

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

На правах рукописи



**Сборщиков Сергей Васильевич**

**Моделирование циклического деформирования  
упруго-пластических композиционных материалов  
на основе метода асимптотического осреднения**

1.1.8 Механика деформируемого твердого тела

**ДИССЕРТАЦИЯ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук,  
профессор  
Димитриенко Ю.И.

Москва, 2023

## Содержание

<b>Введение .....</b>	<b>6</b>
 <b>Глава 1 Развитие метода асимптотического осреднения для упруго-пластических композитов при циклических нагружениях.....</b>	<b>14</b>
 <b>1.1 Постановка 3-х мерной задачи деформационной теории пластичности для неоднородных периодических структур при циклических нагружениях .....</b>	<b>14</b>
1.1.1 Постановка 3-х мерной задачи деформационной теории пластичности для неоднородных сред .....	14
1.1.2 Постановка задачи деформационной пластичности для неоднородных периодических структур при циклических нагружениях .....	16
1.1.3 Модель деформационной пластичности для компонентов композита при циклическом нагружении.....	18
 <b>1.2 Вывод уравнений для осредненных и локальных задач упруго-пластических композитов при циклическом нагружении .....</b>	<b>21</b>
1.2.1. Построение асимптотических разложений уравнений теории пластичности для периодических сред при циклических нагружениях.....	21
1.2.2 Постановки локальных задач упруго-пластичности на ячейке периодичности .....	24
1.2.3 Постановки осредненных задач упруго-пластического деформирования композитов при циклическом нагружении.....	26
1.2.4 Преобразование локальной задачи нулевого приближения к задаче на $1/8$ ЯП .....	28
1.2.5 Алгоритм вычисления эффективных упруго-пластических характеристик КМ при циклическом нагружении.....	29
 <b>1.3 Разработка численного алгоритма решения локальных задач упруго-пластичности композитов при циклическом нагружении.....</b>	<b>31</b>

1.3.1 Вариационная формулировка локальных задач.....	31
1.3.2 Применение МКЭ и разработка ПО для решения локальных задач.....	33
1.3.3 Тестирование МКЭ алгоритмов и ПО на примере тканевых КМ.....	34
<b>1.4 Примеры численного решения локальных задач и построения диаграмм деформирования упруго-пластических композитов.....</b>	<b>40</b>
1.4.1 Однонаправленно-армированные упруго-пластические композиты.....	40
1.4.2 Тканевые упруго-пластические композиты .....	49
<b>Глава 2 Разработка методики построения микро-структурных определяющих соотношений деформационной теории пластичности композиционных материалов при циклических нагружениях, основанной на методе асимптотического осреднения .....</b>	<b>57</b>
<b>2.1 Спектральные представления эффективных определяющих соотношений для анизотропных упруго-пластических сред.....</b>	<b>57</b>
2.1.1 Обобщенные девиаторы приращений тензоров напряжений и деформаций	57
2.1.2 Спектральные представления квазилинейных тензорных функций .....	59
2.1.3 Упрощенные модели квазилинейных упруго-пластических сред .....	61
2.1.4 Матричное представление моделей .....	62
<b>2.2. Микро-структурная модель для трансверсально-изотропных упруго-пластических композитов .....</b>	<b>64</b>
2.2.1 Спектральное представление определяющих соотношений для трансверсально-изотропных упруго-пластических сред .....	64
2.2.2 Упрощенная модель трансверсально-изотропной упруго-пластической среды .....	68
2.2.3 Методика определения констант модели трансверсально-изотропных упруго-пластических композитов.....	69
2.2.4 Межслоевой сдвиг.....	70
2.2.5 Сдвиг в плоскости трансверсальной изотропии .....	71

2.2.6 Сдвиг в плоскости трансверсальной изотропии после предварительного межслоевого сдвига.....	72
2.2.7 Межслоевой сдвиг после предварительного сдвига в плоскости трансверсальной изотропии .....	74
2.2.8 Растяжение в продольном направлении .....	75
2.2.9 Растяжение в плоскости трансверсальной изотропии.....	76
2.2.10 Результаты расчетов по определению констант модели трансверсально-изотропного упруго-пластического 1D КМ .....	77
2.2.11 Расчеты по верификации модели 1D КМ на путях нагружения, не входящих в базу для определения констант модели .....	82
2.2.12 Результаты определения констант модели 1D КМ при циклическом нагружении.....	84
<b>2.3. Микро-структурная модель для ортотропных упруго-пластических композитов.....</b>	<b>90</b>
2.3.1 Спектральное представление определяющих соотношений для ортотропных упруго-пластических сред.....	90
2.3.2 Упрощенная модель ортотропной упруго-пластической среды.....	93
2.3.3 Методика определения констант модели ортотропных упруго-пластических композитов .....	95
2.3.4 Сдвиг в плоскости (1,2) .....	96
2.3.5 Сдвиги в плоскостях (1,3) и (2,3).....	97
2.3.6 Растяжение в направлении 1 .....	97
2.3.7 Растяжение в направлениях 2 и 3 .....	98
2.3.8 Сдвиг в плоскости (1,2) с растяжением в направлении 1 .....	99
2.3.9 Сдвиг в плоскости (1,2) с растяжением в направлениях 2 или 3 .....	100
2.3.10 Сдвиги в плоскостях (1,3) или (2,3) с дополнительным растяжением .....	100
2.3.11 Результаты тестовых расчетов по определению констант модели ортотропного упруго-пластического тканевого КМ .....	101

2.3.12 Результаты определения констант модели тканевого КМ при циклическом нагружении.....	107
--	-----

<b>Глава 3 Разработка методики решения двух-масштабных задач деформационной теории пластичности для конструкций из композитов при циклическом нагружении.....</b>	<b>112</b>
---	------------

<b>3.1 Методика решения двух-масштабных задач деформационной теории пластичности для конструкций из композитов при циклическом нагружении .....</b>	<b>112</b>
---	------------

3.1.1 Постановка осредненной задачи упруго-пластичности КМ при циклическом нагружении с учетом спектральных представлений определяющих соотношений .....	112
--	-----

3.1.2 Тензоры концентрации напряжений для упруго-пластических композитов .....	113
--	-----

3.1.3 Применение МКЭ для решения осредненных задач упруго-пластичности композитов при циклическом нагружении.....	114
---	-----

<b>3.2 Задача о 4-х точечном изгибе балки из упруго-пластического композиционного материала при циклическом нагружении.....</b>	<b>116</b>
---	------------

3.2.1 Трехмерная постановка задачи о 4-х точечном изгибе балки.....	116
---	-----

3.2.2 Результаты моделирования полей макро-перемещений и макро-напряжений .....	118
---	-----

3.2.3 Результаты моделирования полей микро-напряжений в упруго-пластической балке из ТКМ.....	125
---	-----

<b>Заключение.....</b>	<b>136</b>
------------------------	------------

<b>Список литературы.....</b>	<b>138</b>
-------------------------------	------------

## Введение

В настоящее время в технике большие перспективы имеют композиционные материалы на металлической матрице [11,140,150]. Вследствие более высокой температурной стабильности упруго-прочностных свойств по сравнению с полимерными композиционными материалами (ПКМ) металлокомпозиты активно применяются в таких областях, как двигателестроение, энергомашиностроение, атомная техника и другие, в которых традиционные ПКМ обычно не применяются.

В отличие от ПКМ, которые обладают как правило незначительными пластическими свойствами, большинство металлокомпозитов проявляют ярко выраженные пластические свойства, обусловленные пластическими свойствами металлических матриц на основе Al, Ni, Ti, Mo, сталей и других сплавов, а также пластическими свойствами армирующих металлических волокон, которые активно применяются для металлокомпозитов. Механическое поведение ПКМ достаточно адекватно может быть описано с помощью моделей анизотропной теории упругости и вязкоупругости. В настоящее время имеется большое число работ, посвященных этим теориям [2,5-7,14,15,18,22,93,100,101,105,106,108,140-149]. Для адекватного описания механического поведения металлокомпозитов, целесообразно использовать теории изотропной и анизотропной пластичности.

В настоящее время существует достаточно много различных моделей пластичности. Как известно, систематическое экспериментальное изучение пластичности было начато еще в середине XIX века И. Баушингером, Г.Г. Видеманом, Р.Г. Тарстонном и другими. Теоретические основы теории пластичности были заложены А.Э. Треска и А.Ж.К. Сен-Венаном, Р.Э. Мизесом, М.Т. Губером и другими. В работах Г. Генки и А.Л. Надаи была создана модель пластичности, в которой были предложены тензорно-линейные соотношения между напряжениями и деформациями. Дальнейшее развитие этого направления осуществлено А.А. Ильюшиным [89-92], который создал теорию малых упруго-

пластических деформаций А.А. Ильюшина, и указал условия применимости этой теории – для пропорциональных (простых) процессов нагружения. В настоящее время теории пластичности, развивающие это направление, называют деформационными теориями пластичности, в них конечные значения напряжений связаны с конечными значениями деформаций. Несмотря на определенные ограничения, в частности, для сложных процессов нагружения, деформационные теории по-прежнему активно применяют в расчетах конструкций благодаря их относительной простоте и удобстве использования. В числе авторов, развивавших деформационную теорию пластичности, можно назвать В.С. Ленского [91], В.В. Москвитина [102], Н.Н. Малинина [99], В.С. Бондаря, Д.Д. Ивлева [87,88].

Отдельное направление в рамках деформационной теории связано с циклическими нагружениями. Это направление наиболее активно было развито В.В. Москвитиным [102]. Достоинством теории деформационной теории пластичности А.А.Ильюшина – В.В.Москвитина при циклических процессах также является относительная простота, которая сводит задачу теории пластичности к решению серии задач нелинейной упругости.

Кроме деформационных теорий пластичности, как известно, существуют и также активно применяются при расчетах теории пластического течения, у истоков этого направления стояли С. Сен-Венан, Л. Прандтль, Р.Э. Мизес, в числе наиболее известных авторов, развивавших это направление, можно назвать Д.Р. Рейса, Д. Дракера (Друкера), В. Прагера, Ф.Г. Ходжа, А.Ю. Ишлинского, В.В. Новожилова, Ю.И. Кадашевича, В.С. Бондаря, Н.Н. Малинина, А.Г. Зубчанинова, Ю.М. Темиса и других.

А.А. Ильюшиным была создана принципиально новая теория пластичности [92], известная как общая математическая теория пластичности А.А. Ильюшина, основанная на функциональных соотношениях между тензорами напряжений и деформаций в пятимерном пространстве деформаций. Развитие общей математической теории пластичности А.А. Ильюшина осуществлено в работах

В.С. Ленского, Э.В. Ленского, Б.Е. Победри, В.В. Москвитина, Р.А. Васина, Д.Л. Быкова, А.А. Поздеева, П.В. Трусова и других.

Существуют и другие модели пластичности, которым посвящено значительное число монографий [17,85,87,94,107,109,111,115].

Указанные теории пластичности относятся главным образом к изотропным материалам. Для моделирования упруго-пластических свойств композитов существуют два основных подхода: феноменологический, в рамках которого обычно происходит обобщение теорий пластичности на анизотропный случай, а также структурный, в котором соотношения теории пластичности для композитов выводятся из изотропных теорий пластичности для компонентов композитов, при этом как правило применяют приближенные методы построения определяющих соотношений.

К феноменологическому подходу относятся работы Б.Е. Победри [108] и его учеников, а также работы [143,144,154]. Структурные методы теории пластичности развиты в работах [150-157]. В обоих этих подходах используются как деформационные теории пластичности, так и теории течения. В работах Б.Е. Победри предложено обобщение математической теории пластичности А.А. Ильюшина на случай анизотропных композитных сред, данное направление относится к феноменологическому подходу построения определяющих соотношений упруго-пластических композитов.

В [2,4,5,7,14,22,25,103, 104, 108, 143, 145-147, 152] по моделированию упруго-пластических свойств композитов используется один из наиболее эффективных современных математических методов моделирования структурно-неоднородных сред – метод асимптотического осреднения [3,108, 112]. Однако, ввиду значительной сложности численной реализации этого метода, как правило, результаты моделирования с помощью этого метода сводятся к построению диаграмм деформирования при простых видах нагружения: при растяжениях и сдвигах, и, как правило, не допускают явного аналитического представления эффективных определяющих соотношений, тем самым задачи микро-анализа и

задачи макроанализа в рамках такой теории пластичности оказываются связанными, что значительно усложняет процедуру их решения.

Кроме того, структурные модели теории пластичности для композитов, применимые для циклических нагружений в настоящее время еще практически не рассматривались.

Проведенный анализ литературных источников говорит о том, что проблема построения определяющих соотношений для упруго-пластических композитов, основанных на структурных моделях, которые тем не менее допускают аналитические представления, что избавляет от необходимости решения связанных задач микро- и макро-пластичности, является **актуальной задачей**.

Таким образом, **актуальность темы** диссертационной работы обоснована перспективностью применения в технике композиционных материалов на металлической матрице, проявляющих упруго-пластические свойства, а также отсутствием в настоящее время методов моделирования эффективных свойств упруго-пластических анизотропных композитов при циклическом нагружении на основе структурных моделей, допускающих аналитическое представление, без решения связанных задач микро-макро-пластичности композитных конструкций.

**Объектом исследования** являются определяющие соотношения упруго-пластических анизотропных композиционных материалов при циклическом нагружении, в рамках деформационной теории пластичности.

**Цель диссертационной работы** состоит в разработке методики построения определяющих соотношений анизотропных упруго-пластических композиционных материалов при циклическом нагружении, допускающих аналитическое представление, с использованием метода асимптотического осреднения периодических структур, численных конечно-элементных алгоритмов решения задач на ячейке периодичности, в рамках деформационной теории пластичности.

**Задачами настоящей работы** являются:

– разработка варианта метода асимптотического осреднения упруго-пластических композиционных материалов при циклических нагружениях на основе деформационной теории пластичности А.А.Ильюшина – В.В. Москвитина;

– разработка методики построения микро-структурных эффективных определяющих соотношений деформационной теории анизотропной пластичности при циклических нагружениях, допускающих аналитическое представление, для композитов с произвольной периодической микроструктурой на основе численного конечно-элементного решения серии локальных задач на ячейках периодичности;

– построение микроструктурных определяющих соотношений деформационной теории пластичности при циклических нагружениях для трансверсально-изотропных и ортотропных композитов;

– разработка методики определения материальных констант предложенных микро-структурных моделей анизотропной деформационной теории пластичности;

– разработка численного конечно-элементного алгоритма решения задач на ячейке периодичности для упруго-пластических композиционных материалов при циклических нагружениях;

– проведение численного решения задач теории пластичности на ячейках периодичности при циклическом нагружении для 2-х типов композитов (однонаправленно-армированных и тканевых) и определение типовых материальных констант для упруго-пластических моделей данных типов композитов;

– разработка методики решения двух-масштабных задач деформационной теории пластичности для конструкций из композитов при циклическом нагружении и численное решение трехмерных задач о циклическом изгибном нагружении балки из композиционных материалов разных типов, с использованием разработанной методики.

**Методы исследования.** В диссертационной работе для решения сформулированных задач использованы следующие методы исследования:

- метод асимптотического осреднения;
- методы конечного элемента;
- методы аппроксимации и оптимизации.

**Достоверность и обоснованность результатов и выводов** гарантируется применением теоретически обоснованного математического аппарата и подтверждена сравнением результатов численного моделирования с результатами решения с использованием сторонних программных комплексов для вариантов решений, доступных для сравнения.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту:

- разработан вариант метода асимптотического осреднения упруго-пластических композиционных материалов при циклических нагружениях на основе деформационной теории пластичности А.А.Ильюшина – В.В. Москвитина;
- разработана методика построения микро-структурных эффективных определяющих соотношений деформационной теории анизотропной пластичности при циклических нагружениях для композитов с произвольной периодической микроструктурой, на основе численного решения серии локальных задач на ячейках периодичности; с помощью данной методики построены новые определяющие соотношения для трансверсально-изотропных и ортотропных композитов.

**Практическая значимость диссертационной работы.** Методика построения эффективных определяющих соотношений деформационной теории анизотропной пластичности при циклических нагружениях, а также сами новые определяющие соотношения для трансверсально-изотропных и ортотропных композитов могут быть использованы при расчете и оптимизации конструкций из упруго-пластических композиционных материалов в элементах конструкций перспективных двигателей, энергетических высоконагруженных конструкций, летательных аппаратов и других конструкций.

**Апробация результатов работы.** Результаты диссертационной работы докладывались на:

XII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Новосибирск, 3-5 октября 2011 г;

XXXII Всероссийской конференции по проблемам науки и технологии. Миасс.МСНТ. 2012;

IX Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2012), - Алушта, Московский Авиационный Институт, май 2012;

XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМПСПС'2013) 22-31 мая 2013 г;

Третьей международной научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014;

Международной научной конференция "Физико-математические проблемы создания новой техники (PhysMathTech - 2014), посвященной 50-летию Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана 17-19 ноября 2014 года;

XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Казань. Казанский (Приволжский) федеральный университет. 20-24 августа 2015 года;

Всероссийской научно-технической конференции «Механика и математическое моделирование в технике», посвященной 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева, Москва, 17-19 мая 2016;

Mathematical and Information Technologies. Conference Information. 28.08 – 31.08.2016 Vrnjacka Banja, Serbia, 01.09. -05.09. 2016. Budva, Montenegro.

Международном научном форуме «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 5-8 декабря 2018;

2-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2019;

3-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2020;

4-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2021;

5-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2022;

научных семинарах кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана (Москва, 2015-2022 гг.).

**Публикации.** По теме диссертации автором опубликованы 69 публикаций [26-83, 126-136], в том числе: 33 публикации в изданиях из списка ВАК [27,31-33,36,38,39,41,43-46,48-50,52-54,57,60-65,126,128,131-136], 12 публикаций в изданиях из списка ВАК по научной специальности 1.1.8 (физико-математические науки) [33,38,43,45,46,52,60-65] и 10 публикаций [39,50,126,128,131-136] в журналах, индексируемых в Scopus.

**Структура и объем.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, выводов и списка литературы из 158 наименований. Работа изложена на 158 листах, содержит 58 рисунков.

## Глава 1 Развитие метода асимптотического осреднения для упруго-пластических композитов при циклических нагружениях

### 1.1 Постановка 3-х мерной задачи деформационной теории пластичности для неоднородных периодических структур при циклических нагружениях

#### 1.1.1 Постановка 3-х мерной задачи деформационной теории пластичности для неоднородных сред

Рассмотрим композиционный материал (композит), проявляющий упруго-пластические свойства. Полагаем, что деформирование композита происходит в области малых деформаций, тогда композиту во все время деформирования соответствует одна и та же область  $V$  в некоторой системе отсчета  $O\bar{e}_i$ , где  $\bar{e}_i$  – ортонормированный (декартов) базис, а  $x_i$  – декартовы координаты точек в этом базисе. В силу ортонормированности базиса  $\bar{e}_i$  - ковариантные и контравариантные компоненты всех тензоров и векторов в этом базисе совпадают [23], поэтому индексы у всех тензорных величин, будем располагать только внизу.

Композиционный материал будем рассматривать как неоднородную среду, т.е. область  $V$  состоит из нескольких компонентов, каждой из которых соответствует подобласть  $V^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ , причем  $V = \bigcup_{\alpha=1}^N V^{(\alpha)}$ .

Каждый компонент композита будем полагать изотропным, упруго-пластическим материалом, подчиняющимся деформационной теории пластичности [90]. Тогда в рамках этой деформационной теории пластичности соотношение между компонентами тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$  и малых деформаций  $\varepsilon_{kl}$  композита, рассматриваемого как неоднородный материал, можно записать в виде тензорной нелинейной функции, зависящей от вида траектории деформирования

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl}, x_m), \quad x_m \in V \quad (1.1)$$

Зависимость от координат  $x_m$  в (1.1) означает, что определяющие соотношения для всех компонентов композита  $V^{(\alpha)}$  являются однотипными, но отличаются значениями материальных констант в функциях  $F_{ij}(\varepsilon_{kl}, x_m)$ .

Рассмотрим в рамках деформационной теории задачу теории пластичности для КМ в общем виде

$$\begin{cases} \nabla_i \sigma_{ij} = 0, & x_m \in V, \\ \sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl}, x_m), & x_m \in V \cup \Sigma, \\ 2\varepsilon_{kl} = \nabla_l u_k + \nabla_k u_l, & x_m \in V \cup \Sigma, \\ \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_\sigma} = S_i(t), \quad u_i|_{\Sigma_u} = u_{ei}(t), \\ \Sigma_s : [\sigma_{ij}] n_j = 0, \quad [u_i] = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $\nabla_i$  - ковариантные производные [23], совпадающие с частными производными  $\nabla_i = \partial / \partial x_i$  в базисе  $\bar{e}_i$ ,  $u_k$  - компоненты вектора перемещений,  $n_j$  - компоненты вектора нормали к поверхности,  $S_i(t)$  - компоненты вектора усилий, заданного на части  $\Sigma_\sigma$  внешней поверхности  $\Sigma$  области  $V$ ,  $u_{ei}(t)$  - компоненты вектора перемещений, заданные на части  $\Sigma_u$  внешней поверхности ( $\Sigma = \Sigma_u \cup \Sigma_\sigma$ ),  $\Sigma_s$  - поверхности раздела компонентов композита, на которых предполагаются заданными условия идеального контакта,  $[u_i]$  - скачок функций на поверхности контакта,  $t$  - время.

Задача (1.2) деформирования композита рассматривается в квазистатической постановке [24], внешние нагрузки  $S_i(t)$  и - изменяются во времени. Решение задачи (1.2) ищется относительно вектора перемещений  $u_k$ .

### 1.1.2. Постановка задачи деформационной пластичности для неоднородных сред при циклических нагружениях

Положим далее, что функции  $S_i(t)$  и  $u_{ei}(t)$  являются переменными во времени и пропорциональны одной скалярной функции времени, т.е. реализуется простое, или пропорционально нагружение композита:

$$S_i(t) = S_i^o \chi(t), \quad u_{ei}(t) = u_i^o \chi(t), \quad (1.3)$$

где  $\chi(t)$  - заданная скалярная функция времени,  $\chi(0)=0$ , а  $S_i^o$  и  $u_i^o$  - компоненты векторов, не зависящие от времени (направляющие векторы).

Разобьём весь рассматриваемый промежуток времени  $[0, t_{\max}]$  нагружения композита, на частичные промежутки  $t \in [t_{n-1}, t_n]$ , на каждом из которых функция  $\chi(t)$ - монотонно не убывает или монотонно не возрастает. Тогда функцию можно представить в виде

$$\chi(t) = \chi^{(n)}(t), \quad t \in [t_{n-1}, t_n], \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

причем

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi^{(n)}(t) \geq 0, \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots, \quad \frac{\partial}{\partial t} \chi^{(n)}(t) \leq 0, \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (1.5)$$

Введём приращения функции  $\chi(t)$  на  $[t_{n-1}, t_n]$ :

$$\Delta \chi^{(n)}(t) \equiv (-1)^{n-1} (\chi^{(n)}(t) - \chi^{(n)}(t_{n-1})), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Минус выбираем таким образом, чтобы на каждом отрезке  $[t_{n-1}, t_n]$

$$\Delta \chi^{(n)}(t) \geq 0 \quad (1.7)$$

приращение было неотрицательным.

Восстановление исходной функции  $\chi(t)$  через приращения имеет вид

$$\chi(t) = \chi^{(n)}(t) = \sum_{n'=1}^{n-1} (-1)^{n'-1} \Delta \chi^{(n')}(t_{n'}) + \Delta \tilde{\chi}^{(n)}(t), \quad 0 \leq t \leq t_n \quad (1.8)$$

где  $\Delta \chi^{(n')}(t_{n'})$  равно значению приращения  $\Delta \chi^{(n')}(t)$  на отрезке  $[t_{n'-1}, t_{n'}]$  в момент  $t_{n'}$ , а

$$\Delta\tilde{\chi}^{(n)}(t) = \begin{cases} \Delta\chi^{(n)}(t), & t_{n-1} \leq t < t_n \\ 0, & 0 \leq t < t_{n-1} \end{cases}. \quad (1.9)$$

Если функция  $\chi(t)$  является периодической, т.е. существует такой минимальный номер  $n_p$  промежутка нагружения, что выполняется условие

$$\chi(t) = \chi(t + T_p), \quad \forall t \in [0, t_{\max} - T_p] \quad (1.10)$$

то будем говорить, что рассматривается циклическое нагружение, здесь  $T_p = t_{n_p}$  – период цикла, состоящий из суммарного времени  $t_{n_p}$  первых  $n_p$  промежутков нагружения.

Будем искать решение задачи (1.2) также в виде представления (1.8)

$$\Omega = \Omega^{(n)}(t) = \Delta\tilde{\Omega}^{(n)}(t) + \sum_{n'=1}^{n-1} (-1)^{n'-1} \Delta\Omega^{(n')}(t_{n'}), \quad 0 \leq t \leq t_n \quad (1.11)$$

где  $\Omega = \{\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i\}$ , а  $\Delta\Omega^{(n')}(t)$  - приращения функции  $\Omega(t)$  на промежутке  $[t_{n'-1}, t_{n'}]$

Запишем явное представление выражения (1.11) для напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(n)}(t) = \Delta\tilde{\sigma}_{ij}^{(n)}(t) + \sum_{n'=1}^{n-1} (-1)^{n'-1} \Delta\sigma_{ij}^{(n')}(t_{n'}), \quad 0 \leq t \leq t_n \quad (1.12)$$

Тогда задача (1.2) разбивается на совокупность задач теории пластичности для отдельных промежутков  $[t_{n-1}, t_n)$ , на каждом из которых имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_i \Delta\sigma_{ij}^{(n)} = 0 \\ \Delta\sigma_{ij}^{(n)} = F_{ij}^{(n)}(\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)}, x_m) \\ 2\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)} = \nabla_l \Delta u_k^{(n)} + \nabla_k \Delta u_l^{(n)} \\ \Delta\sigma_{ij}^{(n)} \Big|_{\Sigma_\sigma} n_j = S_i^o \Delta\chi^{(n)}(t), \quad \Delta u_i^{(n)} \Big|_{\Sigma_u} = u_i^o \Delta\chi^{(n)}(t) \\ \Sigma_s : [\Delta\sigma_{ij}^{(n)}] n_j = 0, \quad [\Delta u_i^{(n)}] = 0 \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Здесь функции  $F_{ij}^{(n)}$  – зависят, вообще говоря, от номера (n), а также могут зависеть от приращений  $\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)}(t_{n'})$  на предшествующих промежутках деформирования, так как общая зависимость  $\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl}, x_m)$  – является нелинейной. Задача (1.13) имеет место на  $[t_{n-1}, t_n)$ .

### 1.1.3 Модель деформационной пластичности для компонентов композита при циклическом нагружении

Функцию  $F_{ij}^{(n)}$  зададим следующим образом. Запишем для тензоров напряжений и деформаций на каждом  $n$ -ом цикле нагружения их представление с помощью девиаторов [23]

$$\sigma_{ij}^{(n)} = s_{ij}^{(n)} + \frac{1}{3}\sigma^{(n)}\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^{(n)} = e_{ij}^{(n)} + \frac{1}{3}\varepsilon^{(n)}\delta_{ij} \quad (1.14)$$

где  $s_{ij}^{(n)}$ ,  $e_{ij}^{(n)}$  - девиаторы, а  $\sigma^{(n)}$ ,  $\varepsilon^{(n)}$  - шаровые части тензоров напряжений и деформаций

$$\begin{aligned} \sigma^{(n)} &= \sigma_{kk}^{(n)}, \quad \varepsilon^{(n)} = \varepsilon_{kk}^{(n)}, \\ s_{ij}^{(n)} &= \sigma_{ij}^{(n)} - \frac{1}{3}\sigma^{(n)}\delta_{ij}, \quad e_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n)} - \frac{1}{3}\varepsilon^{(n)}\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Аналогичные представления имеют место для приращений

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij}^{(n)} &= \Delta s_{ij}^{(n)} + \frac{1}{3}\Delta\sigma^{(n)}\delta_{ij}, \quad \Delta\varepsilon_{ij}^{(n)} = \Delta e_{ij}^{(n)} - \frac{1}{3}\Delta\varepsilon^{(n)}\delta_{ij} \\ \Delta\sigma^{(n)} &= \Delta\sigma_{kk}^{(n)}, \quad \Delta\varepsilon^{(n)} = \Delta\varepsilon_{kk}^{(n)}, \quad n=1,2,\dots \end{aligned} \quad (1.16)$$

Будем полагать, что для каждого компонента КМ соотношения деформационной теории пластичности  $\Delta\sigma_{ij}^{(n)} = F_{ij}^{(n)}(\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)}, x_m)$  на каждом промежутке нагружения подчиняются деформационной теории пластичности А.А. Ильюшина – В.В. Москвитина при циклическом нагружении [102]. Тогда каждого  $n$ -го промежутка нагружения изотропных компонентов КМ можно записать следующие определяющие соотношения пластичности

$$\begin{aligned} \Delta s_{ij}^{(n)} &= \frac{\sigma_u^{(n)}}{\varepsilon_u^{(n)}} \Delta e_{ij}^{(n)}, \\ \Delta\sigma^{(n)} &= 3K(x_k)\Delta\varepsilon^{(n)}, \quad n=1,2,\dots \\ \sigma_u^{(n)} &= \Phi^{(n)}(\varepsilon_u^{(n)}, x_k) \end{aligned} \quad (1.17)$$

где обозначены  $\sigma_u^{(n)}$ ,  $\varepsilon_u^{(n)}$  - вторые инварианты (интенсивности) [23] приращений тензоров напряжений и деформаций

$$\begin{aligned}\sigma_u^{(n)2} &= \frac{1}{3} \left( (\Delta\sigma_{11}^{(n)} - \Delta\sigma_{22}^{(n)})^2 + (\Delta\sigma_{22}^{(n)} - \Delta\sigma_{33}^{(n)})^2 + (\Delta\sigma_{11}^{(n)} - \Delta\sigma_{33}^{(n)})^2 + \right. \\ &\quad \left. + 6(\Delta\sigma_{12}^{(n)2} + \Delta\sigma_{13}^{(n)2} + \Delta\sigma_{23}^{(n)2}) \right), \quad (1.18) \\ \varepsilon_u^{(n)2} &= \frac{1}{3} \left( (\Delta\varepsilon_{11}^{(n)} - \Delta\varepsilon_{22}^{(n)})^2 + (\Delta\varepsilon_{22}^{(n)} - \Delta\varepsilon_{33}^{(n)})^2 + (\Delta\varepsilon_{11}^{(n)} - \Delta\varepsilon_{33}^{(n)})^2 + \right. \\ &\quad \left. + 6(\Delta\varepsilon_{12}^{(n)2} + \Delta\varepsilon_{13}^{(n)2} + \Delta\varepsilon_{23}^{(n)2}) \right)\end{aligned}$$

Соотношения между первыми инвариантами  $\Delta\sigma^{(n)} = \Delta\sigma_{kk}^{(n)}$ ,  $\Delta\varepsilon^{(n)} = \Delta\varepsilon_{kk}^{(n)}$  приращений тензоров напряжений и деформаций полагаются линейно-упругими, согласно классическим положениям деформационной теории пластичности [90, 102, 108],  $K(x_k)$  - модуль объемного сжатия компонентов КМ.

Функции пластичности  $\Phi^{(n)}(\varepsilon_u^{(n)}, x_k)$  в каждом цикле выберем с использованием функции пластичности А.А. Ильюшина  $\omega^{(n)}(\varepsilon_u^{(n)}, x_k)$ , зависящей от координат  $x_k$  и номера цикла нагружения

$$\Phi^{(n)}(\varepsilon_u^{(n)}, x_k) \equiv 2G(x_k) \left(1 - \omega^{(n)}(\varepsilon_u^{(n)}, x_k)\right) \varepsilon_u^{(n)}, \quad (1.19)$$

здесь  $G(x_k)$  - модуль сдвига компонентов КМ.

Зависимость функции пластичности А.А. Ильюшина от номера цикла нагружения выберем согласно модели Мазинга [17,102]

$$\omega^{(n)}(\varepsilon_u^{(n)}, x_k) = \alpha^{(n)}(x_k) \omega\left(\frac{\varepsilon_u^{(n)}}{\alpha^{(n)}(x_k)}, x_k\right), \quad (1.20)$$

$$\alpha^{(1)}(x_k) = 1, \quad \alpha^{(n)}(x_k) = \alpha_0(x_k) (n-1)^{\gamma(x_k)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

где  $\alpha_0(x_k)$  и  $\gamma(x_k)$  - масштабные коэффициенты, вообще говоря, различные для каждого компонента КМ, а  $\omega(\varepsilon_u^{(1)}, x_k)$  - функции пластичности компонентов КМ на 1-м цикле нагружения, выберем ее в следующем виде

$$\omega(\varepsilon_u^{(1)}, x_k) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(1)} < \varepsilon_s(x_k) \\ \omega_0(x_k) \left(1 - \left(\frac{\varepsilon_s(x_k)}{\varepsilon_u^{(1)}}\right)^{b(x_k)}\right), & \varepsilon_u^{(1)} \geq \varepsilon_s(x_k) \end{cases} \quad (1.21)$$

Здесь  $\varepsilon_s(x_k)$ - деформация начала пластичности,  $\omega_0(x_k), b(x_k)$  - константы, характеризующие упрочнение при пластичности. Все эти величины, вообще говоря, различны для разных компонент КМ, и поэтому зависят от координат  $x_k$ .

Подставляя (1.20) в (1.17), а затем в (1.16), определяющие соотношения для компонентов КМ, входящие в систему (1.13), на  $n$ -ом цикле нагружения запишем в следующем виде

$$\Delta\sigma_{ij}^{(n)} = F_{ij}^{(n)}(\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)}, x_s) \equiv C_{ijkl}^{(n)}(\omega, x_s) \Delta\varepsilon_{kl}^{(n)} \quad (1.22)$$

где обозначены компоненты тензора секущих модулей

$$C_{ijkl}^{(n)}(\omega, x_s) = \left(K - \frac{2}{3}G^{(n)}(\omega, x_s)\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + G^{(n)}(\omega, x_s)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (1.23)$$

который зависит от функции пластичности, где

$$G^{(n)}(\omega, x_s) = G(x_s) \left(1 - \omega^{(n)}(\varepsilon_u^{(n)}, x_k)\right). \quad (1.24)$$

- переменный модуль сдвига в  $n$ -м цикле нагружения.

При отсутствии пластичности, когда  $\omega \equiv 0$  (в частности, при разгрузке), тензор (1.23) является тензором модулей упругости изотропных сред.

Поскольку в задаче (1.13) композит рассматривается как неоднородная среда, то все коэффициенты в (1.23), (1.24), (1.21), характеризующие упруго-пластические свойства компонентов, рассматриваются как функции координат

$$\Omega = \Omega(x_m), \quad \Omega = \{G, K, \varepsilon_s, \omega_0, b, \alpha_0, \gamma\} \quad (1.25)$$

Осуществим линеаризацию определяющих соотношений (1.22), а затем подставим их в систему уравнений (1.13), в результате получим следующую итерационную последовательность задач упруго-пластичности на каждом промежутке нагружения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_i \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}} = 0, \\ \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}} = C_{ijkl}^{(n)}(\omega^{\{m-1\}}, x_s) \Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}}, \\ 2\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m-1\}} = \nabla_l \Delta u_k^{(n)\{m\}} + \nabla_k \Delta u_l^{(n)\{m\}}, \\ \Sigma_{\alpha N} : \left[ \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}} \right] n_j = 0, \quad \left[ \Delta u_i^{(n)\{m\}} \right] = 0, \\ \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}} \Big|_{\Sigma_\sigma} n_j = S_i^o \Delta\chi^{(n)}(t_m), \quad \Delta u_i^{(n)\{m\}} \Big|_{\Sigma_u} = u_i^o \Delta\chi^{(n)}(t_m), \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right. \quad (1.26)$$

где  $m$  - номер итерации, а  $C_{ijkl}^{(n)}(\omega^{\{m\}}, x_s)$  - тензор секущих модулей на  $m$ -ой итерации

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{(n)}(\omega^{\{m\}}, x_s) &= \left(K - \frac{2}{3}G^{(n)}(\omega^{\{m\}}, x_s)\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + G^{(n)}(\omega^{\{m\}}, x_s)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \\ G^{(n)}(\omega^{\{m\}}, x_s) &= G(x_s)\left(1 - \omega^{(n)}(\varepsilon_u^{(n)\{m\}}, x_k)\right), \\ \omega^{(n)}(\varepsilon_u^{(n)\{m\}}, x_k) &= \alpha^{(n)}(x_k)\omega\left(\frac{\varepsilon_u^{(n)\{m\}}}{\alpha^{(n)}(x_k)}, x_k\right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Интенсивность  $\varepsilon_u^{(n)\{m\}}$  вычисляется через приращения деформации по формуле, аналогичной (1.18).

В начальный момент ( $n=1, m=0$ ) пластичность отсутствует во всех компонентах КМ

$$t=0: \quad \varepsilon_u^{(1)\{0\}} = 0, \quad \omega^{(1)}(0, x_k) = 0, \quad \forall x_k \in V.$$

## 1.2 Вывод уравнений для осредненных и локальных задач упруго-пластических композитов при циклическом нагружении

### 1.2.1 Построение асимптотических разложений уравнений теории пластичности для периодических сред при циклических нагружениях

Полагаем далее, что неоднородная структура КМ имеет периодичность по 3-м направлениям, т.е. существует область параллелепипед  $V_\xi$  с длинами ребер  $l_m$  - ячейка периодичности (ЯП), такая что все функции (1.25), описывающие упруго-пластические свойства КМ, являются периодическими, т.е.

$$\Omega(x_m) = \Omega(x_m + l_m Z), \quad x_m \in V, \quad (1.28)$$

где  $Z$  - произвольное целое число. Ячейка периодичности состоит из подобластей  $V_\xi^{(\alpha)}$ , где

$$V_\xi = \bigcup_{\alpha=1}^N V_\xi^{(\alpha)}, \quad V_\xi^{(\alpha)} = V^{(\alpha)} \cap V_\xi, \quad \alpha=1, \dots, N, \quad (1.29)$$

Введем  $l = l_{m^*}$  – характерный размер ЯП, равный длине одного из ребер  $V_\xi$ , а также введем  $a_m = l_m / l$  – относительные длины ребер ЯП,  $L$  – диаметр всей области  $V$  и безразмерные координаты: глобальные  $\bar{x}_i$  и локальные  $\xi_i$

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{L}, \quad \xi_i = \frac{x_i}{l} \quad (1.30)$$

В координатах  $\xi_i$  ЯП  $V_\xi$  представляет собой следующую область

$$V_\xi = \{\xi_i \mid -\frac{a_i}{2} < \xi_i < \frac{a_i}{2}\} \quad (1.31)$$

Следуя [3,108,112], введем геометрический параметр  $\varepsilon$ , который будем полагать далее малым

$$\varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1, \quad (1.32)$$

Тогда локальные координаты (1.30) можно представить в виде

$$\xi_i = \frac{\bar{x}_i}{\varepsilon} \quad (1.33)$$

В силу геометрической периодичности структуры КМ, все функции (1.25) можно считать функциями локальных координат  $\Omega = \Omega(\xi_i)$ , а соотношения периодичности (1.28) записать следующим образом

$$\Omega(\xi_i) = \Omega(\xi_i + a_i), \quad \xi_i \in V_\xi, \quad (1.34)$$

Тогда для решения задачи (1.26) можно применить метод асимптотического осреднения [3,101,112]. Следуя общей концепции этого метода решение задачи (1.26) ищем в виде асимптотического разложения по параметру  $\varepsilon$

$$\Delta u_i^{(n)\{m\}} = \Delta u_i^{(n)\{m\}(0)}(\bar{x}_i, t) + \varepsilon \Delta u_i^{(n)\{m\}(1)}(\bar{x}_i, \xi_j, t) + \varepsilon^2 \Delta u_i^{(n)\{m\}(2)}(\bar{x}_i, \xi_j, t) + \dots \quad (1.35)$$

Здесь и далее все функции вида  $\Delta u_i^{(n)\{m\}(1)}(\bar{x}_i, \xi_j, t)$  предполагаются периодическими по координатам  $\xi_j$  вида (1.34) и медленно-меняющимися по  $\bar{x}_i$  в рамках ЯП  $V_\xi$ .

Областью определения функций (1.35) является декартово произведение множеств  $\bar{V} \times V_{\xi} \times [0, t_{\max}]$ , где  $\bar{V}$  - область, соответствующая всей композитной конструкции в безразмерных координатах  $\bar{x}_i$ .

Согласно [3,108,112] функции вида  $\Delta u_i^{(n)\{m\}(s)}(\bar{x}_i, \xi_j, t)$  дифференцируются по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} + \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \quad (1.36)$$

Введем обозначения для производных

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} \Delta u_i^{(n)\{m\}(s)} = \Delta u_{i,k}^{(n)\{m\}(s)}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_k} \Delta u_i^{(n)\{m\}(s)} = \Delta u_{ik}^{(n)\{m\}(s)} \quad (1.37)$$

Тогда, подставляя разложение (1.35) в соотношения Коши и определяющие соотношения задачи (1.26), получаем асимптотические разложения для приращений деформаций  $\Delta \varepsilon_{ij}^{(n)\{m\}}$  и напряжений  $\Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}}$

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{(n)\{m\}} = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^n \Delta \varepsilon_{ij}^{(n)\{m\}(s)}, \quad \Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}} = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^n \Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)} \quad (1.38)$$

Здесь обозначены

$$2\Delta \varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(s)} = \Delta u_{k,l}^{(n)\{m\}(s)} + \Delta u_{l,k}^{(n)\{m\}(s)} + \Delta u_{k|l}^{(n)\{m\}(s+1)} + \Delta u_{l|k}^{(n)\{m\}(s+1)} \quad (1.39)$$

а также

$$\Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)} = \sum_{s'=0}^s C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(s-s')} \Delta \varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(s')} \quad (1.40)$$

где  $C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(s-s')}$  - тензоры приведенных модулей упругости, полученные при разложении тензоров  $C_{ijkl}^{(n)} \left( \omega \left( \frac{\varepsilon_u^{(n)\{m-1\}}}{\alpha_n}, \xi_s \right), \xi_s \right)$  в асимптотический ряд, после подстановки в качестве аргумента ряда (1.38). Выпишем главный член этого разложения

$$\Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)} = C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} \Delta \varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)} \quad (1.41)$$

$$C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} = C_{ijkl}^{(n)} \left( \omega \left( \frac{\varepsilon_u^{(n)\{m-1\}(0)}}{\alpha_n}, \xi_s \right), \xi_s \right) \quad (1.42)$$

Подставляя (1/38) в уравнение равновесия системы (1.26), получаем:

$$\varepsilon^{-1} \Delta \sigma_{ij|j}^{(n)\{m\}(0)} + \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^n (\Delta \sigma_{ij,j}^{(n)\{m\}(s)} + \Delta \sigma_{ij|j}^{(n)\{m\}(s+1)}) = 0 \quad (1.43)$$

Приравнивая члены при  $\varepsilon^{-1}$  к нулю, а при остальных  $\varepsilon^n$  - к некоторым постоянным величинам  $h_i^{(n)\{m\}(s)}$ , получаем следующее разложение уравнения (1.43)

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^n h_i^{(n)\{m\}(s)} = 0, \quad (1.44)$$

а также следующие соотношения (локальные уравнения равновесия)

$$\Delta \sigma_{ij|j}^{(n)\{m\}(0)} = 0, \quad s = 0, \quad (1.45)$$

$$\Delta \sigma_{ij,j}^{(n)\{m\}(s)} + \Delta \sigma_{ij|j}^{(n)\{m\}(s+1)} = h_i^{(n)\{m\}(s)}, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (1.46)$$

Подстановка разложений (1.35) и (1.38) в граничные условия и условия контакта в ЯП в системе (1.26), приводит к следующим соотношениям для каждого члена асимптотического ряда

$$\sum_{\alpha N} : \left[ \Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)} \right] n_j = 0, \quad \left[ \Delta u_i^{(n)\{m\}(s+1)} \right] = 0 \quad (1.47)$$

## 1.2.2 Постановки локальных задач упруго-пластичности на ячейке периодичности

Введем условия периодичности для основных функций

$$[[W]]_{\alpha} = W|_{\xi_{\alpha}=a_{\alpha}/2} - W|_{\xi_{\alpha}=-a_{\alpha}/2} = 0, \quad W = \{ \Delta u_i^{(n)\{m\}(s)}, \Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)}, \Delta \varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(s)} \}, \quad (1.48)$$

а также введем операцию осреднения по ЯП

$$\langle W \rangle = \int_{V_{\xi}} W dV_{\xi}. \quad (1.49)$$

Собирая в уравнениях (1.39),(1.40), (1.45)-(1.47) члены при одинаковых степенях от малого параметра, получаем

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{ij|j}^{(n)\{m\}(0)} &= 0, \\ \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)} &= C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} \Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)}, \\ 2\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)} &= 2\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} + \Delta u_{k|l}^{(n)\{m\}(1)} + \Delta u_{l|k}^{(n)\{m\}(1)}, \\ \sum_{\alpha N} : [\Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)}] n_j &= 0, [\Delta u_i^{(n)\{m\}(1)}] = 0, \\ [[\Delta u_k^{(n)\{m\}(1)}]]_{\alpha} &= 0, [[\Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)}]]_{\alpha} = 0 \\ <\Delta u_k^{(n)\{m\}(1)}> &= 0\end{aligned}\tag{1.50}$$

- локальную задачу циклического упруго-пластического деформирования в нулевом приближении, а также

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{ij,j}^{(n)\{m\}(s)} + \Delta\sigma_{ij|j}^{(n)\{m\}(s+1)} &= h_i^{(n)\{m\}(s)} \\ \Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)} &= \sum_{s'=0}^s C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(s-s')} \Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(s')}, \\ 2\Delta\varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(s)} &= \Delta u_{k,l}^{(n)\{m\}(s)} + \Delta u_{l,k}^{(n)\{m\}(s)} + \Delta u_{k|l}^{(n)\{m\}(s+1)} + \Delta u_{l|k}^{(n)\{m\}(s+1)} \\ \sum_{\alpha N} : [\Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)}] n_j &= 0, [\Delta u_i^{(n)\{m\}(s+1)}] = 0, \\ [[\Delta u_k^{(n)\{m\}(s+1)}]]_{\alpha} &= 0, [[\Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)}]]_{\alpha} = 0, \\ <\Delta u_k^{(n)\{m\}(s+1)}> &= 0, \quad s = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\tag{1.51}$$

- локальную задачу циклического пластического деформирования в s-м приближении. В (1.50) обозначены осредненные приращения деформаций

$$2\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} = \Delta u_{k,l}^{(n)\{m\}(0)} + \Delta u_{l,k}^{(n)\{m\}(0)},\tag{1.52}$$

В формулировки локальных задач входят условия нормировки:  
 $<\Delta u_k^{(n)\{m\}(s+1)}> = 0.$

Решение задачи (1.50) ищется относительно функций  $\Delta u_i^{(n)\{m\}(1)}$ , а решение задачи (1.51) – относительно функций  $\Delta u_i^{(n)\{m\}(s+1)}$ .

### 1.2.3 Постановки осредненных задач упруго-пластического деформирования композитов при циклическом нагружении

Из условия существования единственного решения локальных задач (1.51) на ЯП находим выражения для функций  $h_i^{(n)\{m\}(s)}$

$$h_i^{(n)\{m\}(s)} = \langle \Delta \sigma_{ij,j}^{(n)\{m\}(s)} + \Delta \sigma_{ij,j}^{(n)\{m\}(s+1)} \rangle, \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (1.53)$$

откуда, в силу периодичности функций  $\Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)}$ , получаем

$$h_i^{(n)\{m\}(s)} = \langle \Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)} \rangle_j, \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.54)$$

Если подставить выражения (1.54) в уравнение (1.44), то получим

$$\sum_{s=0}^{\infty} \alpha^n \langle \Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)} \rangle_j = 0 \quad (1.55)$$

- осредненные уравнения равновесия для циклического деформирования КМ.

Введем обозначение для осредненных напряжений

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^n \langle \Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(s)} \rangle \quad (1.56)$$

Тогда уравнения (1.55) можно записать следующим образом:

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij,j}^{(n)\{m\}} = 0 \quad (1.57)$$

Удерживая в формуле (1.56) только главные члены, получаем

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} = \langle \Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)} \rangle \quad (1.58)$$

Подставим в эту формулу соотношения (1.41)

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} = \langle C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} \Delta \varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)} \rangle, \quad (1.59)$$

а приращения деформаций  $\Delta \varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)}$  выразим с помощью соотношений Коши из системы (1.50)

$$2\Delta \varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)} = 2\Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} + \Delta u_{k|l}^{(n)\{m\}(1)} + \Delta u_{l|k}^{(n)\{m\}(1)}. \quad (1.60)$$

После подстановки (1.60) в соотношение (1.59), получаем осредненные определяющие соотношения КМ

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} = \langle C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} \rangle \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} + \langle C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} \Delta u_{k|l}^{(n)\{m\}(1)} \rangle \quad (1.61)$$

Поскольку задача (1.50) на ячейке периодичности на каждой s-ой итерации является линейной, то ее решение линейно зависит от входных данных - функций  $\Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}}$ . Тогда ее решение относительно приращений перемещений  $\Delta u_k^{(n)\{m\}(1)}$  можно представить в виде:

$$\Delta u_i^{(n)\{m\}(1)} = N_{ikl}^{(n)\{m-1\}}(\xi_s) \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}}, \quad (1.62)$$

где  $N_{ikl}^{(n)\{m-1\}}(\xi_s)$  - некоторые функции локальных координат, определяемые из решения задачи (1.50) на ЯП. Подставляя выражения (1.62) в (1.61), получаем эффективные упруго-пластические определяющие соотношения композита:

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} = \bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}} \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}}, \quad (1.63)$$

где:

$$\bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}} = \langle C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} \rangle + \langle C_{ijmp}^{(n)\{m-1\}(0)} N_{mpk|l}^{(n)\{m-1\}} \rangle \quad (1.64)$$

-эффективные приведенные модули упругости композита для каждого n-го цикла нагружения.

К системе (1.57), (1.63) присоединяются осредненные соотношения Коши

$$2\Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} = \Delta u_{k,l}^{(n)\{m\}(0)} + \Delta u_{l,k}^{(n)\{m\}(0)} \quad (1.65)$$

и осредненные граничные условия для всей области КМ:

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} \Big|_{\Sigma_\sigma} n_j = S_i^o \Delta \chi^{(n)}(t_m), \quad \Delta u_i^{(n)\{m\}(0)} \Big|_{\Sigma_u} = u_i^o \Delta \chi^{(n)}(t_m). \quad (1.66)$$

В результате получаем постановку (1.57), (1.63), (1.65), (1.66) осредненной задачи циклического упруго-пластического деформирования КМ для  $n$ -го цикла нагружения.

Решением этой задачи являются приращения перемещений  $\Delta u_k^{(n)\{m\}(0)}$ .

#### 1.2.4 Преобразование локальной задачи нулевого приближения к задаче на 1/8 ЯП

Задача (1.50) содержит 6 функций  $\Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}}$  - входных данных. Будем искать решение задачи (1.50) в виде сумм по этим функциям:

$$\Delta u_k^{(n)\{m\}(1)} = \sum_{p,q}^3 \Delta u_{k(pq)}^{(n)\{m\}}, \quad (1.67)$$

где  $\Delta u_{k(pq)}^{(n)\{m\}}$  - имеют следующий вид:

$$\Delta u_{i(pq)}^{(n)\{m\}} = -\frac{1}{2} \Delta \bar{\varepsilon}_{pq}^{(n)\{m\}} (\delta_{ip} \xi_q + \delta_{iq} \xi_p) + U_{i(pq)}(\xi_s). \quad (1.68)$$

Подставляя выражения (1.67), (1.68) в систему (1.50), получим, что приращения деформаций  $\Delta \varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)}$  и  $\Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)}$  также можно представить в виде сумм

$$\Delta \varepsilon_{kl}^{(n)\{m\}(0)} = \sum_{p,q=1}^3 \Delta \varepsilon_{kl(pq)}^{(n)\{m\}}, \quad \Delta \sigma_{kl}^{(n)\{m\}(0)} = \sum_{p,q=1}^3 \Delta \sigma_{kl(pq)}^{(n)\{m\}}. \quad (1.69)$$

Для функции  $U_{i(pq)}$  из (1.50) получаем следующую задачу  $L_{pq}$  на 1/8 ЯП (в первом координатном октанте, составляющем подобласть  $\tilde{V}_\xi: \tilde{V}_\xi = V_\xi \cap (\xi_i \geq 0)$ ):

$$\Delta \sigma_{ij(pq)l}^{(n)\{m\}} = 0,$$

$$\Delta \sigma_{ij(pq)}^{(n)\{m\}} = C_{ijkl}^{(n)\{m-1\}(0)} \Delta \varepsilon_{kl(pq)}^{(n)\{m\}},$$

$$2\Delta \varepsilon_{kl(pq)}^{(n)\{m\}} = U_{k(pq)l} + U_{l(pq)k}, \quad (1.70)$$

$$\Sigma_{\alpha N} : [\Delta\sigma_{ij(pq)}^{(n)\{m\}}] n_j = 0, [U_{l(pq)}] = 0,$$

Граничные условия на поверхностях 1/8 ЯП имеют следующий вид.

Для задач  $L_{pq}$  на гранях  $\Sigma'_p = \{\xi_p = 0.5\}$  1/8 ЯП задаются :

$$\text{на } \Sigma'_p = \{\xi_p = 0.5\} : U_{p(pp)} = (1/2)\Delta\bar{\varepsilon}_{pp}^{(n)\{m\}}, \Delta\sigma_{ip(pp)}^{\{m\}} = 0, \quad (1.71)$$

$$\text{на } \Sigma_p = \{\xi_p = 0\} : U_{p(pp)}^{\{m\}} = 0, \quad \Delta\sigma_{ip(pp)}^{\{m\}} = 0, \quad (1.72)$$

$$p = 1, 2, 3, \quad i \neq p, \quad i = 1, 2, 3$$

На остальных гранях заданы условия, аналогичные (1.72) .

Для задач  $L_{pq}$  ( $p \neq q$ ) заданы следующие граничные условия:

$$\text{на } \Sigma'_p \text{ и } \Sigma_p \quad U_{i(pq)}^{\{m\}} = 0, \quad \Delta\sigma_{pp(pq)}^{\{m\}} = 0, \quad U_{q(pq)}^{\{m\}} = 0, \quad i \neq q \neq p \neq i \quad (1.73)$$

$$\text{на } \Sigma'_q : U_{q(pq)}^{\{m\}} = \frac{1}{4}\Delta\bar{\varepsilon}_{pq}^{\{m\}}, \quad \Delta\sigma_{qq(pq)}^{\{m\}} = 0, \quad U_{i(pq)}^{\{m\}} = 0, \quad (1.74)$$

$$i, p, q = 1, 2, 3, \quad i \neq q \neq p \neq i.$$

На остальных гранях заданы условия, аналогичные (1.73).

Вывод граничных условий (1.71)-(1.74) осуществляется методом, предложенным в работах [22,25,32].

Граничные условия (1.71)-(1.74) позволяют продолжить решение во всю ЯП таким образом, что будет удовлетворяться условие нормировки  $\langle \Delta u_k^{(n)\{m\}(s+1)} \rangle = 0$ .

### 1.2.5 Алгоритм вычисления эффективных упруго-пластических характеристик КМ при циклическом нагружении

Задачи  $L_{pq}$  (1.70)-(1.74) на каждом  $m$ -ом шаге являются линейными и зависят от приращений средних деформаций  $\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}}$ . Тогда, с помощью решения  $\Delta\sigma_{ij(pq)}^{(n)\{m-1\}}$  этих задач можно ввести следующие тензоры:

$$\bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}} = \frac{\langle \Delta\sigma_{ij(pq)}^{(n)\{m-1\}} \rangle}{\Delta\bar{\varepsilon}_{pq}^{(n)\{m-1\}}}, \quad (1.75)$$

где обозначены средние значения приращений напряжений в ЯП

$$\langle \Delta \sigma_{ij(pq)}^{(n)\{m\}} \rangle = \int_{V_\xi} \Delta \sigma_{ij(pq)}^{(n)\{m\}} dV_\xi. \quad (1.76)$$

Выражая из (1.75) средние напряжения и подставляя их в осредненные соотношения (1.69), получаем

$$\langle \Delta \sigma_{ij}^{(n)\{m\}(0)} \rangle = \sum_{p,q=1}^3 \langle \Delta \sigma_{ij(pq)}^{(n)\{m\}} \rangle = \sum_{p,q=1}^3 \bar{C}_{ijpq}^{(n)\{m\}} \Delta \bar{\varepsilon}_{pq}^{(n)\{m\}} \quad (1.77)$$

Подставляя (1.77) в (1.58), получаем эффективные определяющие соотношения для КМ для n-го цикла нагружения, записанные в итерационной форме

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} = \bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}} \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} \quad (1.78)$$

Таким образом, формула (1.75) дает выражение для  $\bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}}$  - тензора эффективных секущих модулей композита на (m-1) итерации.

Разработанный алгоритм может быть применен для численного моделирования композита при различных вариантах нагружения, т.е. при различных комбинациях ненулевых компонент тензора  $\Delta \bar{\varepsilon}_{pq}^{(n)\{m\}}$ . Для каждого такого процесса нагружения вычисляется тензор  $\bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}}$  по формуле (1.75), определяются средние приращения напряжений  $\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}}$ , и строятся диаграммы циклического деформирования  $\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} = \Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} (\Delta \bar{\varepsilon}_{pq}^{(n)\{m\}})$ , описываемые соотношением (1.78).

Обращая соотношения (1.79), получаем на каждом m-ом шаге итерации n-го цикла нагружения обратные эффективные определяющие соотношения КМ

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} = \bar{\Pi}_{klij}^{(n)\{m-1\}} \Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}}, \quad (1.78)$$

где  $\bar{\Pi}_{klij}^{(n)\{m-1\}}$  - компоненты эффективного тензора секущих податливостей КМ на m-1 итерации, являющегося обратным к эффективному тензору секущих модулей с компонентами  $\bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}}$ , т.е.

$$\bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}} \bar{\Pi}_{kls p}^{(n)\{m-1\}} = \Delta_{ijsp}. \quad (1.79)$$

Здесь  $\Delta_{ijsp} = \frac{1}{2}(\delta_{is} \delta_{jp} + \delta_{ip} \delta_{js})$  - компоненты единичного тензора 4-го ранга [23].

Вычисляя компоненты  $\bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}}$  и  $\bar{\Pi}_{klij}^{(n)\{m-1\}}$  для 1-го цикла нагружения на 1-й итерации ( $n=1, m=1$ ), получаем  $\bar{C}_{ijkl}$  - компоненты эффективного тензора модулей упругости и  $\bar{\Pi}_{klij}$  - эффективного тензора упругих податливостей КМ

$$\bar{C}_{ijkl} = \bar{C}_{ijkl}^{(1)\{0\}}, \quad \bar{\Pi}_{klij} = \bar{\Pi}_{klij}^{(1)\{0\}}. \quad (1.80)$$

Если КМ относится к классу изотропных, квази-изотропных, трансверсально-изотропных или ортотропных материалов, то с помощью компонент тензора  $\bar{\Pi}_{klij}$  можно найти эффективные технические константы упругости КМ

$$\bar{E}_\alpha = 1 / \bar{\Pi}_{\alpha\alpha\alpha\alpha}, \quad \bar{\nu}_{\alpha\beta} = -\bar{\Pi}_{\alpha\alpha\beta\beta} / \bar{\Pi}_{\alpha\alpha\alpha\alpha}, \quad \bar{G}_{\alpha\beta} = 1 / 4\bar{\Pi}_{\alpha\beta\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (1.81)$$

где  $\bar{E}_\alpha$  - эффективные модули упругости КМ,  $\bar{\nu}_{\alpha\beta}$  - эффективные коэффициенты Пуассона,  $\bar{G}_{\alpha\beta}$  - эффективные модули сдвига КМ.

### 1.3 Разработка численного алгоритма решения локальных задач упруго-пластичности композитов при циклическом нагружении

#### 1.3.1 Вариационная формулировка локальных задач

Для произвольного конечного объема  $V \subset \tilde{V}_\xi$  может быть сформулирована вариационная формулировка задачи  $L_{pq}$  (1.70)-(1.74). Для этого кроме решения задачи - поля псевдоперемещений  $U_{i(pq)}^{\{m\}}(\xi_k)$ , рассмотрим кинематически допустимое поле  $\tilde{U}_{i(pq)}^{\{m\}}(\xi_k)$ , которое удовлетворяет только части граничных условий (1.71) - (1.74) (только условия 1-го рода):

$$\text{на } \Sigma_i : U_{i(pp)}^\alpha = 0, \quad \text{на } \Sigma_j : U_{i(pq)}^\alpha = 0, \quad U_{k(pq)}^\alpha = 0, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad p \neq q \quad (1.82)$$

$$\text{на } \Sigma_i : U_{i(pp)}^\alpha = \frac{a_p}{2} \bar{\varepsilon}_{pp} \delta_{ip}, \quad \text{на } \Sigma_j : U_{i(pq)}^\alpha = \frac{a_p}{4} \bar{\varepsilon}_{ip} \delta_{ip}, \quad U_{k(pq)}^\alpha = 0, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad p \neq q$$

и кроме того, зависит от некоторых новых переменных  $q_s$ .

Используя метод, предложенный в [24], можно показать, что поле псевдоперемещений  $U_{i(pq)}^{\{m\}}(\xi_k)$ , являющееся решением задачи (1.70)-(1.74) отличается от кинематически допустимых полей  $\tilde{U}_{i(pq)}^{\{m\}}(\xi_k)$  тем, что для него и только для него выполняется вариационное уравнение

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_\Sigma \delta U^T S d\Sigma. \quad (1.83)$$

Здесь обозначены координатные столбцы кинематически допустимых полей псевдоперемещений:  $U$ , псевдонапряжений  $\sigma$ , деформаций  $\varepsilon$  и поверхностных усилий:  $S$ :

$$U = [U_{1(pq)}^{\{m\}}, U_{2(pq)}^{\{m\}}, U_{3(pq)}^{\{m\}}]^T, \quad \sigma = [\sigma_{11(pq)}^{\{m\}}, \sigma_{22(pq)}^{\{m\}}, \sigma_{33(pq)}^{\{m\}}, \sigma_{23(pq)}^{\{m\}}, \sigma_{13(pq)}^{\{m\}}, \sigma_{12(pq)}^{\{m\}}]^T \quad (1.84)$$

$$S = [S_{1(pq)1}, S_{2(pq)2}, S_{3(pq)3}]^T (1 - \delta_{pq}) + [S_{1(pq)2} + S_{1(pq)3}, S_{2(pq)1} + S_{3(pq)2}, S_{3(pq)1} + S_{3(pq)2}]^T \delta_{pq}$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_{11(pq)}^\alpha, \varepsilon_{22(pq)}^{\{m\}}, \varepsilon_{33(pq)}^{\{m\}}, 2\varepsilon_{23(pq)}^{\{m\}}, 2\varepsilon_{13(pq)}^{\{m\}}, 2\varepsilon_{12(pq)}^{\{m\}}]^T,$$

где  $S_{i(pq)j} \equiv \sum_{l=1}^3 (\sigma_{ik(pq)}^{\{m\}} n_k) \Big|_{\Sigma_j}$  - вектор усилий на границах ЯП. Определяющие соотношения и соотношения Коши в уравнении (1.83) с использованием координатных столбцов записывают следующим образом:

$$\sigma = C \varepsilon, \quad \varepsilon = D U \quad (1.85)$$

где  $C$ - матрица упругости размером  $[6 \times 6]$ , составленная из компонентов тензора  $C_{ijkl}^\alpha$  стандартным образом [23,24], а  $D$ - матрица линейных дифференциальных операторов дифференцирования.

С учётом отношений (1.85) вариационное уравнение (1.83) можно представить в виде:

$$\int_V (D \delta U)^T C D U dV = \int_\Sigma \delta U^T S d\Sigma \quad (1.86)$$

### 1.3.2 Применение МКЭ и разработка ПО для решения локальных задач

Аппроксимируем область  $\tilde{V}_\xi$  с помощью объединения конечного, но достаточно большого числа подобластей стандартного вида  $V_e$  (конечных элементов-КЭ), например, в форме тетраэдров:  $\tilde{V}_\xi = \bigcup_{e=1} V_e$ . Аппроксимируем кинематически допустимое поле  $U$  в каждом КЭ стандартными функциями координат, в качестве которых применим полином некоторого порядка  $U = \Phi(\xi_k)q$ , здесь  $q = [q_1 \dots q_z]^T$  - координатный столбец неизвестных коэффициентов, а  $\Phi(\xi_k)$  - матрица функций формы. В качестве неизвестных коэффициентов выберем поле перемещений  $U$  в узлах КЭ. Тогда для столбца деформаций в КЭ получаем следующее представление:  $\varepsilon = Bq$ , где введена матрица деформаций  $B = D\Phi$ . Подставляя выражение для  $\varepsilon$  в (1.83), получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для одного КЭ:

$$K_e q = f_e, \quad (1.87)$$

где:

$$K_e = \int_V B^T C B dV, \quad f_e = \int_\Sigma \Phi^T S d\Sigma \quad (1.88)$$

матрица жесткости КЭ и столбец нагрузок КЭ. Объединяя СЛАУ (1.88) для всех КЭ, получаем глобальную СЛАУ для всей рассматриваемой области  $\tilde{V}_\xi$ .

Для решения глобальной СЛАУ применялся метод сопряженных градиентов [14], предназначенный для СЛАУ большой размерности. Решая СЛАУ находим перемещения  $q$  в узлах, по которым вычисляем псевдоперемещения:  $U = \Phi q$ , деформации:  $\varepsilon = Bq$  и напряжения  $\sigma = CBq$  в КЭ.

Данный алгоритм конечно-элементного решения локальной задачи методом  $L_{pq}$  (1.70)-(1.74) для циклического упруго-пластического деформирования был реализован как составная часть программного комплекса SMCМ, разработанного в

Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (НОЦ «Симплекс») МГТУ им. Н.Э. Баумана [66-83]. Комплекс SMCM позволяет проводить полный цикл конечно-элементного моделирования : от создания типовых 3D геометрий микроструктур ЯП композитов, построения КЭ сеток, до непосредственного решения задач  $L_{pq}$  и визуализации результатов расчетов.

### 1.3.3 Тестирование МКЭ алгоритмов и ПО на примере тканевых КМ

Были проведены тестовые расчеты задач  $L_{pq}$  на основе разработанного алгоритма и программного обеспечения. Тестовые расчеты проводились для случая линейно-упругих свойств 2-х типов КМ:

- однонаправленно- армированных композитов (1D КМ);
- тканевых композитов (ТКМ).

Сравнение проводилось с результатами расчетов, проведенными в программном комплексе ANSYS, при этом в данном комплексе были созданы специальные надстройки, для реализации численного решения именно задач  $L_{pq}$  в линейно-упругой постановке. Возможность непосредственного решения задач  $L_{pq}$ , без указанных надстроек, в ПК ANSYS отсутствует.

Были рассмотрены 6 задач трехмерной линейной теории упругости на 1/8 ячейке периодичности (ЯП) (задачи теории упругости  $L_{pq}$ :  $L_{11}$ ,  $L_{22}$ ,  $L_{13}$ ,  $L_{12}$ ).

Рассматривались следующие варианты значений свойств матрицы и наполнителя (табл.1.1).

Табл.1.1 Упругие характеристики компонентов различных КМ, использованные для тестовых задач

Компоненты композита	Модуль упругости $E$ , ГПа	Коэффициент Пуассона
Матрица	3	0.33
Наполнитель	70	0.25

Рассматривались 6 задач трехмерной линейной теории упругости на  $1/8$  ячейке периодичности (ЯП) (задачи теории упругости  $L_{pq}$ :  $L_{11}$ ,  $L_{22}$ ,  $L_{13}$ ,  $L_{12}$ ) . ЯП соответствует структуре плотняного плетения (рис.1.1) и состоит из матрицы и нитей, сечение которых имеет овальную форму. Матрица и нити полагались изотропными, линейно-упругими. Концентрация нитей в ЯП равна 0.5.

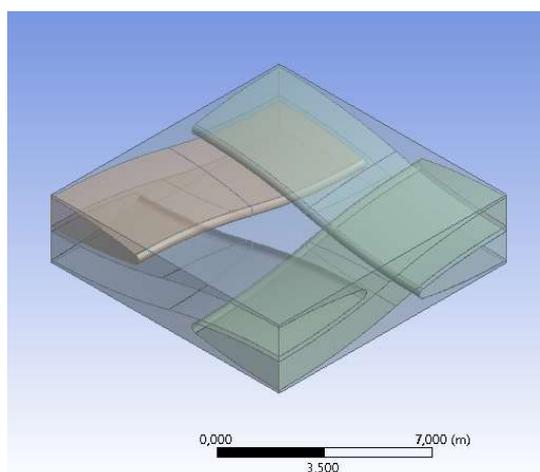


Рисунок 1.1. ЯП тканевого КМ с плотняным плетением

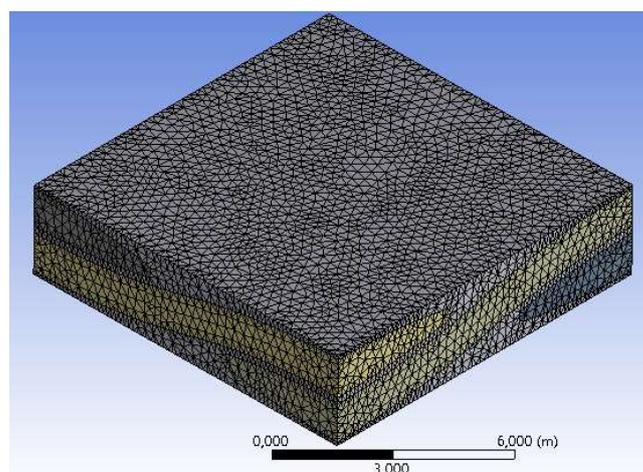


Рисунок 1.2. Конечно-элементная сетка для  $1/8$  ЯП тканевого КМ

Решение задач  $L_{pq}$  осуществлялось методом конечного элемента на тетраэдральных сетках. Использовались КЭ с линейной и квадратичной аппроксимацией решений относительно перемещений (4-х узловой в случае линейного КЭ, 10-узловой в случае квадратичного КЭ). Для численного

моделирования использовались конечно-элементные тетраэдральные сетки размером 375707 элементов. Пример сетки приведен на рис. 1.2.

На рис. 1.3-1.8 показаны результаты моделирования полей микро-напряжений в тканевых КМ с характеристиками компонентов (нити и волокон), приведёнными в табл.1.1. В таблице 1.2 представлены экстремальные значения (минимальное и максимальное) полей компонент тензора напряжений  $\sigma_{ik(pq)}$ , полученные в задачах  $L_{pq}$  с помощью ANSYS и с помощью разработанного ПК для тканевого КМ с характеристиками из табл.1.1.

Совпадение результатов расчетов, полученных с помощью разработанного ПК и ПК ANSYS, достаточно хорошее: относительное отклонение максимальных значений напряжений не превышает 0,61%. Несколько больше относительное отклонение для минимальных значений компонент напряжений, но эти минимальные значения представляют собой численные реализации «значений, близких к нулю» по отношению к максимальным значениям, и они не большого практического значения.

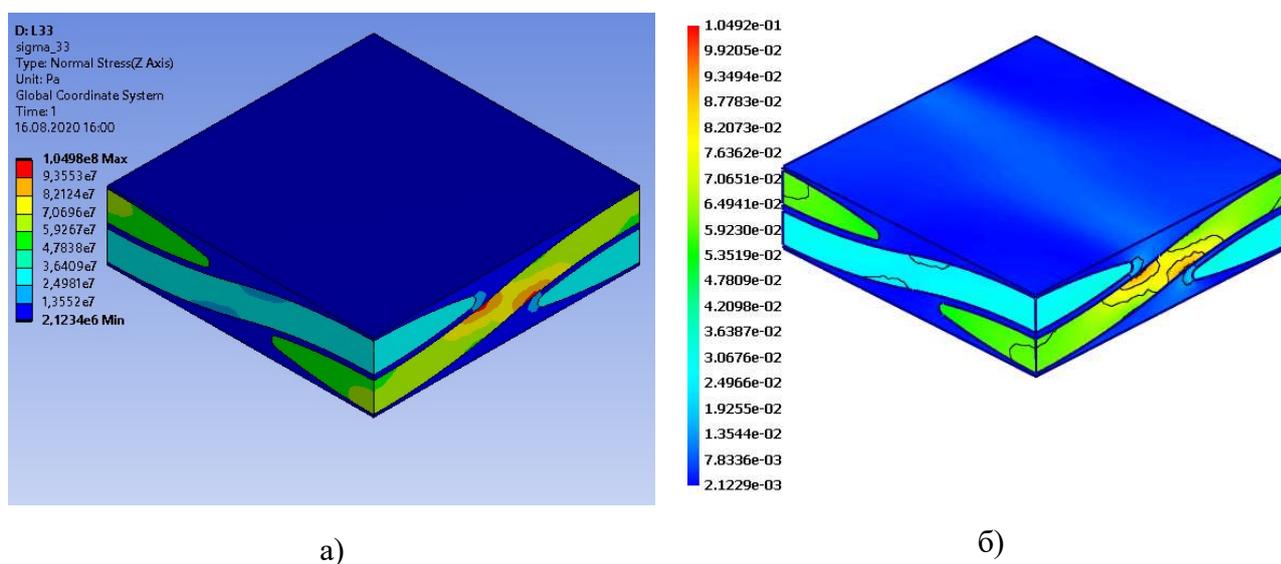


Рисунок 1.3. Распределение напряжений  $\sigma_{33}$  в 1/8 ЯП, в задаче  $L_{33}$  для ПКМ из табл. 1.1, полученные с помощью ANSYS (а) и с помощью разработанного ПК (б)

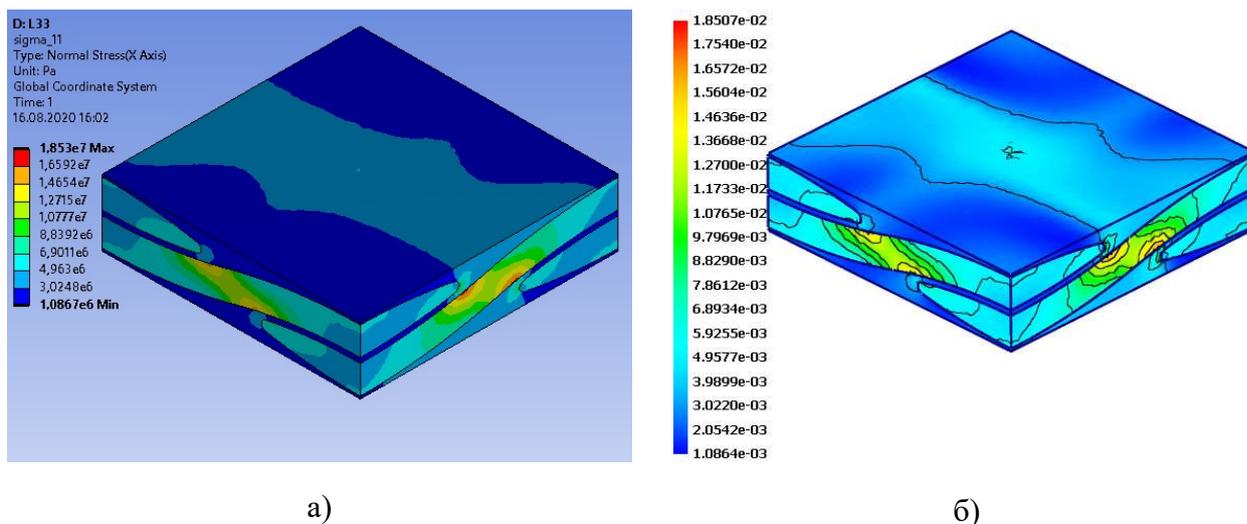


Рисунок 1.4 Распределение напряжений  $\sigma_{11}$  в 1/8 ЯП, в задаче  $L_{33}$  для ПКМ из табл. 1.1, полученные с помощью ANSYS (а) и с помощью разработанного ПК (б)

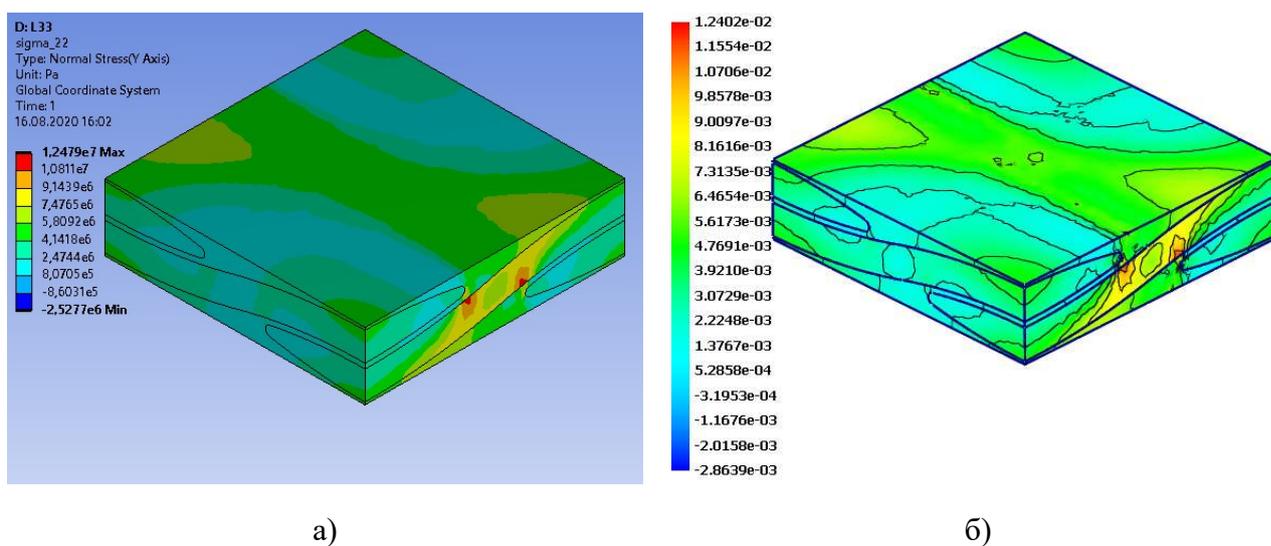
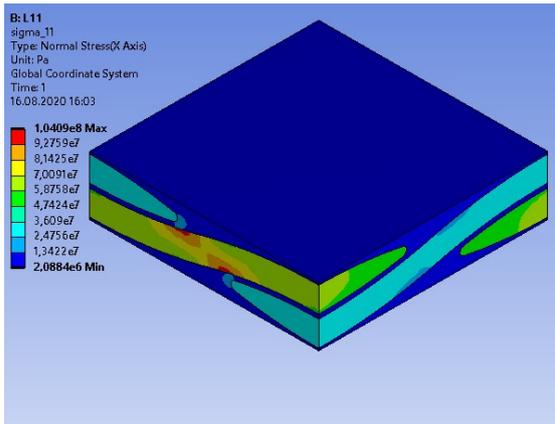
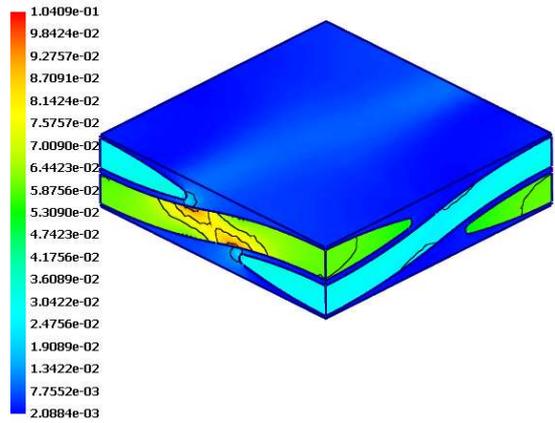


Рисунок 1.5. Распределение напряжений  $\sigma_{22}$  в 1/8 ЯП, в задаче  $L_{33}$  для ПКМ из табл. 1.1, полученные с помощью ANSYS (а) и с помощью разработанного ПК (б)

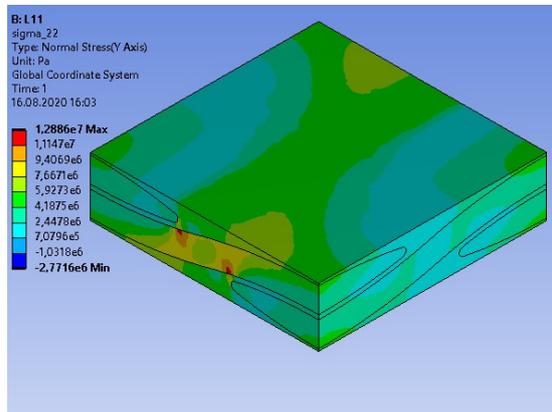


a)

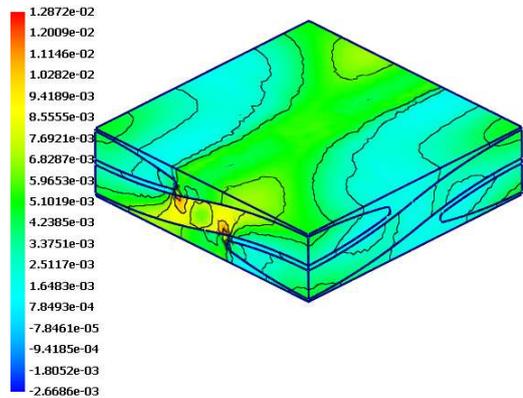


б)

Рисунок 1.6. Распределение напряжений  $\sigma_{11}$  в 1/8 ЯП, в задаче  $L_{11}$  для ПКМ из табл. 1.1, полученные с помощью ANSYS (а) и с помощью разработанного ПК (б)

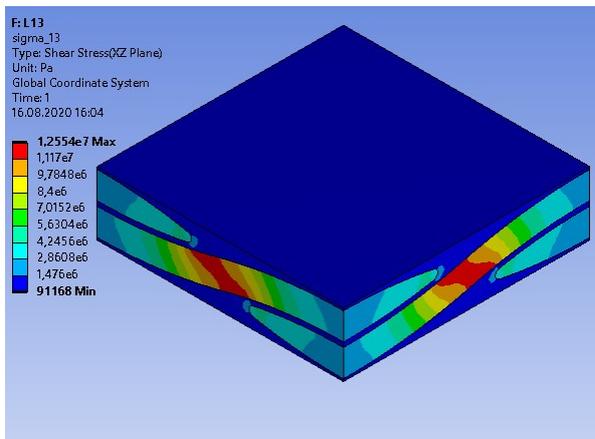


a)

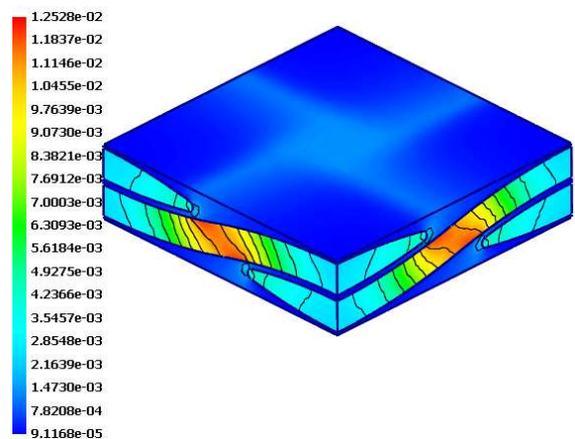


б)

Рисунок 1.7. Распределение напряжений  $\sigma_{22}$  в 1/8 ЯП, в задаче  $L_{11}$  для ПКМ из табл. 1.1, полученные с помощью ANSYS (а) и с помощью разработанного ПК (б)



a)



б)

Рисунок 1.8 Распределение напряжений  $\sigma_{13}$  в 1/8 ЯП, в задаче  $L_{13}$  для ПКМ из табл. 1.1, полученные с помощью ANSYS (а) и с помощью разработанного ПК (б)

Табл.1.2 Экстремальные значения полей напряжений  $\sigma_{ik(pq)}$ , полученные в задачах  $L_{pq}$  с помощью ANSYS и с помощью разработанного ПК для тканевого КМ с характеристиками из табл.1.1

№№	Задача $L_{pq}$	max $\sigma_{ik(pq)}$ , ГПа				min $\sigma_{ik(pq)}$ , ГПа			
		Компонента напряжений	ANSYS	Разработанный ПК	отклонение, %	Компонента напряжений	ANSYS	Разработанный ПК	отклонение, %
1	$L_{33}$	max $\sigma_{33(33)}$	0.10498	0.10492	0.063	min $\sigma_{33(33)}$	0.0021234	0.0021229	0.02
		max $\sigma_{11(33)}$	0.01853	0.018507	0.12	min $\sigma_{11(33)}$	0.0010867	0.0010864	0.03
		max $\sigma_{22(33)}$	0.012479	0.012402	0.61	min $\sigma_{22(33)}$	-0.0025277	-0.0028639	13
2	$L_{11}$	max $\sigma_{11(11)}$	0.10409	0.10409	0.0018	min $\sigma_{11(11)}$	0.0020884	0.0020884	6e-05
		max $\sigma_{22(11)}$	0.012886	0.012872	0.11	min $\sigma_{22(11)}$	-0.0027716	-0.0026686	3.7
3	$L_{13}$	max $\sigma_{13(13)}$	0.012554	0.012528	0.21	min $\sigma_{13(13)}$	9.1168e-05	9.1168e-05	3.5e-05

Результаты расчета эффективных констант упругости для ПКМ с характеристиками компонентов из табл.1.1, приведены в табл.1.3.

Табл.1.3 Эффективные константы упругости тканевого композита, полученные с помощью ANSYS и с помощью разработанного ПК для ПКМ из табл.1.1

№№	Эффективные технические константы упругости тканевого КМ			
	Константа	ANSYS	Разработанный ПК	Относительное отклонение, %
1	$\bar{E}_1$ , ГПа	25.9415039415147	25.9415039016429	1.54e-07
2	$\bar{E}_2$ , ГПа	9.16487027766565	9.16487028639435	9.52e-08
3	$\bar{E}_3$ , ГПа	25.9447792002605	25.94477919926	3.86e-09
4	$\bar{\nu}_{12}$	0.329347639408837	0.329347637695047	5.2e-07
5	$\bar{\nu}_{23}$	0.116331669914718	0.11633166914442	6.62e-07
6	$\bar{\nu}_{13}$	0.162713223366057	0.162713227778157	2.71e-06
7	$\bar{G}_{13}$ , ГПа	7.57472826887293	7.5747282745634	7.51e-08
8	$\bar{G}_{23}$ , ГПа	2.71209589763121	2.71209592159754	8.84e-07
9	$\bar{G}_{12}$ , ГПа	2.7120295074028	2.71202950785892	1.68e-08

Совпадение эффективных констант упругости тканевого композита, полученных с помощью ПК ANSYS и с помощью разработанного ПК очень хорошее: относительное отклонение для всех констант не превышает 2.71e-06 %.

## 1.4 Примеры численного решения локальных задач и построения диаграмм деформирования упруго-пластических композитов

Численные решения задач  $L_{pq}$  упруго-пластичности проводились для 2-х типов КМ:

однонаправленно-армированных;  
тканевых КМ.

### 1.4.1 Однонаправленно-армированные упруго-пластические композиты

В данном разделе представлены некоторые результаты решения задач  $L_{pq}$  на 1/8 ЯП для 1D волокнистых упруго-пластических композитов (рис.1.9) Матрица была упруго-пластической с характеристиками, соответствующими алюминиевому сплаву [17]:

$$\begin{aligned} &\text{модуль Юнга } E = 70 \text{ ГПа, коэффициент Пуассона } \nu = 0,35, \\ &\omega_0 = 0,96, \quad \varepsilon_s = 0,0045, \quad b = 2,34, \quad \alpha_0 = 2,02, \quad \chi = 0.03. \end{aligned} \quad (1.88)$$

В качестве наполнителя рассматривались углеродные волокна, имеющие цилиндрическую форму с круговым сечением (рис.1.9). Волокна полагались упругими, с характеристиками:

$$\text{модуль Юнга } E = 350 \text{ ГПа, коэффициент Пуассона } \nu = 0,2. \quad (1.89)$$

Концентрация волокон 70%. Оси координат  $O\xi_k$  в ЯП для 1D КМ ориентированы следующим образом: ось  $O\xi_3$  совпадает с направлением волокон, а две другие оси – ориентированы в плоскости, ортогональной к  $O\xi_3$ .

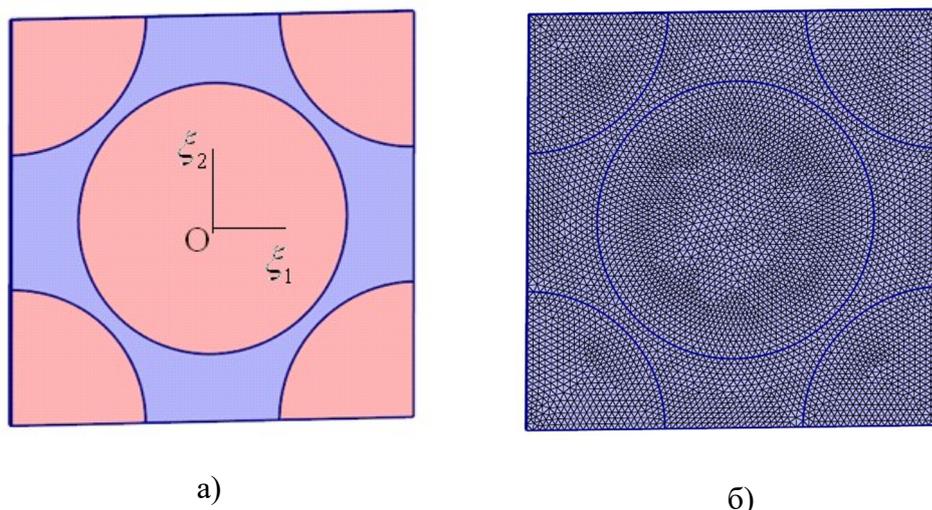


Рисунок 1.9 Геометрическая модель (а) и конечно-элементная сетка (б) ЯП 1D КМ

Эффективные упругие характеристики 1D КМ, вычисленные по методике из раздела 1.2.5, имеют следующие значения:

С помощью решения локальных задач  $L_{pq}$  были получены следующие значения эффективных упругих характеристики 1D композита

$$\bar{E}_L = 266.49 \text{ ГПа}, \bar{E}_T = 183.34 \text{ ГПа}, \bar{\nu}_L = 0.2381, \bar{\nu}_T = 0.3713, \bar{G}_L = 79.44 \text{ ГПа} \quad (1.90)$$

где  $\bar{E}_L = \bar{E}_3$  - модуль упругости КМ в продольном направлении  $O\xi_3$ ,  $\bar{E}_T = \bar{E}_1$  - модуль упругости в поперечном направлении,  $\bar{\nu}_L = \bar{\nu}_{13}$  - продольный коэффициент Пуассона КМ,  $\bar{\nu}_T = \bar{\nu}_{12}$  - поперечный коэффициент Пуассона КМ,  $\bar{G}_L = \bar{G}_{13}$  - продольный модуль сдвига КМ.

На рисунке 1.10 показана единая диаграмма циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{33} = \bar{F}_3(\bar{\varepsilon}_{33})$  1D КМ для случая 4-х циклов одноосного нагружения: нагрузки.

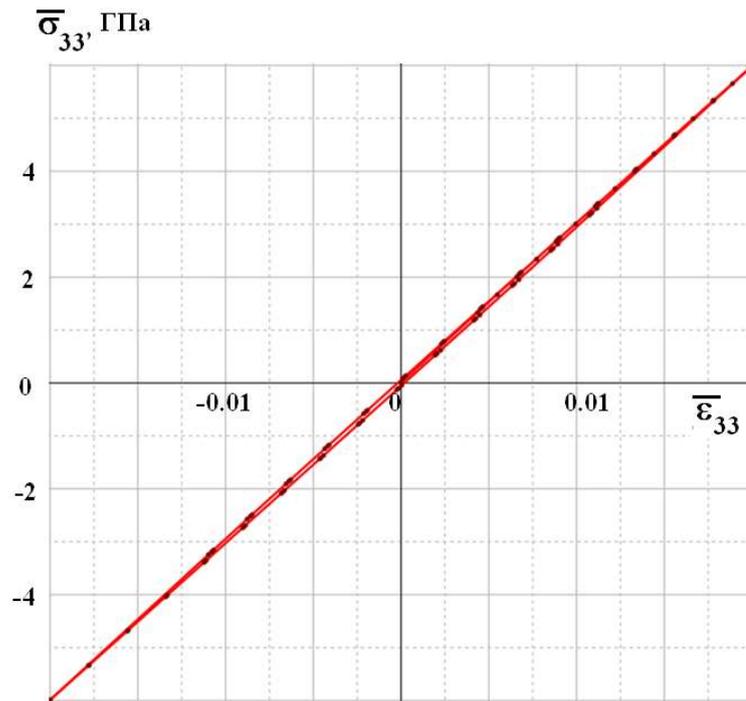


Рисунок 1.10 Диаграммы циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{33} = F_{33}(\bar{\epsilon}_{33})$  1D КМ для случая 4-х циклов продольного растяжения-сжатия: (циклы нагружения  $n=1, n=3$ , и циклы разгрузки  $n=2, 4$ ) (напряжения  $\bar{\sigma}_{33}$ , ГПа).

На рисунках 1.11 и 1.12 показаны поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{ij(33)}^{(n)}$  в ЯП при циклическом деформировании на 1-м нагружении 1D КМ, полученные с помощью решения задачи  $L_{33}$ .

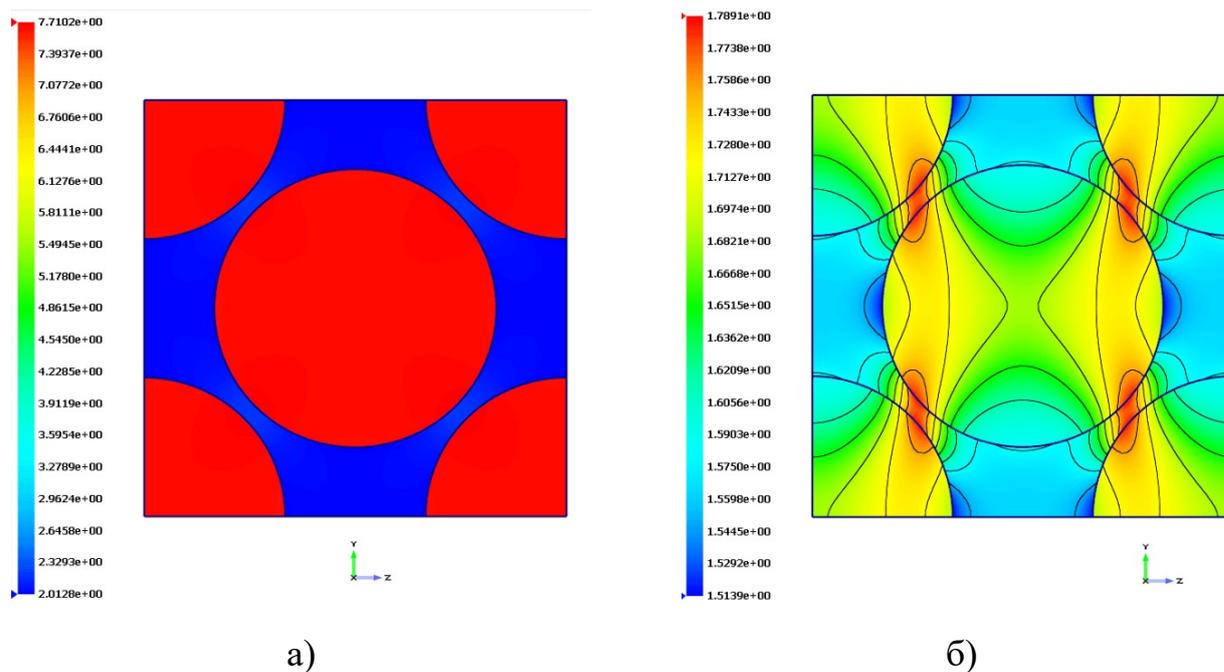


Рисунок 1.11 Поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{33(33)}^{(n)}$  (а) и  $\Delta\sigma_{11(33)}^{(n)}$  (б) (ГПа) в ЯП при циклическом деформировании на 1-м нагружения 1D КМ.

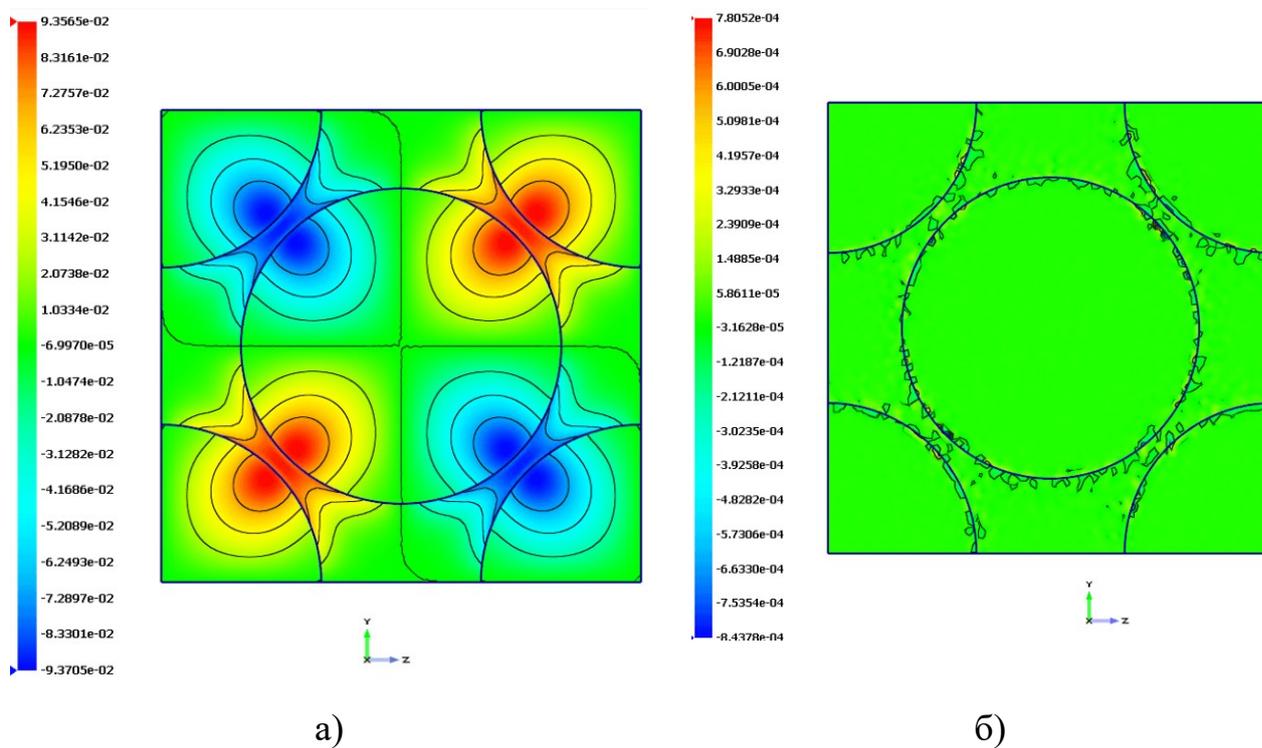


Рисунок 1.12 Поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{12(33)}^{(n)}$  (а) и  $\Delta\sigma_{13(33)}^{(n)}$  (б) (ГПа) в ЯП при циклическом деформировании на 1-м цикле нагружения 1D КМ.

На рисунке 1.13 показана единая диаграмма циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{11} = F_{11}(\bar{\varepsilon}_{11})$  1D КМ Al/SiC для случая 4-х циклов одноосного поперечного растяжения-сжатия.

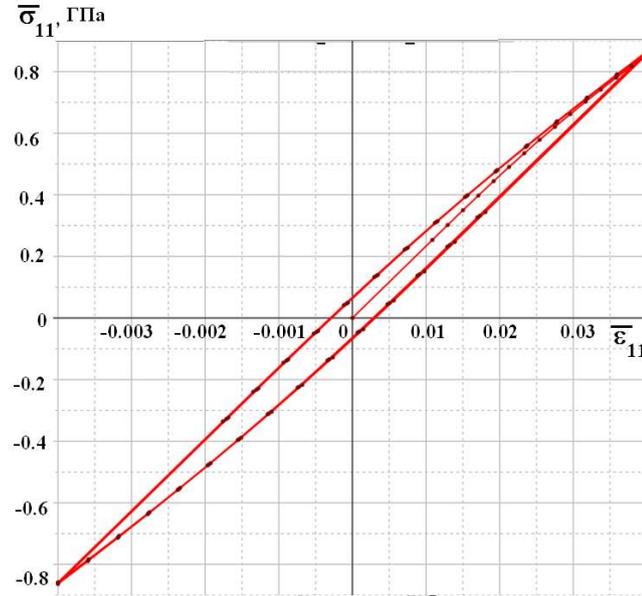


Рисунок 1.13 Диаграмма циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{11} = F_{11}(\bar{\varepsilon}_{11})$  1D КМ для случая 4-х циклов поперечного растяжения-сжатия (циклы нагружения n=1, n=3, и циклы разгрузки n=2, 4).

На рисунках 1.14 и 1.15 показаны поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{ij(33)}^{(n)}$  в ЯП при циклическом деформировании на 1-м нагружения 1D КМ, полученные с помощью решения задач  $L_{11}$  и  $L_{22}$ .

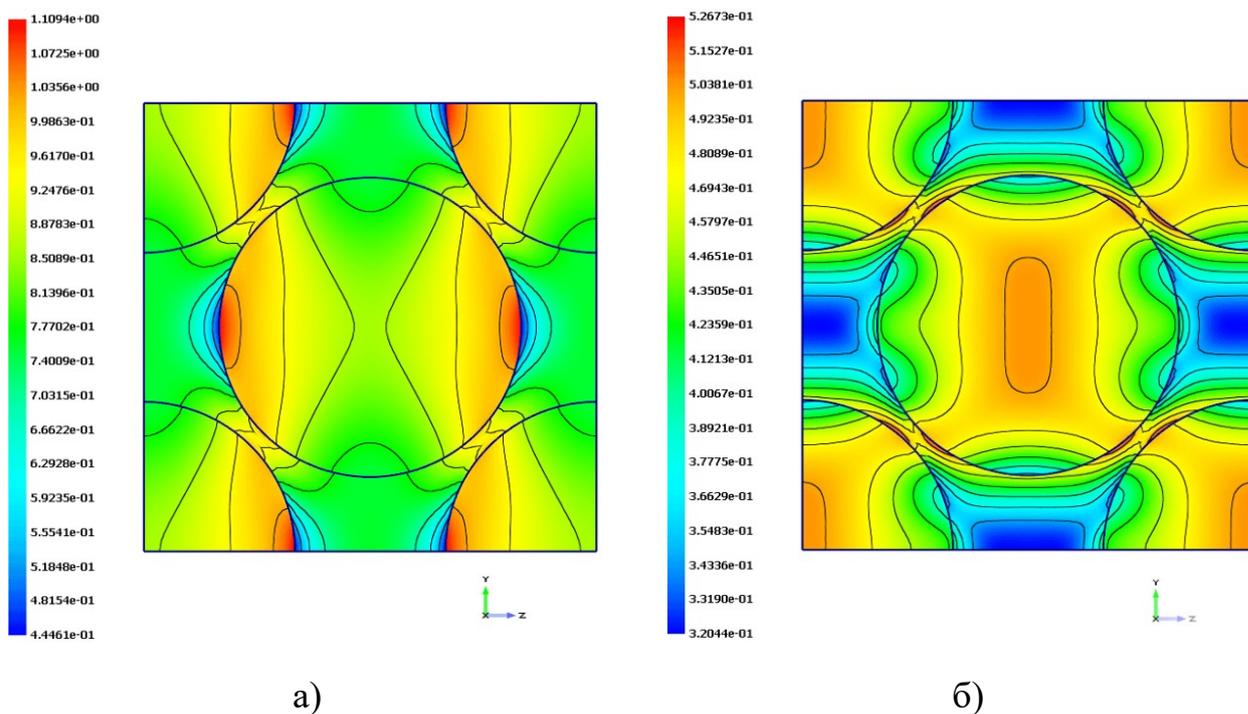


Рисунок 1.14 Поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{11(11)}^{(n)}$  (а) и  $\Delta\sigma_{22(11)}^{(1)}$  (б) (ГПа) в ЯП при циклическом деформировании на 1-м нагружения 1D КМ.

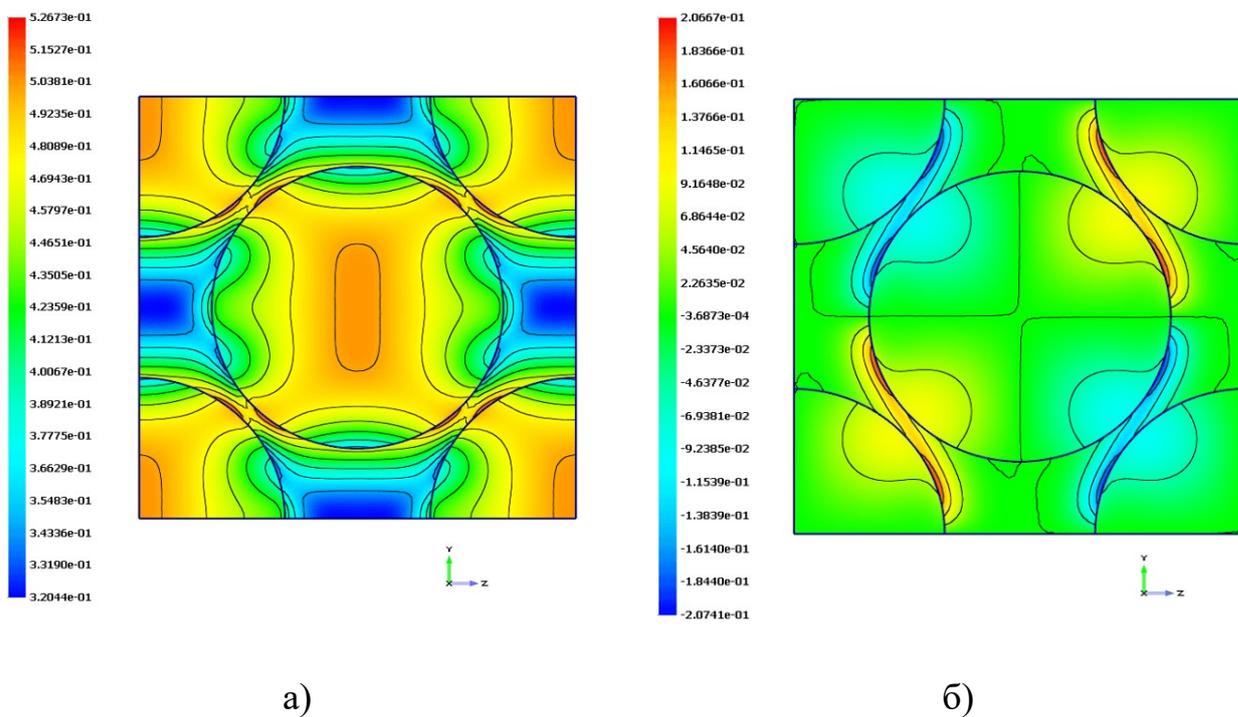


Рисунок 1.15 Поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{33(11)}^{(1)}$  (а) и  $\Delta\sigma_{12(11)}^{(1)}$  (б) (ГПа) в ЯП при циклическом деформировании на 1-м цикле нагружения 1D КМ.

На рисунке 1.16 показана единая диаграмма циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{13} = F_{13}(\bar{\varepsilon}_{13})$  1D КМ Al/SiC для случая 4-х циклов одноосного сдвигового деформирования.

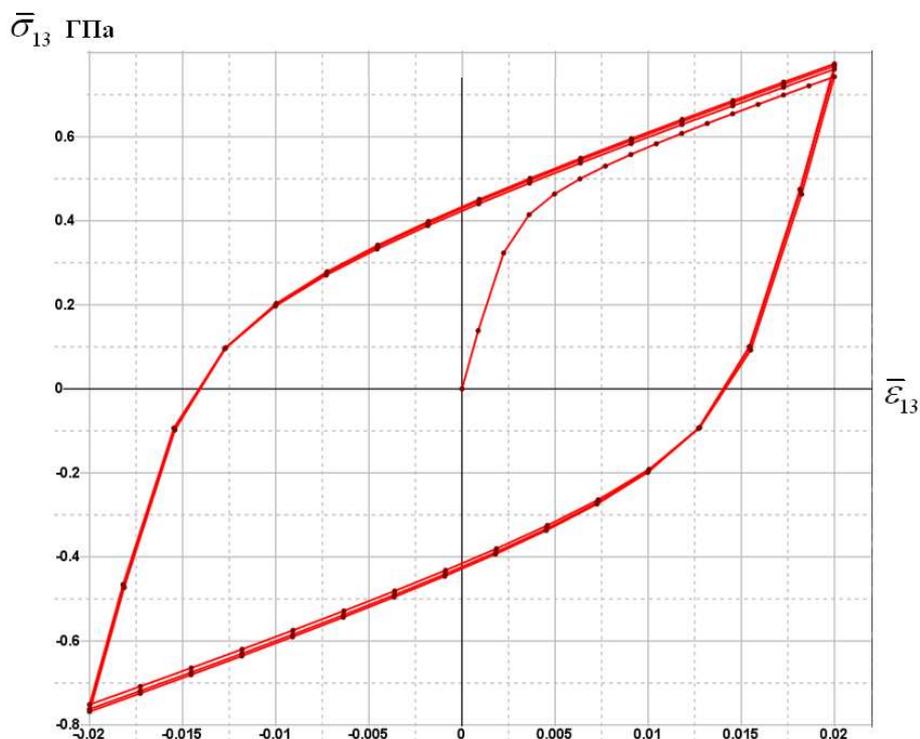


Рисунок 1.16 Диаграмма циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{13} = F_{11}(\bar{\varepsilon}_{13})$  1D КМ для случая 4-х циклов сдвигового деформирования: (циклы нагружения n=1, n=3, и циклы разгрузки n=2, 4).

На рисунках 1.17 показаны поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{ij}^{(n)}$  в ЯП при циклическом деформировании на 1-м нагружении 1D КМ, полученные с помощью решения задач L<sub>13</sub>.

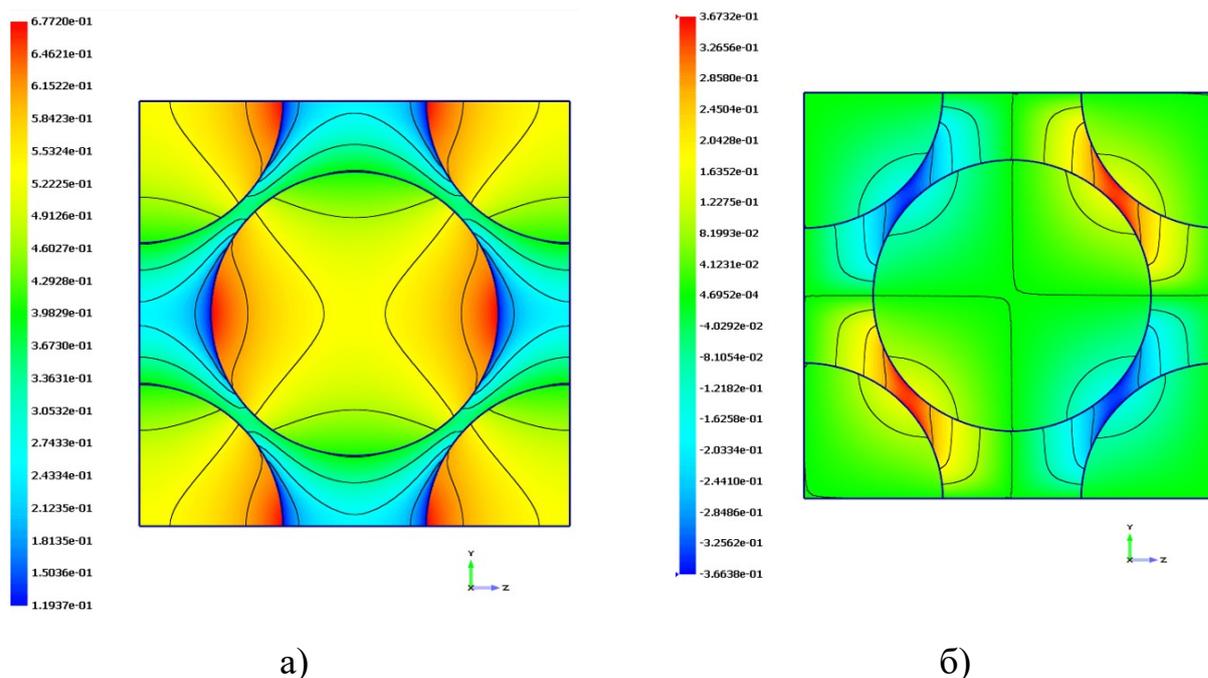


Рисунок 1.17 Поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{13(13)}^{(n)}$  (а) и  $\Delta\sigma_{23(13)}^{(1)}$  (б) (ГПа) в ЯП при циклическом деформировании на 1-м цикле нагружения 1D КМ.

На рисунке 1.18 показана единая диаграмма циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_{12}(\bar{\varepsilon}_{12})$  1D КМ Al/SiC для случая 4-х циклов одноосного поперечного сдвигового деформирования.

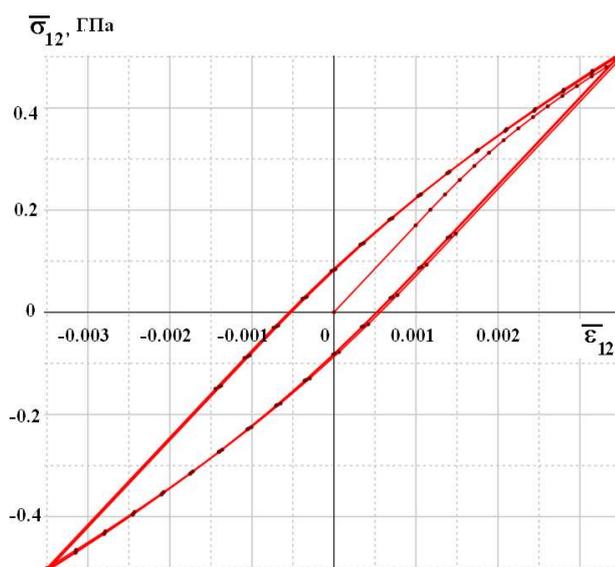


Рисунок 1.18 Диаграмма циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_{12}(\bar{\varepsilon}_{12})$  1D КМ для случая 4-х циклов поперечного сдвигового деформирования: (циклы нагружения  $n=1, n=3$ , и циклы разгрузки  $n=2, 4$ ).

На рисунках 1.19 показаны поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{ij}^{(n)}$  в ЯП при циклическом деформировании на 1-м нагружения 1D КМ, полученные с помощью решения задачи  $L_{12}$ .

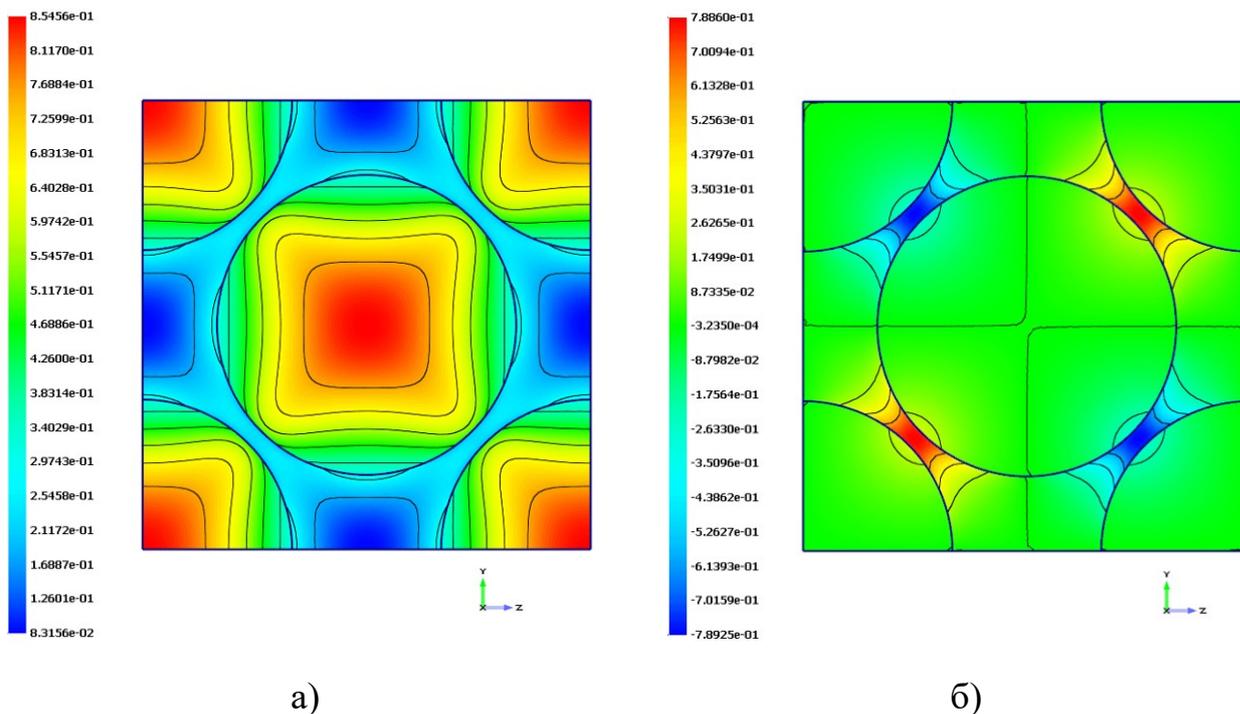


Рисунок 1.19 Поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{12}^{(n)}$  (а) и  $\Delta\sigma_{33}^{(1)}$  (б) (ГПа) в ЯП при циклическом деформировании на 1-м цикле нагружения 1D КМ.

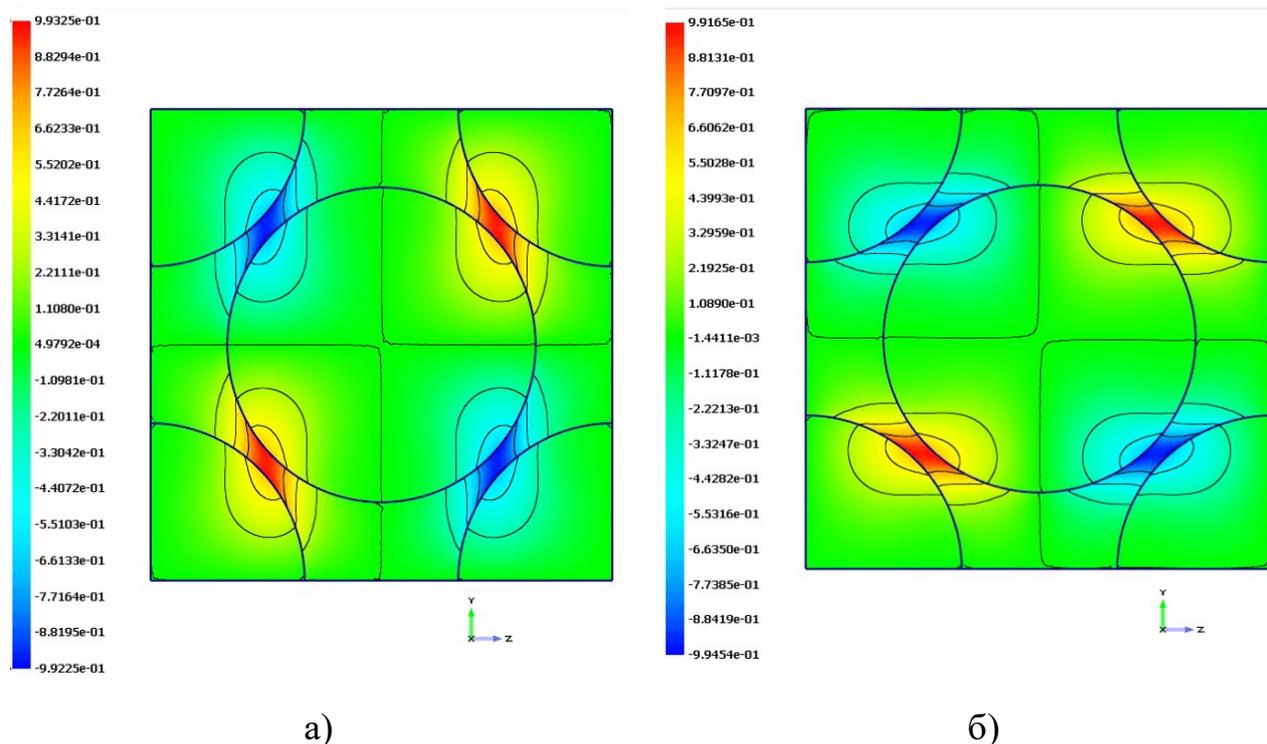


Рисунок 1.20 Поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{11(12)}^{(n)}$  (а) и  $\Delta\sigma_{22(12)}^{(1)}$  (б) (ГПа) в ЯП при циклическом деформировании на 1-м цикле нагружения 1D КМ.

## 1.4.2 Тканевые упруго-пластические композиты

В данном разделе представлены некоторые результаты решения задач  $L_{pq}$  на  $1/8$  ЯП для тканевых КМ с полотняным переплетением нитей (рис.1.1), на основе алюминиевой матрицы и углеродных волокон. Матрица считалась изотропной упруго-пластической, для нее были приняты константы модели деформационной теории пластичности (1.88). Нити ткани считались чисто упругими, но криволинейно-трансверсально-изотропными. Эффективные константы упругости нитей в локальной базе собственной системе координат криволинейной анизотропии [23] были выбраны в соответствии с моделью 1D КМ, изложенной в разделе 1.4.2, но без учета пластичности. Их численные значения были вычислены по методике из раздела 1.4.2, значения этих констант представлены ниже

$$\bar{E}_L = 266.49 \text{ ГПа}, \quad \bar{E}_T = 183.34 \text{ ГПа}, \quad \bar{\nu}_L = 0.2381, \quad \bar{\nu}_T = 0.3713, \quad \bar{G}_L = 79.44 \text{ ГПа} \quad (1.91)$$

где  $\bar{E}_L = \bar{E}_3$  - модуль упругости нити в продольном направлении,  $\bar{E}_T = \bar{E}_1$  - модуль упругости в поперечном направлении,  $\bar{\nu}_L = \bar{\nu}_{13}$  - продольный коэффициент Пуассона,  $\bar{\nu}_T = \bar{\nu}_{12}$  - поперечный коэффициент Пуассона,  $\bar{G}_L = \bar{G}_{13}$  - продольный модуль сдвига нити.

Далее была образована матрица  $\Pi_{ijkl}^0$  эффективных упругих податливостей нити в собственной системе координат  $O\xi_i^0$ , связанной с ориентацией волокон в нити (ось  $O\xi_3^0$  ориентирована вдоль волокон)

$$(\Pi_{ijkl}^0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_T}{E_T} & -\frac{\nu_L}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_T}{E_T} & \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_L}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_L}{E_L} & -\frac{\nu_L}{E_L} & \frac{1}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_L} \end{bmatrix}. \quad (1.92)$$

Затем был вычислен тензор модулей упругости нити в собственной системе координат:  $C_{ijkl}^0 = (\Pi_{ijkl}^0)^{-1}$ , и с помощью матриц перехода  $Q^{(\gamma)i}_j$  было осуществлено преобразование от  $O\xi_i^0$  к единой системе координат ЯП  $O\xi_i$  для каждой системы нитей  $\gamma = 1, 2$ . Ось  $O\xi_3$  направлена по нормали к плоскости укладки слоев ткани (рис.1.9), нити системы с номером  $\gamma$  направлены по оси  $O\xi_\gamma$ . Тогда матрицы поворота  $Q^{(\gamma)i}_j$  имеют вид

$$Q^{(\gamma)i}_j = Q_{(2)k}^{(\gamma)i} Q_{(1)j}^{(\gamma)k}, \quad \gamma = 1, 2, \quad (1.93)$$

где  $Q_{(1)j}^{(\gamma)k}$  - матрицы переориентации осей для каждой системы нитей при переходе из  $O\xi_i^0$  в  $O\xi_i$ , а  $Q_{(2)k}^{(\gamma)i}$  - матрицы поворота каждой системы нитей  $\gamma$  на угол  $\phi_\gamma$  вокруг осей  $O\xi_\beta$ , соответственно,  $\beta = 1, 2, \beta \neq \gamma$

$$[Q_{(1)k}^{(1)i}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [Q_{(2)k}^{(2)i}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.94)$$

$$[Q_{(2)k}^{(1)i}] = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & 0 & \sin \phi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_1 & 0 & \cos \phi_1 \end{bmatrix}, \quad [Q_{(2)k}^{(2)i}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_2 & \sin \phi_2 \\ 0 & -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда в единой системе координат  $O\xi_i$  компоненты тензора модулей упругости каждой  $\gamma$ - системы нитей вычисляются с помощью формул преобразования компонент тензора 4-го ранга [23]

$$C_{ijkl}^{(\gamma)} = C_{mnpq}^0 Q_{im}^{(\gamma)} Q_{jn}^{(\gamma)} Q_{kp}^{(\gamma)} Q_{lq}^{(\gamma)}, \quad \xi \in V_{\xi\gamma}, \quad (1.95)$$

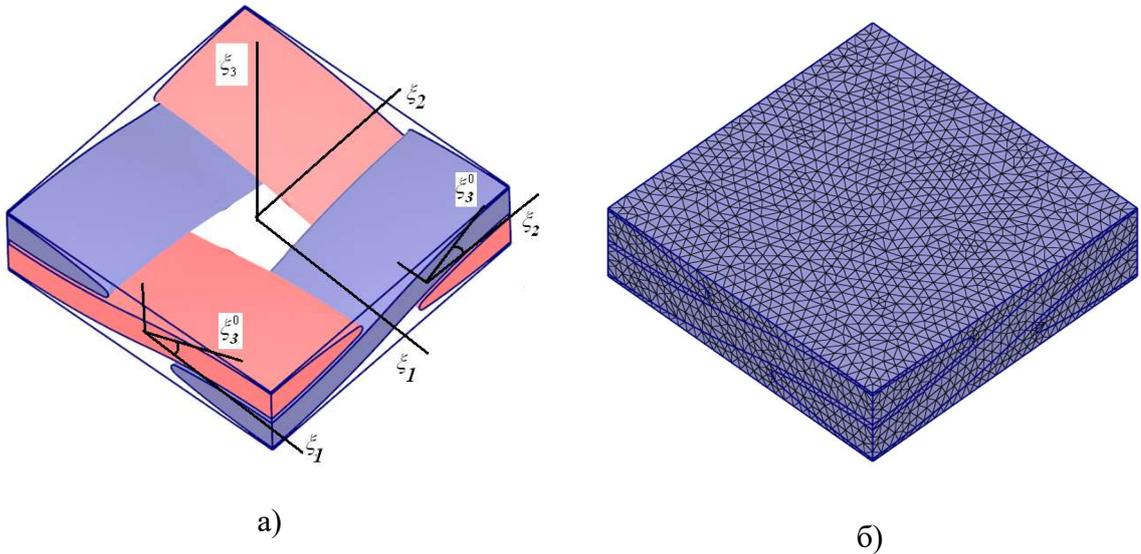


Рисунок 1.21 Геометрическая модель (а) и конечно-элементная сетка (б) ЯП тканевого КМ с трансверсально-изотропными нитями

Концентрация волокон в нити (1D композите) составляла 70%, концентрация нитей в ткани 50%.

С помощью решения локальных задач  $L_{pq}$  по формулам (1.81) были вычислены эффективные упругие характеристики композита как ортотропного материала

$$\bar{E}_2 = 143.49 \text{ ГПа}, \quad \bar{E}_3 = 115.1 \text{ ГПа}, \quad \bar{E}_1 = 143.49 \text{ ГПа},$$

$$\bar{\nu}_{23} = 0.3496, \bar{\nu}_{21} = 0.2364, \bar{\nu}_{31} = 0.2804, \quad (1.96)$$

$$\bar{G}_{23} = 40.17 \text{ ГПа}, \bar{G}_{12} = 48.34 \text{ ГПа}, \bar{G}_{13} = 40.17 \text{ ГПа}.$$

Были рассмотрены 4-х цикла нагружения- разгрузки тканевого КМ. На рисунке 1.22 показана единая диаграмма циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{11} = F_{11}(\bar{\varepsilon}_{11})$  тканевого КМ для 4-х циклов одноосного нагружения: нагрузки.

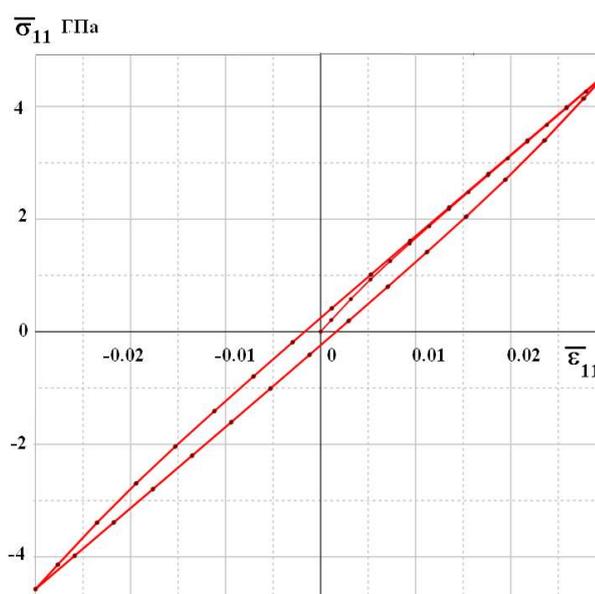
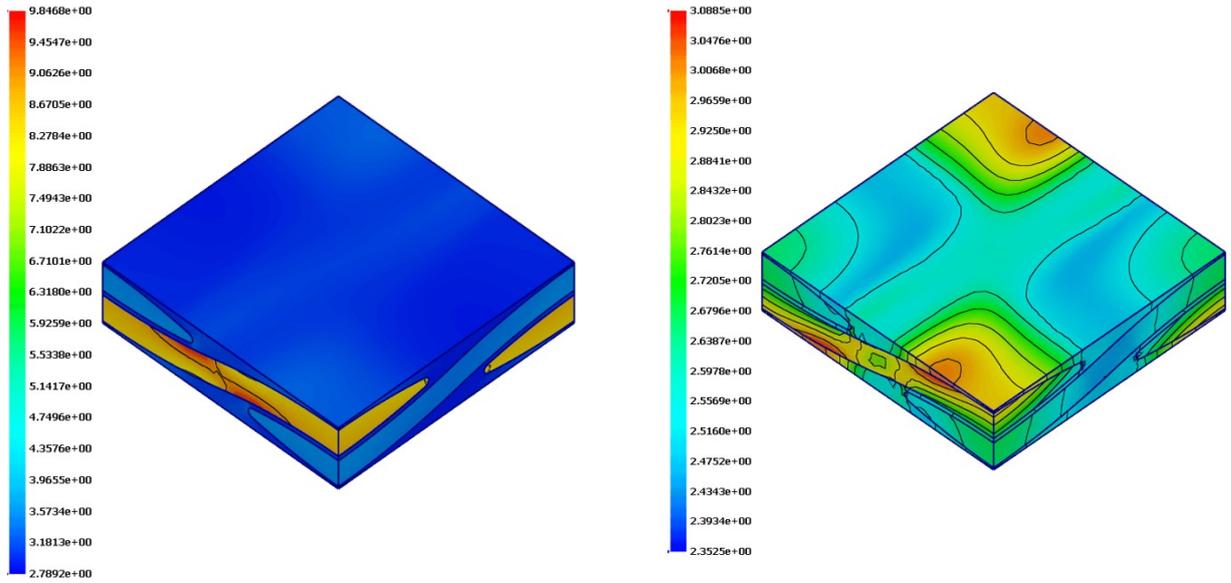


Рисунок 1.22 Диаграммы циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{11} = F_{11}(\bar{\varepsilon}_{11})$  тканевого КМ для случая 4-х циклов растяжения-сжатия в направлении 1.

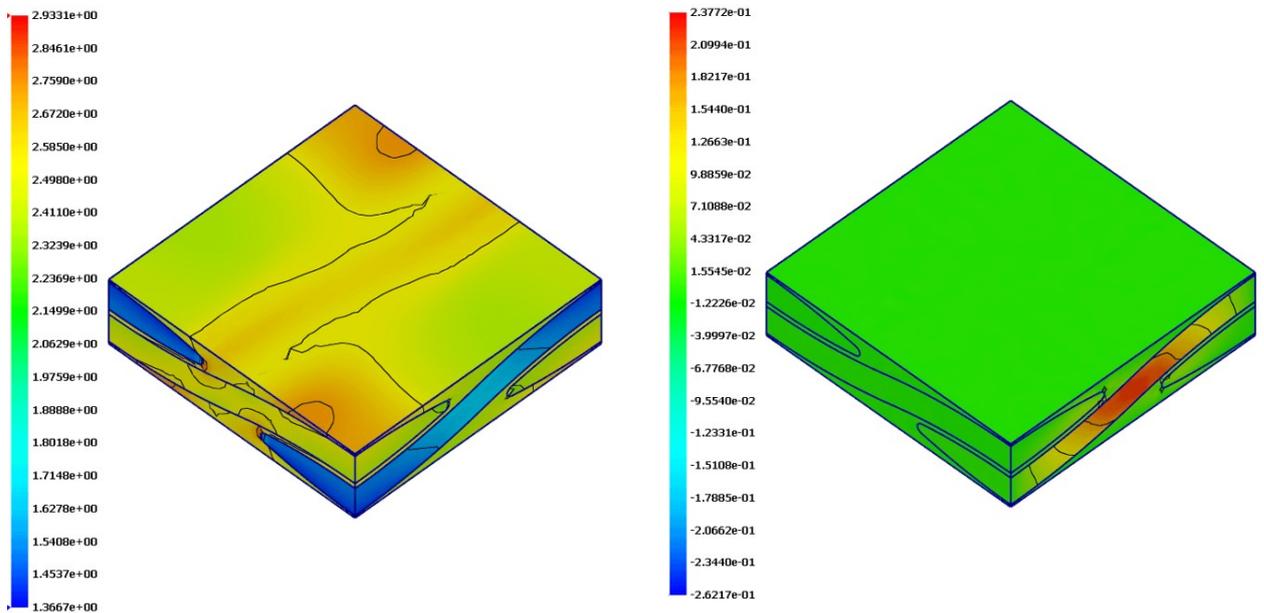
На рисунках 1.23 и 1.24 показаны поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{ij}^{(n)}$  в ЯП при циклическом деформировании на 1-м нагружения тканевого КМ, полученные с помощью решения задачи  $L_{11}$ .



a)

б)

Рисунок 1.23 Поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{11}^{(n)}$  (а) и  $\Delta\sigma_{33}^{(1)}$  (б) (ГПа) в ЯП при циклическом деформировании на 1-м цикле нагружения тканевого КМ



a)

б)

Рисунок 1.24 Поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{33}^{(n)}$  (а) и  $\Delta\sigma_{12}^{(1)}$  (б) (ГПа) в ЯП при циклическом деформировании на 1-м цикле нагружения тканевого КМ

На рисунке 1.25 показана единая диаграмма циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{33} = F_{33}(\bar{\varepsilon}_{33})$  тканевого КМ для 4-х циклов одноосного нагружения: нагрузки.

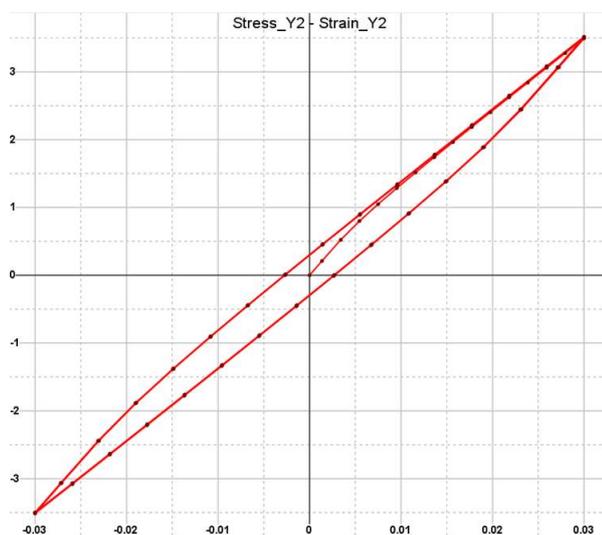


Рисунок 1.25 Диаграммы циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{33} = F_{33}(\bar{\varepsilon}_{33})$  тканевого КМ для случая 4-х циклов растяжения-сжатия в направлении 1.

На рисунках 1.26 показаны поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{ij}^{(n)}$  в ЯП при циклическом деформировании на 1-м нагружения тканевого КМ, полученные с помощью решения задачи  $L_{33}$ .

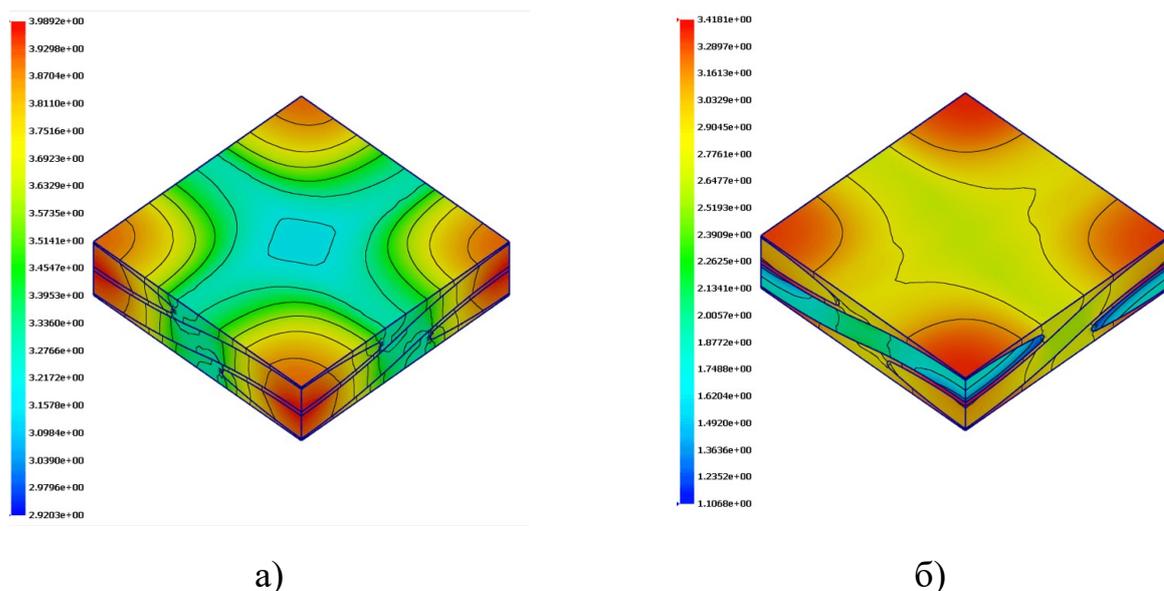


Рисунок 1.26 Поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{33(33)}^{(n)}$  (а) и  $\Delta\sigma_{11(33)}^{(1)}$  (б) (ГПа) в ЯП при циклическом деформировании на 1-м цикле нагружения тканевого КМ

На рисунке 1.27 показана единая диаграмма циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{13} = F_{13}(\bar{\varepsilon}_{13})$  тканевого КМ для 4-х циклов одноосного нагружения: нагрузки.

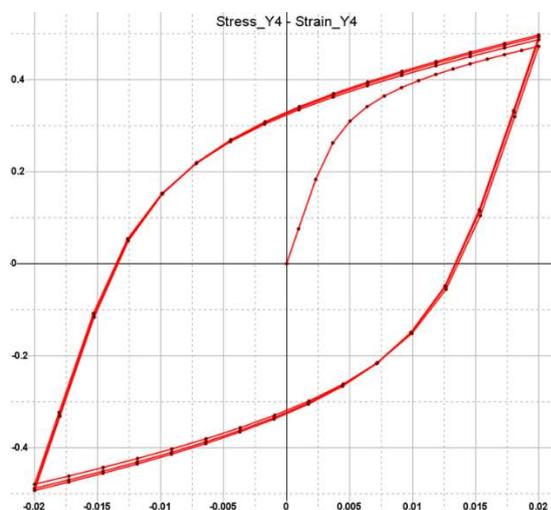


Рисунок 1.27 Диаграммы циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{13} = F_{13}(\bar{\varepsilon}_{13})$  тканевого КМ для случая 4-х циклов растяжения-сжатия в направлении 1.

На рисунках 1.28 показаны поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{ij}^{(n)}$  в ЯП при циклическом деформировании на 1-м нагружения тканевого КМ, полученные с помощью решения задачи  $L_{13}$ .

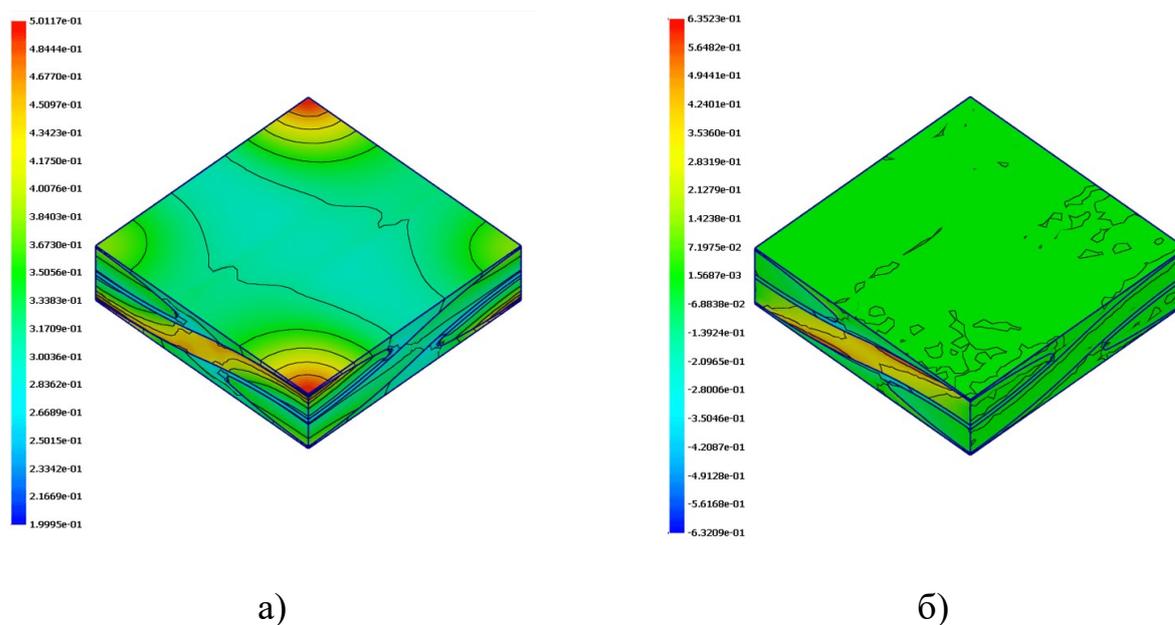


Рисунок 1.28 Поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{13(13)}^{(n)}$  (а) и  $\Delta\sigma_{11(13)}^{(1)}$  (б) (ГПа) в ЯП при циклическом деформировании на 1-м цикле нагружения тканевого КМ

На рисунке 1.29 показана единая диаграмма циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{12} = F_{12}(\bar{\varepsilon}_{12})$  тканевого КМ для 4-х циклов одноосного нагружения: нагрузки.

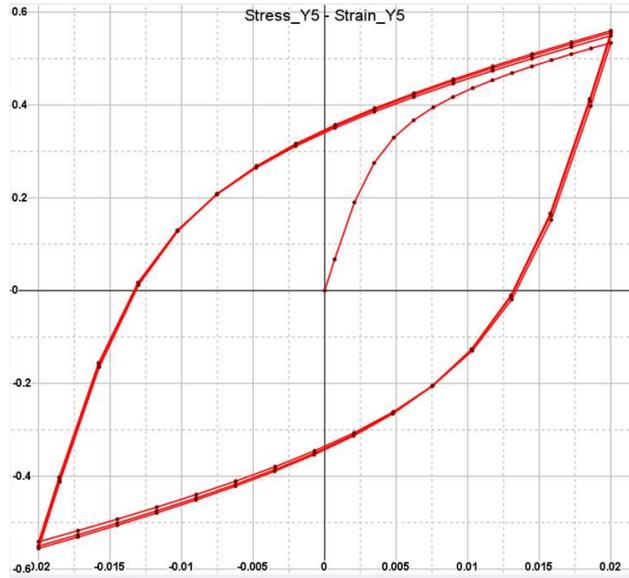


Рисунок 1.29 Диаграммы циклического деформирования  $\bar{\sigma}_{12} = F_{12}(\bar{\varepsilon}_{12})$  тканевого КМ для случая 4-х циклов растяжения-сжатия в направлении 1.

На рисунках 1.30 показаны поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{ij}^{(n)}$  в ЯП при циклическом деформировании на 1-м нагружения тканевого КМ, полученные с помощью решения задачи  $L_{12}$ .

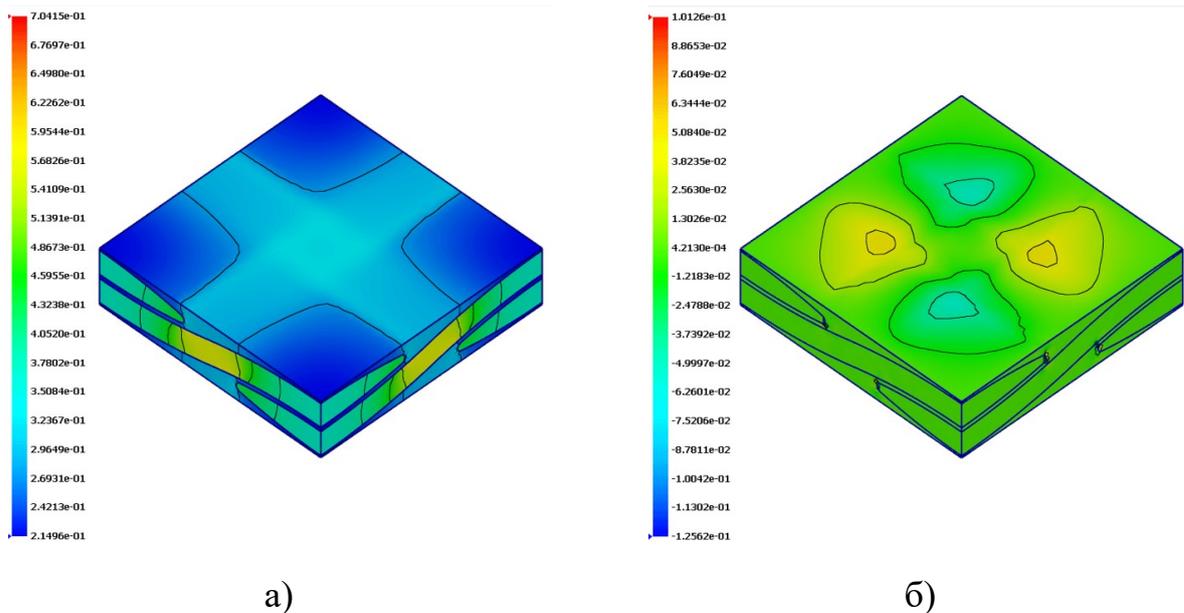


Рисунок 1.30 Поля микронапряжений  $\Delta\sigma_{12(12)}^{(n)}$  (а) и  $\Delta\sigma_{11(12)}^{(1)}$  (б) (ГПа) в ЯП при циклическом деформировании на 1-м цикле нагружения тканевого КМ

## **Глава 2 Разработка методики построения микро-структурных определяющих соотношений деформационной теории пластичности композитов при циклических нагружениях, основанной на методе асимптотического осреднения**

Целью исследований, представленных в главе 2, являлась разработка методики построения аналитических представлений эффективных определяющих соотношений упруго-пластических композитов, основанных на использовании теории спектральных представлений [23] тензорно-нелинейных соотношений для различных классов анизотропии, и применении метода асимптотического осреднения вместе с конечно-элементным алгоритмом решения локальных задач, возникающих в этом методе, для определения констант в этих соотношениях. Такие определяющие соотношения упруго-пластических композитов названы микро-структурными (или микро-структурными моделями [64,65]).

### **2.1 Спектральные представления эффективных определяющих соотношений для анизотропных упруго-пластических сред**

#### **2.1.1 Обобщенные девиаторы приращений тензоров напряжений и деформаций**

В разделах 2.1 и 2.2 использованы сведения из теории спектральных представлений тензорно-нелинейных определяющих соотношений для анизотропных сред, предложенной в работах Б.Е. Победри [108] и Ю.И. Димитриенко [23], которые применены для эффективных соотношений деформационной теории пластичности (1.63) при циклических нагружениях.

Представим эти соотношения (1.63) в виде общей тензорно-нелинейной функции, зависящей от номера цикла нагружения

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)} = F_{ij}^{(n)}(\Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)}). \quad (2.1)$$

Конкретная реализация этой тензорной функции осуществляется с помощью итерационной процедуры (1.63)

$$F_{ij}^{(n)\{m-1\}}(\Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}}) = \bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}} \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} \quad (2.2)$$

Запишем спектральные представления [23] для тензоров напряжений и деформаций

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)} = \sum_{\alpha=1}^z P_{ij}^{(\alpha)}(\bar{\sigma}), \quad \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)} = \sum_{\alpha=1}^z P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}) \quad (2.3)$$

где  $P_{ij}^{(\alpha)}(\sigma)$  и  $P_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon)$  - обобщенные девиаторы тензоров  $\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)}$  и  $\Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}$ , они являются линейными функциями вида

$$P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta \bar{\sigma}^{(n)}) = \Gamma_{ijkl}^{(\alpha)} \Delta \bar{\sigma}_{kl}^{(n)} \quad \text{и} \quad P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}) = \Gamma_{ijkl}^{(\alpha)} \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)} \quad \alpha = 1, \dots, z \quad (2.4)$$

здесь  $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}$  - некоторые постоянные тензоры (ортопроекторы), характеризующие класс анизотропии [23].

Часть этих ортопроекторов является приводимыми, т.е. выражаются через тензоры  $a_{ij}^{(\alpha)}$  меньшего ранга (второго)

$$\Gamma_{ijkl}^{(\alpha)} = \frac{1}{a_\alpha^2} a_{ij}^{(\alpha)} a_{kl}^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, \dots, z_1, \quad z_1 < z \quad (2.5)$$

$$a_\alpha^2 = a_{ij}^{(\alpha)} a_{ij}^{(\alpha)}$$

Введем спектральные инварианты [23] тензоров напряжений и деформаций  $Y_\alpha(\Delta \bar{\sigma}^{(n)})$  и  $Y_\alpha(\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)})$ ,  $\alpha = 1, \dots, z$ . Для первых  $z_1$  имеем линейные спектральные инварианты

$$Y_\alpha(\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)}) = \frac{1}{a_\alpha} a_{ij}^{(\alpha)} \Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)}, \quad Y_\alpha(\Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}) = \frac{1}{a_\alpha} a_{ij}^{(\alpha)} \Delta \bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)}, \quad \alpha = 1, \dots, z_1 \quad (2.6)$$

А остальные спектральные инварианты являются квадратичными и определяются по формулам

$$Y_{ij}^2(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\sigma}^{(n)})P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}), \quad Y_{ij}^2(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})$$

$$\alpha = z_1 + 1, \dots, z \quad (2.7)$$

Для первых  $z_1$  обобщенных инвариантов имеют место формулы

$$P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = \frac{1}{a_\alpha} Y_\alpha(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) a_{ij}^{(\alpha)}, \quad P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \frac{1}{a_\alpha} Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) a_{ij}^{(\alpha)},$$

$$\alpha = 1, \dots, z_1 \quad (2.8)$$

поэтому свертка этих формул самих с собой, с учетом (4), приводит к соотношениям вида (2.7), т.е. (2.7) имеют место для всех  $\alpha = 1, \dots, z$

### 2.1.2 Спектральные представления квазилинейных тензорных функций

Используя теорему из [23], квазилинейные тензорные функции (2.1) можно представить в виде линейных соотношений между соответствующими инвариантами тензоров

$$P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = \frac{\varphi_\alpha^{(n)}}{Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})} P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \quad \alpha = 1, \dots, z, \quad (2.9)$$

где  $\varphi_\alpha^{(n)}$  - скалярные функции от спектральных инвариантов  $Y_\alpha(\varepsilon)$  для  $n$ -го цикла нагружения

$$\varphi_\alpha^{(n)} = \varphi_\alpha^{(n)}(Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \dots, Y_n(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})), \quad \alpha = 1, \dots, z \quad (2.10)$$

Для того, чтобы нелинейные тензорные функции (2.10) при малых значениях  $\varepsilon$  сводились в линейным тензорным функциям теории упругости, для первых  $z_1$  функций  $\varphi_\alpha^{(n)}$  введем следующее представление

$$\varphi_\alpha^{(n)} = \sum_{\beta=1}^{z_1} I_{\alpha\beta}^{(n)} Y_\beta(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \quad \alpha = 1, \dots, z_1 \quad (2.11)$$

где  $I_{\alpha\beta}^{(n)}$  - также скалярные функции от  $Y_\alpha(\varepsilon)$

$$l_{\alpha\beta}^{(n)} = l_{\alpha\beta}^{(n)}(Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \dots, Y_n(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})) \quad \alpha, \beta = 1, \dots, z_1 \quad (2.12)$$

В линейном случае эти функции являются коэффициентами упругости.

Подставляя (2.11) в (2.9) и, учитывая (2.8), получаем спектральное представление квазилинейной тензорной функции (2.9)

$$P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = \sum_{\beta=1}^{z_1} l_{\alpha\beta}^{(n)} \frac{Y_\beta(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}{a_\alpha} a_{ij}^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, \dots, z_1 \quad (2.13)$$

$$P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = \frac{\varphi_\alpha^{(n)}}{Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})} P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \quad \alpha = z_1 + 1, \dots, z. \quad (2.14)$$

Введем обозначение

$$l_{\alpha\alpha}^{(n)} = \frac{\varphi_\alpha^{(n)}}{Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}, \quad \alpha = z_1 + 1, \dots, z, \quad (2.15)$$

и подставим в соотношения (2.13) выражение (2.8), тогда система соотношений (2.13) и (2.14) может быть записана в виде

$$Y_\alpha(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = \sum_{\beta=1}^{z_1} l_{\alpha\beta}^{(n)} Y_\beta(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \quad \alpha = 1, \dots, z_1 \quad (2.16)$$

$$P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = l_{\alpha\alpha}^{(n)} P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \quad \alpha = z_1 + 1, \dots, z \quad (2.17)$$

Подставляя теперь (16) в первое соотношение (2.8), а затем получившееся выражение вместе с (2.17) - в первое соотношение в (2.3), получаем полное спектральное представление квазилинейной тензорной функции (2.1)

$$\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)} = \sum_{\alpha, \beta=1}^{z_1} l_{\alpha\beta}^{(n)} \frac{Y_\beta(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}{a_\alpha} a_{ij}^{(\alpha)} + \sum_{\alpha=z_1+1}^z l_{\alpha\alpha}^{(n)} P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}). \quad (2.18)$$

Подставим в это соотношение выражения (2.6) для линейных инвариантов  $Y_\beta(\varepsilon)$ , а также выражения (2.3) для  $P_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon)$ , тогда

$$\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)} = \left( \sum_{\alpha, \beta=1}^{z_1} \frac{l_{\alpha\beta}^{(n)}}{a_\alpha a_\beta} a_{ij}^{(\alpha)} a_{kl}^{(\beta)} \right) \Delta\bar{\varepsilon}_{kl} + \left( \sum_{\alpha=z_1+1}^z l_{\alpha\alpha}^{(n)} \Gamma_{ijkl}^{(\alpha)} \right) \Delta\bar{\varepsilon}_{kl} \quad (2.19)$$

Если ввести обозначение для эффективного тензора секущих модулей КМ

$$\bar{C}_{ijkl}^{(n)} = \sum_{\alpha, \beta=1}^z l_{\alpha\beta}^{(n)} \Gamma_{ijkl}^{(\alpha\beta)} + \sum_{\alpha=z_1+1}^z l_{\alpha\alpha}^{(n)} \Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}, \quad (2.20)$$

где обозначены тензоры

$$\Gamma_{ijkl}^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2a_\alpha a_\beta} (a_{ij}^{(\alpha)} a_{kl}^{(\beta)} + a_{kl}^{(\alpha)} a_{ij}^{(\beta)}), \quad (2.21)$$

то соотношения (2.21) можно представить в квазилинейном виде

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)} = \bar{C}_{ijkl}^{(n)} \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)}. \quad (2.22)$$

который соответствует исходному квазилинейному представлению (1.63) эффективных определяющих соотношений упруго-пластичности. Однако соотношения (1.63) заданы итерационно и неявно, т.е. аналитический вид тензора  $\bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}}$  не определен, этот тензор определяется численно, а в соотношениях (2.22) тензор  $\bar{C}_{ijkl}^{(n)}$  задается аналитически по формулам (2.20).

Если все  $l_{\alpha\beta}^{(n)}$ ,  $l_{\alpha\alpha}^{(n)}$  - являются константами

$$l_{\alpha\beta}^{(n)} = l_{\alpha\beta}^0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, z_1, \quad l_{\alpha\alpha}^{(n)} = l_{\alpha\alpha}^0, \quad \alpha = z_1 + 1, \dots, z, \quad (2.23)$$

то (2.20) является обычным тензором модулей упругости, а (2.22) – это обычный обобщенный закон Гука.

В нелинейном случае величины  $l_{\alpha\beta}^{(n)}$ ,  $l_{\alpha\alpha}^{(n)}$  - являются функциями от инвариантов  $Y_\alpha(\varepsilon)$  (формулы (2.12) и (2.15))

$$l_{\alpha\beta}^{(n)} = l_{\alpha\beta}^{(n)}(Y_1(\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}), \dots, Y_n(\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)})), \quad \alpha = 1, \dots, z_1, \quad (2.24)$$

$$l_{\alpha\alpha}^{(n)} = l_{\alpha\alpha}^{(n)}(Y_1(\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)}), \dots, Y_n(\Delta \bar{\varepsilon}^{(n)})), \quad \alpha = z_1 + 1, \dots, z.$$

### 2.1.3 Упрощенные модели квазилинейных упруго-пластических сред

В упрощенной модели будем полагать, что в коэффициенты  $l_{\alpha\beta}^{(n)}$ , участвующие в соотношениях (2.16) между линейными инвариантами, зависят только от

линейных инвариантов, а коэффициенты  $l_{\alpha\alpha}^{(n)}$ , участвующие в соотношениях (2.17) между квадратичными инвариантами, зависят только от квадратичных инвариантов

$$l_{\alpha\alpha}^{(n)} = l_{\alpha\alpha}^{(n)}(Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \dots, Y_{z_1}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})), \quad l_{\alpha\beta}^{(n)} = l_{\alpha\beta}^0, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, z_1, \quad (2.25)$$

$$l_{\alpha\alpha}^{(n)} = l_{\alpha\alpha}^{(n)}(Y_{z_1+1}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \dots, Y_z(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})), \quad \alpha = z_1 + 1, \dots, z.$$

Идея подобных простейших моделей была предложена в [108], в данной работе эти модели разработаны для циклических нагружений.

### 2.1.4 Матричное представление моделей

Введем матричное представление компонент тензоров  $\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)}$ ,  $\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)}$ ,  $P_{ij}^{(\alpha)}$

$$\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)} = \begin{pmatrix} \Delta\bar{\sigma}_{11}^{(n)} & \Delta\bar{\sigma}_{12}^{(n)} & \Delta\bar{\sigma}_{13}^{(n)} \\ \Delta\bar{\sigma}_{12}^{(n)} & \Delta\bar{\sigma}_{22}^{(n)} & \Delta\bar{\sigma}_{23}^{(n)} \\ \Delta\bar{\sigma}_{13}^{(n)} & \Delta\bar{\sigma}_{23}^{(n)} & \Delta\bar{\sigma}_{33}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)} = \begin{pmatrix} \Delta\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} & \Delta\bar{\varepsilon}_{12}^{(n)} & \Delta\bar{\varepsilon}_{13}^{(n)} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{12}^{(n)} & \Delta\bar{\varepsilon}_{22}^{(n)} & \Delta\bar{\varepsilon}_{23}^{(n)} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{13}^{(n)} & \Delta\bar{\varepsilon}_{23}^{(n)} & \Delta\bar{\varepsilon}_{33}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad P_{ij}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} P_{11}^{(\alpha)} & P_{13}^{(\alpha)} & P_{13}^{(\alpha)} \\ P_{12}^{(\alpha)} & P_{22}^{(\alpha)} & P_{23}^{(\alpha)} \\ P_{13}^{(\alpha)} & P_{23}^{(\alpha)} & P_{33}^{(\alpha)} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Составим также координатные столбцы из этих компонент тензоров  $\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)}$ ,  $\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)}$ ,  $P_{ij}^{(\alpha)}$

$$\{\Delta\bar{\sigma}^{(n)}\} = \begin{pmatrix} \Delta\bar{\sigma}_{11}^{(n)} \\ \Delta\bar{\sigma}_{22}^{(n)} \\ \Delta\bar{\sigma}_{33}^{(n)} \\ \Delta\bar{\sigma}_{12}^{(n)} \\ \Delta\bar{\sigma}_{13}^{(n)} \\ \Delta\bar{\sigma}_{23}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \{\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}\} = \begin{pmatrix} \Delta\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{22}^{(n)} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{33}^{(n)} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{12}^{(n)} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{13}^{(n)} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{23}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \{P^{(\alpha)}\} = \begin{pmatrix} P_{11}^{(\alpha)} \\ P_{22}^{(\alpha)} \\ P_{33}^{(\alpha)} \\ P_{12}^{(\alpha)} \\ P_{13}^{(\alpha)} \\ P_{23}^{(\alpha)} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Введем матричное представление ортопроекторов  $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}$ , тензоров  $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha\beta)}$  и нелинейного тензора модулей упругости

$$\begin{aligned}
(\Gamma^{(\alpha)}) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} \Gamma_{1111}^{(\alpha)} & \Gamma_{1122}^{(\alpha)} & \Gamma_{1133}^{(\alpha)} & 2\Gamma_{1112}^{(\alpha)} & 2\Gamma_{1113}^{(\alpha)} & 2\Gamma_{1123}^{(\alpha)} \\ & \Gamma_{2222}^{(\alpha)} & \Gamma_{2233}^{(\alpha)} & 2\Gamma_{2212}^{(\alpha)} & 2\Gamma_{2213}^{(\alpha)} & 2\Gamma_{2223}^{(\alpha)} \\ \text{сум} & & \Gamma_{3333}^{(\alpha)} & 2\Gamma_{3312}^{(\alpha)} & 2\Gamma_{3313}^{(\alpha)} & 2\Gamma_{3323}^{(\alpha)} \\ \hline & & \text{сум} & 2\Gamma_{1212}^{(\alpha)} & 2\Gamma_{1213}^{(\alpha)} & 2\Gamma_{1223}^{(\alpha)} \\ & & & & 2\Gamma_{1313}^{(\alpha)} & 2\Gamma_{1323}^{(\alpha)} \\ & & & & & 2\Gamma_{2323}^{(\alpha)} \end{array} \right), \\
(\Gamma^{(\alpha\beta)}) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} \Gamma_{1111}^{(\alpha\beta)} & \Gamma_{1122}^{(\alpha\beta)} & \Gamma_{1133}^{(\alpha\beta)} & 2\Gamma_{1112}^{(\alpha\beta)} & 2\Gamma_{1113}^{(\alpha\beta)} & 2\Gamma_{1123}^{(\alpha\beta)} \\ & \Gamma_{2222}^{(\alpha\beta)} & \Gamma_{2233}^{(\alpha\beta)} & 2\Gamma_{2212}^{(\alpha\beta)} & 2\Gamma_{2213}^{(\alpha\beta)} & 2\Gamma_{2223}^{(\alpha\beta)} \\ \text{сум} & & \Gamma_{3333}^{(\alpha\beta)} & 2\Gamma_{3312}^{(\alpha\beta)} & 2\Gamma_{3313}^{(\alpha\beta)} & 2\Gamma_{3323}^{(\alpha\beta)} \\ \hline & & \text{сум} & 2\Gamma_{1212}^{(\alpha\beta)} & 2\Gamma_{1213}^{(\alpha\beta)} & 2\Gamma_{1223}^{(\alpha\beta)} \\ & & & & 2\Gamma_{1313}^{(\alpha\beta)} & 2\Gamma_{1323}^{(\alpha\beta)} \\ & & & & & 2\Gamma_{2323}^{(\alpha\beta)} \end{array} \right) \quad (2.28) \\
(\bar{C}^{(n)}) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} \bar{C}_{1111}^{(n)} & \bar{C}_{1122}^{(n)} & \bar{C}_{1133}^{(n)} & 2\bar{C}_{1112}^{(n)} & 2\bar{C}_{1113}^{(n)} & 2\bar{C}_{1123}^{(n)} \\ & \bar{C}_{2222}^{(n)} & \bar{C}_{2233}^{(n)} & 2\bar{C}_{2212}^{(n)} & 2\bar{C}_{2213}^{(n)} & 2\bar{C}_{2223}^{(n)} \\ \text{сум} & & \bar{C}_{3333}^{(n)} & 2\bar{C}_{3312}^{(n)} & 2\bar{C}_{3313}^{(n)} & 2\bar{C}_{3323}^{(n)} \\ \hline & & \text{сум} & 2\bar{C}_{1212}^{(n)} & 2\bar{C}_{1213}^{(n)} & 2\bar{C}_{1223}^{(n)} \\ & & & & 2\bar{C}_{1313}^{(n)} & 2\bar{C}_{1323}^{(n)} \\ & & & & & 2\bar{C}_{2323}^{(n)} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Тогда матрицу компонент нелинейного тензора (2.20) можно представить в виде

$$(\bar{C}^{(n)}) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\bar{z}_1} l_{\alpha\beta}^{(n)} (\Gamma^{(\alpha\beta)}) + \sum_{\alpha=\bar{z}_1+1}^{\bar{z}} l_{\alpha\alpha}^{(n)} (\Gamma^{(\alpha)}) \quad (2.29)$$

а соотношения (2.4) и определяющие соотношения (2.22) в матричном виде записываются следующим образом:

$$\{P^{(\alpha)}(\Delta\bar{\sigma}^{(n)})\} = (\Gamma^{(\alpha)})\{\Delta\bar{\sigma}^{(n)}\}, \quad \{P^{(\alpha)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})\} = (\Gamma^{(\alpha)})\{\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}\}, \quad (2.30)$$

$$\{\Delta\bar{\sigma}^{(n)}\} = (\bar{C}^{(n)})\{\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}\} \quad (2.31)$$

## 2.2. Микро-структурная модель для трансверсально-изотропных упруго-пластических сред

### 2.2.1 Спектральное представление определяющих соотношений для трансверсально-изотропных упруго-пластических сред

В работах [23] было установлено спектральное разложение тензоров (2.3) для класса трансверсальной изотропии. Эти результаты использованы в данном разделе для приращений тензоров напряжений и деформаций.

Для трансверсально –изотропных сред обобщенные девиаторы (2.3) имеют вид

$$P_{ij}^{(1)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \Delta\bar{\varepsilon}_{33}^{(n)}\delta_{i3}\delta_{j3}, \quad P_{ij}^{(2)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} + \Delta\bar{\varepsilon}_{22}^{(n)}}{2}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2})$$

$$P_{ij}^{(3)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^{(n)} - \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} + \Delta\bar{\varepsilon}_{22}^{(n)}}{2}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}) + \Delta\bar{\varepsilon}_{33}^{(n)}\delta_{i3}\delta_{j3} - (\Delta\bar{\varepsilon}_{i3}^{(n)}\delta_{j3} + \Delta\bar{\varepsilon}_{j3}^{(n)}\delta_{i3}), \quad (2.32)$$

$$P_{ij}^{(4)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \Delta\bar{\varepsilon}_{13}^{(n)}(\delta_{i1}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j1}) + \Delta\bar{\varepsilon}_{23}^{(n)}(\delta_{i2}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j2}),$$

т.е.  $z_1 = 2$ ,  $z = 4$

Тензоры  $a_{ij}^{(\alpha)}$  и их инварианты имеют вид

$$a_{ij}^{(1)} = \delta_{i3}\delta_{j3}, \quad a_{ij}^{(2)} = \delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}, \quad (2.33)$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \sqrt{2}.$$

Тензоры-ортопроекторы  $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}$  (2.4) и тензоры  $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha\beta)}$  (2.5) имеют вид

$$\Gamma_{ijkl}^{(11)} = \delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3}\delta_{l3}, \quad \Gamma_{ijkl}^{(22)} = \frac{1}{2}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2})(\delta_{k1}\delta_{l1} + \delta_{k2}\delta_{l2}),$$

$$\Gamma_{ijkl}^{(12)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}((\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2})\delta_{k3}\delta_{l3} + (\delta_{k1}\delta_{l1} + \delta_{k2}\delta_{l2})\delta_{i3}\delta_{j3}),$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ijkl}^{(3)} &= \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{2}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2})(\delta_{k1}\delta_{l1} + \delta_{k2}\delta_{l2}) + \\
&+ \delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3}\delta_{l3} - \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{k3} + \delta_{ik}\delta_{l3})\delta_{j3} - \frac{1}{2}(\delta_{jl}\delta_{k3} + \delta_{jk}\delta_{l3})\delta_{i3}, \\
\Gamma_{ijkl}^{(4)} &= \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{k3} + \delta_{ik}\delta_{l3})\delta_{j3} + \frac{1}{2}(\delta_{jl}\delta_{k3} + \delta_{jk}\delta_{l3})\delta_{i3} - 2\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3}\delta_{l3}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Матричное представление (2.26) обобщённых девиаторов  $P_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon)$  имеет вид

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(1)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\bar{\varepsilon}_{33}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad P_{ij}^{(2)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \begin{pmatrix} \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} + \Delta\bar{\varepsilon}_{22}^{(n)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} + \Delta\bar{\varepsilon}_{22}^{(n)}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
P_{ij}^{(3)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) &= \begin{pmatrix} \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} - \Delta\bar{\varepsilon}_{22}^{(n)}}{2} & \Delta\bar{\varepsilon}_{12}^{(n)} & 0 \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{12}^{(n)} & \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{22}^{(n)} - \Delta\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{ij}^{(4)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta\bar{\varepsilon}_{13}^{(n)} \\ 0 & 0 & \Delta\bar{\varepsilon}_{23}^{(n)} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{13}^{(n)} & \Delta\bar{\varepsilon}_{23}^{(n)} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Представление (2.27) компонент обобщенных девиаторов в виде координатных столбцов имеет вид

$$\{P^{(1)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{33}^{(n)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \{P^{(2)}\} = \frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} + \Delta\bar{\varepsilon}_{22}^{(n)}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \{P^{(3)}\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \Delta\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} - \Delta\bar{\varepsilon}_{22}^{(n)} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{22}^{(n)} - \Delta\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} \\ 0 \\ 2\Delta\bar{\varepsilon}_{12}^{(n)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \{P^{(4)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{13}^{(n)} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{23}^{(n)} \end{Bmatrix} \tag{2.36}$$

Матричное представление (2.28) ортопроекторов  $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}$  и тензоров  $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha\beta)}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
(\Gamma^{(11)}) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & \\ 0 & & & 0 \end{array} \right), \quad (\Gamma^{(22)}) = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & \\ 0 & & & 0 \end{array} \right) \\
(\Gamma^{(12)}) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \\ \hline & & & \\ 0 & & & 0 \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
(\Gamma^{(3)}) &= \frac{1}{2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & \\ 0 & & 2 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad (\Gamma^{(4)}) = \left( \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Матрица (2.28) компонент нелинейного тензора  $\bar{C}_{ijkl}^{(n)}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
(\bar{C}^{(n)}) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} \bar{C}_{1111}^{(n)} & \bar{C}_{1122}^{(n)} & \bar{C}_{1133}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ & \bar{C}_{1111}^{(n)} & \bar{C}_{1133}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ \text{сим} & & \bar{C}_{3333}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & 2\bar{C}_{1212}^{(n)} & 0 & 0 \\ & \text{сим} & & & 2\bar{C}_{1212}^{(n)} & 0 \\ & & & & & 2\bar{C}_{2323}^{(n)} \end{array} \right), \quad 2\bar{C}_{1212}^{(n)} = \bar{C}_{1111}^{(n)} - \bar{C}_{1122}^{(n)}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

а соотношение (2.29) принимает вид

$$(\bar{C}^{(n)}) = I_{11}^{(n)}(\Gamma^{(11)}) + 2I_{12}^{(n)}(\Gamma^{(12)}) + I_{22}^{(n)}(\Gamma^{(22)}) + I_{33}^{(n)}(\Gamma^{(3)}) + I_{44}^{(n)}(\Gamma^{(4)}) \tag{2.39}$$

Подставляя (2.37) и (2.38) в (2.39), получаем явное выражение для компонент нелинейного тензора  $\bar{C}_{ijkl}^{(n)}$  для трансверсально-изотропных сред

$$\bar{C}_{1111}^{(n)} = \bar{C}_{2222}^{(n)} = \frac{1}{3}(I_{11}^{(n)} + 2I_{22}^{(n)}), \quad \bar{C}_{3333}^{(n)} = I_{11}^{(n)}, \quad \bar{C}_{1133}^{(n)} = \bar{C}_{2233}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}}I_{12}^{(n)}, \tag{2.40}$$

$$2\bar{C}_{1212}^{(n)} = l_{33}^{(n)}, \quad 2\bar{C}_{1313}^{(n)} = 2\bar{C}_{2323}^{(n)} = l_{44}^{(n)}$$

Спектральные инварианты  $Y_\alpha(\varepsilon)$  (2.6) и (2.7) имеют вид

$$Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \Delta\bar{\varepsilon}_{33}^{(n)}, \quad Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \frac{1}{2}(\Delta\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} + \Delta\bar{\varepsilon}_{22}^{(n)}), \quad (2.41)$$

$$Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\Delta\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} - \Delta\bar{\varepsilon}_{22}^{(n)})^2 + 4(\Delta\bar{\varepsilon}_{12}^{(n)})^2}, \quad Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \sqrt{2(\Delta\bar{\varepsilon}_{13}^{(n)2} + \Delta\bar{\varepsilon}_{23}^{(n)2})}$$

и аналогично

$$Y_1(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = \Delta\bar{\sigma}_{33}^{(n)}, \quad Y_1(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = \frac{1}{2}(\Delta\bar{\sigma}_{11}^{(n)} + \Delta\bar{\sigma}_{22}^{(n)}), \quad (2.42)$$

$$Y_3(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\Delta\bar{\sigma}_{11}^{(n)} - \Delta\bar{\sigma}_{22}^{(n)})^2 + 4(\Delta\bar{\sigma}_{12}^{(n)})^2}, \quad Y_4(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = \sqrt{2(\Delta\bar{\sigma}_{13}^{(n)2} + \Delta\bar{\sigma}_{23}^{(n)2})}$$

Укороченное представление определяющих соотношений (2.16) и (2.17) для трансверсально-изотропной функции принимает вид

$$Y_\alpha(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = \sum_{\beta=1}^2 l_{\alpha\beta}^{(n)} Y_\beta(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.43)$$

$$P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = l_{\alpha\alpha}^{(n)} P_{ij}^{(\alpha)}(\bar{\varepsilon}^{(n)}), \quad \alpha = 3, 4. \quad (2.44)$$

Полное спектральное представление (2.19) записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)} = & (l_{11}^{(n)} Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) + l_{12}^{(n)} Y_2(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})) \delta_{i3} \delta_{j3} + \frac{1}{\sqrt{2}} (l_{12}^{(n)} Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) + l_{22}^{(n)} Y_2(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})) (\delta_{i1} \delta_{j1} + \delta_{i2} \delta_{j2}) + \\ & + l_{33}^{(n)} P_{ij}^{(3)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) + l_{44}^{(n)} P_{ij}^{(4)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

В общем нелинейном случае функции  $l_{\alpha\beta}^{(n)}$  - являются функциями от 4 инвариантов

$Y_\alpha(\varepsilon)$

$$l_{\alpha\beta}^{(n)} = l_{\alpha\beta}^{(n)}(Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \dots, Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (2.46)$$

$$l_{\alpha\alpha}^{(n)} = l_{\alpha\alpha}^{(n)}(Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \dots, Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})), \quad \alpha = 3, 4.$$

## 2.2.2 Упрощенная модель трансверсально-изотропной упруго-пластической среды

Функции  $l_{\alpha\beta}^{(n)}$  (2.46) представим в виде следующей модели, обобщающей модель А.А. Ильюшина на случай трансверсальной-изотропии

$$l_{\alpha\alpha}^{(n)} = l_{\alpha\alpha}^0 (1 - \omega_\alpha^{(n)}), \quad l_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}^0, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (2.47)$$

$$l_{\alpha\alpha}^{(n)} = l_{\alpha\alpha}^0 (1 - \omega_\alpha^{(n)}), \quad \alpha = 3, 4 \quad (2.48)$$

Здесь  $l_{\alpha\beta}^0$  - спектральные упругие константы линейно-упругого трансверсально-изотропного тела. Они вычисляются с помощью соотношений (2.40) через тензоры модулей упругости  $C_{ijkl}^0$  - линейно-упругого тела

$$l_{11}^0 = C_{3333}^0, \quad l_{22}^0 = 2(C_{1111}^0 - C_{1212}^0), \quad l_{12}^0 = \sqrt{2}C_{1133}^0, \quad (2.49)$$

$$l_{33}^0 = 2C_{1212}^0, \quad l_{44}^0 = 2C_{1313}^0$$

Для 4-х функций пластичности

$$\omega_\alpha^{(n)} = \omega_\alpha^{(n)}(Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})) \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.50)$$

$$\omega_\beta^{(n)} = \omega_\beta^{(n)}(Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})), \quad \beta = 3, 4$$

выберем в следующем виде, подобном зависимости (2.48), обобщающей модель Мазинга

$$\omega_\alpha^{(n)}(Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})) = \bar{\alpha}_\alpha^{(n)} \omega_\alpha\left(\frac{Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}{\bar{\alpha}_\alpha^{(n)}}\right), \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.51)$$

$$\omega_\beta^{(n)}(Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})) = \bar{\alpha}_\beta^{(n)} \omega_\beta\left(\frac{Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}{\bar{\alpha}_\beta^{(n)}}, \frac{Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}{\bar{\alpha}_\beta^{(n)}}\right) \quad \beta = 2, 3, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

где

$$\omega_\alpha(Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})) = \begin{cases} 0, & \text{если } |Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})| < \varepsilon_{S\alpha} \\ \omega_\alpha^0 \left(1 - \frac{\varepsilon_{S\alpha}}{Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}\right)^{b_\alpha}, & \text{если } |Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})| \geq \varepsilon_{S\alpha} \end{cases} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (2.52)$$

$$\omega_\alpha(Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{Y}_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) < \varepsilon_{S\alpha} \\ \omega_\alpha^0 \left(1 - \frac{\varepsilon_{S\alpha}}{\tilde{Y}_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}\right)^{b_\alpha}, & \text{если } \tilde{Y}_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) \geq \varepsilon_{S\alpha} \end{cases}, \alpha = 3, 4 \quad (2.53)$$

$$\tilde{Y}_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \sqrt{\left(Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})\right)^2 + a_{S3} \left(Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})\right)^2}, \quad \tilde{Y}_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \sqrt{\left(Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})\right)^2 + a_{S4} \left(Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})\right)^2},$$

$$b_3 = b_{30} + b_{31} \left(Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})\right)^2 + b_{32} Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \quad b_4 = b_{40} + b_{41} \left(Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})\right)^2 + b_{42} Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}),$$

Функции  $\bar{\alpha}_\beta^{(n)}$  выбираются в виде

$$\bar{\alpha}_\beta^{(1)} = 1, \quad \bar{\alpha}_\beta^{(n)} = \bar{\alpha}_{\beta 0} (n-1)^{\gamma_\beta}, \quad \beta = 1, \dots, 4, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.54)$$

Модель (2.51)-(2.53) содержит следующие константы

$$\varepsilon_{S\alpha}, \omega_\alpha^0, b_\alpha, \bar{\alpha}_{\alpha 0}, \gamma_\alpha \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.55)$$

$$\varepsilon_{S\alpha}, \omega_\alpha^0, b_{\alpha 0}, b_{\alpha 1}, a_{S\alpha}, \bar{\alpha}_{\alpha 0}, \gamma_\alpha \quad \alpha = 3, 4$$

В этой модели функции пластичности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , описывающие пластические свойства при продольном и поперечном растяжении-сжатии, зависят только от одного соответствующего инварианта  $Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})$  или  $Y_2(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})$ , а функции  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , описывающие пластические свойства при продольных сдвигах, а также при сдвигах и растяжениях-сжатиях в плоскости трансверсальной изотропии, полагаются зависящими только от пары инвариантов  $Y_3(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})$  и  $Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})$ , и не зависят от  $Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})$  и  $Y_2(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})$ .

### 2.2.3 Методика определения констант модели трансверсально-изотропных упруго-пластических композитов

Для определения констант (2.55) рассмотрим следующие 6 траекторий нагружения:

- 1) межслоевой сдвиг,
- 2) сдвиг в плоскости трансверсальной изотропии,

- 3) сдвиг в плоскости трансверсальной изотропии после предварительного межслоевого сдвига,
- 4) межслоевой сдвиг после предварительного сдвига в плоскости трансверсальной изотропии,
- 5) растяжение в продольном направлении.
- 6) растяжение в плоскости трансверсальной изотропии.

Вначале для каждой из этих траекторий рассматривается один цикл нагружения, т.е. только активное нагружение,  $n=1$ . Затем рассматривается многоцикловое нагружение по этим траекториям для определения параметров обобщённой модели Мазинга  $\bar{\alpha}_{\alpha 0}, \gamma_{\alpha}$ .

#### 2.2.4 Межслоевой сдвиг

В этом случае рассматривается задача  $L_{13}$ , в которой для случая одного цикла нагружения  $n=1$

$$\bar{\sigma}_{13} = \dot{\sigma}_{13}t, \text{ остальные } \bar{\sigma}_{ij} = 0, \quad (2.56)$$

В этом случае инварианты (2.42) и девиаторы (2.35) для тензора напряжений имеют вид

$$Y_1(\sigma) = 0, \quad Y_2(\sigma) = 0, \quad Y_3(\sigma) = 0, \quad Y_4(\sigma) = \sqrt{2}|\bar{\sigma}_{13}| \quad (2.57)$$

$$P_{ij}^{(1)}(\sigma) = 0, \quad P_{ij}^{(2)}(\sigma) = 0, \quad P_{ij}^{(3)}(\sigma) = 0, \quad P_{ij}^{(4)}(\sigma) = \bar{\sigma}_{13}(\delta_{i1}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j1}).$$

Тогда из укороченного спектрального представления (2.43), (2.44) получаем, что

$$Y_1(\varepsilon) = Y_2(\varepsilon) = Y_3(\varepsilon) = 0, \quad (2.58)$$

$$P_{ij}^{(1)}(\varepsilon) = P_{ij}^{(2)}(\varepsilon) = P_{ij}^{(3)}(\varepsilon) = 0, \quad P_{ij}^{(4)}(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}_{13}(\delta_{i1}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j1}), \quad (2.59)$$

$$\bar{\sigma}_{13} = l_{44}^{(1)}\bar{\varepsilon}_{13}. \quad (2.60)$$

Из этих соотношений и определения (2.35) девиаторов следует, что

$$\bar{\varepsilon}_{13} \neq 0, \quad \text{остальные } \bar{\varepsilon}_{ij} = 0, \quad (2.61)$$

$$Y_4(\bar{\varepsilon}) = \sqrt{2} |\bar{\varepsilon}_{13}|.$$

Отличное от нуля определяющее соотношение в этом случае одно – это (2.60). Функция  $l_{44}^{(1)}$  в этом соотношении имеет вид (2.57), (2.51), (2.52). Тогда получаем определяющее соотношение композита для данного вида нагружения

$$\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_4(\bar{\varepsilon}_{13}), \quad (2.62)$$

$$\bar{F}_4(\bar{\varepsilon}_{13}) \equiv \begin{cases} 2\bar{G}_{13}\bar{\varepsilon}_{13}, & \text{если } \sqrt{2}|\bar{\varepsilon}_{13}| < \varepsilon_{S4}, \\ 2\bar{G}_{13}\left(1 - \omega_4^0\left(1 - \frac{\varepsilon_{S4}}{\sqrt{2}|\bar{\varepsilon}_{13}|}\right)^{b_{40}}\right)\bar{\varepsilon}_{13}, & \text{если } \sqrt{2}|\bar{\varepsilon}_{13}| \geq \varepsilon_{S4}. \end{cases} \quad (2.63)$$

Построим диаграмму деформирования  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_4^{(3)}(\bar{\varepsilon}_{13})$  при межслойном сдвиге композита, полученную прямым численным решением локальной задачи на ЯП  $L_{13}$ . Тогда, сравнивая эту кривую  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_4^{(3)}(\bar{\varepsilon}_{13})$  с аппроксимационной функцией (2.62), находим все константы  $\bar{G}_{13}$ ,  $\varepsilon_{S40}$ ,  $\omega_4^0$ ,  $b_{40}$  из условия минимизации относительного отклонения этих кривых

$$\sum \left(1 - \frac{\bar{F}_4(\bar{\varepsilon}_{13})}{\bar{F}_4^{(3)}(\bar{\varepsilon}_{13})}\right)^2 \rightarrow \min. \quad (2.64)$$

## 2.2.5 Сдвиг в плоскости трансверсальной изотропии

В этом случае рассматривается задача  $L_{12}$ , в которой

$$\bar{\sigma}_{12} = \dot{\sigma}_{12}t, \quad \text{остальные } \bar{\sigma}_{ij} = 0. \quad (2.65)$$

Инварианты (2.42) и девиаторы (2.32) тензора напряжений имеют вид

$$Y_1(\sigma) = Y_2(\sigma) = Y_4(\sigma) = 0, \quad Y_3(\bar{\sigma}) = \sqrt{2} |\bar{\sigma}_{12}|, \quad (2.66)$$

$$P_{ij}^{(1)}(\sigma) = P_{ij}^{(2)}(\sigma) = P_{ij}^{(4)}(\sigma) = 0, \quad P_{ij}^{(3)}(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}_{12}(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}).$$

Тогда из укороченного спектрального представления (2.43) получаем, что

$$Y_1(\varepsilon) = Y_2(\varepsilon) = Y_3(\varepsilon) = 0, \quad (2.67)$$

$$P_{ij}^{(1)}(\varepsilon) = P_{ij}^{(2)}(\varepsilon) = P_{ij}^{(4)}(\varepsilon) = 0, \quad P_{ij}^{(3)}(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}_{12}(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}) \quad (2.68)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = l_{33}^{(1)}\bar{\varepsilon}_{12}. \quad (2.69)$$

Из этих соотношений и определения (2.35) девиаторов, следует, что

$$\bar{\varepsilon}_{12} \neq 0, \quad \text{остальные } \bar{\varepsilon}_{ij} = 0, \quad (2.70)$$

$$Y_3(\varepsilon) = \sqrt{2}|\bar{\varepsilon}_{12}|.$$

Отличное от нуля определяющее соотношение в этом случае одно – это (2.69).

Функция  $l_{33}^{(1)}$  в этом соотношении имеет вид (2.48) и (2.53). Тогда получаем определяющее соотношение композита для данного вида нагружения

$$\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_3(\bar{\varepsilon}_{12}), \quad (2.71)$$

$$\bar{F}_3(\bar{\varepsilon}_{12}) \equiv \begin{cases} 2\bar{G}_{12}\bar{\varepsilon}_{12}, & \text{если } \sqrt{2}|\bar{\varepsilon}_{12}| < \varepsilon_{S3}, \\ 2\bar{G}_{12}(1 - \omega_3^0(1 - \frac{\varepsilon_{S3}}{\sqrt{2}|\bar{\varepsilon}_{12}|})^{b_{30}})\varepsilon_{12}, & \text{если } \sqrt{2}|\bar{\varepsilon}_{12}| \geq \varepsilon_{S3}. \end{cases} \quad (2.72)$$

Пусть имеется кривая деформирования  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_3^{(9)}(\bar{\varepsilon}_{12})$  при сдвиге в плоскости трансверсальной изотропии, полученная прямым численным решением локальной задачи  $L_{12}$ . Тогда из сравнения этой кривой  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_3^{(9)}(\bar{\varepsilon}_{12})$  с функцией (2.71) находим константы

$$\bar{G}_{12}, \varepsilon_{S3}, \omega_3^0, b_{30} \quad (2.73)$$

из условия из условия минимизации относительного отклонения этих кривых.

### 2.2.6 Сдвиг в плоскости трансверсальной изотропии после предварительного межслоевого сдвига

Рассмотрим нагружение по ломанной линии: вначале до момента времени  $t_1$  осуществляется нагружение в плоскости межслоевого сдвига, а затем достигнутое напряжение сдвига фиксируется  $\sigma_{13\max}$  и к нему добавляется сдвиг в плоскости трансверсальной изотропии:

$$0 \leq t \leq t_1 : \quad \bar{\sigma}_{13} = \dot{\sigma}_{13} t, \quad \text{остальные } \bar{\sigma}_{ij} = 0, \quad (2.74)$$

$$t_1 \leq t \leq t_{\max} : \quad \bar{\sigma}_{13} = \sigma_{13\max} = \dot{\sigma}_{13} t_1, \quad \bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33} = \bar{\sigma}_{23} = 0, \quad (2.75)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = \dot{\sigma}_{12} (t - t_1),$$

Тогда, согласно формулам (2.62) и (2.61), получаем

$$0 \leq t \leq t_1 : \quad \bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_4(\bar{\varepsilon}_{13}), \quad (2.76)$$

$$t_1 \leq t \leq t_{\max} \quad \bar{\sigma}_{12} = \tilde{F}_3(\varepsilon_{13\max}, \bar{\varepsilon}_{12}),$$

$$\tilde{F}_3(\varepsilon_{13\max}, \bar{\varepsilon}_{12}) \equiv \begin{cases} 2\bar{G}_{12}\bar{\varepsilon}_{12}, & \text{если } \tilde{Y}_3(\varepsilon) < \varepsilon_{S3} \\ 2\bar{G}_{12}(1 - \omega_3^0(1 - \frac{\varepsilon_{S3}}{\tilde{Y}_3(\varepsilon)})^{b_3})\varepsilon_{12}, & \text{если } \tilde{Y}_3(\varepsilon) > \varepsilon_{S3} \end{cases} \quad (2.77)$$

Здесь учтено, что при данном нагружении

$$\tilde{Y}_3(\varepsilon) = \sqrt{2(\bar{\varepsilon}_{12})^2 + 2a_{S3}(\varepsilon_{13\max})^2}, \quad (2.78)$$

$$b_3 = b_{30} + 2b_{31}\varepsilon_{13\max}^2 + \sqrt{2}b_{32}|\varepsilon_{13\max}|.$$

Максимальная деформация сдвига  $\varepsilon_{13\max}$  вычисляется по заданному максимальному напряжению сдвига  $\sigma_{13\max}$  из уравнения

$$\sigma_{13\max} = \bar{F}_4(\varepsilon_{13\max}). \quad (2.79)$$

Пусть имеется кривая деформирования  $\bar{\sigma}_{12} = F_3^{(3)}(\varepsilon_{13\max}, \bar{\varepsilon}_{12})$ , полученная прямым численным решением локальных задач на ЯП  $L_{13}$  при сдвиге в плоскости трансверсальной изотропии, после предварительного чистого сдвига до значения  $\varepsilon_{13\max}$ . Тогда из условия минимального отклонения функций  $\bar{\sigma}_{12} = F_3^{(3)}(\varepsilon_{13\max}, \bar{\varepsilon}_{12})$  и  $\bar{\sigma}_{12} = \tilde{F}_3(\varepsilon_{13\max}, \bar{\varepsilon}_{12})$  находим константы

$$a_{S3}, b_{31}, b_{32}. \quad (2.80)$$

### 2.2.7 Межслоевой сдвиг после предварительного сдвига в плоскости трансверсальной изотропии

Рассмотрим нагружение по ломанной линии в другом порядке: вначале до момента времени  $t_1$  осуществляется нагружение в плоскости трансверсальной изотропии, а затем достигнутое напряжение сдвига фиксируется  $\sigma_{13\max}$  и к нему добавляется межслойный сдвига

$$0 \leq t \leq t_1 : \quad \bar{\sigma}_{12} = \dot{\sigma}_{12}t, \quad \text{остальные } \bar{\sigma}_{ij} = 0, \quad (2.81)$$

$$t_1 \leq t \leq t_{\max} : \quad \bar{\sigma}_{12} = \sigma_{12\max} = \dot{\sigma}_{12}t_1, \quad \bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33} = \bar{\sigma}_{23} = 0, \quad (2.82)$$

$$\bar{\sigma}_{13} = \dot{\sigma}_{13}(t - t_1),$$

Тогда, согласно формулам (2.62) и (2.71), получаем

$$0 \leq t \leq t_1 : \quad \bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_3(\bar{\varepsilon}_{12}), \quad (2.83)$$

$$t_1 \leq t \leq t_{\max} \quad \bar{\sigma}_{13} = \tilde{F}_4(\varepsilon_{12\max}, \bar{\varepsilon}_{13}),$$

$$\tilde{F}_4(\varepsilon_{12\max}, \bar{\varepsilon}_{13}) \equiv \begin{cases} 2\bar{G}_{13}\bar{\varepsilon}_{13}, & \text{если } \tilde{Y}_4(\varepsilon) < \varepsilon_{S4} \\ 2\bar{G}_{13}(1 - \omega_4^0(1 - \frac{\varepsilon_{S4}}{\tilde{Y}_4(\varepsilon)})^{b_4})\bar{\varepsilon}_{13}, & \text{если } \tilde{Y}_4(\varepsilon) > \varepsilon_{S4} \end{cases} \quad (2.84)$$

Здесь учтено, что при данном нагружении

$$\tilde{Y}_4(\varepsilon) = \sqrt{2(\bar{\varepsilon}_{13})^2 + 2a_{S4}(\varepsilon_{12\max})^{q_4}}, \quad (2.85)$$

$$b_4 = b_{40} + 2b_{41}\varepsilon_{12\max}^2 + \sqrt{2}b_{42}|\varepsilon_{12\max}|.$$

Максимальная деформация сдвига  $\varepsilon_{12\max}$  вычисляется по заданному максимальному напряжению сдвига  $\sigma_{12\max}$  из уравнения

$$\sigma_{12\max} = \bar{F}_3(\varepsilon_{12\max}). \quad (2.86)$$

Пусть имеется э кривая деформирования  $\bar{\sigma}_{13} = F_4^{(3)}(\varepsilon_{12\max}, \bar{\varepsilon}_{13})$ , полученная прямым численным решением локальных задач на ЯП  $L_{13}$  при межслойном сдвиге после предварительного сдвига в плоскости трансверсальной изотропии до

значения  $\varepsilon_{12\max}$ . Тогда из условия минимального отклонения функций  $\bar{\sigma}_{13} = F_4^{(3)}(\varepsilon_{12\max}, \bar{\varepsilon}_{13})$  и  $\bar{\sigma}_{13} = \tilde{F}_4(\varepsilon_{12\max}, \bar{\varepsilon}_{13})$  находим константы

$$a_{s4}, b_{41}, b_{42}. \quad (2.87)$$

### 2.2.8 Растяжение в продольном направлении

В этом случае рассматривается задача  $L_{33}$ , в которой

$$\bar{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}_{33}t, \text{ остальные } \bar{\varepsilon}_{ij} = 0. \quad (2.88)$$

В этом случае инварианты (2.41) и девиаторы (2.35) имеют вид

$$Y_1(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}_{33}, \quad Y_2(\varepsilon) = Y_3(\varepsilon) = Y_4(\varepsilon) = 0, \quad (2.89)$$

$$P_{ij}^{(1)}(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}_{33}\delta_{i3}\delta_{j3}, \quad P_{ij}^{(2)}(\varepsilon) = P_{ij}^{(3)}(\varepsilon) = P_{ij}^{(4)}(\varepsilon) = 0,$$

Тогда из укороченного спектрального представления (2.43),(2.44) получаем, что

$$Y_3(\sigma) = 0, \quad Y_4(\sigma) = 0 \quad (2.90)$$

$$P_{ij}^{(1)}(\sigma) = \bar{\sigma}_{33}\delta_{i3}\delta_{j3}, \quad P_{ij}^{(2)}(\sigma) \neq 0, \quad P_{ij}^{(3)}(\sigma) = 0, \quad P_{ij}^{(4)}(\sigma) = 0 \quad (2.91)$$

$$\bar{\sigma}_{33} = l_{11}^{(1)}\bar{\varepsilon}_{33}, \quad Y_2(\sigma) = l_{12}^{(1)}\bar{\varepsilon}_{33}. \quad (2.92)$$

Из этих соотношений и определения (2.35) девиаторов тензора напряжений следует, что

$$\bar{\sigma}_{33} \neq 0, \quad \bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} \neq 0, \quad \text{остальные } \bar{\sigma}_{ij} = 0.$$

Отличных от нуля определяющих соотношения в этом случае два – это (2.92). С учетом (2.47) и (2.52) для функции  $l_{11}^{(1)}$  получаем определяющее соотношение композита для данного вида нагружения

$$\bar{\sigma}_{33} = \bar{F}_1(\bar{\varepsilon}_{33}), \quad (2.93)$$

$$\bar{F}_1(\bar{\varepsilon}_{33}) \equiv \begin{cases} l_{11}^0 \bar{\varepsilon}_{33}, & \text{если } |\bar{\varepsilon}_{33}| < \varepsilon_{s1} \\ l_{11}^0 (1 - \omega_1^0 (1 - \frac{\varepsilon_{s1}}{|\bar{\varepsilon}_{33}|})^{b_1}) \bar{\varepsilon}_{33}, & \text{если } |\bar{\varepsilon}_{33}| \geq \varepsilon_{s1} \end{cases} \quad (2.94)$$

Построим экспериментальную диаграмму деформирования  $\bar{\sigma}_{33} = F_1^{(3)}(\bar{\varepsilon}_{33})$  при продольном растяжении, полученную прямым численным решением локальной задачи  $L_{33}$ . Тогда из условия минимизации относительного отклонения функций  $\bar{\sigma}_{33} = F_1^{(3)}(\bar{\varepsilon}_{33})$  и  $\bar{\sigma}_{33} = F_1(\bar{\varepsilon}_{33})$  находим константы  $l_{11}^0$ ,  $\varepsilon_{s1}$ ,  $\omega_1^0$ ,  $b_1$ .

### 2.2.9 Растяжение в плоскости трансверсальной изотропии

В этом случае рассматриваются задачи  $L_{11}$  и  $L_{22}$ , в которой

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = \sigma_0 \equiv \dot{\sigma}_0 t, \quad \text{остальные } \bar{\sigma}_{ij} = 0. \quad (2.95)$$

В этом случае из (2.42) и (2.32) для напряжений имеем

$$Y_2(\sigma) = \sqrt{2}\sigma_0, \quad Y_1(\sigma) = Y_3(\sigma) = Y_4(\sigma) = 0, \quad (2.96)$$

$$P_{ij}^{(1)}(\sigma) = 0, \quad P_{ij}^{(2)}(\sigma) = \sigma_0(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}), \quad P_{ij}^{(3)}(\sigma) = P_{ij}^{(4)}(\sigma) = 0.$$

Тогда из (2.43), (2.44) получаем, что

$$Y_3(\varepsilon) = Y_4(\varepsilon) = 0, \quad P_{ij}^{(3)}(\varepsilon) = P_{ij}^{(4)}(\varepsilon) = 0, \quad (2.97)$$

$$0 = l_{11}^{(1)}Y_1(\varepsilon) + l_{12}^0Y_2(\varepsilon), \quad \sqrt{2}\sigma_0 = l_{12}^0Y_1(\varepsilon) + l_{22}^{(1)}Y_2(\varepsilon) \quad (2.98)$$

Из этих соотношений и определения (2.35) девиаторов следует, что

$$\varepsilon_{33} \neq 0, \quad \bar{\varepsilon}_{11} = \bar{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_0 \neq 0 \quad \text{остальные } \varepsilon_{ij} = 0, \quad (2.99)$$

$$Y_1(\varepsilon) = -\frac{l_{12}^0}{l_{11}^{(1)}}Y_2(\varepsilon), \quad Y_2(\varepsilon) = \sqrt{2}\varepsilon_0. \quad (2.100)$$

Из второго соотношения (2.98) и (2.100), получаем определяющее соотношение композита для данного вида нагружения

$$\sigma_0 = \tilde{l}_{22}\varepsilon_0, \quad \tilde{l}_{22} \equiv l_{22}^{(1)} - \frac{(l_{12}^0)^2}{l_{11}^{(1)}}, \quad (2.101)$$

здесь  $l_{22}^{(1)}$  - зависит от  $\varepsilon_0$  согласно (2.47) и (2.52), а  $l_{11}^{(1)}$  - от  $\sigma_0$  и  $\varepsilon_0$ . Разрешим это уравнение (2.101) относительно  $\sigma_0$ :  $\sigma_0 = F_2(\varepsilon_0)$  и построим диаграмму

деформирования  $\sigma_0 = F_2^{(3)}(\varepsilon_0)$  при продольном растяжении, полученную прямым численным решением локальных задач  $L_{11}$  и  $L_{22}$ . Тогда из условия минимизации относительного отклонения функций  $\sigma_0 = F_2^{(3)}(\varepsilon_0)$  и  $\sigma_0 = F_2(\varepsilon_0)$  находим константы  $l_{22}^0, \varepsilon_{S2}, \omega_2^0, b_2$ .

### 2.2.10 Результаты расчетов по определению констант модели трансверсально-изотропного упруго-пластического 1D КМ

В качестве примера применения разработанной модели был рассмотрен однонаправленно-армированный (1D) композиционный материал на основе алюминиевой матрицы и углеродных волокон (рис.9). Матрица считалась упруго-пластической, а волокна – чисто упругими. Для матрицы были приняты следующие константы модели деформационной теории пластичности (1.25)

$$E_m = 70 \text{ ГПа}, \nu_m = 0.35, \varepsilon_{Sm} = 0.0042, \omega_m^0 = 0.96, b_m = 2.34. \quad (2.102)$$

Волокна полагались чисто упругими, изотропными, характеристики волокон были выбраны следующими

$$E_f = 350 \text{ ГПа}, \nu_f = 0.2. \quad (2.103)$$

Концентрация волокон в 1D композите составляла 70%.

С помощью решения локальных задач  $L_{pq}$  были получены значения эффективных упругих характеристики 1D композита, которые приведены в разделе 1.4.2 (см. (1.90))

На рисунке 2.1 показаны диаграммы деформирования композита для траекторий нагружения 1) и 2), представленные в виде зависимостей инвариантов  $Y_4(\sigma) = F_4(Y_4(\varepsilon))$  и  $Y_3(\sigma) = F_3(Y_3(\varepsilon))$  Одна из диаграмм на этих рисунках получена прямым решением соответствующей задачи  $L_{pq}$ , а вторая – путем аппроксимации

этой кривой с помощью разработанной модели упруго-пластического композита по формулам (40) и (49). В результате аппроксимации диаграмм деформирования были получены следующие значения констант модели

$$\varepsilon_{S40} = 0.0008717, \quad \omega_4^0 = 0.9097, \quad b_{40} = 3.878, \quad (2.104)$$

$$\varepsilon_{S30} = 0.0010966, \quad \omega_3^0 = 0.659, \quad b_3 = 4.957.$$

Относительная ошибка аппроксимации диаграмм деформирования при таких значениях констант составляет 0,45% и 0,32%, соответственно.

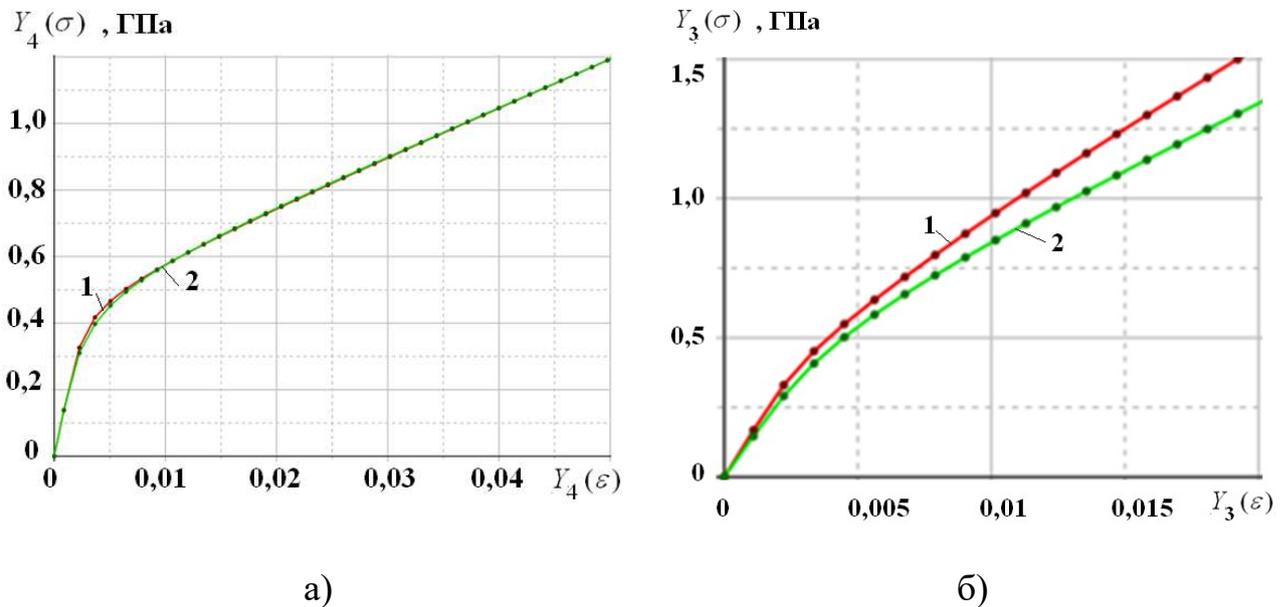


Рисунок 2.1 Диаграммы деформирования  $Y_4(\sigma) = F_4(Y_4(\varepsilon))$  и  $Y_3(\sigma) = F_3(Y_3(\varepsilon))$  для 1D КМ, полученные для траекторий нагружения 1) и 2) с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  (кривая 1) и аппроксимации по формулам (40) и (49) (кривая 2)

На рисунке 2.2 показаны диаграммы деформирования 1D композита по траектории нагружения 3), представленные в виде зависимости инвариантов  $Y_3(\sigma) = F_3(Y_3(\varepsilon), Y_{4\max}(\varepsilon))$  при различных фиксированных значениях инварианта  $Y_{4\max}(\varepsilon)$ , достигнутых на первом участке траектории 3). Для каждой из таких диаграмм строилась аппроксимация с помощью соотношения (55) с различными

значениями параметра  $b_2$ . В результате была построена функция зависимости  $b_2(Y_{4\max}(\varepsilon))$ , где  $Y_{4\max}(\varepsilon) = \sqrt{2}|\varepsilon_{13\max}|$ . График этой функции показан на рисунке 2.2 б. Для аналитической аппроксимации этой функции применялась модель (56). При аппроксимации были получены следующие значения констант модели

$$a_{s3} = 1.5827, \quad b_{31} = 227.65, \quad b_{32} = -13.633 \quad (2.105)$$

Относительная ошибка аппроксимации функции  $b_3 = f(Y_{4\max}(\varepsilon))$  при этих константах - 0.469%.

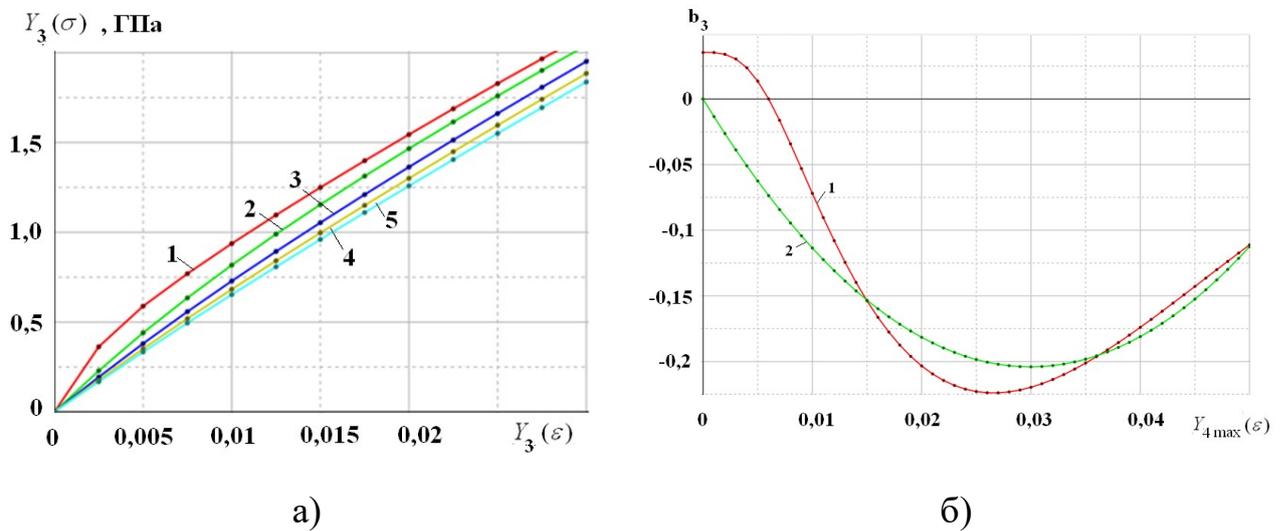


Рисунок 2.2 а) Диаграммы деформирования  $Y_3(\sigma) = F_3(Y_3(\varepsilon), Y_{4\max}(\varepsilon))$  для 1D КМ, полученные по траекториям 3) с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  при различных значениях  $Y_{4\max}(\varepsilon)$ : 0 (1); 0.01 (2); 0.02 (3); 0.03 (4); 0.04 (5)

б) зависимости параметра  $b_3$  от  $Y_{4\max}(\varepsilon)$ , полученные прямым решением задач  $L_{pq}$  (кривая 1) и с помощью аппроксимации (56) (кривая 2)

На рисунке 2.3 а) показаны диаграммы деформирования композита при траектории нагружения 4), представленные в виде зависимостей инвариантов  $Y_4(\sigma) = F_4(Y_4(\varepsilon), Y_{3\max}(\varepsilon))$  при различных фиксированных значениях инварианта  $Y_{3\max}(\varepsilon) = \sqrt{2}|\varepsilon_{12\max}|$ , достигнутых на первом участке траектории 4), соответственно. Для каждой из таких диаграмм строилась аппроксимация с помощью соотношения

(63) с различными значениями параметра  $b_4$ . В результате была построена функция зависимости  $b_4(Y_{3\max}(\varepsilon))$  и найдены константы аппроксимации  $b_{41}, b_{42}$ . График этой функции показан на рисунке 2.3 б). При аппроксимации были получены следующие значения констант модели

$$a_{s4} = 0.6318, \quad b_{41} = 127.62, \quad b_{42} = -7.75581 \quad (2.106)$$

Относительная ошибка аппроксимации функции  $b_4 = f(Y_{3\max}(\varepsilon))$  при этих константах составляет 0.0903%.

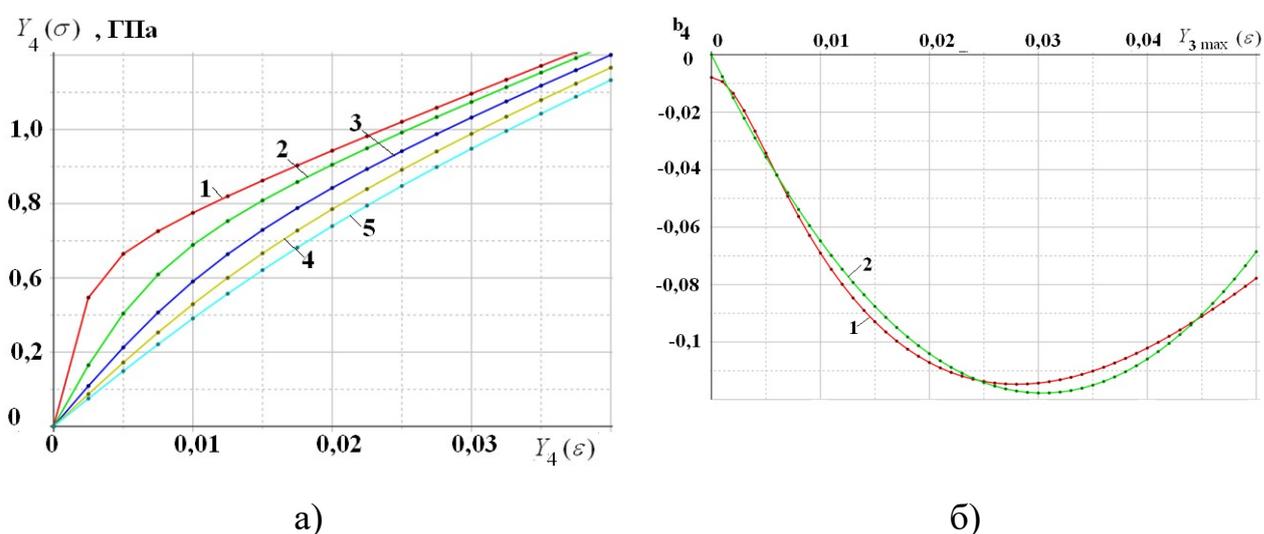


Рисунок 2.3 Диаграммы деформирования  $Y_4(\sigma) = F_4(Y_4(\varepsilon), Y_{3\max}(\varepsilon))$  (а) для 1D КМ, полученные по траекториям 4) с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  при различных значениях  $Y_{3\max}(\varepsilon)$ : 0 (1); 0.01 (2); 0.02 (3); 0.03 (4); 0.04 (5), и зависимости параметра  $b_4$  от  $Y_{3\max}(\varepsilon)$  (б), полученные прямым решением задач  $L_{pq}$  (кривая 1) и с помощью аппроксимации (63) (кривая 2)

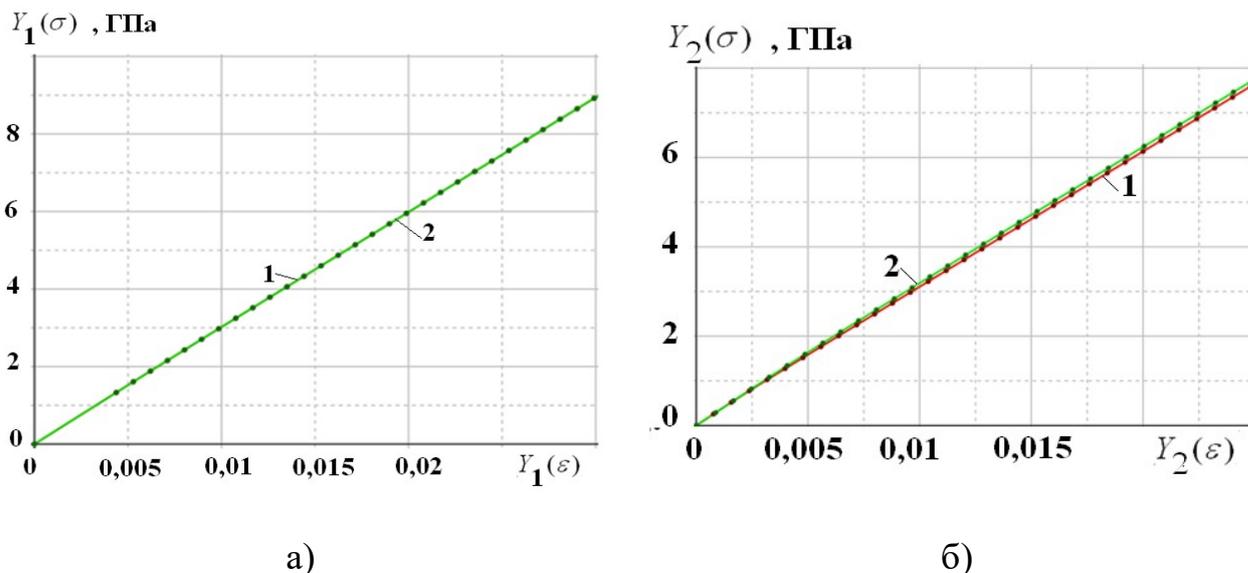


Рисунок 2.4 Диаграммы деформирования  $Y_1(\sigma) = \bar{F}_3(Y_1(\varepsilon))$  (а) и  $Y_2(\sigma) = \bar{F}_2(Y_2(\varepsilon))$  (б) для 1D КМ, полученные по траекториям 5) и 6) с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  (кривые 1) и аппроксимации по формулам (71) и (79) (кривые 2)

Поскольку наполнитель композита является упругим, а матрица – не обладает пластичностью при объемном сжатии, то композит также не проявляет значительных пластических свойств при растяжении в продольном и поперечном по направлениях, поэтому диаграммы  $Y_1(\sigma) = \bar{F}_3(Y_1(\varepsilon))$  (а) и  $Y_2(\sigma) = \bar{F}_2(Y_2(\varepsilon))$  (рис.2.4), полученные для траекторий 5) и 6) близки к линейным до больших значений напряжений (рис.2.4). При этом были получены следующие значения констант модели

$$\varepsilon_{s10} = 0.004372, \quad \omega_1^0 = 0.0295, \quad b_{10} = 2.4179, \quad (2.107)$$

$$\varepsilon_{s20} = 0.001644, \quad \omega_2^0 = 0.0921, \quad b_{20} = 4.3121.$$

Относительная ошибка аппроксимации диаграмм деформирования составляла 0.00097% и 0.0055%, соответственно.

### 2.2.11 Расчеты по верификации модели 1D КМ на путях нагружения, не входящих в базу для определения констант модели

Далее были проведены проверочные расчёты по различным траекториям нагружения (33), которые не использовались в алгоритме определения констант модели. Эти траектории представляли собой лучи в 6-мерном пространстве напряжений и задавались столбцом значений  $\{\dot{\sigma}\} = \{\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{33}, \dot{\sigma}_{12}, \dot{\sigma}_{13}, \dot{\sigma}_{23}\}$  тензора  $\dot{\sigma}_{ij}$ .

На рисунке 2.5 показаны диаграммы деформирования  $Y_3(\sigma) = F_3(Y_3(\varepsilon))$  и  $Y_4(\sigma) = F_4(Y_4(\varepsilon))$ , полученные прямым решением задач  $L_{pq}$  и с помощью микроструктурной модели, для траектории нагружения  $\{\dot{\sigma}\} = \{0, 1, -1, 1, 0, 1\}$ , составленной из 3-х видов нагружения: растяжения –сжатия в плоскости трансверсально изотропии с нулевым 2-м инвариантом  $Y_2(\sigma) = 0$ , сдвига в плоскости трансверсальной изотропии и межслойного сдвига. Относительная ошибка, которая получается при использовании микроструктурной модели, составляет 11.62% - для диаграммы  $Y_3(\sigma) = F_3(Y_3(\varepsilon))$  и 0.952% - для диаграммы  $Y_4(\sigma) = F_4(Y_4(\varepsilon))$ .

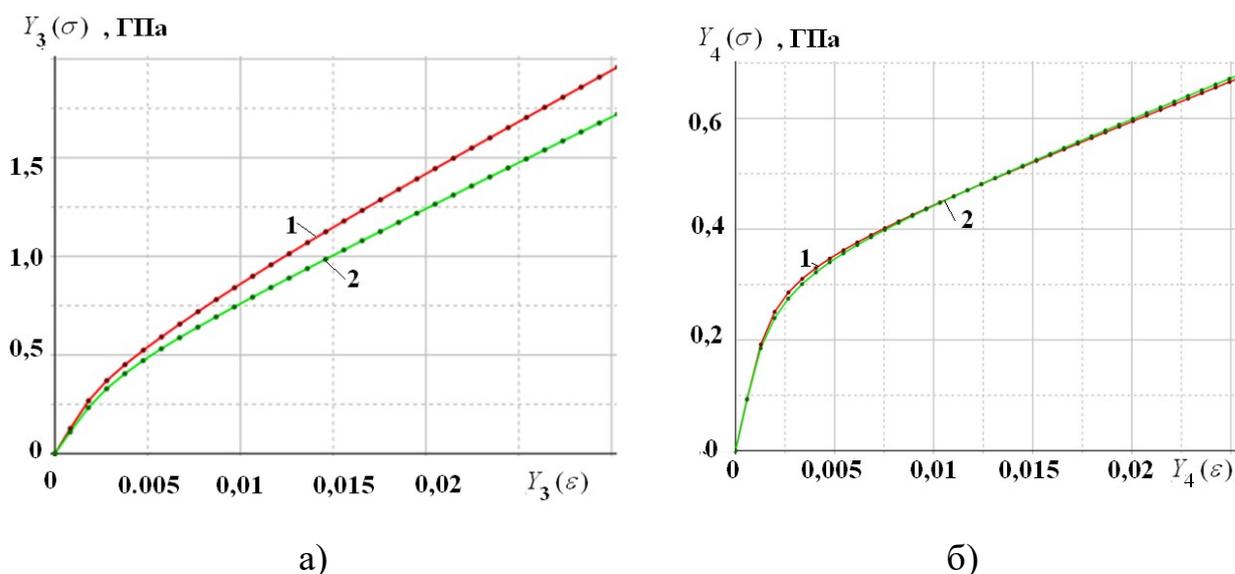


Рисунок 2.5 Диаграммы деформирования  $Y_3(\sigma) = F_3(Y_3(\varepsilon))$  (а) и  $Y_4(\sigma) = F_4(Y_4(\varepsilon))$  (б) для 1D КМ, полученные по траектории  $\{\dot{\sigma}\} = \{0, 1, -1, 1, 0, 1\}$  с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  (кривые 1) и с помощью микроструктурной модели (кривые 2)

На рисунке 2.6 показаны диаграммы деформирования  $Y_1(\sigma) = F_1(Y_1(\varepsilon))$  и  $Y_3(\sigma) = F_3(Y_3(\varepsilon))$ , полученные прямым решением задач  $L_{pq}$  и с помощью микроструктурной модели, для траектории нагружения  $\{\dot{\sigma}\} = \{1, 1, -1, 0, 0, 1\}$ . Эта траектория представляет собой комбинацию 3-х видов нагружения: растяжения в продольном направлении, растяжения-сжатия в плоскости трансверсально изотропии с нулевым 2-м инвариантом  $Y_2(\sigma) = 0$  и межслойного сдвига. Относительная ошибка, которая получается при использовании микроструктурной модели, составляет 1.328% - для первой из указанных диаграмм деформирования, и 11,723% - для второй диаграммы деформирования.

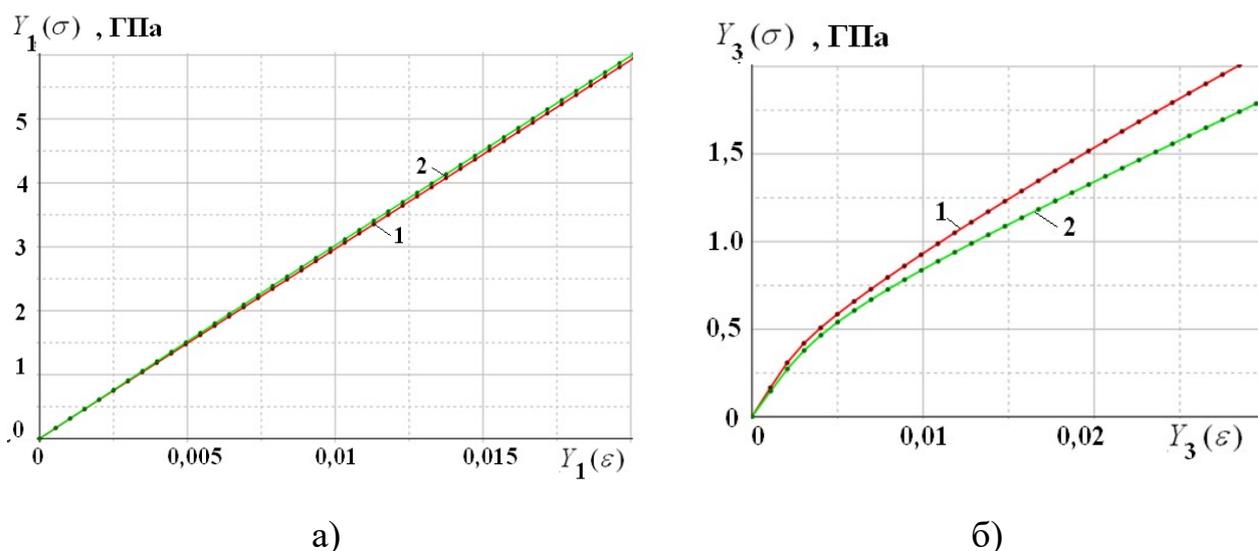


Рисунок 2.6 Диаграммы деформирования  $Y_1(\sigma) = F_1(Y_1(\varepsilon))$  (а) и  $Y_3(\sigma) = F_3(Y_3(\varepsilon))$  (б) для 1D КМ, полученные по траектории  $\{\dot{\sigma}\} = \{1, 1, -1, 0, 0, 1\}$  с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  (кривые 1) и с помощью микроструктурной модели (кривые 2)

### 2.2.12 Результаты определения констант модели 1D КМ при циклическом нагружении

Для определения констант  $\bar{\alpha}_{\alpha 0}, \gamma_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, \dots, 4$  модели упруго-пластического трансверсально-изотропного КМ рассматриваются траектории 1) 2), 5) и 6), указанные в 2.3.3, для случая циклического симметричного нагружения. Для этих траекторий проводится прямое численное моделирование с помощью решения задач  $L_{pq}$  и аппроксимация полученных диаграмм циклического деформирования с помощью упрощенной модели, представленной в п.2.3.2. Из условия наилучшего совпадения диаграмм находятся 4 группы констант  $\bar{\alpha}_{\alpha 0}, \gamma_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, \dots, 4$ .

#### 1) Циклический межслойный сдвиг.

В этом случае, с учетом результатов раздела 2.3.4, из формулы (2.62) для 1-го цикла нагружения получаем следующее соотношения для диаграмм деформирования на  $n$ -м промежутке нагружения

$$\Delta \bar{\sigma}_{13}^{(n)} = \bar{\alpha}_4^{(n)} \bar{F}_4 \left( \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{13}^{(n)}}{\bar{\alpha}_4^{(n)}} \right), \quad (2.108)$$

$$\bar{\alpha}_4^{(n)} = \bar{\alpha}_{40} (n-1)^{\gamma_4}.$$

Единая кривая деформирования для всех промежутков нагружения строится по формуле (1.12) с использованием (2.108), в результате получаем зависимость  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_4^{(n)}(\bar{\varepsilon}_{13})$ , меняющуюся на каждом n-ом промежутке нагружения.

На рисунке 2.7 показаны кривые циклического деформирования 1D КМ при межслойном сдвиге, полученные прямым решением задач  $L_{13}$  и с помощью упрощенной модели трансверсально-изотропного упруго-пластического КМ, построенной из условия наилучшей аппроксимации. Точность аппроксимации достаточно высокая, суммарная относительная ошибка – 1,5%. Получены следующие значения констант

$$\bar{\alpha}_{40} = 2,02 \quad \gamma_4 = 0.03 \quad (2.109)$$

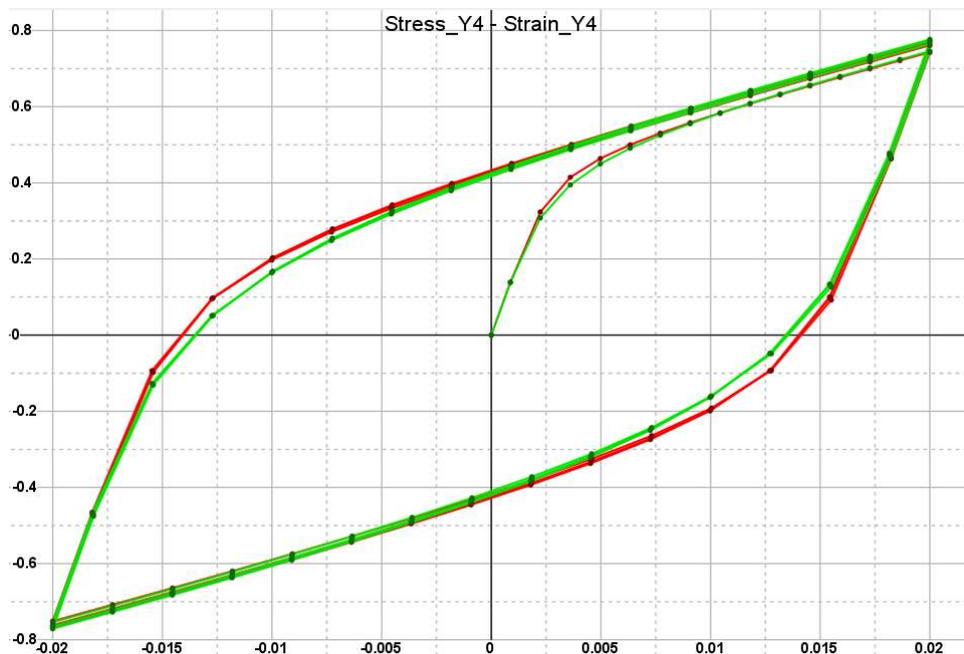


Рисунок 2.7 Циклические диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_4^{(n)}(\bar{\varepsilon}_{13})$  при межслойном сдвиге для 1D КМ, полученные с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  (кривые 1) и с помощью аппроксимации упрощенной моделью трансверсально-изотропного упруго-пластического КМ (кривые 2)

## 2) Сдвиг в плоскости трансверсальной изотропии

В этом случае, с учетом результатов раздела 2.3.5, из формулы (2.71) для 1-го цикла нагружения получаем следующее соотношения для диаграмм деформирования на n-м промежутке нагружения

$$\Delta \bar{\sigma}_{12}^{(n)} = \bar{\alpha}_3^{(n)} \bar{F}_3 \left( \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{12}^{(n)}}{\bar{\alpha}_3^{(n)}} \right), \quad (2.110)$$

$$\bar{\alpha}_3^{(n)} = \bar{\alpha}_{30} (n-1)^{\gamma_3}.$$

Единая кривая деформирования для всех промежутков нагружения строится по формуле (1.12) с использованием (2.110), в результате получаем зависимость  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_3^{(n)}(\bar{\varepsilon}_{12})$ , меняющуюся на каждом n-ом промежутке нагружения.

На рисунке 2.8 показаны кривые циклического деформирования 1D КМ при сдвиге в плоскости трансверсальной изотропии, полученные прямым решением задач  $L_{12}$  и с помощью упрощенной модели трансверсально-изотропного упруго-пластического КМ, построенной из условия наилучшей аппроксимации. Суммарная относительное отклонение кривых – 1,21%. Получены следующие значения констант

$$\bar{\alpha}_{30} = 2,02 \quad \gamma_3 = 0.03$$

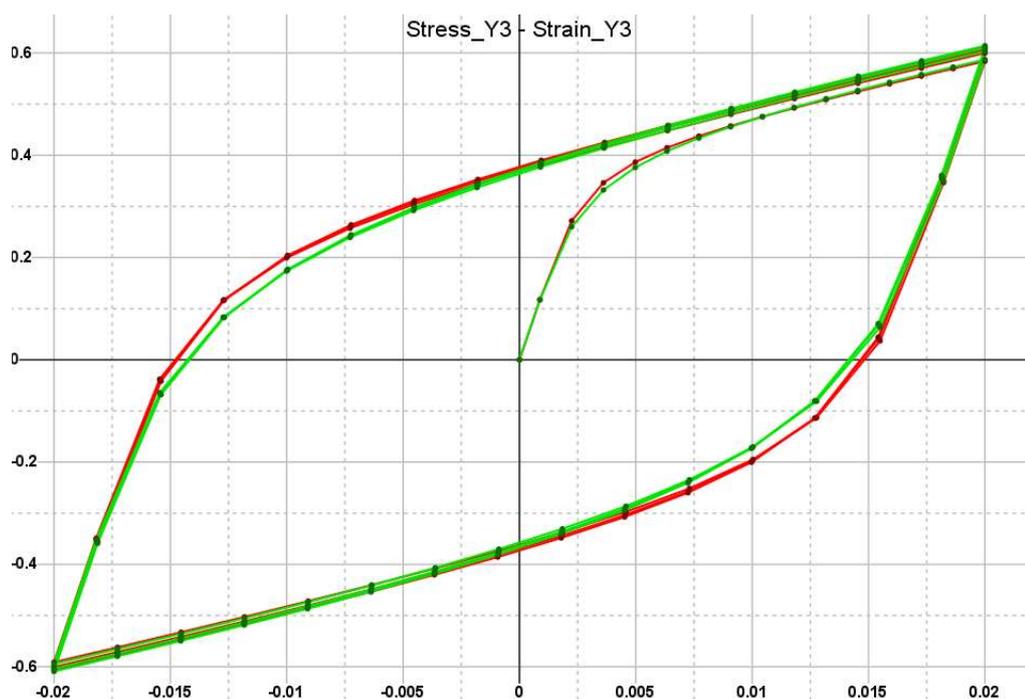


Рисунок 2.8 Циклические диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_3^{(n)}(\bar{\varepsilon}_{12})$  при сдвиге в плоскости трансверсальной изотропии для 1D КМ, полученные с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  (кривые 1) и с помощью аппроксимации упрощенной моделью трансверсально-изотропного упруго-пластического КМ (кривые 2)

### 3) Циклическое растяжение в продольном направлении.

В этом случае, с учетом результатов раздела 2.3.8, из формулы (2.93) для 1-го цикла нагружения получаем следующее соотношения для диаграмм деформирования на  $n$ -м промежутке нагружения

$$\Delta \bar{\sigma}_{33}^{(n)} = \bar{\alpha}_1^{(n)} \bar{F}_1 \left( \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{33}^{(n)}}{\bar{\alpha}_1^{(n)}} \right), \quad (2.111)$$

$$\bar{\alpha}_1^{(n)} = \bar{\alpha}_{10} (n-1)^{\eta_1}.$$

Единая кривая деформирования для всех промежутков нагружения строится по формуле (1.12), с использованием (2.110), в результате получаем зависимость  $\bar{\sigma}_{33} = \bar{F}_1^{(n)}(\bar{\varepsilon}_{33})$ , меняющуюся на каждом  $n$ -ом промежутке нагружения...

На рисунке 2.9 показаны кривые циклического деформирования 1D КМ при сдвиге в плоскости трансверсальной изотропии, полученные прямым решением задач  $L_{13}$  и с помощью упрощенной модели трансверсально-изотропного упруго-пластического КМ, построенной из условия наилучшей аппроксимации. Суммарная относительное отклонение кривых – 1,21%. Получены следующие значения констант

$$\bar{\alpha}_{30} = 2.02, \quad \gamma_3 = 0.03$$



Рисунок 2.9 Циклические диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_{33} = \bar{F}_1^{(n)}(\bar{\varepsilon}_{33})$  при продольном растяжении для 1D КМ, полученные с помощью прямого решения задачи  $L_{33}$  (кривые 1) и с помощью аппроксимации упрощенной моделью трансверсально-изотропного упруго-пластического КМ (кривые 2)

#### 4) Циклическое растяжение в поперечном направлении.

В этом случае, с учетом результатов раздела 2.3.9, из формулы (2.101) для 1-го цикла нагружения получаем следующее соотношение для диаграмм деформирования на  $n$ -м промежутке нагружения

$$\Delta \bar{\sigma}_{11}^{(n)} = \bar{\alpha}_2^{(n)} \bar{F}_2 \left( \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{11}^{(n)}}{\bar{\alpha}_2^{(n)}} \right), \quad (2.111)$$

$$\bar{\alpha}_2^{(n)} = \bar{\alpha}_{20} (n-1)^{\gamma_2}.$$

Единая кривая деформирования для всех промежутков нагружения строится по формуле (1.12), с использованием (2.111), в результате получаем зависимость  $\bar{\sigma}_{11} = \bar{F}_2^{(n)}(\bar{\varepsilon}_{11})$ , меняющуюся на каждом n-ом промежутке нагружения.

На рисунке 2.10 показаны кривые циклического деформирования 1D КМ при сдвиге в плоскости трансверсальной изотропии, полученные прямым решением задач  $L_{11}$  и с помощью упрощенной модели трансверсально-изотропного упруго-пластического КМ, построенной из условия наилучшей аппроксимации. Суммарная относительное отклонение кривых – 1,32%. Получены следующие значения констант

$$\bar{\alpha}_{20} = 2, \quad \gamma_2 = 0.021$$

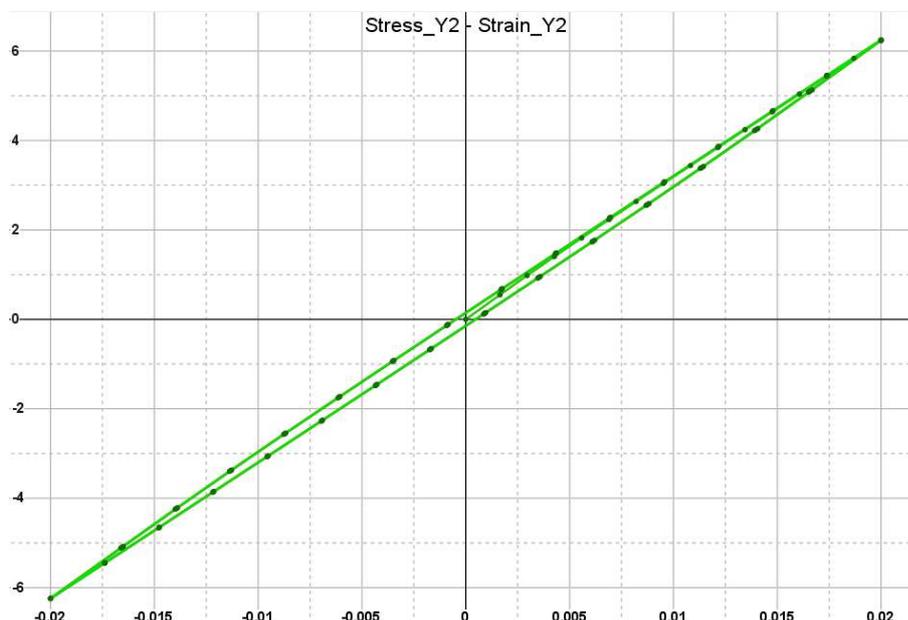


Рисунок 2.10 Циклические диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_{11} = \bar{F}_2^{(n)}(\bar{\varepsilon}_{11})$  при поперечном растяжении для 1D КМ, полученные с помощью прямого решения задачи  $L_{11}$  (кривые 1) и с помощью аппроксимации упрощенной моделью трансверсально-изотропного упруго-пластического КМ (кривые 2)

## 2.3. Микро-структурная модель для ортотропных упруго-пластических композитов

### 2.3.1 Спектральное представление определяющих соотношений для ортотропных упруго-пластических сред

Для ортотропных сред обобщенные девиаторы (2.3) имеют вид [23]

$$P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \Delta\bar{\varepsilon}_{\alpha\alpha}^{(n)} \delta_{\alpha i} \delta_{\alpha j}, \quad \alpha = 1, \dots, 3 \quad (2.112)$$

$$P_{ij}^{(4)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \Delta\bar{\varepsilon}_{12}^{(n)} (\delta_{i1} \delta_{j2} + \delta_{i2} \delta_{j1}), \quad P_{ij}^{(5)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \Delta\bar{\varepsilon}_{13}^{(n)} (\delta_{i1} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j1}),$$

$$P_{ij}^{(6)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \Delta\bar{\varepsilon}_{23}^{(n)} (\delta_{i2} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j2})$$

т.е.

$$z_1 = 3, \quad z = 6.$$

Тензоры  $a_{ij}^{(\alpha)}$  и их инварианты имеют вид

$$a_{ij}^{(\alpha)} = \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, 3 \quad (2.113)$$

$$a_\alpha = 1, \quad .$$

Тензоры-ортопроекторы  $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}$  и тензоры  $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha\beta)}$  имеют вид

$$\Gamma_{ijkl}^{(\alpha\alpha)} = \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha} \delta_{k\alpha} \delta_{l\alpha},$$

$$\Gamma_{ijkl}^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} (\delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha} \delta_{k\beta} \delta_{l\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\beta} \delta_{k\alpha} \delta_{l\alpha}), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 3,$$

$$\Gamma_{ijkl}^{(4)} = \frac{1}{2} (\delta_{i1} \delta_{j2} + \delta_{i2} \delta_{j1}) (\delta_{k1} \delta_{l2} + \delta_{k2} \delta_{l1}), \quad (2.114)$$

$$\Gamma_{ijkl}^{(5)} = \frac{1}{2} (\delta_{i1} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j1}) (\delta_{k1} \delta_{l3} + \delta_{k3} \delta_{l1}),$$

$$\Gamma_{ijkl}^{(6)} = \frac{1}{2} (\delta_{i2} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j2}) (\delta_{k2} \delta_{l3} + \delta_{k3} \delta_{l2}).$$

Матричное представление обобщенных девиаторов  $P_{ij}^{(\alpha)}(\varepsilon)$  имеет вид

$$P_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} \Delta\bar{\varepsilon}_{11}^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\bar{\varepsilon}_{22}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\bar{\varepsilon}_{33}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (2.115)$$

$$P_{ij}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \bar{\varepsilon}_{12}^{(n)} & 0 \\ \Delta \bar{\varepsilon}_{12}^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_{ij}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta \bar{\varepsilon}_{13}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta \bar{\varepsilon}_{13}^{(n)} & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_{ij}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \bar{\varepsilon}_{23}^{(n)} \\ 0 & \Delta \bar{\varepsilon}_{23}^{(n)} & 0 \end{pmatrix}$$

Матричное представление ортопроекторов  $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}$  и тензоров  $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha\beta)}$  имеет вид

$$\begin{aligned} (\Gamma^{(11)}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \hline & & & | & \\ 0 & & & | & 0 \end{pmatrix}, (\Gamma^{(22)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \hline & & & | & \\ 0 & & & | & 0 \end{pmatrix}, (\Gamma^{(33)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ \hline & & & | & \\ 0 & & & | & 0 \end{pmatrix}, \\ (\Gamma^{(12)}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \hline & & & | & \\ 0 & & & | & 0 \end{pmatrix}, (\Gamma^{(13)}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ \hline & & & | & \\ 0 & & & | & 0 \end{pmatrix}, \\ (\Gamma^{(23)}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ \hline & & & | & \\ 0 & & & | & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.116} \\ (\Gamma^{(4)}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \hline & & & | & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}, (\Gamma^{(5)}) = \begin{pmatrix} & & & | & \\ & & & | & \\ & & & | & \\ \hline & & & | & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}, (\Gamma^{(6)}) = \begin{pmatrix} & & & | & \\ & & & | & \\ & & & | & \\ \hline & & & | & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Матрица компонент тензора модулей нелинейной упругости имеет вид

$$(\bar{C}^{(n)}) = \begin{pmatrix} \bar{C}_{1111}^{(n)} & \bar{C}_{1122}^{(n)} & \bar{C}_{1133}^{(n)} & | & 0 & 0 & 0 \\ & \bar{C}_{2222}^{(n)} & \bar{C}_{2233}^{(n)} & | & 0 & 0 & 0 \\ сим & & \bar{C}_{3333}^{(n)} & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & | & 2\bar{C}_{1212}^{(n)} & 0 & 0 \\ сим & & & | & & 2\bar{C}_{1313}^{(n)} & 0 \\ & & & | & & & 2\bar{C}_{2323}^{(n)} \end{pmatrix} \tag{2.117}$$

А соотношение (2.29) принимает вид

$$\begin{aligned}
(\bar{C}^{(n)}) = & \sum_{\alpha=1}^3 l_{\alpha\alpha}^{(n)} (\Gamma^{(\alpha\alpha)}) + 2l_{12}^{(n)} (\Gamma^{(12)}) + 2l_{13}^{(n)} (\Gamma^{(13)}) + 2l_{23}^{(n)} (\Gamma^{(23)}) + \\
& + l_{44}^{(n)} (\Gamma^{(4)}) + l_{55}^{(n)} (\Gamma^{(5)}) + l_{66}^{(n)} (\Gamma^{(6)})
\end{aligned} \tag{2.118}$$

Для ортотропных материалов  $\bar{C}_{ijkl}^{(n)}$  - тензор секущих модулей в декартовом базисе имеет вид

$$\bar{C}_{ijkl}^{(n)} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{l_{\alpha\beta}^{(n)}}{a_{\alpha} a_{\beta}} a_{ij}^{(\alpha)} a_{kl}^{(\beta)} + \sum_{\alpha=4}^6 l_{\alpha\alpha}^{(n)} \Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}, \tag{2.119}$$

где  $a_{ij}^{(\alpha)}$  и  $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}$  выражаются по формулам (2.113) и (2.114).

Подставляя (2.117) и (2.118) в (2.119), получаем явное выражение для компонент тензора модулей нелинейной упругости

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{1111}^{(n)} = l_{11}^{(n)}, \quad \bar{C}_{2222}^{(n)} = l_{22}^{(n)}, \quad \bar{C}_{3333}^{(n)} = l_{33}^{(n)}, \\
\bar{C}_{1133}^{(n)} = l_{13}^{(n)}, \quad \bar{C}_{1122}^{(n)} = l_{12}^{(n)}, \quad \bar{C}_{2233}^{(n)} = l_{23}^{(n)}, \\
2\bar{C}_{1212}^{(n)} = l_{44}^{(n)}, \quad 2\bar{C}_{1313}^{(n)} = l_{55}^{(n)}, \quad 2\bar{C}_{2323}^{(n)} = l_{66}^{(n)}.
\end{aligned} \tag{2.120}$$

Спектральные инварианты  $Y_{\alpha}(\varepsilon)$  (2.6), (2.7) имеют вид

$$\begin{aligned}
Y_{\alpha}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \Delta\bar{\varepsilon}_{\alpha\alpha}^{(n)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\
Y_4(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \sqrt{2} |\Delta\bar{\varepsilon}_{12}^{(n)}|, \quad Y_5(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \sqrt{2} |\Delta\bar{\varepsilon}_{13}^{(n)}|, \quad Y_6(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \sqrt{2} |\Delta\bar{\varepsilon}_{23}^{(n)}|
\end{aligned} \tag{2.121}$$

и аналогично

$$\begin{aligned}
Y_{\alpha}(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = \Delta\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}^{(n)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\
Y_4(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = \sqrt{2} |\Delta\bar{\sigma}_{12}^{(n)}|, \quad Y_5(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = \sqrt{2} |\Delta\bar{\sigma}_{13}^{(n)}|, \quad Y_6(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = \sqrt{2} |\Delta\bar{\sigma}_{23}^{(n)}|.
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Укороченное представление определяющих соотношений (2.16) и (2.17) для ортотропной функции принимает вид

$$\begin{aligned}
Y_{\alpha}(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = \sum_{\beta=1}^3 l_{\alpha\beta}^{(n)} Y_{\beta}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \quad \alpha = 1, 2, 3 \\
P_{ij}^{(\alpha)}(\Delta\bar{\sigma}^{(n)}) = l_{\alpha\alpha}^{(n)} P_{ij}^{(\alpha)}(\bar{\varepsilon}^{(n)}), \quad \alpha = 4, 5, 6,
\end{aligned} \tag{2.123}$$

Полное спектральное представление (2.19) для ортотропной среды записывается следующим образом

$$\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)} = \sum_{\beta=1}^3 l_{\alpha\beta}^{(n)} Y_{\beta}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) \delta_{i\alpha} \delta_{j\alpha} + \sum_{\beta=4}^6 l_{\beta\beta}^{(n)} P_{ij}^{(\beta)}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}). \tag{2.124}$$

В общем нелинейном случае функции  $l_{\alpha\beta}^{(n)}$  - являются функциями от 6 инвариантов  $Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})$

$$l_{\alpha\beta}^{(n)} = l_{\alpha\beta}^{(n)}(Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \dots, Y_6(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (2.125)$$

$$l_{\alpha\alpha}^{(n)} = l_{\alpha\alpha}^{(n)}(Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \dots, Y_6(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})), \quad \alpha = 4, 5, 6.$$

### 2.3.2 Упрощенная модель ортотропной упруго-пластической среды

Функции  $l_{\alpha\beta}^{(n)}$  (2.46) представим в виде следующей модели, обобщающей модель А.А. Ильюшина на случай ортотропии

$$l_{\alpha\alpha}^{(n)} = l_{\alpha\alpha}^0 (1 - \omega_\alpha^{(n)}), \quad l_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}^0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (2.126)$$

$$l_{\alpha\alpha}^{(n)} = l_{\alpha\alpha}^0 (1 - \omega_\alpha^{(n)}), \quad \alpha = 4, 5, 6. \quad (2.127)$$

Здесь  $l_{\alpha\beta}^0$  - спектральные упругие константы линейно-упругого ортотропного тела. Они вычисляются с помощью соотношений (2.120) через тензоры модулей упругости  $C_{ijkl}^0$  - линейно-упругого тела

$$l_{\alpha\alpha}^0 = C_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^0, \quad l_{\alpha\beta}^0 = C_{\alpha\alpha\beta\beta}^0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (2.128)$$

$$l_{44}^0 = 2C_{1212}^0, \quad l_{55}^0 = 2C_{1313}^0, \quad l_{66}^0 = 2C_{1212}^0$$

Для 6-и функций пластичности в соотношениях (2.126)

$$\omega_\alpha^{(n)} = \omega_\alpha^{(n)}(Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})) \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (2.129)$$

$$\omega_\beta^{(n)} = \omega_\beta^{(n)}(Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \dots, Y_6(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})), \quad \beta = 4, 5, 6$$

выберем следующий вид, обобщающий модель Мазинга, для случая ортотропии

$$\omega_\alpha^{(n)}(Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})) = \bar{\alpha}_\alpha^{(n)} \omega_\alpha\left(\frac{Y_\alpha(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}{\bar{\alpha}_\alpha^{(n)}}\right), \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (2.130)$$

$$\omega_\beta^{(n)}(Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \dots, Y_6(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})) = \bar{\alpha}_\beta^{(n)} \omega_\beta\left(\frac{Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}{\bar{\alpha}_\beta^{(n)}}, \dots, \frac{Y_6(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}{\bar{\alpha}_\beta^{(n)}}\right) \quad \beta = 4, 5, 6, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

где

$$\omega_{\alpha}(Y_{\alpha}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})) = \begin{cases} 0, & \text{если } |Y_{\alpha}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})| < \varepsilon_{S\alpha} \\ \omega_{\alpha}^0 \left(1 - \frac{\varepsilon_{S\alpha}}{Y_{\alpha}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}\right)^{b_{\alpha}}, & \text{если } |Y_{\alpha}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})| \geq \varepsilon_{S\alpha} \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (2.131)$$

$$\omega_{\alpha}^{(n)}(Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}), \dots, Y_6(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{Y}_{\alpha}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) < \varepsilon_{S\alpha} \\ \omega_{\alpha}^0 \left(1 - \frac{\varepsilon_{S\alpha}}{\tilde{Y}_{\alpha}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})}\right)^{b_{\alpha}}, & \text{если } \tilde{Y}_{\alpha}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) \geq \varepsilon_{S\alpha} \end{cases}, \alpha = 4, 5, 6 \quad (2.132)$$

$$\tilde{Y}_{\alpha}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \sqrt{\sum_{\beta=1}^6 a_{S\alpha\beta} \left(|Y_{\beta}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})|\right)^{q_{\alpha\beta}}}, \quad a_{S\alpha\alpha} = 1, \quad q_{\alpha\alpha} = 2, \quad \alpha = 4, 5, 6.$$

Функции  $\bar{\alpha}_{\beta}^{(n)}$  выбираются в виде

$$\bar{\alpha}_{\beta}^{(1)} = 1, \quad \bar{\alpha}_{\beta}^{(n)} = \bar{\alpha}_{\beta 0} (n-1)^{\gamma_{\beta}}, \quad \beta = 1, \dots, 6, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.133)$$

Модель (2.131)-(2.133) содержит следующие константы

$$\varepsilon_{S\alpha}, \omega_{\alpha}^0, b_{\alpha}, \bar{\alpha}_{\alpha 0}, \gamma_{\alpha} \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (2.134)$$

$$\varepsilon_{S\alpha}, \omega_{\alpha}^0, b_{\alpha}, a_{S\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}, \bar{\alpha}_{\alpha 0}, \gamma_{\alpha} \quad \alpha = 4, 5, 6, \quad \beta = 1, \dots, 6,$$

где  $a_{S\alpha\alpha} = 1$ ,  $q_{\alpha\alpha} = 2$ . В этой модели функции пластичности  $\omega_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , описывающие пластические свойства при растяжении-сжатии по каждому направлению  $\alpha = 1, 2, 3$ , зависят только от одного соответствующего инварианта  $Y_{\alpha}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})$ , а функции  $\omega_{\alpha}$ ,  $\alpha = 4, 5, 6$ , описывающие пластические свойства при сдвигах, зависят от всех 6 инвариантов  $Y_{\alpha}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})$ .

Условие  $\tilde{Y}_{\alpha}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)}) = \varepsilon_{S\alpha}$  образует замкнутую поверхность пластичности в пространстве инвариантов

$$\sum_{\beta=1}^6 a_{S\alpha\beta} \left(|Y_{\beta}(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)})|\right)^{q_{\alpha\beta}} = \varepsilon_{S\alpha}^2 \quad (2.135)$$

### 2.3.3 Методика определения констант модели ортотропных упруго-пластических композитов

Для определения констант (2.134) рассмотрим следующие 15 траекторий деформирования:

- 1) Сдвиг в плоскости (1,2)
- 2) Сдвиг в плоскости (1,3)
- 3) Сдвиг в плоскости (2,3)
- 4) Растяжение в направлении 1
- 5) Растяжение в направлении 2
- 6) Растяжение в направлении 3
- 7) Сдвиг в плоскости (1,2) с растяжением в направлении 1
- 8) Сдвиг в плоскости (1,2) с растяжением в направлении 2
- 9) Сдвиг в плоскости (1,2) с растяжением в направлении 3
- 10) Сдвиг в плоскости (1,3) с растяжением в направлении 1
- 11) Сдвиг в плоскости (1,3) с растяжением в направлении 2
- 12) Сдвиг в плоскости (1,3) с растяжением в направлении 3
- 13) Сдвиг в плоскости (2,3) с растяжением в направлении 1
- 14) Сдвиг в плоскости (2,3) с растяжением в направлении 2
- 15) Сдвиг в плоскости (2,3) с растяжением в направлении 3

В начале для каждой из этих траекторий рассматривается один цикл нагружения, т.е. только активное нагружение,  $n=1$ . Затем рассматривается многоцикловое нагружение по этим траекториям для определения параметров обобщённой модели Мазинга  $\bar{\alpha}_{\alpha 0}, \gamma_{\alpha}$ .

### 2.3.4 Сдвиг в плоскости (1,2)

В этом случае рассматривается задача  $L_{12}$ , в которой для случая одного цикла нагружения  $n=1$

$$\bar{\sigma}_{12} = \dot{\bar{\sigma}}_{12} t, \text{ остальные } \bar{\sigma}_{ij} = 0 \quad (2.136)$$

где  $\dot{\bar{\sigma}}_{12}$  - заданная скорость нагружения.

В этом случае инварианты (2.122) и девиаторы (2.115) для тензора напряжений имеют вид

$$Y_1(\sigma) = 0, \quad Y_2(\sigma) = 0, \quad Y_3(\sigma) = 0, \quad Y_4(\sigma) = \sqrt{2} |\bar{\sigma}_{12}|, \quad Y_5(\sigma) = 0, \quad (2.137)$$

$$P_{ij}^{(1)} = 0, \quad P_{ij}^{(2)} = 0, \quad P_{ij}^{(3)}(\sigma) = 0, \quad P_{ij}^{(4)}(\sigma) = \bar{\sigma}_{12} (\delta_{i1} \delta_{j2} + \delta_{i2} \delta_{j1}), \quad P_{ij}^{(5)} = 0, \quad P_{ij}^{(6)}(\sigma) = 0$$

Тогда из укороченного спектрального представления (2.123) получаем, что

$$Y_1(\varepsilon) = 0, \quad Y_2(\varepsilon) = 0, \quad Y_3(\varepsilon) = 0, \quad Y_5(\varepsilon) = 0, \quad Y_6(\varepsilon) = 0, \quad (2.138)$$

$$P_{ij}^{(1)}(\varepsilon) = 0, \quad P_{ij}^{(2)}(\varepsilon) = 0, \quad P_{ij}^{(3)}(\varepsilon) = 0, \quad P_{ij}^{(5)}(\varepsilon) = 0, \quad P_{ij}^{(6)}(\varepsilon) = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{12} = l_{44}^{(1)} \bar{\varepsilon}_{12} \quad (2.139)$$

Из этих соотношений следует, что при сдвиговом нагружении

$$\bar{\varepsilon}_{12} \neq 0, \quad \text{остальные } \bar{\varepsilon}_{ij} = 0, \quad (2.140)$$

$$Y_4(\varepsilon) = \sqrt{2} |\bar{\varepsilon}_{12}|.$$

Отличное от нуля определяющее соотношение в этом случае одно – это (2.139). Функция  $l_{44}^{(1)}$  в этом соотношении согласно (2.132), для случая одноосного чистого сдвига имеет вид (2.127), (2.132). Тогда получаем определяющее соотношение композита для данного вида нагружения

$$\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_4(\bar{\varepsilon}_{12}), \quad (2.141)$$

$$\bar{F}_4(\bar{\varepsilon}_{12}) \equiv \begin{cases} 2\bar{G}_{12}\bar{\varepsilon}_{12}, & \text{если } \sqrt{2}|\bar{\varepsilon}_{12}| < \varepsilon_{S4}, \\ 2\bar{G}_{12}\left(1 - \omega_4^0\left(1 - \frac{\varepsilon_{S4}}{\sqrt{2}|\bar{\varepsilon}_{12}|}\right)^{b_4}\right)\bar{\varepsilon}_{12}, & \text{если } \sqrt{2}|\bar{\varepsilon}_{12}| \geq \varepsilon_{S4}. \end{cases} \quad (2.142)$$

Построим диаграмму деформирования  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_4^{(3)}(\bar{\varepsilon}_{12})$  при межслойном сдвиге композита, полученную прямым численным решением локальной задачи на ЯП  $L_{12}$ . Тогда, сравнивая эту кривую  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_4^{(3)}(\bar{\varepsilon}_{12})$  с аппроксимационной функцией (2.141), находим все константы  $\bar{G}_{12}$ ,  $\varepsilon_{S40}$ ,  $\omega_4^0$ ,  $b_4$  из условия минимизации относительного отклонения этих кривых

$$\sum \left(1 - \frac{\bar{F}_4(\bar{\varepsilon}_{12})}{\bar{F}_4^{(3)}(\bar{\varepsilon}_{12})}\right)^2 \rightarrow \min. \quad (2.143)$$

### 2.3.5 Сдвиги в плоскостях (1,3) и (2,3)

Методика определения констант

$$\begin{aligned} &\bar{G}_{13}, \varepsilon_{S50}, \omega_5^0, b_5; \\ &\bar{G}_{23}, \varepsilon_{S60}, \omega_6^0, b_6 \end{aligned} \quad (2.144)$$

аналогична методике, описанной в разделе 2.4.3.

### 2.3.6 Растяжение в направлении 1

В этом случае задаем деформацию

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{11}t, \text{ остальные } \bar{\varepsilon}_{ij} = 0 \quad (2.145)$$

где  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{11}$  - заданная скорость деформации.

В этом случае инварианты (2.122) и девиаторы (2.115) имеют вид

$$Y_1(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}_{11}, \quad Y_2(\varepsilon) = 0, \quad Y_3(\varepsilon) = 0, \quad Y_4(\varepsilon) = 0, \quad Y_5(\varepsilon) = 0, \quad Y_6(\varepsilon) = 0, \quad (2.146)$$

$$P_{ij}^{(1)}(\bar{\varepsilon}) = \bar{\varepsilon}_{11}\delta_{i1}\delta_{1j}, \quad P_{ij}^{(2)}(\varepsilon) = 0, \quad P_{ij}^{(3)}(\varepsilon) = 0, \quad P_{ij}^{(4)}(\varepsilon) = 0, \quad P_{ij}^{(5)}(\varepsilon) = 0, \quad P_{ij}^{(6)}(\varepsilon) = 0.$$

Тогда из укороченного спектрального представления (2.123) получаем, что

$$Y_\alpha(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad Y_4(\sigma) = 0, \quad Y_5(\sigma) = 0, \quad Y_6(\sigma) = 0, \quad (2.147)$$

$$P_{ij}^{(4)}(\sigma) = 0, \quad P_{ij}^{(5)}(\sigma) = 0, \quad P_{ij}^{(6)}(\sigma) = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} = l_{\alpha 1}^{(1)} \bar{\varepsilon}_{11} \quad (2.148)$$

Функция  $l_{11}^{(1)}$  в этом соотношении имеет вид (2.126), (2.133). Тогда получаем определяющее соотношение композита для данного вида нагружения

$$\bar{\sigma}_{11} = \bar{F}_1(\bar{\varepsilon}_{11}), \quad (2.149)$$

$$\bar{F}_1(\bar{\varepsilon}_{11}) \equiv \begin{cases} l_{11}^0 \bar{\varepsilon}_{11}, & \text{если } |\bar{\varepsilon}_{11}| < \varepsilon_{S1}, \\ l_{11}^0 \left(1 - \omega_1^0 \left(1 - \frac{\varepsilon_{S1}}{\sqrt{2} |\bar{\varepsilon}_{11}|}\right)^{b_1}\right) \bar{\varepsilon}_{11}, & \text{если } |\bar{\varepsilon}_{11}| \geq \varepsilon_{S1}. \end{cases} \quad (2.150)$$

Построим диаграмму деформирования  $\bar{\sigma}_{11} = \bar{F}_1^{(3)}(\bar{\varepsilon}_{11})$  при межслойном сдвиге композита, полученную прямым численным решением локальной задачи на ЯП  $L_{11}$ . Тогда, сравнивая эту кривую  $\bar{\sigma}_{11} = \bar{F}_1^{(3)}(\bar{\varepsilon}_{11})$  с аппроксимационной функцией (2.141), находим все константы  $l_{11}^0$ ,  $\varepsilon_{S1}$ ,  $\omega_1^0$ ,  $b_1$  из условия минимизации относительного отклонения этих кривых.

### 2.3.7 Растяжение в направлениях 2 и 3

Методика определения констант

$$\varepsilon_{S\beta}, \quad \omega_\beta^0, \quad b_\beta, \quad \beta = 2, 3, \quad (2.151)$$

аналогична методике, описанной в разделе 2.4.4.

### 2.3.8 Сдвиг в плоскости (1,2) с растяжением в направлении 1

Рассмотрим многоосное пропорциональное нагружение: растяжение в направлении 1 с одновременным сдвигом в плоскости (1,2). В этом случае имеем 2 ненулевые компоненты тензора деформации

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{11}t, \quad \bar{\varepsilon}_{12} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{12}t, \quad \text{остальные } \bar{\varepsilon}_{ij} = 0, \quad (2.152)$$

где  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{11}$  и  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{12}$  - заданные скорости деформации. В силу пропорциональности многоосного нагружения из (2.152) имеем

$$\bar{\varepsilon}_{11} = K_{112}\bar{\varepsilon}_{12}, \quad K_{112} = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_{11}}{\dot{\bar{\varepsilon}}_{12}}. \quad (2.153)$$

Инварианты (2.122) и девиаторы (2.115) при данном виде деформирования имеют вид

$$Y_1(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}_{11}, \quad Y_2(\varepsilon) = 0, \quad Y_3(\varepsilon) = 0, \quad Y_4(\varepsilon) = \sqrt{2}|\bar{\varepsilon}_{12}|, \quad Y_5(\varepsilon) = 0, \quad Y_6(\varepsilon) = 0, \quad (2.154)$$

$$P_{ij}^{(1)}(\bar{\varepsilon}) = \bar{\varepsilon}_{11}\delta_{i1}\delta_{j1}, \quad P_{ij}^{(2)}(\varepsilon) = P_{ij}^{(3)}(\varepsilon) = 0, \quad P_{ij}^{(4)}(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}_{12}(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}), \quad P_{ij}^{(5)}(\varepsilon) = 0, \quad P_{ij}^{(6)}(\varepsilon) = 0.$$

Тогда из укороченного спектрального представления (2.123) получаем, что

$$Y_\alpha(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad Y_4(\sigma) = \sqrt{2}|\bar{\sigma}_{12}|, \quad Y_5(\sigma) = 0, \quad Y_6(\sigma) = 0, \quad (2.155)$$

$$P_{ij}^{(1)}(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}_{11}\delta_{i1}\delta_{j1}, \quad P_{ij}^{(2)} = P_{ij}^{(3)}(\sigma) = 0, \quad P_{ij}^{(4)}(\sigma) = \bar{\sigma}_{12}(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j1}), \quad P_{ij}^{(5)} = P_{ij}^{(6)}(\sigma) = 0,$$

$$\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} = l_{\alpha 1}^{(1)}\bar{\varepsilon}_{11}, \quad \bar{\sigma}_{12} = l_{44}^{(1)}\bar{\varepsilon}_{12} \quad (2.156)$$

Функции  $l_{\alpha 1}^{(1)}$  и  $l_{44}^{(1)}$  в этом соотношении имеют вид (2.126), (2.127), (2.131), (2.132).

Тогда определяющее соотношение композита для сдвигового деформирования при наличии дополнительного растяжения, имеет вид

$$\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_{4(1)}(\bar{\varepsilon}_{12}, K_{112}), \quad (2.157)$$

$$\bar{F}_{4(1)}(\bar{\varepsilon}_{12}, K_{112}) \equiv \begin{cases} 2\bar{G}_{12}\bar{\varepsilon}_{12}, & \text{если } \tilde{Y}_4(\bar{\varepsilon}) < \varepsilon_{S4}, \\ 2\bar{G}_{12}(1 - \omega_4^0(1 - \frac{\varepsilon_{S4}}{\tilde{Y}_4(\bar{\varepsilon})})^{b_4})\bar{\varepsilon}_{12}, & \text{если } \tilde{Y}_4(\bar{\varepsilon}) \geq \varepsilon_{S4}. \end{cases} \quad (2.158)$$

$$\tilde{Y}_4(\bar{\varepsilon}) = \sqrt{a_{S41} |\bar{\varepsilon}_{11}|^{q_{41}} + 2(\bar{\varepsilon}_{12})^2} = |\bar{\varepsilon}_{12}| \sqrt{a_{S41} |K_{112}|^{q_{41}} |\bar{\varepsilon}_{12}|^{q_{41}-2} + 2}. \quad (2.159)$$

Построим диаграмму деформирования  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_{4(1)}^{(\ominus)}(\bar{\varepsilon}_{12}, K_{112})$  при межслойном сдвиге композита при наложении дополнительного растяжения с коэффициентом  $K_{112}$ , полученную прямым численным решением локальных задач на ЯП  $L_{12}+L_{11}$ . Тогда, сравнивая эту кривую  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_{4(1)}^{(\ominus)}(\bar{\varepsilon}_{12}, K_{112})$  при разных  $K_{112}$  с аппроксимационной функцией (2.157), находим константы  $a_{S41}$  и  $q_{41}$  из условия минимизации относительного отклонения этих кривых.

### 2.3.9 Сдвиг в плоскости (1,2) с растяжением в направлениях 2 или 3

Заменив в соотношениях предыдущего раздела растяжение в направлении 1 на растяжение в направлении 2 и 3, по аналогии с (2.157) получим функции  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_{4(\beta)}(\bar{\varepsilon}_{12}, K_{\beta 12})$ ,  $\beta = 2, 3$ , которые отличаются от (2.157) только заменой констант  $a_{S41}, q_{41}$  на  $a_{S4\beta}, q_{4\beta}$ ,  $\beta = 2, 3$ . Здесь обозначены коэффициенты пропорциональности  $K_{\beta 12} = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_{\beta\beta}}{\dot{\bar{\varepsilon}}_{12}}$ . Из условия наилучшего совпадения диаграмм  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_{4(\beta)}(\bar{\varepsilon}_{12}, K_{\beta 12})$  и  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_{4(\beta)}^{(\ominus)}(\bar{\varepsilon}_{12}, K_{\beta 12})$ , полученных прямым численным решением задач  $L_{12} + L_{\beta\beta}$ , определяем константы

$$a_{S4\beta} \text{ и } q_{4\beta}, \quad \beta = 2, 3$$

в уравнении (2.135) поверхности пластичности.

### 2.3.10 Сдвиги в плоскостях (1,3) или (2,3) с дополнительным растяжением

Если осуществить сдвиг в плоскости (1,3) пропорционально с растяжением по одному из направлений  $\alpha = 1, 2, 3$ ,

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\alpha} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{\alpha\alpha} t, \quad \bar{\varepsilon}_{13} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{13} t, \quad \text{остальные } \bar{\varepsilon}_{ij} = 0, \quad (2.160)$$

то по аналогии с методикой, изложенной в разделе 2.4.6. находим константы

$$a_{s5\beta} \text{ и } q_{5\beta}, \quad \beta = 1, 2, 3$$

в уравнении (2.135) поверхности пластичности.

И осуществляя сдвиг в плоскости (2,3) пропорционально с растяжением по одному из направлений  $\alpha = 1, 2, 3$

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\alpha} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{\alpha\alpha} t, \quad \bar{\varepsilon}_{23} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{23} t, \quad \text{остальные } \bar{\varepsilon}_{ij} = 0, \quad (2.161)$$

аналогичным способом находим оставшиеся константы

$$a_{s6\beta} \text{ и } q_{6\beta}, \quad \beta = 1, 2, 3$$

### 2.3.11 Результаты тестовых расчетов по определению констант модели ортотропного упруго-пластического тканевого КМ

В качестве примера применения разработанной модели был рассмотрен тканевый КМ полотняного плетения на основе алюминиевой матрицы и углеродных волокон (рис.1.1). Матрица считалась изотропной упруго-пластической, для нее были приняты константы модели деформационной теории пластичности (1.88). Нити ткани считались чисто упругими, криволинейно-трансверсально-изотропными. Концентрация волокон в нити, рассматриваемой как 1D композит, составляла 70%, концентрация нитей в ткани 50%.

Методика вычисления эффективных константы упругости нитей в собственной системе координат изложена в разделах 1.4.2 и 1.4.3. Их численные значения приведены в (1.90). С помощью решения локальных задач  $L_{pq}$  по формулам (1.81) были вычислены эффективные упругие характеристики композита как ортотропного материала (см.(1.96)).

Далее были проведены вычисления констант (2.134) упрощенной модели ортотропного упруго-пластического композита, согласно методике, изложенной в 2.4.3.

1) На рисунках 2.11 и 2.12 показаны диаграммы деформирования композита для траекторий нагружения 1), 2) и 3) (при чистых сдвигах). На каждом рисунке одна из диаграмм получена прямым решением соответствующей задачи  $L_{pq}$ , а вторая – путем аппроксимации этой кривой с помощью разработанной модели упруго-пластического композита по формуле (2.141) и аналогичных ей для сдвигов в других плоскостях. В результате аппроксимации диаграмм деформирования были получены следующие значения констант модели

$$\varepsilon_{S40} = 0.001174, \omega_4^0 = 0.938, b_4 = 4.9108 \quad (2.162)$$

$$\varepsilon_{S50} = 0.0006976, \omega_5^0 = 0.9312, b_5 = 7.1847$$

$$\varepsilon_{S60} = 0.001144, \omega_6^0 = 0.9381, b_6 = 5.0445$$

Относительная ошибка аппроксимации диаграмм деформирования при таких значениях констант составляет 0,39, 0,18 и 0,4%, соответственно.

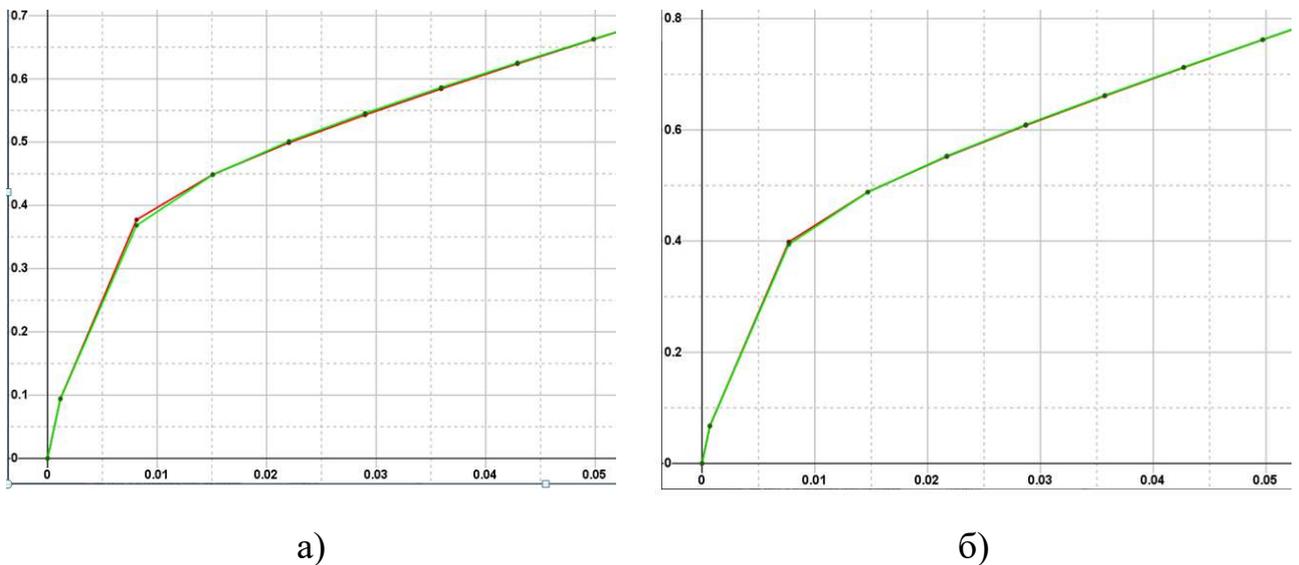


Рисунок 2.11 Диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_4(\bar{\varepsilon}_{12})$  (а) и  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_5(\bar{\varepsilon}_{13})$  (б) при сдвигах для тканевого КМ, полученные с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  (1) и с помощью аппроксимации по формулам (2.141) и аналогичных ей (2)

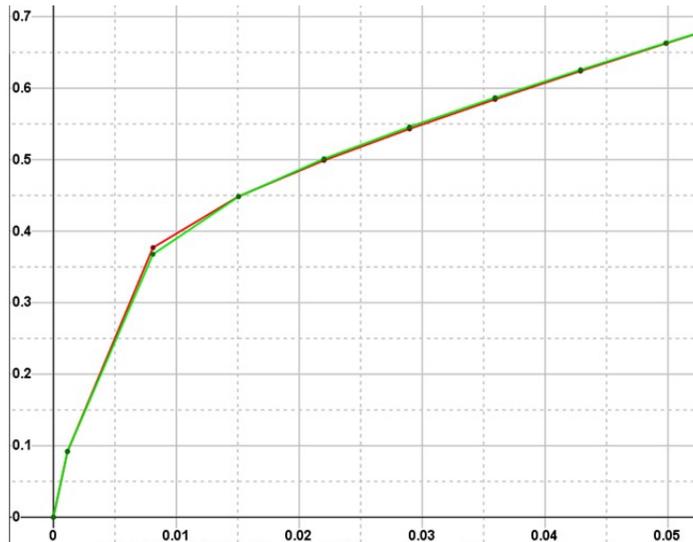


Рисунок 2.12 Диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_{23} = \bar{F}_6(\bar{\varepsilon}_{23})$  при сдвиге в плоскости (2,3) для тканевого КМ, полученные с помощью прямого решения задачи  $L_{23}(1)$  и с помощью аппроксимации по формуле, аналогичной (2.141)(2)

2) На рисунке 2.13 показаны диаграммы деформирования композита при растяжении по направлениям 1 и 3. На каждом рисунке одна из диаграмм получена прямым решением соответствующей задачи  $L_{pp}$ , а вторая – путем аппроксимации этой кривой с помощью разработанной модели упруго-пластического композита по формуле (2.149) и аналогичных ей. В результате аппроксимации диаграмм деформирования были получены следующие значения констант модели

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s10} &= 0.001402, \quad \omega_1^0 = 0.192, \quad b_1 = 6.9, \\ \varepsilon_{s20} &= 0.001698, \quad \omega_2^0 = 0.2935, \quad b_2 = 5.2733, \\ \varepsilon_{s30} &= 0.001396, \quad \omega_3^0 = 0.192, \quad b_3 = 6.9274. \end{aligned} \quad (2.163)$$

Относительная ошибка аппроксимации диаграмм деформирования составила 0,047, 0,045 и 0.048%, соответственно. Диаграммы деформирования при растяжении близки к линейным зависимостям, поэтому точность аппроксимации очень высокая.

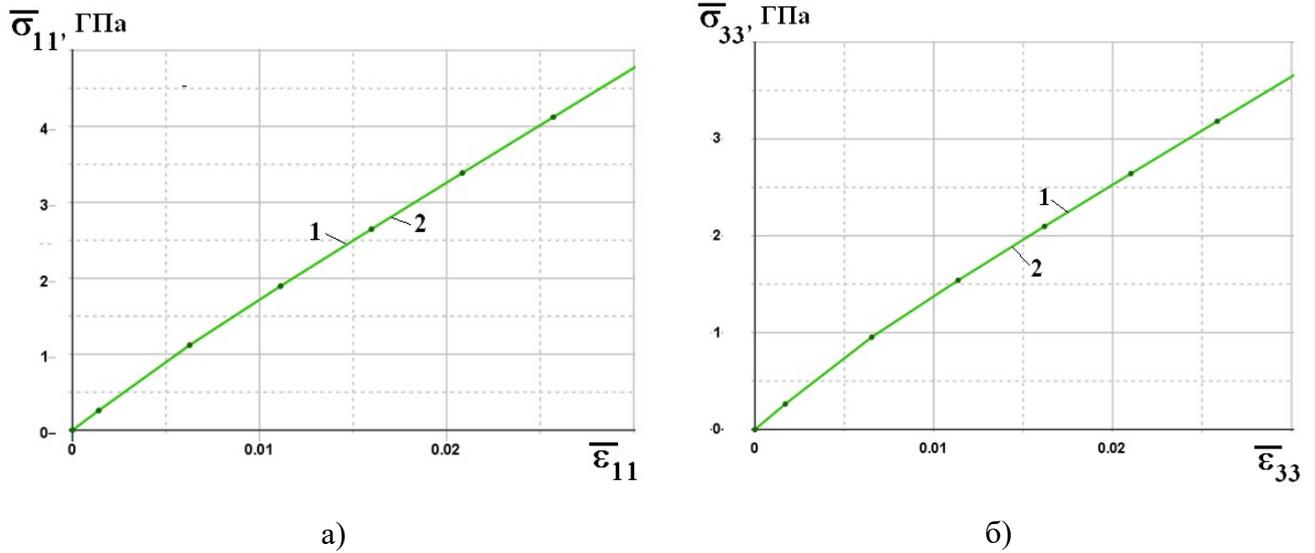


Рисунок 2.13 Диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_{11} = \bar{F}_1(\bar{\epsilon}_{11})$  (а) и  $\bar{\sigma}_{33} = \bar{F}_3(\bar{\epsilon}_{33})$  (б) при растяжении тканевого КМ, полученные с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  (1) и с помощью аппроксимации по формулам типа (2.141)

3) На рисунке 2.14а), показаны диаграммы деформирования композита  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{5(1)}(\bar{\epsilon}_{13}, K_{113})$  и  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{5(1)}^{(3)}(\bar{\epsilon}_{15}, K_{113})$  при совместном сдвиге в плоскости (1,2) и растяжении по направлению 1, при различных значениях коэффициента пропорциональности  $K_{113}$  (2.153): 0,25; 1 и 4.0. На рисунке для каждого значения  $K_{113}$  приведены 2 диаграммы: одна из них получена прямым решением задач  $L_{13} + L_{11}$ , а вторая – путем аппроксимации этой диаграммы с помощью упрощенной модели упруго-пластического композита согласно формуле (2.157). В результате аппроксимации диаграмм деформирования были получены значения констант модели  $a_{s51}$  и  $q_{51}$ , которые приведены в табл. 2.1.

Относительная ошибка аппроксимации диаграмм деформирования составила 0,047, 0,045 и 0.048%, соответственно. С увеличением коэффициента  $K_{113}$  диаграммы деформирования смещаются вниз.

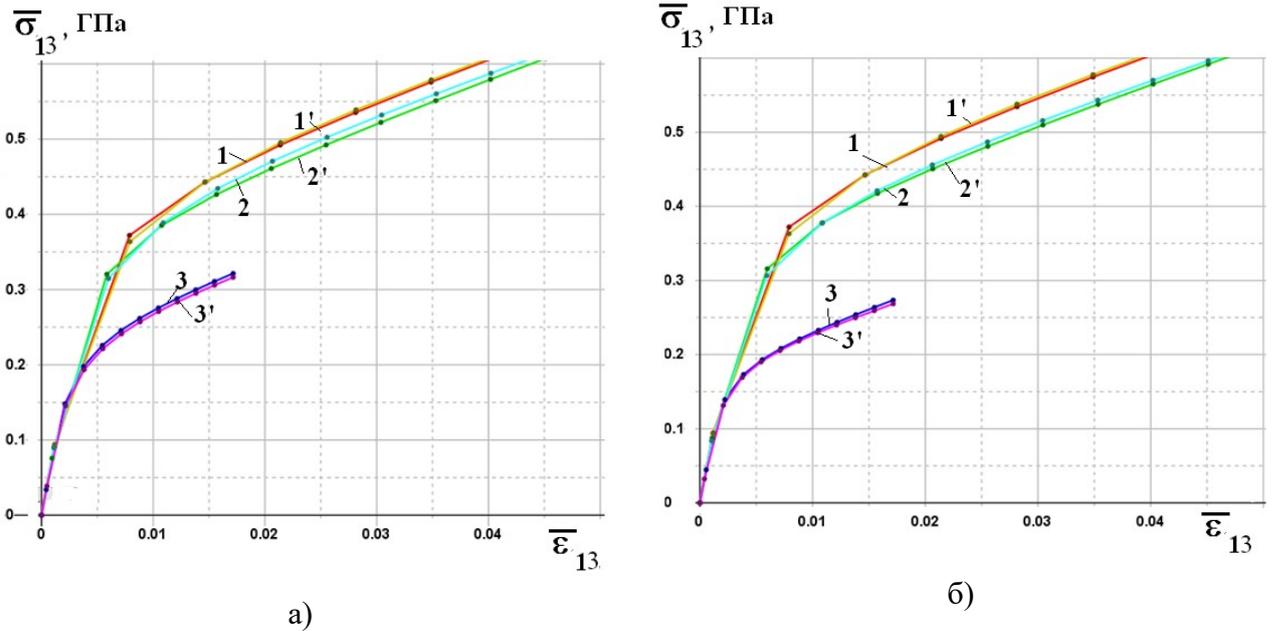


Рисунок 2.14 Диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{5(\beta)}(\bar{\varepsilon}_{13}, K_{\beta 13})$  и  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{5(\beta)}^{(3)}(\bar{\varepsilon}_{15}, K_{\beta 13})$  при ((а)-  $\beta = 1$ , (б) -  $\beta = 3$ ) тканевого КМ при сдвиге в плоскости (1,3) с наложением растяжения в направлениях 1 (а) и 3 (б), полученные с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  (кривые 1, 2, 3) и с помощью аппроксимации по формулам типа (2.157) (кривые 1', 2', 3')

На рисунке 2.14б), показаны аналогичные диаграммы деформирования тканевого композита  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{5(3)}(\bar{\varepsilon}_{13}, K_{313})$  и  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{5(3)}^{(3)}(\bar{\varepsilon}_{15}, K_{313})$  при совместном сдвиге в плоскости (1,3) и растяжении по направлению 3 (поперек ткани), при различных значениях коэффициента пропорциональности  $K_{313}$  (2.153): 0,25; 1 и 4.0. В результате аппроксимации диаграмм деформирования были получены значения констант модели  $a_{533}$  и  $q_{53}$ , которые приведены в табл. 2.1.

Зависимость диаграмм  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{5(3)}(\bar{\varepsilon}_{13}, K_{313})$  от коэффициента  $K_{313}$  аналогична предыдущей диаграмме деформирования  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{5(1)}(\bar{\varepsilon}_{13}, K_{113})$ : с увеличением значений  $K_{313}$  диаграммы смещаются вниз, но для диаграммы  $K_{313}$  эффект смещения диаграммы более значителен (рис. 2.14а и 2.14б). При  $K_{313} = K_{113} = 0$  диаграммы, очевидно, совпадают:  $\bar{F}_{5(1)}(\bar{\varepsilon}_{13}, 0) = \bar{F}_{5(3)}(\bar{\varepsilon}_{13}, 0)$ .

Табл.2.1 Значения констант модели упруго-пластического тканевого КМ полотняного плетения

$\beta$	$a_{S4\beta}$	$q_{4\beta}$	$a_{S5\beta}$	$q_{5\beta}$	$a_{S6\beta}$	$q_{6\beta}$
1	0.2315	1.9518	0.2263	1.9617	0.3578	2.0426
2	0.2321	1.9524	0.3626	2.0458	0.2257	1.9605
3	0.3482	1.9892	0.5658	2.0403	0.5600	2.0378
4	1	2	0.3305	1.8377	0.3292	1.8368
5	0.1519	1.6837	1	2	0.8001	1.9599
6	0.1520	1.6838	0.8008	1.9601	1	2

Поскольку свойства тканевого КМ в направлениях 1 и 2 одинаковы, то диаграммы  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{5(1)}(\bar{\epsilon}_{13}, K_{113})$  и  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{5(2)}(\bar{\epsilon}_{13}, K_{213})$  близки.

На рисунке 2.15 показаны диаграммы деформирования тканевого композита  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{6(4)}(\bar{\epsilon}_{13}, K_{423})$  и  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{5(6)}(\bar{\epsilon}_{13}, K_{613})$ , полученные при совместном сдвиге в плоскости (1,3) с наложением дополнительного сдвига в плоскости (1,2) или в плоскости (2,3) при различных значениях коэффициента пропорциональности  $K_{\beta 13}$ : 0,25; 1 и 4,0. В результате аппроксимации диаграмм деформирования были получены значения констант модели  $a_{S54}$ ,  $q_{54}$ , и  $a_{S56}$ ,  $q_{56}$ , которые приведены в табл. 2.1.

Зависимость диаграмм  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{6(\beta)}(\bar{\epsilon}_{13}, K_{\beta 23})$  от коэффициента  $K_{\beta 13}$  такая же, как и при наложении растяжения по осям 1, 2 и 3: с увеличением значений  $K_{\beta 13}$  диаграммы смещаются вниз, но при наложении дополнительных сдвигов эффект смещения диаграммы более сильно выражен.

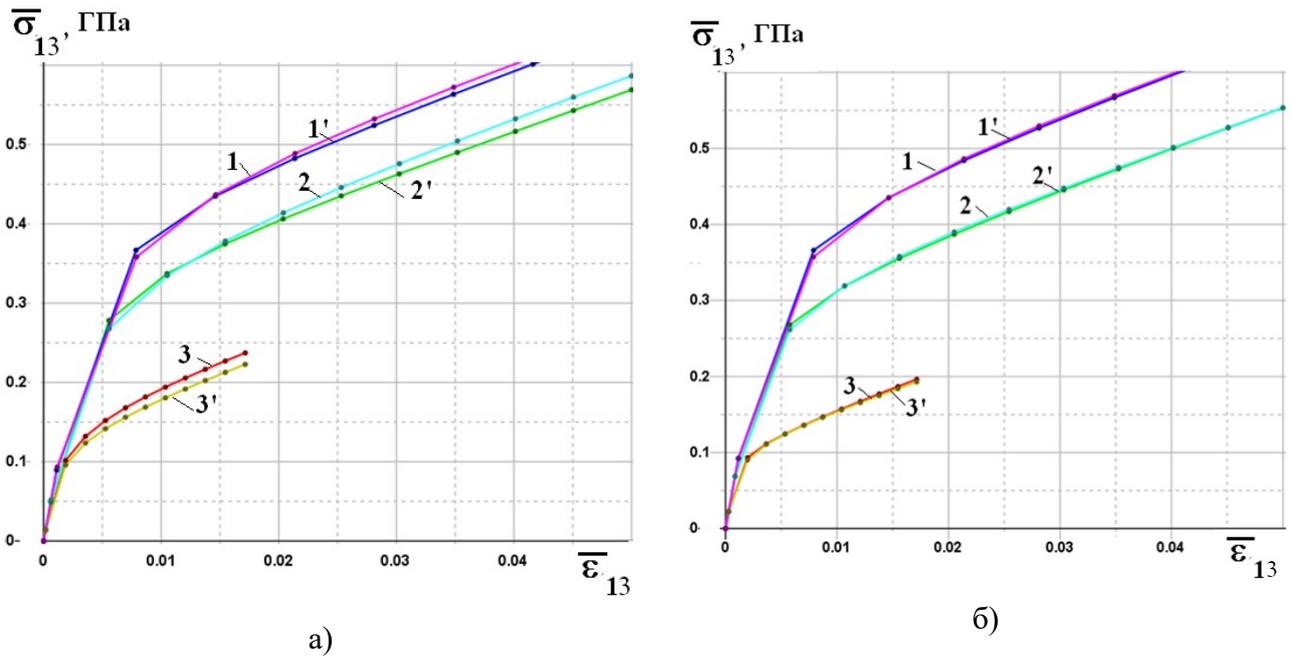


Рисунок 2.15 Диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{6(\beta)}(\bar{\epsilon}_{13}, K_{\beta 23})$  и  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_{6(\beta)}^{(3)}(\bar{\epsilon}_{13}, K_{\beta 23})$  ((а)-  $\beta = 4$ , (б) -  $\beta = 6$ ) тканевого КМ при сдвиге в плоскости (1,2) с наложением дополнительного сдвига в плоскости (1,2) (а) и (2,3) (б), полученные с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  (кривые 1, 2, 3) и с помощью аппроксимации по формулам типа (2.157) (кривые 1', 2', 3')

Методика получения констант  $a_{s\alpha\beta}$  и  $q_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha=4,6$   $\beta=1,\dots,6$  аналогична изложенной выше, значения этих констант приведены в табл. 2.1. Основные эффекты многоосности деформирования проявляются таким же образом, как и для деформирования в плоскости (1,2) с наложением деформаций в других направлениях.

### 2.3.12 Результаты определения констант модели тканевого КМ при циклическом нагружении

Для определения констант  $\bar{\alpha}_{\alpha 0}, \gamma_{\alpha}$ ,  $\alpha=1,\dots,6$  модели упруго-пластического ортотропного КМ рассматриваются траектории 1) ...6), указанные в 2.4.3, для случая циклического симметричного нагружения. Для этих траекторий проводится

прямое численное моделирование с помощью решения задач Lpq и аппроксимация полученных диаграмм циклического деформирования с помощью упрощенной модели, представленной в п.2.4.2. Из условия наилучшего совпадения диаграмм находятся 6 групп констант  $\bar{\alpha}_{\alpha 0}, \gamma_{\alpha}, \alpha = 1, \dots, 6$ .

### 1) Циклическое растяжение-сжатие в направлении 1

В этом случае, с учетом результатов раздела 2.4.6, из формулы (2.149) для 1-го цикла нагружения получаем следующее соотношение для диаграммы деформирования на n-м промежутке нагружения

$$\Delta \bar{\sigma}_{11}^{(n)} = \bar{\alpha}_1^{(n)} \bar{F}_1 \left( \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{11}^{(n)}}{\bar{\alpha}_1^{(n)}} \right), \quad (2.164)$$

$$\bar{\alpha}_1^{(n)} = \bar{\alpha}_{10} (n-1)^{\gamma_1}.$$

Единая кривая деформирования для всех промежутков нагружения строится по формуле (1.12) с использованием (2.164), в результате получаем зависимость  $\bar{\sigma}_{11} = \bar{F}_1^{(n)}(\bar{\varepsilon}_{11})$ , меняющуюся на каждом n-ом промежутке нагружения.

На рисунке 2.16 показаны кривые циклического деформирования тканевого КМ при растяжении в направлении 1, полученные прямым решением задач L<sub>11</sub> и с помощью упрощенной модели ортотропного упруго-пластического КМ, построенной из условия наилучшей аппроксимации. Точность аппроксимации достаточно высокая, суммарная относительная ошибка – 1,5%. Получены следующие значения констант

$$\bar{\alpha}_{10} = 2, \quad \gamma_1 = 0.02$$

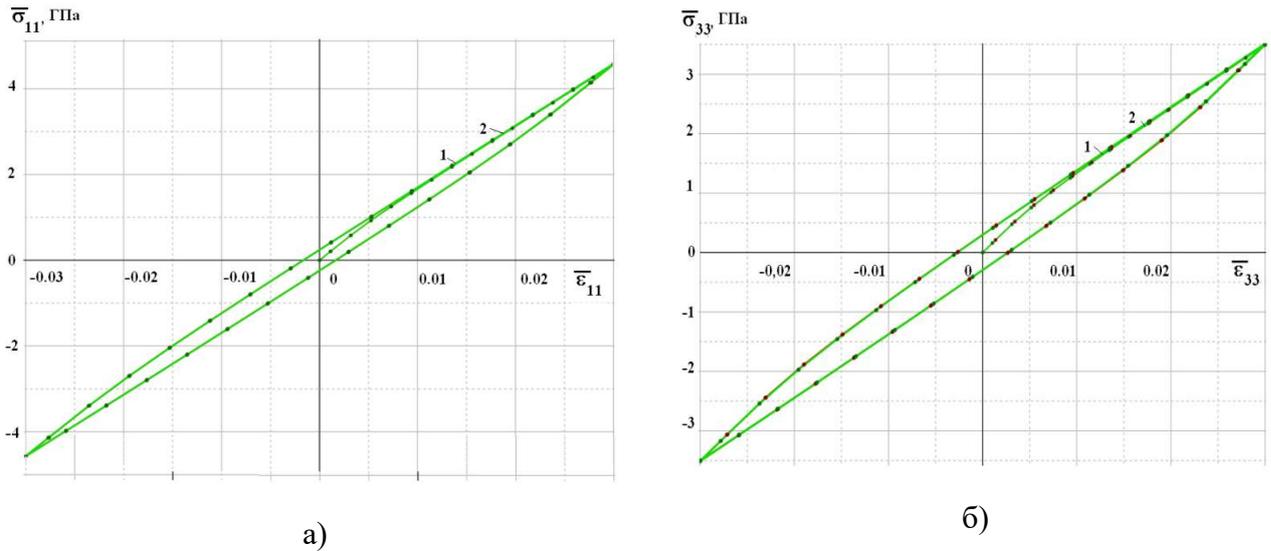


Рисунок 2.16 Циклические диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_{11} = \bar{F}_1^{(n)}(\bar{\epsilon}_{11})$  при продольном растяжении-сжатии в направлении 1 и  $\bar{\sigma}_{33} = \bar{F}_3^{(n)}(\bar{\epsilon}_{33})$  - при поперечном растяжении-сжатии для тканевого КМ, полученные с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  (кривые 1) и с помощью аппроксимации по упрощенной модели ортотропной упруго-пластической среды (кривые 2)

## 2) Циклическое растяжение-сжатие в направлениях 2 и 3

В этих случаях единые кривые деформирования для всех промежутков нагружения строятся по алгоритму, изложенному для циклического растяжения-сжатия в направлении 1. На рисунке 2.16 б) показаны кривые циклического деформирования тканевого КМ при растяжении в направлении 3 (поперечное к слоям ткани), полученные прямым решением задач  $L_{11}$  и с помощью упрощенной модели ортотропного упруго-пластического КМ, построенной из условия наилучшей аппроксимации. Точность аппроксимации также очень высокая, суммарная относительная ошибка – менее 1,0%. Получены следующие значения констант

$$\bar{\alpha}_{20} = 2, \quad \gamma_2 = 0.02 \quad \bar{\alpha}_{30} = 2, \quad \gamma_3 = 0.02$$

## 3) Циклический сдвиг в плоскости (1,2)

В этом случае, с учетом результатов раздела 2.4.4, из формулы (2.141) для 1-го цикла нагружения получаем следующее соотношения для диаграмм деформирования на  $n$ -м промежутке нагружения

$$\Delta \bar{\sigma}_{12}^{(n)} = \bar{\alpha}_4^{(n)} \bar{F}_4 \left( \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{12}^{(n)}}{\bar{\alpha}_4^{(n)}} \right), \quad (2.165)$$

$$\bar{\alpha}_4^{(n)} = \bar{\alpha}_{40} (n-1)^{\gamma_4}.$$

Единая кривая деформирования для всех промежутков нагружения строится по формуле (1.12) с использованием (2.165), в результате получаем зависимость  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_4^{(n)}(\bar{\varepsilon}_{12})$ , меняющуюся на каждом  $n$ -ом промежутке нагружения.

На рисунке 2.17 показаны кривые циклического деформирования 1D КМ при сдвиге в плоскости (1,2), полученные прямым решением задач  $L_{12}$  и с помощью упрощенной модели ортотропного упруго-пластического КМ, построенной из условия наилучшей аппроксимации. Суммарная относительное отклонение кривых – 1,21%. Получены следующие значения констант

$$\bar{\alpha}_{40} = 2, \quad \gamma_4 = 0.021$$

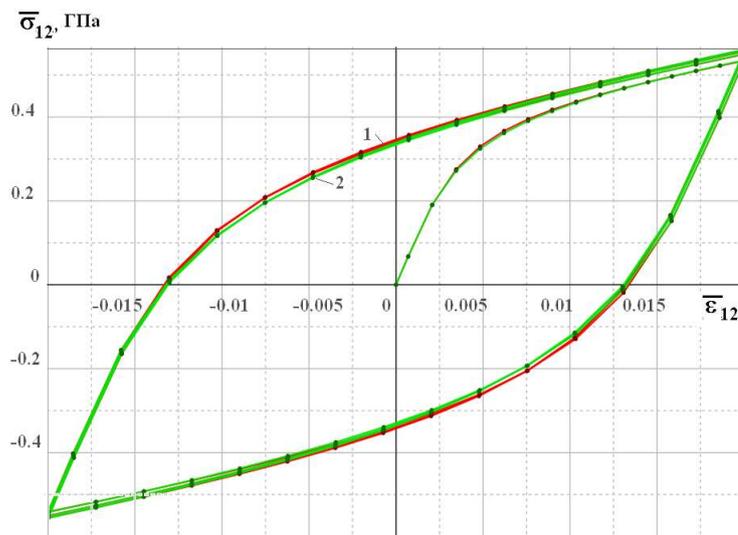


Рисунок 2.17 Циклические диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_{12} = \bar{F}_4^{(n)}(\bar{\varepsilon}_{12})$  при сдвиге в плоскости трансверсальной изотропии для 1D КМ, полученные с помощью прямого решения задач  $L_{pq}$  (кривые 1) и с помощью аппроксимации упрощенной моделью трансверсально-изотропного упруго-пластического КМ (кривые 2)

## 4) Циклический межслойный сдвиг в плоскости (2,3) или (1,3)

В этих случаях единые кривые деформирования для всех промежутков нагружения строятся по алгоритму, изложенному для циклического сдвига в плоскости (1,3). На рисунке 2.18 показаны кривые циклического деформирования тканевого КМ при сдвиге в плоскости (1,3) направлении 3 (поперечное к слоям ткани), полученные прямым решением задач  $L_{13}$  и с помощью упрощенной модели ортотропного упруго-пластического КМ, построенной из условия наилучшей аппроксимации. Точность аппроксимации также очень высокая, суммарная относительная ошибка – менее 1,0%. Получены следующие значения констант

$$\bar{\alpha}_{20}=2, \quad \gamma_2 = 0.02 \quad \bar{\alpha}_{30}=2, \quad \gamma_3 = 0.02$$

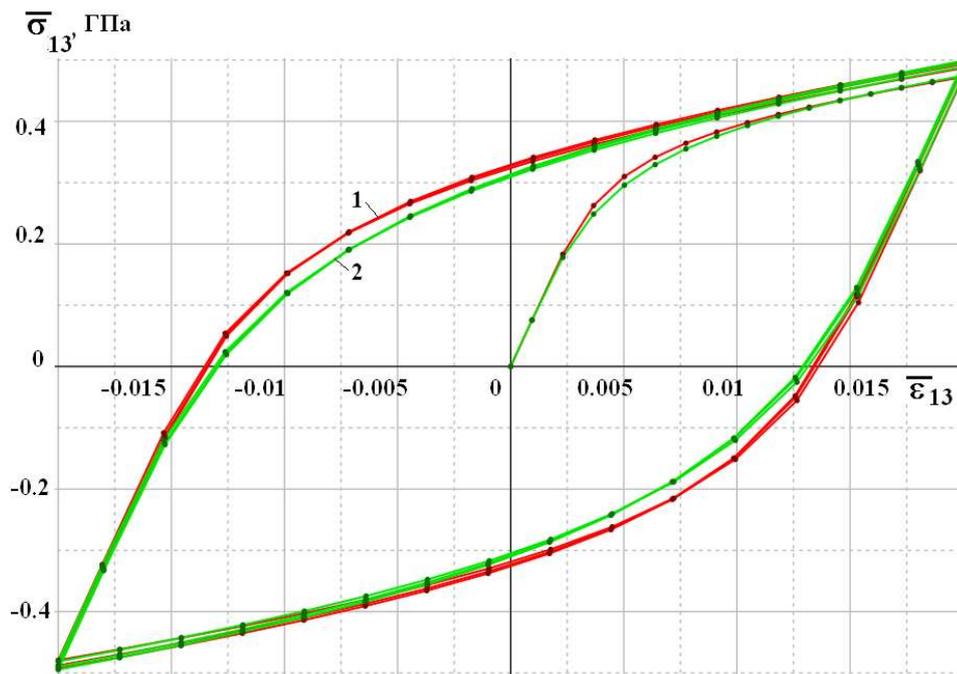


Рисунок 2.18 Циклические диаграммы деформирования  $\bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_5^{(n)}(\bar{\varepsilon}_{13})$  при сдвиге в плоскости (1,3) для тканевого КМ, полученные с помощью прямого решения задач  $L_{13}$  (кривые 1) и с помощью аппроксимации упрощенной моделью ортотропного упруго-пластического КМ (кривые 2)

## Глава 3 Разработка методики решения двух-масштабных задач деформационной теории пластичности для конструкций из композитов при циклическом нагружении

### 3.1 Методика решения двух-масштабных задач деформационной теории пластичности для конструкций из композитов при циклическом нагружении

#### 3.1.1 Постановка осредненной задачи упруго-пластичности КМ при циклическом нагружении с учетом спектральных представлений определяющих соотношений

Рассмотрим постановку осредненной задачи упруго-пластичности композита при циклическом нагружении, сформулированную в разделе 1.2.3

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{\sigma}_{ij,j}^{(n)\{m\}} &= 0, \quad \bar{x}_i \in \bar{V} \\
 \Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} &= \bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}} \Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}}, \quad \bar{x}_i \in \bar{V} \cup \bar{\Sigma} \\
 2\Delta \bar{\varepsilon}_{kl}^{(n)\{m\}} &= \Delta \bar{u}_{k,l}^{(n)\{m\}} + \Delta \bar{u}_{l,k}^{(n)\{m\}}, \\
 \Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}} \Big|_{\Sigma_\sigma} n_j &= S_i^o \Delta \chi^{(n)}(t_m), \quad \Delta \bar{u}_i^{(n)\{m\}} \Big|_{\Sigma_u} = u_i^o \Delta \chi^{(n)}(t_m).
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $\bar{V}$  - область композитной конструкции, являющаяся областью определения для осредненной задачи в глобальных координатах  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{\Sigma}$  - граница области  $\bar{V}$ , а  $\bar{\Sigma}_\sigma$  и  $\bar{\Sigma}_u$  - части этой границы, на которых задан вектор усилий  $S_i^o$  и вектор перемещений. Решение задачи (3.1) ищется относительно вектора перемещений нулевого приближения  $\bar{u}_k^{(n)\{m\}} = u_k^{(n)\{m\}(0)}$ .

Эффективный тензор тензора секущих модулей КМ  $\bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}}$  в этой системе, согласно результатам раздела 2.2, представим в виде спектральных разложений по формуле (2.20)

$$\bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}} = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\bar{z}} l_{\alpha\beta}^{(n)\{m-1\}} \Gamma_{ijkl}^{(\alpha\beta)} + \sum_{\alpha=z_1+1}^{\bar{z}} l_{\alpha\alpha}^{(n)\{m-1\}} \Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}, \quad (3.2)$$

где тензоры  $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha\beta)}$  и  $\Gamma_{ijkl}^{(\alpha)}$  определяются только типом анизотропии композита, и в зависимости от типа микроструктуры ЯП КМ могут иметь, например, выражение (2.34) – для трансверсально-изотропных КМ или (2.114) – для ортотропных КМ. Функции  $l_{\alpha\beta}^{(n)\{m-1\}}$  и  $l_{\alpha\alpha}^{(n)\{m-1\}}$  определяются в соответствии с соотношениями (2.24)

$$l_{\alpha\beta}^{(n)\{m-1\}} = l_{\alpha\beta}^{(n)}(Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)\{m-1\}}), \dots, Y_n(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)\{m-1\}})), \quad \alpha = 1, \dots, z_1, \quad (3.3)$$

$$l_{\alpha\alpha}^{(n)\{m-1\}} = l_{\alpha\alpha}^{(n)}(Y_1(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)\{m-1\}}), \dots, Y_n(\Delta\bar{\varepsilon}^{(n)\{m-1\}})), \quad \alpha = z_1 + 1, \dots, z. \quad (3.4)$$

Для упрощенной модели трансверсально-изотропного упруго-пластического КМ функции  $l_{\alpha\beta}^{(n)\{m-1\}}$  и  $l_{\alpha\alpha}^{(n)\{m-1\}}$  имеют вид (2.47)-(2.54), а для упрощенной модели ортотропного упруго-пластического КМ имеют вид (2.126)-(2.133).

### 3.1.2 Тензоры концентрации напряжений для упруго-пластических КОМПОЗИТОВ

После решения осредненной задачи упруго-пластичности КМ (3.1) определяются поля перемещений  $\Delta\bar{u}_k^{(n)\{m\}}$ , а также поля напряжений  $\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}}$  в области  $\bar{V}$ . Установим соотношения, связывающие поля макро-напряжений  $\Delta\bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}}$  в композитной конструкции с полями микро-напряжений в ЯП  $V_\xi$  КМ

$$\Delta\sigma_{ij}^{(n)\{m\}\{0\}}(\xi_s, \bar{x}_r) = B_{ijkl}^{(n)\{m-1\}}(\xi_s, \bar{x}_r) \Delta\bar{\sigma}_{kl}^{(n)\{m\}}(\bar{x}_r), \quad \bar{x}_i \in \bar{V}, \quad \xi_i \in V_\xi \quad (3.5)$$

Используя формулы (1.69), представим микро-напряжения в ЯП следующим образом

$$\Delta\sigma_{kl}^{(n)\{m\}\{0\}} = \sum_{p,q=1}^3 \Delta\sigma_{kl(pq)}^{(n)\{m\}} = C_{ijpq}^{(n)\{m-1\}\{0\}} \Delta\bar{\varepsilon}_{pq}^{(n)\{m\}}, \quad (3.6)$$

здесь введено обозначение для тензора

$$C_{ijpq}^{(n)\{m-1\}\{0\}} = \frac{\Delta\sigma_{ij(pq)}^{(n)\{m-1\}}}{\Delta\bar{\varepsilon}_{pq}^{(n)\{m-1\}}} \quad (\text{по } p, q \text{ суммирования нет}). \quad (3.7)$$

Выражая компоненты тензора деформации  $\Delta \bar{\varepsilon}_{pq}^{(n)\{m\}}$  из обратных эффективных определяющих соотношений (1.169), из (3.7) получаем искомую формулу (3.5), в которой тензоры  $B_{ijkl}^{(n)\{m\}}(\xi_s, \bar{x}_r)$ , называемые тензорами концентрации напряжений, имеют вид

$$B_{ijkl}^{(n)\{m-1\}} = C_{ijpq}^{(n)\{m-1\}(0)} \bar{\Pi}_{pqkl}^{(n)\{m-1\}}. \quad (3.8)$$

Таким образом для определения полей микронапряжений в конкретной ЯП композитной конструкции, характеризуемой координатами  $(\xi_s, \bar{x}_r)$ , необходимо решить осредненную задачу (3.1), и набор локальных задач  $L_{pq}$  для значений осредненного тензора деформации  $\Delta \bar{\varepsilon}_{pq}^{(n)\{m\}}(\bar{x}_r)$  в выбранной точке  $\bar{x}_r$  конструкции.

### 3.1.3 Применение МКЭ для решения осредненных задач упруго-пластичности композитов при циклическом нагружении

Для решения осредненной задачи (3.1) применяется метод конечного элемента, так же, как и для решения локальных задач на ЯП (см. раздел 1.3). Для этого рассматривается вариационная постановка задачи (3.1), которая имеет вид (3.9)

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma \, dV = \int_{\Sigma} \delta U^T S \, d\Sigma. \quad (3.9)$$

но здесь координатные столбцы перемещений:  $U$ , напряжений  $\sigma$ , деформаций  $\varepsilon$  и поверхностных усилий  $S$  вводятся следующим образом:

$$U = [\Delta u_1^{(n)\{m\}}, \Delta u_2^{(n)\{m\}}, \Delta u_3^{(n)\{m\}}]^T, \quad \sigma = [\Delta \bar{\sigma}_{11}^{(n)\{m\}}, \Delta \bar{\sigma}_{22}^{(n)\{m\}}, \Delta \bar{\sigma}_{33}^{(n)\{m\}}, \Delta \bar{\sigma}_{12}^{(n)\{m\}}, \Delta \bar{\sigma}_{13}^{(n)\{m\}}, \Delta \bar{\sigma}_{23}^{(n)\{m\}}]^T$$

$$\varepsilon = [\Delta \bar{\varepsilon}_{11}^{(n)\{m\}}, \Delta \bar{\varepsilon}_{22}^{(n)\{m\}}, \Delta \bar{\varepsilon}_{33}^{(n)\{m\}}, \Delta \bar{\varepsilon}_{12}^{(n)\{m\}}, \Delta \bar{\varepsilon}_{13}^{(n)\{m\}}, \Delta \bar{\varepsilon}_{23}^{(n)\{m\}}]^T, \quad S = \Delta \chi^{(n)}(t_m) [S_1^0, S_2^0, S_3^0]^T \quad (3.10)$$

Перемещения  $\Delta u_i^{(n)\{m\}}$  удовлетворяют кинематическим условиям на  $\bar{\Sigma}_u$ .

Определяющие соотношения в (3.1) и соотношения Коши с использованием координатных столбцов записывают следующим образом:

$$\sigma = C\varepsilon, \quad \varepsilon = DU \quad (3.11)$$

где  $C$  – матрица упругости размером  $[6 \times 6]$ , составленная из компонентов тензора  $\bar{C}_{ijkl}^{(n)\{m-1\}}$  по формулам (2.29), а  $D$  – матрица линейных дифференциальных операторов дифференцирования по координатам  $\bar{x}_r$ .

С учётом отношений (3.11) вариационное уравнение (3.10) можно представить в виде:

$$\int_V (D\delta U)^T CDU dV = \int_\Sigma \delta U^T S d\Sigma \quad (3.12)$$

Аппроксимируем область  $\tilde{V}$  с помощью объединения конечных элементов, например, в форме тетраэдров:  $\tilde{V} = \bigcup_{e=1} V_e$ . Аппроксимируем кинематически допустимое поле  $U$  в каждом КЭ стандартными функциями координат  $\bar{x}_r$ :  $U = \Phi(\bar{x}_r)q$ , здесь  $q = [q_1 \dots q_z]^T$  – координатный столбец неизвестных перемещений в узлах КЭ, а  $\Phi(\bar{x}_r)$  – матрица функций формы. Тогда получаем:  $\varepsilon = Bq$ , где  $B = D\Phi$  – матрица деформаций. Подставляя это выражение в (3.12), получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для одного КЭ:

$$K_e q = f_e, \quad (3.13)$$

где:

$$K_e = \int_V B^T C B dV, \quad f_e = \int_\Sigma \Phi^T S d\Sigma \quad (3.14)$$

матрица жесткости КЭ и столбец нагрузок КЭ. Объединяя СЛАУ (3.14) для всех КЭ, получаем глобальную СЛАУ для всей рассматриваемой области  $\tilde{V}$ .

Для решения глобальной СЛАУ применялся метод сопряжённых градиентов [14]. Решая СЛАУ находим перемещения  $q$  в узлах, по которым вычисляем псевдоперемещения:  $U = \Phi q$ , деформации:  $\varepsilon = Bq$  и напряжения  $\sigma = CBq$  в КЭ.

Данный алгоритм конечно-элементного решения осредненной задачи (3.1) для циклического упруго-пластического деформирования был реализован как

составная часть программного комплекса SMCM, разработанного в Научно-образовательном центре «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» (НОЦ «Симплекс») МГТУ им.Н.Э.Баумана [66,67,69-77,82].

### 3.2 Задача о 4-х точечном изгибе балки из упруго-пластического композиционного материала при циклическом нагружении

#### 3.2.1 Трехмерная постановка задачи о 4-х точечном изгибе балки

Рассмотрим задачу о 4-х точечном изгибе балки в форме прямоугольного параллелепипеда из композиционного упруго-пластического материала при циклическом нагружении (рис.3.1).

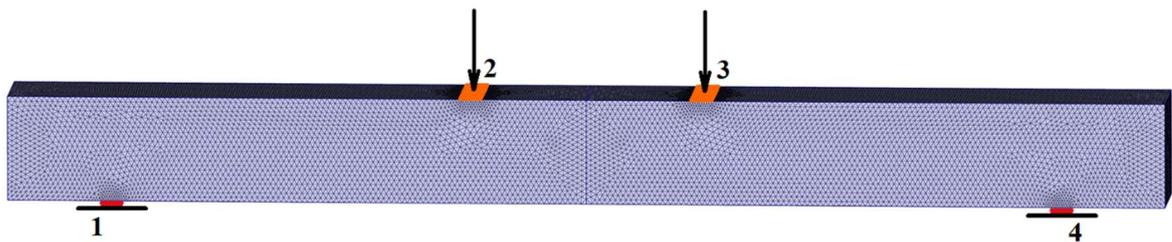


Рисунок 3.1 Компьютерная 3D модель и КЭ-сетка в задаче 4-х точечного изгиба балки (цифрами обозначены номера площадок)

На двух площадках (№ 2 и 3) приложена поперечная сила, суммарной величиной  $P$ , еще две площадки (№ 1 и 4) на противоположной стороне балки полагаются заземленными в вертикальном направлении и допускающими скольжение в двух других направлениях. Все остальные поверхности балки свободны от нагружения. При рассмотрении  $1/4$  задачи появляются условия симметрии на плоскости разреза.

Ось  $O\bar{x}_1$  ( $Ox$ ) ориентирована по наибольшему ребру балки (ось изгиба балки), ось  $O\bar{x}_2$  ( $Oy$ ) ориентирована по направлению действия силы (по вертикали в

плоскости рисунка 3.1), а ось  $O\bar{x}_3$  ( $Oz$ ) ориентирована в поперечном направлении. Здесь и далее для координат  $\bar{x}_i$  используется переобозначение:  $\bar{x}_1 = x, \bar{x}_2 = y, \bar{x}_3 = z$ , аналогичное переобозначение используется и для компонент вектора перемещений  $\Delta \bar{u}_k^{(n)\{m\}}$  и тензора напряжений  $\Delta \bar{\sigma}_{ij}^{(n)\{m\}(0)}$ . При визуализации результатов решения макро-задачи задачи (3.1) и (3.2) будем использовать только конечный результат для номера  $m$  итерации, для которого решение задачи (3.1), (3.2) полагается сошедшимся. При циклическом нагружении также будем использовать формулы (1.86) для суммарного представления перемещений и напряжений в текущий момент времени нагружения или разгрузки. С учетом сделанных замечаний для решения макро-задачи (3.1) и (3.2) будем использовать обозначения:  $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$  - для перемещений и  $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\sigma}_{xy}, \bar{\sigma}_{yz}, \bar{\sigma}_{xz}$  - для напряжений в текущий момент времени  $t$ .

При конкретной численной реализации геометрические размеры задачи были выбраны следующими (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Геометрические параметры в задаче о 4-х точечном изгибе балки

Размеры балки	
по оси $Ox$ , м	0,220
по оси $Oy$ , м	0,020
по оси $Oz$ , м	0,040
Размеры площадки приложения нагрузки в расчетной области	
по оси $Ox$ , м	0,004
по оси $Oz$ , м	0,020

Балка полагалась изготовленной из упруго-пластического ортотропного тканевого КМ, при этом нити тканевого КМ полагались трансверсально-изотропными упруго-пластическими.

оси ортотропии которого совпадают с осями декартовой системы координат OXYZ, ориентированной по ребрам балки. Модель ортотропного упруго-пластического композита представлена в разделе 2.4.2, а методика определения констант этой модели предложена в разделе 2.4.3.

Для ортотропного КМ матрица представляла собой Al сплав с характеристиками, приведенными в разделе 2.2.9, а наполнитель представлял собой ткань из армирующих углеродных волокон. Углеродные волокна полагались криволинейно - трансверсально-изотропными упруго-пластическими материалами, ось трансверсальной изотропии которых ориентирована по касательной к кривой, являющейся образующей для отдельной нити в ткани. Упруго-пластические характеристики нити в собственной системе координат криволинейной трансверсальной изотропии рассчитывались предварительно с помощью модели 1D упруго-пластического КМ (раздел 2.3). Концентрация волокон в нити, рассматриваемой как 1D композит, составляла 70%, концентрация нитей в ткани 50%.

Константы модели эффективного упруго-пластического ортотропного тканевого КМ, вычисленные по указанной методике, приведены в разделе 2.4.11.

### **3.2.2 Результаты моделирования полей макро-перемещений и макро-напряжений**

На рисунке 3.2 показана циклическая диаграмма деформирования балки  $P-w$  (нагрузка – прогиб) из тканевого упруго-пластического КМ при 4-х точечном изгибе для 3-х циклов нагружения: нагрузка на 1-м цикле, полная разгрузка и нагрузка на 2-м цикле.

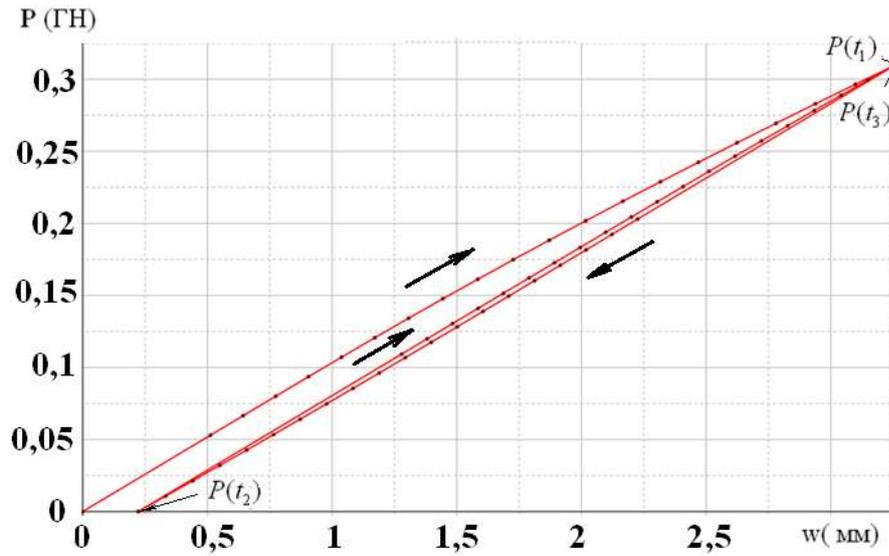
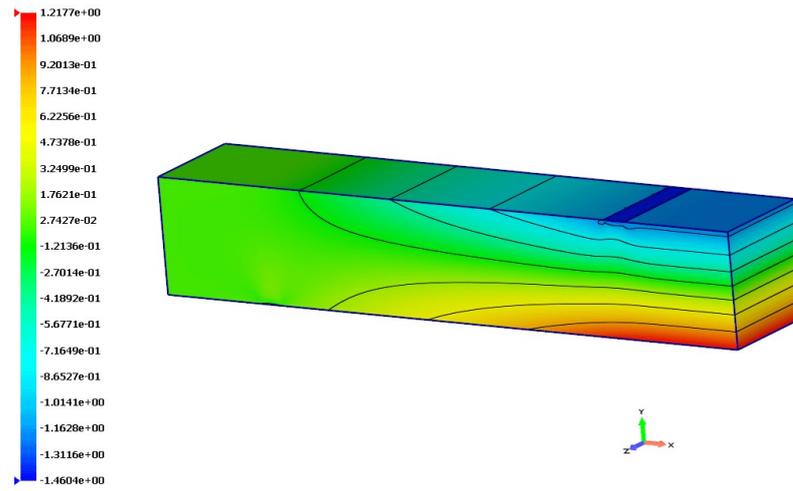


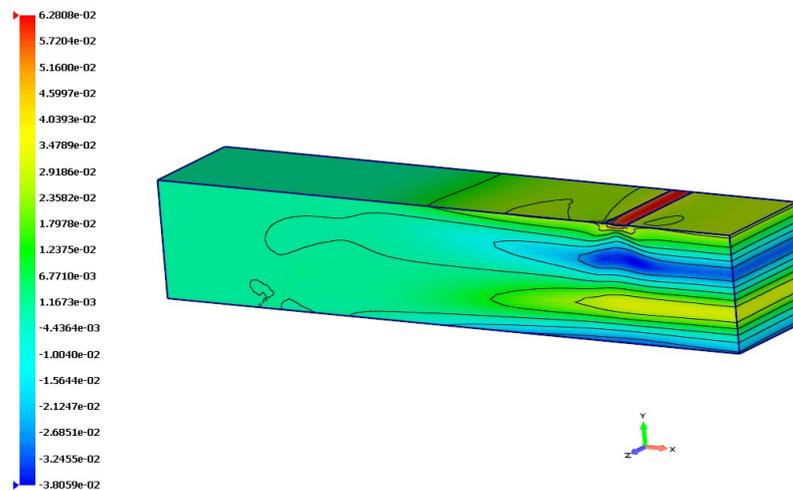
Рисунок 3.2 Циклическая диаграмма деформирования балки из ТКМ при 4-х точечном изгибе (нагрузка  $P$  (ГН) – максимальный прогиб  $w$  (мм))

На рисунках 3.3-3.10 показаны результаты моделирования полей макро-напряжений в балке из ТКМ при 4-х точечном изгибе для 3-х моментов нагружения:  $t_1$  – для максимального значения в 1-м цикле нагружения,  $t_2$  – для момента полной разгрузки,  $t_3$  – для момента максимального значения во 2-м цикле нагружения.

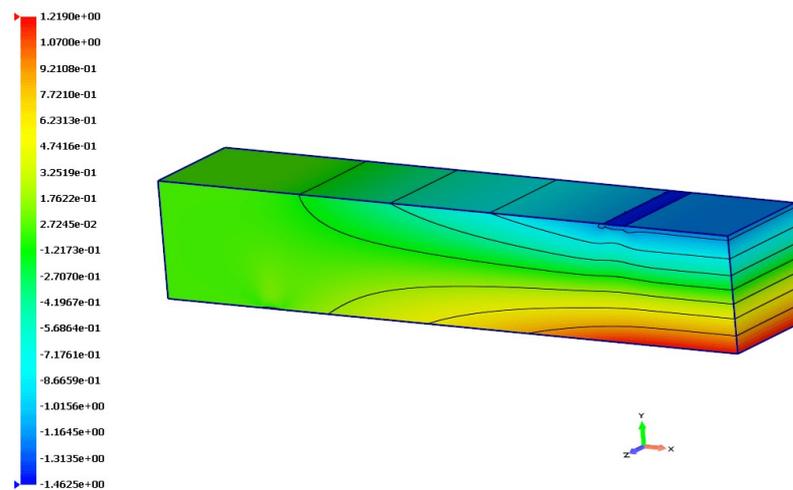
На первом цикле нагружения при  $t_1$  изгибное напряжение  $\bar{\sigma}_{xx}$  зависит от поперечной координаты  $y$  практически линейно (рис. 3.3 а). Однако после разгрузки при  $t = t_2$  напряжения в балке хоть и уменьшаются почти на 2 порядка, но все же отличны от нуля в области площадок опирания балки и приложения нагрузок (рис.3.3 б). Также отличными от нуля оказываются напряжения  $\bar{\sigma}_{xx}(t_2, \bar{x}_r)$  в средней части балки, что обусловлено пластическими деформациями, возникшими в зонах максимальных изгибных напряжений на этапе активного нагружения. При повторном пластическом нагружении характер распределения напряжения  $\bar{\sigma}_{xx}(t_3, \bar{x}_r)$  в целом повторяет аналогичный для напряжений  $\bar{\sigma}_{xx}(t_2, \bar{x}_r)$  (рис.3.3 в).



а)



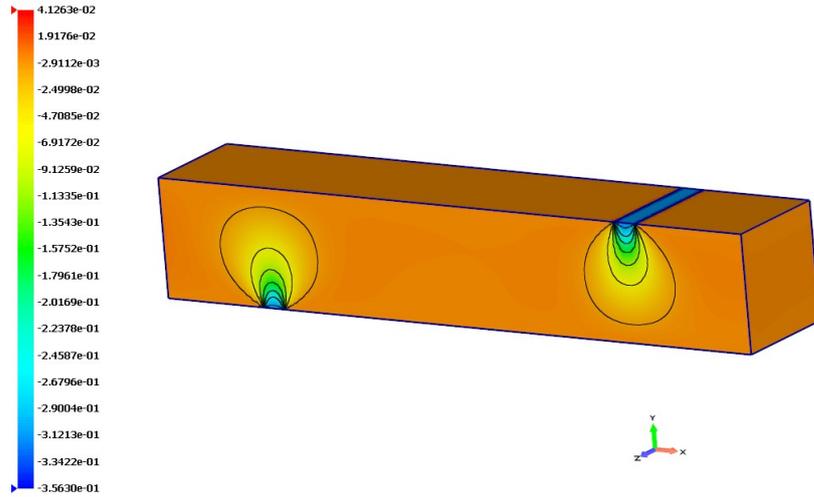
б)



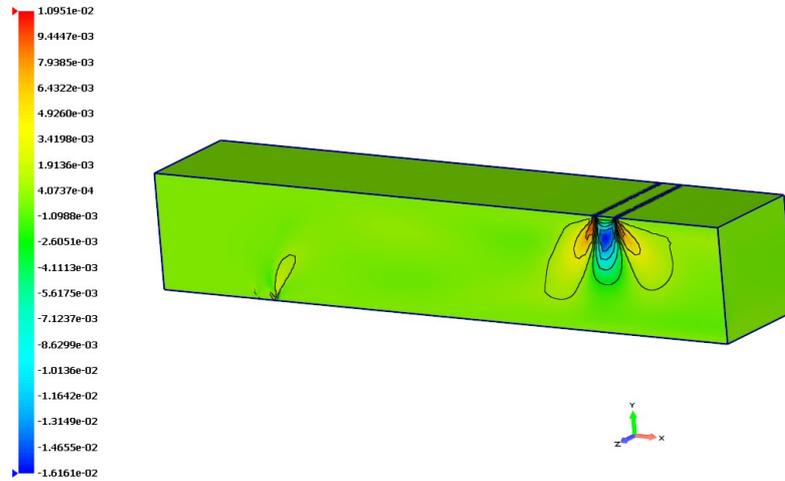
в)

Рисунок 3.3 Поля изгибного напряжения  $\bar{\sigma}_{xx}$  (ГПа) в балке из упруго-пластического ТКМ при 4-х точечном изгибе: а) – первый цикл нагружения, б) – полная разгрузка, в) – второй цикл нагружения

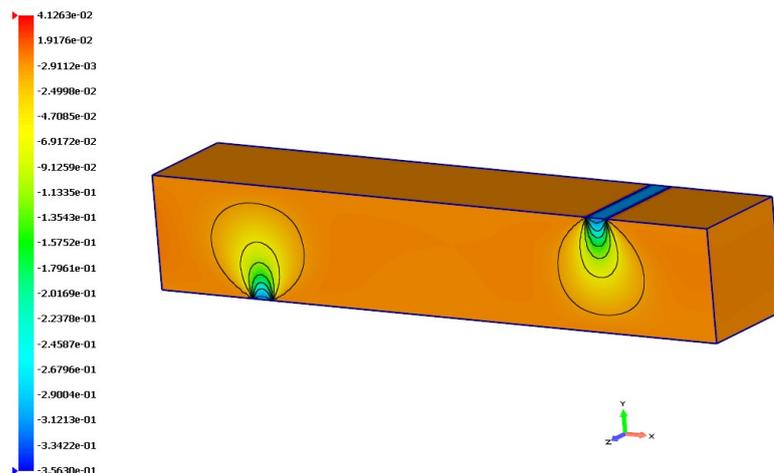
Поперечные нормальные напряжения  $\bar{\sigma}_{yy}(t_1, \bar{x}_r)$ , при первом нагружении, как и для 1D КМ, имеют локальные экстремумы в окрестности площадок приложения сил и опор, эти напряжения являются сжимающими (рис.3.4 а). При разгрузке локальные экстремумы сохраняются в этих зонах, но разделяются на тройные: по 2 локальных максимума и один локальный минимум в окрестности каждой площадки (рис.3.4 б). При повторном пластическом нагружении характер распределения напряжения  $\bar{\sigma}_{yy}(t_3, \bar{x}_r)$  в целом повторяют аналогичный характер напряжений  $\bar{\sigma}_{yy}(t_1, \bar{x}_r)$  (рис.3.4 в).



а)



б)

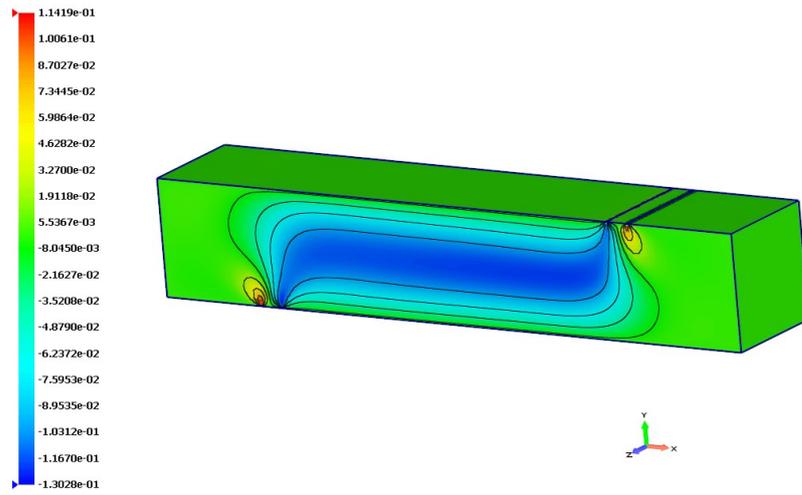


в)

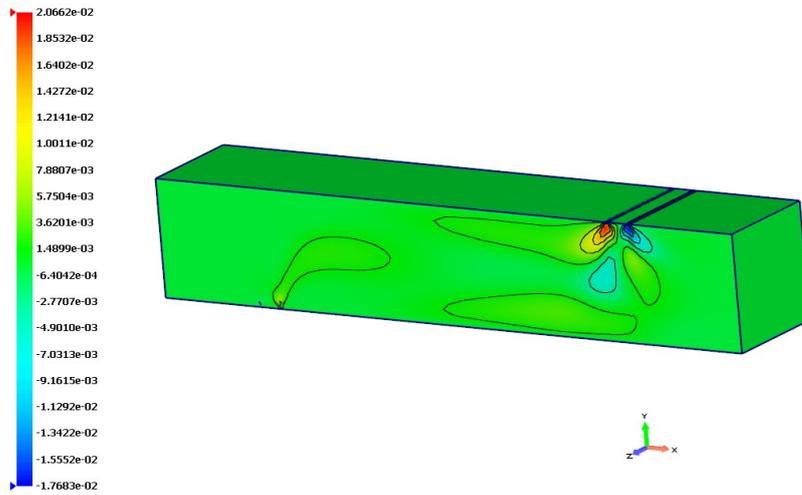
Рисунок 3.4 Поперечное напряжение  $\bar{\sigma}_{yy}$  (ГПа) в балке из упруго-пластического ТКМ при 4-х точечном изгибе: а) – первый цикл нагружения, б) – полная разгрузка, в) – второй цикл нагружения

Распределение касательных напряжений  $\bar{\sigma}_{xy}(t_1, x, y, z)$  в балке из ТКМ композита, также как и для балки из 1D КМ, имеет целую область максимальных значений, которая располагается на срединной поверхности балки между площадками приложения нагрузок и опор балки (рис.3.5 а)). Между двумя площадками приложения сил касательные напряжения  $\bar{\sigma}_{xy}(t_1, x, y, z)$  практически отсутствуют, т.е. эта зона находится в состоянии чистого продольного растяжения –сжатия, так же как для случая 1D КМ. Однако в отличие от 1D КМ при полной разгрузке балки, при  $t_2$ , область остаточных напряжений  $\bar{\sigma}_{xy}(t_2, x, y, z)$  между площадками приложения нагрузок и опор балки практически отсутствует, (рис.3.5 б)), касательные остаточные напряжения для ТКМ в основном локализируются непосредственно в окрестности площадок приложения нагрузок и опор.

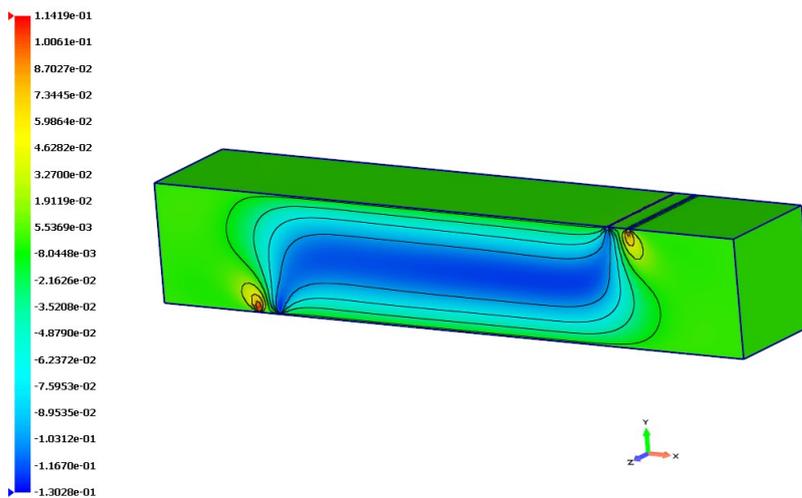
При повторном пластическом нагружении характер распределения напряжения  $\bar{\sigma}_{xy}(t_3, x, y, z)$  в целом повторяет аналогичный характер напряжений  $\bar{\sigma}_{xy}(t_1, x, y, z)$  (рис.3.5 в)).



a)



b)



B)

Рисунок 3.5 Касательное напряжение  $\bar{\sigma}_{xy}$  (ГПа) в балке из упруго-пластического ТКМ при 4-х точечном изгибе: а) – первый цикл нагружения, б) – полная разгрузка, в) – второй цикл нагружения

На рисунке 3.6 показано поле параметра пластичности  $\omega_1^{(1)}$  в балке из ТКМ при 4-х точечном изгибе для максимального значения в 1-м цикле нагружения, которое имеет максимальные значения среди других параметров пластичности  $\omega_\alpha^{(1)}$ . Характер распределения параметра пластичности  $\omega_1^{(1)}$ , в целом подобен распределению изгибных напряжений  $\bar{\sigma}_{xx}(t_1, \bar{x}_r)$ .

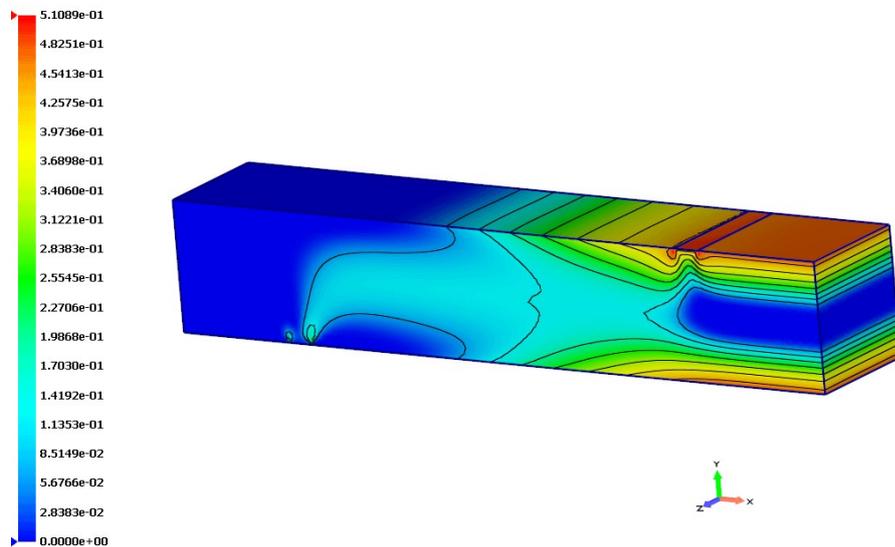


Рисунок 3.6 Параметр пластичности  $\omega_1^{(1)}$  в балке из ТКМ при 4-х точечном изгибе (момент нагружения  $t_1$ ).

### 3.2.3 Результаты моделирования полей микро-напряжений в упруго-пластической балке из ТКМ

На рисунке 3.7 показано поле макро-напряжений  $\bar{\sigma}_{xx}(t_1, \bar{x}_r)$  в балке из ТКМ при 4-х точечном изгибе в момент нагружения  $t_1$  (а) и поле микронапряжений  $\sigma_{11}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  в ЯП для выделенных характерных контрольных точек КТ 1, 2, 3 и 4.

Расположение контрольных точек в балке показано на рисунке 3.7 а. Алгоритм расчета микро-напряжений приведен в разделе 3.2.4.

Максимальные значения микронапряжений достигаются в КТ 1, которая располагается в зоне максимальных изгибных макро-напряжений  $\bar{\sigma}_{xx}(t_1, \bar{x}_r)$  в точке максимального прогиба бруса. Очевидно, что максимальные по модулю значения продольных микронапряжений  $\sigma_{11}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  в рамках одной ЯП реализуются в нитях, обладающих значительно более высоким модулем упругости, чем матрица. В КТ 1 и КТ 3 микро-напряжения  $\sigma_{11}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  в нитях, ориентированных по направлению  $O\xi_1$ , являются положительными, а в КТ2 и КТ4 эти микро-напряжения в этих же нитях являются отрицательными. Наибольшие значения микро-напряжений  $\sigma_{11}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  реализуются в тех частях нитей, в которых максимальный угол изгиба нитей (рис.3.7))

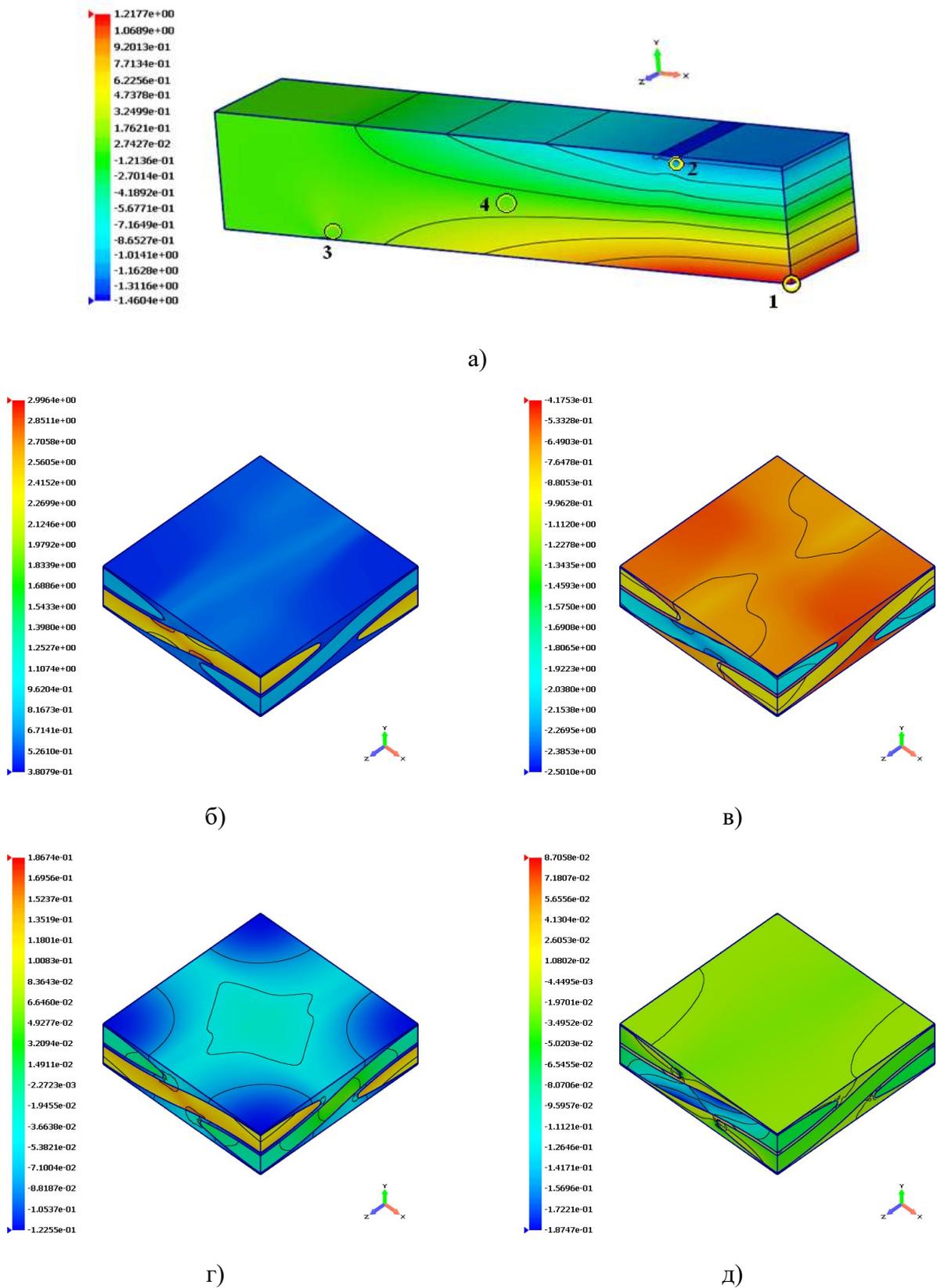


Рисунок 3.7 Поля макронапряжения  $\bar{\sigma}_{xx}(t_1, \bar{x}_r)$  (ГПа) (а) и микро-напряжений  $\sigma_{11}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  (ГПа) в ЯП для контрольных точек № 1 (б), № 2 (в), № 3 (г) и № 4 (д) при 4-х точечном изгибе балки из ТКМ.

На рисунке 3.8 показано поле поперечных напряжений  $\bar{\sigma}_{yy}(t_1, \bar{x}_r)$  в балке из 1D КМ при 4-х точечном изгибе в моменте нагружения 1 (а) и поля микронапряжений  $\sigma_{22}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  в ЯП для выделенных характерных контрольных точек КТ №1,2,3 и 4. В КТ 1 в зоне максимального прогиба балки, несмотря на то, что макро-напряжения  $\bar{\sigma}_{yy}(t_1, \bar{x}_r)$  являются относительно малыми и сжимающими, микро-напряжения  $\sigma_{22}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  достигают относительно больших положительных значений (рис.3.8 б) в зоне контакта перекрестных систем нитей: как в самих контактирующих частях нитей, так и в матрице. В КТ2 и КТ 3, в окрестности площадок приложения нагрузок и опор балки, микро-напряжения  $\sigma_{22}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  являются сжимающими, как в нитях, так и в матрице (рис.3.8 в) и г)). Максимальные по абсолютной величине значения этих напряжений достигаются в нитях, в матрице значения этих напряжений в 2-3 раза меньше. В КТ 4, в которой макро-напряжения  $|\bar{\sigma}_{yy}(t_1, \bar{x}_r)|$  относительно малы, микро-напряжения  $\sigma_{22}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  также относительно малы, как в матрице, так и в нитях, по сравнению с напряжениями в других КТ.

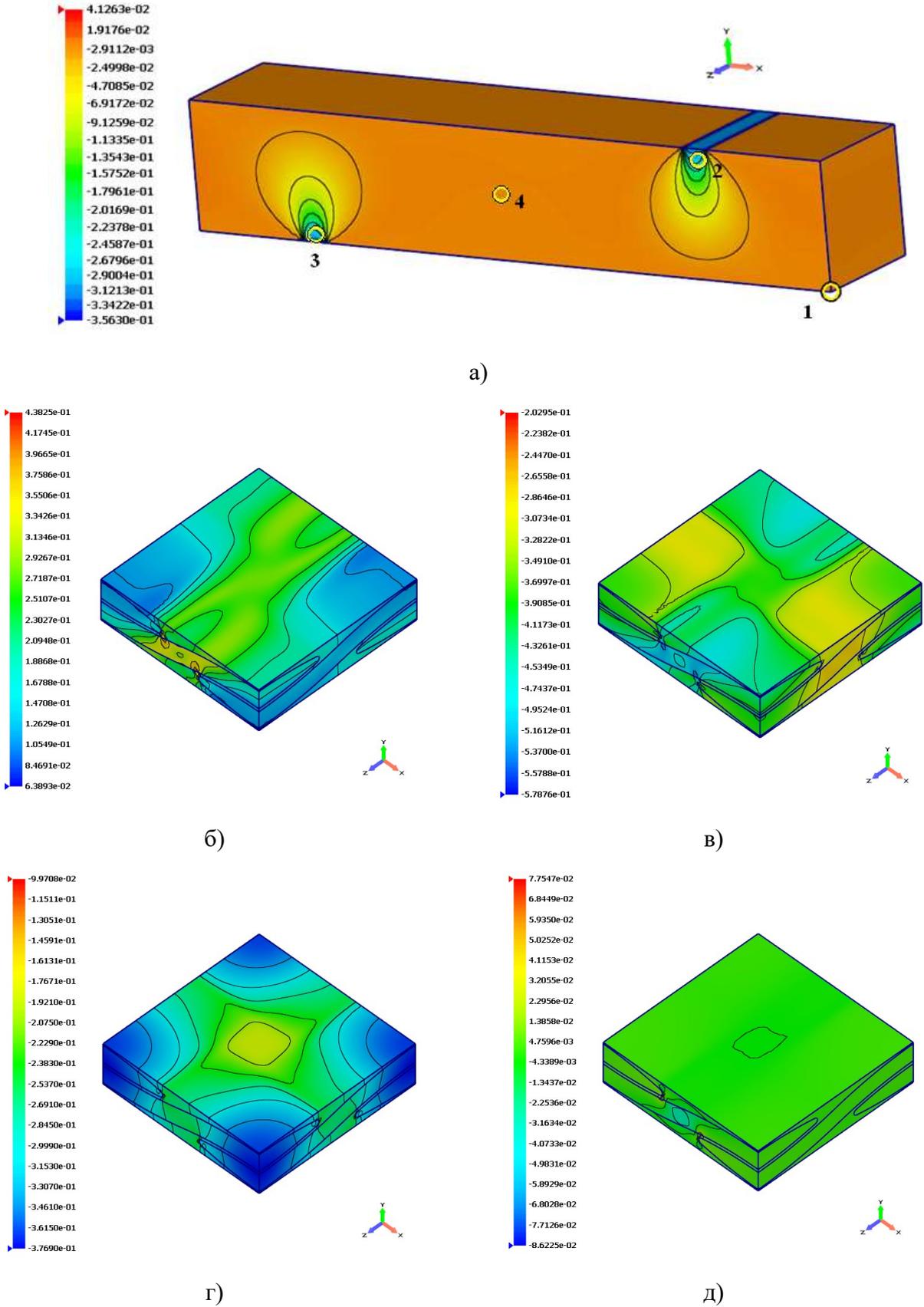


Рисунок 3.8 Поля макронапряжения  $\bar{\sigma}_{yy}(t_1, \bar{x}_r)$  (ГПа) (а) и микро-напряжений  $\sigma_{22}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  (ГПа) в ЯП для КТ № 1 (б), № 2 (в), № 3 (г) и № 4 (д) при 4-х точечном изгибе балки из ТКМ.

На рисунке 3.9 показано поле касательных макро-напряжений  $\bar{\sigma}_{xy}(t_1, \bar{x}_r)$  в балке из 1D КМ при 4-х точечном изгибе в момент нагружения  $t_1$  (а) и поля микронапряжений  $\sigma_{12}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  в ЯП для выделенных характерных контрольных точек КТ №1,2,3 и 4. Во всех этих точках значения касательных микронапряжений  $|\sigma_{12}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)|$  относительно велики: в КТ 1 и КТ 2 они достигают наибольших значений, примерно 0,5 ГПа - в нитях, в зонах их наибольшего искривления (рис.3.9 б) и в)). В КТ 3 и КТ 4 значения касательных микронапряжений  $|\sigma_{12}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)|$  несколько ниже: примерно 0,17 ГПа, эти значения достигаются как в нитях, так и в матрице (рис.3.9 д). В КТ3 значения микронапряжений  $|\sigma_{12}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)|$  - наименьшие из рассмотренных: они не превосходят 0.07 ГПа, и эти максимумы реализуются также в нитях, в зонах их наибольшего искривления (рис.3.9 г).

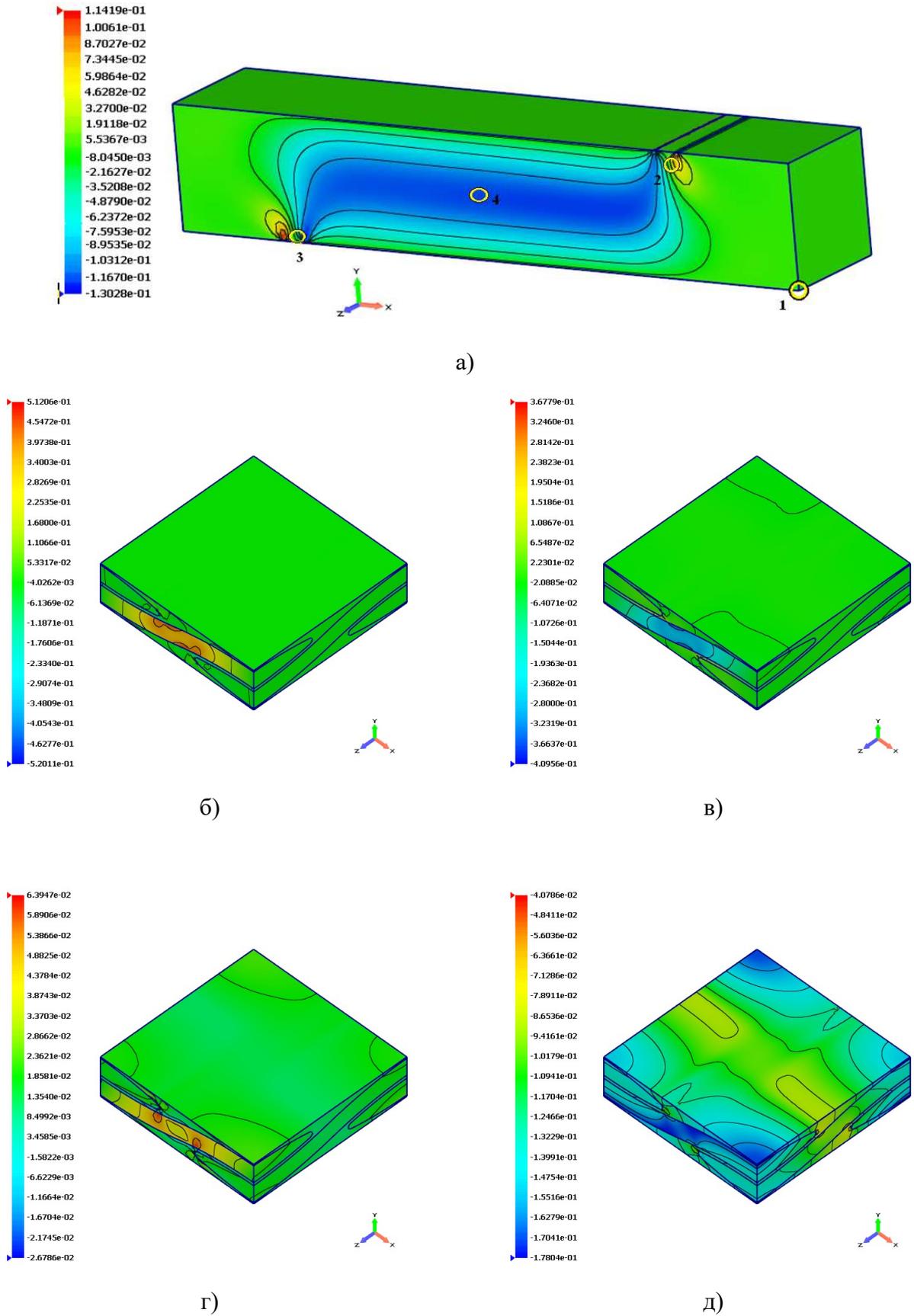


Рисунок 3.9 Поля макронапряжения  $\bar{\sigma}_{xy}(t_1, \bar{x}_r)$  (ГПа) (а) и микро-напряжений  $\sigma_{12}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  (ГПа) в ЯП для КТ № 1 (б), № 2 (в), № 3 (г) и № 4 (д) при 4-х точечном изгибе балки из ТКМ

На рисунках 3.10 показаны поля максимального параметра макро-пластичности

$$\omega_{\max}^{(1)}(t_1, \bar{x}_r) = \max_{\alpha=1, \dots, 6} \{\omega_{\alpha}^{(1)}(t_1, \bar{x}_r)\},$$

в балке из ТКМ при 4-х точечном изгибе в момент нагружения 1 (а) и поле максимального параметра микро-пластичности в ЯП

$$\omega_{\max}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r) = \max_{\alpha=1, \dots, 4} \{\omega_{\alpha}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)\}, \quad \xi_s \notin V_{\xi_m},$$

$$\omega_{\max}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r) = \omega(t_1, \xi_s, \bar{x}_r), \quad \xi_s \in V_{\xi_m}$$

для выделенных характерных контрольных точек КТ №1,2,3 и 4.

В ЯП максимум рассматривается по всем функциям пластичности  $\omega_{\alpha}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  в нитях в рамках одной ЯП ( $\xi_s \notin V_{\xi_m}$ ) или он совпадает с функцией пластичности матрицы  $\omega(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  ( $\xi_s \in V_{\xi_m}$ , где  $V_{\xi_m}$  - область, соответствующая матрице в одной ЯП).

В балке максимум параметра макро-пластичности рассматривается по всем функциям пластичности  $\omega_{\alpha}^{(1)}(t_1, \bar{x}_r)$  в тканевом ТКМ.

Параметры пластичности  $\omega_{\max}^{(1)}(t_1, \bar{x}_r)$  и  $\omega_{\max}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  характеризуют «степень» пластических деформаций в данной точке конструкции и материала: зоны нулевых значений параметров пластичности показывают, что в данных зонах материал (нити, матрица или ТКМ) деформируются упруго, а зоны максимальных значений параметров пластичности означают, что материал в данной области находится в области максимальных достигнутых пластических деформаций.

Параметр макро-пластичности  $\omega_{\max}^{(1)}(t_1, \bar{x}_r)$  в ТКМ в данной задаче, определяется, главным образом, двумя факторами: изгибными напряжениями  $\bar{\sigma}_{xx}(t_1, \bar{x}_r)$  и касательными макро-напряжениями  $\bar{\sigma}_{xy}(t_1, \bar{x}_r)$ , поэтому распределения функций  $\omega_{\max}^{(1)}(t_1, \bar{x}_r)$  содержат в себе максимумы макро-напряжений  $\bar{\sigma}_{xx}(t_1, \bar{x}_r)$  (рис.3.7 (а)) в КТ1 и КТ2 и макро-напряжений  $\bar{\sigma}_{xy}(t_1, \bar{x}_r)$  (рис. 3.9 (а)) в КТ3 и КТ4 (рис.3.10 а).

Параметр микро-пластичности  $\omega_{\max}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  в ЯП в нитях определяется, главным образом пластическими свойствами матрицы при поперечном растяжении

и сдвигах. При продольном растяжении нитей ввиду упругого характера деформирования моноволокон, пластические свойства у нитей практически отсутствуют (см. раздел 3.3). Эти особенности пластических свойств нитей характеризуют специфические распределения параметра  $\omega_{\max}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  в ЯП в разных контрольных точках. В контрольных точках КТ1 и КТ2, нити, ориентированные в направлении оси балки ОХ, находятся чисто в упругом состоянии: пластические свойства нитей, которые могут быть обусловлены только поперечными деформациями и сдвигами, в этих нитях не реализуются. В тоже время нити 2-го семейства, ориентированные в направлении оси ОZ балки, имеют значительные пластические деформации, обусловленные теми же изгибными напряжениями  $\bar{\sigma}_{xx}(t_1, \bar{x}_r)$ . Матрица, окружающая оба семейства нитей в ЯП в эти КТ1 и КТ2, также находится в пластическом состоянии, однако «степень» пластических деформаций, характеризуемая параметром  $\omega_{\max}(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$ , в матрице ниже, чем в поперечных нитях 2-о семейства, поскольку нити при поперечном растяжении имеют более низкий предел пластичности, чем сама матрица (см. раздел 2.3.10).

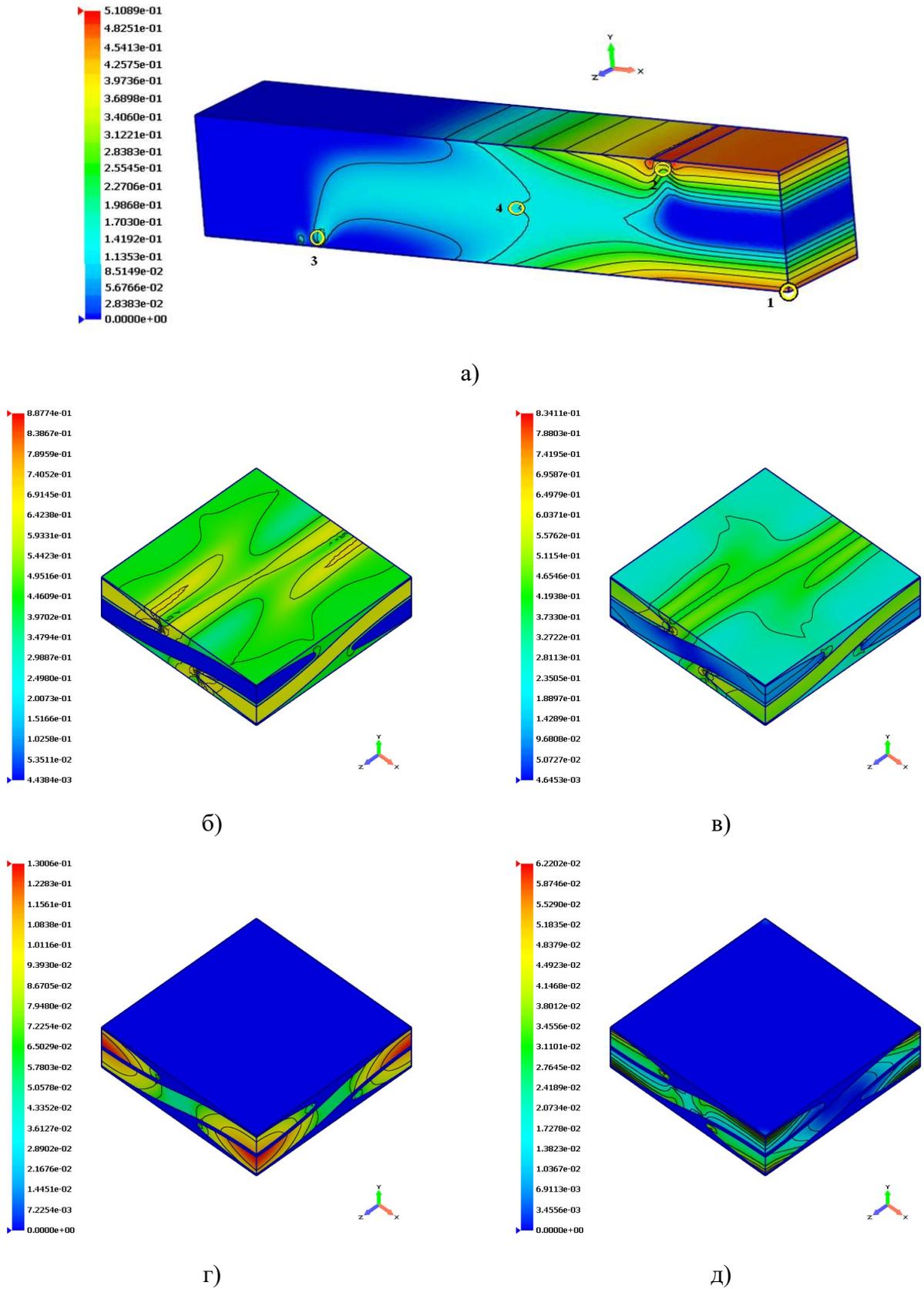


Рисунок 3.10 Поля параметра пластичности  $\omega_4^{(1)}(t_1, \bar{x}_r)$  (а) и параметра микро-пластичности  $\omega(t_1, \xi_s, \bar{x}_r)$  в ЯП для КТ № 1 (б), № 2 (в), № 3 (г) и № 4 (д) при 4-х точечном изгибе балки из

ТКМ.

В КТ 3 и 4 наблюдается несколько иная картина: в этих точках максимальными являются сдвиговые макро-напряжения  $\bar{\sigma}_{xy}(t_1, \bar{x}_r)$ , поэтому ЯП в этих точках находятся в состоянии близким к чистому межслоевому сдвигу. При межслоевом сдвиге касательные напряжения в нитях обеих семейств, ориентированных по направлениям ОХ и ОУ, также вносят основной вклад в пластические деформации, поэтому оба семейства нитей находятся в пластическом состоянии (рис.3.10 г и д). Матрица, окружающая нити, при этом остается в упругой зоне, вследствие указанного выше эффекта о наличии более низкого предела пластичности в нитях при сдвигах и поперечном растяжении, чем в чистой матрице.

## Заключение

- 1) предложен вариант метода асимптотического осреднения упруго-пластических композиционных материалов при циклических нагружениях на основе деформационной теории пластичности А.А.Ильюшина – В.В. Москвитина;
- 2) разработана методика построения микро-структурных эффективных определяющих соотношений деформационной теории анизотропной пластичности при циклических нагружениях для композитов с произвольной периодической микроструктурой на основе численного конечно-элементного решения серии локальных задач на ячейках периодичности;
- 3) предложены микро-структурные модели определяющие соотношения деформационной теории пластичности при циклических нагружениях для трансверсально-изотропных и ортотропных композитов;
- 4) разработана методика определения материальных констант предложенных микро-структурных моделей анизотропной деформационной теории пластичности для трансверсально-изотропных и ортотропных композитов;
- 5) разработан конечно-элементный алгоритм решения задач на ячейке периодичности для упруго-пластических композиционных материалов при циклических нагружениях;
- 6) проведены серии численного решения задач теории пластичности на ячейках периодичности при циклическом нагружении для 2-х типов композитов (однонаправленно-армированных и тканевых) и определены типовые значения материальных констант для данных типов моделей упруго-пластических композитов;
- 7) разработана методика решения двух-масштабных задач деформационной теории пластичности для конструкций из композитов при циклическом нагружении;
- 8) численно решена макроскопическая задача о циклическом изгибном нагружении 3-х мерной балки из композиционных материалов разных типов, с использованием

разработанных микроструктурных моделей эффективных определяющих соотношений упруго-пластических композитов.

## Список литературы

1. Адамс Д.Ф. Упругопластическое поведение композитов. Композиционные материалы. Т.2 Механика композиционных материалов. М.Мир.1978. С.196-241.
2. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Эдиториал УРСС, 2003.
3. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах: математические задачи механики композиционных материалов. — Москва : Наука, 1984. — 352 с.
4. Бахвалов Н.С., Эглит М.Э. Процессы в периодических средах, не описываемые в терминах средних характеристик // Доклады Академии Наук СССР, т. 268, № 4, С. 836-840, 1983.
5. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. — Москва : Наука, 1983. — 448 с.
6. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. — Москва : Машиностроение, 1980. - 376 с.
7. Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. — Днепропетровск : Пороги, 2008. — 197 с.
8. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. М.: Физматлит, 2008, 176 с.
9. Браутман Л., Крок Р. Композиционные материалы. Т. 2: Механика композиционных материалов / под ред. Дж. Сендецки. – М.: Мир, 1978. – 568 с.
10. Бровко Г.Л. Определяющие соотношения механики сплошной среды. Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.Наука. 2017, 432 с
11. Былим А.В., Сараев Л.А., Сахабиев В.А. Особенности упруго-пластического деформирования двухкомпонентных композитов. *Вестник СамГУ*. 1998. № 4(10). С.113-119.

12. Васин Р.А. Экспериментально-теоретическое исследование определяющих соотношений в теории упругопластических процессов: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 387 с.
13. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. — Москва: Наука. Физматлит., 1997. — 288 с.
14. Голуб Дж., Ван Лоун Я. Матричные вычисления. М.Мир. 1999.
15. Горбачёв В. И., Метод осреднения Бахвалова–Победри в механике композитов, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2016, номер 6, 41–46
16. Горбачев В.И. Эффективные определяющие соотношения неупругих композитов. Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2013. № 6. С. 37-42.
17. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М.: Физматлит, 2005, 576 с.
18. Григорян С.С. Об осреднении физических величин // Доклады АН СССР. — 1980. — Т. 254, №4. — С. 1081-1085.
19. Грин А., Адкинс Д. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. - 455 с.
20. Демьянушко И.В., Темис Ю.М. К построению теорий пластического течения с анизотропным упрочнением для материалов, находящихся под воздействием физических полей // Изв.АН СССР. МТТ. – 1975. – № 5. – С. 111–119.
21. Димитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды. -М.: Физматлит. -2009. -610с. ISBN 978-5-9221-1110-2.
22. Димитриенко Ю.И. Кашкаров А.И. Расчет эффективных характеристик композитов с периодической структурой методом конечного элемента// Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Естественные науки.- №2.-2002.- С.95-108.
23. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды, т.1. Тензорный анализ. – М.:Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. – 367 с.

24. Димитриенко Ю.И. Основы механики твердого тела/ Механика сплошной среды.Т.4. – Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. – 2013. – 580 с.
25. Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. — 2007. — №1. — С. 26-46.
26. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Сборщиков С.В. Компьютерное моделирование прочностных характеристик волокнистых композиционных материалов на базе модели многоуровневых иерархических структур //Тезисы докладов XII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Новосибирск, 3-5 октября 2011 г.-С. 38-39.
27. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Сборщиков С.В. Моделирование микро-разрушения тканевых композитов// Инженерный журнал: наука и инновации, электронный журнал.- 2012, вып. 2 (Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. Спец.выпуск № 3 «Математическое моделирование». 2012. с.5-19.)
28. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Сборщиков С.Н., Москвитинов Г.В. Конечно-элементное моделирование микронапряжений, повреждаемости и прочностных свойств тканевых композиционных материалов// Материалы IX Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2012), - Алушта. Московский Авиационный Институт, 2012. – с.354-356.
29. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Сборщиков С.Н., Москвитинов Г.В. Компьютерное моделирование прочностных свойств тканевых композиционных материалов. // Наука и технологии. Материалы XXXII Всероссийской конференции по проблемам науки и технологии. – Миасс: МСНТ, 2012. – с.54-57.
30. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Шпакова Ю.В., Сборщиков С.В. Многомасштабный анализ процессов разрушения и деформирования тканевых

композиционных материалов с дисперсно-армированной матрицей//Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМПСПС'2013) 22-31 мая 2013 г.-М.:Изд-во МАИ.- с.330-332.

31. Дмитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П., Садовничий Д.Н., Гафаров Б.Р. Численное и экспериментальное моделирование прочностных характеристик сферопластиков//Композиты и наноструктуры.-2013.-№3.-с.35-51.

32. Дмитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П. Численное моделирование микроразрушения и прочностных характеристик пространственно-армированных композитов//Механика композиционных материалов и конструкций. 2013. т.19. №3. с.365-383.

33. Дмитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П., Шпакова Ю.В. Численное моделирование процессов разрушения тканевых композитов //Вычислительная механика сплошной среды.-2013.-Т.6,№4.-с.389-402. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.4.43

34. Дмитриенко Ю. И., Сборщиков С. В., Еголева Е. С., Матвеева А. А. Моделирование термоупругих характеристик композитов на основе алюмохромфосфатных связующих// Наука и образование. Электронный журнал. # 11, ноябрь 2013. DOI: 10.7463/1113.0623564.

35. Дмитриенко Ю. И., Сборщиков С. В., Беленовская Ю. В., Анискович В. А., Перевислов С. Н. Моделирование микроструктурного разрушения и прочности керамических композитов на основе реакционно-связанного SiC// Наука и образование. Электронный журнал. № 11, 2013 DOI: 10.7463/1113.0659438

36. Дмитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным наполнителем// Композиты и наноструктуры.- 2014.- № 1.- т.6- с.32-48.

37. Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций// Наука и образование. Электронный журнал. № 7, 2014 DOI: [10.7463/0714.0717805](https://doi.org/10.7463/0714.0717805)  
<http://technomag.bmstu.ru/doc/717805.html>
38. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой//Математическое моделирование и численные методы. № 1.-2014 г. с.36-57.
39. Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А., Ерасов В.С., Яковлев Н.О. Моделирование и разработка трехслойных композиционных материалов с сотовым наполнителем// Вестник МГТУ им.Н.Э. Баумана. Сер.Естественные науки. № 5.-2014. С-66-82.
40. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Шпакова Ю.В., Сборщиков С.В. Моделирование механических характеристик ударопрочных керамических композиционных материалов. Аэрокосмические технологии: Научные материалы Третьей международной научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. - С. 82
41. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Моделирование упруго-диссипативных характеристик слоисто-волоконистых композитов// Инженерный журнал: наука и инновации, 2014, вып. 4(28).  
<http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/1234.html>
42. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Федонюк Н.Н. Моделирование вязкоупругих характеристик слоисто-волоконистых полимерных композиционных материалов// Наука и образование. Электронный журнал. # 11, ноябрь 2014. DOI: [10.7463/1114.0734246](https://doi.org/10.7463/1114.0734246)
43. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Конечно-элементное моделирование эффективных вязко-упругих свойств однонаправленных

композиционных материалов//Математическое моделирование и численные методы. № 2.-2014 г. с.28-49.

44. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Губарева А.А., Еголева Е.С., Матвеева А.А. Многомасштабное моделирование высокотемпературных упруго-прочностных свойств композиционных материалов на неорганической матрице// Математическое моделирование. 2015.т.27. № 11. С.3-20.

45. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Ерасов В.С., Яковлев Н.О. Численное моделирование и экспериментальное исследование деформирования упруго-пластических пластин при смятии// Математическое моделирование и численные методы. № 1. 2015 г. с.67-82.

46. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Базылева О.А., Луценко А.Н., Орешко Е.И. Моделирование упругопластических характеристик монокристаллических интерметаллидных сплавов на основе микроструктурного численного анализа. Математическое моделирование и численные методы. № 2. 2015 г. с.3-22. <http://mmcm.bmstu.ru/articles/45/>

47. Димитриенко Ю.И., Шпакова Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В. Моделирование влияния технологии изготовления на прочностные свойства конструкций из тканевых композиционных материалов// XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. Составители: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров. Издательство: Казанский (Приволжский) федеральный университет (Казань). 2015. С. 4357-4358.

48. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Численное моделирование теплового расширения композиционных материалов на основе метода гомогенизации// Инженерный журнал: наука и инновации.2015. #11(47)<http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1454.html>

49. Димитриенко Ю.И., Шпакова Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В. Моделирование процесса многоуровневой фильтрации жидкого связующего в

тканевом композите при RTM методе изготовления// Инженерный журнал: наука и инновации. 2015. #12(48) <http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1454.html>

50. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Маркевич М.Н., Сборщиков С.В. Математическое моделирование диэлектрических свойств наноструктурированных композиционных материалов методом асимптотического осреднения// Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки.- 2016.-№ 1.-с.76-89. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-76-89 <http://vestniken.ru/articles/675/675.pdf>

51. Димитриенко Ю.И., Луценко А.Н., Губарева Е.А., Орешко Е.И., Базылева О.А., Сборщиков С.В. Расчет механических характеристик жаропрочных интерметаллидных сплавов на основе никеля методом многомасштабного моделирования// Авиационные материалы. 2016. №3 (42), с.33-48. [dx.doi.org/10.18577/2071-9140-2016-0-3-33-48](http://dx.doi.org/10.18577/2071-9140-2016-0-3-33-48) <http://journal.viam.ru/index.php?mode=archive>

52. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упруго-пластических композитов с учетом повреждаемости// Математическое моделирование и численные методы, 2016, №2 (10), с. 3-24

53. Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.Д., Сборщиков С.В. Численное моделирование вязкоупругих характеристик пенопластов// Инженерный журнал: наука и инновации. 2016. № 11(59). с.68-77. <http://engjournal.ru/articles/1555/1555.pdf> DOI 10.18698/2308-6033-2016-11-1555

54. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Еголева Е.С. Моделирование термо-механических и теплофизических характеристик деструктирующих теплозащитных композитов на основе конечно-элементного микроструктурного анализа// Тепловые процессы в технике, 2016, № 12, с.564-573. [http://www.nait.ru/journals/number.php?p\\_number\\_id=2544](http://www.nait.ru/journals/number.php?p_number_id=2544)

55. Димитриенко Ю.И., Захарова Ю.В., Сборщиков С.В. Моделирование прочностных свойств дисперсно-армированных композиционных материалов, изготавливаемых по аддитивным технологиям. Труды Всероссийской научно-технической конференции МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ

МОДЕЛИРОВАНИЕ В ТЕХНИКЕ, посвящённой 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева, Москва, 17-19 мая. 2016. С.302-305.

56. Димитриенко Ю.И., Захарова Ю.В., Сборщиков С.В. Моделирование процесса отверждения толстостенных конструкций из полимерных композиционных материалов// Инновационная наука. 2016. № 12-4. с.31-36.

57. Димитриенко Ю.И., Луценко А.Н., Губарева Е.А., Орешко Е.И., Базылева О.А., Сборщиков С.В., Туренко Е.Ю. Интегрированная информационная система для хранения данных по свойствам жаропрочных никелевых сплавов и расчета их механических характеристик// Авиационные материалы и технологии. 2017. №1. С. 86-94

58. Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, С.В. Сборщиков Визуализация тензорных полей на основе геометрического представления тензоров// Научная визуализация 2018. том 10, № 2, с. 95 – 111.

59. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Еголева Е.С., Яковлев Д.О. Моделирование термонапряжений в композитных пластинах на неорганической матрице. Ключевые тренды в композитах: наука и технологии. Сборник материалов Международной научно-практической конференции. 2019. С. 211-220.

60. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В., Богданов И.О., Яхновский А.Д., Баймурзин Р.Р. Конечно-элементное моделирование упругих свойств тканевых полимерных композитов при высоких температурах. Математическое моделирование и численные методы. 2020. № 1. с. 3–27

61. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В., Яхновский А.Д., Баймурзин Р.Р. Моделирование эффективных ядер релаксации и ползучести вязко-упругих композитов методом асимптотического осреднения. Математическое моделирование и численные методы, 2020, № 3, с. 22–46.

62. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Юрин Ю.В. Моделирование эффективных упруго–пластических свойств композитов при циклическом нагружении. Математическое моделирование и численные методы, 2020, № 4, с. 3–26.

63. Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Юрин Ю.В., Захаров А.А., Сборщиков С.В., Богданов И.О. Сопряженное моделирование высокоскоростной аэротермодинамики и внутреннего тепломассопереноса в композитных аэрокосмических конструкциях. Математическое моделирование и численные методы, 2021, № 3, с. 42–61.
64. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Димитриенко А.Ю., Юрин Ю.В. Микроструктурная модель деформационной теории пластичности квази-изотропных композиционных материалов. Математическое моделирование и численные методы, 2021, № 4, с. 17–44.
65. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Димитриенко А.Ю., Юрин Ю.В. Микроструктурная модель деформационной теории пластичности трансверсально-изотропных композитов. Математическое моделирование и численные методы, 2022, № 1, с. 15–41.
66. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Сборщиков С.В., Еголева Е.С. Программа `gcdfes_MHSStrength` для численного моделирования эффективных пределов прочности композиционных материалов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013615353 от 05.06.2013. Заявка № 2013611765 от 28.02.13.
67. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П., Сборщиков С.В. Программа `gcdfes_dll_MultiscaleSolver` проведения многомасштабного анализа упруго-прочностных характеристик композиционных материалов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013616845 от 23.07.2013. Заявка № 2013614477 от 31.05.13.
68. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В. Программа `Microyes_NetGazer` для трехмерной визуализации и анимации результатов решения задачи имитационного моделирования микроразрушения композиционных материалов при статических нагрузках, на основе конечно-элементного решения задач на ячейке периодичности. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015615102 от 07.05.2015. Заявка № 2015611679 от 12.03.2015.

69. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Губарева Е.А. Программа Microyes\_ComSol2 для моделирования эффективных диаграмм деформирования и имитационного моделирования микроразрушения композиционных материалов при статических нагрузках на основе конечно-элементного решения задач на ячейке периодичности. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015615132 от 08.05.2015. Заявка № 2015611699 от 12.03.2015.
70. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В. Программа Microyes\_EXPDESIGN для обеспечения возможности планирования экспериментов с использованием различных критериев оптимальности, применительно к задачам конечно-элементного моделирования упруго-прочностных характеристик композиционных материалов с различными значениями содержания фаз. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017610359 от 10.01.2017. Заявка № 2016662236 от 11.11.2016.
71. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Губарева Е.А. Программа TensorView для визуализации геометрического представления тензоров второго ранга и тензорных полей в трехмерных областях, а также операций с тензорами. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017610001 от 09.01.2017. Заявка № 2016662239 от 11.11.2016.
72. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Юрин Ю.В. Программа Microyes\_PS\_ELAST\_NEU\_3D для идентификации упруго-прочностных характеристик фаз композиционных материалов на основе решения обратных задач, с использованием конечно-элементного микромеханического анализа композитов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. №2018614683 от 13.04.2018. Заявка № 2018611683 от 21.02.1388.
73. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Юрин Ю.В. Программа MultiScale\_SMCM для многомасштабного моделирования напряженно-деформированного состояния конструкций из композиционных материалов, на основе метода многоуровневой асимптотической гомогенизации и конечно-элементного решения трехмерных задач теории упругости. Свидетельство об

государственной регистрации программы для ЭВМ (RU) № 2018614767 от 17.04.2018. Заявка № 2018611684 от 21.02.1388.

74. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В. Программа DamageCom\_SMCM для конечно-элементного расчета накопления повреждений и прогнозирования остаточного ресурса элементов композитных конструкций при сложном трехмерном напряженно-деформированном состоянии. Свидетельство об государственной регистрации программы для ЭВМ 2019666171 от 5.12.1389. Заявка 2019665113 от 26.11.2019.

75. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В. Программа StrengthCom\_SMCM для конечно-элементного расчета прочностных характеристик композитных материалов со сложной структурой с учетом накопления микро-повреждений и кинетики мезоскопических дефектов. Свидетельство об государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019666172 от 5.12.1389. Заявка 2019665109 от 26.11.2019 .

76. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В., Богданов И.О. Программа HighTempE\_Textile\_Manipula для прогнозирования модулей упругости тканевых полимерных композитов при высоких температурах на основе конечно-элементного решения задач на ячейке периодичности. Свидетельство об государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019666174 от 5.12.1389. Заявка № 2019665102 от 26.11.2019.

77. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В., Богданов И.О. Программа NonlinearEl\_Disp\_Manipula для прогнозирования диаграмм нелинейно-упругого деформирования дисперсно-армированных композитов при малых деформациях на основе конечно-элементного решения 3D локальных задач микромеханики. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019666176, 05.12.1389. Заявка № 2019665098 от 26.11.2019.

78. Димитриенко Ю.И., Гумиргалиев Т.Р., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В. программа Composite\_DB\_Manipula: оболочка для базы данных о константах моделей композиционных материалов, интегрированная с программным

комплексом для конечно-элементного расчета термонапряжений в композитных конструкциях. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2020663789, 02.11.2020. Заявка № 2020662958 от 26.10.2020.

79. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Коряков М.Н., Сборщиков С.В., Захаров А.А., Богданов И.О. Программа TERMALSTRESSPCM\_NT\_MANIPULA для конечно-элементного расчета термонапряжений в конструкциях конического типа из тканевых полимерных композиционных материалов при воздействии высокотемпературного газового потока, с учетом криволинейной анизотропии и термодеструкции материала. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2020663790, 02.11.2020. Заявка № 2020662965 от 26.10.2020.

80. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Коряков М.Н., Сборщиков С.В., Захаров А.А., Богданов И.О. Программа HMT\_STRUCTUREPCM\_MANIPULA для конечно-элементного расчета нестационарного теплопереноса в конструкциях из тканевых полимерных композиционных материалов при воздействии высокотемпературного газового потока, с учетом криволинейной анизотропии и термодеструкции материала. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2020663798, 02.11.2020. Заявка № 2020663010 от 26.10.2020.

81. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Богданов И.О., Захаров А.А., Сборщиков С.В., Коряков М.Н., Гумиргалиев Т.Р., Каримов С.Б. Компьютерная программа для конечно-элементного расчета термонапряжений в теплонагруженных элементах конструкций при нестационарном нагреве с учетом температурной зависимости механических характеристик материалов (TERMALSTRESS IMK) Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2022610646, 13.01.2022. Заявка № 2021682188 от 28.12.1391.

82. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В., Богданов И.О., Захаров А.А., Гумиргалиев Т.Р. Программа Plasticity\_Anisotrop\_Manipula для конечно-элементного расчета напряжений в элементах композитных конструкций с учетом криволинейной анизотропии упруго-пластических свойств композиционных материалов в рамках деформационной теории пластичности. Свидетельство о

регистрации программы для ЭВМ № 2022684326, 13.12.1392.  
Заявка № 2022682613 от 23.11.2022.

83. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В., Богданов И.О. Программа Stability\_3D\_Manipula для конечно-элементного расчета устойчивости конструкций из полимерных композиционных материалов, с учетом криволинейной анизотропии. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2022684214 от 12.12.1392. Заявка № 2022682615 от 23.11.2022.

84. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.

85. Зубчанинов В.Г. Математическая теория пластичности: монография. – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300 с.

86. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность: в 2 т. Т. 2. Пластичность. – М.: Физматлит, 2008. – 336 с.

87. Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 1. Теория идеальной пластичности. — М.: Физматлит, 2001. — 448 с.

88. Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 2. Общие вопросы. М.: Физматлит, 2002. — 448 с.

89. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. 2-е изд., перераб. и доп. -М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. - 287 с.

90. Ильюшин А.А. Пластичность. Упруго-пластические деформации. М.: УРСС, 2018, 392 с.

91. Ильюшин А.А., Ленский В.В. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959, 372 с.

92. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.:Изд-во АН СССР. 1963, 270 с.

93. Каламкаров А.Л., Кудрявцев Б.А., Партон В.З. Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. - 1987. - Т. 19. - С. 78-147.

94. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение, 1990. – 224 с.
95. Ковтунов А.И., Мямин С.В., Семистенова Т.В. Слоистые композиционные материалы: электронное учебное пособие. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2017. 75 с.
96. Ключников В.Д. Физико-математические основы прочности и пластичности. М.:Издательство Московского университета. 1994. 189 с.
97. Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Развитие дефектов при конечных деформациях, Компьютерное и физическое моделирование, М. Физматлит. 2007, 392 с.
98. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. - 640 с.
99. Н.Н. Малинин Прикладная теория пластичности и ползучести. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2018. — 402 с.
100. Маневич Л.И., Павленко А.В. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов. — Киев : Вища школа, 1991. — 131 с.
101. Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. — Киев : Вища школа, 1982. — 153 с.
102. Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. М.: УРСС, 2019, 344 с.
103. Муравлева Л.В. Эффективные свойства ортотропных композитов при упругопластических деформациях // Упругость и неупругость: материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. — Москва : Едиториал УРСС, 2006. — С. 371-378.
104. Муравлева Л.В., Шешенин С.В. Эффективные свойства железобетонных плит при упругопластических деформациях // Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2004. — №3. — С. 62-65.
105. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. — Москва: Машиностроение, 1991. — 429 с.

106. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
107. Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Ч.2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. – 2016. – № 1. – С. 110–135.
108. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. — Москва : Издательство Московского университета, 1984. — 336 с.
109. Прикладная теория пластичности / Ф.М. Митенков [и др.]. – М.: Физматлит, 2015. – 284 с.
110. Применение композитных материалов в зарубежном подводном кораблестроении [Электронный ресурс] Информационное агентство «ПРОАтом». [СПб].  
URL: <http://www.proatom.ru/modules.php?name=News&file=article&sid=7479>
111. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
112. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний: пер. с англ. М.: Мир, 1984. 472 с.
113. Темис Ю.М., Худякова А.Д. Модель неизотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении // Математическое моделирование и численные методы. – 2017. – № 3. – С. 22–41.
114. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
115. Хилл Р. Математическая теория пластичности. Москва, Гостехиздат, 1956, 407 с.
116. Шешенин С.В., Ходос О.А. Эффективные жесткости гофрированной пластины // Вычислительная механика сплошных сред. — 2011. — Т. 4, №2. — С. 128-139.

117. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Barantsev R.G. Asymptotic approaches in mechanics: new parameters and procedures // *Applied Mechanics Reviews*. — 2003. — Vol. 56, №1. — P. 87-109.
118. Andrianov I.V., Bolshakov V.I., Danishevs'kyy V.V., Weichert D. Higher order asymptotic homogenization and wave propagation in periodic composite materials // *Proceedings of the Royal Society A*. — 2008. — Vol. 464, №2093. - P. 1181-1201.
119. Andrianov I.V., Danishevs'kyy V.V., Kalamkarov A.L. Asymptotic justification of the three-phase composite model// *Composite Structures*. — 2007. — Vol. 77, №3. — P. 395-404.
120. Andrianov I.V., Danishevs'kyy V.V., Kalamkarov A.L. Micromechanical analysis of fiber-reinforced composites on account of influence of fiber coatings I I *Composites Part B: Engineering*. — 2008. — Vol. 39, №5. — P. 874-881.
121. Andrianov I.V., Danishevs'kyy V.V., Weichert D. Asymptotic Study of Imperfect Interfacial Bonding in Periodic Composite Materials // *Mechanics of the 21st Century. Proceedings of the 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*. — Warsaw, Poland, 2004. — P. 15-21.
122. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Boundary Layers and Homogenization of Transport Processes.—*Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 1979, № 15, p. 53-157.
123. Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. — Amsterdam : North-Holland, 1978.
124. Bourgat J. F. Numerical experiments of the homogenization method for operators with periodic coefficients.— *Rapport de Recherche*, 1978, № 277, I. R. I. A. Rocquencourt, France.
125. Danas, K., Ponte Castaneda, P. Influence of the Lode parameter and the stress triaxiality on the failure of elasto-plastic porous materials. *Int. J. Solids Struct.* 2012. V.49, pp.1325-1342.
126. Yu. I. Dimitrienko, S. V. Sborshchikov, A. P. Sokolov Numerical simulation of microdestruction and strength characteristics of reinforced composites//*Composites:*

Mechanics, Computations, Applications, An International Journal.-2013.-V.4.-№ 4.- pages 345-364, DOI: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v4.i4.50

127. Yu.I. Dimitrienko, S.V. Sborshikov. Multiscale modeling of composite materials and structures: up to theory till computational technology// Multiscale Modeling and Methods: Upscaling in Engineering and Medicine : Abstracts of the Fifth International Conference / Ed. by Yu. Dimitrienko, G. Panasenko ; Bauman Moscow State Technical University, Moscow : BMSTU, June 25-27, 2015. pp.16-17.

128. Yu. I. Dimitrienko, I. D. Dimitrienko and S.V. Sborshikov Multiscale Hierarchical Modeling of Fiber Reinforced Composites by Asymptotic Homogenization Method// Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, 2015, no. 145, 7211-7220 <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.510641>

129. Yu.I. Dimitrienko, Yu.V. Zakharova S.V. Sborshikov Multiscale Modeling of Strength Properties of Dispersion-Reinforced Composite Materials Produced by Additive Technologies// Mathematical and Information Technologies. Conference Information. 28.08 – 31.08.2016 Vrnjacka Banja, Serbia, 01.09. -05.09. 2016. Budva, Montenegro. - pp.82-83

130. Dimitrienko Yu.I., Zakharova Yu.V., Sborshikov S.V. Multiscale Modeling of Strength Properties of Dispersion-Reinforced Ceramic Composites Materials. Mathematical and Information Technologies, MIT-2016. Mathematical Modeling. Edited by: Yurii I. Shokin, Hranislav Milosevic, Denis V. Esipov. Proceedings of the International Conference Mathematical and Information Technologies . Vrnjacka Banja, Serbia – Budva, Montenegro, August 28 – September 5, 2016. CEUR Workshop Proceedings (CEUR-WS.org) P.277-287. <http://ceur-ws.org/Vol-1839/MIT2016-p25.pdf>

131. Yu I Dimitrienko, S V Sborshikov, E S Egoleva, D O Yakovlev Modeling of thermal stresses in inorganic matrix composite plates based on the asymptotic theory IOP Conference Series: Material Science and Engineering, 2019. volume 683 № 012010 doi:10.1088/1757-899X/683/1/012010 pp.1-6.

132. Yu I Dimitrienko, Yurin Yu.V. and Sborshikov S.V. Multiscale modeling of deformation and damage of elastic-plastic particle reinforced composites IOP Conference

Series: Material Science and Engineering, 2019. volume 683 № 012092 doi:10.1088/1757-899X/683/1/012092 pp.1-6.

133. Yu I Dimitrienko, M N Korykov, Yu I Yurin, A A Zakharov and S V Sborschikov Computational conjugate modeling of aerodynamical flow and thermal stresses in ablative composite structures IOP Conference Series: Material Science and Engineering, 2020. volume 934 (2020) 012013 doi:10.1088/1757-899X/934/1/012013 pp.1-6.

134. Yu I Dimitrienko, E S Egoleva, D O Yakovlev and S V Sborschikov Modeling of stresses in inorganic composite plates under non uniform high temperature heating IOP Conference Series: Material Science and Engineering, 2020. volume 934 (2020) 012015 doi:10.1088/1757-899X/934/1/012015 pp.1-7.

135. Yu I Dimitrienko, S V Sborschikov, E S Egoleva, D O Yakovlev Modeling of thermal stresses in thin-walled composite structures with phase transformation Advances in Composites Science and Technologies 2020 (ACST 2020) IOP Publishing. Journal of Physics: Conference Series. Volume 1990, (2021) 012052 doi:10.1088/1742-6596/1990/1/012052 pp.1-10.

136. Yu I Dimitrienko, Yu I Yurin, S V Sborschikov, I O Bogdanov, A Ya Yahnovski, R R Baymurzin Finite element modeling of elastic moduli and microstresses in textile carbon-carbon composites. Advances in Composites Science and Technologies 2020 (ACST 2020) IOP Publishing. Journal of Physics: Conference Series. Volume 1990, (2021) 012053 doi:10.1088/1742-6596/1990/1/012053 pp.1-8.

137. Guinovart-Díaz R., Bravo-Castillero J., Rodríguez-Ramos R., Sabina F.J. Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I. Elastic and square symmetry I/ Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2001. — Vol. 49, №7. — P. 1445-1462.

138. Hill R. Theory of Mechanical Properties of Fibre-Strengthened Materials // J. Mech. and Phys. Solids. - 1964. - Vol. 12, № 3. - P. 199-212.

139. Inelastic Deformation of Composite materials/ Ed.G.J.Dvorak. Springer-Verlag. 1990. 779 p.

140. Kalamkarov A.L. Composite and reinforced elements of construction. — Chichester: John Wiley & Sons, 1992. - 286 p.
141. Kalamkarov A.L., Kolpakov A.G. A new asymptotic model for a composite piezoelectric plate // *International Journal of Solids and Structures*. — 2001. — Vol. 38, №34. — P. 6027-6044.
142. Kalamkarov A.L., Kolpakov A.G. Analysis, design and optimization of composite structures. — New York : J.Wiley & Sons, 1997.
143. Y.K. Khdir, T. Kanit, F. Zaïri, M. Naït-Abdelaziz Computational homogenization of elastic–plastic composites. *International Journal of Solids and Structures*. V. 50, № 18, 2013, pp.2829–2835
144. Manevitch L.I., Andrianov I.V., Oshmyan V.G. Mechanics of periodically heterogeneous structures. — Berlin : Springer, 2002. — 255 p.
145. Marcellini P. Periodic solutions and homogenization of non linear variational problems.— *Annali di Matematica*, 19J8, № 117.
146. Marcellini P., Sbordone C. Sur quelques de G-Convergence et d'homogenisation non-lineaires.— *C R. Acad. sci. Paris*, 1977, 284.
147. A. Mbiakop, A. Constantinescu, K. Danas On void shape effects of periodic elastoplastic materials subjected to cyclic loading. *European Journal of Mechanics A/Solids* 49 (2015) pp.481-499
148. Meguid S.A., Kalamkarov A.L. Asymptotic homogenization of elastic composite materials with a regular structure // *International Journal of Solids and Structures*. — 1994. — Vol. 31, №3. — P. 303-316.
149. S.T.Mileiko, Oxide-fibre/Ni-based matrix composites – III: A creep model and analysis of experimental data, *Compos. Sci. and Technol.*, 2002, 62, 2, pp.195-204.
150. Miehe C., SchröderJ., Bayreuther C. On the homogenization analysis of composite materials based on discretized fluctuations on the micro-structure // *Acta Mechanica*. — 2002. — Vol. 155, №1-2. — P. 1-16.
151. V. C. Nardone, "Analysis of superalloy-toughened NiAl composites," *Composites Science and Technology*, vol. 52, pp. 151-161, 1994

152. Nouailhas, D., Chaboche, J.L., Savalle, S., Cailletaud, G., On the constitutive equations for cyclic plasticity under nonproportional loading. *Int. J. Plast.* 1985. №1, pp.317-330.
153. D. Sheng Li and M. R. Wisnom, "Finite element micromechanical modelling of unidirectional fibre-reinforced metal-matrix composites," *Composites Science and Technology*, vol. 51, pp. 545-563, 1994.
154. Suraj Rawal *Metal-Matrix Composites for Space Applications JOM*, 53 (4) (2001), pp. 14-17.
155. W. Tong and G. Ravichandran, "Effective elastic moduli and characterization of a particulate metal-matrix composite with damaged particles," *Composites Science and Technology*, vol. 52, pp. 247-252, 1994.
156. Watanabe, I., Setoyama, D., Iwata, N., Nakanishi, K., 2010. Characterization of yielding behavior of polycrystalline metals with single crystal plasticity based on representative characteristic length. *Int. J. Plasticity* 2010. V.26, pp.570-585.
157. Zohdi T.I. *Homogenization methods and multiscale modeling // Encyclopedia of Computational Mechanics*. — John Wiley & Sons, 2004.