

На правах рукописи



ЧАН Ле Тхай

**ДИНАМИКА УПРУГОГО МОМЕНТНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ  
ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКИ**

Специальность: 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2019

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, профессор,  
**Тарлаковский Дмитрий Валентинович**

**Официальные оппоненты:** **Ерофеев Владимир Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, директор Института проблем машиностроения Российской академии наук, г. Нижний Новгород.

**Денисов Станислав Леонидович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ФГУП Центральный Аэрогидродинамический Институт имени профессора Жуковского, г. Жуковский.

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной механики Российской академии наук.

Защита диссертации состоится «05» июня 2019 г. в 15<sup>00</sup> часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, дом 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте: [https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT\\_ID=102066](https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=102066).

Автореферат разослан «\_\_\_» апреля 2019 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Федотенков Григорий Валерьевич

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Развитие современной техники зачастую приводит к необходимости использования уточненных по сравнению с классической теорией упругости моделей, позволяющих учитывать микростроение вещества. Прежде всего, это требуется для композитных материалов. Одной из таких моделей является используемая в данной работе модель Коссера. Деформация такой среды описывается не только вектором перемещения, но и вектором поворота, т.е. величиной, являющейся функцией времени и положения.

Различные вопросы общей теории несимметричной упругости исследовали Адамов А.А., Амбарцумян С.А., Атоян А.А., Аэро Э.Л., Багдасарян Г.Е., Баскаков В.А., Белоносов С.М., Большаков В.И., Босяков С.М., Бояндин В.С., Бровко Г.Л., Бурак Ярослав, Бытев В.О., Ванин Г.А., Варыгина М.П., Васильев А.А., Волегов П.С., Гарагаш И.А., Горбачев В.И., Григорьев Ю.М., Деев В.М., Дудников В.А., Емельянов А.Н., Ерофеев В.И., Зеленина А.А., Иванова Е.А., Илюхин А.А., Ильюшин А.А., Каюк Я. Ф., Койтер В.Т., Кончакова Н.А., Корепанов В.В., Кулеш М.А., Кунин И.А., Лай Тхань Туан, Леонов А.В., Лурье С.А., Лялин А.Е., Матвеев В.П., Миндлин Р.Д., Мутафян М.Н., Немировский Ю.В., Николау В.И., Новацкий В., Омаров С.Е., Пальмов В.А., Победря Б.Е., Пронина В.С., Садовский В.М., Саркисян С.О., Суворов Е.М., Федоров Ю.А., Хмиадашвили М.А., Чкадуа О.О., Шардаков И.Н., Шкутин И.Л., Якушев Р.С., Adachi Taiji, Altenbach H., Birsan Mircea, Cao D. Q., Cosserat E., Ivanova E.A., Khurana A., Kumar Rajneesh, Saxena Hirdeshwar S., Shanjie Zhang, Suiker A.S.J., Tomar S.K.

Как следует из приведенного в диссертации обзора публикаций, в настоящее время для среды Коссера, в основном, исследованы статические и стационарные задачи. И лишь в нескольких работах рассматриваются нестационарные процессы. При этом рассматриваются плоские задачи. Публикации, посвященные нестационарным осесимметричным процессам в таких средах практически отсутствуют. В данной работе и проводится их исследование применительно к распространению нестационарных поверхностных возмущений от границы полупространства. В том числе, рассматривается задача типа Лемба.

**Целью диссертационной работы** является постановка задач о распространении осесимметричных нестационарных волн в упругом моментном полупространстве и построение их аналитических решений.

**Актуальность темы исследования** обусловлена в теоретическом плане малой изученностью нестационарных осесимметричных процессов в телах, заполненных средой Коссера. С практической же точки зрения она связана с потребностью учета микроструктуры материала при расчетах элементов конструкций объектов современной техники.

**Методы исследования.** Для постановки задач о распространении нестационарных поверхностных возмущений от границы полупространства используется модель Коссера. Их решения представляются в виде обобщенных сверток этих возмущений с нестационарными поверхностными функциями влияния. Для построения этих функций в осесимметричных случаях применяются интегральные преобразования Лапласа по времени и Ханкеля по радиусу в сочетании с методом малого параметра. Обращение этих преобразований в простейших случаях проводится последовательно, а в более сложных вариантах применяется связь плоской и осесимметричной задач.

**Достоверность и обоснованность результатов** научных положений и полученных результатов подтверждается использованием апробированной модели сплошной среды, применением для решения начально-краевых задач строгих математических методов и сравнением с решениями для упругих сред.

**Научная новизна диссертационной работы** заключается в следующем.

1. Впервые даны постановка и интегральное представление решений задач о распространении поверхностных нестационарных осесимметричных возмущений всех возможных видов в полупространстве.

2. Получено аналитическое решение новой плоской нестационарной задачи о распространении возмущений от границы полуплоскости.

3. Впервые построены аналитические решения нестационарных осесимметричных задач для полупространства с заданными поверхностными возмущениями.

4. Исследованы новые задачи о действии на границу упругого моментного полупространства распределенных нормальных возмущений.

**Практическая значимость** состоит в разработке методов исследования напряженно-деформированного состояния упругих сред и элементов конструкций из материалов с микроструктурой, работающих в условиях нестационарных внешних воздействий, а также в возможности использования полученных решений в качестве тестовых при использовании различных пакетов программ.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения.**

1. Постановка и интегральное представление решений задач о распространении поверхностных нестационарных осесимметричных возмущений всех возможных видов в полупространстве, заполненном средой Коссера.

2. Аналитические решения всех возможных нестационарных задач о распространении осесимметричных поверхностных возмущений от границы упругого моментного полупространства.

3. Модификация алгоритмов построения оригиналов Лапласа и Ханкеля для функций влияния.

4. Результаты решения задач о действии на границу полупространства нестационарных осесимметричных распределенных нормальных возмущений и оценка влияния учета моментных характеристик.

**Апробация основных результатов работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Российских и Международных конференциях и симпозиумах:

– Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Московская обл., 2016 – 2019 г.г.);

– Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при взаимодействии полей различной физической природы». (Москва, МАИ, 2015 – 2018 г.г.);

– Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, МГУ, 2016 – 2018 г.г.).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 14 печатных работах, в том числе в 4 статьях в журналах, рекомендованных ВАК РФ и 10 тезисов докладов.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, приложение и списка использованных источников, включающего 138 наименований. Общий объем диссертации 109 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность научных исследований, изложенных в диссертации, а также сформулированы цели, определена научная новизна, практическая и теоретическая ценность диссертационной работы.

**В первой главе** дан аналитический обзор современных научных исследований, связанных с темой диссертации. Здесь же приведена постановка осесимметричных задач для полупространства. Уравнения осесимметричного движения среды при отсутствии массовых сил и моментов записываются относительно скалярного потенциала  $\varphi$  перемещений и ненулевых компонент  $\psi$  и  $\omega$  векторов перемещений и угла поворота в цилиндрической системе координат  $Or\vartheta z$  ( $r \geq 0, -\pi < \vartheta \leq \pi, z \geq 0$ ) с направленной в глубь полупространства осью  $Oz$  (точками обозначены производные по времени):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \Delta\varphi, \quad \ddot{\psi} = (\gamma_1^{-2} + \alpha)\Delta\psi + 2\alpha\omega - (\gamma_1^{-2} + \alpha)r^{-2}\psi, \\ \ddot{\omega} &= \gamma_2^{-2}\Delta\omega - 2\alpha\delta\Delta\psi - 4\alpha\delta\omega - r^{-2}(\gamma_2^{-2}\omega - 2\alpha\delta\psi), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

При этом ненулевые компоненты  $u$  и  $w$  вектора перемещений связаны с потенциалами так:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\psi)}{\partial r}, \quad (2)$$

а нетривиальные физические компоненты тензоров напряжений  $\sigma_{\xi\zeta}$  и моментных напряжений  $\mu_{\xi\zeta}$  ( $\{\xi, \zeta\} = \{r, \vartheta, z\}$ ) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \kappa \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} \right), \sigma_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \kappa \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \sigma_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \kappa \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_{rz} &= (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} + (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial u}{\partial z} + 2\alpha\omega, \sigma_{zr} = (\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial u}{\partial z} + (\gamma_1^{-2} - \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} - 2\alpha\omega, \\ \mu_{r\theta} &= \frac{\partial \omega}{\partial r} - \eta \frac{\omega}{r}, \quad \mu_{\theta r} = -\frac{\omega}{r} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad \mu_{z\theta} = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad \mu_{\theta z} = \eta \frac{\partial \omega}{\partial z}.\end{aligned}\quad (3)$$

В соотношениях (1) – (3) и далее использованы безразмерные величины (при одинаковом начертании они обозначены штрихами, которые в (1) – (3) и далее опущены):

$$\begin{aligned}u' &= \frac{u}{L}, w' = \frac{w}{L}, r' = \frac{r}{L}, z' = \frac{z}{L}, \tau = \frac{c_1 t}{L}, \varphi' = \frac{\varphi}{L^2}, \psi' = \frac{\psi}{L^2}, \sigma'_{\xi\xi} = \frac{\sigma_{\xi\xi}}{\lambda + 2\mu}, \mu'_{\xi\xi} = \frac{L\mu_{\xi\xi}}{\gamma + \varepsilon}, \gamma_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \\ \gamma_2^2 &= \frac{c_1^2}{c_3^2}, \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \delta = \frac{\rho L^2}{J}, \alpha' = \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, c_3^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{J}, \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}.\end{aligned}$$

Здесь  $t$  – время;  $L$  – некоторый характерный линейный размер;  $\lambda, \mu$  – упругие постоянные Ламе;  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  – физические параметры моментной среды;  $\rho$  – ее плотность;  $J$  – мера инерции среды при вращении (плотность момента инерции);  $c_1, c_2$  и  $c_3$  – скорости волн растяжения-сжатия, сдвига и кручения соответственно.

Далее предполагается, что имеют место справедливые для композита в виде алюминиевой дроби в эпоксидной матрице неравенства  $c_2 < c_1 < c_3$ , из которых вытекает следующее соотношение:  $\gamma_2 < 1 < \gamma_1$ .

В начальный момент времени возмущения отсутствуют:

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = \omega|_{\tau=0} = \dot{\omega}|_{\tau=0} = 0, \quad (4)$$

компоненты напряженно-деформированного состояния ограничены.

Рассматриваются все возможные виды поверхностных возмущений. Для них приведены интегральные представления решений с ядрами в виде поверхностных функций влияния.

Подробно исследуются обеспечивающие осесимметричный характер движения нормальные поверхностные возмущения следующих видов:

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = w_0(r, \tau), \quad \omega|_{z=0} = 0; \quad (5)$$

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = P(r, \tau), \quad \mu_{z\theta}|_{z=0} = 0; \quad (6)$$

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = w_0(r, \tau), \quad \omega|_{z=0} = 0; \quad (7)$$

$$u|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = P(r, \tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = 0; \quad (8)$$

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = w_0(r, \tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = 0; \quad (9)$$

$$u|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = P(r, \tau), \quad \omega|_{z=0} = 0; \quad (10)$$

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = w_0(r, \tau), \quad \mu_{z\vartheta}|_{z=0} = 0; \quad (11)$$

$$\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = P(r, \tau), \quad \omega|_{z=0} = 0. \quad (12)$$

При этом решения начально-краевых задач записываются так (звездочки соответствуют сверткам по времени и величине  $x$ ;  $x, y$  – декартовы координаты в плоскости  $z = 0$ ):

$$U_\nu(r, z, \tau) = U_0(r, \tau) *** G_\nu^{(k)}(r, z, \tau),$$

Здесь  $\nu$  принимает одно из следующих значений:  $u, w, \omega, zz, rz, zr, r\vartheta, \vartheta r, z\vartheta$  или  $\vartheta z$ ; индекс  $k = \overline{1, 8}$  соответствует граничным условиям в (5) – (12); а  $G_u^{(k)} = u, G_w^{(k)} = w, G_\omega^{(k)} = \omega, G_{zz}^{(k)} = \sigma_{zz}, G_{rz}^{(k)} = \sigma_{rz}, G_{zr}^{(k)} = \sigma_{zr}, G_{r\vartheta}^{(k)} = \mu_{r\vartheta}, G_{\vartheta r}^{(k)} = \mu_{\vartheta r}, G_{z\vartheta}^{(k)} = \mu_{z\vartheta}$  и  $G_{\vartheta z}^{(k)} = \mu_{\vartheta z}$  – поверхностные функции влияния которые есть ограниченные решения уравнений (1) с начальными условиями (4) и одним из граничных условий (5) – (12), в которых ненулевые правые части имеют вид  $\delta(x, y)\delta(\tau)$ , где  $\delta(x, y)$  и  $\delta(\xi)$  – дельта-функции Дирака.

**Во второй главе** рассматривается распространение волн в упругом моментном полупространстве под действием осесимметричного нестационарного нормального перемещения, что соответствует граничным условиям (5), (7), (9) и (11). К соответствующим начально-краевым задачам применяются преобразования Лапласа по времени  $\tau$  и Ханкеля по радиусу  $r$  (значки « $L$ » и « $H$ » указывают на соответствующие изображения;  $s$  и  $q$  – параметры этих преобразований). При этом уравнения (1) трансформируются так:

$$\frac{\partial^2 \varphi^{HL}}{\partial z^2} - k_0^2(q, s) \varphi^{HL} = 0, \quad k_0(q, s) = \sqrt{q^2 + \gamma_0^2 s^2}, \quad (\gamma_0 = 1), \quad \text{Re} \sqrt{\cdot} > 0,$$

$$(\gamma_1^{-2} + \alpha) \frac{\partial^2 \psi^{HL}}{\partial z^2} - [(\gamma_1^{-2} + \alpha) q^2 + s^2] \psi^{HL} + 2\alpha \omega^{HL} = 0,$$



$$\gamma_2^{-2} \frac{\partial^2 \omega^{HL}}{\partial z^2} - 2\alpha\delta \frac{\partial^2 \psi^{HL}}{\partial z^2} - (\gamma_2^{-2} q^2 + s^2 + 4\alpha\delta) \omega^{HL} + 2\alpha\delta q^2 \psi^{HL} = 0.$$

Их общие решения с учетом ограниченности имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi^{HL}(q, z, s) &= C_0(q, s) E_0(q, z, s), \quad \psi^{HL}(q, z, s) = \sum_{l=1}^2 C_l(q, s) E_l(q, z, s), \\ \omega^{HL}(q, z, s) &= \frac{1}{2\alpha} \sum_{l=1}^2 T_l(q, s) C_l(q, s) E_l(q, z, s), \\ E_j(q, z, s) &= e^{-k_j(q, s)z}, \quad T_l(q, s) = (\gamma_1^{-2} + \alpha) [q^2 - k_l^2(q, s)] + s^2. \end{aligned}$$

Здесь  $C_j(q, s)$ , ( $j=0, 2$ ) – определяемые из граничных условий постоянные интегрирования;  $k_{1,2}$ ,  $\text{Re } k_{1,2} > 0$  – корни биквадратного уравнения, коэффициенты которых зависят от  $\alpha$ ,  $q^2$  и  $s^2$ . Соответствующие формулы для перемещений и напряжений строятся с использованием (2), (3) и свойств преобразований.

В силу сложной зависимости корней от параметров преобразования в линейном приближении используются разложения в степенные ряды по малому параметру  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} k_l(q, s) &= k_{0l}(q, s) + \alpha k_{1l}(q, s), \quad k_{0l}(q, s) = \sqrt{q^2 + \gamma_l^2 s^2}, \quad k_{11}(q, s) = -\frac{\gamma_1^4 s^2}{2k_{01}(q, s)}, \\ k_{12}(q, s) &= \frac{2\delta\gamma_2^2}{k_{02}(q, s)}, \quad T_1(q, s) = T_{12}(q, s)\alpha^2, \quad T_2(q, s) = T_{20}(q, s) + \alpha T_{21}(q, s), \\ T_{12}(q, s) &= -\frac{4\delta\gamma_1^2\gamma_2^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2}, \quad T_{20}(q, s) = \gamma_1^{-2}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)s^2, \quad T_{21}(q, s) = -\gamma_1^{-2}\gamma_2^2(4\delta + \gamma_1^2 s^2), \end{aligned}$$

Построены изображения всех поверхностных функций влияния. Например, для нормальных напряжений на границе полупространства в случае граничных условий (5) имеет место следующий результат:

$$\begin{aligned} G_{zz}^{(1)HL}(q, 0, s) &= G_{0zz}^{(1)HL}(q, s) = G_{0zz0}^{(1)HL}(q, s) + \alpha G_{0zz1}^{(1)HL}(q, s), \\ G_{0zzm}^{(1)HL}(q, s) &= \sum_{j=0}^1 G_{zzjm}^{(1)HL}(q, 0, s) = s^2 G_{33m}^{HL}(q, s), \quad G_{33m}^{HL}(q, s) = \frac{1}{2\pi} \Gamma_{33m}^{FL}(q, s), \\ \Gamma_{330}^{FL}(q, s) &= \frac{k_{01}(q, s)}{R_l(q, s)}, \quad \Gamma_{331}^{FL}(q, s) = -\frac{\gamma_1^4 s^2 q^2}{2k_{01}(q, s) R_l^2(q, s)}, \\ R_l(q, s) &= q^2 - k_0(q, s) k_{01}(q, s). \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь  $\Gamma_{33m}^{FL}$  – изображения Фурье по декартовой координате  $x$  и Лапласа составляющих решений плоской задачи для упругой моментной полуплоскости. Показано, что их оригиналы имеют следующий вид ( $H(\tau)$  – единичная функция Хевисайда):

$$\Gamma_{33m}(x, \tau) = \sum_{j=0}^1 \Gamma_{33mj}(x, \tau) H(\tau - \gamma_j |x|) \quad (m=0,1),$$

$$\Gamma_{3300}(x, \tau) = \frac{(\tau^2 - \gamma_1^2 x^2) \sqrt{\tau^2 - x^2}}{\pi(1 + \gamma_1^2) x^2 (\tau^2 - \nu_1^2 x^2)}, \Gamma_{3301}(x, \tau) = \frac{\tau^2 \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}}{\pi(1 + \gamma_1^2) x^2 (\tau^2 - \nu_1^2 x^2)}, \nu_1 = \frac{\gamma_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2}} < 1,$$

$$\Gamma_{3310}(x, \tau) = \frac{\gamma_1^4 \tau^4 \sqrt{\tau^2 - x^2}}{\pi(1 + \gamma_1^2)^2 x^2 (\tau^2 - \nu_1^2 x^2)^2}, \Gamma_{3311}(x, \tau) = \frac{\gamma_1^4 \tau^2 [\tau^4 + (\tau^2 - x^2)(\tau^2 - \gamma_1^2 x^2)]}{2\pi(1 + \gamma_1^2)^2 x^2 \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2} (\tau^2 - \nu_1^2 x^2)^2}.$$

Равенства в (13) позволяют найти оригинал функции  $G_{33m}^{HL}(q, s)$  с помощью утверждений о связи преобразований Фурье и Ханкеля:

$$G_{33mj}(r, \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x (x^2 - r^2)_+^{-3/2} \Gamma_{33mj}(x, \tau) dx = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^1 I_{mj}(r, \tau) H(\tau - \gamma_j r),$$

$$I_{mj}(r, \tau) = \int_r^{\tau/\gamma_j} \frac{x \Gamma_{33mj}(x, \tau)}{(x^2 - r^2)^{3/2}} dx.$$

Вычисление интегралов  $I_{mj}(r, \tau)$  с помощью разложения рациональных частей подынтегральной функции на элементарные дроби и табличных интегралов, дает следующий результат:

$$G_{330}(r, \tau) = \frac{\tau}{2\pi(1 + \gamma_1^2)} \left[ \frac{1}{r^3} \sum_{j=0}^1 H(\tau - \gamma_j r) - \frac{\gamma_1 \nu_1^3}{(\tau^2 - \nu_1^2 r^2)^{3/2}} \sum_{j=0}^1 (-1)^j H(\tau - \gamma_j r) \right],$$

$$G_{331}(r, \tau) = \frac{\gamma_1^4 \tau}{2\pi(1 + \gamma_1^2)^2} \left[ \frac{1}{r^3} \sum_{j=0}^1 H(\tau - \gamma_j r) + \frac{\nu_1^5}{(\tau^2 - \nu_1^2 r^2)^{5/2}} \sum_{j=0}^1 (a_{1j} \tau^2 + b_{1j} r^2) H(\tau - \gamma_j r) \right],$$

где

$$a_{10} = \frac{(1 + 2\gamma_1^2)(2 - \gamma_1^4 + \gamma_1^2)}{2\gamma_1^5}, b_{10} = \frac{(1 + 2\gamma_1^2)(\gamma_1^2 - 1)}{2\gamma_1^3}, a_{11} = \frac{\gamma_1^8 - (\gamma_1^6 + 3\gamma_1^4 + 2\gamma_1^2 + 1)}{2\gamma_1^7}, b_{11} = \frac{1 - \gamma_1^6}{2\gamma_1^5}.$$

Отмечено, что структура изображений функций влияния в случае граничных условий (11) позволяет применить тот же алгоритм построения оригиналов.

На рис. 1 и 2 представлены построенные зависимости функций влияния  $G_{330}(r, \tau)$  и  $G_{331}(r, \tau)$  от времени  $\tau$  при различных значениях радиусов: сплошная кривая соответствует  $r = 0,1$ , пунктирная –  $r = 0,15$ , а штрихпунктирная –  $r = 0,2$ .

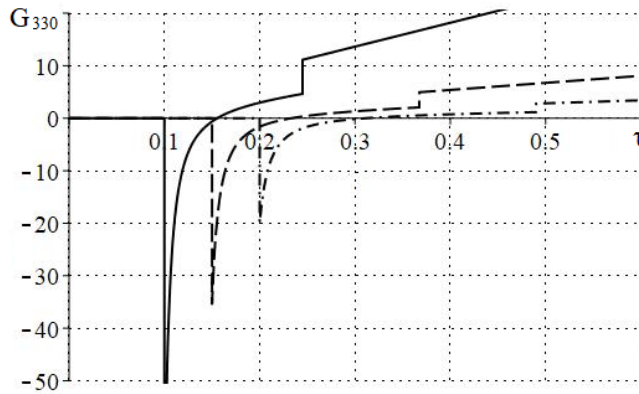


Рис. 1.

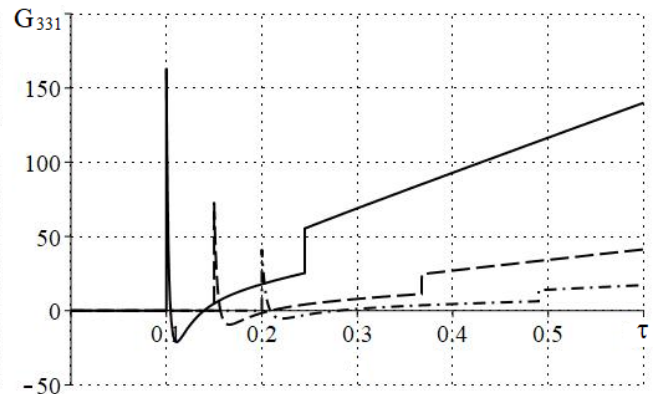


Рис. 2.

Здесь и далее в качестве материала полупространства выбирается зернистый композит из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице, который характеризуется следующими безразмерными параметрами

$$\gamma_1 = 2,45; \quad \gamma_2 = 0,92; \quad \alpha = 0,66 \cdot 10^{-3}; \quad \delta = 5,1 \cdot 10^6.$$

Отмечено, что поскольку порядок функции  $G_{331}(r, \tau)$  на единицу выше чем функции  $G_{330}(r, \tau)$ , то относительный вклад учета моментных напряжений приблизительно эквивалентен  $10\alpha$ . Но нужно учесть, что речь идет о производных второго порядка по времени от функций влияния. Качественное отличие от классической упругой среды заключается в появлении еще одной поверхностной волны, распространяющейся со скоростью  $v_1^{-1}$ .

При рассмотрении распределенных возмущений нормальное напряжение записывается так:

$$\sigma_{zz}(r, 0, \tau) = \ddot{w}_0(r, \tau) *** G_{33}(r, \tau), \quad G_{33}(r, \tau) = G_{330}(r, \tau) + \alpha G_{331}(r, \tau),$$

В одном из рассмотренных примеров возмущения принимаются в виде  $w_0(r, \tau) = \tau_+ f_0(r) H(a - r)$ , где  $f_0(r) = (a^2 - r^2)^2$ ,  $a > 0$ . При этом

$\ddot{w}_0(r, \tau) = f(r)\delta(\tau)$ ,  $f(r) = H(a-r)f_0(r)$ . Соответствующие результаты представлены на рис. 3 и 4. (сплошная кривая соответствует  $\tau = 0,2$ , пунктирная –  $\tau = 0,4$ , а штрихпунктирная –  $\tau = 0,6$ ).

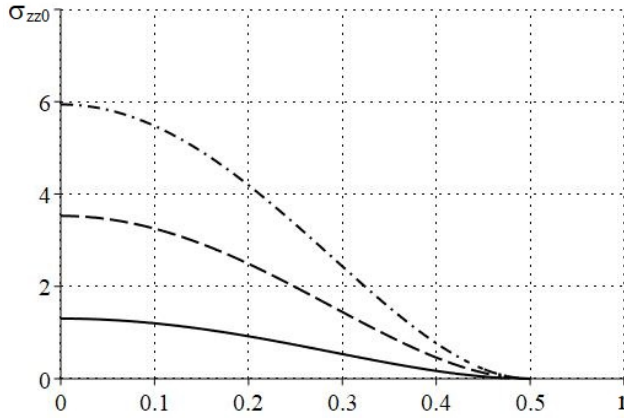


Рис. 3.

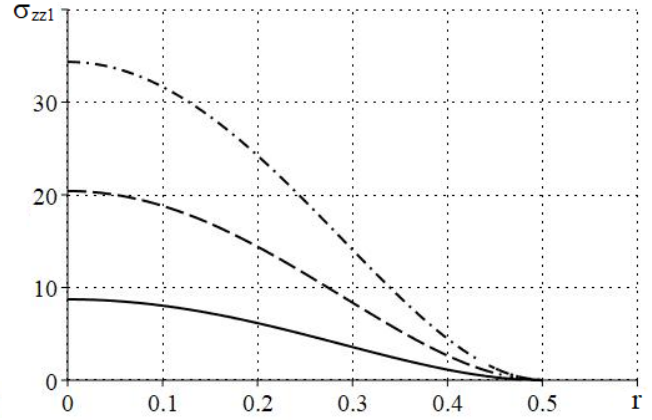


Рис. 4.

Анализ этих результатов показывает, что относительный вклад учета моментных напряжений приблизительно эквивалентен  $5\alpha$ .

Найдены также изображения всех поверхностных функций влияния, соответствующих граничным условиям (7) и (9). Например, в первом варианте они имеют вид (здесь приведены только две из них):

$$G_v^{(3)HL}(q, z, s) = G_{v0}^{(3)HL}(q, z, s) + \alpha G_{v1}^{(3)HL}(q, z, s), \quad v = \{u, w\},$$

$$G_{u0}^{(3)HL}(q, z, s) = \frac{1}{\pi\gamma_1^2} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \frac{q^2}{s^2} f_{1j}^{H_1L}(q, z, s) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^1 d_{1j} f_{1j}^{H_1L}(q, z, s), \quad d_{10} = \frac{1}{2}, d_{11} = -1,$$

$$G_{u1}^{(3)HL}(q, z, s) = \frac{\gamma_1^2}{2\pi} [f_{11}^{H_1L}(q, z, s) - z f_{31}^{H_1L}(q, z, s)],$$

$$G_{w0}^{(3)HL}(q, z, s) = \frac{1}{\pi\gamma_1^2} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \frac{q^2}{s^2} f_{2j}^{H_0L}(q, z, s) + \frac{1}{2\pi} f_{20}^{H_0L}(q, z, s),$$

$$G_{w1}^{(3)HL}(q, z, s) = -\frac{\gamma_1^2 z}{2\pi} f_{41}^{H_0L}(q, z, s).$$

где

$$f_{1j}^{H_1L} = qk_{0j}^{-1}(q, s)E_j(q, z, s), f_{2j}^{H_0L} = E_j(q, z, s), f_{3j}^{H_1L} = qE_j(q, z, s), f_{4j}^{H_0L} = qf_{1j}^{H_1L}.$$

Их оригиналы найдены последовательным обращением преобразований с использованием их свойств (индексы « $r$ » и « $s$ » обозначают регулярные и сингулярные составляющие):

$$G_u^{(3)}(r, z, \tau) = G_{ur}^{(3)}(r, z, \tau) + G_{us}^{(3)}(r, z, \tau),$$

$$G_{ur}^{(3)}(r, z, \tau) = \frac{3r\tau(4z^2 - r^2)}{\pi\gamma_1^2 r_3^7} \sum_{j=0}^1 [(-1)^j H(\tau - \gamma_j r_3)], \quad r_3 = \sqrt{r^2 + z^2},$$

$$G_{us}^{(3)}(r, z, \tau) = \frac{r}{\pi\gamma_1^2 r_3^5} \left\{ \sum_{j=0}^1 [(-1)^j 2\gamma_j^2 (2z^2 - r^2) + \gamma_1^2 r_3^2 d_{1j}] \delta(\tau - \gamma_j r_3) + \right.$$

$$\left. + r_3 \sum_{j=0}^1 \gamma_j [d_{1j} \gamma_1^2 r_3^2 + (-1)^{j+1} \gamma_j^2 r^2] \delta'(\tau - \gamma_j r_3) \right\} +$$

$$+ \alpha \frac{\gamma_1^2 r}{2\pi r_3^5} \left\{ (r_3^2 - 3z^2) [\delta(\tau - \gamma_1 r_3) + \gamma_1 r_3 \delta'(\tau - \gamma_1 r_3)] - \gamma_1^2 z^2 r_3^2 \delta''(\tau - \gamma_1 r_3) \right\};$$

$$G_w^{(3)}(r, z, \tau) = G_{wr}^{(3)}(r, z, \tau) + G_{ws}^{(3)}(r, z, \tau),$$

$$G_{wr}^{(3)}(r, z, \tau) = \frac{3\tau z(2z^2 - 3r^2)}{\pi\gamma_1^2 r_3^7} \sum_{j=0}^1 (-1)^j H(\tau - \gamma_j r_3),$$

$$G_{ws}^{(3)}(r, z, \tau) = \frac{z}{2\pi\gamma_1^2 r_3^5} \left\{ [4\gamma_0^2 (z^2 - 2r^2) + \gamma_1^2 r_3^2] - 4\gamma_1^2 (z^2 - 2r^2) \right\} \delta(\tau - \gamma_1 r_3) +$$

$$+ \frac{z}{2\pi\gamma_1^2 r_3^4} [\gamma_0 (\gamma_1^2 r_3^2 - 2\gamma_0^2 r^2) + 2\gamma_1^3 r^2] \delta'(\tau - \gamma_1 r_3) -$$

$$- \alpha \frac{\gamma_1^2 z}{2\pi r_3^5} \left\{ (2z^2 - r^2) [\delta(\tau - \gamma_1 r_3) + \gamma_1 r_3 \delta'(\tau - \gamma_1 r_3)] - \gamma_1^2 r_3^2 r^2 \delta''(\tau - \gamma_1 r_3) \right\}.$$

На рис. 5 и 6 представлены построенные зависимости регулярных составляющих функций влияния  $G_u^{(3)} = G_{ur}^{(3)}$  и  $G_w^{(3)} = G_{wr}^{(3)}$  от координаты  $z$  при  $r=0,4$  для различных значений моментов времени  $\tau$ : сплошная кривая соответствует  $\tau=0,6$ , пунктирная –  $\tau=0,8$ , а штрихпунктирная –  $\tau=1$ . Отмечено, что эти функции совпадают с регулярными составляющими упругого решения.

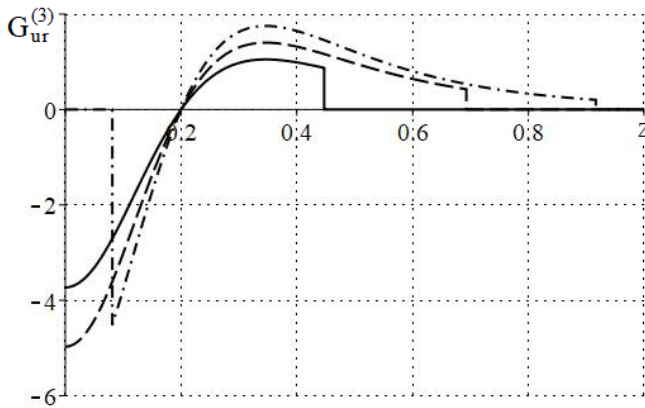


Рис. 5.

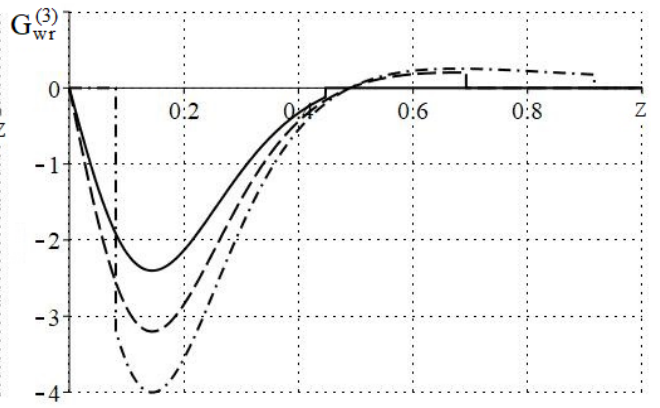


Рис. 6.

В третьей главе рассматривается распространение волн в упругом моментном полупространстве под действием осесимметричного нестационарного нормального давления, что соответствует граничным условиям (6), (8), (10) и (12).

С использованием результатов главы 2 найдены изображения всех соответствующих поверхностных функций влияния. Например, для условий (6) изображение функции, соответствующей нормальному перемещению имеет вид:

$$G_w^{(2)HL}(q, 0, s) = G_{0w}^{(2)HL}(q, s) = G_{0w0}^{(2)HL}(q, s) + \alpha G_{0w1}^{(2)HL}(q, s),$$

$$G_{0wm}^{(2)HL}(q, s) = \frac{1}{2\pi} W_m^{FL}(q, s),$$

$$W_0^{FL}(q, s) = -\frac{\gamma_1^4 s^2 k_0(q, s)}{R_{II}(q, s)}, \quad W_1^{FL}(q, s) = \frac{2\gamma_1^8 s^4 q^2 k_0^2(q, s)}{k_{01}(q, s) R_{II}^2(q, s)},$$

$$R_{II}(q, s) = k_3^4(q, s) - 4q^2 k_0(q, s) k_{01}(q, s).$$

Здесь  $W_m^{FL}(q, s)$  – изображения Фурье по декартовой координате  $x$  и Лапласа составляющих решений известной плоской задачи Лемба для упругой моментной полуплоскости.

Оригиналы функции  $G_{0wm}^{(2)HL}$  находятся с помощью утверждений о связи преобразований Фурье и Ханкеля:

$$G_{0wm}^{(2)}(r, \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{x W_m(x, \tau) dx}{(x^2 - r^2)^{3/2}}.$$

При этом  $G_{0w0}^{(2)}$  есть решение классической задачи Лемба для упругой среды, а функция  $G_{0w1}^{(2)}$  вычисляется с помощью разложения рациональной части подынтегральной функции на элементарные дроби ( $c_R$  – скорость распространения волн Релея):

$$G_{0w1}^{(2)}(r, \tau) = -\frac{A_{1j}}{\pi \gamma_1^8} \sum_{j=0}^1 [K_{jr}(r, \tau) + K_{js}(r, \tau)] H(\tau - \gamma_j r),$$

где

$$K_{jr}(r, \tau) = \frac{1}{\pi \tau^2} \int_{r^2/\tau^2}^{\gamma_j^2} \frac{\Phi_j(z, r^2/\tau^2)}{\sqrt{(1 - \gamma_j^2 z)(z - r^2/\tau^2)}} dz,$$

$$\Phi_j(z, \xi) = \left[ \frac{F_j(z) - F_j(\xi)}{z - \xi} - \frac{F_j(z) - F_j(c_R^2)}{z - c_R^2} \right] \frac{1 - \xi}{(\xi - c_R^2)^2} - \frac{1 - c_R^2}{\xi - c_R^2} \frac{F_j(z) - F_j(c_R^2) - F_j'(c_R^2)(z - c_R^2)}{(z - c_R^2)^2}, \quad F_j(z) = \frac{P_j(z, 1)}{P_2^2(z, 1)},$$

$$P_0(x^2, \tau^2) = (2\tau^2 - \gamma_1^2 x^2)^2 (\tau^2 - x^2), \quad P_1(x^2, \tau^2) = (\gamma_1^2 x^2 - 2\tau^2)^4 + 16\tau^4 (\tau^2 - x^2) (\tau^2 - \gamma_1^2 x^2),$$

$$P_2(x^2, \tau^2) = x^4 - 2a^2 x^2 \tau^2 + b^2 \tau^4, \quad K_{j_s}(r, \tau) = h_{j_1}(\tau) (r^2 - \tau^2 c_R^2)_+^{-3/2} + h_{j_2}(r, \tau) (r^2 - \tau^2 c_R^2)_+^{-5/2},$$

$$h_{j_1}(\tau) = -\frac{(1 - c_R^2)\tau}{2(1 - \gamma_j^2 c_R^2)^{3/2}} \left[ \gamma_j^2 F_j(c_R^2) + 2(1 - \gamma_j^2 c_R^2) F_j'(c_R^2) \right],$$

$$h_{j_2}(r, \tau) = -\tau \frac{(3 - c_R^2)\tau^2 - 2r^2}{2\sqrt{1 - \gamma_j^2 c_R^2}} F_j(c_R^2), \quad a^2 = \frac{4}{\gamma_1^2} - \frac{c_R^2}{2}, \quad b^2 = 16 \frac{\gamma_1^2 - 1}{\gamma_1^8 c_R^2}, \quad A_{10} = 8, \quad A_{11} = 1.$$

На рис. 7 – 9 представлены построенные зависимости функций влияния  $G_{0w0}^{(2)}$ ,  $G_{0w1}^{(2)}$  и  $G_{0w}^{(2)} = G_{0w0}^{(2)} + \alpha G_{0w1}^{(2)}$  от времени  $\tau$  при различных значениях радиусов: сплошная кривая соответствует  $r = 0,2$ , пунктирная –  $r = 0,4$ , а штрихпунктирная –  $r = 0,6$ . При этом  $c_R^2 = 0,148$ .

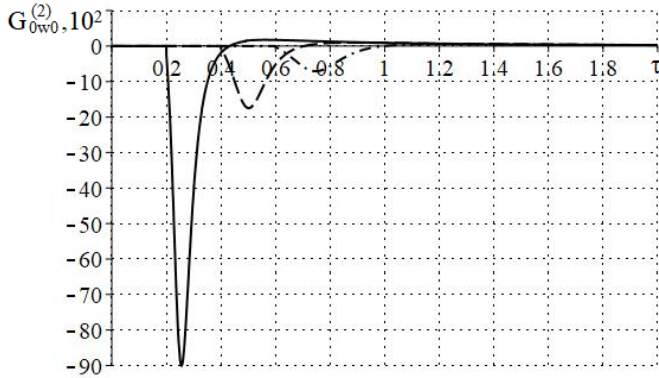


Рис. 7.

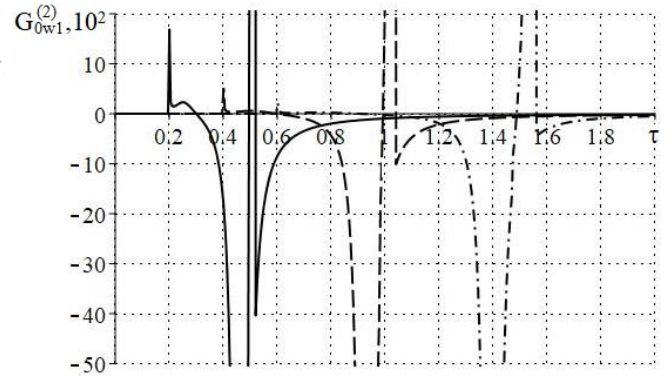


Рис. 8.

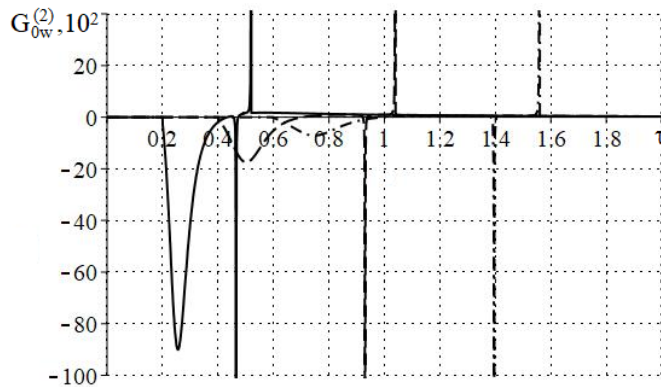


Рис. 9.

Оригиналы функций влияния, соответствующих граничным условиям (12) могут быть найдены аналогично, а в случае граничных условий (8) и (10) они определяются подобно функциям для условий (7).

**В заключении** приводятся основные результаты диссертационной работы.

1. Даны постановка и интегральное представление решений задач о распространении поверхностных нестационарных осесимметричных возмущений всех возможных видов в полупространстве, заполненном средой Коссера.

2. В линейном приближении по малому параметру построены изображения Лапласа и Ханкеля всех поверхностных функций влияния при нормальных граничных возмущениях.

3. Построен и реализован алгоритм определения оригиналов функций влияния.

4. Получены решения задач о действии на границу полупространства нестационарных осесимметричных распределенных нормальных возмущений.

5. Дана оценка влияния учета моментных характеристик. Показано, что количественное отличие от классического упругого решения невелико, однако имеет место дополнительный фронт волны.

## **ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК.**

1. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных нормальных поверхностных перемещений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 2. – С. 231–245. = *Tran Le Thai, D.V. Tarlakovskii. Nonstationary Axisymmetric Motion of an Elastic Momentum Half-Space under Nonstationary Normal Surface Displacements // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 39. – No. 9. – P. 1484–1494.*

2. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Осесимметричная задача Лемба для среды Коссера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – Т. 18, вып. 4. – С. 496–506. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-496-506>.



3. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Моментно упругая полуплоскость под действием поверхностных нестационарных нормальных перемещений // Труды МАИ. – 2018. – № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=99731>.

4. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Упругое моментное полупространство под действием осесимметричных нестационарных поверхностных кинематических возмущений // ППП. – 2019. – Т. 81. – № 1. – С. 5–17.

#### **Публикации в других изданиях**

5. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Нестационарные осесимметричные волны в полупространстве, заполненном средой Коссера // Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики: Тезисы докладов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2016. – С. 162.

6. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных нормальных поверхностных перемещений // Тезисы докладов IV Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» – М.: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 152.

7. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Осесимметричные волны в упругом моментном пространстве при заданных на границе нестационарных нормальных перемещениях // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XXII Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. – М.: ООО «ТР-принт», 2016. – Т. 2. – С. 126–127.

8. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных касательных поверхностных перемещений // Тезисы докладов V Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» – М.: ООО «ТР-принт», 2016. – С. 171.

9. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных

поверхностных касательных сил // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XXIII Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. – М.: ООО “ТР-принт”, 2017. – Т1. – С. 203–204.

10. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В., Коровайцева Е.А. Осесимметричное движение упругого моментного полупространства под действием нестационарных поверхностных касательных сил // Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики: Тезисы докладов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2017. – С. 117.

11. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Распространение осесимметричных нестационарных возмущений в упругом моментном полупространстве под действием нестационарного поверхностного угла поворота // Тезисы докладов VI Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» – М.: ООО «ТР-принт», 2017. – С. 119.

12. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Действие нестационарного осесимметричного нормального давления на полупространство, заполненное средой Коссера // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XXIV Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. – М.: ООО “ТР-принт”, 2018. – Т1. – С. 226–227.

13. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В., Коровайцева Е.А. Моментно упругое полупространство под действием осесимметричного нестационарного нормального давления // Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики: Тезисы докладов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2018. – С. 181.

14. Чан Ле Тхай, Тарлаковский Д.В. Нестационарные процессы в моментно упругой полуплоскости под действием нормального перемещения // Тезисы докладов VII Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» – М.: ООО «ТР-принт», 2018. – С. 122–123.