.4 представлен график зависимости относительной критической статической силы  $P_{0кр} / P_{mn}$  от индукции внешнего поперечного магнитного поля при различных толщинах пластины ( $2h = 0,5$  мм, 1 мм, 1,5 мм).

В расчетах принято  $a_1 = a_2 = 0,05$  м. Пластина изготовлена из феррита - модуль упругости  $E = 172$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , плотность  $\rho = 5260$  кг / м<sup>3</sup>, магнитная проницаемость  $\mu_r = 30$ .

Как видно из графика в случае диэлектрического материала магнитное поле может существенно сузить область статической устойчивости пластин. Большое влияние магнитное поле оказывает на тонкие пластины.

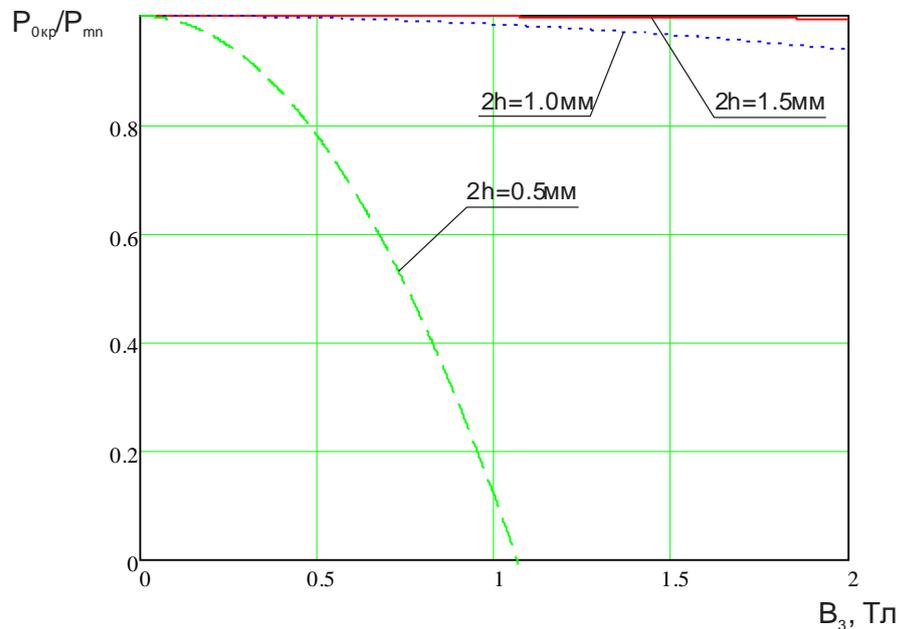


Рисунок 4.4 Зависимость относительной критической статической силы  $P_{0кр} / P_{mn}$  от индукции внешнего поперечного магнитного поля  $B_3$

Уравнение (4.19) представляет собой уравнение Матье. его решение может быть неустойчивым и устойчивым во времени в зависимости от значений как параметров  $\omega_{bm}$  и  $\eta_m$ , так и частоты возбуждения  $\Omega$ .

Для построения границ областей неустойчивости воспользуемся трансцендентным выражением (10), полученным Хиллом [8, 9]. В соответствии с

теоремой Хаупта при  $p = 1$ , имеем главную область параметрического резонанса (4.12)

С учетом соотношений (4.19)-(4.21) формулу (4.12) можно представить в виде:

$$\frac{\Omega}{2\omega_{mn}} = \left( 1 - \frac{P_0}{P_{mn}} - \frac{B_3^2}{B_{kp}^2} \pm \frac{P_1}{2P_{mn}} \right)^{1/2} \quad (4.23)$$

При  $P_0 = 0$  формулы (4.23) имеют вид:

$$\frac{\Omega}{2\omega_{mn}} = \left( 1 - \frac{B_3^2}{B_{kp}^2} \pm \frac{P_1}{2P_{mn}} \right)^{1/2} \quad (4.24)$$

из которых видно, что с увеличением величины магнитной индукции, ширина главной области неустойчивости увеличивается.

На рисунке 4.5 приведен график зависимости ширины главной области динамической неустойчивости  $\theta = \frac{(\Omega^+ - \Omega^-)}{2\omega_{mn}}$  от величины магнитной индукции внешнего магнитного поля при  $m, n = 1, 2h = 1,0$  мм и коэффициенте возбуждения при отсутствии магнитного поля  $\frac{P_1}{2P_{mn}} = 0.3$ .

В случае диэлектрического ферромагнитного материала, магнитное поле увеличивает ширину главной области динамической неустойчивости. Магнитное поле понижает устойчивость пластины.

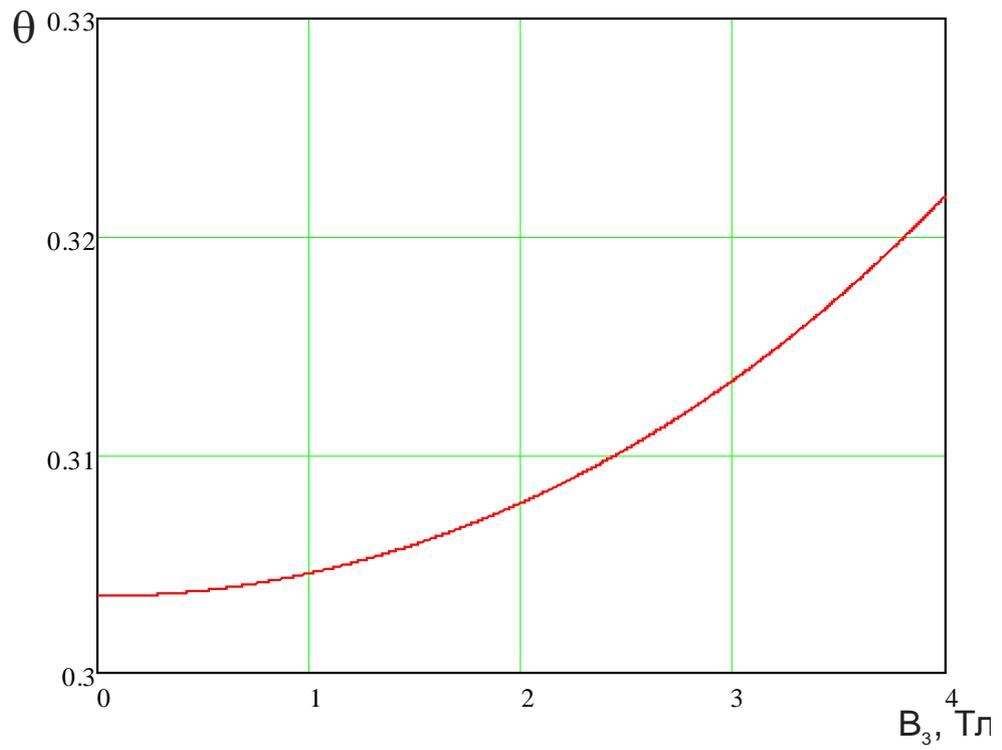


Рисунок 4.5. Зависимость ширины главной области динамической неустойчивости  $\theta$  от величины магнитной индукции внешнего магнитного поля

$B_3$

## ГЛАВА 5. ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

### 5.1 Основные уравнения колебаний цилиндрических оболочек в магнитном поле, создаваемом постоянным линейным током, протекающим по оси цилиндра

Пусть тонкая упругая круговая цилиндрическая оболочка постоянной толщины  $2h$ , конечной длины  $l$  и радиусом кривизны срединной поверхности  $R = const$  отнесена к триортогональной системе координат  $r, \theta, z$ . Оболочка изготовлена из изотропного магнитомягкого ферромагнитного материала с конечной электропроводностью. На поверхности оболочки введем криволинейную систему координат  $x_1, x_2$ . Оболочка находится в магнитном поле, создаваемом постоянным линейным током  $J$ , протекающим по оси цилиндра (рисунок 5.1). В этом случае возникает азимутальное магнитное поле и индукция внешнего магнитного поля  $\vec{B}(0; B_2; 0)$  определяется соотношением:  $B_2 = \mu_0 J / 2\pi R$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$  – магнитная постоянная.

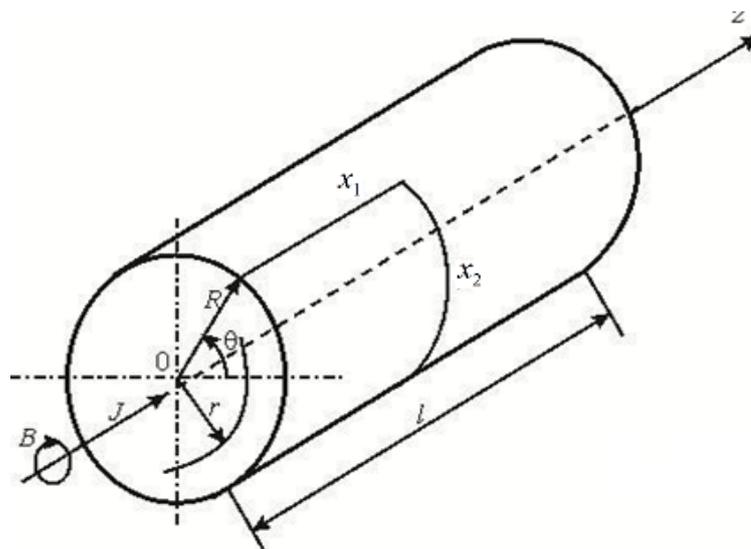


Рисунок 5.1 Цилиндрическая оболочка в азимутальном магнитном поле, создаваемом постоянным линейным током  $J$ , протекающим по оси цилиндра

Упругие и электромагнитные свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$ , плотностью  $\rho$ ;  $\mu_r$  - относительная магнитная проницаемость материала. Полагаем, что все выше приведенные величины остаются постоянными во времени и пространстве.

Классические уравнения для форм колебаний цилиндрических оболочек имеют вид [9]:

$$L_{jk}u_k + \rho h \omega^2 u_k = 0, \quad (5.1)$$

где  $u_1, u_2$  - тангенциальные смещения,  $u_3$  - нормальное смещение, а дифференциальные операторы имеют вид:

$$L_{11} = A \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right), \quad L_{22} = A \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right), \quad L_{33} = D \Delta \Delta + \frac{A}{R^2},$$

$$L_{12} = L_{21} = A \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad L_{13} = L_{31} = \nu \frac{A}{R} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad L_{23} = L_{32} = \frac{A}{R} \frac{\partial}{\partial x_2};$$

Здесь  $A = \frac{Eh_0}{(1-\nu^2)} = \frac{E(2h)}{(1-\nu^2)}$  - жёсткость оболочки на растяжение,

$D = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{(1-\nu^2)}$  - цилиндрическая жёсткость;

Уравнения колебаний цилиндрической оболочки в магнитном поле осевого постоянного линейного тока можно представить в виде аналогичном классической форме (5.1), приняв  $u = u_1$ ,  $v = u_2$ ,  $w = u_3$  [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{\mu_0 \chi}{R} \left( \frac{I}{2\pi R} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{3\nu}{Rh^2} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{3}{Rh^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + D \left[ \Delta \Delta w + \frac{3w}{R^2 h^2} \right] + 2\mu_0 \chi h \left( \frac{I}{2\pi R} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{w}{R^2} \right) - 2\rho h \omega^2 w = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

где  $\Delta$ - оператор Лапласа;  $x_2 = R\theta$ ,  $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$  – цилиндрическая жесткость,  $\chi = (\mu_r - 1)$  - магнитная восприимчивость.

Приведем систему уравнений (5.2) к безразмерному виду. Для этого введем безразмерные параметры:

$$\Omega_R = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad - \quad \text{частота безмоментных колебаний оболочки,} \quad \varpi = \frac{\omega}{\Omega_R} \quad -$$

безразмерная частота,  $k_0^4 = \frac{2Eh}{DR^2}$  - характерное волновое число,  $\alpha_1 = \frac{k_1}{k_0}$ ,  $\alpha_2 = \frac{k_2}{k_0}$  -

безразмерные волновые числа,  $\xi_1 = k_0 x_1$ ,  $\xi_2 = k_0 x_2$  - безразмерные координаты,

$U = k_0 u$ ,  $V = k_0 v$ ,  $W = k_0 w$  - безразмерные формы колебаний. Безразмерная

характеристика индукции магнитного поля -  $\bar{B}_2 = \frac{N}{|N_*|}$ ,  $N = 2\mu_0 \chi h \left( \frac{J}{2\pi R} \right)^2$ ,

$N_* = \frac{4Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}$  - критическое значение усилия для продольно сжатой

цилиндрической оболочки.

После приведения системы уравнений (5.2) к безразмерному виду получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \left[ \frac{\nu}{R} + \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{N}{2hR} \right] \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \frac{1}{k_0} = 0 \\ \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_2^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi_1^2} + \frac{1}{Rk_0} \frac{\partial W}{\partial \xi_2} = 0 \\ \frac{3D}{Rh^2} \left[ \nu \frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \frac{\partial V}{\partial \xi_2} \right] + D \left[ k_0^3 \Delta^2 W + \frac{3W}{k_0 R^2 h^2} \right] + N \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_2^2} + \frac{W}{k_0 R^2} \right) - 2\rho h \frac{E}{\rho k_0 R^2} \varpi^2 W = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Решения для безразмерных форм колебаний шарнирно-опёртой по торцам цилиндрической оболочки возьмём в виде:

$$\begin{aligned} U &= u_0 \cos \alpha_1 \xi_1 \sin \alpha_2 \xi_2 \\ V &= v_0 \sin \alpha_1 \xi_1 \cos \alpha_2 \xi_2 \\ W &= w_0 \sin \alpha_1 \xi_1 \sin \alpha_2 \xi_2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

( $k_1 = m\pi / l$ ,  $k_2 = n / R$  - волновые числа ( $m = 1, 2, \dots$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ )).

Подставим (5.4) в систему уравнений (5.3) и получим однородную систему алгебраических уравнений относительно постоянных  $u_0, v_0, w_0$ . Приравняем к нулю определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1^2 - \frac{(1-\nu)}{2}\alpha_2^2 & -\frac{(1+\nu)}{2}\alpha_2\alpha_1 & \left[ \frac{\nu}{R} + \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{N}{2hR} \right] \frac{1}{k_0}\alpha_1 \\ -\frac{(1+\nu)}{2}\alpha_2\alpha_1 & -\alpha_2^2 - \frac{(1-\nu)}{2}\alpha_1^2 & \frac{1}{Rk_0}\alpha_2 \\ \frac{-3D\nu\alpha_1}{Rh^2} & \frac{-3D\alpha_2}{Rh^2} & D \left[ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 k_0^3 + \frac{3}{k_0 R^2 h^2} \right] + \\ & & + N \left( \frac{1}{k_0 R^2} - \alpha_2^2 \right) - 2\rho h \frac{E}{\rho k_0 R^2} \varpi^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.5)$$

Раскрываем определитель (5.5). Получаем уравнение относительно безразмерной частоты колебаний  $\varpi$ :

$$\varpi = \sqrt{\left[ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 + \frac{\alpha_1^4}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2} \right] + 2\bar{B}_2 \left( \frac{1}{k_0^2 R^2} - \alpha_2^2 \right)} \quad (5.6)$$

Введем безразмерные характеристики цилиндрической оболочки:  $c = h/R$ ;  $b = l/R$ . Соотношение (5.6) примет вид:

$$\varpi = \sqrt{\left[ \frac{c^2}{3(1-\nu^2)} \left( \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + n^2 \right)^2 + \frac{\left( \frac{m\pi}{b} \right)^4}{\left( \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + n^2 \right)^2} \right] + \frac{2c\bar{B}_2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} (1-n^2)} \quad (5.7)$$

## 5.2 Расчет спектров частот шарнирно опертых круговых цилиндрических оболочек в магнитном поле

Рассмотрим колебания цилиндрической оболочки с относительными параметрами  $c = h/R = 0.002$  и  $b = l/R = 2$ , выполненную из никеля: модуль упругости  $E = 215$  ГПа, плотность  $\rho = 8800$  кг/м<sup>3</sup>, магнитная проницаемость  $\mu_r = 35$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,29$ , электропроводность  $\sigma = 1,47 \cdot 10^7$  (Ом см)<sup>-1</sup>. На рисунке 5.2 представлены зависимости частот круговой цилиндрической оболочки от числа полувольт  $n$  в окружном направлении при  $m = 1$  при различных значениях безразмерной индукции внешнего магнитного поля  $\bar{B}_2$ . Кривые 1 соответствуют случаю  $\bar{B}_2 = 0$  – отсутствие магнитного поля; кривые 2 –  $\bar{B}_2 = 0,02$ ; кривые 3 –  $\bar{B}_2 = 0,04$ .

Минимальному значению частоты колебаний цилиндрической оболочки при отсутствии магнитного поля соответствует  $n = 7$  - полувольт в окружном направлении. Увеличение значения проходящего тока и соответственно индукции внешнего магнитного поля приводит к снижению частот колебаний. При этом число полувольт в окружном направлении  $n$  увеличивается, форма колебаний становится более сложной – рисунок 5.2.

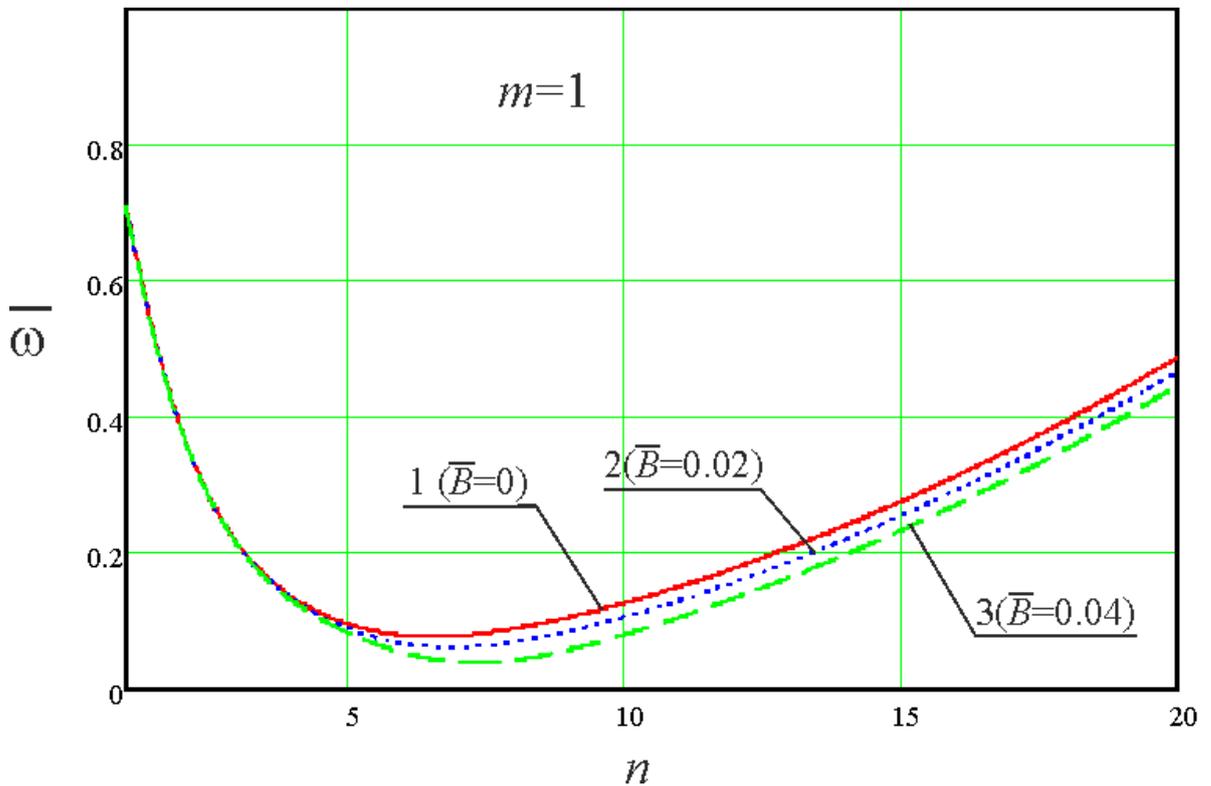


Рисунок 5.2 Зависимость частот круговой цилиндрической оболочки от числа полуволин  $n$  в окружном направлении ( $m = 1$ ) при различных значениях безразмерного параметра  $\bar{B}_2$  индукции азимутального магнитного поля

На рисунке 5.3 приведены зависимости частот круговой цилиндрической оболочки от числа полуволин  $m$  в продольном направлении при  $n = 7$  для различных значений безразмерного параметра  $\bar{B}_2$  индукции азимутального магнитного поля. Кривые 1 соответствуют случаю  $\bar{B}_2 = 0$  – отсутствие магнитного поля; кривые 2 –  $\bar{B}_2 = 0,02$ ; кривые 3 –  $\bar{B}_2 = 0,04$ . Существенное влияние магнитное поле оказывает только на низшие частоты. При  $m \geq 2$  магнитное поле частоты не изменяет.

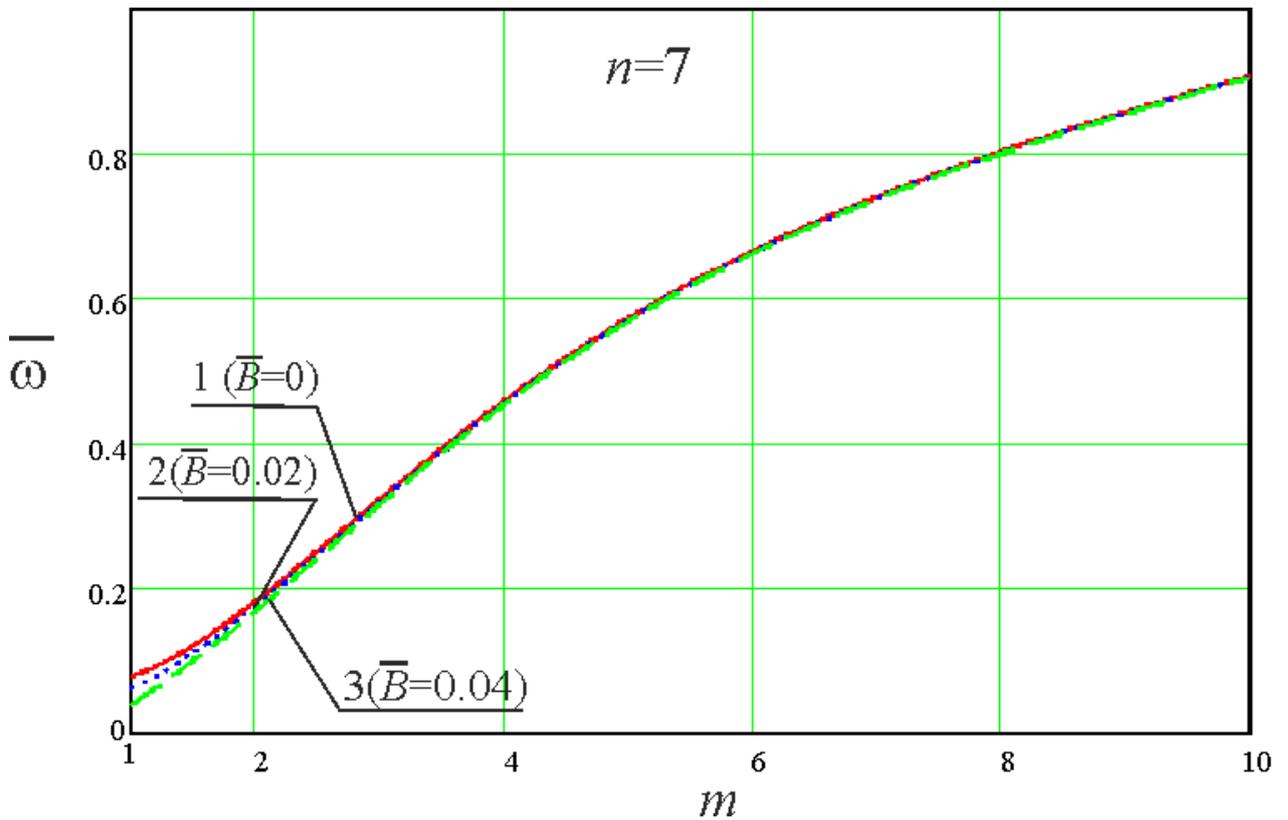


Рисунок 5.3 Зависимость частот круговой цилиндрической оболочки от числа полуволн  $m$  в продольном направлении ( $n = 7$ ) при различных значениях безразмерного параметра  $\bar{B}_2$  индукции азимутального магнитного поля

На рисунке 5.4 представлены зависимости безразмерных частот  $\bar{\omega}$  круговой цилиндрической оболочки от значения безразмерного параметра  $\bar{B}_2$  индукции азимутального магнитного поля для различных форм колебаний оболочки.

Кривая 1 – рисунок 5.4 соответствует форме колебаний с образованием одной полуволны ( $m = 1$ ) вдоль образующей оболочки и пяти полуволн ( $n = 5$ ) в окружном направлении. Кривые 2,3,4,5 соответственно  $n = 6, 7, 8, 9$  – полуволн в окружном направлении. Для цилиндрической оболочки с вышеприведенными параметрами минимальная частота колебаний оболочки при отсутствии магнитного поля ( $B_2 = 0$ ) соответствует форме колебаний при  $m = 1, n = 7 - \omega_{17}$  (кривая 3). При увеличении индукции магнитного поля  $\bar{B}_2$  при минимальной частоте  $\omega_{18}$  образуется большее число полуволн в окружном направлении  $n = 8$ .

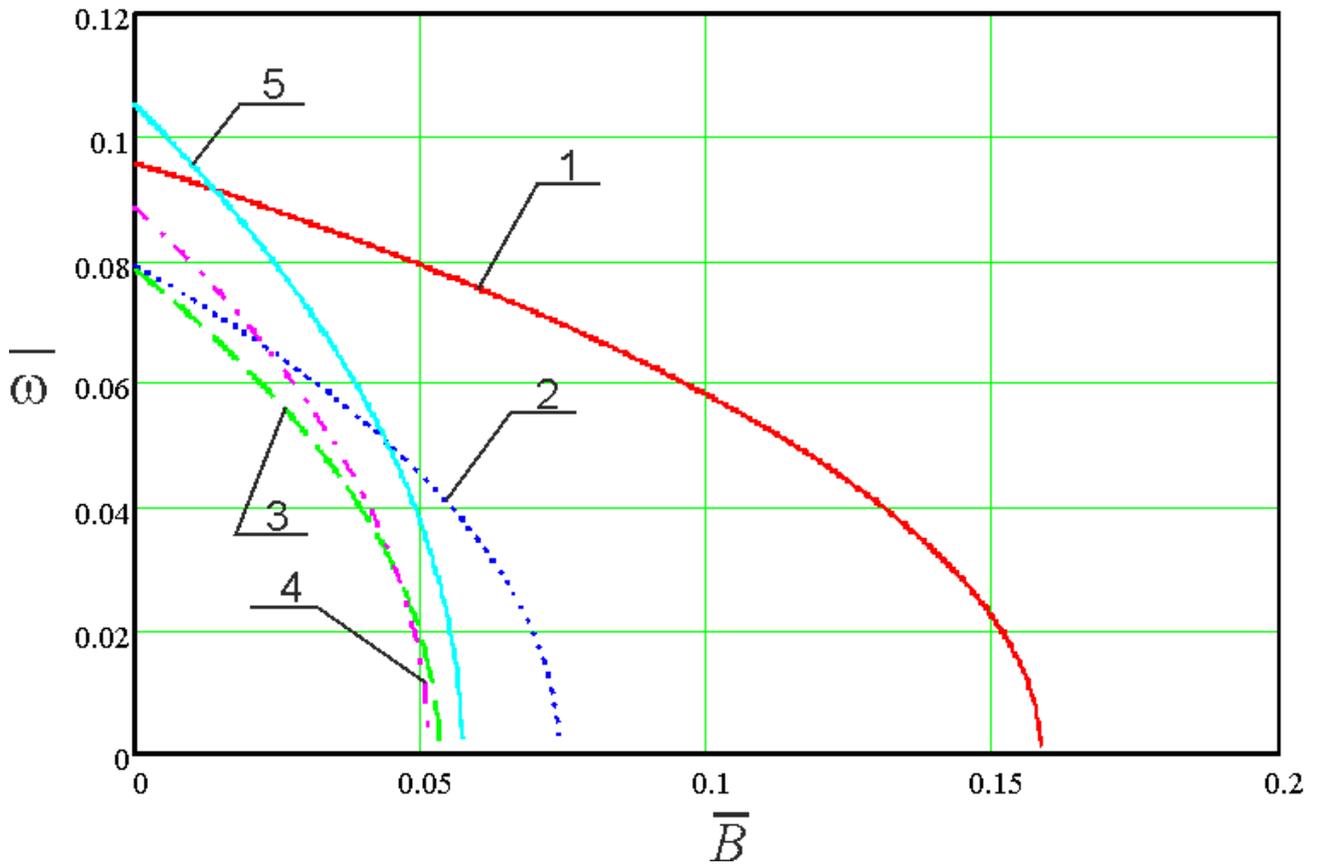


Рисунок 5.4 Зависимости безразмерных частот круговой цилиндрической оболочки от значения безразмерного параметра  $\bar{B}_2$  индукции азимутального магнитного поля (кривая 1 –  $\omega_{15}$ ; кривая 2 –  $\omega_{16}$ ; кривая 3 –  $\omega_{17}$ ; кривая 4 –  $\omega_{18}$ ; кривая 5 –  $\omega_{19}$ )

Как видно из графиков магнитное поле понижает собственные частоты колебаний круговой цилиндрической оболочки. Магнитное поле также понижает минимальное значение частоты (рисунок 5.2). При повышении  $\bar{B}_2$  возрастает  $n$  – число полуволн в окружном направлении. Форма колебаний в окружном направлении становится более сложной.

При определенных значениях индукции внешнего магнитного поля  $B_2$  собственные частоты колебаний оболочки с определенными длинами полуволн обращаются в нуль. Приняв в (5.6)  $\bar{\omega} = 0$ , получим соотношение для индукции внешнего магнитного поля, при котором цилиндрическая оболочка теряет статическую устойчивость

$$B_{кр}^2 = \frac{E\mu_0 c^2}{3\chi(1-\nu^2)} \left[ \left( \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + n^2 \right)^2 + \frac{3(1-\nu^2) \left( \frac{m\pi}{b} \right)^4}{c^2 \left( \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 + n^2 \right)^2} \right] [n^2 - 1]^{-1} \quad (5.8)$$

Минимальное значение магнитной индукции, при котором цилиндрическая оболочка теряет статическую устойчивость, соответствует не самой простой форме волнообразования. Для оболочки с вышеприведенными параметрами критическое значение индукции магнитного поля равно  $B_{кр} = 0,993$  Тл при  $m = 1$ ,  $n = 8$ .

Из рисунка 5.4 видно, что статической форме потери устойчивости соответствует значение безразмерной индукции магнитного поля  $\bar{B}_2 = 0,051$  с образованием полуволн  $m = 1$  в продольном направлении оболочки и  $n = 8$  в окружном направлении.

На рисунке 5.5 приведены зависимости частот колебаний  $\omega$  от значения индукции магнитного поля  $B_2$  для оболочки с параметрами относительной толщины  $c = h/R = 0.004$  и  $b = l/R = 2$ . Для большего значения толщины оболочки получено большее критическое значение индукции магнитного поля  $\bar{B}_2 = 0,089$ . Размерное значение равно  $B_{кр} = 1,849$  Тл. Повысить устойчивость оболочки в магнитном поле можно увеличением ее толщины.

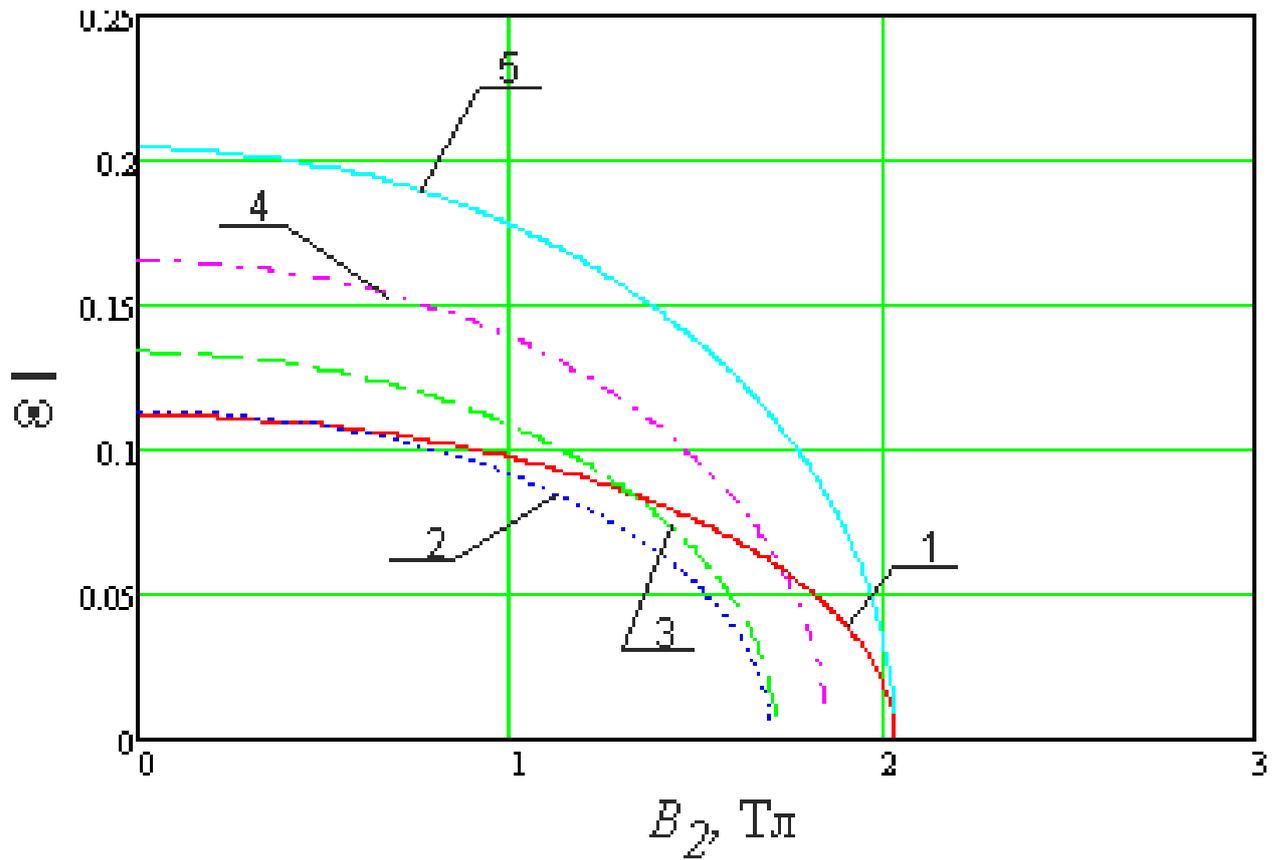


Рисунок 5.5 - Зависимости безразмерных частот круговой цилиндрической оболочки от индукции азимутального магнитного поля (кривая 1 –  $\omega_{15}$ ; кривая 2 –  $\omega_{16}$ ; кривая 3 –  $\omega_{17}$ ; кривая 4 –  $\omega_{18}$ ; кривая 5 –  $\omega_{19}$ )

### 5.3 Эмпирические и асимптотические плотности частот колебаний цилиндрических оболочек в магнитном поле.

Исследование распределения собственных частот колебаний цилиндрических оболочек в азимутальном магнитном поле производилось на основе соотношений для частот (5.6) и (5.7). Производился расчёт массива частот колебаний оболочек с параметрами  $h/R = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $l/R = 2$  (рисунки 5.6-5.8) и  $h/R = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $l/R = 2$  (рисунки 5.9-5.11) для параметров волновых чисел  $m = 1 \div 50$ ,  $n = 0 \div 50$ . Затем производилась группировка собственных частот по частотным интервалам  $\Delta\bar{\omega} = 0,05$  и построение гистограмм распределения собственных частот.

На рисунке 5.6 приведено эмпирическое распределение собственных частот цилиндрической оболочки при отсутствии магнитного поля. Плотность частот возрастает при  $0 < \bar{\omega} < 1$ . Наибольшее количество собственных частот приходится на интервал, соответствующий безразмерной частоте  $\bar{\omega} = 1$ , что соответствует частоте безмоментных колебаний оболочки  $\Omega_R = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

При  $\bar{\omega} > 1$  плотность частот становится постоянной и равной плотности частот эквивалентной пластины – плотности Куранта.

Как показал численный анализ, изменение индукции магнитного поля не приводит к существенному изменению собственных частот (рисунок 5.2, рисунок 5.3) и к изменению эмпирической плотности собственных частот колебаний цилиндрических оболочек. Аналогичная картина наблюдается и при нагружении цилиндрических оболочек гидростатическим давлением по боковой поверхности, которое не оказывает влияние на плотность собственных частот [8].

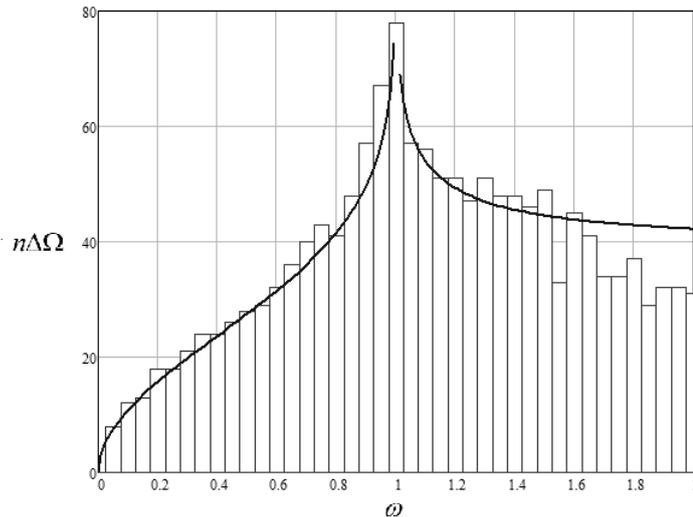


Рисунок 5.6 Асимптотическая и эмпирическая плотность частот шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки с параметрами  $h/R = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $l/R = 2$  при отсутствии магнитного поля

На рисунках 5.7-5.11 приведены графики эмпирического распределения частот колебаний оболочек в магнитном поле при докритических значениях индукции магнитного поля  $\bar{B}_2 = 0,02$  и  $\bar{B}_2 = 0,04$ .

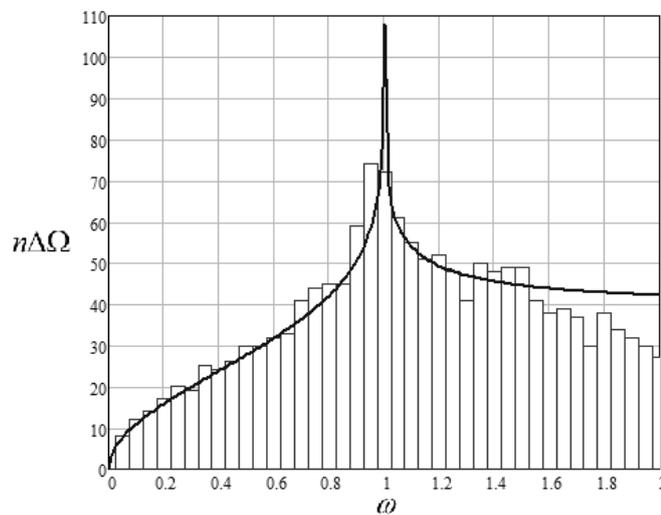


Рисунок 5.7 Асимптотическая и эмпирическая плотность частот шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки с параметрами  $h/R = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $l/R = 2$  при действии азимутального магнитного поля с  $\bar{B}_2 = 0.02$

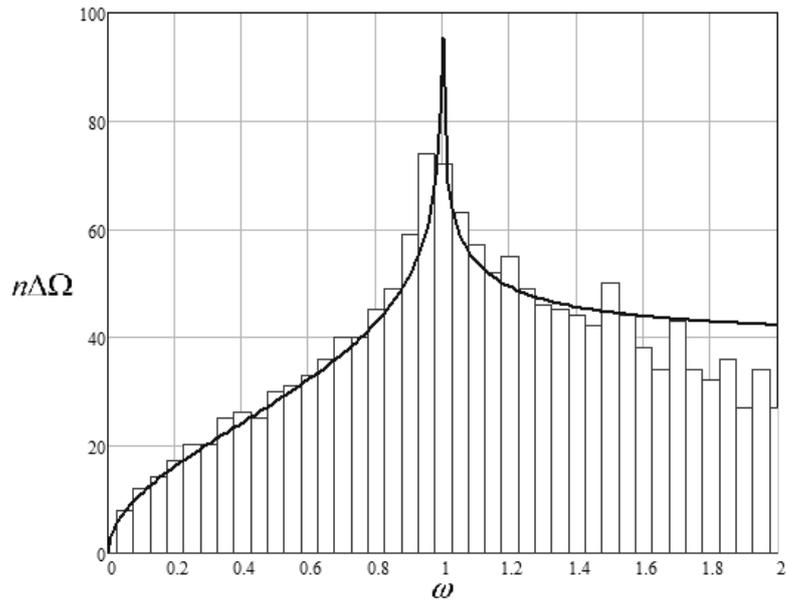


Рисунок 5.8 Асимптотическая и эмпирическая плотность частот шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки с параметрами  $h/R = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $l/R = 2$  при действии азимутального магнитного поля с  $\bar{B}_2 = 0.04$

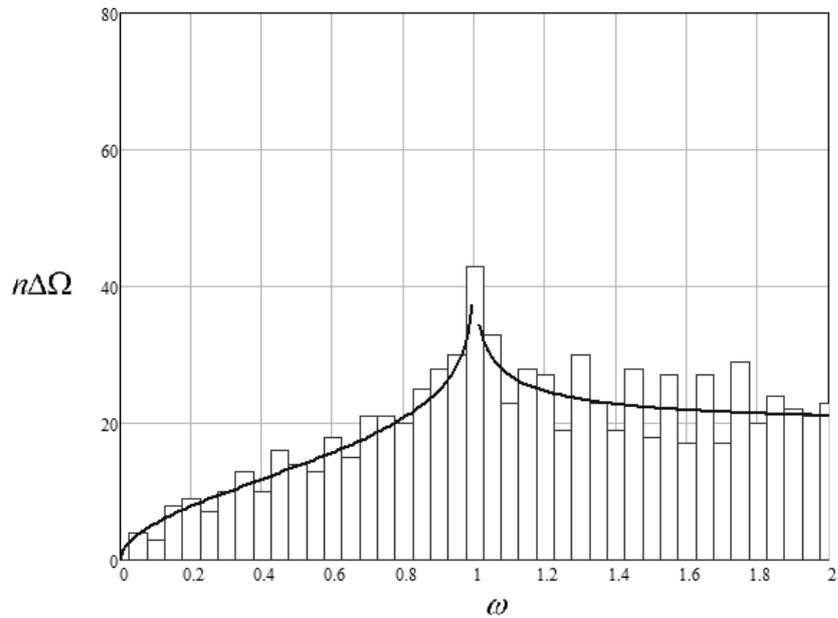


Рисунок 5.9 Асимптотическая и эмпирическая плотность частот шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки с параметрами  $h/R = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $l/R = 2$  при отсутствии магнитного поля

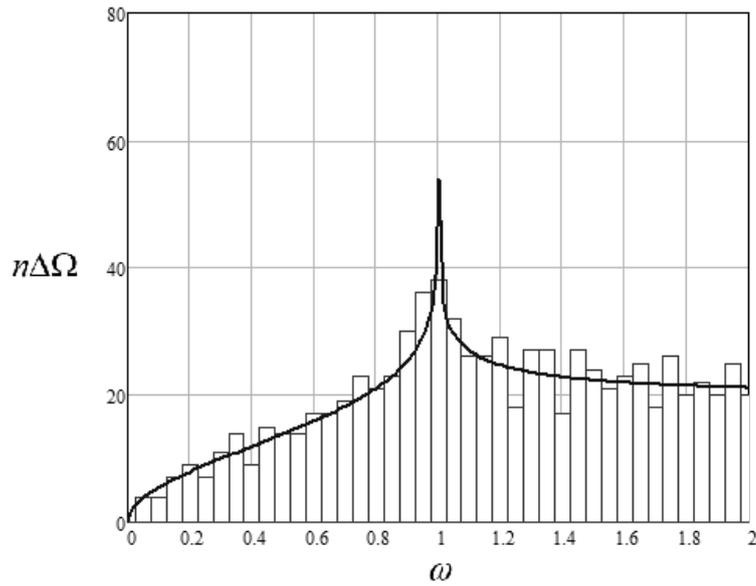


Рисунок 5.10 Асимптотическая и эмпирическая плотность частот шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки с параметрами  $h/R = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $l/R = 2$  при действии азимутального магнитного поля с  $\bar{B}_2 = 0.02$

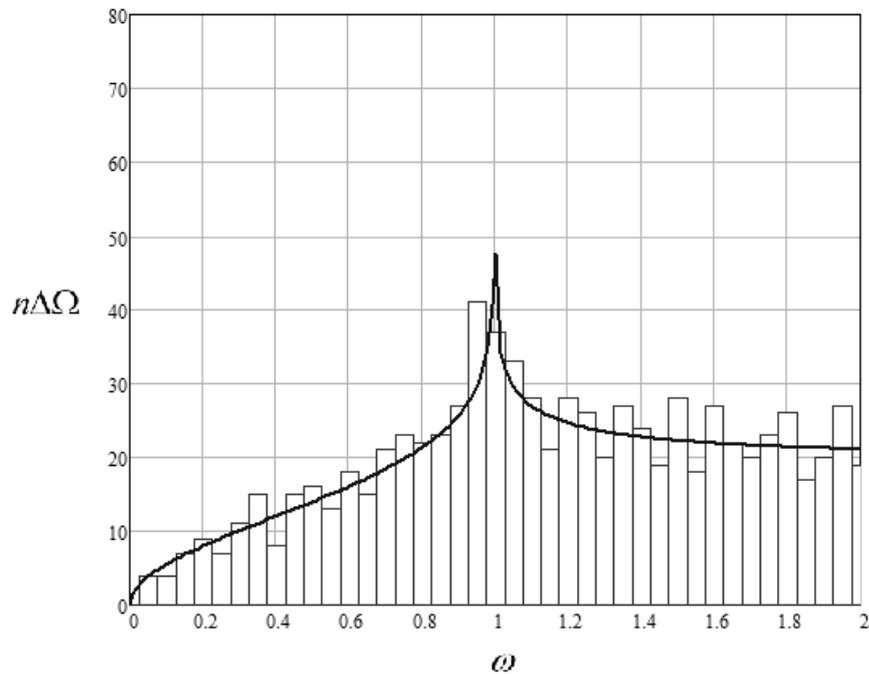


Рисунок 5.11 Асимптотическая и эмпирическая плотность частот шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки с параметрами  $h/R = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $l/R = 2$  при действии азимутального магнитного поля с  $\bar{B}_2 = 0.04$

Для оценки распределения собственных частот колебаний цилиндрической оболочки примем соотношения В.В. Болотина для асимптотической плотности частот [8,9]:

$$\frac{n(\Omega)}{n_c} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2}} \cdot K\left(\sqrt{\frac{\omega+1}{2}}\right), & 0 < \omega < 1 \\ \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\omega+1}} \cdot K\left(\sqrt{\frac{2}{\omega+1}}\right), & \omega > 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

где  $K(\omega)$  - эллиптический интеграл 1-го рода в форме Лежандра,  $n_c = \frac{a_1 a_2}{4\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$  - плотность Куранта, соответствующая эквивалентной пластине со сторонами  $a_1 = l$ ,  $a_2 = \pi R$  (5.10)

При расчетах для асимптотической плотности частот цилиндрических оболочек было учтено, что

При  $\omega > 1$  плотность частот оболочки стремится к плотности эквивалентной плотности пластины - плотности Куранта:

$$\begin{aligned} n_c &= \frac{a_1 a_2}{4\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = \frac{a_1 a_2}{4\pi} \sqrt{\frac{\rho h (12(1-\nu^2))}{E h^3}} = \frac{l \pi R}{4\pi} \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)} \rho}{h \sqrt{E}} = \\ &= \frac{l}{h} R \sqrt{\frac{\rho}{E}} \frac{2\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4} = \frac{l}{h} \frac{R}{\Omega_R} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2} = \\ &= \frac{l}{R} \frac{R}{h} \frac{1}{\Omega_R} \frac{\sqrt{3(1-0,3^2)}}{2} = \frac{l}{R} \frac{R}{h} \frac{1}{\Omega_R} 0,826 \end{aligned} \quad (5.12)$$

при относительных параметрах  $\frac{h}{R} = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $\frac{l}{R} = 2$ :

$$n_c = 2 \cdot 0,5 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{\Omega_R} \cdot 0,826 = 1 \cdot 10^3 \cdot \frac{0,826}{\Omega_R} = \frac{826}{\Omega_R}$$

При частотном диапазоне  $\Delta\omega = 0,05\Omega_R$ , получаем  $n_c \Delta\omega \approx 41$

Для анализа плотности частот колебаний оболочек графики асимптотической плотности частот удобно представлять в безразмерном виде.

Асимптотические соотношения (5.9) хорошо описывают распределение собственных частот колебаний цилиндрических оболочек в магнитном поле. Сгущение обственных частот наблюдается в окрестности частоты безмоментных

колебаний  $\Omega_R = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ , где оболочки наиболее чувствительны к резонансным явлениям. Поперечное и продольное магнитное поле смещает точку сгущения собственных частот область более низких частот [16, 17, 22]. Азимутальное магнитное поле не влияет на распределение собственных частот и не смещает диапазон сгущения собственных частот.

## СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

1. На основе асимптотического метода В.В. Болотина построены решения типа динамических краевых эффектов для прямоугольных ферромагнитных пластин с произвольной комбинацией условий закрепления краев в поперечном и продольном магнитном поле.
2. Проведено исследование спектров частот колебаний ферромагнитных пластин с конечной электропроводностью и диэлектрических пластин. Для широкого изменения параметров индукции магнитного поля установлено незначительное расхождение в результатах расчета собственных частот колебаний пластин, выполненных по диэлектрической и конечно проводящей моделям, в поперечном и продольном магнитном поле и качественное совпадение с результатами экспериментальных исследований, опубликованных в литературе.
3. Приведены примеры расчета спектров собственных частот колебаний пластин с различными условиями закрепления краев в магнитном поле. Установлено, что поперечное магнитное поле понижает собственные частоты колебаний пластин, оказывает эффект сжимающих усилий в срединной плоскости. Получены соотношения для индукции поперечного магнитного поля, при котором возможна потеря статической устойчивости. Аналогичное явление наблюдается у пластин в продольном магнитном поле.
4. Проведено исследование устойчивости плоской формы равновесия ферромагнитной пластины, находящейся в поперечном магнитном поле с гармонически изменяющейся индукцией внешнего магнитного поля, исследование устойчивости сжатой переменными силами пластины в магнитном поле. Установлено, что в случае диэлектрического ферромагнитного материала, магнитное поле увеличивает ширину главной области динамической неустойчивости и понижает устойчивость пластины
5. Получены соотношения для частот собственных колебаний и асимптотические плотности круговых цилиндрических оболочек, для параметров внешнего магнитного поля, приводящего к потере статической устойчивости

оболочки. Магнитное поле приводит к понижению собственных частот колебаний оболочек, выполненных как из ферромагнитных, так и немагнитных материалов.

6. Разработан программный комплекс (приложение А), в котором на основании выведенных аналитических соотношений для расчета спектров собственных частот колебаний пластин с различными краевыми условиями и пологих оболочек, находящихся в магнитных полях, решаются двадцать задач об определении частот колебаний прямоугольных пластин с различными краевыми условиями в поперечном и продольном магнитном поле, выполненных из немагнитных (диамагнитных и парамагнитных) и ферромагнитных материалов. Комплекс не требует установки дополнительного математического обеспечения, все математические операции написаны непосредственно в среде *Borland Delphi 7.0*. Реализована возможность вывода спектра частот в виде таблиц в отдельном файле *Microsoft Excel*.

7. Разработанная методика расчета спектров частот магнитоупругих колебаний ферромагнитных прямоугольных пластин при различных условиях закрепления краев позволяет производить проектирование тонкостенных элементов конструкций электротехнического оборудования, нашла применение для расчета вибрационных характеристик магнитоуправляемых контактов (герконов).

8. Полученные в диссертации результаты использованы и внедрены в учебном процессе на кафедре «Динамика и прочность машин», для научных исследований на кафедре «Электрических и электронных аппаратов», в ЗАО "Аэрокосмический мониторинг и технологии" (приложение Б).

**СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ**

АМБ – асимптотический метод В. В. Болотина

ДКЭ – динамический краевой эффект

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука. 1977. 272 с.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Физматлит, 1996. 286 с.
3. Багдасарян Г. Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван. Тигран Мец. 1999. 436 с
4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. М: Наука, 2-е изд. 1967.420 с.
5. Мун Ф. С., Пао И-синь. Колебания и динамическая неустойчивость стержня-пластины в поперечном магнитном поле. – Прикл. Механика, 1969, №1 (Тр. Американского общества инженеров-механиков. Сер. Е. ПМ. 1969., т. 36. С. 98-108)
6. Мун, Пио И-синь. Магнитоупругое выпучивание тонкой пластинки. – Прикл. Механика, 1968, №1, 1968. Изд.: Мир (Тр. Американского общества инженеров-механиков. Сер. Е. ПМ. 1968. Т. 35. С. 59-65
7. Мун Ф. С. Механика ферромагнитных пластинок в однородном магнитном поле. // Тр. Американского общества инженеров-механиков. Сер. Е. ПМ. 1970. Т. 37. № 1 С. 160-166
8. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в 3-х т. Т.3. / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение. 1968. 568 с.
9. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти т. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение. 2-е изд. 1999. 506 с.
10. Дубовских Ю. А., Хроматов В. Е., Чирков В. П. Асимптотический анализ устойчивости и послекритического поведения упругих панелей в сверхзвуковом потоке // Известия РАН МТТ. 1996. №3. с. 76-88
11. Амбарцумян С. А. Некоторые особенности колебаний пластинок в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1983 № 4. С. 194-200.

12. Корешкова Н. С., Комиссарова Т. Н. Влияние граничных условий на спектры частот колебаний прямоугольных пластин в поперечном магнитном поле // Сборник аннотаций 5-ой Курчатовской молодежной научной школы. М. 2007. С. 107
13. Коробков Ю.С., Красова Н.С., Хроматов В.Е. Влияние магнитного поля на спектры частот колебаний прямоугольных пластин // Электротехника. 2007, №4. С. 30-34.
14. Голубева Т. Н. Колебания контактных сердечников герконов в магнитном поле// Сборник аннотаций 7-ой Курчатовской молодежной научной школы. М. 2009. С. 264
15. Ambartsumian S. A., Belubekian M. V. On oscillations of anisotropic electroconductive shallow shells in normal magnetic fields // Изв. Нац. АН Армении. Мех. - 1999. - 52, ~N 1. - С. 17-24.
16. Хроматов В. Е., Самогин Ю.Н., Красова Н. С., Комиссарова Т. Н. О влиянии продольного магнитного поля на спектры частот колебаний круговых цилиндрических оболочек // Сборник трудов XIV международной научно-технической конференции «Машиностроение и техносфера XXI века», г. Севастополь, 2007. Т. 4. с. 116-119.
17. Хроматов В. Е. Корешкова Н. С. Спектры собственных частот колебаний круговых цилиндрических оболочек в продольном магнитном поле. Вестник МЭИ. 2008, №1. С. 71-75.
18. Комиссарова Т. Н., Корешкова Н. С. Исследование влияния тангенциальных сил инерции на спектры частот колебаний упругих оболочек в магнитных полях // Тезисы докладов XIV международной научно-технической конференции студентов и аспирантов «Радиотехника, электротехника и энергетика» М.: Издательство МЭИ. 2008. С 219.
19. Комиссарова Т. Н., Корешкова Н. С. О влиянии тангенциальных сил инерции на распределение собственных частот колебаний пологих оболочек в магнитном поле // Тезисы докладов XIV международного симпозиума «Динамические и

технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова М.Изд-во МАИ: 2008. С 121-122.

20. Комиссарова Т. Н., Хроматов В. Е., Самогин Ю. Н. Распределение собственных частот магнитоупругих колебаний пологих оболочек в поперечном магнитном поле // Сборник трудов XV Международной научно-технической конференции «Машиностроение и техносфера XXI век», г. Севастополь, 2008. Т. 2. с. 122-129.

21. Хроматов В. Е., Самогин Ю. Н., Смирнов А. И., Комиссарова Т. Н. Управление спектрами частот колебаний пологих оболочек поперечным магнитным полем // Труды XII Международной конференции «Электромеханика, Электротехнологии, Электромеханические материалы и компоненты», Крым, г. Алушта, 2008, с 490.

22. Корешкова Н.С., Хроматов В.Е. О влиянии поперечного магнитного поля на спектры частот колебаний пологих оболочек // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 4. С. 165-171.

23. Комиссарова Т. Н., Корешкова Н. С. Построение решений типа динамических краевых эффектов при колебаниях оболочек в магнитных полях // Сборник аннотаций 6-ой Курчатовской молодежной научной школы. М. 2008. С. 112.

24. Багдасарян Г. Е. Применение асимптотического метода В. В. Болотина для исследования магнитоупругих колебаний идеально проводящих прямоугольных пластин // Проблемы машиностроения. 1986. № 25. С. 63-68.

25. Амбарцумян С. А. К вопросу о колебаниях электропроводящей пластинки в поперечном магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1979 № 3. С. 164-173.

26. Акопян П. З., Багдасарян Г. Е. Колебания прямоугольной проводящей пластинки в продольном магнитном поле // /Изв. АН Арм. ССР. Механика - 1987. т.49, № 3. - С. 11-18.

27. Комиссарова Т. Н. Влияние магнитного поля на колебания контактных сердечников герконов // Тезисы докладов XV международной научно-технической конференции студентов и аспирантов «Радиотехника, электротехника и энергетика» М.: Издательство МЭИ. 2009. С 278-279.

28. Геча В. Я., Голубева Т. Н. Хроматов В. Е. Колебание электропроводящей пластины в магнитном поле // Сборник трудов XVI международной научно-технической конференции «Машиностроение и техносфера XXI века», г. Севастополь, 2009. Т. 1. с. 134-139
29. Golubeva T. N., Khromatov V. Y. Comparison of frequency spectrum conductive rectangular plates in a magnetic field // Abstracts of 13<sup>th</sup> international conference on electromechanics, electrotechnology, electromaterials and components, 19-25 september, Crimea, Alushta, 2010, p. 149
30. Голубева Т. Н., Игнатова В. В. Спектры частот колебаний электропроводящих прямоугольных пластин в магнитном поле // Тезисы докладов XVII международной научно-технической конференции студентов и аспирантов «Радиотехника, электротехника и энергетика» М.: Издательство МЭИ. 2011. С. 266-267
31. Голубева Т.Н., Хроматов В.Е. Влияние магнитного поля на колебания элементов конструкций энергетического оборудования // Новое в Российской электроэнергетике. Ежемесячный электронный журнал. 2012. № 3.
32. Голубева Т.Н. Исследование колебаний и устойчивости токонесущей многопролетной шины в поперечном магнитном поле// Материалы ежегодной XXII международной инновационно-ориентированной конференции молодых ученых и студентов «МИКМУС-2010» 26-29 октября 2010г. Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. М., 2009. С. 118.
33. Голубева Т. Н., Геча В. Я., Хроматов В. Е. Колебания токонесущей пластины в поперечном магнитном поле // Тезисы докладов XVI международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова М.Изд-во МАИ: 2010. С 52-53.
34. Голубева Т. Н., Хроматов В. Е. Влияние магнитного поля на колебания и устойчивость токонесущих пластин // Сборник трудов XVII международной научно-технической конференции «Машиностроение и техносфера XXI века», г. Севастополь, 2010. Т. 1. с. 186-190.

35. Ерофеев В. И., Комаров В. Н. О динамике упругого стержня в магнитном поле // Тр. Междунар. конф. Мат. в индустрии, Таганрог, 29 июня - 3 июля, 1998 : ICIM-98. - Таганрог, 1998. - С. 131-132.
36. Белубекян М. В., Хачатрян Ю. М. К задаче о магнитоупругом выпучивании тонкой ферромагнитной пластинки. – Вести АН БССР, сер. Физ.-мат. Наук, 1984, №4
37. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А. Неустойчивость идеально проводящей ферромагнитной пластинки в продольном магнитном поле.- Изв. НАН РА, Механика, 1996, т.50, N1.
38. Багдасарян Г.Е.Микилян М.А. Бесконтактный способ возбуждения резонансных колебаний в ферромагнитной пластинке.-М., Четвертый Международный совещание-семинар "Инженерно-физические проблемы новой техники", 1996.
39. Багдасарян Г. Е., Микилян М. А. Математическое моделирование магнитоупругих колебаний проводящих ферромагнитных пластин. Изв. НАН Армении. 1996. Т.49, №4. С.,3-18.
40. Багдоев А.Г., Варданян А.В. Аналитические и численные исследования частот свободных колебаний ферромагнитных пластин с произвольной электропроводностью в поперечном магнитном поле в пространственном подходе // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 5. С. 141-149.
41. Багдоев А.Г., Варданян А.В., Варданян С.В., Кукуджанов В.Н. Определение линейных частот колебаний ферромагнитной оболочки // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 5. С. 146-157.
42. Новиков В. Ф., Фатеев И. Г., Третьяков П. Ю., Пчелин С. А. Исследование магнитоупругих явлений при продольных колебаниях в ферромагнитных стержнях // Нов. матер. и технол. в машиностр. : Матер. регион. науч.-техн. конф., Тюмень, 19-21 нояб., 1997. Тюмень, 1997. - С. 61-62.
43. Zhou You-He, Miya Kenzo. A theoretical prediction of natural frequency of a ferromagnetic beam plate with low susceptibility in an in-plane magnetic field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. - 1998. - 65, 1. - С. 121\_126.

44. Oshinoya Yasuo, Obata Takayuki, Noncontact vibration control of a magnetic levitated rectangular thin steel plate // JSME Int. J. C. - 2002. - 45, ~N 1. - С. 60-69.
45. Horiguchi Katsumi, Shindo Yasuhide. Bending tests and magneto-elastic analysis of ferritic stainless steel plate in a magnetic field // Nihonikai gakkai ronbunshu. A N Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A. - 1998. - 64, 621. - С. 1296\_-1301.
46. Ванцян А. А., Григорян Н. К., Сафарян Ю. С. Экспериментальное исследование влияния постоянного магнитного поля на вынужденные поперечные колебания пластин // Изв. НАН Армении. Механика - 2002. т. 55, № 2. С. 63-67.
47. Багдоев А. Г., Ванцян А. А., Сафарян Ю. С. Теоретические и экспериментальные исследования изгибных волн в пластинах в магнитном поле для пространственной и осредненной задачи и устойчивость волн модуляции // Изв. РАН, Механика твердого тела, 2003 г., № 6. С. 148-157.
48. Ванцян А. А. Экспериментальное изучение влияния постоянного магнитного поля на колебания ферромагнитной пластинки. Изв. НАН Армении. Механика. 2003, т. 56, №2. С. 74-80.
49. Lee J. S., Zheng X. J. Controllability of conducting structures using magnetoelastic damping // Earth and Space 2004: Engineering, Construction, and Operations in Challenging Environments : Proceedings of the 9 Biennial ASCE Aerospace Division International Conference on Engineering, Construction, and Operations in Challenging Environments, Houston, Tex., March 7-10, 2004. - Reston (Va), 2004. - С. 184-189.
50. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф. Магнитотермоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка. 1982. 293 с.
51. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир. 1986. 160 с.
52. Короткина М.Р. Электромагнитоупругость. М.: Издательство МГУ им. М.В. Ломоносова. 1988. 304 с.
53. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Акустоэлектромагнитоупругость. Киев: Наукова думка. 1988. 285 с.
54. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука. 1988. 472 с.

55. Фролов С.И. Механические напряжения и деформации под действием электромагнитных сил и моментов. М.: Изд-во МЭИ. 1992. 108 с.
56. Хроматов В. Е., Самсонов Ю. П., Москвин В. Г., Коробков Ю. С. Решение задач механики при проектировании электрических аппаратов и машин // Вестник МЭИ. 2003, №5. С. 71-75.
57. Электрические и электронные аппараты. В 2 т. Т. 1. Электромеханические аппараты: учебник для студ. высш. учебн. заведений/ Е. Г. Акимов и др.; под. ред. А. Г. Годжелло, Ю. К. Розанова. М.: Издательский центр «Академия», 2010.
58. Карабанов С. М. Магнитоуправляемые контакты (герконы) и изделия на их основе / С. М. Карабанов, Р. М. Майзельс, В. Н. Шоффа. Под ред. В. Н. Шоффы. – М.:Издательский дом «Интеллект». 2011.-408 с.
59. Голубева Т. Н., Хроматов В. Е. Спектры частот колебаний упругих ферромагнитных пластин в магнитном поле // Материалы XVII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова М.Изд-во МАИ: 2011. С. 58-59
60. Хроматов В.Е., Голубева Т.Н. Влияние магнитного поля на колебания контактных сердечников герконов//Магнитоуправляемые контакты (герконы) и изделия на их основе (Reed Switches and Products on Basis Thereof) / Сборник трудов третьей Международной научно-практической конференции, 27-30 сентября 2011 г./ Proceedings of the 3rd International Science and Practical Conference. 27.09-30.09.2011. Рязань: ОАО «РЗМКП», 2011 – с. 201-205
61. Голубева Т. Н., Хроматов В. Е. Влияние магнитного поля на колебания ферромагнитных пластин // Сборник трудов XVIII международной научно-технической конференции «Машиностроение и техносфера XXI века», г. Севастополь, 2011. Т. 1. с. 179-183.
62. Хроматов В.Е., Голубева Т.Н. Колебания и устойчивость ферромагнитных пластин в магнитных полях // Труды IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 24–29 сентября 2012 г.) Нижний Новгород: «Наш дом», 2012. с. 967-975

63. Голубева Т. Н., Радин В. П., Хроматов В. Е. Влияние магнитного поля на колебания и динамическую устойчивость пластин // Труды XIV Международной конференции «Электромеханика, Электротехнологии, Электромеханические материалы и компоненты», Крым, г. Алушта, 2012, с 319-320
64. Голубева Т. Н., Ситникова Е. С. Динамическая устойчивость пластин в поперечном магнитном поле // Тезисы докладов XVIII международной научно-технической конференции студентов и аспирантов «Радиотехника, электротехника и энергетика» М.: Издательство МЭИ. 2012. С. 275
65. Голубева Т. Н., Хроматов В. Е. Исследование динамической устойчивости пластины в поперечном магнитном поле // Материалы XVIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова М.Изд-во МАИ: 2012. С. 45-46
66. Голубева Т. Н., Коробков Ю.С., Хроматов В.Е. Влияние продольного магнитного поля на спектры частот колебаний ферромагнитных пластин // Электротехника. 2013. №3. С. 44-49.
67. Хроматов В. Е., Голубева Т. Н. О влиянии магнитных полей на колебания и устойчивость пластин из ферромагнитного материала //Вестник машиностроения. 2012. №9. С. 12-16.
68. Голубева Т. Н., Хроматов В. Е. О колебаниях ферромагнитных круговых цилиндрических оболочек в магнитном поле // Материалы XIX международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова М.Изд-во МАИ: 2013. С. 67-68
69. Хроматов В.Е., Голубева Т.Н., Колебания и устойчивость ферромагнитной цилиндрической оболочки в магнитном поле// Вестник Московского авиационного института. 2013. № 3. Т. 20. С. 212-219.
70. Голубева Т. Н. Динамическая устойчивость ферромагнитных пластин в поперечном магнитном поле. Справочник. Инженерный журнал. 2013. №5. С. 20-24.
71. Программное средство учебного назначения «Комплекс: алгоритм и программа «Магнитоупругость» для проектирования и расчета динамических

характеристик упругих пластин и оболочек в магнитных полях». // В.Е. Хроматов, В.Н. Щугорев, Н.С. Корешкова, Т.Н. Голубева, Ю.С. Коробков. – Зарегистрировано в ЦНИТ МЭИ(ТУ) 17.04.2009 г.

72. Голубева Т. Н., Корешкова Н. С. Программное обеспечение для расчета спектров собственных колебаний пластин и оболочек в магнитном поле // Сборник научных работ всероссийского конкурса научно-исследовательских работ в области технологий электронного обучения в образовательном процессе, Белгород, 2010, Т.2, с. 162-166.

73. Голубева Т. Н., Корешкова Н. С., Демин А. А. Разработка программного обеспечения для исследования колебаний и устойчивости пластин и оболочек в магнитном поле // Труды XXI международной научно-технической конференции «Информационные средства и технологии», М. Изд-во МЭИ, 2013. Т. 1. с. 116-119.

74. Demin A. A., Golubeva T. N., Demina A. S. The program complex for research of fluctuations' ranges of plates and shells in magnetic field // 11<sup>th</sup> Students' Science Conference "Future Information technology solutions", Bedlewo, 3-6 October 2013, p. 61-66.

75. Голубева Т. Н., Хроматов В. Е. Программное обеспечение для расчета спектров частот колебаний пластин и оболочек в магнитных полях // Материалы XX международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова М.Изд-во МАИ: 2014. С. 67-68.

76. Кирьянов Д.В. Mathcad 14: Работа в среде Mathcad 2001/2001i/11/12/13/14; Аналитические преобразования и численные методы; Дифференцирование и интегрирование и др.: Наиболее полное руководство. Издательство БХВ-Петербург. 2007. 704 стр.

77. Хомоненко А., Гофман В., Мещеряков Е., Никифоров В. Delphi 7. Наиболее полное руководство. СПб: ВHV-Петербург. 2008. 1216 с.

78. Электротехнические и конструкционные материалы: учебное пособие для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

/ В. Н. Бородулин и др.; под ред. В. А. Филикова. - 7- изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 275 с.

79. Вестяк В. А., Лемешев В. А., Тарлаковский Д. В. Плоские нестационарные волны в электроупругом полупространстве и слое // Современные проблемы механики и математики. В 3-х томах. Львов, 2008. Т. 1. С. 65-67.

80. Вестяк В. А., Лемешев В. А., Тарлаковский Д. В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от сферической полости в электромагнитоупругом пространстве // Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: Труды Международных конференций. Изд-во Политехнического университета, 2008. Т. 2. С. 58-65

81. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные волны в электромагнитоупругом полупространстве и слое // Доклады Академии Наук. 2009. Т. 426, № 6. С. 747-749.

82. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные колебания толстостенной электромагнитоупругой сферы // Импульсные процессы в механике сплошных сред: матер. Междунар. Научн. Конф. Николаев: КП «Миколаевська обласна друкарня», 2009. – 17-21 авг. С. 26-27.

83. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные волны в электромагнитоупругом полупространстве и слое // Материалы XVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. Т. 2. Чебоксары: ГУП «ИПК «Чувашия»», 2010. С. 27-29.

84. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных радиальных возмущений от сферической полости в электромагнитоупругом пространстве // Доклады Академии Наук. 2010. Т. 434, №2. С. 186-188.

85. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Связанные нестационарные колебания электромагнитоупругих тел со сферическими границами // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной

механики. Сборник докладов. Составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров. 2015. С. 747-749.

86. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Интегральное представление характеристик нестационарного электромагнитного поля в движущейся полуплоскости // Доклады Академии наук. 2015. Т. 460. № 3. С. 279.

87. Vestyak V.A., Igumnov L.A., Tarlakovskiy D.V. Electromagnetic field in moving space with spherical enclosure // Materials Physics and Mechanics. 2015. Т. 23. № 1. С. 31-35.

88. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Исследование нестационарных радиальных колебаний электромагнитоупругой толстостенной сферы с помощью численного обращения преобразования лапласа // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2014. № 1. С. 51-64.

89. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Двухмерные нестационарные волны в электромагнитоупругой полуограниченной среде // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-4. С. 1423-1424.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА «МАГНИТОУПРУГОСТЬ»

На основании полученных результатов для исследования поведения пластин и оболочек в магнитных полях в среде *Borland Delphi 7.0* был разработан программный комплекс «Магнитоупругость» [71-75].

Среда *Borland Delphi 7.0* была выбрана неслучайно, поскольку она обладает рядом преимуществ по сравнению с аналогичными программными продуктами:

- 1) быстрота разработки приложения
- 2) высокая производительность разработанного приложения
- 3) незначительные требования разработанного приложения к ресурсам компьютера.
- 4) наращиваемость за счет встраивания новых компонент и инструментов в среду *Borland Delphi 7.0*.

Алгоритм программного комплекса представлен на рисунке П.1.

С учетом различных комбинаций входных данных программный комплекс сочетает в себе двадцать задач об определении частот колебаний прямоугольных пластин с различными краевыми условиями в поперечном и продольном магнитном поле, выполненных из немагнитных (диамагнитных и парамагнитных) и ферромагнитных материалов, и четыре задачи о колебаниях цилиндрических и сферических оболочек в магнитных полях. При этом комплекс не требует установки дополнительного математического обеспечения, все математические операции написаны непосредственно в среде *Borland Delphi 7.0*. Интерфейс программного комплекса представлен на рисунке П.2.

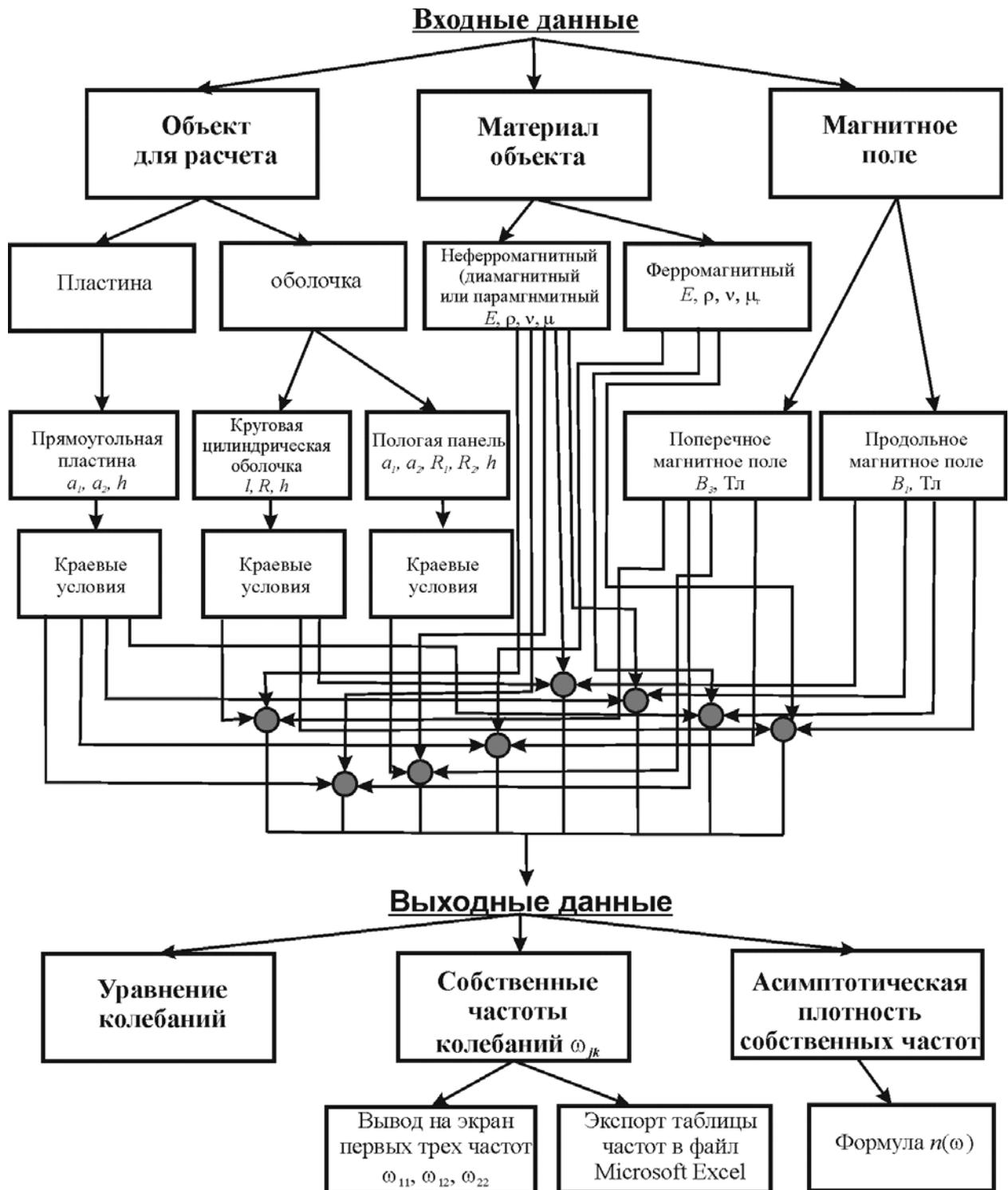


Рисунок П.1 Алгоритм программного комплекса

Маннитоупругость\_m

Файл Помощь

**Объект расчета**

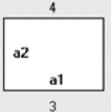
Пластина  
Пластина  
Обложка

**Геометрические характеристики**

Длина стороны в продольном направлении, м 0,1  
Длина стороны в поперечном направлении, м 0,1  
Толщина, м 0,001

**Крайние условия**

	Сторона 1	Сторона 2	Сторона 3	Сторона 4
Шарнирно опертая	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Жестко защемленная	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Свободная	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



**Механические и физические свойства материала**

Плотность материала, кг/м<sup>3</sup> 2700  
Магнитная проницаемость 1,000021  
Модуль упругости, ГПа 70  
Коэффициент Пуассона 0,3

Тип материала: Парамгнетик  
Диамагнетик  
Ферромагнетик

**Магнитного поля**

Продольное  
Индукция продольного магнитного поля, Тл 0

**Собственные частоты колебаний**

Первая частота, Гц 760,4  
Вторая частота, Гц 1900,9  
Третья частота, Гц 3041,5

Таблица значений собственных частот

**Уравнение колебаний**

$$D \Delta \Delta w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{2\pi} \left( h + \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \right) B_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0$$

**Асимптотическая плотность частот**

$$n(\omega) = \frac{2n_c}{\pi} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 + \beta^2} - \frac{\beta^2}{4}} K \left[ \frac{\sqrt{\omega^2 + \beta^2} - \omega}{2\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \right]^{1/2}$$

ПРОИЗВЕСТИ РАСЧЕТ

Рисунок П.2 Интерфейс программного комплекса

Условно программный комплекс можно разделить на блок ввода исходных данных и блок результатов расчета.

Ввод исходных данных следует начать с выбора объекта для расчета. Это может быть пластина или оболочка. Выбрать объект расчета можно в раскрывающемся списке. В зависимости от того, какой объект для расчета выбрали, пластину или оболочку появляются разные списки параметров для ввода.

В данном программном комплексе под объектом «пластина» подразумевается прямоугольная пластина. Для нее необходимо задать геометрические характеристики: размеры в плане  $a1$ ,  $a2$ , толщину  $h$ .

Если в качестве объекта для расчета выбрана оболочка, то тут появляется еще один раскрывающийся список, в котором можно выбрать тип рассматриваемой оболочки: круговая цилиндрическая оболочка или пологая панель произвольной кривизны.

Для круговой цилиндрической оболочки в качестве параметров необходимо задать геометрические характеристики: длину  $l$ , радиус кривизны  $R$  и толщину  $h$ .

Для пологой панели в качестве параметров необходимо задать геометрические характеристики: размеры в плане  $a1$ ,  $a2$ , радиусы кривизны в обоих направлениях  $R1$ ,  $R2$ , толщину  $h$ .

После выбора объекта расчета необходимо задать материал, из которого изготовлен объект расчета и его свойства. Выбрать материал можно из раскрывающегося списка: диамагнитный, парамагнитный или ферромагнитный материал. Для диамагнитного и парамагнитного материала необходимо задать параметры, характеризующие свойства материала объекта: плотность материала  $\rho$ , модуль упругости  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ , магнитную проницаемость  $\mu$ . Для ферромагнитного материала вместо магнитной проницаемости  $\mu$  необходимо задать относительную магнитную проницаемость материала  $\mu_r$ .

Выбрав объект для расчета и материал, можно приступить к заданию краевых условий (условий закрепления краев).

Если в качестве объекта для расчета выбрана пластина то мы имеем 5 различных условий закрепления краев: а) шарнирно опертая; б) защемленная со всех сторон; в) консольная; г) защемленная, шарнирно опертая по краям; д) свободная.

Что касается оболочек, то в данном программном комплексе рассматриваются шарнирно опертые круговые цилиндрические оболочки и пологие панели.

После выбора объекта для расчета и задания для него всех необходимых параметров можно перейти к выбору параметров магнитного поля, в котором находится объект. Таким внешним условием является магнитное поле. Рассматриваются два варианта магнитного поля: продольное и поперечное. При выборе в раскрывающемся списке продольного магнитного поля далее требуется задать индукцию  $B1$ . При выборе поперечного магнитного поля – индукцию  $B3$ . Для цилиндрической оболочки, изготовленной из ферромагнитного материала, можно задать только продольное азимутальное магнитное поле (направленное по окружности оболочки).

На этом ввод исходных данных можем считать законченным. После ввода исходных данных можем приступить к расчету. Для этого необходимо нажать на кнопку «Произвести расчет». После нажатия этой кнопки на экран выводятся результаты расчета:

- 1) уравнения колебаний рассматриваемого объекта в соответствующем магнитном поле.
- 2) первые три собственные частоты колебаний  $\omega11, \omega12, \omega22$ .
- 3) формула для асимптотической плотности частот колебаний.

Кроме того возможен дальнейший экспорт значений собственных частот в *Microsoft Excel*, причем туда можно выводить не только первые три собственные частоты, а таблицу частот для любых форм колебаний пластины.

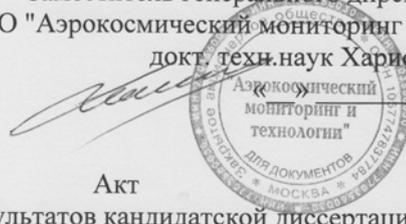
Программный комплекс содержит встроенную справку, в которой приведены основные гипотезы и уравнения колебаний пластин и оболочек в

магнитных полях, а также содержатся подробные инструкции по работе с программой.

В настоящее время программный комплекс «Магнитоупругость» внедрен в «НИУ «МЭИ» на кафедрах Динамики и прочности машин и Электрических и электронных аппаратов в качестве программного средства учебного назначения, в ЗАО "Аэрокосмический мониторинг и технологии" и может быть использован при расчетах и проектировании электротехнического оборудования, взаимодействующего с магнитными полями [56-58].

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б****Акты о внедрении результатов кандидатской диссертации**

УТВЕРЖДАЮ  
Заместитель генерального директора по науке  
ЗАО "Аэрокосмический мониторинг и технологии"  
докт. техн. наук Харионовский В. В.  
\_\_\_\_\_ 2015 г.



Акт  
о внедрении результатов кандидатской диссертации

Комиссаровой Татьяны Николаевны

Исследование влияния магнитных полей на динамические характеристики  
тонкостенных элементов конструкций

Автором диссертации Комиссаровой Т.Н. был передан в  
ЗАО "Аэрокосмический мониторинг и технологии " программный комплекс  
"Магнитоупругость" для анализа возможностей его использования на  
практике.

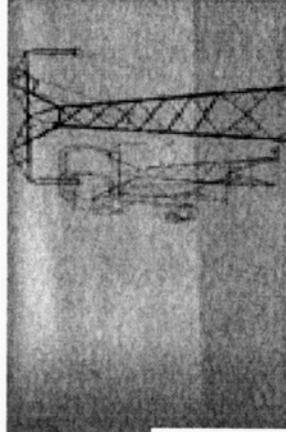
Настоящим сообщаем, что проведение расчетов с помощью  
созданного автором диссертации программного средства позволяет  
получить значения частот собственных колебаний элементов оборудования,  
изготовленных из диа-, пара- и ферромагнитных материалов, в магнитном  
поле и определять тенденции их изменения при выборе различных  
механических моделей крепления. Важным достоинством разработанного  
программного комплекса является его технологичность, позволяющая  
пользоваться им без подключения дополнительных программ.

Анализ результатов расчетов по программному комплексу позволяет обоснованно производить выбор конструктивных элементов оборудования под определенные условия работы, снижая вероятность риска их разрушения и наступления резонансных явлений. Тем самым создаются условия для обеспечения повышения уровня надежности технического диагностирования при проектировании и эксплуатации изделий промышленности.

Заместитель директора экспертно-аналитического  
Центра



Ю.А. Сапельников



Московский энергетический институт  
(технический университет)

# ДИПЛОМ

II степени  
конкурса

НА ЛУЧШУЮ РАЗРАБОТКУ И ВНЕДРЕНИЕ В УЧЕБНЫЙ ПРОЦЕСС  
СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБЛАСТИ ОБУЧЕНИЯ

**ПРИСУЖДАЕТСЯ РАБОТЕ**

«Комплекс: алгоритм и программа «Магнитоупругость» для  
проектирования и расчета динамических характеристик  
упругих пластин и оболочек в магнитных полях»

КАФЕДРА Динамики и прочности машин, Электрических и электронных  
аппаратов

РУКОВОДИТЕЛЬ РАБОТЫ профессор Хроматов В.Е.

АВТОРЫ РАБОТЫ: магистрант Голубева Т.Н., аспирант Корешкова Н.С.,

доцент Коробков Ю.С., профессор Хроматов В.Е., доцент Щугорев В.Н.

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ КОНКУРСНОЙ КОМИССИИ  
ПРОРЕКТОР МЭИ (ТУ)



П.В. РОСЛЯКОВ

Москва 2010г.



УТВЕРЖДАЮ

Проректор МЭИ(ТУ)

А.И. Попов

04

2009 г.

# П А С П О Р Т

## программного средства учебного назначения (ПСУН)

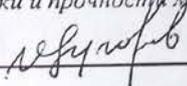
1. Наименование ПСУН "Комплекс: алгоритм и программа "МАГНИТОУПРУГОСТЬ" для проектирования и расчёта динамических характеристик упругих пластин и оболочек в магнитных полях".
2. Авторский коллектив, кафедра – проф. В.Е. Хроматов, доц. В.Н. Щугорев, асп. Н.С. Корешкова, магистр Т.Н. Голубева – кафедра Динамики и прочности машин им. В.В. Болотина, доц. Ю.С. Коробков – кафедра "Электрические и электронные аппараты".
3. Характер ПСУН Комплекс позволяет проектировать и рассчитывать на ЭВМ спектры частот колебаний прямоугольных пластин и пологих оболочек в продольном и поперечном магнитном поле, оценивать влияние магнитных полей на динамические характеристики конструктивных элементов при проектировании конструктивных элементов электрических аппаратов и электротехнических устройств при выполнении типовых расчётов и самостоятельных заданий (на младших курсах), выпускных работ, курсовых и дипломных проектов (на старших курсах).
4. Требования к оборудованию и операционной среде Pentium, в среде WINDOWS.
5. Предполагается применение в учебном процессе для студентов, обучающихся по программе направления (специальности) Прикладная механика, (Динамика и прочность машин) и Электротехника, электромеханика и электротехнологии (Электрические и электронные аппараты)
6. Требуется для проработки студентам 2 академических часа обязательных занятий, в том числе 1 академический час с применением ЭВМ.
7. Требуется ли твердая копия методического пособия при проведении занятий с применением ПСУН?  
Твердой копии не требуется.

8. Возможно ли и на каких условиях тиражирование ПСУН для учебных целей для кафедр МЭИ, для студентов МЭИ, для внешних организаций?

Для внешних организаций по договоренности и при обязательном условии обязательной ссылки на источник; для всех подразделений МЭИ – бесплатно.

9. ПСУН установлено в МЭИ в учебной лаборатории АСНИ и компьютерных классах кафедр "Динамики и прочности машин" им. В.В. Болотина и "Электрические и электронные аппараты". Целесообразна также его установка в НТБ МЭИ

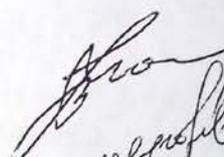
Ответственный за парк ЭВМ кафедры Динамики и прочности машин им. В.В. Болотина

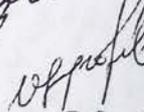
 (В.Н. Щугорев)

Ответственный за парк ЭВМ кафедры Электрические и электронные аппараты

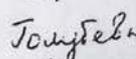
 (К.В. Крюков)

#### 10. Подписи авторов ПСУН

 (В.Е. Хроматов)

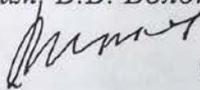
 (В.Н. Щугорев)

 (Н.С. Корешкова)

 (Т.Н. Голубева)

 (Ю.С. Коробков)

Заведующий кафедрой  
"Динамики и прочности машин" им. В.В. Болотина  
профессор

 В.П. Чирков

Заведующий кафедрой  
"Электрические и электронные аппараты"  
профессор

 М.В. Рябчицкий