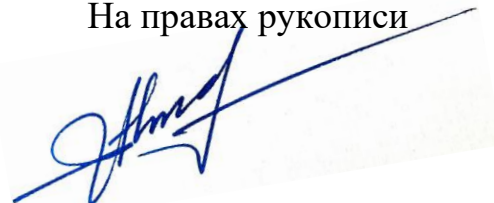


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



НГУЕН ТУАН ЛОНГ

**ТЕРМОНАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ ЕДИНИЧНЫХ
ТРЕКОВ В ПРОЦЕССАХ СЕЛЕКТИВНОГО ЛАЗЕРНОГО
ПЛАВЛЕНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПОРОШКОВ**

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Рабинский Лев Наумович

Москва 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Глава 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ИССЛЕДУЕМОЙ ТЕМАТИКЕ.....	12
1.1. Технология СЛП	12
1.2 Технологические параметры процесса СЛП.....	15
1.3. Тепловое состояние в процессе СЛП.....	17
1.4. Напряжённое состояние в процессе СЛП	24
1.5. Выводы по главе и постановка задач исследования	32
Глава 2. ТЕПЛОВОЕ СОСТОЯНИЕ ЕДИНИЧНЫХ ТРЕКОВ, ПОЛУЧЕННЫХ В ПРОЦЕССЕ СЛП.....	34
2.1 Материалы и методы	34
2.2. Методы моделирования	39
2.3. Результаты и обсуждение.....	51
2.4. Результаты численного моделирования	59
2.5. Оценка поглощающей способности на основе анализа ширины единичных треков и модели ЕТМ.....	61
2.6. Обработка известных экспериментальных данных для различных порошков AlSi10Mg.....	65
Глава 3. НАПРЯЖЁННО - ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МАТЕРИАЛА ВБЛИЗИ ОТДЕЛЬНЫХ ТРЕКОВ, ПОЛУЧЕННЫХ В ПРОЦЕССЕ СЛП	68
3.1. Иагрев полуплоскости подвижным источником лазерного излучения с учётом теплоотдачи на поверхности.....	69
3.2 Гиперболическое уравнение теплопроводности	72
3.3 Метод решения.....	75

3.4 Расчёт напряжённо-деформированного состояния, индуцированного подвижным источником лазерного излучения	78
Глава 4. СОПОСТАВЛЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ И МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	103
4.1. Физическая постановка задачи	103
4.2. Основные уравнения для исследования термических напряжений	107
4.3. Уравнения механического равновесия	113
4.4. Начальные и граничные условия	114
4.5. Температурно-зависимые свойства материала	115
4.6. Критерии образования трещин	118
4.7. Калибровка параметров модели и экспериментальные данные	119
4.8. Результаты моделирования	122
4.9. Карта трещинообразования (технологическая карта дефектов)	127
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	132
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	134

ВВЕДЕНИЕ

Технологии аддитивного производства в последние годы существенно изменили подходы к изготовлению сложных инженерных изделий, особенно в таких отраслях, как аэрокосмическая техника, биомедицина и автомобилестроение. Среди методов аддитивного производства особое место занимает селективное лазерное плавление (СЛП), представляющее собой высокотехнологичный процесс, позволяющий изготавливать металлические детали непосредственно из порошковых материалов с высокой точностью и улучшенными механическими свойствами.

Процесс СЛП основан на локальном плавлении металлического порошка высокоэнергетическим лазерным излучением с формированием единичных треков (англ. *single tracks*), которые являются элементарными структурными единицами конечного изделия. При этом экстремально высокие скорости нагрева и охлаждения материала – от температур плавления до температуры окружающей среды (или платформы построения) – приводят к возникновению значительных температурных градиентов, вызывающих термические и остаточные напряжения. Указанные явления могут приводить к деформациям, образованию трещин и микроструктурных дефектов, что негативно сказывается на качестве и надёжности изготавливаемых изделий.

Для оптимизации процесса СЛП и повышения эксплуатационных характеристик получаемых деталей принципиально важным является детальное понимание теплового и напряжённо – деформированного состояния на уровне единичных треков. Именно единичные треки определяют начальные условия формирования слоёв и во многом предопределяют геометрические и механические характеристики всей конструкции. Несмотря на значительное количество исследований, посвящённых технологии СЛП, большинство из них ориентировано на макроскопический уровень – оптимизацию технологических параметров

или анализ свойств готовых изделий, тогда как детальные исследования термонапряжённого состояния единичных треков на микромасштабном уровне остаются недостаточно разработанными.

Указанное обстоятельство обуславливает необходимость разработки математических моделей и подходов численного расчета, способных адекватно описывать тепловые и механические процессы в зоне формирования единичного трека, а также их экспериментальной верификации. Данные задачи определяют актуальность и научную направленность настоящей диссертационной работы.

Цель и задачи диссертационной работы

Целью диссертационной работы является комплексное исследование термонапряжённого состояния единичных треков, полученных в процессе селективного лазерного плавления металлических порошков, на основе сочетания математического моделирования и экспериментального анализа.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие основные задачи:

1) Разработка тепловой модели процесса. Построение численной модели на основе метода конечных элементов для моделирования температурного поля при формировании единичного трека с учётом характеристик лазерного источника тепла, теплофизических свойств порошкового материала и граничных условий теплообмена.

2) Анализ температурных напряжений. Определение распределения температурных и остаточных напряжений, обусловленных температурными градиентами, а также оценка влияния технологических параметров процесса и свойств материала.

3) Экспериментальная верификация модели. Проведение экспериментальных исследований процесса СЛП с измерением температурных полей и оценкой напряжённого состояния, сопоставление экспериментальных данных с результатами численного моделирования для

подтверждения адекватности модели и её последующего уточнения.

Проведённое исследование направлено на углубление понимания физических механизмов, протекающих в процессе селективного лазерного плавления, и формирование научно обоснованных рекомендаций по оптимизации технологических режимов, снижению дефектности и повышению качества аддитивно изготавливаемых металлических изделий.

Научная новизна работы.

1) Разработана комплексная математическая модель термомеханического поведения единичного трека при селективном лазерном плавлении, учитывающая взаимосвязь нестационарных тепловых полей и эволюции напряженно-деформированного состояния с учетом фазовых переходов «плавление–кристаллизация».

2) Выявлены закономерности распределения остаточных напряжений в зоне термического влияния при вариации параметров лазерного излучения (мощности и скорости сканирования) для конкретных металлических порошков, что позволило определить критические режимы, ведущие к возникновению микротрещин.

3) Установлена аналитическая зависимость между геометрическими параметрами ванны расплава и градиентом температурных напряжений, обеспечивающая возможность прогнозирования структурной целостности единичного трека на этапе проектирования технологического процесса.

4) Предложен модифицированный численный алгоритм реализации метода конечных элементов для решения сопряженной задачи термоупругопластичности, отличающийся повышенной точностью аппроксимации термических циклов в условиях сверхвысоких скоростей нагрева и охлаждения, характерных для аддитивного производства.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость. В диссертационной работе разработан и

реализован комплексный подход к исследованию термонапряжённого состояния единичных треков, полученных в процессе селективного лазерного плавления, основанный на сочетании теоретического моделирования и экспериментальной верификации. Полученные результаты расширяют существующие научные представления в области механики материалов при сложных термодинамических воздействиях и способствуют развитию методов численного моделирования процессов аддитивного производства.

Практическая значимость. Результаты диссертационного исследования позволяют обоснованно оптимизировать технологические параметры процесса СЛП с целью снижения уровня остаточных напряжений и предотвращения образования трещин в изделиях, что способствует повышению их прочностных характеристик и эксплуатационной надёжности. Разработанные подходы и полученные выводы могут быть использованы при проектировании и оптимизации технологических процессов СЛП для различных металлических материалов, в том числе для изделий, изготавливаемых для высокотехнологичных отраслей промышленности.

Область исследования соответствует п.п. 2, 3, 4, 6 и 13 паспорта специальности 1.1.8. «Механика деформируемого твердого тела».

Объектом исследования являются единичные треки, полученные по технологии селективного лазерного плавления порошков из сплава AlSi10Mg различного гранулометрического состава.

Предметами исследования являются порошки сплава AlSi10Mg различного гранулометрического состава, их химический состав; морфология, микроснимки и рентгенограммы; теплофизические свойства порошкового слоя и методы их измерения; технологические параметры процесса селективного лазерного плавления металлпорошковых композиций и влияние гранулометрического состава порошков на них; энерговклад при сплавлении единичных треков; модели подвижных

тепловых источников, термонапряжённое состояние единичных треков.

Методология и методы исследования

Методологической основой исследования послужили работы ведущих российских и зарубежных ученых, государственные стандарты РФ.

При выполнении работы были использованы современные методы исследования: лазерная дифракция, растровая электронная микроскопия, конфокальная лазерная сканирующая микроскопия, аналитическое и численное моделирование.

Обоснованность и достоверность разработанных методик, полученных результатов и сформулированных выводов обеспечивается надежностью применяемых методов анализа и подтверждается сравнением с результатами из литературных источников. Все результаты получены на поверенном оборудовании с использованием лицензионного программного обеспечения. Стандартные испытания и исследования проводились в соответствии с требованиями научно-технической документации, действующей на территории Российской Федерации (ГОСТ и ISO).

Апробация результатов работы. Основные положения и результаты диссертационного исследования были представлены, доложены и получили одобрение на следующих российских и международных научно-технических конференциях и симпозиумах:

- XII Международная научно-практическая конференция, посвященная 160-летию Белорусской железной дороги (г. Гомель, Республика Беларусь, БелГУТ, 24-25 ноября 2022 г.).

- XXIX Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова (Московская обл. / Калужская обл., 13-17 февраля 2023 г.).

- XXXI Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова (Калужская обл., февраль 2025 г.).

- XIV Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященная памяти академика А. Ф. Сидорова (г. Новороссийск, Абрау-Дюрсо, 1-7 сентября 2025 г.).

- X Международная научно-практическая конференция «Синергия в науке и технологиях» (г. Санкт-Петербург, март 2025 г.).

- IV Международная научно-практическая конференция «Научное сотрудничество для глобальных решений» (январь 2025 г.).

- XIV Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте», посвященная Пятилетке качества (г. Гомель, Республика Беларусь, БелГУТ, 20-21 ноября 2025 г.).

- Международная конференция «Физика и технология перспективных материалов - 2025» (2025 г.).

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 11 печатных работ, в том числе 3 статьи в научных журналах и изданиях, включенных в перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России для опубликования основных научных результатов диссертаций.

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Комплексная математическая модель нестационарного теплопереноса в процессах селективного лазерного плавления, основанная на гиперболическом уравнении теплопроводности Максвелла–Каттанео. Модель позволяет адекватно описывать волновой характер распространения тепла и высокоинтенсивный нагрев материала с учетом времени релаксации теплового потока на начальных стадиях процесса.

2. Методика оценки поглотительной способности металлических порошковых слоев на основе безразмерного анализа и энергетических критериев формирования стабильного трека. Установленные зависимости критической плотности энергии и энтальпии позволяют прогнозировать границы отсутствия проплавления в зависимости от гранулометрического

состава порошка AlSi10Mg.

3. Результаты теоретического исследования влияния размера частиц порошка на термонапряженное состояние единичных треков. Доказано, что увеличение среднего размера частиц приводит к существенному расширению зоны отсутствия проплавления на карте технологических режимов вследствие снижения эффективности поглощения лазерного излучения.

4. Трехмерная термомеханическая модель на микроуровне, связывающая эволюцию температурных полей с накоплением эквивалентных пластических деформаций в зоне ванны расплава. Модель учитывает фазовые переходы, а также температурную зависимость теплофизических свойств сплава AlSi10Mg.

5. Прогностическая технологическая карта трещинообразования в координатах «мощность лазера – скорость сканирования», верифицированная экспериментальными данными. Определено критическое значение эквивалентной пластической деформации ε_{crit} , обеспечивающее точность прогнозирования дефектов в алюминиевых сплавах на уровне свыше 90%.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы из 131 наименований. Основной текст диссертации изложен на 149 страницах машинописного текста и содержит 41 рисунок и 7 таблицы.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи исследования, определены научная новизна и практическая значимость работы.

В первой главе проведен аналитический обзор современного состояния технологий аддитивного производства, в частности метода СЛП. Проанализированы физические основы процесса, влияние технологических параметров на формирование структуры и свойств получаемых изделий. Особое внимание уделено проблеме возникновения остаточных

напряжений и методам их минимизации, а также анализу существующих подходов к моделированию термомеханических процессов при СЛП.

Во второй главе представлены результаты экспериментальных исследований характеристик металлопорошковой композиции из алюминиевого сплава $AlSi10Mg$. Описана методика фракционирования порошков и результаты анализа их гранулометрического и химического состава с применением сканирующей электронной микроскопии. Исследовано влияние размера частиц порошка на геометрические параметры и тепловое состояние единичных треков, формируемых в процессе лазерного воздействия.

В третьей главе разработана математическая модель нестационарного динамического нагрева изотропного полупространства под воздействием подвижного поверхностного источника тепла. Решение задачи базируется на обобщенном уравнении теплопроводности в рамках теории Максвелла–Каттанео. Данный подход позволил учесть конечную скорость распространения тепла, что является критически важным при высокоинтенсивных локальных тепловых воздействиях, характерных для СЛП-процесса.

В четвертой главе проведено сопоставление результатов теоретического моделирования с экспериментальными данными. Разработана трехмерная термомеханическая модель формирования единичного трека, учитывающая температурные градиенты, фазовые переходы и усадочные явления. На основе полученных данных построена технологическая карта трещинообразования (с достоверностью свыше 90%), позволяющая прогнозировать возникновение дефектов и оптимизировать режимы сканирования для сплава $AlSi10Mg$.

В заключении кратко изложены основные результаты диссертационного исследования и выводы по работе, а также сформулированы перспективы дальнейших исследований.

Глава 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ИССЛЕДУЕМОЙ ТЕМАТИКЕ

В данной главе представлен обзор работ, посвященных исследуемой тематике. Описана концепция СЛП, приведена базовая схема процесса. Рассмотрены основные параметры процесса СЛП, оказывающие значительное влияние на качество получаемых изделий. Характеризуются режимы теплообмена, реализуемые в процессе СЛП при различных технологических параметрах. Особое внимание уделено проблеме остаточных напряжений в процессе СЛП, методам их измерения, моделированию напряженно-деформированного состояния и стратегиям минимизации остаточных напряжений.

1.1. Технология СЛП

Селективное лазерное плавление представляет собой передовую технологию аддитивного производства, позволяющую изготавливать металлические детали непосредственно из металлического порошка с использованием высокоэнергетического лазерного излучения. Принцип работы СЛП основан на локальном плавлении металлического порошка послойно с последующим охлаждением и затвердеванием, что приводит к формированию трехмерных структур высокой сложности, недоступных для традиционных методов обработки, таких как литьё или механическая обработка.

В отличие от традиционных технологий, СЛП не требует использования форм или механических режущих инструментов, что минимизирует потери материала и сокращает время от проектирования до готового изделия. Одним из ключевых преимуществ СЛП является возможность производства деталей со сложной геометрией, не ограниченной рамками методов субтрактивной обработки [1].

Технология СЛП не только повышает эффективность производства, но и открывает новые возможности в дизайне благодаря созданию легковесных конструкций на основе решетчатых структур и оптимизации топологии. Эти

методы позволяют снизить массу изделия без ущерба для его прочности, что является важным преимуществом в инженерном проектировании.

СЛП знаменует собой новый этап в развитии современного производства, особенно в таких отраслях, как авиация, биомедицина и автомобилестроение, где предъявляются повышенные требования к точности и механическим свойствам материалов [2-8]. Развитие СЛП не только отражает прогресс в технологическом развитии, но и демонстрирует переход к интеллектуальному производству с оптимизированными процессами на основе данных и численного моделирования.

СЛП объединяет в себе научные знания в области материаловедения, механики и лазерных технологий, требуя глубокого понимания тепловых процессов и динамики плавления для обеспечения качества продукции [9]. Эта технология доказала свою эффективность в промышленности благодаря способности изготавливать сложные детали с высокой точностью и в короткие сроки. С учетом развития методов численного моделирования и материаловедения СЛП продолжает играть ключевую роль в современных производственных процессах, особенно в сферах, требующих высокой точности и оптимальных эксплуатационных характеристик.

Однако высокая сложность процесса СЛП ставит перед инженерами и учеными ряд технических вызовов, в первую очередь связанных с физическими явлениями, происходящими в ходе термомеханического цикла. В частности, одним из ключевых аспектов является формирование и эволюция единичных треков, которые составляют основу формируемого изделия [10]. К числу основных проблем относятся возникновение остаточных термических напряжений, появление дефектов микроструктуры (например, пористости или трещин), что существенно ограничивает применение СЛП в массовом производстве [11].

Процесс СЛП начинается с нанесения тонкого слоя металлического порошка (обычно 20-100 мкм) на подложку в герметичной камере с

инертной атмосферой (аргон или азот) для предотвращения окисления при высоких температурах. Высокоэнергетический лазер (чаще всего волоконный или CO_2 лазер) сканирует слой порошка в соответствии с заранее запрограммированной траекторией на основе модели CAD (англ. Computer Aided Design), расплавляя материал в строго заданных областях и формируя единичные треки. По мере перемещения лазера расплавленный материал быстро охлаждается и затвердевает за счет теплопередачи в подложку/предыдущий слой и окружающий порошок. Этот процесс повторяется для каждого последующего слоя, при этом рабочая платформа постепенно опускается до завершения формирования детали [12]. Завершающий этап включает удаление несплавленного порошка, дополнительную термообработку (при необходимости) и отделение изделия от подложки.

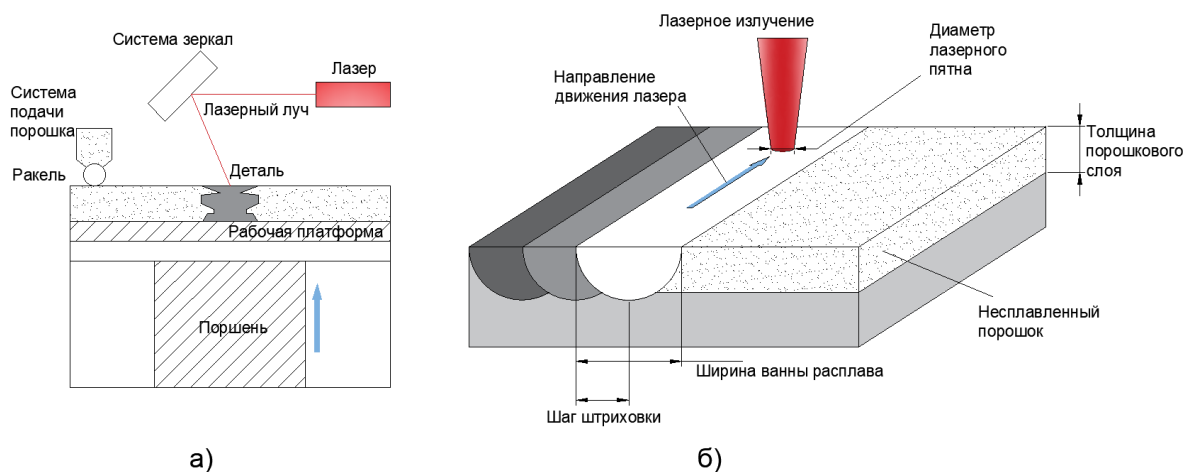


Рисунок 1.1 – Принципиальная схема установки СЛП [17] (а),
процесс плавления слоя [18] (б)

Основные компоненты системы селективного лазерного плавления перечислены ниже.

Лазерный источник: обеспечивает подачу энергии для плавления металлического порошка. Наиболее распространёнными являются волоконные лазеры с длиной волны около 1,06 мкм, обладающие высокой эффективностью и хорошей фокусировкой [13].

Система сканирования: включает зеркала гальванометра, которые управляют лазерным лучом по заданной траектории с высокой точностью [14].

Рабочая камера: поддерживает инертную газовую среду и контролирует температуру, предотвращая окисление и обеспечивая термическую стабильность процесса [15].

Подложка (платформа построения): обычно предварительно нагревается до температуры 100–400°C, что снижает температурные градиенты и остаточные термические напряжения [16].

Тем не менее, для расширения применения СЛП в массовом производстве необходимо решить ряд проблем, связанных с качеством изделий. Дефекты, такие как пористость, остаточные напряжения и неоднородность микроструктуры, возникающие из-за высокой скорости охлаждения, могут существенно снизить усталостную прочность и долговечность деталей [19]. Эти проблемы обусловлены сложными термомеханическими процессами на уровне единичных треков и требуют дальнейших исследований для глубокого понимания механизмов их возникновения и оптимизации параметров процесса [20].

1.2 Технологические параметры процесса СЛП

В общей сложности было выявлено около 130 параметров, влияющих на процесс СЛП [4, 21-23]. Их можно разделить на четыре основные группы:

Параметры, связанные с материалом: морфология и химический состав порошка, его термические, оптические и металлургические свойства и т. д.

Параметры установки: характеристики лазера и оптической системы, система подачи и выравнивания порошка, газовая среда, материал подложки и т. д.

Технологические параметры процесса: качество цифровой модели, параметры лазерного пятна, толщина слоя порошка, стратегия плавления, направление роста, ориентация модели, температура подложки и т. д.

Параметры постобработки: удаление деталей с подложки,

термическая обработка и другие процессы.

Исследования влияния ключевых технологических параметров, таких как мощность лазера (P , Вт), скорость сканирования (V , мм/с), расстояние между соседними дорожками (h , мм), толщина слоя (t , мм), посвящено значительное количество научных работ [24-26].

Совокупность этих параметров формирует важный интегральный показатель – **объемную плотность энергии** (англ. volumetric energy density, Дж/мм³), который широко используется в анализе процессов СЛП. Этот параметр определяется как количество энергии, передаваемой лазерным лучом на единицу объёма порошка [27]. Yadroitsev и соавт. [10] подробно изучили механизм формирования одиночных дорожек в процессе СЛП и показали, что их качество значительно зависит от плотности подводимой энергии, которая определяется следующей формулой: $E_v = \frac{P}{v \cdot h \cdot t}$

Когда объемная плотность энергии E_v слишком низка ($E_v < 50$ Дж/мм³), металлический порошок не плавится полностью, что приводит к образованию дефектов, таких как пористость или неполное соединение между отдельными треками [28]. Напротив, при слишком высокой плотности энергии ($E_v > 100$ Дж/мм³) могут возникать явления разбрызгивания или испарения материала, что снижает геометрическую точность и способствует образованию окалины в рабочей камере установки СЛП [29].

Другой параметр, часто используемый для учета изменений скорости и мощности процесса, – **линейная плотность энергии** (англ. linear energy density), выражающая энергию, подводимую на единицу длины дорожки [30-34]. Она определяется как: $E_l = \frac{P}{V}$

Мощность лазера, скорость сканирования и диаметр лазерного луча оказывают значительное влияние на длину, ширину и глубину ванны расплава, а также на динамику течения расплавленного материала, его испарение и другие физические процессы. Определение оптимальных

технологических параметров направлено на обеспечение стабильной морфологии ванны расплава при послойном формировании изделия.

С точки зрения диапазона значений ключевых параметров, процесс СЛП обычно использует диаметр лазерного луча 50-100 мкм, мощность лазера 50-400 Вт и скорость перемещения лазерного луча 200-2500 мм/с.

Кроме того, характеристики металлического порошка, такие как размер частиц и их форма, также существенно влияют на эффективность процесса СЛП. Согласно Simchi [11], сферическая форма частиц улучшает распределение порошка по поверхности и увеличивает плотность упаковки, что приводит к более гладким траекториям сканирования по сравнению с порошками неправильной формы.

Менее значительное влияние оказывают циклогенность состава порошка [35-37], свойства лазерного излучения (длина волны, режим работы, форма и качество луча) [38, 49] и инертная среда в рабочей камере [40-42]. В данной работе эти параметры считаются вторичными, и их непосредственное влияние не рассматривается при прогнозировании процесса и анализе экспериментальных данных.

1.3. Тепловое состояние в процессе СЛП

1.3.1. Вопросы теплопередачи

Теплопередача является фундаментальным физическим процессом в технологии СЛП, оказывающим прямое влияние на качество и свойства конечного изделия. В процессе СЛП теплопередача включает поглощение энергии лазерного излучения, локальное плавление металлического порошка и его быстрое охлаждение после прохода лазерного луча.

Основными механизмами теплопередачи являются: теплопроводность, конвекция и тепловое излучение. При этом теплопроводность играет доминирующую роль, особенно в зоне расплава и в слоях металлического порошка.

В моделировании СЛП источник тепла часто рассматривается как

подвижный тепловой источник, который перемещается вдоль траектории лазера. Одной из наиболее распространенных моделей является гауссовский источник тепла, в котором интенсивность теплового воздействия уменьшается от центра лазерного пятна [43].

Высокий температурный градиент в ванне расплава, достигающий 10^6 – 10^7 К/м, является характерной особенностью СЛП и приводит к сложным физическим явлениям, таким как образование газовых пузырей, разбрызгивание металла и формирование микроструктуры [44].

Гусаров и Смуров [45] разработали теоретическую модель на основе подвижного теплового источника с гауссовым распределением энергии для описания этого процесса. Энергетическое распределение представляется следующим выражением:

$$Q(x, y, z, t) = \frac{2P}{\pi r^2} \exp\left(-\frac{2(x^2 + y^2)}{r^2}\right) \delta(z - vt), \quad (1.1)$$

где

Q – плотность энергии;

P – мощность лазера;

r – радиус лазерного луча;

v – скорость сканирования;

δ – дельта функция Дирака, обозначающая концентрацию энергии во времени и пространстве.

Основное нестационарное уравнение теплопроводности, используемое для описания передачи тепла в материале:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + Q, \quad (1.2)$$

где

T – температура;

ρ – плотность материала;

c – удельная теплоёмкость;

k – теплопроводность;

$\nabla^2 T$ – оператор Лапласа, описывающий процесс тепловой диффузии [46].

Эта модель показывает, что температура в зоне расплава может достигать очень высоких значений (2000-3000°C) за чрезвычайно короткое время (менее 1 мкс), а затем быстро снижаться до температуры окружающей среды или температуры подложки из-за теплопроводности и потерь тепла через конвекцию и излучение. Высокий температурный градиент (до 10^6 К/м) является характерной особенностью СЛП, что значительно отличает его от традиционных температурных процессов, таких как сварка или литьё [4]. Согласно исследованию King и соавт. [4], высокая скорость охлаждения в СЛП приводит к формированию неоднородной микроструктуры, такой как мелкозернистые кристаллы или мартенситная фаза в нержавеющей стали, что непосредственно влияет на механические свойства изделия.

Сложность теплопередачи в СЛП также обусловлена фазовыми превращениями материала: от твёрдого порошка к жидкому состоянию с последующим затвердеванием. Этот процесс связан со скрытой теплотой плавления и затвердевания, что требует включения данного параметра в модели для обеспечения высокой точности [47]. Rosenthal [20] предложил упрощённый аналитический подход, основанный на подвижном точечном источнике тепла, однако эта модель применима только к однородным твёрдым материалам и не учитывает особенности металлического порошка в СЛП. Процессы плавления и затвердевания металла влияют на параметры, такие как теплопроводность и удельная теплоёмкость, что требует интеграции фазовых переходов в уравнения теплопередачи [48].

Параметры процесса СЛП, включая мощность лазера, скорость сканирования, толщину слоя порошка и стратегию сканирования, оказывают непосредственное влияние на температурное поле и размеры зоны расплава. Согласно исследованию Li и соавт. [5], выполненному

методом конечных элементов для нержавеющей стали 316L, при увеличении мощности лазера со 100 Вт до 200 Вт глубина зоны расплава возрастает с 50 мкм до примерно 100 мкм, а ширина – с 80 мкм до 120 мкм из-за более высокого энергетического ввода [6]. Напротив, при увеличении скорости сканирования с 500 мм/с до 2000 мм/с время взаимодействия лазера с материалом сокращается, что приводит к уменьшению зоны расплава (глубина уменьшается до 30-40 мкм) и увеличению температурного градиента из-за недостаточного рассеивания тепла [7].

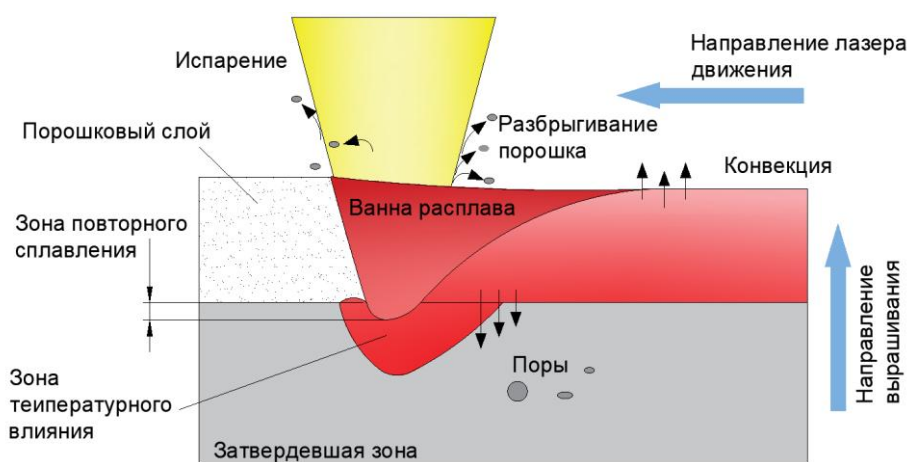


Рисунок 1.2 – Схематическое представление лазерного сплавления порошкового слоя

Толщина слоя порошка также существенно влияет на распределение температуры: более толстый слой (80 мкм по сравнению с 30 мкм) увеличивает эффект теплоизоляции за счёт высокой пористости, что приводит к накоплению тепла и повышению максимальной температуры, тогда как более тонкий слой (30 мкм) способствует быстрому отводу тепла в подложку, уменьшая размеры зоны расплава, но увеличивая скорость охлаждения [8, 55]. Childs и соавт. [47] показали, что при увеличении толщины слоя с 20 мкм до 50 мкм температура поверхности может возрасть на 15-20 %, что влияет на стабильность единичных треков.

Что касается стратегии сканирования, Cheng и соавт. [7] сравнили методы параллельного, реверсивного и сканирование под углом для

титанового сплава. Результаты показали, что реверсивное сканирование снижает концентрацию тепла в местах пересечения траекторий, улучшает равномерность распределения температуры и уменьшает вероятность локального перегрева, тогда как параллельное сканирование создаёт более высокий температурный градиент в зоне перекрытия, что может привести к температурным деформациям [50]. Оптимизация расстояния между траекториями сканирования (hatch spacing) также критически важна: малое расстояние (50 мкм) увеличивает тепловое перекрытие, а слишком большое (150 мкм) может оставить ненаплавленные участки [51].

Материальные свойства, включая теплопроводность, удельную теплоёмкость, коэффициент температурного расширения и температуру плавления, определяют распределение и передачу тепла в СЛП. Материалы с высокой теплопроводностью (например, алюминиевые сплавы) быстро рассеивают тепло, снижая температурный градиент и температурные напряжения, тогда как титановые сплавы (7 Вт/(мК)) накапливают больше тепла по сравнению с нержавеющей сталью 316L (15 Вт/(мК)), что приводит к различиям в распределении температуры и напряжений [52, 54, 55]. Высокая удельная теплоёмкость замедляет процессы нагрева и охлаждения, влияя на скорость затвердевания и микроструктуру [55-57]. Материалы с большим коэффициентом температурного расширения (например, нержавеющая сталь) более подвержены деформациям и температурным напряжениям, тогда как низкая температура плавления позволяет снизить мощность лазера, уменьшая испарение материала и пористость [11, 29, 59-62].

1.3.2 Методы термического моделирования

Моделирование процессов СЛП является важным инструментом, широко используемым для изучения явлений, происходящих при плавлении порошка, оптимизации выбора технологических параметров и повышения качества конечных изделий. Метод конечных элементов (МКЭ) является наиболее распространённым инструментом для моделирования теплового

состояния в СЛП. МКЭ позволяет проводить детализированное моделирование сложных процессов и интеграцию различных граничных условий. Он широко применяется для моделирования теплопереноса, фазовых переходов и температурных напряжений в СЛП [63].

Li и соавт. [5] использовали COMSOL Multiphysics для решения нестационарной тепловой задачи с учётом граничных условий, таких как тепловые потери за счёт конвекции и излучения. Их результаты моделирования показали, что максимальная температура в зоне расплава для стали 316L достигает примерно 2200°C , при этом ошибка составляет менее 8% по сравнению с экспериментальными данными, полученными с использованием инфракрасной камеры [64].

Метод конечных разностей (МКР) применяется для задач с простой геометрией и обычно используется для решения уравнений теплопроводности в 1D или 2D моделях [45]. Основное преимущество МКЭ – способность обрабатывать сложную геометрию и интегрировать дополнительные физические эффекты, такие как движение расплавленного металла и термические напряжения. Однако этот метод требует значительных вычислительных ресурсов. МКР проще и быстрее, но менее гибок при моделировании сложных процессов.

Аналитические модели, такие как модель Rosenthal [20], представляют собой упрощённый подход, основанный на предположении о подвижном точечном источнике тепла в однородной твёрдой среде, что позволяет рассчитать распределение температуры во времени [65]. Однако этот метод не подходит для СЛП, так как не учитывает пористость порошка и изменение свойств материала в зависимости от температуры, что приводит к ошибке прогнозирования размеров зоны расплава до 20-30% [66].

Для устранения этих недостатков Körner и соавт. [51] предложили комбинированный метод дискретных элементов (МДЭ) и МКЭ. В этой методике МДЭ описывает поведение отдельных порошковых частиц при

нагреве, после чего данные передаются в МКЭ для решения тепловой задачи, что повышает точность прогнозирования температуры и формы зоны расплава [67].

В последнее время разрабатываются модели, основанные на облачных вычислениях и искусственном интеллекте, для сокращения времени моделирования. Например, Smith и соавт. [67] использовали нейронные сети для прогнозирования температурного поля в СЛП на основе данных МКЭ, что позволило снизить время вычислений с нескольких часов до нескольких минут при приемлемой точности (ошибка менее 5%) [68].

1.3.3 Экспериментальные методы измерения температуры в СЛП

Экспериментальное измерение температуры в СЛП представляет собой серьёзную проблему из-за небольших размеров зоны расплава (менее 200 мкм) и высокой скорости изменения температуры (до 10^6 К/с). Инфракрасные камеры являются наиболее распространённым инструментом, способным фиксировать температуру поверхности в диапазоне 500-3000 °С.

Yang и соавт. [54] использовали инфракрасную камеру для измерения максимальной температуры в зоне расплава стали 316L, которая составила около 2200°С. Однако низкое пространственное разрешение (50 мкм) затрудняет точное определение температурного градиента. Инфракрасные камеры позволяют наблюдать за распределением температуры на поверхности в реальном времени, но их точность может зависеть от коэффициента излучения и поглощения материала [46].

Термопары также применяются для измерения температуры подложки, обеспечивая данные о температуре в конкретных точках, но их использование в СЛП затруднено из-за малых размеров зоны нагрева и высоких температур [70].

Более продвинутые методы, такие как синхротронная дифракция, были применены Zhao и соавт. [71] для отслеживания температуры и фазового

состояния материала в реальном времени. Этот метод использует высокоэнергетическое рентгеновское излучение для анализа структурных изменений в ходе СЛП, обеспечивая температурные измерения с разрешением менее 10 мкм и погрешностью менее 2%. Однако высокая стоимость и необходимость специализированного оборудования ограничивают широкое применение этой технологии.

Для повышения точности измерений также предложен метод бесконтактного измерения температуры с помощью двухцветного пирометра, анализирующего тепловое излучение. Этот метод позволяет минимизировать влияние изменяющегося коэффициента излучения и подходит для мониторинга температуры зоны плавления [72].

Ограничения экспериментальных методов измерения температуры подчёркивают важность комбинированного использования моделирования и эксперимента для понимания теплового состояния в СЛП, особенно на уровне единичных треков – главного фокуса данной диссертации [5].

1.4. Напряжённое состояние в процессе СЛП

1.4.1. Температурные напряжения

Температурные напряжения в процессе СЛП возникают главным образом из-за высокого температурного градиента и неравномерного теплового расширения материала во время плавления и последующей кристаллизации. Когда лазерный луч воздействует на слой металлического порошка, он создаёт локальную зону расплава с высокой температурой, тогда как окружающие области, включая ранее застывшие слои, остаются значительно холоднее.

Этот температурный перепад приводит к неравномерному тепловому расширению: в фазе нагрева ванну расплава значительно расширяется, но его деформация ограничена окружающим уже затвердевшим материалом. При охлаждении ванну расплава подвергается усадке, однако окружающие области препятствуют этому процессу, что приводит к возникновению

растягивающих напряжений внутри ванны расплава и сжимающих напряжений в окружающем материале.

Механизм формирования температурных напряжений в СЛП можно разделить на два основных этапа [56-58, 60]:

Фаза нагрева: в процессе плавления ванна расплава значительно расширяется из-за высокой температуры, но это расширение ограничено нижележащими застывшими слоями, что приводит к возникновению сжимающих напряжений внутри ванны расплава. Величина этих напряжений пропорциональна температурному градиенту и коэффициенту температурного расширения материала.

Фаза охлаждения: когда ванна расплава быстро остывает и сжимается, она подвергается растягивающим усилиям со стороны ранее застывшего материала, что приводит к возникновению растягивающих напряжений в недавно затвердевшей зоне и сжимающих напряжений в окружающих областях.

Температурный градиент в СЛП может достигать 10^6 - 10^7 К/м, как отмечено в исследовании Gusarov и соавт. [43], что делает температурные напряжения серьёзной проблемой. Этот градиент зависит от мощности лазера, скорости сканирования и размеров ванны расплава.

Mercelis и Kruth [58] описали фундаментальную термомеханическую зависимость, выражающую температурные напряжения:

$$\sigma = E\alpha\Delta T, \quad (1.3)$$

где

σ – температурные напряжения (Па);

E – модуль упругости (Па);

α – коэффициент теплового расширения (K^{-1});

ΔT – температурный перепад (К).

Свойства материала также оказывают значительное влияние на уровень температурных напряжений. Алюминиевые сплавы (например, AlSi10Mg) с

высоким коэффициентом теплового расширения ($\alpha=23 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$) создают более высокие температурные напряжения по сравнению с титаном Ti-6Al-4V ($\alpha=8,6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$) [61] при тех же температурных условиях. Однако титан более подвержен растрескиванию из-за низкой пластичности и высокой хрупкости при быстром охлаждении [62].

Фролов детально проанализировал этот механизм, подчеркнув, что неравномерность охлаждения – особенно различие в скорости охлаждения между поверхностью и сердцевиной изделия – является основной причиной возникновения остаточных напряжений [73]. Он также отметил, что фазовый переход (из жидкого в твёрдое состояние) в ванну расплава может дополнительно усложнять процесс формирования напряжений из-за сопутствующих изменений объёма.

1.4.2. Остаточные напряжения

Остаточные напряжения – это напряжения, остающиеся в материале после завершения процесса СЛП и остывания детали до температуры окружающей среды. Эти напряжения могут быть как растягивающими, так и сжимающими в зависимости от положения внутри изделия и температурной истории каждой области. Основной причиной их возникновения является неравномерность охлаждения между различными зонами материала или между слоями наплавки.

Согласно исследованию Simchi, остаточные напряжения в СЛП часто достигают значительных величин, иногда приближаясь или превышая предел текучести материала, особенно в металлах с высоким коэффициентом теплового расширения, таких как нержавеющая сталь или алюминиевые сплавы [11].

Shiomi и соавт. [60] использовали рентгеновскую дифракцию для измерения остаточных напряжений в образцах из нержавеющей стали 316L, изготовленных методом СЛП. Они обнаружили, что максимальные растягивающие напряжения могут достигать 500 МПа на верхней

поверхности, в то время как сжимающие напряжения порядка – 200 МПа проявляются в более глубоких областях, ближе к подложке [65]. Эти значения достаточно велики, чтобы вызвать коробление или растрескивание тонкостенных деталей, особенно при толщине менее 1 мм [67].

Parry и соавт. [63] показали, что остаточные напряжения накапливаются в процессе многослойного наплавления, особенно в многоуровневых структурах, где тепло нового слоя вызывает повторный нагрев предыдущих слоёв, создавая дополнительный тепловой цикл. Это особенно критично, если подложка не подогревается, что приводит к большому градиенту температуры между первым слоем и подложкой [76].

Остаточные напряжения оказывают множество негативных эффектов на качество СЛП-изделий, в том числе:

- **Поводки:** остаточные напряжения могут вызывать коробление или изменение размеров изделия по сравнению с исходным проектом, особенно в тонкостенных, длинных или сложных конструкциях [75].
- **Растрескивание:** остаточные растягивающие напряжения могут инициировать и распространять трещины, особенно в острых углах, на границах слоёв или в зонах концентрации напряжений [76].
- **Снижение долговечности:** Остаточные напряжения уменьшают усталостную прочность и срок службы изделий при циклических нагрузках [44, 76, 77].

1.4.3. Методы измерения напряжений

Измерение напряжений в СЛП представляет значительные трудности из-за малого размера единичных треков (обычно менее 500 мкм) и быстрого изменения теплового состояния. Для количественного определения остаточных напряжений в СЛП-продукции разработано несколько экспериментальных методов, среди которых:

Рентгеновская дифракция (X-ray diffraction, XRD) – наиболее распространённая техника измерения остаточных напряжений, основанная

на изменении межплоскостных расстояний кристаллической решётки под воздействием напряжений. Shiomi и соавт. [60] применили этот метод для измерения напряжений в стали 316L, добившись высокой точности, однако стандартное рентгеновское излучение позволяет анализировать только поверхностные слои или глубину в несколько микрометров [61].

Mercelis и Kruth использовали рентгеновскую дифракцию для измерения остаточных напряжений в нержавеющей стали 316L и зафиксировали значения до 400 МПа вблизи поверхности [58].

Для измерения напряжений на большей глубине Withers и Bhadeshia [64] предложили нейтронную дифракцию, которая позволяет проникать на миллиметровые глубины в материал, что делает её подходящей для анализа толстостенных деталей. Однако высокая стоимость и необходимость специального оборудования ограничивают применение этого метода.

Метод зондирующих отверстий – ещё один распространённый метод, при котором в образце сверлится небольшое отверстие, а затем измеряются локальные деформации с помощью тензодатчиков для расчёта остаточных напряжений [62].

Иванов [78] применил этот метод к титановым сплавам, изготовленным с помощью СЛП, и обнаружил, что остаточные напряжения снижаются с 350 МПа на поверхности до 100 МПа на глубине 1,5 мм. Хотя этот метод проще, он является разрушающим и плохо подходит для единичных треков из-за их малых размеров.

Метод разрезания – заключается в разрезании изделия на части и анализе изменений размеров или формы после разреза для оценки остаточных напряжений. Хотя этот метод прост в реализации, он менее точен из-за влияния процесса разрезания. Kruth и соавт. использовали его для определения распределения остаточных напряжений в нержавеющей стали, полученной методом СЛП [75].

Метод обратного рассеяния электронов (Electron Backscatter

Diffraction, EBSD) – сравнительно новый метод, применяемый в сканирующей электронной микроскопии (РЭМ). Moat и соавт. использовали EBSD для измерения микроскопических напряжений на уровне зёрен кристаллов, что позволило получить детальную информацию о распределении напряжений в микроструктуре СЛП – материалов [67]. Однако этот метод требует сложной подготовки образцов и применим только для очень небольших участков.

1.4.4. Методы моделирования напряжений

Метод конечных элементов является основным инструментом для моделирования температурных и остаточных напряжений в СЛП. Parry и соавт. [62] разработали термомеханическую модель, в которой температурное поле из задачи теплопереноса интегрируется в механическую задачу с использованием программных комплексов, таких как Abaqus или ANSYS. Их модель предсказала максимальное растягивающее напряжение около 450 МПа на поверхности стали 316L, что согласуется с данными рентгеновской дифракции [62]. МКЭ позволяет анализировать распределение напряжений во времени и пространстве, включая пластические напряжения при превышении материала предела текучести [66]. Моделирование напряжений в СЛП обычно основано на методе конечных элементов, который сочетает в себе модели теплопереноса и механики твёрдого тела.

- **Модель теплопереноса:** рассчитывает распределение температуры во времени в процессе СЛП, используя модели подвижных источников тепла для симуляции лазерного излучения. В модель вводятся такие параметры, как мощность лазера, скорость сканирования и коэффициент поглощения тепла материалом.

- **Механическая модель:** на основе распределения температуры рассчитываются тепловое расширение, усадка и напряжения, используя механические свойства материала, такие как модуль Юнга, коэффициент

теплового расширения и предел текучести.

Помимо МКЭ, Smith и соавт. [67] предложили многоуровневое моделирование для связи микроскопических напряжений (на уровне зёрен) с макроскопическими напряжениями. Этот метод сочетает молекулярную динамику на атомарном уровне с МКЭ на уровне континуума, повышая точность предсказания сложных напряжений.

Популярные программные комплексы, такие как ANSYS, Abaqus и COMSOL Multiphysics, широко применяются в этих исследованиях. Однако Roberts и соавт. отметили, что моделирование СЛП сталкивается с трудностями из-за малого масштаба расплавленной ванны, больших температурных градиентов и сложных фазовых переходов, что требует точных моделей материалов и значительных вычислительных ресурсов [63]. Петров [79] разработал усовершенствованную МКЭ – модель для алюминиевых сплавов, полученных методом СЛП, интегрируя фазовые переходы (из порошка в жидкость, а затем в твёрдое состояние). Результаты показали повышение точности предсказания остаточных напряжений на 15% по сравнению с более простыми моделями, с максимальными остаточными напряжениями около 280 МПа в испытательных образцах.

1.4.5. Параметры, влияющие на напряжения

В процессе СЛП термические и остаточные напряжения существенно зависят от таких технологических параметров, как мощность лазера, скорость сканирования, толщина порошкового слоя и стратегия сканирования. Высокая мощность лазера и низкая скорость сканирования увеличивают температурный градиент, приводя к более высоким температурным и остаточным напряжениям. Согласно Mercelis и Kruth [58], при использовании мощности 300 Вт и скорости 500 мм/с температурные напряжения в нержавеющей стали 316L достигают 600 МПа, что значительно выше, чем при 100 Вт и 2000 мм/с. Gong и соавт. показали, что при увеличении мощности лазера с 200 Вт до 400 Вт остаточные

напряжения в титановом сплаве Ti-6Al-4V возросли с 200 МПа до 350 МПа из-за увеличения размера зоны расплава и температурного градиента [80].

С другой стороны, высокая скорость сканирования уменьшает время контакта лазера с материалом, ускоряя охлаждение и повышая температурные напряжения. Carter и соавт. [81] установили, что при увеличении скорости сканирования с 0,5 м/с до 1 м/с остаточные напряжения в жаропрочном никелевом сплаве возросли с 250 МПа до 320 МПа.

Толщина слоя порошка также играет важную роль: более толстые слои (80 мкм) приводят к большему накоплению тепла и увеличению напряжений из-за замедленного теплоотвода [5]. Кроме того, стратегия сканирования оказывает значительное влияние: зигзагообразное или чередующееся сканирование обеспечивает более равномерное распределение температуры, уменьшая напряжения по сравнению с однонаправленным сканированием. Чередующаяся стратегия может снизить остаточные напряжения в стали 316L примерно на 25% [82].

Материальные свойства, включая модуль упругости, коэффициент теплового расширения и пластичность, оказывают прямое влияние на уровень температурных и остаточных напряжений в СЛП. Титановые сплавы с низким модулем упругости (110 ГПа против 200 ГПа у нержавеющей стали) обычно создают меньшие напряжения, но более склонны к растрескиванию из-за низкой пластичности (менее 10%) [57]. В отличие от них алюминиевые сплавы, такие как AlSi10Mg, демонстрируют более высокие напряжения из-за большого коэффициента теплового расширения, но лучшую способность к пластической деформации благодаря высокой пластичности [74]. Материалы с высоким коэффициентом теплового расширения, такие как нержавеющая сталь, более подвержены термическим напряжениям по сравнению с материалами с низким коэффициентом, например титановыми сплавами. Для минимизации напряжений используется подогрев подложки до 200 – 400°C, способный уменьшить остаточные напряжения на 30 – 50%

за счёт снижения температурного градиента, что было доказано Buchbinder и соавт. [66] на алюминиевых сплавах СЛП.

1.4.6. Стратегии снижения напряжений в СЛП

Для уменьшения температурных и остаточных напряжений предложены различные стратегии. Kruth и соавт. [68] показали, что подогрев подложки до 200°C снижает напряжения в стали 316L с 400 МПа до 250 МПа. Использование чередующегося или изменяющегося направления сканирования способствует более равномерному распределению температуры и снижает локальные растягивающие напряжения по сравнению с параллельным сканированием [8]. Термообработка при 600°C в течение 2 часов также эффективно уменьшает остаточные напряжения до менее 100 МПа в стали 316L [83].

Дополнительно предлагается оптимизация параметров лазера: снижение мощности и корректировка скорости сканирования для уменьшения температурного градиента, а также применение защитных покрытий для контроля напряжений [56]. Кроме того, оптимальное проектирование поддерживающих структур позволяет снизить деформации в процессе СЛП.

1.5. Выводы по главе и постановка задач исследования

Существующие температурные модели в СЛП часто предполагают однородность материала и не учитывают пористость металлического порошка, что приводит к погрешностям в прогнозировании температуры [5]. Li и соавт. показали, что эффективная теплопроводность порошкового слоя может быть в 10-20 раз ниже, чем у твёрдого материала, однако многие модели не полностью учитывают этот фактор [5]. Кроме того, изменение свойств материала с изменением температуры (например, снижение теплопроводности при высоких температурах) и скрытая теплота плавления часто игнорируются, что снижает точность прогнозирования размеров зоны плавления и температурного градиента [54]. Эти ограничения особенно выражены на уровне единичных треков, где микроструктурные факторы играют важную роль [67].

Хотя единичный трек является базовой единицей СЛП, большинство исследований сосредоточено на макромасштабных явлениях, не анализируя детально температурное и напряжённое состояние на этом начальном этапе. Parry и соавт. [62] моделировали остаточные напряжения в многослойных структурах, но не изучали механизмы формирования напряжений в единичных треках. Это ограничивает понимание влияния параметров процесса и свойств материала на начальное термонапряжённое состояние, которое является ключевым для качества всей детали [55].

Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными на уровне единичных треков остаётся недостаточно изученным из-за сложностей измерения температуры и напряжений в малых масштабах (менее 500 мкм) и при высоких скоростях изменений [64]. Методы, такие как рентгеновская дифракция или инфракрасные камеры, обладают ограниченным разрешением, тогда как передовые технологии, например, синхротронная дифракция, менее распространены из-за высокой стоимости [58]. Это усложняет валидацию термонапряжённых моделей, особенно для специфических материалов, таких как нержавеющая сталь или титановые сплавы [5].

Учитывая указанные нюансы, данная диссертация сосредоточена на:

1. Разработке моделей термонапряжённого состояния единичных треков, полученным методами СЛП.
2. Детальном анализе влияния параметров процесса и свойств материала на процесс СЛП.
3. Сопоставлении результатов моделирования с экспериментальными данными, используя передовые методы измерения, с целью валидации и оптимизации процесса СЛП.

Исследование внесёт вклад в более глубокое понимание физических явлений на микроуровне, что позволит снизить дефекты и повысить качество изделий, получаемых методом СЛП.

Глава 2. ТЕПЛОВОЕ СОСТОЯНИЕ ЕДИНИЧНЫХ ТРЕКОВ, ПОЛУЧЕННЫХ В ПРОЦЕССЕ СЛП

Основываясь на обзоре литературы и теоретической базе, представленных в первой главе, настоящая глава посвящена экспериментальному исследованию и моделированию теплового состояния одиночных треков – базовых структурных элементов, определяющих качество и стабильность свойств деталей, получаемых методом СЛП.

Основной целью данной главы является установление влияния характеристик порошкового материала, в частности гранулометрического состава сплава AlSi10Mg , на поглощательную способность лазерного излучения и формирование морфологии ванны расплава. Путем комплексации современных методов экспериментальных измерений и безразмерного анализа (с использованием числа Пекле и плотности энтальпии), в главе будут определены границы стабильного формирования треков, а также создана важная база данных для верификации тепловых и термомеханических моделей в последующих главах

2.1 Материалы и методы

2.1.1 Порошки AlSi10Mg

Для экспериментальных исследований использовался коммерчески доступный газоатомизированный порошок сплава AlSi10Mg (ASP-45, UC RUSAL). Порошок был просеян в соответствии со стандартом ASTM B214 с использованием вибрационного грохота Analysette 3 (Fritsch, Германия), оснащенного ситами с различной шириной ячеек, равной 20 мкм, 32 мкм, 40 мкм и 50 мкм (ISO 3310). Было получено пять фракций порошка с различным средним размером частиц. Фракция порошка P1 прошла через сито с шириной ячеек 20 мкм. Фракции P2, P3 и P4 были собраны между ситами с шириной ячеек 20/32 мкм, 32/40 мкм и 40/50 мкм соответственно. Фракция порошка P5 осталась на сите с шириной ячеек 50 мкм. Исходный

непросеянный (стандартный) порошок также использовался в экспериментах и обозначен как P0.

Гранулометрия и химический состав порошков исследовались с использованием сканирующего электронного микроскопа EVO-40 (Carl-Zeiss, Германия) с системой микро-рентгеноструктурного анализа X-Max (Oxford Instruments). Полученные РЭМ – изображения порошков P0–P5 представлены на рис 2.1. Большинство частиц порошка имеют форму, близкую к сферической. Для более крупных порошков наблюдались некоторые мелкие сателлиты и оксидные чешуйки, приставшие к поверхности частиц (рис 2.1 д,е). Установлено, что химический состав используемого стандартного порошка (P0) соответствует стандарту DIN EN 1706, хотя было обнаружено некоторое варьирование содержания кремния (Si) в различных фракциях порошка, при этом более крупные порошки (с большими частицами) содержат большее количество кремния. Аналогичные наблюдения для фракций порошка AlSi10Mg обсуждались в работах [83,84]. Изменение содержания Si в частицах порошка может быть связано с поверхностными эффектами или с более высокой вероятностью наличия осадков Si в частицах большего размера. Установленное варьирование химического состава не оказывает существенного влияния на физические свойства порошков. В частности, с использованием дифференциальной сканирующей калориметрии, выполненной на приборе NETZSCH STA 449 F1 (Jupiter, Германия), было установлено, что температуры солидуса/ликвидуса составляют 563/597°C с вариацией менее 2°C для стандартного порошка (P0) и всех просеянных порошков (P1–P5).

Распределение размеров частиц (PSD) было оценено с использованием полученных РЭМ - изображений в соответствии со стандартом ISO 13322. Кажущаяся плотность ρ_a порошков измерялась согласно стандарту ISO 3923 с использованием расходомера HFLOW-1 (Bettersize Ltd., Китай). Упаковочная плотность порошков рассчитывалась по формуле $f = \rho_a / \rho$, где

$\rho = 2670 \text{ кг/м}^3$ - плотность твердого сплава AlSi10Mg.

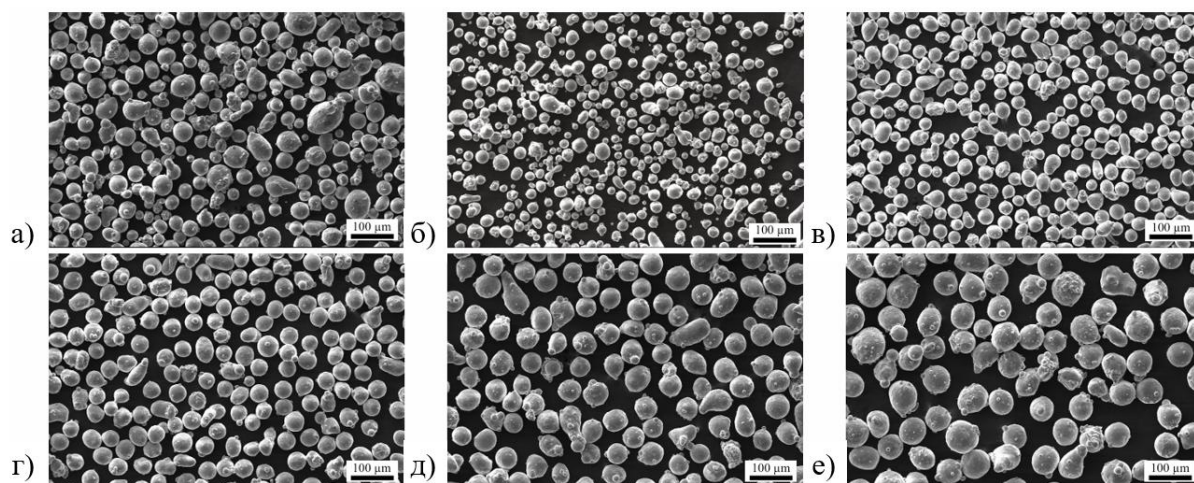


Рисунок 2.1 – РЭМ – изображения стандартного порошка AlSi10Mg P0 (а) и его просеянных фракций P1 (б), P2 (в), P3 (г), P4 (д), P5 (е)

Отметим, что плотность упаковки порошковых слоев малой толщины обычно отличается от таковой для объемных образцов порошка [85, 86]. Поэтому все измерения проводились как для первоначально просеянных образцов порошка, так и для дополнительно собранных образцов, полученных с использованием специальной оснастки для моделирования упаковки тонких слоев фракций порошка в процессе СЛП [85]. Для проведения таких экспериментов использовалась небольшая алюминиевая платформа с полостью глубиной 120 μm и диаметром 30 мм. Глубина полости была выбрана достаточно малой для оценки эффектов тонкого слоя и в то же время достаточно большой, чтобы обеспечить высокую точность размеров при изготовлении с использованием доступного оборудования. Порошок засыпался в полость, массы платформы с порошковым слоем (M_1) и без него (M_0) измерялись с использованием лабораторных весов Entris II (Sartorius, Германия) с точностью 10^{-4} г. Кажущаяся плотность порошкового слоя оценивалась с использованием найденной массы слоя ($M_1 - M_0$) и известного объема полости. Плотность упаковки порошкового слоя затем рассчитывалась аналогично описанному выше методу для объемной плотности упаковки. Для анализа плотности слоя для каждого порошка P0-

P5 было выполнено десять повторных испытаний.

Установленные гранулометрические параметры стандартного (P0) и просеянных (P1-P5) порошков представлены в таблице 2.1. Средний размер частиц порошков (оцененный по d_{50}) варьируется в диапазоне 28–64 мкм. Отметим, что значения d_{50} не претерпевают значительных изменений между объемными и слоевыми образцами порошка. В то же время плотность упаковки порошков становится ниже в образцах порошка, полученных при анализе тонких слоев. Более того, наблюдается некоторая зависимость плотность упаковки от среднего размера частиц: просеянные более мелкие фракции имеют более низкую плотность упаковки, а плотность слоя стандартного порошка находится между значениями для более крупных и более мелких фракций. Отметим, что аналогичные зависимости были установлены в работе [85], хотя также сообщалось об обратных зависимостях [86], которые могут быть обусловлены особенностями распределения размеров частиц (PSD) различных просеянных фракций. Измеренные PSD представлены на рис 2.2. Данные на этом рисунке приведены для образцов порошка, собранных с использованием оснастки для анализа плотности упаковки тонких слоев. Для экспериментально измеренных распределений диаметров частиц использовались логнормальные аппроксимации. Видно, что стандартный порошок (P0) имеет более широкое PSD по сравнению с его фракциями (P1-P5).

Таблица 2.1 – Гранулометрические параметры, измеренные для объемных и слоевых образцов порошков AlSi10Mg P0 (стандартный) и P1-P5 (просеянные фракции)

Порошок тип	d_{10} (мкм)		d_{50} (мкм)		d_{90} (мкм)		Ширина гранулометрического распределения (Span)		Плотность упаковки, f	
	Объем	Слой	Объем	Слой	Объем	Слой	Объем	Слой	Объем	Слой
P0	33,6	29,4	48,4	44,2	69,7	66,6	0,75	0,84	0,542	0,432
P1	17,2	19,6	25,8	28,1	38,6	40,2	0,83	0,73	0,530	0,380
P2	27,1	26,3	32,4	32,8	38,8	40,9	0,36	0,45	0,528	0,421
P3	35,7	35,5	41,8	41,4	48,8	48,3	0,31	0,31	0,533	0,433
P4	42,5	43,7	53,7	51,5	67,9	60,6	0,47	0,33	0,539	0,473
P5	53,9	53,7	65,9	63,4	80,5	74,9	0,40	0,33	0,545	0,508

2.1.2. Эксперименты с единичными треками

Эксперименты с единичными треками проводились с использованием процесса селективного лазерного плавления на системе AddSol D50 (Additive Solutions, Россия) с мощностью лазера 400 Вт.

Эксперименты с единичными треками проводились с использованием иттербиево-волоконного лазера (IPG Photonics) с длиной волны 1064 нм и размером лазерного пятна $2R=80$ мкм. Единичные треки формировались на алюминиевой подложке в атмосфере аргона. Толщина порошкового слоя была выбрана равной $h=60$ мкм на основе оценки эффективной толщины слоя в стандартном процессе СЛП [87, 88], то есть $h=h_0/f$, где $h_0=30$ мкм – номинальная толщина слоя, а f – упаковочная плотность порошка, которая приблизительно равна 0,5 (см. таблицу 2.2).

Таблица 2.2 – Свойства AlSi10Mg, использованные в моделировании

Параметры	Размеры	Ценности
Плотность твердого тела, ρ_s	кг/м ³	2670
Плотность жидкости, ρ_l	кг/м ³	1800
Удельная теплоемкость твердого вещества, c_s	Дж/(кгК)	922
Удельная теплоемкость жидкости, c_l	Дж/(кгК)	1800
Теплопроводность твердого тела, k_s	Вт/(мК)	146
Теплопроводность жидкости, k_l	Вт/(мК)	120
Скрытая теплота плавления, L_m	кДж/кг	396
Температура ликвидуса, T_l	⁰ С	597
Температура солидуса, T_s	⁰ С	563

Единичные треки изготавливались в широком диапазоне технологических параметров с мощностью лазера $P=40-400$ Вт (с шагом 36 Вт) и скоростью сканирования $v=100-1980$ мм/с (с шагом 235 мм/с). Всего было исследовано 99 режимов параметров печати для всех типов порошков (P0-P5). Морфология единичных треков на изображениях вида сверху анализировалась с использованием оптического микроскопа Saike Digital SK2700HDMI-AF (Saike, Китай). Затем подложки разрезались по центрам единичных треков, полировались и подвергались травлению. Оценка

размеров ванны расплава на изображениях микрошлифов проводилась с использованием конфокального лазерного микроскопа Olympus LEXT OLS5000 (OLYMPUS, Япония).

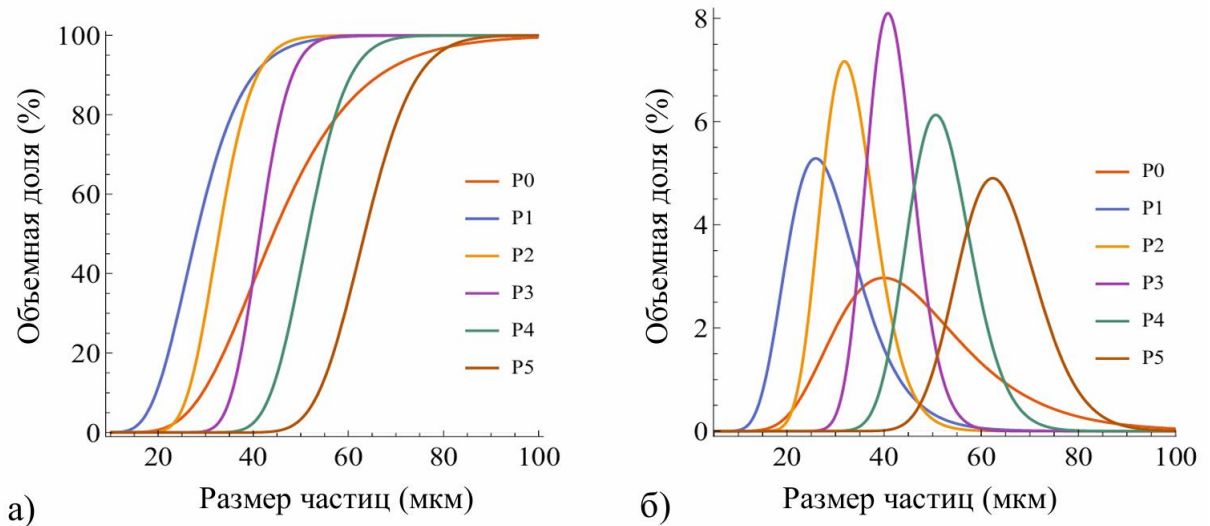


Рисунок 2.3 – Распределение частиц по размерам для стандартного порошка AlSi10Mg (P0) и его просеянных фракций (P1-P5) с различными размерами частиц, (а): суммарное распределение, (б): частотное распределение.

2.2. Методы моделирования

2.2.1. Анализ масштабирующих законов

Для первоначальной оценки поглощающей способности порошков был использован безразмерный анализ, предложенный в работе [89], для оценки входной энергии, необходимой для формирования стабильного трека. Было использовано следующее определение коэффициента эффективности плавления единичного трека:

$$N = \frac{E_v}{H_s} = \frac{AP}{\pi \rho c (T_m^{eff} - T_0) h \nu \omega}, \quad (2.1)$$

где

$E_v = AP\tau / (\pi \omega 2h)$ – объемная плотность входной энергии;

$H_s = \rho c (T_m^{eff} - T_0)$ – плотность энергии (энтальпии), необходимая для

плавления;

A – поглощающая способность;

P – мощность лазера;

$\omega = \sqrt{2}R$ – эффективный радиус гауссова лазерного пучка;

$\tau = \omega / v$ – характерное время;

v – скорость сканирования лазера;

h – толщина порошкового слоя;

$T_m^{eff} = T_l + L_m / c$ – эффективная температура плавления, определенная через температуру ликвидуса T_l , скрытую теплоту плавления L_m и удельную теплоемкость c ;

T_0 – начальная температура порошкового слоя и подложки.

Критерий формирования непрерывного трека определяется соотношением $N > 1$ что означает, что входной энергии достаточно для обеспечения плавления облучаемого объема порошка с радиусом ω и толщиной h . Граница отсутствия сплавления может быть определена на карте процесса с различными значениями мощности лазера и скорости как кривая, где $N=1$ [89]. Если экспериментальная граница отсутствия сплавления может быть аппроксимирована постоянной линейной плотностью энергии, то можно использовать соотношение (2.1) для оценки поглощающей способности следующим образом:

$$A = \frac{\pi \rho c (T_m^{eff} - T_0) h \omega v^*}{P^*} = \frac{\pi \rho c (T_m^{eff} - T_0) h \omega}{E^*}, \quad (2.2)$$

где

$E_l^* = P^* / v^*$ – критическая линейная плотность энергии, рассчитанная на основе установленных критических значений мощности лазера P^* и скорости сканирования v^* , которые определяют положение границы отсутствия сплавления на экспериментальной карте процесса.

На основе проведенного анализа установлено, что граница отсутствия сплавления в экспериментах с порошками AlSi10Mg может быть аппроксимирована на основе энергетического критерия (2.1) только при относительно низких скоростях сканирования лазера v . Для более высоких

скоростей лазера обнаружено, что предпочтительнее учитывать другой критерий, сформулированный относительно нормализованной плотности энтальпии [90-92], который выражается следующим образом:

$$\beta = \frac{\Delta H}{H_s} = \frac{AP}{\pi \rho c (T_m^{eff} - T_0) \sqrt{\alpha v \omega^3}}, \quad (2.3)$$

где $\Delta H = AP / (\pi \sqrt{\alpha v \omega^3})$ – изменение энтальпии за счет тепловложения от мощности лазера, а α – коэффициент тепловой диффузии материала.

Отмечу, что нормализованная энтальпия (2.3) определяет повышение температуры поверхности за счет действия движущегося источника тепла. В частности, температура плавления достигается при $\beta=1$ [92]. Таким образом, предполагая, что этот критерий, основанный на температуре, определяет положение границы отсутствия сплавления в экспериментах с единичными треками при режимах с высокой скоростью сканирования, можно использовать выражение (2.3) для оценки поглощающей способности системы порошок-подложка следующим образом:

$$A = \frac{\pi \rho c (T_m^{eff} - T_0) \sqrt{\alpha v^* \omega^3}}{AP} = \frac{\rho c (T_m^{eff} - T_0)}{\Delta H^*}, \quad (2.4)$$

где ΔH^* – критическая плотность энтальпии, соответствующая положению границы отсутствия сплавления на экспериментальной карте процесса.

В отличие от линейной зависимости (2.2), где $A \sim v^* / P^*$, в полученном соотношении (2.4) поглощающая способность зависит от критических параметров процесса как $\sim \sqrt{v^*} / P^*$. Таким образом, безразмерный критерий для нормализованной энтальпии (2.3) определяет криволинейную форму границы отсутствия сплавления.

Соотношения (2.2) и (2.4) далее используются для оценки поглощающей способности порошков различного размера на основе установленного положения границы отсутствия сплавления, которое определяется наборами значений (v^*, P^*) . Аналогичные различные критерии,

основанные на энергии и температуре, обсуждались в работе [93] с точки зрения выбора оптимального расстояния между проходами в процессах СЛП. В настоящем исследовании аппроксимация экспериментальных границ отсутствия сплавления проводилась методом наименьших квадратов с использованием критериев $N=1$ (2.1) и $\beta=1$ (2.3) вместе с соответствующими соотношениями для оценки поглощающей способности (2.2) и (2.4). Эти расчеты выполнялись с использованием свойств жидкого сплава (см. таблицу 2.2), так что поглощающая способность A оставалась единственным неизвестным параметром, используемым для подгонки теоретически предсказанной границы к экспериментальной. Значение A , обеспечивающее наилучшее соответствие, рассматривается как оценка поглощающей способности порошка заданного размера. Будет показано, что критерии (2.1) и (2.3) целесообразно использовать для различных диапазонов скоростей сканирования. В частности, для разделения режимов низкой и высокой скорости было использовано безразмерное число Пекле, определенное как $Pe=2\omega v/\alpha$ [91].

2.2.2. Численное моделирование

Для более детального анализа формирования единичного трека было проведено численное моделирование методом конечных элементов на основе подхода, разработанного в работе [94]. Этот метод использовался для валидации анализа масштабирующих законов для размеров расплавленного бассейна, сформированного в экспериментах с единичными треками в процессе СЛП, в работе [95]. Задача нестационарного теплопереноса решалась в области, содержащей порошковый слой и твердую подложку (рис 2.3), которые оба определялись как сплошные среды с зависящими от температуры и состояния свойствами. Основной особенностью модели является явное определение поглощения лазерного излучения в объеме порошкового слоя в соответствии с аналитическим решением задачи рассеяния/поглощения в порошковой среде [94]. Это

решение позволяет определить объемный источник тепла с учетом параметров процесса СЛП и свойств порошка. Кроме того, данное решение позволяет рассчитать эффективность поглощения системы порошок-подложка, которая была определена выше как A . Управляющее уравнение модели имеет следующий вид:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q + q^*, \quad (2.5)$$

где

$T(x, t)$ – поле температуры, зависящее от пространственных координат x и времени t ;

$q(x, t)$ – объемный движущийся источник тепла, обусловленный тепловложением лазера;

$q^*(x, t)$ – дополнительный объемный источник (или поглотитель) тепла, связанный со скрытой теплотой плавления;

ρ , c и k – плотность, теплоемкость и теплопроводность среды соответственно, которые определяются в зависимости от переменной фазового состояния ϕ следующим образом [94-96]:

$$\begin{aligned} k(\phi, T) &= \phi k_a + (1 - \phi) k_{pb}^{eff} \\ \rho c(\phi, T) &= \phi (\rho c)_a + (1 - \phi) (\rho c)_{pb}^{eff}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

k_a и $(\rho c)_a$ – свойства расплавленного сплава AlSi10Mg;

k_{pb}^{eff} и $(\rho c)_{pb}^{eff}$ – эффективные свойства порошкового слоя.

Начальное значение переменной состояния устанавливается равным нулю $\phi=0$ (порошок) в слое порошкового ложа, тогда как в подложке начальное значение равно $\phi=1$ (сплав). Предполагается необратимое изменение $\phi \rightarrow 1$ для порошкового ложа, как только его температура превышает температуру ликвидуса, $T \geq T_l$ (см. рис 2.3).

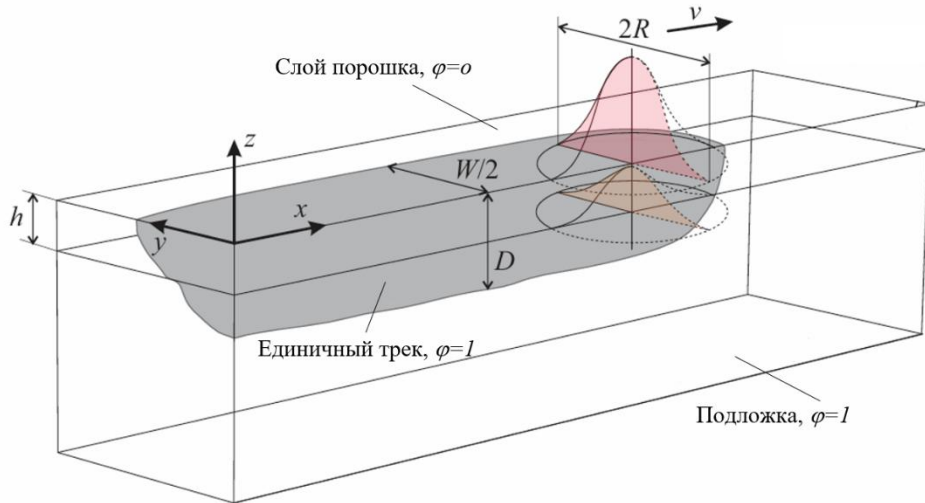


Рисунок 2.3 – Иллюстрация континуальной модели системы порошковый слой/подложка, рассмотренной в численных симуляциях экспериментов с единичными треками

Зависящие от температуры свойства сплава аппроксимируются на основе данных о его известных свойствах в твердом и жидком состоянии (таблица 2.2) следующим образом [107]:

$$k_a = \begin{cases} k_s, T < T_l \\ k_l, T \geq T_l \end{cases}, \quad (\rho c)_a = \begin{cases} \rho_s c_s, T < T_l \\ \rho_l c_l, T \geq T_l \end{cases} \quad (2.7)$$

Эффективные свойства порошкового слоя рассчитываются на основе правила смеси для $(\rho c)_{pb}^{eff}$ и с использованием полуэмпирической модели ZSS для k_{pb}^{eff} [107]:

$$\begin{aligned} (\rho c)_{pb}^{eff} &= f \rho_s c_s + (1-f) \rho_g c_g, \\ k_{pb}^{eff} &= (1 - \sqrt{f}) k_g + \sqrt{f} \frac{2}{1 - B \bar{k}} K \\ K &= \frac{(1 - \bar{k}) B}{(1 - \bar{k} B)^2} \log \frac{\bar{k}}{B} - \frac{B+1}{2} - \frac{B-1}{1 - \bar{k} B}, \\ B &= 1.25 \left(\frac{f}{1-f} \right)^{10/9}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

f – экспериментально измеренная упаковочная плотность порошкового слоя (таблица 2.1);

ρ_g , c_g и k_g – зависящие от температуры свойства газообразного аргона, которые задавались в соответствии с табличными данными из библиотеки материалов Comsol Multiphysics;

$\bar{k} = k_g/k_s$ – отношение теплопроводностей газа и твердого материала.

Объемный источник (или поглотитель) тепла, связанный с фазовым переходом твердое/жидкое, определяется в уравнении теплового баланса (2.5) следующим образом:

$$q^* = \begin{cases} -\rho L_m \frac{\partial \theta}{\partial t}, T \geq T_l, \\ 0, T < T_l \end{cases}, \quad (2.9)$$

где

L_m – скрытая теплота плавления (таблица 2.2),

$\theta = \min(t/\Delta t, 1)$ – вспомогательная переменная, которая линейно возрастает от 0 до 1 в течение характерного времени фазового перехода Δt , затем θ принимает постоянное единичное значение, что, следовательно, означает $\partial \theta / \partial t = 0 \Rightarrow q^* = 0$.

Как правило, характерное время Δt в уравнении (2.9) выбирается достаточно малым, чтобы избежать его влияния на результаты численного моделирования, хотя оно не должно быть равным нулю для обеспечения регуляризации численного решения. Для моделирования оно оценивалось на основе соотношения $\Delta t = R^2/\alpha \approx 2.6 \cdot 10^{-5}(\text{с})$ с $\alpha = k_l/(\rho_l c_l)$, то есть использовалось характерное время диффузии тепла в жидком сплаве на расстоянии радиуса лазерного пучка.

Для объемного источника тепла $q(x, t)$ в управляющем уравнении (2.5) задавалось движение вдоль положительного направления оси x со скоростью v и номинальной мощностью лазера P в соответствии с параметрами процесса СЛП, рассмотренными в экспериментах. Этот источник тепла определяется на основе решения модели рассеяния/поглощения для взаимодействия гауссова лазерного пучка с

порошковым слоем согласно следующему соотношению [94]:

$$q = \begin{cases} \chi Q_0(x-vt, y) \frac{dQ(\xi)}{d\xi}, & z \geq -h \\ 0, & z < -h \end{cases} \quad (2.10)$$

$$Q_0(x, y) = \frac{P}{\pi R_2^2} \exp\left[-\frac{r^2}{R_2^2}\right], \quad \beta = \frac{3}{2} \frac{f}{1-f} \frac{\eta}{d_{50}},$$

где

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – радиальное расстояние в плоскости xu ;

χ [1/м] – коэффициент поглощения;

η – безразмерный корректирующий коэффициент, учитывающий влияние распределения размеров частиц (PSD) на коэффициент поглощения (в случае $\eta=1$ модель соответствует порошковому слою, состоящему из сферических частиц одинакового размера, равного d_{50} [98]);

$Q_0(x, y)$ – гауссово распределение мощности лазера по поверхности порошкового слоя;

$Q(\xi)$ – безразмерная функция, производная которой определяет затухание мощности лазера внутри порошкового слоя и зависит от безразмерной координаты $\xi = \chi z$. Замкнутое аналитическое представление для $Q(\xi)$ было получено в работе [94] на основе решения интегродифференциального уравнения. Эта функция зависит от единственного физического свойства порошкового материала – его полусферической отражательной способности, которая установлена равной $R_s=0.9$, что соответствует отражательной способности шероховатой поверхности алюминиевого сплава на длине волны иттербиевого волоконного лазера [97].

Численные симуляции проводились для половины области с учетом симметрии задачи относительно плоскости $y=0$ (см. рис 2.3). На боковых границах области применялись условия теплоизоляции ($\nabla T \cdot n = 0$). На нижней границе задавалось условие постоянной температуры $T=T_0$ в то время, как на верхней границе учитывались конвективные и радиационные теплотери:

$$z = 0: \quad -k \nabla T \cdot n = h_c (T - T_0) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_0^4), \quad (2.11)$$

где

n – внешняя единичная нормаль на границе;

h_c – зависящий от температуры коэффициент теплоотдачи, который оценивался на основе известных полуэмпирических оценок параметров естественной конвекции над горячей горизонтальной поверхностью (в рассматриваемых кратковременных экспериментах с единичными треками аргон не подавался), максимальное значение этого коэффициента достигало $h_c \approx 6.5 \text{ Вт/(м}^2\text{К)}$; $\varepsilon = A_s = 1 - R_s = 0.1$ – излучательная способность поверхности, которая оценивалась на основе заданного значения отражательной способности R_s и закона Кирхгофа;

Размер области в численных симуляциях был выбран достаточно большим, чтобы исключить влияние боковых и нижней границ на тепловое состояние в зоне сплавления и избежать влияния переходных эффектов на предсказанные размеры расплавленного бассейна (то есть единичного трека). Эти размеры расплавленного бассейна определялись как размеры области, где переменная состояния принимает единичное значение $\varphi = 1$ (см. рис 2.3).

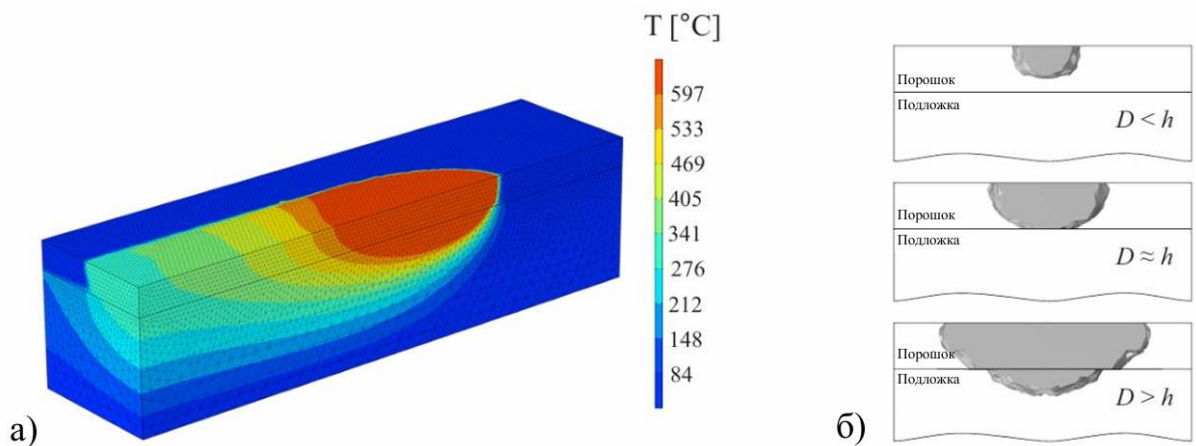


Рисунок 2.4 – Примеры результатов численного моделирования, (а): Тепловое состояние системы порошковый слой/подложка ($P=300 \text{ Вт}$, $v=1.745 \text{ м/с}$, момент времени $t=4.5 \text{ мс}$), (б): Форма поперечных сечений расплавленного бассейна, возникающих при различной интенсивности источника тепла. Положение границы отсутствия сплавления в численных симуляциях соответствует случаю параметров процесса (v, P), при которых $D \approx h$.

Модель была реализована в Comsol Multiphysics. В результате численных симуляций были получены распределения температурного поля $T(x,t)$ и переменной состояния $\varphi(x,t)$ в области при заданном действии движущегося источника тепла. Пример таких решений для температурного поля приведен на рис 2.4а, а для размеров расплавленного бассейна – на рис 2.4б. Целью численных симуляций было предсказание границы отсутствия сплавления на экспериментальной карте процесса путем определения параметров процесса, при которых глубина расплавленного бассейна D равна толщине порошкового слоя h (см. рис 2.4б). Примечательно, что рассматриваемая модель (2.5) – (2.11) не содержит поглощающую способность A в качестве параметра. Вместо этого модель явно определяет затухание мощности лазера в порошковом слое в соответствии с уравнением (2.10). В этом соотношении имеется единственный неизвестный параметр, который должен быть определен на основе экспериментальных данных, – корректирующий коэффициент η , учитывающий влияние распределения размеров частиц на коэффициент поглощения χ . Этот корректирующий коэффициент недавно был определен для СЛП нержавеющей стали 316L в работе [95] на основе анализа экспериментально измеренной ширины расплавленного бассейна. Было установлено, что с увеличением диаметра лазерного пучка от 66 мкм до 196 мкм корректирующий коэффициент варьируется в диапазоне 0,85...0,47. В настоящем исследовании мы определяем этот коэффициент η на основе анализа положения границы отсутствия сплавления. В частности, в численных симуляциях был использован следующий алгоритм для каждого типа порошков P0-P5:

1. Рассматривается максимальная скорость лазера, использованная в экспериментах ($v^*=1.98$ м/с), и соответствующая критической мощности лазера P^* определяющей границу отсутствия сплавления на экспериментальной карте процесса для экспериментов с единичными треками. Для этих параметров была проведена серия симуляций, варьируя

корректирующий коэффициент η , чтобы определить конкретное значение, при котором предсказанная глубина расплавленного бассейна соответствовала толщине порошкового слоя $D \approx h$ (рис 2.4б) – то есть условию, при котором единичный трек полностью сплавлен с подложкой. Таким образом, мы определили значение η для заданного типа порошка.

2. Используя найденное значение η , были проведены симуляции для всех других комбинаций критической скорости и мощности (v^*, P^*) , соответствующих границе отсутствия сплавления. Это позволило оценить диапазон применимости модели по сравнению с экспериментальными данными для заданного типа порошка и различных значений скорости сканирования (и связанных с ними чисел Пекле).

3. Была рассчитана поглощательная способность системы порошок/подложка A , что может быть выполнено аналитически с использованием найденного значения η (и соответствующего значения коэффициента поглощения χ) и решения для функции затухания $Q(\xi)$. В частности, отношение поглощенной и падающей мощности лазера в рамках рассматриваемой модели объемного источника тепла может быть оценено следующим образом:

$$A = Q(0) - Q(-\lambda), \quad (2.12)$$

где $\lambda = \chi h$ - оптическая толщина порошкового слоя.

2.2.3. Модель Иджера-Цая для ширины расплавленного бассейна

В работе [104] авторы разработали и валидировали подход для оценки поглощающей способности в процессах СЛП и провели полуаналитические расчеты на основе модели Иджера-Цая (ETM) [16]. Поскольку эта модель может точно предсказывать ширину расплавленного бассейна в широком диапазоне параметров процесса (в отличие от глубины расплавленного бассейна, которая значительно отклоняется от предсказаний ETM для режимов с высокой энергией [91]), было предложено подгонять решение ETM к экспериментально измеренной ширине расплавленного бассейна,

используя коэффициент поглощающей способности A , при условии, что все остальные параметры материала и процесса известны. Таким образом, в настоящем исследовании мы применяем этот метод и выполняем подгонку решения ЕТМ, которое определяет следующее квазистационарное (в движущейся системе координат) распределение температурного поля на поверхности полупространства под действием движущегося гауссова источника тепла [89, 91, 99]:

$$T(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{Tl\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\text{Exp} \left[-\frac{\bar{z}^2}{\bar{t}} - \frac{(\bar{x} + \bar{t})^2}{8(1 + 4\bar{t}/Pe)} \right]}{\sqrt{\bar{t}} (1 + 4\bar{t}/Pe)} d\bar{t} \quad (2.13)$$

Где предполагается, что начало системы координат расположено в центре движущегося источника тепла на поверхности полупространства; этот источник тепла движется вдоль положительного направления оси x ; ось z ориентирована во внешнем направлении полупространства; β задается уравнением (2.3), а безразмерные координаты и время вводятся следующим образом: $\bar{x} = 4x / \omega$, $\bar{y} = 4y / \omega$, $\bar{z} = 16\sqrt{2}z / (\omega\sqrt{Pe})$ и $\bar{t} = t\omega / (4\nu)$.

Для заданных значений числа Пекле Pe и нормализованной энтальпии β можно рассчитать распределение температурного поля с использованием уравнения (2.13) и определить изотерму, соответствующую температуре солидуса $T = T_s$. Максимальная ширина этой изотермы в поперечном направлении (вдоль оси y при $z=0$) определяет ширину расплавленного бассейна W . Эти расчеты выполнялись в системе символьной алгебры с использованием численного интегрирования. Использовались свойства жидкого сплава AlSi10Mg (таблица 2.2). Значения коэффициента поглощающей способности A определялись на основе подгонки предсказаний модели Иджера-Цая для ширины расплавленного бассейна W к экспериментальным данным для ширины единичных треков, полученных на основе микроскопического анализа изображений поперечных сечений.

2.3. Результаты и обсуждение

2.3.1. Эксперименты с единичными треками

Вид сверху всех единичных треков, изготовленных с использованием различных порошков P0-P1, представлен на рис 2.5. На этих графиках треки, соответствующие режиму плавления с образованием замочной скважины, выделены красным цветом, тогда как области отсутствия сплавления (прерывистые треки с выраженными эффектами баллинга или полным отсутствием треков) обозначены желтым цветом. Оценка режима с замочной скважиной проводилась на основе анализа микрофотографий поперечных сечений. Треки с отношением глубины к ширине, превышающим $D/W > 0.75$, выделены красным на рис 2.5. Оценка зоны отсутствия сплавления выполнялась путем анализа увеличенных изображений вида сверху. Прерывистые треки, сплавленные менее чем на 50% по их длине, выделены желтым на рис 2.5. Таким образом, была определена приблизительная граница перехода (отсутствия сплавления) между треками, глубина которых была равна или превышала толщину слоя ($D \geq h$), и треками с недостаточной глубиной для сцепления с подложкой ($D < h$).

На рис 2.5 видно, что зона с образованием замочной скважины практически не зависит от типа порошка и локализуется в области мощности лазера выше $P=220$ Вт и скоростей ниже $v=0.8$ м/с для всех порошков P0-P5. В то же время размер зоны отсутствия сплавления существенно зависит от типа порошка. Для порошков с меньшим размером частиц эта зона становится меньше. Для порошка P1 ($d_{50}=28 \mu\text{m}$), рис 2.5a) почти все треки выглядят полностью сплавленными, и только при более детальном рассмотрении увеличенных изображений мы смогли идентифицировать треки, соответствующие нашему критерию границы отсутствия сплавления (сплавление менее чем на 50% по длине).

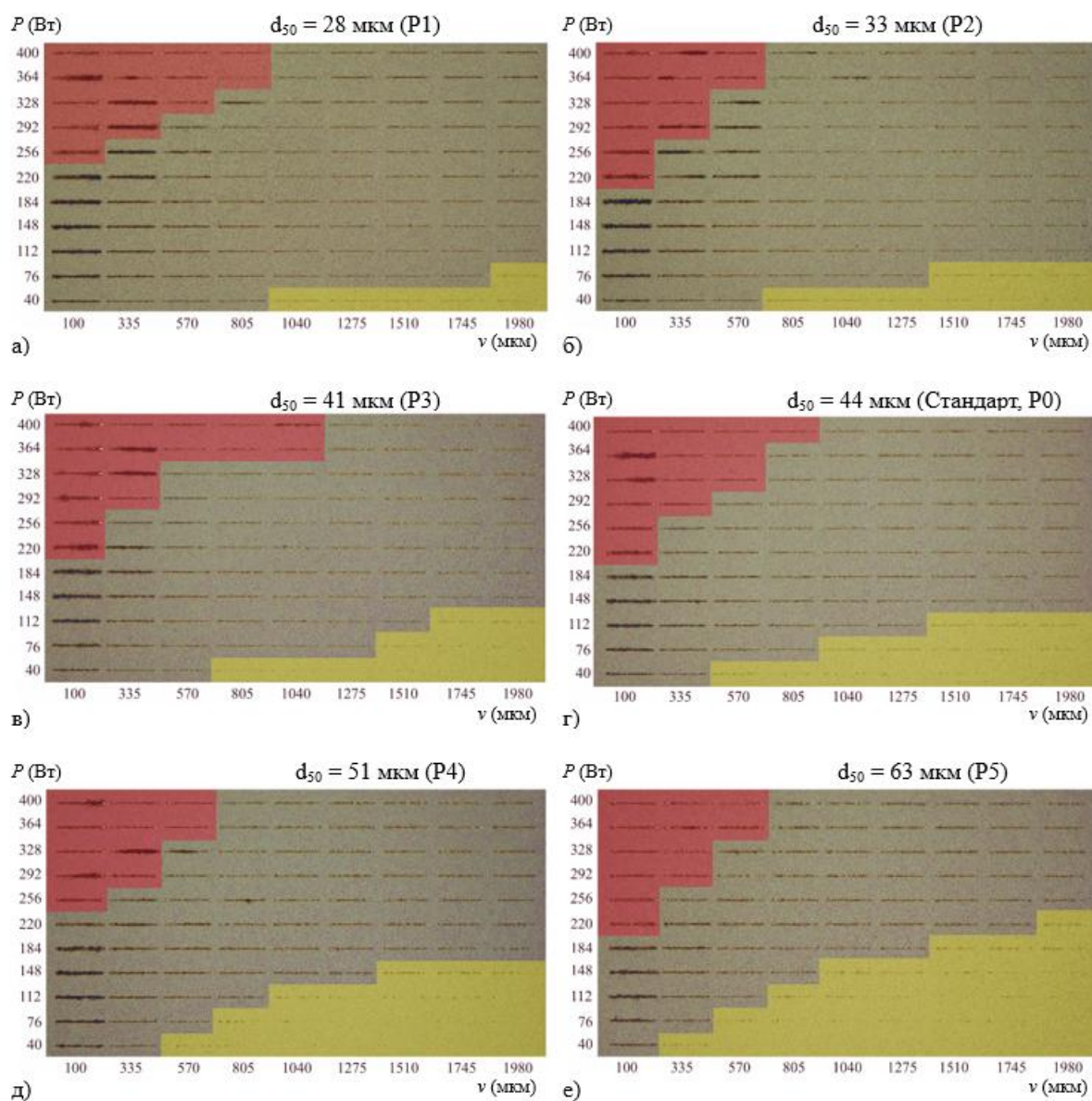


Рисунок 2.5 – Вид сверху всех единичных треков, полученных для различных порошков (а): P1, (б): P2, (с): P3, (д): P0, (е): P4, (ф): P5. Изображения упорядочены в соответствии со средним размером частиц порошка, указанным над изображениями. Красный цвет соответствует режиму плавления с образованием замочной скважины. Желтый цвет обозначает зону отсутствия сплавления, то есть единичные треки с нерегулярной и сильно прерывистой структурой или полным отсутствием треков.

Для порошков с большим средним размером частиц зона отсутствия сплавления увеличивается, и для самых крупных порошков, рассмотренных в исследовании, она занимает почти половину карты процесса (рис 2.5f). Для стандартного порошка P0, значение d_{50} которого находится примерно

посередине среди всех рассмотренных фракций, зона отсутствия сплавления также имеет промежуточный размер – она локализуется при уровнях мощности лазера ниже $P=120$ Вт и скоростях выше $v=0.57$ м/с. Таким образом, рис 2.5 демонстрирует значительное влияние размера частиц порошка на зону отсутствия сплавления, которая смещается в сторону более низких скоростей и зон с более высокой мощностью лазера для более крупных фракций порошка AlSi10Mg.

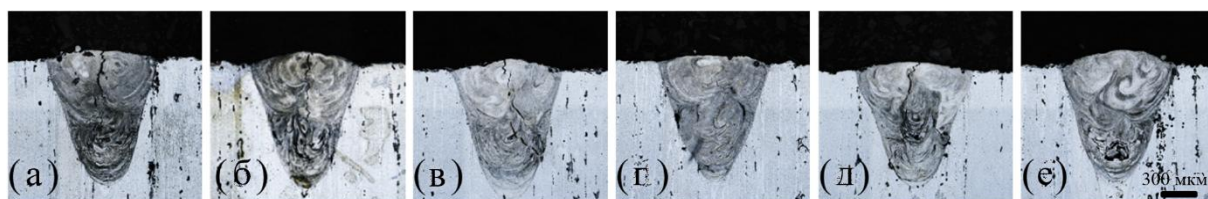


Рисунок 2.6 – Микроскопия поперечных сечений единичных треков, Поперечные сечения единичных треков, полученные в режимах процесса СЛП с $P=328$ Вт и $v=0.335$ м/с (режим с образованием замочной скважины) для различных порошков: (а): P0, (b): P1, (c): P2, (d): P3, (e): P4, (f): P5.

Примеры изображений поперечных сечений и увеличенных фотографий вида сверху единичных треков представлены на рис 2.6 и 2.7. На рис 2.6 сравниваются расплавленные бассейны, сформированные в режиме с образованием замочной скважины ($P=328$ Вт и $v=0.335$ мм/с) с использованием различных типов порошков P0-P5. Видно, что геометрия поперечного сечения этих расплавленных бассейнов остается практически идентичной, что указывает на незначительное влияние среднего размера частиц порошка на поведение плавления в условиях высокого входного энергопотребления. На рис 2.7 представлены увеличенные изображения вида сверху треков, изготовленных при мощности $P=148$ Вт и скорости $v=1.51$ м/с с использованием различных порошков P0-P5. Эти параметры процесса находятся близко к границам отсутствия сплавления. Однако, в то время как мелкие порошки P0-P3 могут быть отнесены к зоне сплавления ($D \geq h$ почти по всей длине трека), использование крупных порошков P4, P5 приводит к сильно прерывистым трекам, которые соответствуют зоне отсутствия сплавления (отмечены желтым цветом на рис 2.5).

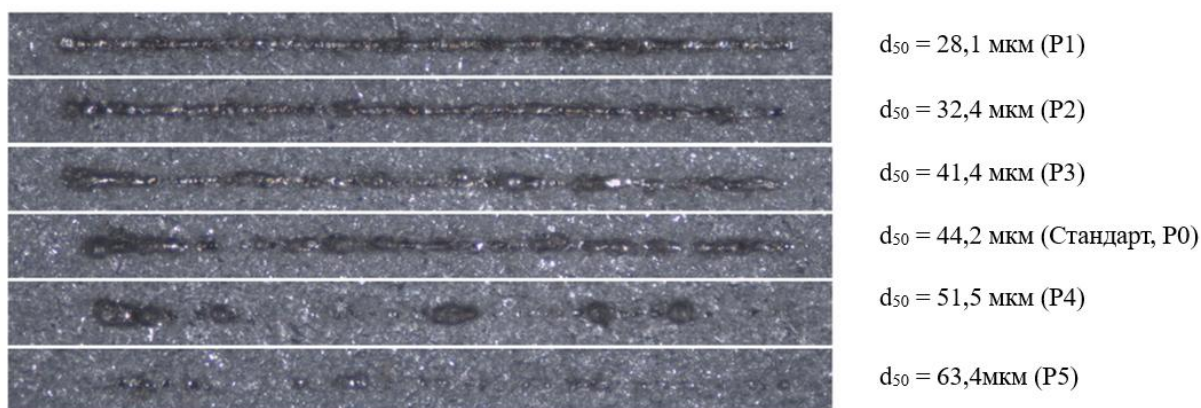


Рисунок 2.7 – Увеличенный вид сверху единичных треков, Увеличенные изображения вида сверху единичных треков, полученных в режимах процесса СЛП с $P=148$ Вт и $v=1.51$ м/с для различных порошков P0-P5.

2.3.2. Анализ масштабирующих законов

Далее оценивалось соответствие между экспериментально определенными границами отсутствия сплавления и теоретическими контурами, определяющими постоянную линейную плотность энергии $E_l = P/v$ и постоянную плотность энтальпии β (2.3) на карте процесса.

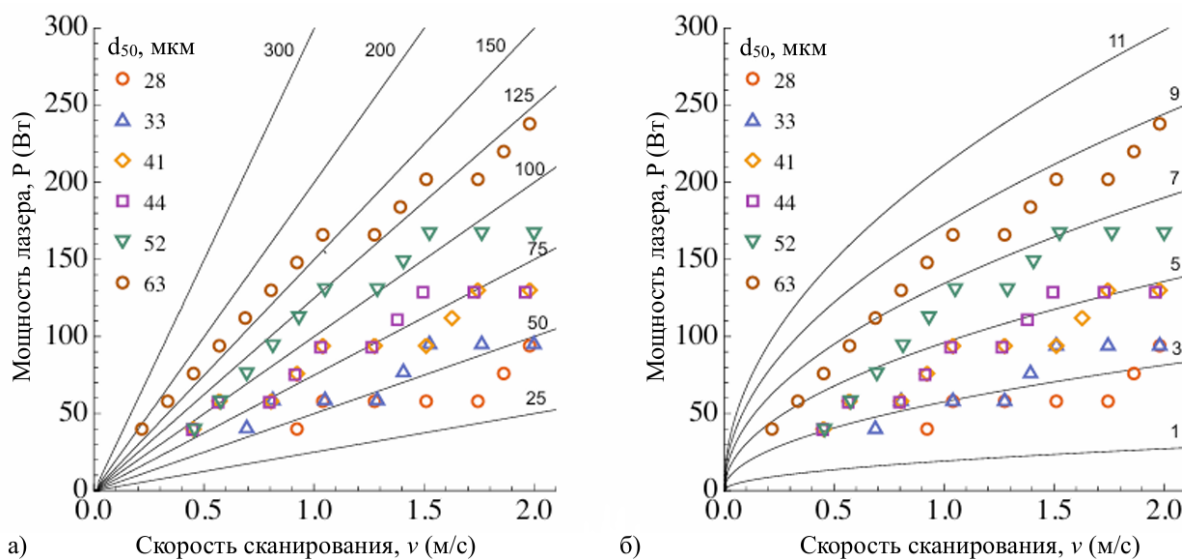


Рисунок 2.8 – Границы отсутствия сплавления на карте процесса экспериментов с единичными треками, выполненных с различными типами порошков P0–P5. Сравнение представлено с контурными линиями постоянной линейной плотности энергии E_l [J/m] (а) и с контурными линиями постоянной плотности энтальпии ΔH [Дж/мм³] (б).

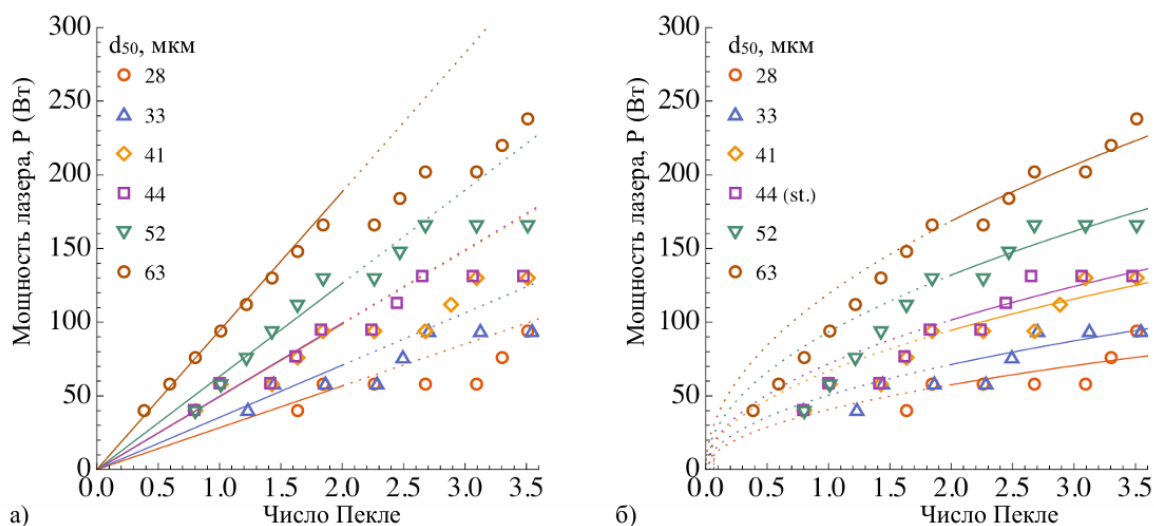


Рисунок 2.9 – Наилучшее соответствие теоретических критериев границы отсутствия сплавления (линии) экспериментальным границам (точки), полученным для порошков P0–P5 с различным средним размером частиц (а): Критерий эффективности плавления единичного трека ($N=1$, уравнение (1)), (б): Критерий нормализованной плотности энтальпии ($\beta=1$, уравнение (3)).

Этот анализ представлен на рис 2.8. Для ясности, на этих и последующих аналогичных рисунках экспериментальные границы отсутствия сплавления представлены в виде точек, координаты которых определялись путем усреднения мощности и скорости сканирования между соседними треками, попадающими в различные зоны (сплавленные/отсутствие сплавления), показанные на рис 2.5 для каждого типа порошка P0-P5. Графики на рис 2.8а и 2.8б показывают сравнение этих экспериментальных границ с контурами постоянной линейной плотности энергии и постоянной плотности энтальпии соответственно. Видно, что при низких скоростях сканирования лазера границы демонстрируют хорошее соответствие с контурами постоянной линейной плотности энергии (рис 2.8а). Однако при скоростях $v > 1 \dots 1.2$ м/с они отклоняются от этих контуров в сторону меньших значений мощности лазера. В то же время в режимах высокой скорости экспериментальные точки данных показывают лучшее соответствие с контурными линиями, соответствующими постоянной плотности энтальпии (рис 2.8б). Для мелких порошков (P1, P2) этот переход

между критериями менее выражен. Однако для других порошков, включая стандартный порошок AlSi10Mg, он четко прослеживается на представленных графиках. Поэтому в теоретическом анализе отдельно рассматривались эти различные зоны параметров, используя соответствующие различные критерии для границы отсутствия сплавления.

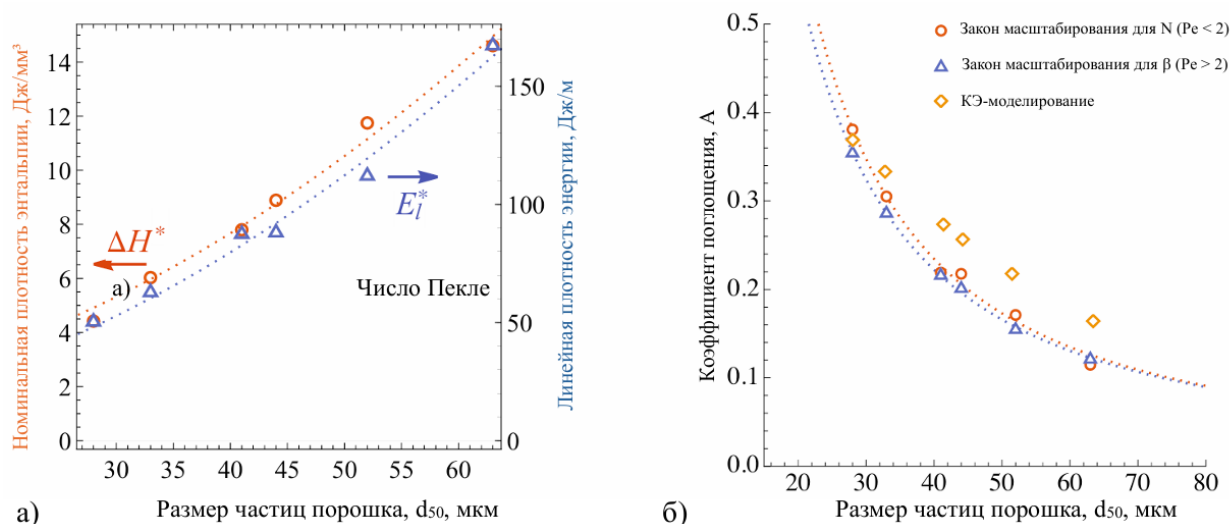


Рисунок 2.10 – Установленные зависимости критической линейной плотности энергии и критической плотности энтальпии (а) и поглощательной способности (б) от размера частиц порошка. Линии тренда показаны пунктирными линиями

Наилучшее соответствие энергетического критерия ($N=1$, уравнение (1)) и температурного критерия ($\beta=1$, уравнение (2.3)) экспериментальным границам отсутствия сплавления для различных типов порошков представлено на рис 2.9. На этих графиках вместо скорости сканирования (v) по оси абсцисс используется безразмерное число Пекле (Pe), чтобы проанализировать применимость критериев с точки зрения безразмерного анализа. Соответствие между теоретическими и экспериментальными границами устанавливалось путем подгонки коэффициента поглощающей способности A , как описано в разделе 2.3.1. Для энергетического критерия (2.1) анализ проводился для чисел Пекле $Pe < 2$ (рис 2.9а), в то время как для температурного критерия (2.3) – для $Pe > 2$ (рис 2.9б). На рис 2.9 показано, что значение числа Пекле $Pe=2$ ($v=1.13$ м/с)

является критическим с точки зрения соответствия экспериментальной границы либо с постоянной плотностью энергии, либо с постоянной плотностью энтальпии. Соответствующие значения коэффициента поглощающей способности A , определенные с использованием обоих критериев через уравнения (2.2) и (2.4), а также критические значения линейной плотности энергии и плотности энтальпии для всех порошков представлены в таблице 2.3 и на рис 2.10.

Проведенный анализ масштабирующих законов показал, что для исследуемых порошков значения критической плотности энергии находятся в диапазоне 50-167 Дж/м, тогда как критическая энтальпия варьируется в диапазоне 4.4-14.6 Дж/мм³ (см. таблицу 2.3). Эти значения следует рассматривать как номинальные, поскольку они были рассчитаны на основе параметров процесса (P , v) без учета коэффициента поглощения. Примечательно, что для порошков с меньшим размером частиц требуется меньше энергии для формирования стабильных треков (рис 2.10 а). Мы связываем этот эффект с различиями в поглощающей способности порошков с разными размерами частиц – более крупные порошки демонстрируют сниженное поглощение (рис 2.10 б). Как было обсуждено во введении, этот эффект типичен для процессов СЛП, и в данном случае мы количественно подтвердили его с помощью анализа масштабирующих законов для экспериментов с единичными треками, выполненных с различными фракциями порошка AlSi10Mg. Определенный диапазон значений поглощающей способности типичен для алюминиевых порошков, хотя, как отмечалось во введении, данные литературы показывают значительную вариабельность этого свойства. Интересно отметить, что применение двух различных решений (2.2) и (2.4) для разных диапазонов чисел Пекле дает удивительно согласованные значения поглощающей способности A (см. рис 2.10b, красные и синие точки). Также стоит отметить, что поглощающая способность самых крупных порошков

приближается к поглощающей способности материала частиц, которая составляет примерно $A_s=1 - R_s=0.1$ (это значение также использовалось в численных симуляциях, см. раздел 2.3.2) [97].

Таблица 2.3 – Определенные значения поглощающей способности порошков AlSi10Mg на основе анализа масштабирующих законов и моделирования методом конечных элементов.

Порошок тип	d50 (мкм)	E_i^* (Дж/м)	ΔH^* (Дж/мм ³)	Поглощающая способность, A		
				SLA (Pe < 2)	SLA (Pe > 2)	FEM
P0	44.2	88	8.9	0.22	0.20	0.26
P1	28.1	50	4.4	0.38	0.35	0.37
P2	32.8	63	6.0	0.31	0.28	0.33
P3	41.4	88	7.8	0.22	0.22	0.27
P4	51.5	112	11.7	0.17	0.15	0.22
P5	63.4	167	14.6	0.11	0.12	0.16

Линии тренда на рис 2.10 были определены с использованием безразмерного параметра, обычно вводимого для описания эффектов размера частиц порошка в процессах СЛП: $\bar{d} = d_{50}/(2\omega)$ [93]. В частности, для аппроксимации установленных зависимостей критической плотности энтальпии и линейной плотности энергии использовались следующие функции:

$$\begin{aligned}\Delta H^* &= H_s + 37.2\bar{d}^{1.78} \\ E_i^* &= E_s + 432\bar{d}^{1.76},\end{aligned}\tag{2.14}$$

где $H_s=1.798$ Дж/мм³ – энтальпия плавления твердого сплава AlSi10Mg, а соответствующая линейная плотность энергии рассчитывалась как $E_s=\omega h H_s=12.2$ J/m.

Для поглощающей способности использовалась следующая функция для построения линий тренда на рис 2.10b:

$$A = a\bar{d}^{-b}\tag{2.15}$$

в которой $a=0.0566$, $b=1.367$ для энергетического масштабирующего закона для N (красная линия на рис 10b) и $a=0.0567$, $b=1.312$ для температурного критерия для β (синяя линия на рис 10b).

2.4. Результаты численного моделирования

Результаты численного моделирования представлены на рис 2.11. На рис 2.11а показан выбор корректирующего коэффициента η в модели движущегося источника тепла (2.10), который определяет влияние распределения размеров частиц (PSD) на коэффициент поглощения β (см. раздел 2.3.2). Эта иллюстрация приведена на примере стандартного порошка P0. На рис 2.11а видно, что более высокие значения корректирующего коэффициента (и, соответственно, более высокий коэффициент поглощения) смещают границу отсутствия сплавления вниз - в зону меньшего входного энергопотребления. Таким образом, варьируя этот коэффициент, мы определили его значения для всех типов порошков P0-P5. Сравнение всех полученных теоретических и экспериментальных границ отсутствия сплавления представлено на рис 2.11б. В Приложении также приведены определенные значения корректирующего коэффициента η , коэффициента поглощения χ , а также наложенные результаты численного моделирования на все фотографии вида сверху единичных треков.

На рис 2.11б видно, что численное моделирование хорошо согласуется с экспериментом в областях параметров, где скорости лазера достаточно высоки. Аналогично анализу масштабирующих законов, можно заключить, что численная модель точна в диапазоне чисел Пекле $Pe > 2$ ($v > 1.1$ m/s). Можно было бы предположить, что при использовании другого подхода и калибровке корректирующего коэффициента в области низких скоростей также удалось бы достичь согласия. Однако это не так, поскольку численная модель принципиально не способна описать геометрию экспериментально полученных границ отсутствия сплавления при низких скоростях и значительно переоценивает критический уровень входной энергии (см. рис 2.11б). Это связано с тем, что применяемая модель движущегося источника тепла основана на предположении взаимодействия лазера с частицами порошка, что справедливо только при высоких числах Пекле. При низких

числах Пекле взаимодействие происходит преимущественно с поверхностью расплавленного бассейна без сильных эффектов рассеяния в порошковой среде, что делает рассматриваемую численную модель неприменимой.

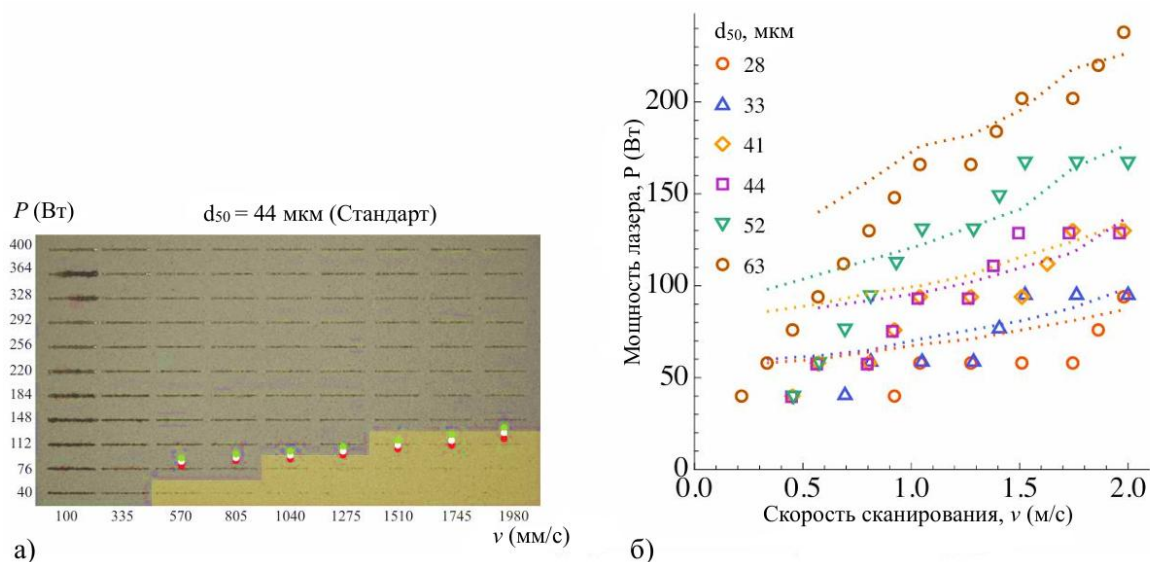


Рисунок 2.11 – Сравнение экспериментальных данных и результатов численного моделирования (а): Влияние корректирующего коэффициента на положение предсказанной границы отсутствия сплавления для стандартного порошка P0 (зеленые точки: $\eta=0.7$, белые точки: $\eta=0.75$, красные точки: $\eta=0.8$), (б): Сравнение экспериментальных и теоретических границ отсутствия сплавления для всех типов порошков (P0-P5), с указанием соответствующих средних размеров частиц на графике.

Также стоит отметить, что хорошее соответствие между экспериментальными и численными результатами на рис 2.11б было достигнуто для всех порошков, кроме самого мелкого (P1). Для этого порошка был получен наивысший коэффициент поглощения, однако даже это повышенное значение не позволяет точно описать экспериментальные данные. Фактически, для точного описания эксперимента для P1 в рамках существующей модели потребовалось бы введение дополнительных предположений – например, зависимости коэффициента поглощения от числа Пекле или учета обобщенных конститутивных соотношений для порошковой среды [100]. Однако это потребовало бы дальнейших исследований и разработки более сложных численных моделей.

Значения поглощающей способности A , рассчитанные с использованием полученного коэффициента поглощения и формулы (2.12), представлены на рис 2.10b (желтые точки) и перечислены в таблице 2.2. Видно, что численное моделирование также подтверждает эффект размера частиц на поглощающую способность, хотя значения A , определенные на основе уравнения (2.12), несколько выше, чем те, что были получены в результате анализа масштабирующих законов для всех порошков (за исключением самого мелкого, для которого численная модель менее точна). Уточнение, обеспечиваемое численным моделированием, связано, в частности, с учетом зависимости свойств порошка и подложки от температуры и фазового состояния. Поэтому оценки, полученные на основе анализа масштабирующих законов, можно считать нижней границей для поглощающей способности.

2.5. Оценка поглощающей способности на основе анализа ширины единичных треков и модели ЕТМ

Результаты обработки экспериментальных данных по ширине расплавленного бассейна с использованием модели Иджера-Цая (ЕТМ) (раздел 2.3.3) представлены на рис 2.12 и 2.13. На рис 2.12 показана определенная поглощающая способность для трех типов порошков: самого мелкого (P1), стандартного (P0) и самого крупного (P5). Эти порошки были выбраны как наиболее репрезентативные примеры, в то время как другие были исключены, чтобы избежать перегруженности рисунка. Каждая точка данных на рис 12 соответствует единичному треку, изготовленному при определенной комбинации параметров печати (P , v), для которых экспериментальная ширина расплавленного бассейна была согласована с предсказаниями модели ЕТМ для определения A . На рис 12а точки данных упорядочены в соответствии с нормализованной энтальпией, умноженной на квадратный корень числа Пекле ($\beta\sqrt{Pe}$), как предложено в оригинальном исследовании, где был разработан этот метод идентификации [91]. Для

ясности, на рис 2.12b также представлена выведенная зависимость A от линейной плотности энергии. Наблюдается типичная тенденция для A . При высоких входных энергиях ($\beta\sqrt{Pe}$ и $E_1 > 200$ Дж/м), A демонстрирует монотонный рост, что связывается с переходом к режиму плавления с образованием замочной скважины [91]. При низких входных энергиях A также увеличивается, особенно заметно для мелкого порошка P1. Этот эффект наблюдается и для других порошков, хотя в меньшей степени. Увеличение A при низких входных энергиях согласуется с оценками, полученными в результате нашего предыдущего анализа. В частности, горизонтальные пунктирные линии на рис 2.12 соответствуют значениям A , определенным на основе анализа положений границ отсутствия сплавления на изображениях вида сверху единичных треков. Для построения этих линий мы использовали средние значения A , полученные из трех примененных нами методов (SLA и FEM, см. таблицу 2.2). Можно наблюдать, что вариации коэффициента поглощения A , определенного на основе анализа ширины расплавленного трека, в целом согласуются с нашими более ранними оценками при низких уровнях входной энергии. В этой области параметров, которая наиболее близка к границе отсутствия сплавления, самый крупный порошок демонстрирует наименьший рост A (не превышающий 0.22), тогда как самый мелкий порошок (P1) показывает увеличение до $A \approx 0.35$. Стандартный порошок (P0) также демонстрирует рост A при низких входных энергиях, хотя менее выраженный, чем у мелкого порошка.

Таким образом, мы наблюдаем эффект размера частиц на поглощающую способность A , который становится выраженным при низких входных энергиях. Этот эффект потенциально может быть использован для оптимизации процессов СЛП для высокорефлективных и высокопроводящих сплавов, для которых улучшение поглощения лазерного излучения остается ключевым для получения полностью плотных

материалов, например, для передовых систем управления теплом [101-103]. Например, можно использовать мелкие фракции порошка и проводить СЛП с низкими уровнями входной энергии (в терминах E_l или ΔH), поддерживая при этом повышенную температуру платформы (T_0). Как следует из уравнений (2.2) и (2.4), такой подход был бы эквивалентен использованию более высоких мощностей лазера, одновременно позволяя увеличить поглощающую способность материала за счет эффектов размера частиц, наблюдаемых в настоящем исследовании. Очевидно, что другие параметры процесса также потребуют корректировки, включая расстояние между проходами, стратегии сканирования, толщину порошкового слоя и, возможно, диаметр лазерного пятна и длину волны, которые вызовут дополнительные эффекты размера на поглощающую способность [90,91].

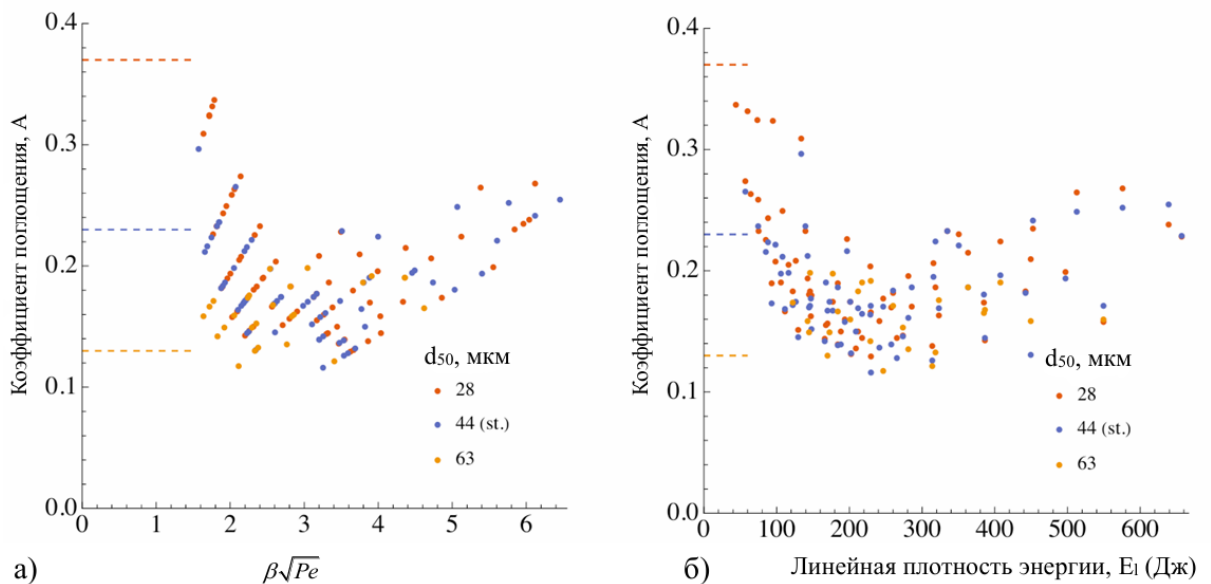


Рисунок 2.12 – Выявленная зависимость поглощающей способности от E_l (b) для трех типов порошков (P0, P1, P5) на основе анализа ширины единичной дорожки и ЕТМ. Горизонтальные пунктирные линии соответствуют значениям поглощающей способности, рассчитанным для этих порошков на основе анализа положения границы неплавления.

Иллюстрация исследованных размеров расплавленного бассейна с использованием модели ЕТМ представлена на рис 2.13. В этом анализе подгонка поглощающей способности обеспечивает точное соответствие

между предсказаниями ЕТМ и экспериментальными зависимостями ширины расплавленного бассейна от $\beta\sqrt{Pe}$ (рис 2.13) (этот параметр в оригинальной работе [107] также назывался «операционным параметром»).

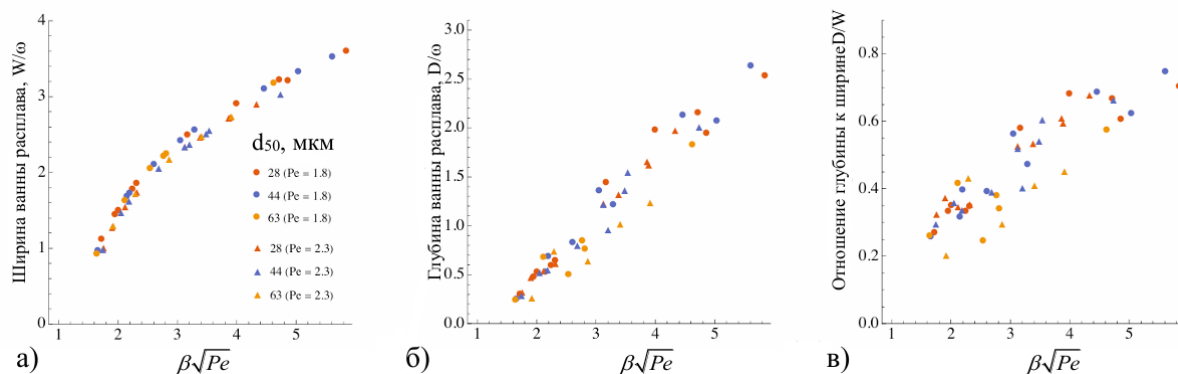


Рисунок 2.13 – Установленная зависимость нормализованной ширины (а), глубины (б) и вида ванны расплава, основанная на анализе ширины одиночной дорожки и ЕТМ для порошков с различным средним размером частиц и различными числами Пекле (отмечено на графике)

В результате все экспериментальные точки данных на рис 2.13а выстраиваются вдоль гладких, монотонно возрастающих кривых, соответствующих решениям ЕТМ при заданных числах Пекле. Для иллюстрации на рис 2.13а представлены результаты для двух конкретных значений Pe (1.8 и 2.3), что приводит к двум характерным кривым - решениям ЕТМ для этих значений Pe . Однако такие гладкие зависимости не проявляются для глубины расплавленного бассейна и его аспектного отношения (рис 2.13 б, в), что связано с дополнительными явлениями (гидродинамическими эффектами, испарением и т.д.), не учтенными в ЕТМ. Это ограничение, тем не менее, не снижает применимости модели для анализа ширины единичного трека [91]. Результаты на рис 2.13 б, в показывают умеренный эффект размера частиц: глубина расплавленного бассейна и его аспектное отношение, как правило, меньше при использовании крупного порошка по сравнению со стандартными и мелкими фракциями. Этот эффект размера порошка на геометрию расплавленного бассейна, хотя и менее выражен, чем ранее наблюдавшийся

эффект на поглощающую способность (A), остается измеримым, особенно для самых крупных фракций порошка.

2.6. Обработка известных экспериментальных данных для различных порошков AlSi10Mg

Также был проведен анализ масштабирующих законов для положения границы отсутствия сплавления к опубликованным экспериментальным данным для стандартных порошков AlSi10Mg с различным распределением размеров частиц (PSD). Для этого анализа были выбраны исследования, сообщающие о критических параметрах обработки, которые привели к прерывистым и нестабильным единичным трекам в экспериментах с порошками AlSi10Mg [104-107]. Рассматривая эти наборы данных как представляющие либо критическую входную энергию (для $Pe < 2$), либо критическую энтальпию (для $Pe > 2$), мы определили поглощающую способность A этих порошков с использованием уравнений (2.2) и (2.4) соответственно. Результаты этого анализа представлены в таблице 2.4. В этой таблице собраны все данные, необходимые для расчетов, полученные из упомянутых опубликованных исследований. Хотя оба уравнения (2.2) и (2.4) были применены для обработки данных, наш анализ подтверждает их применимость только в определенных диапазонах чисел Пекле: уравнение (2.2) для $Pe < 2$ и уравнение (4) для $Pe > 2$. Значения числа Пекле, представленные в таблице 2.4, были рассчитаны с использованием свойств расплава AlSi10Mg из таблицы 2.2. Можно видеть, что применение правильного критерия для заданного числа Пекле дает согласованные значения поглощающей способности в диапазоне 0.2-0.3 для всех проанализированных порошков AlSi10Mg (эти значения выделены жирным шрифтом в таблице 2.4). Следует отметить, что полученные оценки, даже в случаях с предварительным нагревом платформы (случаи 2.2 и 2.3 в таблице 2.4), также попадают в этот диапазон. Единственное исключение с $A=0.36$ было отмечено для случая 2.4 в таблице 2.4. Это расхождение может быть

связано с приблизительным диаметром лазерного пятна (указанным как $a_s \approx 70$ мкм) в оригинальном исследовании [39]. Учитывая фактический диапазон диаметра пучка ($2R=40-70$ мкм) используемой лазерной системы YLM-120, пересчитанная поглощающая способность может хорошо согласовываться с другими результатами идентификации. Например, при использовании $2R=60$ мкм в уравнении (2.4) для случая 4 в таблице 2.4 мы получим $A=0.28$.

Результаты настоящего исследования, полученные для выбранных комбинаций критических параметров процесса (случаи 6 и 7 в таблице 2.4), дают несколько более низкие значения поглощающей способности по сравнению с другими данными. Это расхождение может быть связано с двумя ключевыми факторами. Во-первых, с наличием более обширного экспериментального набора данных, который способствует более точному определению границы отсутствия сплавления. Во-вторых, с большим размером частиц порошка, использованного в настоящем исследовании, по сравнению с другими рассмотренными вариантами (см. таблицу 2.4).

Таблица 2.4 – Определенные значения поглощающей способности (при низкой энергозатрате) для стандартных порошков AlSi10Mg на основе анализа закона образования отложений и опубликованных экспериментальных данных

#	d_{10}	d_{90}	h	$2R$	T_0	P^*	v^*	E_l^*	ΔH^*	P_e	Поглощающая способность, A		Ссылка
	(мкм)	(мкм)	(мкм)	(мкм)	(°C)	(Вт)	(м/с)	(Дж/м)	(Дж/мм³)	(1)	Eq. (2)	Eq. (4)	
1	15	45	30	150	RT*	170	0.9	189	6.5	3	0.09	0.28	37
2	25	70	50	100	100	60	0.8	75	4.5	1.8	0.24	0.37	38
3	25	70	50	100	100	130	1.9	68	6.3	4.2	0.32	0.26	38
4	15	53	30	70	RT	130	1.1	118	5	3.4	0.14	0.36	39
5	20	63	400	20	RT	100	0.75	133	86	0.3	0.24	0.02	40
6	33	70	60	80	RT	58	0.57	102	7.2	1	0.19	0.25	это исследование
7	33	70	60	80	RT	130	2	65	8.6	3.5	0.29	0.21	это исследование

*RT-температура в помещении

В данной главе выполнен комплексный анализ влияния гранулометрического состава порошка AlSi10Mg на условия формирования единичных треков при селективном лазерном плавлении. На основе обработки экспериментальных данных, анализа масштабирующих законов,

численного моделирования и применения модели Иджера–Цая установлено, что размер частиц порошка оказывает существенное влияние на поглотительную способность материала, положение границы отсутствия сплавления и геометрические характеристики расплавленного бассейна.

Показано, что уменьшение среднего размера частиц сопровождается увеличением поглотительной способности, особенно в области низких входных энергий, наиболее близкой к границе устойчивого формирования трека. Это приводит к изменению ширины и глубины расплавленного бассейна, а также к смещению критических режимов обработки. Полученные результаты согласуются как с собственными экспериментальными данными, так и с опубликованными данными по порошкам AlSi10Mg с различным распределением размеров частиц.

Установленные закономерности имеют важное значение не только для описания геометрии единичных треков, но и для последующего анализа термомеханического поведения материала. Изменение поглотительной способности и параметров расплавленного бассейна непосредственно влияет на характер локального теплового цикла, включая максимальную температуру, скорость охлаждения и величину температурных градиентов. Поскольку именно эти факторы определяют возникновение термических напряжений и деформаций, следующий этап исследования посвящён анализу динамического нагрева и напряжённо-деформированного состояния материала при движении лазерного источника.

Глава 3. НАПРЯЖЁННО - ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МАТЕРИАЛА ВБЛИЗИ ОТДЕЛЬНЫХ ТРЕКОВ, ПОЛУЧЕННЫХ В ПРОЦЕССЕ СЛП

Проведённый в главе 2 анализ показал, что параметры лазерного воздействия и гранулометрический состав порошка определяют поглощательную способность материала, а следовательно, и характер формирования единичного трека, включая его ширину, глубину и границы устойчивого сплавления. Однако геометрические характеристики трека являются лишь внешним проявлением более сложных нестационарных процессов, протекающих в материале при прохождении лазерного луча. За формированием трека стоят быстропротекающие процессы локального нагрева и охлаждения, сопровождающиеся резкими температурными градиентами, которые, в свою очередь, индуцируют термические деформации и напряжения.

В связи с этим для более полного описания физики процесса СЛП необходимо перейти от анализа условий формирования расплавленного бассейна к исследованию динамического поведения температурного поля и напряжённно-деформированного состояния материала. Такой переход особенно важен при рассмотрении единичных треков, поскольку именно на этом масштабе закладываются механизмы накопления термических напряжений, пластических деформаций и формирования дефектов. Поэтому в настоящей главе рассматривается задача динамического нагрева полупространства подвижным источником тепла с последующим определением индуцированного термоупругого состояния.

В рамках работы исследуется формирование динамического напряжённно-деформированного состояния металлопорошковой композиции в процессе СЛП единичных треков. С этой целью в качестве

теоретической основы для анализа единичного трека решается вспомогательная задача и проводится дополнительное исследование нестационарного нагрева изотропного полупространства под воздействием подвижного поверхностного источника тепла. Для описания быстропротекающего теплового отклика, лежащего в основе формирования термических напряжений, разрабатывается математическая модель, основанная на обобщённом уравнении теплопроводности, в рамках теории Максвелла–Каттанео.

3.1. Нагрев полуплоскости подвижным источником лазерного излучения с учётом теплоотдачи на поверхности

Неизменной характеристикой термического процесса при любом виде теплового воздействия на материал, включая лазерное излучение, является тепловой поток. В твёрдых телах перенос тепла осуществляется преимущественно за счёт теплопроводности, реализуемой через хорошо известные физические механизмы [108-110].

Как правило, при высокоинтенсивном нагреве используется импульсный источник, длительность действия которого составляет порядка пикосекунд [111-113]. В таких условиях классическая модель теплопроводности на основе закона Фурье теряет применимость, и для адекватного описания тепловых процессов будем использовать гиперболические уравнения теплопроводности, такие как уравнение Каттанео–Вернотта [110,114-116].

При воздействии лазерного излучения на твёрдое тело происходят изменения его оптических и теплофизических свойств вследствие теплового расширения материала. Кроме того, в процессе плавления наблюдаются фазовые переходы из твёрдого состояния в жидкое [117,118]. Кроме того, в приповерхностной области твёрдого тела могут протекать диффузионные процессы и происходить различные химические реакции, обусловленные воздействием лазерного излучения [46,53,119].

Существенные отличия тепловых процессов при воздействии лазерного излучения по сравнению с другими видами нагрева обусловлены высокими скоростями повышения и понижения температуры, а также значительными температурными градиентами.

Перенос тепловой энергии в веществе осуществляется посредством теплопроводности. Этот процесс возможен только при наличии температурных градиентов в теле и сопровождается изменением температуры как по пространственным координатам, так и во времени.

Здесь также решается задача об определении напряженно-деформированного состояния (НДС), возникающего вследствие селективного лазерного воздействия в нестационарной постановке.

Для этого в случае селективного лазерного плавления металлопорошковой композиции в пределах одного слоя, необходимо знать распределение поля температур в полуплоскости от воздействия лазерного источника [46,119,120]. Для решения указанной задачи ставится вспомогательная задача о нестационарном нагреве изотропной полуплоскости подвижным поверхностным источником тепла. Для этого строится математическая модель для обобщенного уравнения теплопроводности на основе классической теории и Грина-Нагди II типа, а также модели Максвелла-Каттанео [113,114,122].

Предложенные решения соответствуют воздействию сосредоточенного во времени и координатах поверхностного источника тепла в виде дельта функции, расположенного в теплопроводящей полуплоскости. Для решения поставленной задачи используется интегральные одномерное преобразование Фурье по координате и интегральное преобразование Лапласа по времени. Соответствующие оригиналы построены последовательным обращением преобразования Лапласа и Фурье, а также вычисления интегралов свертки по продольной координате.

В результате получено интегральное представление, позволяющее получать решения задачи о произвольных поверхностных источниках тепла в полуплоскости.

Для определения напряженно-деформированного состояния в металлопорошковой композиции в процессе трехмерной печати используются уравнения Ламе линейной теории несвязанной термоупругости с использованием обобщенного уравнения теплопроводности на основе гиперболического уравнения теплопроводности.

Приведенные решения задач подобного рода позволят с большой степенью точности исследовать воздействие высокоинтенсивных тепловых потоков энергии в новых материалах с неклассическими теплопроводящими свойствами.

Постановка задачи

Положим, что в начальный момент времени $t = 0$ в начале прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$, связанной с поверхностью полупространства $z \geq 0$ начинает действовать источник тепла $q(x, y, z, t)$, который движется по поверхности полуплоскости $z = 0$ по известному закону движения. Схематично данный процесс можно представить, как показано на рисунке 3.1.

Координаты положения центра пятна нагрева в моменты времени $t > 0$ определяются параметрической зависимостью:

$$x = \varphi(t) \quad (3.1)$$

В нашем случае будем использовать закон равномерного движения

$$\varphi(t) = V_0 + Vt \quad (3.2)$$

Полагаем, что среда является однородной и изотропной, а также что плотность и теплофизические постоянные не зависят от температуры. В этом случае распределение температуры $T(x, y, z, t)$ в среде подчиняется

уравнению теплопроводности. При этом рассматриваются уравнение Каттанео Вернотта.

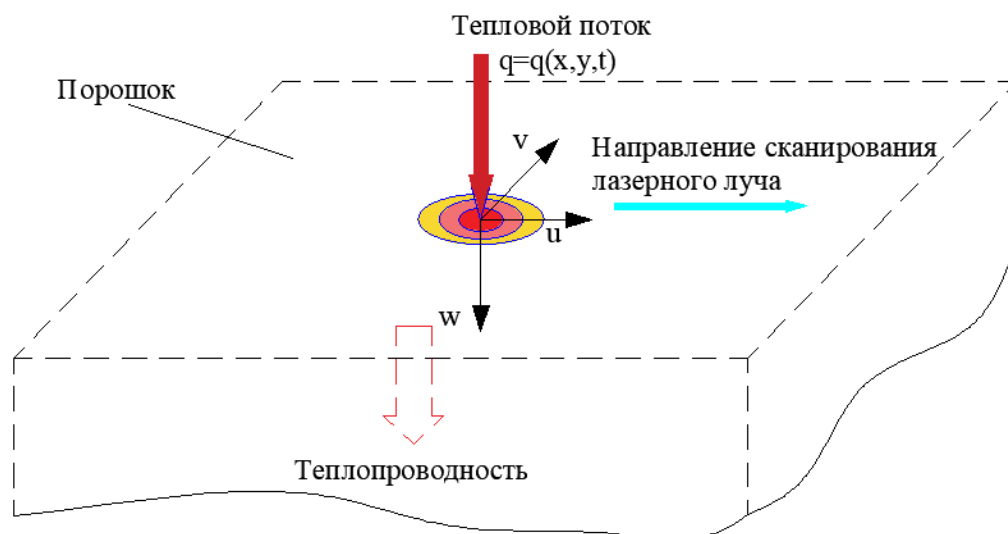


Рисунок 3.1 – Схематическое описание моделируемого процесса трехмерной печати

3.2 Гиперболическое уравнение теплопроводности

Гиперболическое уравнение теплопроводности позволяет описывать волновую природу распространения тепла. Оно основывается на обобщённом законе теплопроводности, предложенным независимо Каттанео и Лыковым [113,114,122].

$$\mathbf{q} + \tau_r \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\lambda \text{grad} \theta, \quad (3.3)$$

где

$\mathbf{q}$ – вектор теплового потока;

θ – температура;

τ_r – время релаксации;

λ – коэффициент теплопроводности.

Принимая во внимание уравнение баланса внутренней энергии

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{q} + q_v, \quad (3.4)$$

где

U – внутренняя энергия тела,

ρ – плотность,

q_v – объёмная плотность источников тепла, а также связь внутренней энергии с температурой

$$U = c_v \theta \quad (3.5)$$

где c_v – удельная теплоёмкость при постоянном объёме, получаем

$$\rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + q_v \quad (3.6)$$

Применяя к (3.51) оператор дивергенции, приходим к уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + \tau_r \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\lambda \Delta T \quad (3.7)$$

Из уравнений (3.54) и (3.55) получаем

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + \tau_r \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + q_v \quad (3.8)$$

Дифференцируя (3.6) по времени, выражая из полученного уравнения $\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}$ и подставляя результат в (3.8), приходим к гиперболическому уравнению теплопроводности Максвелла–Каттанео (это уравнение написано в предположении $q_v = 0$):

Среда, заполняющая полупространство, характеризуется удельной теплоёмкостью c , плотностью ρ и коэффициентом теплопроводности κ . Будем считать, что среда является однородной и изотропной, а также что плотность и теплофизические постоянные являются константами. Положим также отсутствие объёмных источников тепла в полупространстве. В этом случае распределение температуры $T(x, y, z, t)$ в среде подчиняется уравнению теплопроводности [113, 114, 122].

$$\frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_r} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = c^2 \Delta T(x, y, z, t), \quad (3.9)$$

где

$$c = \sqrt{\frac{\lambda}{c_p \rho \tau_r}} = \sqrt{\frac{a}{\tau_r}} \text{ (м/с);}$$

$$a = \frac{\lambda}{c_p \rho} - \text{коэффициент температуропроводности (м}^2\text{/с);}$$

$$c_p - \text{удельная теплоёмкость (Дж/кгК);}$$

$$\rho - \text{плотность (кг/м}^3\text{);}$$

$$\lambda - \text{коэффициент теплопроводности (Вт/мК);}$$

$$\Delta - \text{оператор Лапласа } (\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

соответственно для пространственных, плоских и одномерных задач).

Введём следующую систему безразмерных величин (символом «*» обозначены размерные параметры):

$$x = \frac{x^*}{L}, y = \frac{y^*}{L}, z = \frac{z^*}{L}, t = \frac{c_1 t^*}{L}, T = \frac{T^*}{T_0}, \quad (3.10)$$

где

L – характерная длина,

c_1 – скорость распространения упругих волн в среде.

Тогда уравнение теплопроводности в безразмерном виде будет

$$\frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \beta \Delta T(x, y, z, t) \quad (3.11)$$

С помощью подстановки $T(x, y, z, t) = \theta(x, y, z, t) e^{-\frac{\tau}{2}\alpha}$

$$\frac{\partial^2 \theta(x, y, z, t)}{\partial t^2} - \frac{\alpha^2 \theta(x, y, z, t)}{4} = \beta \Delta \theta(x, y, z, t)$$

В этом выражении $\alpha = \frac{L}{\tau_r c_1}$; $\beta = \frac{c^2}{c_1^2}$ – безразмерные параметр

При $t = 0$ температура во всех точках полупространства равна нулю

$$\theta(x, y, z, 0) = 0 \quad (3.12)$$

На поверхности полупространства имеют место граничные условия второго рода [21-23]. С учётом этих источников они примут вид:

$$\left. -\frac{\partial \theta(x, y, z, t) e^{\frac{\tau}{2}\alpha}}{\partial z} \right|_{z=0} = \tilde{q}[x - \varphi(t), y - \psi(t), t] \quad (3.13)$$

Здесь $q[x - \varphi(t), y - \psi(t), t]$ -плотность теплового потока (Вт/мК),

Тогда используя соотношения (3.13) получаем краевое условие в безразмерном виде:

$$\left. -\frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = e^{\frac{\tau}{2}\alpha} \tilde{q}[x - \varphi(t), y - \psi(t), t] \quad (3.14)$$

В этом выражении $\tilde{q} = \frac{qL}{\lambda T_0}$ -безразмерная плотность потока.

На бесконечности температура полагается ограниченной $\theta(r, t) = O(1), r \rightarrow \infty$.

3.3 Метод решения

Задачу о сосредоточенном источнике тепла, действующего на поверхность полупространства представим в виде вспомогательной задачи:

$$\frac{\partial^2 G(x, y, z, t)}{\partial t^2} - \frac{\alpha^2 G(x, y, z, t)}{4} = \beta \Delta G(x, y, z, t) \quad (3.15)$$

С начальными :

$$G(x, y, z, 0) = 0 \quad (3.16)$$

и краевыми условиями :

$$\left. -\frac{\partial G(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = \delta(x) \delta(y) \delta(t) \quad (3.17)$$

$$G(x, y, z, t) = O(1), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$$

Здесь $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

Функцию $G(r, t)$ как решение задачи (3.15-3.17) назовём функцией влияния поверхностного источника тепла. В дальнейшем будем называть её просто поверхностной функцией влияния.

Исходя из принципа суперпозиции [3,109,110,123] решение исходной задачи можно представить в виде свёртки функции влияния с правой частью

граничного условия (3.8) по переменным x, y и по времени t :

$$T(x, y, z, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, y - \zeta, z, t - \tau) q[\xi - \varphi(\tau), \zeta - \psi(\tau), \tau] d\xi d\zeta d\tau \quad (3.18)$$

Таким образом, ключевым моментом является построение функции влияния поверхностного источника.

Для решения начально-краевой задачи применим к (3.15-3.17) интегральное преобразование Лапласа по времени с параметром s и интегральные преобразования Фурье по пространственным переменным x и y с соответствующими параметрами q и p (индекс « FL » у функции обозначает её изображение по Фурье и Лапласу):

$$\beta \frac{d^2 G^{FL}(q, p, z, s)}{dz^2} - \left(s^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \beta \bar{p}^2 \right) G^{FL}(q, p, z, s) = 0, \quad \bar{p}^2 = q^2 + p^2 \quad (3.19)$$

$$-\frac{\partial G^{FL}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 1, \quad G^{FL} = O(1), \quad z \rightarrow \infty \quad (3.20)$$

Решение уравнения (3.19) с краевыми условиями (3.20) будет иметь вид:

$$G^{FL}(q, p, z, s) = \frac{e^{-z \sqrt{\frac{s^2}{\beta} - \frac{\alpha^2}{4\beta} + q^2 + p^2}}}{\sqrt{\frac{s^2}{\beta} - \frac{\alpha^2}{4\beta} + q^2 + p^2}} \quad (3.21)$$

Для вычисления оригинала выражение (3.21) удобно представить в виде

$$G^{FL}(q, p, z, s) = \frac{\sqrt{\beta} e^{-\frac{z}{\sqrt{\beta}} \sqrt{s_1^2 + \beta(q^2 + p^2) - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}}}{\sqrt{s_1^2 + \beta(q^2 + p^2) - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}}, \quad (3.22)$$

$$\text{где } s_1 = s + \frac{\alpha}{2}$$

Для построения оригинала сначала обратим интегральное преобразование по Лапласу:

$$G^F(q, p, z, t) = H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) e^{-\frac{\alpha}{2}t} J_0\left[\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sqrt{\beta(q^2 + p^2) - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right], \quad (3.23)$$

где $J_0(x)$ -функция Бесселя нулевого порядка

Тогда получаем оригинал поверхностной функции влияния в виде:

$$G(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty G^F(q, p, z, t) \cos(xq) \cos(yp) dq dp =$$

$$= H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) e^{-\frac{\alpha}{2}t} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty J_0\left[\left(t^2 - \frac{z^2}{\beta}\right) \sqrt{\beta(q^2 + p^2) - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right] \cos(xq) \cos(yp) dq dp \quad (3.24)$$

Далее используя соотношение (3.18) получаем выражение для определения поля температур.

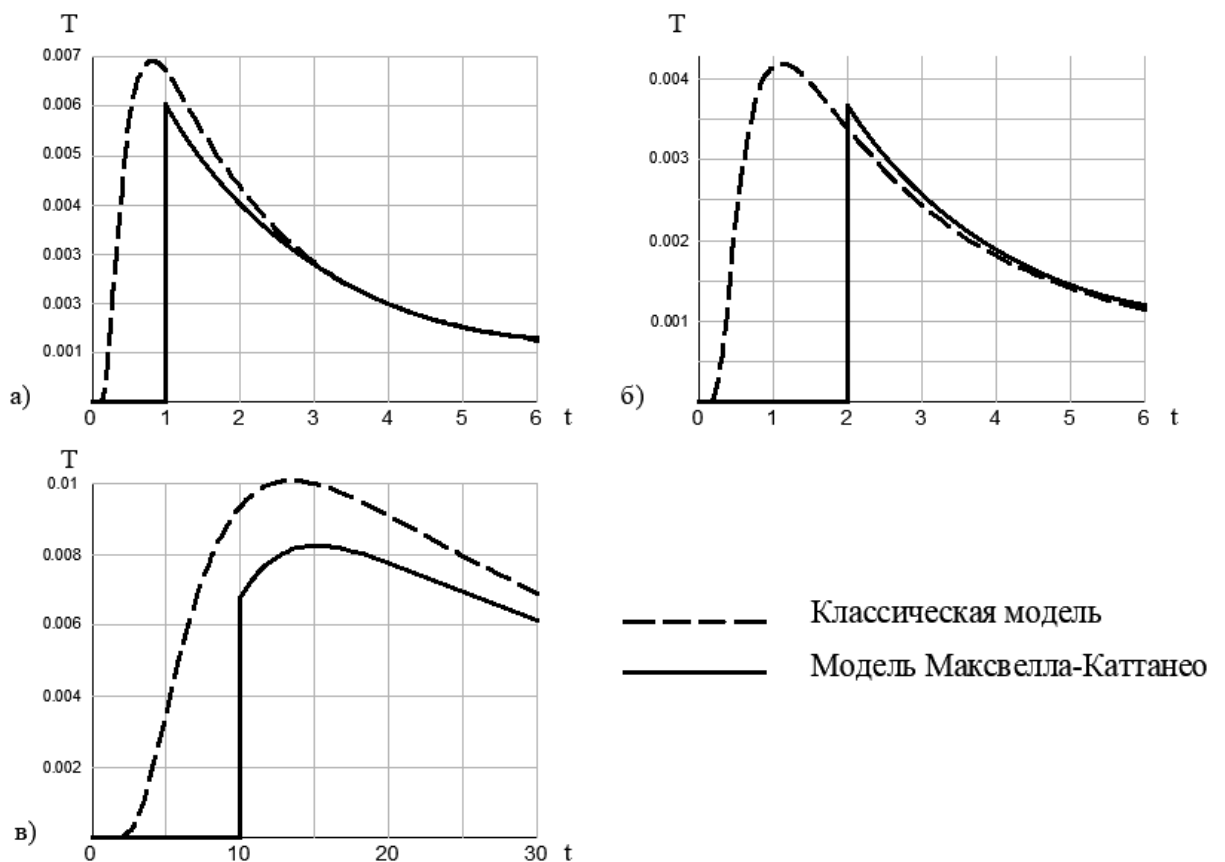


Рисунок 3.2 – Распределение поля температур по времени при различных координатах

На рисунках 3.2 приведено распределение поля температур для классической модели (пунктир) и модели Максвелла-Каттанео (сплошная линия), по времени при различных координатах ($x=1$ – рисунок 3.2 а, $x=2$ – рисунок 3.2 б, $x=10$ – рисунок 3.2 в) на поверхности полуплоскости $z=0$. Из этих рисунков следует, что при больших временах графики фактически

совпадают, а при малых временах температурное поле для модели Максвелла-Каттанео носит явно волновой характер с учетом действия времени релаксации теплового потока.

Распределение поля температур найдем из выражения (3.24) полагая движение источника лазерного излучения равномерным $\varphi(t) = V_0 t$, $\psi(t) = V_1 t^2$ где V_0 , V_1 – амплитудное значение скорости.

3.4 Расчёт напряжённо-деформированного состояния, индуцированного подвижным источником лазерного излучения

Напряжённо-деформированное состояние металлпорошковой композиции в процессе селективного лазерного плавления полуплоскости определим на основе решения системы дифференциальных уравнений термоупругости в предположении, что поверхностные нагрузки и массовые силы, а также внутренние источники тепла отсутствуют. Эта система уравнений состоит из уравнения теплопроводности и уравнений движения теории упругости с учётом температурных эффектов [110,124-126]:

$$\beta \Delta T(x, y, z, t) - \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial t^2} + \frac{\alpha^2 T(x, y, z, t)}{4} - \chi \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \quad (3.25)$$

Для упругой части задачи будем использовать уравнения Ламе:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} - \gamma \operatorname{grad} T = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (3.26)$$

где

$\mathbf{u} = (u, v, w)$ – вектор перемещений;

$\eta^2 = \frac{\lambda + \mu}{\mu}$, λ , μ – упругие постоянные Ламе;

$\gamma = 3K\alpha$, α – коэффициент температурного расширения,

$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – модуль объёмного расширения;

$\chi = \frac{\gamma T_0}{\lambda}$, ρ – плотность T_0 – начальная температура.

В этой системе уравнений можно пренебречь слагаемым $\chi \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{u}}{\partial t}$ в уравнении теплопроводности. Такое пренебрежение оправдывается тем, что оно мало по сравнению со вторым слагаемым уравнения (3.25). Таким образом, получаем несопряженную систему уравнений:

$$\beta \Delta T(x, y, z, t) - \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial t^2} + \frac{\alpha^2 T(x, y, z, t)}{4} = 0 \quad (3.27)$$

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} - \gamma \operatorname{grad} T = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3.28)$$

Решение уравнения (3.25) определяется формулами (3.24) и (3.18).

Используя соотношения между вектором перемещений, скалярным и векторными потенциалами.

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w \quad (3.29)$$

Получаем выражения перемещений и напряжений через потенциалы.

Подставляя соотношение (3.29) в векторное уравнение Ламе получаем систему независимых уравнений относительно скалярного и векторного потенциалов:

$$(\lambda + 2\mu) \Delta \varphi - \gamma T = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (3.30)$$

$$\mu \Delta \boldsymbol{\Psi} - \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Psi}}{\partial t^2} \quad (3.31)$$

Введём следующую систему безразмерных величин (символом «*» обозначены размерные параметры):

$$\begin{aligned} z &= \frac{z^*}{h}, \quad x = \frac{x^*}{h}, \quad t = \frac{c_1 t^*}{h}, \quad \varphi = \frac{\varphi^*}{h^2}, \quad \boldsymbol{\Psi} = \frac{\boldsymbol{\Psi}^*}{h^2}, \\ u &= \frac{u^*}{h}, \quad v = \frac{v^*}{h}, \quad w = \frac{w^*}{h}, \quad T = \frac{T^*}{T_0}, \\ \sigma_x &= \frac{\sigma_x^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \sigma_y = \frac{\sigma_y^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \sigma_z = \frac{\sigma_z^*}{\lambda + 2\mu}, \\ \tau_{xy} &= \frac{\tau_{xy}^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \tau_{xz} = \frac{\tau_{xz}^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \gamma^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \quad \tau_{yz} = \frac{\tau_{yz}^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \chi = \frac{\gamma T_0}{\rho c_1^2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Здесь $c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ $c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$ скорости распространения продольной и поперечных волн.

Тогда получаем:

$$\Delta\varphi - \chi T = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (3.33)$$

$$\gamma^2 \Delta\Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (3.34)$$

При этом, выражения кинематических параметров через потенциалы будут иметь вид:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right), w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial z} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial z} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_z + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xz} &= 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_y + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial z} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y \partial z} - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Напряжения через потенциалы выразятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (1 - 2\eta^2) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\eta^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} \right) \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1 - 2\eta^2) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\eta^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial y} \right) \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + (1 - 2\eta^2) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + 2\eta^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \eta^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial z} \right) \\
\tau_{yz} &= \eta^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x \partial z} \right) \\
\tau_{xz} &= \eta^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Для решения поставленной задачи применим к соотношениям (3.33 - 3.37) интегральное преобразование Лапласа по времени:

$$f^L(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \tag{3.40}$$

где s — комплексный параметр преобразования и интегральное преобразование Фурье по координатам x и y с параметрами преобразования q и p соответственно :

$$f^F(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-i(qx+py)} f(x, y) dx dy \tag{3.41}$$

Тогда с учетом (3.38-3.39) уравнения (3.33-3.34) в трансформантах примут вид:

$$\frac{d^2 \varphi^{LF}(s, q, p, z)}{dz^2} - \nu^2 \varphi^{LF}(s, q, p, z) = \chi T^{LF}(s, q, p, z) \tag{3.42}$$

$$\frac{d^2 \Psi^{LF}(s, q, p, z)}{dz^2} - \nu_1^2 \Psi^{LF}(s, q, p, z) = 0, \tag{3.43}$$

$$\text{где } \nu^2 = q^2 + p^2 + s^2 \quad \nu_1^2 = q^2 + p^2 + \frac{s^2}{\gamma^2}$$

Температурное слагаемое в правой части уравнения (3.42) предполагаем в форме соотношения (3.21):

$$G^{FL}(q, p, z, s) = T^{LF}(s, q, p, z) = \frac{e^{-z \sqrt{\frac{s^2}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} s + q^2 + p^2}}}{\sqrt{\frac{s^2}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} s + q^2 + p^2}} = \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda} \tag{3.44}$$

В этом выражении $\lambda = \sqrt{\frac{s^2}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} s + q^2 + p^2}$ а трансформанты выражений

(3.35-3.39) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
u^{LF}(s, q, p, z) &= -iq\varphi^{LF}(s, q, p, z) - ip\psi_z^{LF}(s, q, p, z) - \frac{d\psi_y^{LF}(s, q, p, z)}{dz}, \\
v^{LF}(s, q, p, z) &= -ip\varphi^{LF}(s, q, p, z) + iq\psi_z^{LF}(s, q, p, z) + \frac{d\psi_x^{LF}(s, q, p, z)}{dz}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
w^{LF}(s, q, p, z) &= \frac{d\varphi^{LF}(s, q, p, z)}{dz} - iq\psi_y^{LF}(s, q, p, z) - ip\psi_x^{LF}(s, q, p, z) \\
\varepsilon_x^{LF}(s, q, p, z) &= -q^2\varphi^{LF}(s, q, p, z) - qp\psi_z^{LF}(s, q, p, z) + iq\frac{d\psi_y^{LF}(s, q, p, z)}{dz} \\
\varepsilon_y^{LF}(s, q, p, z) &= -p^2\varphi^{LF}(s, q, p, z) + qp\psi_z^{LF}(s, q, p, z) - ip\frac{d\psi_x^{LF}(s, q, p, z)}{dz}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z^{LF}(s, q, p, z) &= \frac{d^2\varphi}{dz^2} - iq\frac{d\psi_y^{LF}(s, q, p, z)}{dz} + ip\frac{d\psi_x^{LF}(s, q, p, z)}{dz} \\
\gamma_{xy}^{LF}(s, q, p, z) &= -2qp\varphi^{LF}(s, q, p, z) + (q^2 - p^2)\psi_z^{LF}(s, q, p, z) + \\
&+ \frac{d}{dz} \left[-iq\psi_x^{LF}(s, q, p, z) + ip\psi_y^{LF}(s, q, p, z) \right] \\
\gamma_{xz}^{LF}(s, q, p, z) &= -2q\frac{d\varphi^{LF}(s, q, p, z)}{dz} - \left(q^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \psi_y^{LF}(s, q, p, z) + \\
&- ip \left[\frac{d\psi_z^{LF}(s, q, p, z)}{dz} + iq\psi_x^{LF}(s, q, p, z) \right]
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{yz}^{LF}(s, q, p, z) &= -2p\frac{d\varphi^{LF}(s, q, p, z)}{dz} + \left(p^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \psi_x^{LF}(s, q, p, z) + \\
&+ iq \left[ip\psi_y^{LF}(s, q, p, z) + \frac{d\psi_z^{LF}(s, q, p, z)}{dz} \right] \\
\sigma_x^{LF}(s, q, p, z) &= -q^2\varphi^{LF}(s, q, p, z) + (1 - 2\eta^2) \left[-p^2\varphi^{LF}(s, q, p, z) + \frac{d^2\varphi^{LF}(s, q, p, z)}{dz^2} \right] + \\
&+ 2\eta^2 \left[qp\psi_z^{LF}(s, q, p, z) + iq\frac{d\psi_y^{LF}(s, q, p, z)}{dz} \right] \\
\sigma_y^{LF}(s, q, p, z) &= -p^2\varphi^{LF}(s, q, p, z) + (1 - 2\eta^2) \left[-q^2\varphi^{LF}(s, q, p, z) + \frac{d^2\varphi^{LF}(s, q, p, z)}{dz^2} \right] + \\
&+ 2\eta^2 \left[-ip\frac{d\psi_x^{LF}(s, q, p, z)}{dz} + qp\psi_z^{LF}(s, q, p, z) \right] \\
\sigma_z^{LF}(s, q, p, z) &= \frac{d^2\varphi^{LF}(s, q, p, z)}{dz^2} - (1 - 2\eta^2)(q^2 + p^2)\varphi^{LF}(s, q, p, z) + \\
&+ 2\eta^2 \left[-iq\frac{d\psi_y^{LF}(s, q, p, z)}{dz} + ip\frac{d\psi_x^{LF}(s, q, p, z)}{dz} \right]
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}^{LF}(s, q, p, z) &= \eta^2 \left[-2qp\phi^{LF}(s, q, p, z) - p^2\psi_z^{LF}(s, q, p, z) + \right. \\
&+ q^2\psi_z^{LF}(s, q, p, z) - iq \frac{d\psi_x^{LF}(s, q, p, z)}{dz} + ip \frac{d\psi_y^{LF}(s, q, p, z)}{dz} \\
\tau_{yz}^{LF}(s, q, p, z) &= \eta^2 \left[-2ip \frac{d\phi^{LF}(s, q, p, z)}{dz} + \frac{d^2\psi_x^{LF}(s, q, p, z)}{dz^2} + \right. \\
&+ p^2\psi_x^{LF}(s, q, p, z) - qp\psi_y^{LF}(s, q, p, z) + iq\psi_z^{LF}(s, q, p, z) \left. \right] \\
\tau_{xz}^{LF}(s, q, p, z) &= \eta^2 \left[-2iq \frac{d\phi^{LF}(s, q, p, z)}{dz} - q^2\psi_y^{LF}(s, q, p, z) - \frac{d^2\psi_y^{LF}(s, q, p, z)}{dz^2} - \right. \\
&- ip\psi_z^{LF}(s, q, p, z) + q p\psi_x^{LF}(s, q, p, z) \left. \right]
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Решение системы уравнений (3.33, 3.34) будет иметь вид:

$$\phi^{LF}(q, p, z, s) = A(q, p, s)e^{-z\sqrt{q^2+p^2+s^2}} + A_1(q, p, s)e^{z\sqrt{q^2+p^2+s^2}} + \phi_q^{LF}(q, p, z, s) \tag{3.50}$$

$$\psi^{LF}(q, p, z, s) = B(q, p, s)e^{-z\sqrt{q^2+p^2+\frac{s^2}{\gamma^2}}} + B_1(q, p, s)e^{z\sqrt{q^2+p^2+\frac{s^2}{\gamma^2}}} \tag{3.51}$$

Здесь частное решение уравнения (3.50) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\phi_q^{LF}(q, p, z, s) &= \chi \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda(\lambda^2 - \nu^2)} \\
\lambda^2 - \nu^2 &= \left(\sqrt{\frac{s^2}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}s + q^2 + p^2} \right)^2 - (s^2 + q^2 + p^2) = s^2 \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) + \frac{\alpha}{\beta}s
\end{aligned}$$

Тогда постоянные интегрирования в (3.51) определим из краевых условий:

Условие ограниченности решения на бесконечности:

$$\phi^{LF}(q, p, z, s) \Big|_{z \rightarrow \infty} = O(1) \quad \psi^{LF}(q, p, z, s) \Big|_{z \rightarrow \infty} = O(1) \tag{3.52}$$

Следует $A_1(q, p, s) = B_1(q, p, s) = 0$

Тогда из (3.51) с учетом (3.52) имеем:

$$\phi^{LF}(q, p, z, s) = A(q, p, s)e^{-z\nu} + \chi \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda(\lambda^2 - \nu^2)} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
\psi_x^{LF}(q, p, z, s) &= B_x(q, p, s)e^{-z\nu_1} \\
\psi_y^{LF}(q, p, z, s) &= B_y(q, p, s)e^{-z\nu_1} \\
\psi_z^{LF}(q, p, z, s) &= B_z(q, p, s)e^{-z\nu_1}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Остальные постоянные интегрирования, определяются из следующих краевых условиях на поверхности полупространства:

$$\operatorname{div} \Psi = \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0 \quad (3.55)$$

$$\sigma_z(t, x, y, z) \Big|_{z \rightarrow 0} = 0 \quad (3.56)$$

$$\tau_{xz}(t, x, y, z) \Big|_{z \rightarrow 0} = 0 \quad (3.57)$$

$$\tau_{yz}(t, x, y, z) \Big|_{z \rightarrow 0} = 0 \quad (3.58)$$

Трансформанты краевых условий (3.55-3.58) будут иметь вид:

$$\operatorname{div} \Psi^{LF} = \left[-iq\psi_x^{LF}(s, q, p, z) - ip\psi_y^{LF}(s, q, p, z) + \frac{d\psi_z^{LF}(s, q, p, z)}{dz} \right] \Big|_{z=0} = 0 \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{LF} = & \left\{ \frac{d^2 \phi^{LF}(s, q, p, z)}{dz^2} - (1 - 2\eta^2)(q^2 + p^2) \phi^{LF}(s, q, p, z) + \right. \\ & \left. + 2\eta^2 \left[-iq \frac{d\psi_y^{LF}(s, q, p, z)}{dz} + ip \frac{d\psi_x^{LF}(s, q, p, z)}{dz} \right] \right\} \Big|_{z=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{LF} = & \eta^2 \left[-2iq \frac{d\phi^{LF}(s, q, p, z)}{dz} - q^2 \psi_y^{LF}(s, q, p, z) - \frac{d^2 \psi_y^{LF}(s, q, p, z)}{dz^2} - \right. \\ & \left. - ip\psi_z^{LF}(s, q, p, z) + qp\psi_x^{LF}(s, q, p, z) \right] \Big|_{z=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz}^{LF} = & \eta^2 \left[-2ip \frac{d\phi^{LF}(s, q, p, z)}{dz} + \frac{d^2 \psi_x^{LF}(s, q, p, z)}{dz^2} + \right. \\ & \left. + p^2 \psi_x^{LF}(s, q, p, z) - qp\psi_y^{LF}(s, q, p, z) + iq\psi_z^{LF}(s, q, p, z) \right] \Big|_{z=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Подставляя трансформанты потенциалов (3.53, 3.54) в краевые условия (3.59, 3.62) получаем систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования $A(q, p, s), B_x(q, p, s), B_y(q, p, s), B_z(q, p, s)$:

$$-iqB_x(q, p, s) - ipB_y(q, p, s) - \nu_1 B_z(q, p, s) = 0 \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} & \left[\nu^2 - (1 - 2\eta^2)(q^2 + p^2) \right] A(q, p, s) - 2i\nu_1 \eta^2 \left[pB_x(q, p, s) - qB_y(q, p, s) \right] = \\ & = (1 - 2\eta^2)(q^2 + p^2) A_1 \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$2iq\nu A(q, p, s) + qpB_x(q, p, s) + (\nu_1^2 - q^2) B_y(q, p, s) - ipB_z(q, p, s) = -2iq\lambda A_1 \quad (3.65)$$

$$2ip\nu A(q, p, s) + (p^2 + \nu_1^2) B_x(q, p, s) - qp B_y(q, p, s) + iq B_z(q, p, s) = -2ip\lambda A_1 \quad (3.66)$$

В результате выражения для констант интегрирования получаем в виде:

$$A(q, p, s) = \frac{R_1(q, p, s)}{R(q, p, s)} \quad (3.67)$$

$$B_x(q, p, s) = \frac{R_2(q, p, s)}{R(q, p, s)} \quad (3.68)$$

$$B_y(q, p, s) = \frac{R_3(q, p, s)}{R(q, p, s)} \quad (3.69)$$

$$B_z(q, p, s) = \frac{R_4(q, p, s)}{R(q, p, s)} \quad (3.70)$$

$$A = q^2 + p^2 \quad B = q^2 - p^2 \quad \nu = \sqrt{A + s^2} \quad \nu_1 = \sqrt{A + \frac{s^2}{\gamma^2}}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{s^2}{\beta} + A - A_0}$$

$$R(q, p, s) = -(2A\eta^2 + s^2)\nu_1^5 - 4\nu\eta^2 B\nu_1^4 + B(2A\eta^2 + s^2)\nu_1^3 - B(2A\eta^2 + s^2)\nu_1^2 - 4\nu\eta^2 A^2\nu_1 + (2A\eta^2 + s^2)A^2$$

$$R_1(q, p, s) = -A_1[-A(2\eta^2 - 1)\nu_1^5 - 4\eta^2\lambda B\nu_1^4 + AB(2\eta^2 - 1)\nu_1^3 - AB(2\eta^2 - 1)\nu_1^2 - 4\eta^2\lambda A^2\nu_1 + (2\eta^2 - 1)A^3]$$

$$R_2(q, p, s) = 2iA_1p(A - \nu_1^3)[2(\nu - \lambda)\eta^2 A - \nu A - \lambda s^2]$$

$$R_3(q, p, s) = -2iA_1q(A + \nu_1^3)[2(\nu - \lambda)\eta^2 A - \nu A - \lambda s^2]$$

$$R_4(q, p, s) = 4A_1qv_1^2[2(\nu - \lambda)\eta^2 A - \nu A - \lambda s^2]$$

Тогда трансформанты потенциалов примут вид:

$$\begin{aligned} \varphi^{LF}(q, p, z, s) &= A(q, p, s)e^{-zv} + \chi \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda(\lambda^2 - \nu^2)} \\ \psi_x^{LF}(q, p, z, s) &= B_x(q, p, s)e^{-z\nu_1} \\ \psi_y^{LF}(q, p, z, s) &= B_y(q, p, s)e^{-z\nu_1} \\ \psi_z^{LF}(q, p, z, s) &= B_z(q, p, s)e^{-z\nu_1} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Подставляя соотношения (3.71) с учетом (3.67-3.69) в выражения для (3.45, 3.47, 3.48) получаем трансформанты кинематических и статических параметров для упругого полупространства:

$$\begin{aligned}
u^{LF}(s, q, p, z) &= \gamma v \frac{R_3(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} - iq \frac{R_1(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv} - \frac{R_4(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} - \frac{iq \chi e^{-z\lambda}}{\lambda(\lambda^2 - v^2)}; \\
v^{LF}(s, q, p, z) &= ip \frac{R_1(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv} - v_1 \frac{R_2(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} - iq \frac{R_4(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} - \frac{ip \chi e^{-z\lambda}}{\lambda(\lambda^2 - v^2)}; \\
w^{LF}(s, q, p, z) &= -v \frac{R_1(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv} - iq \frac{R_3(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} - ip \frac{R_2(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} - \frac{\chi e^{-z\lambda}}{\lambda^2 - v^2}
\end{aligned} \quad (3.72)$$

Выражения для трансформант нормальных напряжений примут вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{LF} &= \left[(1 - 2\eta^2)(v^2 - p^2) - q^2 \right] \frac{R_1(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-vz} + \left[(1 - 2\eta^2)(p^2 - \lambda^2) - q^2 \right] \frac{e^{-z\lambda}}{\lambda(as^2 - b)} + \\
&+ 2\eta^2 q \left[p \frac{R_4(q, p, s)}{R(q, p, s)} - iv_1 \frac{R_3(q, p, s)}{R(q, p, s)} \right] e^{-v_1 z} \\
\sigma_y^{LF} &= \left[(2\eta^2 - 1)(q^2 - v^2) - p^2 \right] \frac{R_1(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-vz} + \left[p^2 - (\lambda^2 - q^2)(2\eta^2 - 1) \right] \frac{e^{-z\lambda}}{\lambda(as^2 - b)} + \\
&+ 2\eta^2 p \left[q \frac{R_4(q, p, s)}{R(q, p, s)} + iv_1 \frac{R_2(q, p, s)}{R(q, p, s)} \right] e^{-v_1 z} \\
\sigma_z^{LF} &= \left[v^2 + (2\eta^2 - 1)(q^2 + p^2) \right] \frac{R_1(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-vz} + \left[\lambda^2 + (2\eta^2 - 1)(p^2 + q^2) \right] \frac{e^{-z\lambda}}{\lambda(as^2 - b)} - \\
&- 2\eta^2 \left\{ \frac{R_4(q, p, s)}{R(q, p, s)} (p^2 - q^2) - iv_1 \left[q \frac{R_3(q, p, s)}{R(q, p, s)} - p \frac{R_2(q, p, s)}{R(q, p, s)} \right] \right\} e^{-v_1 z}
\end{aligned} \quad (3.73)$$

Выражения для трансформант касательных напряжений примут вид:

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}^{LF}(s, q, p, z) &= \eta^2 \left[-2qp \left(\frac{R_1(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv} + \chi \frac{e^{-\lambda z}}{\lambda(\lambda^2 - v^2)} \right) - p^2 \frac{R_4(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} + \right. \\
&+ q^2 \frac{R_4(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} + iqv_1 \frac{R_2(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} - ipv_1^2 \frac{R_3(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} \left. \right]; \\
\tau_{yz}^{LF}(s, q, p, z) &= \eta^2 \left[2ip \left(v \frac{R_1(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv} + \frac{\chi e^{-\lambda z}}{\lambda^2 - v^2} \right) + v_1^2 \frac{R_2(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} + \right. \\
&+ p^2 \frac{R_2(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} - qp \frac{R_3(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} + iq \frac{R_4(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} \left. \right]; \\
\tau_{xz}^{LF}(s, q, p, z) &= \eta^2 \left[2iq \left(v \frac{R_1(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv} + \frac{\chi e^{-\lambda z}}{\lambda^2 - v^2} \right) + q^2 \frac{R_3(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} + \right. \\
&- v_1^2 \frac{R_3(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} - ip \frac{R_4(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} + qp \frac{R_2(q, p, s)}{R(q, p, s)} e^{-zv_1} \left. \right]
\end{aligned} \quad (3.74)$$

Получить аналитически оригиналы трансформант (3.72-3.75) не представляется возможным, поэтому представим эти выражения в виде

асимптотического разложения в ряд по параметру преобразования Лапласа $\frac{1}{s^m}$, где действительные числа, с последующим определением оригиналов с помощью таблиц и свойств преобразования, тогда трансформанты перемещений (3.72).

По Фурье примут вид:

$$u^F(t, q, p, z) = iqu_1^F(q, p) + ipu_2^F(q, p)$$

$$u^F(t, q, p, z) = iq \left[H(t - \gamma z) \sum_{m=4}^7 (t - \gamma z)^m u_{1m}^F(q^2, p^2) + \right. \\ \left. + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=2}^3 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m u_{1m}^F(q^2, p^2) \right] + ip H(t - \gamma z) \sum_{m=3}^7 (t - \gamma z)^m u_{2m}^F(q^2, p^2)$$

$$u_1^F(q, p) = H(t - \gamma z) \left[u_{11}(q^2, p^2)(t - \gamma z)^7 + u_{12}(q^2, p^2)(t - \gamma z)^6 + u_{13}(q^2, p^2)(t - \gamma z)^5 + \right. \\ \left. + u_{14}(q^2, p^2)(t - \gamma z)^4 \right] + H(t - z) \left[u_{32}(q^2, p^2) \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^6 + u_{34}(q^2, p^2) \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^4 \right];$$

$$u_2^F(q, p) = H(t - z) \left[u_{21}(q^2, p^2)(t - z)^7 + u_{22}(q^2, p^2)(t - z)^6 + u_{23}(q^2, p^2)(t - z)^5 + \right. \\ \left. + u_{24}(q^2, p^2)(t - z)^4 + u_{25}(q^2, p^2)(t - z)^3 \right]$$

$$u^F(t, q, p, z) = iq \left\{ H(t - \gamma z) \left[u_{11}(q^2, p^2)(t - \gamma z)^7 + u_{12}(q^2, p^2)(t - \gamma z)^6 + \right. \right. \\ \left. + u_{13}(q^2, p^2)(t - \gamma z)^5 + u_{14}(q^2, p^2)(t - \gamma z)^4 \right] + H(t - z) \left[u_{32}(q^2, p^2) \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^6 + \right. \\ \left. + u_{34}(q^2, p^2) \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^4 \right] \right\} + ip H(t - z) \left[u_{21}(q^2, p^2)(t - z)^7 + u_{22}(q^2, p^2)(t - z)^6 + \right. \\ \left. + u_{23}(q^2, p^2)(t - z)^5 + u_{24}(q^2, p^2)(t - z)^4 + u_{25}(q^2, p^2)(t - z)^3 \right] \quad (3.75)$$

$$v^F(t, q, p, z) = ipv_1^F(q, p)$$

$$v^F(t, q, p, z) = ip \left[H(t - \gamma z) \sum_{m=4}^7 (t - \gamma z)^m v_{1m}^F(p, q) + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m v_{2m}^F(p, q) + \right. \\ \left. + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=4}^6 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m v_{3m}^F(p, q) \right]$$

$$\begin{aligned}
v^F(t, q, p, z) = & ip \left\{ H(t - \gamma z) \left[v_{11}(q, p)(t - \gamma z)^7 + v_{12}(q, p)(t - \gamma z)^6 + v_{13}(q, p)(t - \gamma z)^5 + \right. \right. \\
& + v_{14}(q, p)(t - \gamma z)^4 + v_{15}(q, p)(t - \gamma z)^3 \left. \right] + H(t - z) \left[v_{21}(q, p)(t - z)^7 + v_{22}(q, p)(t - z)^6 + \right. \\
& + v_{23}(q, p)(t - z)^5 + v_{24}(q, p)(t - z)^4 + v_{25}(q, p)(t - z)^3 \left. \right] + H(t - z) \left[v_{31}(q, p) \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}} \right)^7 + \right. \\
& + v_{32}(q, p) \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}} \right)^6 + v_{33}(q, p) \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}} \right)^5 + v_{34}(q, p) \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}} \right)^4 + v_{35}(q, p) \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}} \right)^3 \left. \right] \left. \right\} \quad (3.76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w^F(t, q, p, z) = & -qp w_1^F(q, p) - q^2 w_1^F(q, p) + w_2^F(q, p) \\
w^F(t, q, p, z) = & -pq H(t - \gamma z) \sum_{m=3}^7 (t - \gamma z)^m w_{1m}^F(p, q) - q^2 H(t - \gamma z) \sum_{m=3}^7 (t - \gamma z)^m w_{1m}^F(p, q) + \\
& + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m w_{2m}^F(p, q) + H \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}} \right) \sum_{m=3}^7 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}} \right)^m w_{3m}^F(p, q) \\
w^F(t, q, p, z) = & H(t - \gamma z) \left[w_{11}(q, p)(t - \gamma z)^7 + w_{12}(q, p)(t - \gamma z)^6 + w_{13}(q, p)(t - \gamma z)^5 + \right. \\
& + w_{14}(q, p)(t - \gamma z)^4 + w_{15}(q, p)(t - \gamma z)^3 \left. \right] + H(t - z) \left[w_{21}(q, p)(t - z)^7 + w_{22}(q, p)(t - z)^6 + \right. \\
& + w_{23}(q, p)(t - z)^5 + w_{24}(q, p)(t - z)^4 + w_{25}(q, p)(t - z)^3 \left. \right] + H(t - z) \left[w_{31}(q, p) \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}} \right)^7 + \right. \\
& + w_{32}(q, p) \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}} \right)^6 + w_{33}(q, p) \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}} \right)^5 + w_{34}(q, p) \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}} \right)^4 + w_{35}(q, p) \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}} \right)^3 \left. \right] \quad (3.77)
\end{aligned}$$

В этих выражения коэффициенты, входящие в трансформанты перемещений имеют громоздкий вид и даны в приложении № (1-18)

Аналогичным образом получаем асимптотические разложения напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_x^F(t, q, p, z) = & -q^2 H \left(t - \frac{z}{\gamma} \right) \sum_{m=4}^7 \left(t - \frac{z}{\gamma} \right)^m \sigma_{x1m}^F(q, p) + \\
& + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m \sigma_{x2m}^F(p, q) + H \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}} \right) \sum_{m=4}^6 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}} \right)^m \sigma_{x3m}^F(p, q) \quad (3.78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y^F(t, q, p, z) = & -q^2 H \left(t - \frac{z}{\gamma} \right) \sum_{m=4}^7 \left(t - \frac{z}{\gamma} \right)^m \sigma_{y1m}^F(q, p) + \\
& + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m \sigma_{y2m}^F(q, p) + H \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}} \right) \sum_{m=4}^6 \sigma_{y3m}^F(q, p) \quad (3.79)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^F(t, q, p, z) = & H\left(t - \frac{z}{\gamma}\right) \sum_{m=4}^7 \left(t - \frac{z}{\gamma}\right)^m \sigma_{z1m}^F(p, q) + \\ & + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m \sigma_{z2m}^F(p, q) + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=4}^6 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m \sigma_{z3m}^F(p, q) \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{LF}(t, q, p, z) = & q^2 H\left(t - \frac{z}{\gamma}\right) \sum_{m=4}^7 \left(t - \frac{z}{\gamma}\right)^m \tau_{xy1m}^F(q, p) + pq \left[-H\left(t - \frac{z}{\gamma}\right) \sum_{m=4}^7 \left(t - \frac{z}{\gamma}\right)^m \tau_{xy1m}^F(q, p) + \right. \\ & \left. + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m \tau_{xy2m}^F(q, p) + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=4}^6 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m \tau_{xy3m}^F(q, p) \right] \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz}^{LF}(t, q, p, z) = & ip \left[H\left(t - \frac{z}{\gamma}\right) \sum_{m=3}^7 \left(t - \frac{z}{\gamma}\right)^m \tau_{yz1m}^F(q, p) + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m \tau_{yz2m}^F(q, p) + \right. \\ & \left. + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=3}^7 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m \tau_{yz3m}^F(q, p) \right] \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{LF}(t, q, p, z) = & iq H\left(t - \frac{z}{\gamma}\right) \sum_{m=3}^7 \left(t - \frac{z}{\gamma}\right)^m \tau_{xz1m}^F(p, q) + ip \left[H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m \tau_{xz2m}^F(p, q) + \right. \\ & \left. + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=3}^7 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m \tau_{xz3m}^F(p, q) \right] \end{aligned} \quad (3.83)$$

Определение оригиналов перемещений и напряжений

Трансформанты по Фурье перемещений (3.75-3.77) представляют собой достаточно сложные конструкции зависящие от параметров преобразования Фурье, оригиналы которых можно определить с учетом свойств обратного преобразования с последующей численной реализацией. Для решения поставленной задачи представим выражения (3.75-3.83) в виде:

$$\begin{aligned} u^F(t, q, p, z) = & iq \left[H(t - \gamma z) \sum_{m=4}^7 (t - \gamma z)^m u_m^F(q^2, p^2) + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=2}^3 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^{2m} u_{1m}^F(q^2, p^2) \right] + \\ & + ip H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m u_{2m}^F(q^2, p^2) \end{aligned}$$

Алгоритм обращения двумерного преобразования Фурье для изображений вида $\varphi(p^2, q^2)$

Рассмотрим функцию $u = u(x, y)$, определённую на $\mathbb{R}^2$ (возможная

зависимость от дополнительных параметров, например t, z , далее считается фиксированной и опускается в записи). В настоящем разделе описывается алгоритм получения оригинала $u(x, y)$ по заданному *изображению* $u^F(p, q)$ двумерного преобразования Фурье, где параметр p соответствует координате x , а параметр q соответствует координате y .

Определения преобразований

Прямое двумерное преобразование Фурье:

$$u^F(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-i(px+qy)} dx dy. \quad (3.84)$$

Обратное преобразование:

$$u^{F^{-1}}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^F(p, q) e^{i(px+qy)} dp dq. \quad (3.85)$$

Рассматриваемый класс изображений

Во многих задачах математической физики и механики изображения по Фурье часто представляются линейными комбинациями слагаемых вида

$$u^F(p, q) = \sum_{m=1}^M P_m(p, q) \varphi_m(p^2, q^2), \quad (3.86)$$

где функции $\varphi_m(p^2, q^2)$ зависят от параметров преобразования только через квадраты p^2 и q^2 (то есть являются чётными по p и по q), а $P_m(p, q)$ – полиномы/мономы из набора $1, p, q, pq, ip, iq, ipq, \dots$

Ниже описан алгоритм обращения (2) для класса (3).

Редукция по чётности и определение базовых интегралов

Если $\varphi(p, q) = \varphi(p^2, q^2)$, то φ чётна по каждой переменной: $\varphi(-p, q) = \varphi(p, q)$ и $\varphi(p, -q) = \varphi(p, q)$. Это позволяет сводить интегралы по $\mathbb{R}$ к интегралам по полуоси $[0, \infty)$ и заменять комплексную экспоненту на синусы и косинусы. При этом имеют место одномерные тождества чётности.

Пусть Φ такова, что интегралы сходятся. Тогда для $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p^2) e^{ipx} dp = 2 \int_0^{\infty} \Phi(p^2) \cos(px) dp, \quad (3.87)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p\Phi(p^2)e^{ipx} dp = 2i \int_0^{\infty} p\Phi(p^2)\sin(px)dp, \quad (3.88)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ip\Phi(p^2)e^{ipx} dp = -2 \int_0^{\infty} p\Phi(p^2)\sin(px)dp. \quad (3.89)$$

Аналогичные формулы справедливы по переменной q (с заменой $p \rightarrow q$, $x \rightarrow y$).

Для базового чётного изображения $\varphi(p^2, q^2)$ введём оригинал

$$v(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p^2, q^2) e^{i(px+qy)} dp dq. \quad (3.90)$$

Используя свойства четности функции $\varphi(p^2, q^2)$ по p или по q , получаем формулу редукции:

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} e^{ipy} \int_0^{\infty} \varphi(p^2, q^2) \cos(qx) dq dp \quad (3.91)$$

Для нахождения оригиналов перемещений и напряжений удобно использовать следующие дифференциальные соответствия:

Пусть $v(x, y)$ достаточно гладка и убывает на бесконечности так, что допускаются интегрирование по частям и перенос производной под знак интеграла. Тогда выполняются тождества:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^F (p, q) = ipu^F(p, q), \quad (3.92)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^F (p, q) = iqu^F(p, q), \quad (3.93)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^F (p, q) = -(pq)u^F(p, q). \quad (3.94)$$

Используя эти тождества необходимо вычислить только базовые интегралы:

Вычисление базовых интегралов осуществляется по формуле (3.91) с последующей численной реализацией, тогда выражения для перемещений и напряжений будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
u(t, x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[H(t - \gamma z) \sum_{m=4}^7 (t - \gamma z)^m u_{1m}(x, y) + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=2}^3 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m u_{1m}(x, y) \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} H(t - \gamma z) \sum_{m=3}^7 (t - \gamma z)^m u_{2m}(x, y); \\
v(t, x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[H(t - \gamma z) \sum_{m=4}^7 (t - \gamma z)^m v_{1m}(x, y) + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m v_{2m}^F(x, y) + \right. \\
&\left. + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=4}^6 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m v_{3m}(x, y) \right]; \tag{3.95}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(t, x, y, z) &= -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(t - \gamma z) \sum_{m=3}^7 (t - \gamma z)^m w_{1m}(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(t - \gamma z) \sum_{m=3}^7 (t - \gamma z)^m w_{1m}(x, y) + \\
&+ H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m w_{2m}(x, y) + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=3}^7 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m w_{2m}(x, y) \\
\sigma_x(t, x, y, z) &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} H(t - \gamma z) \sum_{m=4}^7 (t - \gamma z)^m \sigma_{x1m}(x, y) + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m \sigma_{x2m}(x, y) + \\
&+ H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=4}^6 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m \sigma_{x3m}(x, y); \\
\sigma_y(t, q, p, z) &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} H(t - \gamma z) \sum_{m=4}^7 (t - \gamma z)^m \sigma_{y1m}(x, y) + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m \sigma_{y2m}(x, y) + \\
&+ H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=4}^6 \sigma_{y3m}(x, y); \tag{3.96}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z(t, x, y, z) &= H(t - \gamma z) \sum_{m=4}^7 (t - \gamma z)^m \sigma_{z1m}(x, y) + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m \sigma_{z1m}(x, y) + \\
&+ H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=4}^7 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m \sigma_{z1m}(x, y) \\
\tau_{xy}(t, x, y, z) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} H(t - \frac{z}{\gamma}) \sum_{m=4}^7 (t - \frac{z}{\gamma})^m \tau_{xy1m}(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[-H(t - \frac{z}{\gamma}) \sum_{m=4}^7 (t - \frac{z}{\gamma})^m \tau_{xy1m}(x, y) + \right. \\
&\left. + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m \tau_{xy2m}(x, y) + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=4}^6 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m \tau_{xy3m}(x, y) \right] \\
\tau_{yz}(t, x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[H(t - \frac{z}{\gamma}) \sum_{m=3}^7 (t - \frac{z}{\gamma})^m \tau_{yz1m}(x, y) + H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m \tau_{yz2m}(x, y) + \right. \\
&\left. + H\left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right) \sum_{m=3}^7 \left(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^m \tau_{yz3m}^F(x, y) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(t, x, y, z) = & \frac{\partial}{\partial x} H(t - \frac{z}{\gamma}) \sum_{m=3}^7 (t - \frac{z}{\gamma})^m \tau_{xz1m}(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} \left[H(t - z) \sum_{m=3}^7 (t - z)^m \tau_{xz2m}(x, y) + \right. \\ & \left. + H(t - \frac{z}{\sqrt{\beta}}) \sum_{m=3}^7 (t - \frac{z}{\sqrt{\beta}})^m \tau_{xz3m}(x, y) \right] \end{aligned}$$

В этих формулах базовые функции вычисляются с помощью интегралов:

$$u_{1m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty u_{1m}(q^2, p^2) \cos(qx) dq dp$$

$$u_{2m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty u_{2m}(q^2, p^2) \cos(qx) dq dp$$

$$v_{1m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty v_{1m}(q^2, p^2) \cos(qx) dq dp$$

$$w_{1m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty w_{1m}(q^2, p^2) \cos(qx) dq dp$$

$$\sigma_{z1m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \sigma_{z1m}(q^2, p^2) \cos(qx) dq dp$$

$$u_{1m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty u_{1m}(q^2, p^2) \cos(qx) dq dp$$

$$u_{2m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty u_{2m}(q^2, p^2) \cos(qx) dq dp$$

$$v_{1m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty v_{1m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$v_{2m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty v_{2m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$v_{3m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty v_{3m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$w_{1m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty w_{1m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$w_{2m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty w_{2m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$w_{3m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty w_{3m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\sigma_{x1m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \sigma_{x1m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\sigma_{x2m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \sigma_{x2m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\sigma_{x3m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \sigma_{x3m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\sigma_{y1m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \sigma_{y1m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\sigma_{y2m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \sigma_{y2m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\sigma_{y3m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \sigma_{y3m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\sigma_{z1m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \sigma_{z1m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\sigma_{z2m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \sigma_{z2m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\sigma_{z3m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \sigma_{z3m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\tau_{xy1m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \tau_{xy1m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\tau_{xy2m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \tau_{xy2m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\tau_{xy2m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \tau_{xy2m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\tau_{yz1m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \tau_{yz1m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\tau_{yz2m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \tau_{yz2m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\tau_{yz3m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \tau_{yz3m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\tau_{xz1m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \tau_{xz1m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\tau_{xz2m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \tau_{xz2m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

$$\tau_{xz2m}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{ipy} \int_0^\infty \tau_{xz2m}(q, p) \cos(qx) dq dp$$

Эти функции могут быть вычислены аналитически или численно.

Численный подход основан на вычислении интегралов по квадратурной

$$\text{схеме на } [0, p_{\max}] \times [0, q_{\max}]: v(x_i, y_j) \approx \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=0}^{N_p} e^{ipy} \sum_{\ell=0}^{N_q} w_k w_\ell \varphi(p_k^2, q_\ell^2) \cos(q_k x_i).$$

После построения базовых $v_m(x, y)$ искомая функция восстанавливается дифференцированием согласно выражениям (3.91) и (3.92) .

Численный подход

В общем случае интеграл (3.8) вычисляется численно по квадратурной

схеме на $[0, p_{\max}] \times [0, q_{\max}]$: $v(x_i, y_j) \approx \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{N_p} \sum_{\ell=0}^{N_q} w_k w_\ell \varphi(p_k^2, q_\ell^2) \cos(p_k x_i) \cos(q_\ell y_j)$.

После построения базовых $v_m(x, y)$ искомая функция $u(x, y)$ восстанавливается дифференцированием согласно предыдущему разделу.

Тогда оригиналы перемещений полупространства можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 u(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^F(t, q, p, z) e^{-i(qx+py)} dq dp = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipy} \int_0^{\infty} q u_1^F(t, q, p, z) \sin(qx) dq dp - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx} \int_0^{\infty} p u_2^F(t, q, p, z) \sin(py) dp dq \right\} \\
 v(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v^F(t, q, p, z) e^{-i(qx+py)} dq dp = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx} \int_0^{\infty} p v_2^F(t, q, p, z) \sin(py) dp dq \\
 w(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w^F(t, q, p, z) e^{-i(qx+py)} dq dp = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q p w_1^F(t, q^2, p^2, z) e^{-i(qx+py)} dq dp + \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipy} \int_0^{\infty} q^2 w_2^F(t, q^2, p^2, z) \cos(qx) dq dp \\
 \sigma_x(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x^F(t, q, p, z) e^{-i(qx+py)} dq dp = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [-q^2 \sigma_{1x}^F(q, p) + \sigma_{2x}^F(q, p)] e^{-i(qx+py)} dq dp = \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipy} \int_0^{\infty} [-q^2 \sigma_{1x}^F(q, p) + \sigma_{2x}^F(q, p)] \cos(qx) dq dp \\
 \sigma_y(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y^F(t, q, p, z) e^{-i(qx+py)} dq dp = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [-q^2 \sigma_{1y}^F(q, p) + \sigma_{2y}^F(q, p)] e^{-i(qx+py)} dq dp = \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipy} \int_0^{\infty} [-q^2 \sigma_{1y}^F(q, p) + \sigma_{2y}^F(q, p)] \cos(qx) dq dp
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z^F(t, q, p, z) e^{-i(qx+py)} dq dp = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{1z}^F(q, p) e^{-i(qx+py)} dq dp = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipy} \int_0^{\infty} \sigma_{1z}^F(q, p) \cos(qx) dq dp \\
\tau_{xy}(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy}^F(t, q, p, z) e^{-i(qx+py)} dq dp = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ q^2 \tau_{xy1}^{LF}(q, p) + qp \left[\tau_{xy2}^{LF}(q, p) - \tau_{xy1}^{LF}(q, p) \right] \right\} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(qx+py)} dq dp = \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipy} \int_0^{\infty} q^2 \tau_{xy1}^{LF}(q, p) \cos(qx) dq dp + \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} p e^{-ipy} \int_0^{\infty} q \left[\tau_{xy2}^{LF}(q, p) - \tau_{xy1}^{LF}(q, p) \right] \cos(qx) dq dp \\
\tau_{yz}(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{yz}^F(t, q, p, z) e^{-i(qx+py)} dq dp = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ip \tau_{yz1}^{LF}(q, p) e^{-i(qx+py)} dq dp = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx} \int_0^{\infty} p \tau_{yz1}^{LF}(q, p) \sin(px) dp dq \\
\tau_{xz}(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xz}^F(t, q, p, z) e^{-i(qx+py)} dq dp = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[iq \tau_{xz1}^{LF}(q, p) + ip \tau_{xz2}^{LF}(q, p) \right] e^{-i(qx+py)} dq dp = \\
&= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipy} \int_0^{\infty} q \tau_{xz1}^{LF}(q, p) \sin(px) dq dp - \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx} \int_0^{\infty} p \tau_{xz2}^{LF}(q, p) \sin(px) dp dq
\end{aligned}$$

Результаты расчетов кинематических и статических параметров полупространства представлены на рис 3.3-3.16

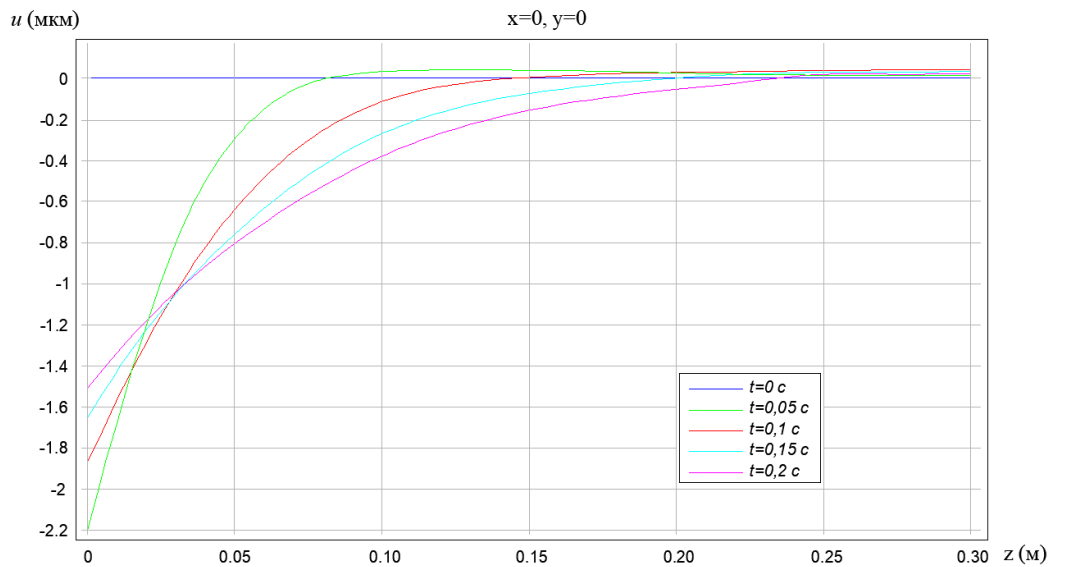


Рисунок 3.3 – Смещение u по глубине при различных временах

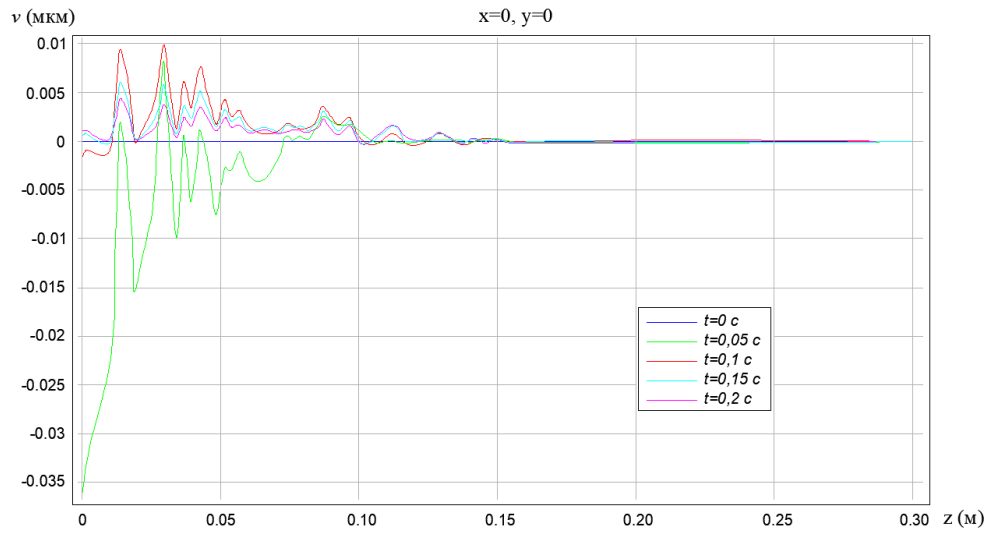


Рисунок 3.4 – Смещение v по глубине при различных временах

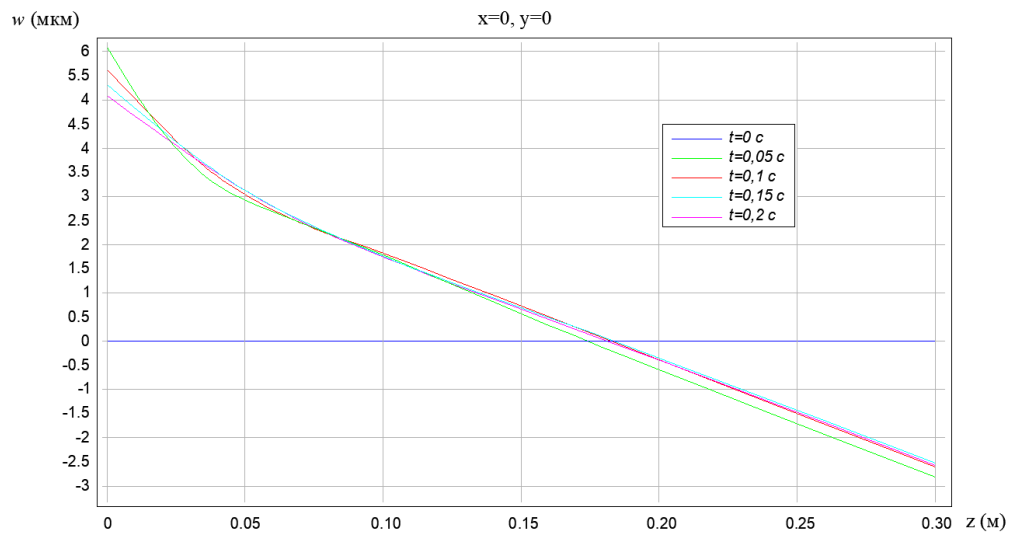


Рисунок 3.5 – Смещение w по глубине при различных временах

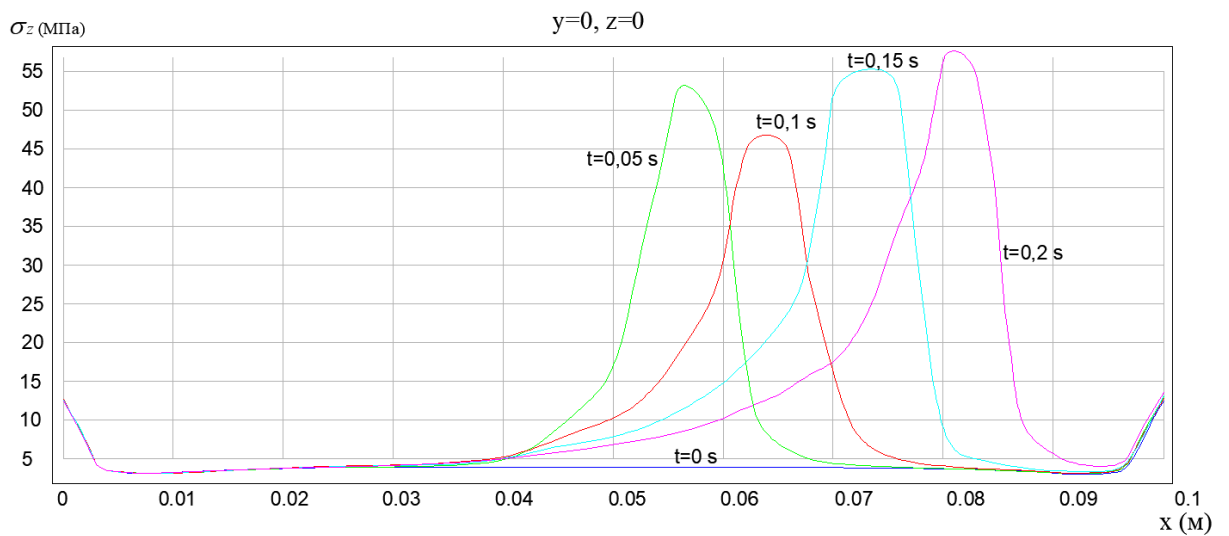


Рисунок 3.6 – Нормальное напряжение σ_z на глубине $z=0$ от при различных временах

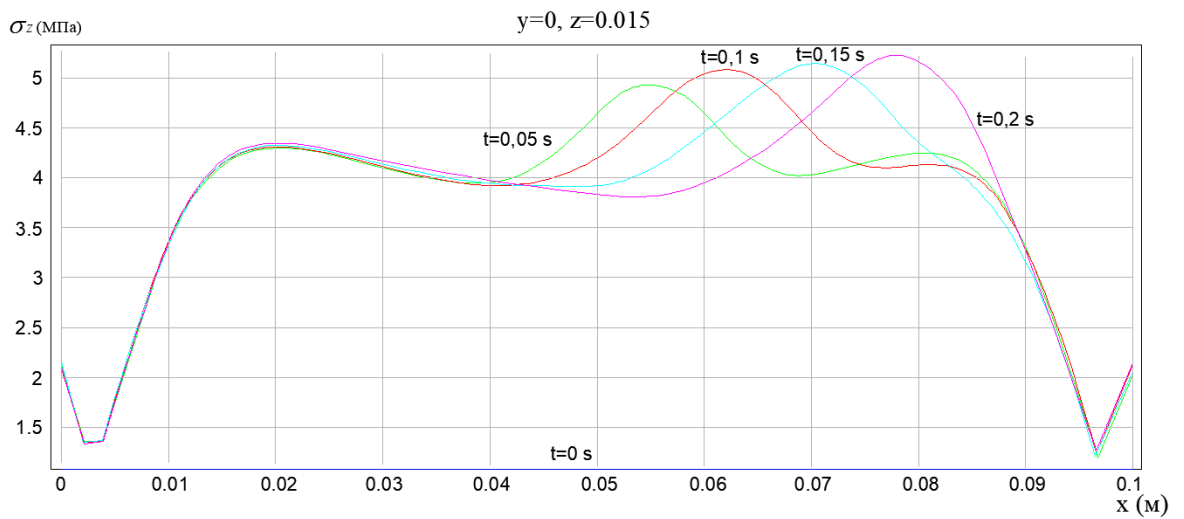


Рисунок 3.7 – Нормальное напряжение σ_z на глубине $z=0,015$ от при различных временах

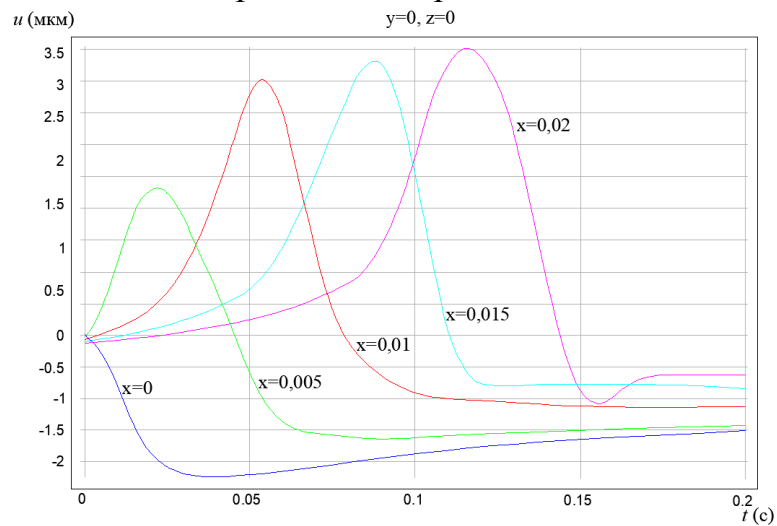


Рисунок 3.8 – Смещение u по времени глубине на поверхности

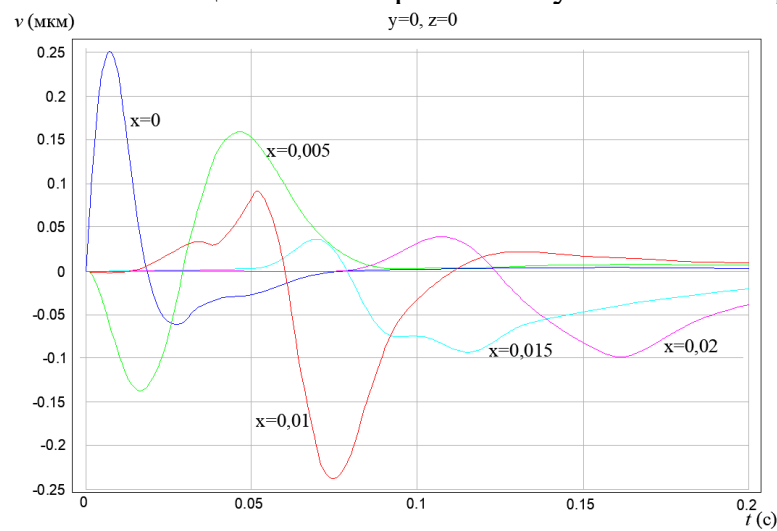


Рисунок 3.9 – Смещение v по времени глубине на поверхности

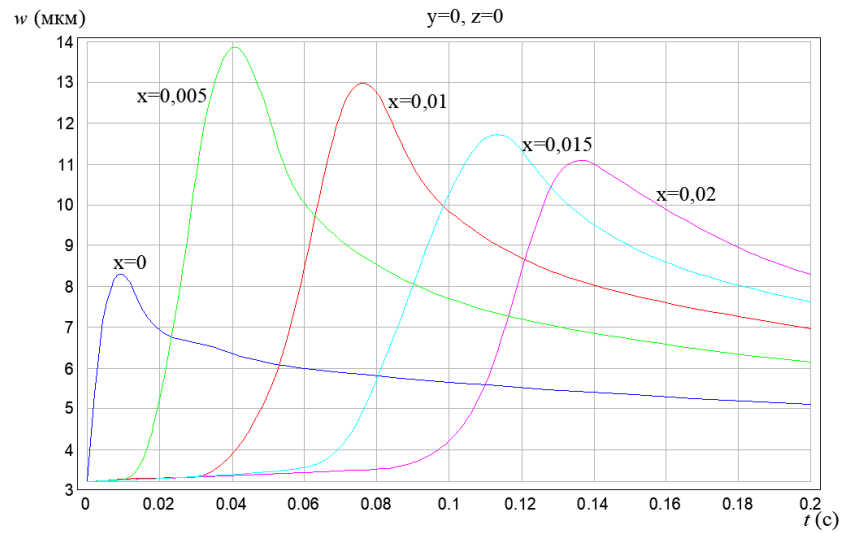


Рисунок 3.10 – Смещение w по времени глубине на поверхности

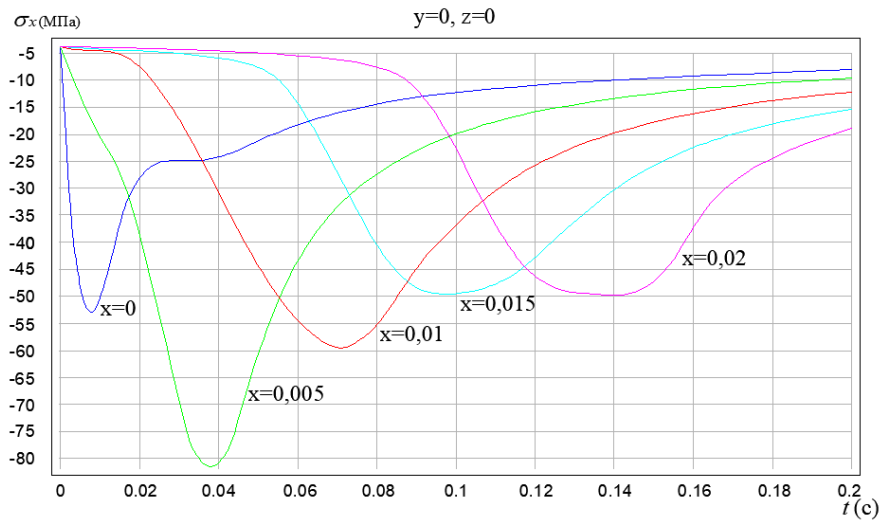


Рисунок 3.11 – Нормальное напряжение σ_x по времени глубине на поверхности

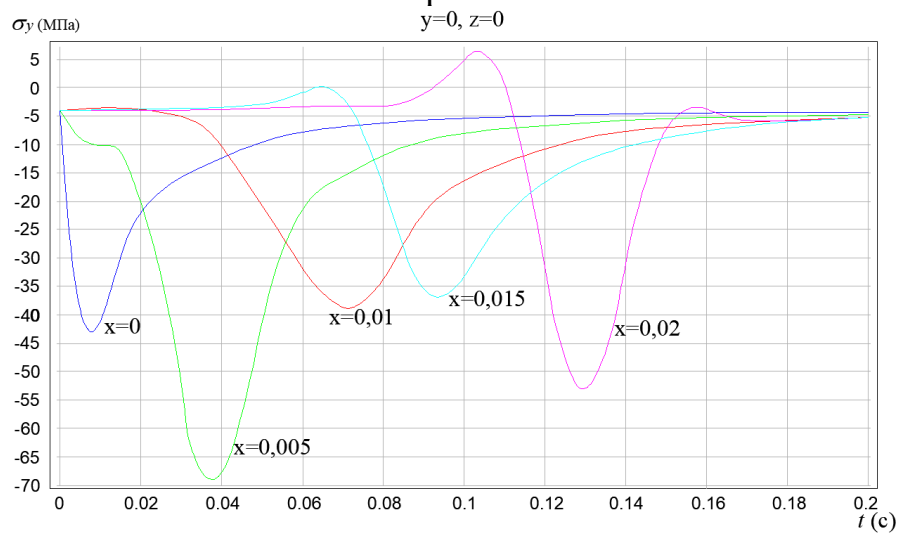


Рисунок 3.12 – Нормальное напряжение σ_y по времени глубине на поверхности

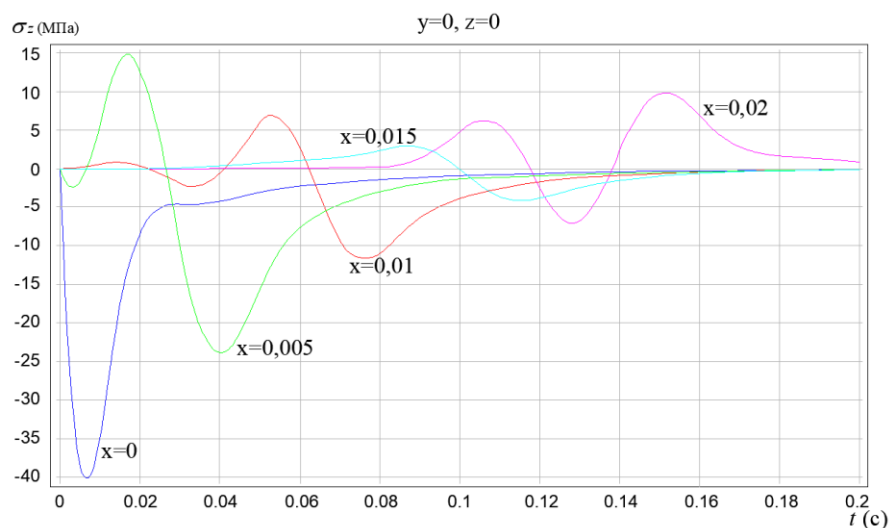


Рис 3.13 – Нормальное напряжение σ_z по времени глубине на поверхности

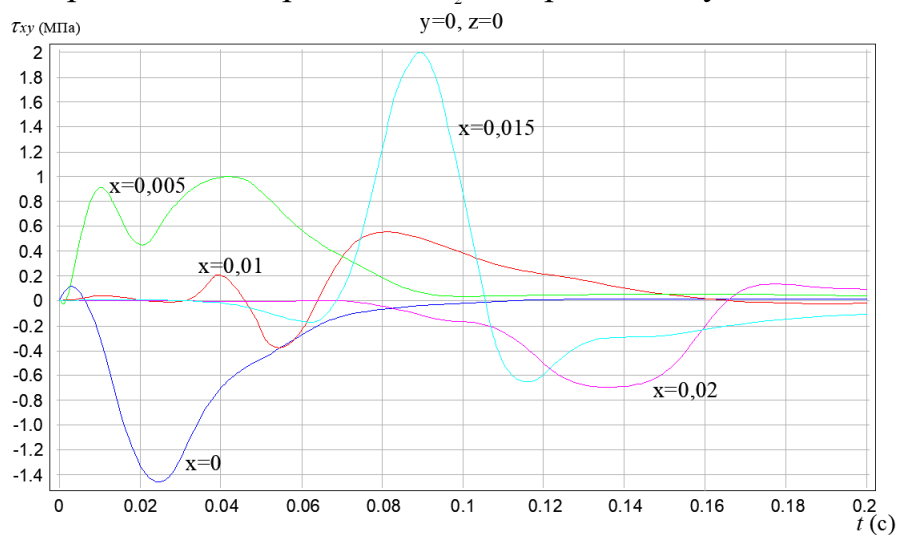


Рисунок 3.14 – Касательное напряжение τ_{xy} по времени глубине на поверхности

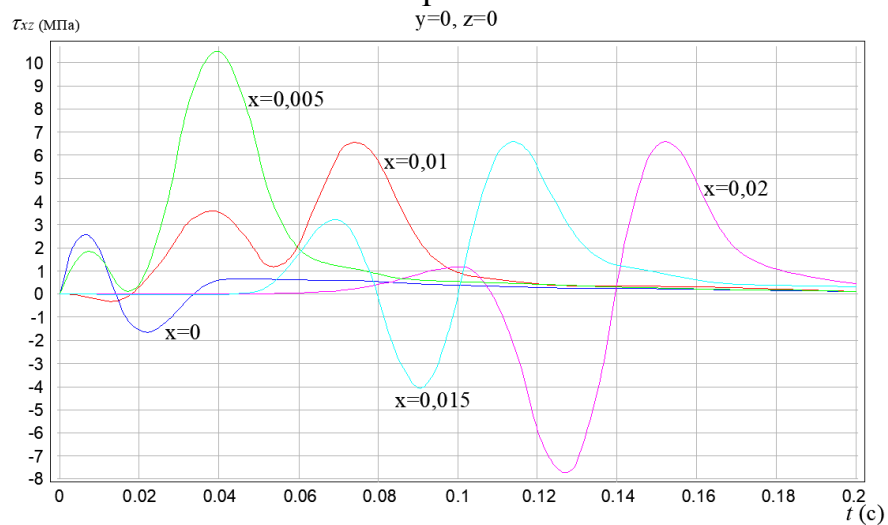


Рисунок 3.15 – Касательное напряжение τ_{yz} по времени глубине на поверхности

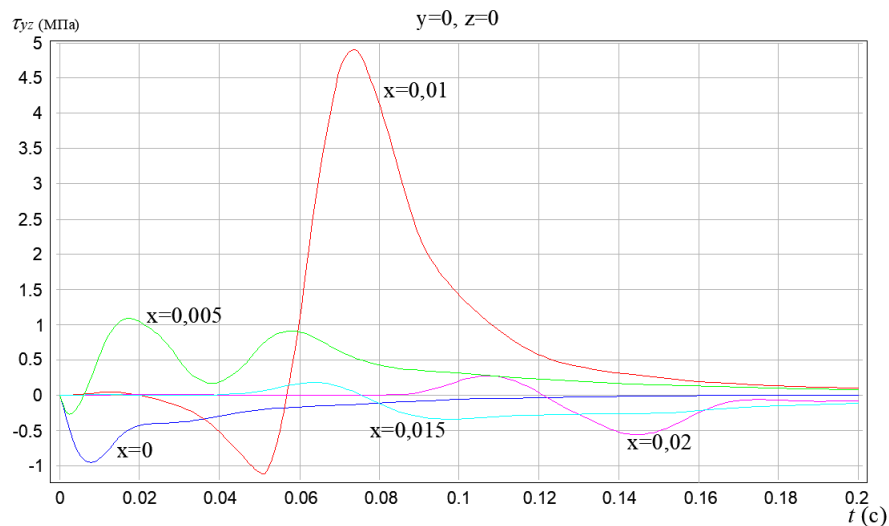


Рисунок 3.16 – Касательное напряжение τ_{xz} по времени глубине на поверхности

Выполненное в главе 3 исследование позволило установить основные закономерности динамического нагрева полупространства под воздействием подвижного лазерного источника и получить аналитическую основу для описания индуцированного температурного и термоупругого отклика среды. Показано, что при малых временах и высокоинтенсивном локальном нагреве учет конечной скорости распространения теплового возмущения приводит к особенностям температурного отклика, которые не отражаются в рамках классической модели Фурье. Это особенно существенно при анализе быстропротекающих процессов, характерных для формирования единичных треков при СЛП.

Полученные зависимости для температурного поля, перемещений и напряжений позволяют выявить ключевые механизмы формирования динамического напряжённо-деформированного состояния в окрестности траектории лазерного сканирования. Вместе с тем для практического анализа реального процесса СЛП необходимо учитывать дополнительные факторы, включая температурную зависимость свойств материала, фазовые переходы, пластическое течение и геометрию расплавленного бассейна. Поэтому на следующем этапе исследования выполняется численное

термомеханическое моделирование единичного трека в программном комплексе COMSOL Multiphysics с последующим сопоставлением расчётных результатов с экспериментальными данными.

Глава 4. СОПОСТАВЛЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

Результаты аналитического исследования, представленные в главе 3, показали, что движение лазерного источника формирует выраженно нестационарное температурное поле и связанное с ним динамическое напряжённо-деформированное состояние в приповерхностной области материала. Однако при описании реального процесса селективного лазерного плавления этих зависимостей недостаточно, поскольку фактическое формирование единичного трека сопровождается плавлением и кристаллизацией материала, изменением его теплофизических и механических свойств с температурой, а также развитием пластических деформаций.

В связи с этим в настоящей главе выполняется переход от аналитической постановки к трёхмерному численному термомеханическому моделированию единичного трека в сплаве AlSi10Mg. Такой подход позволяет не только проследить эволюцию температурного поля и напряжений во времени, но и установить связь между динамикой теплового воздействия, локализацией пластических деформаций и условиями образования трещин. Тем самым обеспечивается непосредственное сопоставление теоретических положений предыдущих глав с экспериментально наблюдаемым поведением единичных треков.

4.1. Физическая постановка задачи

Процесс изготовления металлических деталей с использованием технологий металлической 3D-печати, в частности метода СЛП, характеризуется сложным взаимодействием температурных полей и полей напряжений в материале. В этом процессе лазерный луч перемещается по поверхности слоя металлического порошка, подводя значительную локальную тепловую энергию, что приводит к локальному плавлению

порошка и образованию ванны расплава. После прохождения лазерного луча ванна расплава быстро остывает, материал кристаллизуется и дает усадку, вызывая высокие температурные градиенты и остаточные термические напряжения. Эти напряжения в сочетании с пластической деформацией являются основной причиной возникновения таких дефектов, как горячие или холодные трещины, что особенно характерно для алюминиевых сплавов, обладающих высоким коэффициентом термического расширения.

В данной диссертации разработана трехмерная термомеханическая модель на уровне единичного трека для исследования температурного поля и термических напряжений, возникающих в процессе обработки слоя порошка AlSi10Mg по технологии СЛП. Рассматриваемым объектом является слой порошка алюминиевого сплава AlSi10Mg – материала, широко используемого в СЛП благодаря хорошим литейным свойствам, высокой теплопроводности, низкой плотности и возможности формообразования сложных геометрических деталей. Этот сплав относится к группе эвтектических сплавов системы Al-Si и имеет температуру плавления в диапазоне $570\text{--}600^\circ\text{C}$, однако в процессе СЛП он подвергается локальному нагреву до 2000°C в зоне расплава. На основе данной модели проводятся исследования на микроуровне. Модель учитывает фазовые переходы при плавлении и кристаллизации, температурную зависимость свойств материала, а также его упругопластическое поведение [128,129]. Исследование проводится для случая сканирования одного трека с целью изучения эволюции температурного поля и генерируемых термических напряжений. В ходе работы определяются локализации с высокими остаточными напряжениями.

Расчетная область моделируется как изотропное упругопластическое полупространство, в котором подвижный источник тепла соответствует лазерному лучу, сканирующему поверхность материала. Процесс нагрева

описывается источником тепла с гауссовым распределением плотности мощности, движущимся с постоянной скоростью вдоль оси x .

Основной целью моделирования является определение:

- Температурного поля $T(x, y, z, t)$ в материале;
- Поля напряжений $\sigma_{ij}(x, y, z, t)$ и полных деформаций ε_{ij} ;
- Распределения эквивалентной пластической деформации ε_{eq} ;
- Условий образования трещин на основе критерия критической пластической деформации.

Модель построена на основе связанного термомеханического подхода. При этом пренебрегается гидродинамикой в ванне расплава (общепринятое допущение в моделях прогнозирования остаточных напряжений, применяемое для снижения вычислительных затрат). Данное допущение позволяет сосредоточиться на анализе термических напряжений и пластических деформаций - факторов, непосредственно определяющих качество деталей, производимых методом СЛП.

4.1.1. Схема расчетной области

Модель разработана для анализа эволюции температурного поля и возникающих термических напряжений на базовом уровне – в масштабе единичного трека. На Рис 4.1 представлена трехмерная математическая модель расчетной области, заданная в виде прямоугольного параллелепипеда, который представляет собой слой металлического порошка $AlSi10Mg$ и подлежащий слой закристаллизовавшегося материала. Размеры области выбраны достаточно большими с целью исключения влияния искусственных границ на окрестность ванны расплава. Выбрана декартова система координат с началом в точке старта сканирования ($x=0$, $y=0$, $z=0$), при этом ось Ox совпадает с направлением перемещения лазерного луча (движущегося с постоянной скоростью v), ось y перпендикулярна направлению сканирования, а ось z направлена вверх, к свободной поверхности.

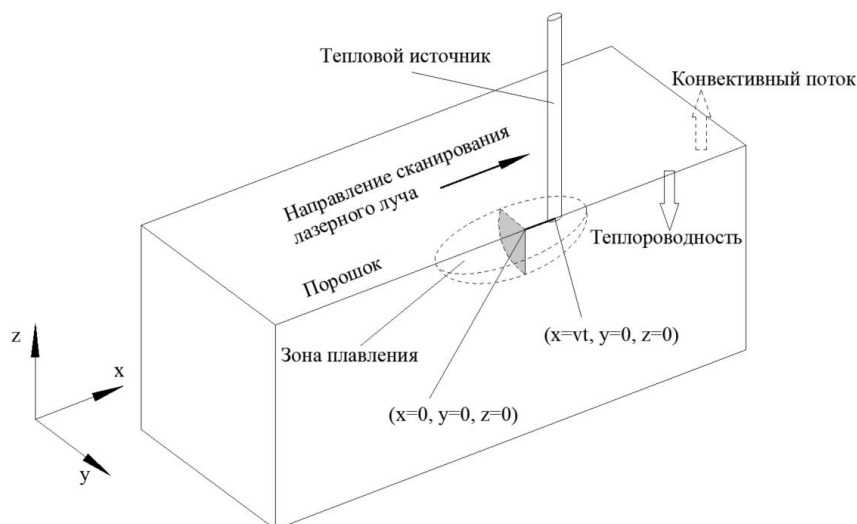


Рисунок 4.1 – Схема расчетной области термомеханической модели в процессе селективного лазерного плавления.

Основные элементы, наглядно представленные на схеме:

Источник тепла: лазерный луч, сфокусированный в точке $(x=vt, y=0, z=0)$, смоделированный в виде поверхностного источника с гауссовым распределением мощности.

Направление сканирования: стрелка, указывающая равномерное прямолинейное движение луча вдоль оси Ox .

Слой порошка: верхняя область расчетного массива, подвергающаяся непосредственному воздействию лазера.

Ванна расплава: неглубокая область в форме эллиптического конуса, в которой материал переходит в жидкое состояние.

Теплообмен: стрелки, указывающие направление конвективного теплоотвода в окружающую среду с открытой поверхности и направление распространения тепла за счет теплопроводности вглубь материала.

В модели принимается допущение о симметрии относительно плоскости $y=0$ с целью двукратного снижения вычислительных затрат без потери точности результатов. Нижняя граница (дно) расчетной области жестко закреплена ($u=0$) для имитации жесткой связи с платформой

построения. На свободной поверхности ($z=0$) одновременно задаются гауссов источник тепла и граничные условия Неймана, учитывающие теплоотвод за счет конвекции и излучения.

Данная схема точно отражает физическую концепцию термоупругопластической модели: пренебрежение гидродинамикой в ванне расплава для снижения ресурсоемкости вычислений при одновременной концентрации на факторах, определяющих образование дефектов – температурных градиентах, термических напряжениях и пластических деформациях. Выбор размеров расчетной области гарантирует, что на удаленных границах температурные градиенты и напряжения стремятся к нулю, что позволяет избежать искусственного отражения тепловых волн и полей напряжений. Эта схема служит наглядной основой для постановки всех определяющих уравнений (уравнения теплопроводности Фурье – Кирхгофа, уравнений равновесия, критерия текучести фон Мизеса) и является базой для построения адаптивной конечно-элементной сетки в программном комплексе COMSOL Multiphysics.

Рисунок четко иллюстрирует пространственную взаимосвязь между подвижным источником тепла, локальной ванной расплава и механизмами теплопереноса, что способствует пониманию процессов формирования остаточных напряжений и трещин в алюминиевом сплаве AlSi10Mg. Именно эта базовая схема используется на протяжении всей главы для физической интерпретации результатов моделирования.

4.2. Основные уравнения для исследования термических напряжений

Температурные напряжения определяются сложной взаимосвязью между высокими температурными градиентами в процессе быстрого плавления и затвердевания, физическими свойствами материала (такими как коэффициент теплового расширения и модуль упругости), а также механическими ограничениями со стороны окружающей структуры. Эти

факторы не только влияют на геометрическую точность изделия, но и могут вызывать такие дефекты, как трещины или коробление, что ограничивает потенциал коммерциализации технологии СЛП.

Базовое уравнение для расчета термических напряжений основывается на теории линейной упругости в предположении, что напряжения возникают вследствие стесненного теплового расширения. В частности, термическое напряжение (σ_{th}) может быть представлено в виде:

$$\sigma_{th} = E\alpha\Delta T, \quad (4.1)$$

где

E – модуль Юнга материала, характеризующий его упругую жесткость, обычно выражаемый в паскалях (Па);

α – температурный коэффициент линейного расширения, отражающий степень изменения размеров материала в зависимости от температуры, с размерностью 1/К;

ΔT – перепад температур, выраженный в кельвинах (К), представляющий собой изменение температуры от точки плавления до температуры окружающей среды или платформы построения.

Данное уравнение широко применяется в численных исследованиях для прогнозирования термомеханического поведения при СЛП. Например, в работе Li и др. авторы использовали метод конечных элементов для моделирования теплового поведения и остаточных напряжений в процессе печати сплава AlSi10Mg. Результаты показали, что высокие температурные градиенты (скорость охлаждения до 10^6 К/с) приводят к значительным растягивающим напряжениям в области единичного трека, которые могут превышать предел текучести материала, вызывая пластическую деформацию. Это исследование подчеркивает роль уравнения для σ_{th} в интеграции мультифизических явлений, включая теплопередачу, затвердевание и механику сплошных сред [130].

Более того, термические напряжения тесно связаны с тепловой

деформацией (ε_{th}), которая определяется более простым соотношением:

$$\varepsilon_{th} = \alpha \Delta T \quad (4.2)$$

Эта деформация представляет собой свободное, нестесненное изменение размеров материала под воздействием тепла. Однако в реальном процессе СЛП материал ограничен платформой построения или ранее затвердевшими слоями, в результате чего тепловая деформация частично или полностью стесняется. Согласно закону Гука в теории упругости, это ограничение преобразует деформацию в напряжение, а именно в сжимающие напряжения в охлаждаемых зонах и растягивающие – в нагреваемых. Parry и соавт. провели глубокий анализ влияния этого механического стеснения с помощью термомеханического моделирования, показав, что стратегия лазерного сканирования может изменить распределение ограничений, тем самым снижая остаточные напряжения до 30% на границе раздела между единичным треком и подложкой. Авторы подчеркивают, что на уровне единичного трека взаимодействие между температурным градиентом и локальным стеснением является основным источником накопленных остаточных напряжений, особенно в алюминиевых сплавах, таких как AlSi10Mg, где термическая чувствительность выше [63].

В процессе СЛП локальный нагрев слоя порошка происходит за счет энергии лазерного луча. Часть тепловой энергии, поглощенной слоем порошка, отводится в окружающую среду посредством теплового излучения и конвекции с верхней поверхности, а также за счет теплопроводности в остальную часть массива материала. В результате в расчетной области формируется неоднородное температурное поле.

Процесс теплопередачи описывается нестационарным уравнением теплопроводности:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla (k \nabla T) + Q(x, y, z, t), \quad (4.3)$$

где

T – температура, К;

ρ – плотность, кг/м³;

C_p – удельная теплоемкость, Дж/(кгК);

K – коэффициент теплопроводности, Вт/(мК);

Q – объемная (или поверхностная) плотность мощности внутреннего источника тепла, Вт/м³.

Уравнение решается в неподвижной системе координат, при этом подвижный источник тепла моделируется как функция времени.

4.2.2. Модель лазерного источника тепла

Для задания начальных условий в модели предполагается, что начальная температура всей области материала равна комнатной температуре ($T_m = 293K$).

Тепловой поток от лазерного луча с гауссовым распределением мощности вводится в модель через граничные условия, которые описываются следующим образом:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = q - q_{conv} - q_{rad}, \quad (4.4)$$

где

q – плотность теплового потока лазерного излучения;

q_{conv} и q_{rad} – тепловые потери за счет конвекции и теплового излучения соответственно.

$$q(x, z, t) = \frac{2AP}{\pi r^2} \exp\left(-\frac{2((x-vt)^2 + y^2)}{r^2}\right) \quad (4.5)$$

$$q_{conv} = h(T - T_{ref})$$

$$q_{rad} = \varepsilon' \sigma' (T^4 - T_{ref}^4),$$

где

P – мощность лазера, Вт;

A – коэффициент поглощения излучения материалом;

h – коэффициент теплоотдачи (конвективного теплообмена), Вт/(м²·К);
 r – эффективный радиус лазерного луча (расстояние от центра, на котором интенсивность падает до $1/e^2$), м;
 v – скорость сканирования лазера, м/с.
 ε – степень черноты поверхности (коэффициент теплового излучения);
 σ – постоянная Стефана - Больцмана.

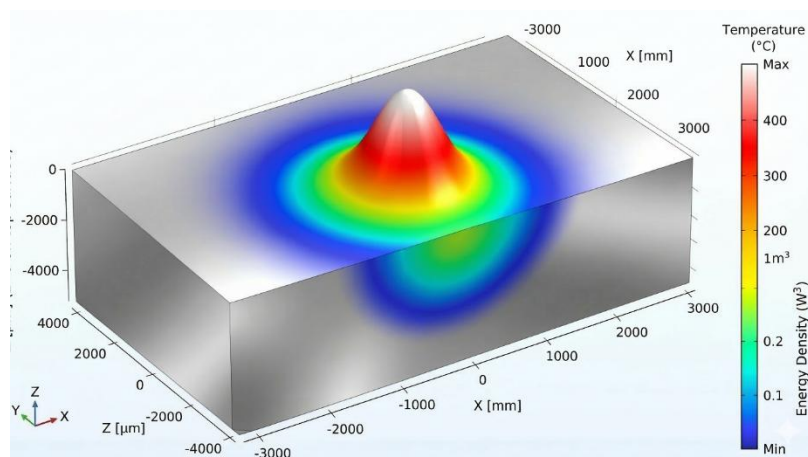


Рисунок 4.2 – Распределение энергии лазерного источника тепла по закону Гаусса

Источник прикладывается к поверхности в виде граничного условия Неймана. Гауссова модель адекватно отражает характеристики высокой концентрации энергии в зоне диаметром 50-100 мкм, типичной для волоконных лазеров, применяемых в СЛП.

Модель гауссова источника тепла позволяет с высокой точностью описать концентрацию энергии в локальной микрообласти на поверхности материала, что корректно отражает физическую сущность процесса лазерного нагрева.

Движение источника тепла: В процессе моделирования предполагается, что лазерный источник тепла перемещается по прямолинейной траектории с постоянной скоростью v . Положение центра луча в момент времени t определяется выражением: $x = vt$; $y = 0$; $z = 0$

Данное перемещение обуславливает:

- Формирование локальной ванны расплава со сверхвысокими температурными градиентами;
- Возникновение высоких термических напряжений на границе ванны расплава;
- Интенсивное развитие термических напряжений и пластических деформаций.

Эти факторы являются основной причиной образования трещин в случае, если эквивалентная пластическая деформация ε_{eq} превышает критическое значение.

Температурный градиент выступает основным механизмом, приводящим к возникновению термических напряжений в процессе СЛП. Следовательно, для обеспечения достоверности тепловой модели результаты моделирования сопоставляются с экспериментальными данными [131].

Высокие температурные градиенты, индуцированные гауссовым источником, вызывают термические напряжения по механизму неравномерной усадки. В сплаве AlSi10Mg высокий коэффициент теплового расширения в сочетании с резким снижением предела текучести при повышении температуры приводит к локальным пластическим деформациям. Если $\varepsilon_{eq} \geq \varepsilon_{crit}$, зарождение трещины происходит по вязкому механизму.

Таким образом, точное описание геометрии расчетной области и математической модели лазерного источника тепла является критически важным этапом для прогнозирования образования трещин в процессе лазерного аддитивного производства. Предложенная модель позволяет строить прогностические карты трещинообразования без проведения полномасштабных натурных экспериментов, что существенно снижает временные и материальные затраты.

4.3. Уравнения механического равновесия

Поле напряжений определяется из уравнения равновесия сил:

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0, \quad (4.6)$$

где

σ – тензор напряжений;

f – вектор объемных сил.

Полный тензор напряжений определяется законом Гука:

$$\sigma = C(\varepsilon - \varepsilon_{th} - \varepsilon_{pl}), \quad (4.7)$$

где

ε – тензор полных деформаций;

ε_{th} – тензор тепловых деформаций;

ε_{pl} – тензор пластических деформаций;

C – тензор упругих постоянных (зависящий от температуры).

Тепловая деформация вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_{th} = \alpha(T - T_0), \quad (4.8)$$

где

α – температурный коэффициент линейного расширения;

T_0 – начальная температура (293 K);

Пластическая деформация описывается с использованием теории пластического течения Прандтля - Рейсса в сочетании с критерием текучести фон Мизеса (Хубера - Мизеса - Генки).

Критерий текучести фон Мизеса записывается в виде:

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_y(T) = 0, \quad (4.9)$$

где σ_{eq} – зависящий от температуры предел текучести, а эквивалентное напряжение по фон Мизесу σ_{eq} определяется как:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} s : s} \leq \sigma_y(T), \quad (4.10)$$

где s – девиатор тензора напряжений.

Совместное использование данной модели и критерия фон Мизеса позволяет с высокой точностью описать процесс накопления необратимых пластических деформаций в переходной зоне между ванной расплава и твердым материалом – типичной зоне зарождения трещин в сплаве AlSi10Mg.

4.4. Начальные и граничные условия

Начальные условия в момент времени $t=0$:

$$T(x, y, z, 0) = T_0 = 293K, \sigma(x, y, z, 0) = 0, \varepsilon(x, y, z, 0) = 0$$

Данные условия соответствуют начальному состоянию системы до начала лазерного сканирования: вся расчетная область находится при комнатной температуре, механические напряжения и пластические деформации отсутствуют.

Тепловое граничное условие на свободной поверхности ($z=0$) описывается уравнением конвективного теплообмена (граничное условие Ньютона - Рихмана):

$$-k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = h(T - T_m), \quad (4.11)$$

где

h – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²К);

T_m – температура окружающей среды (обычно 293 К).

Коэффициент теплоотдачи h принимается в диапазоне 10-20 Вт/(м²К), что соответствует естественной конвекции в среде газообразного аргона.

Для режимов с высокой мощностью теплоотвод за счет излучения дополнительно учитывается по закону Стефана - Больцмана:

$$-k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = h(T - T_m) + \varepsilon \sigma_{SB} (T^4 - T_m^4), \quad (4.12)$$

где

$\varepsilon \approx 0,3 \div 0,4$ – степень черноты (коэффициент теплового излучения) поверхности алюминия;

σ_{SB} – постоянная Стефана – Больцмана.

Остальные свободные поверхности считаются теплоизолированными либо подверженными слабой конвекции с целью имитации реальных условий теплообмена внутри закрытой аргоновой камеры.

Механические граничные условия: нижняя граница (дно) расчетной области жестко закреплена для имитации жесткой связи между слоем порошка и платформой построения (подложкой).

Вышеуказанные начальные и граничные условия гарантируют, что модель корректно отражает начальное состояние и реальные процессы термомеханического взаимодействия при СЛП, исключая при этом искусственное влияние удаленных границ на локальную ванну расплава.

4.5. Температурно-зависимые свойства материала

Все эксперименты проводились с использованием алюминиевого порошка марки АСП-45 (AlSi10Mg) (согласно ТУ 1791-011-49421776-2016), произведенного ОК РУСАЛ (Москва, Россия) и полученного методом электродной индукционной плавки с газовой атомизацией (Electrode Induction Gas Atomization - EIGA). Согласно технической документации производителя, номинальный размер частиц варьируется от 20 μm до 63 μm , при этом средний размер (d_{50}) составляет около 35 мкм. Химический состав исходного материала представлен в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Химический состав исходного порошка сплава AlSi10Mg

Марка сплава	Содержание элементов, %							
	Al	Si	Mg	Fe	Ti	Cu	Mn	O
AlSi10Mg	87,5–89,7	9–11	0,2–0,45	≤0,35	≤0,15	≤0,05	≤0,45	≤0,08

Свойства материала существенно зависят от температуры, что требует применения линейной или сплайн-интерполяции при численном моделировании. Использование температурно-зависимых свойств является определяющим фактором точности термомеханической модели, поскольку в процессе СЛП температура изменяется от 293 К до более чем 2000°С в ванне расплава с последующим быстрым охлаждением до комнатной температуры. Без учета этой зависимости модель даст серьезные

погрешности в оценке температурных градиентов, остаточных напряжений и пластических деформаций.

Таблица 4.2 – Теплофизические свойства сплава AlSi10Mg в зависимости от температуры

Температура (°C)	Плотность ρ (кг/м ³)	Теплопроводность k (Вт/(мК))	Теплоемкость C_p (Дж/(кгК))
20	2670	150	900
100	2660	155	950
200	2650	160	1000
300	2640	165	1050
400	2630	170	1100
500	2620	175	1150
600	2600	180	1200

При повышении температуры модуль упругости E снижается примерно на 57% (с 70 ГПа до 30 ГПа), предел текучести σ_y снижается примерно на 75% (с 240 МПа до 60 МПа), в то время как коэффициент теплового расширения α возрастает примерно на 29% (с $21 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ до $27 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$). Эти изменения приводят к значительному росту пластических деформаций в окрестности ванны расплава и являются основной причиной возникновения высоких остаточных напряжений и образования трещин.

В термоупругопластической модели данные свойства аппроксимируются с помощью сплайн-интерполяции для обеспечения непрерывности и точности вычислений в любой температурной точке. В частности, резкое падение σ_y в диапазоне 400-600°C приводит к быстрому локальному накоплению пластической деформации, что совпадает с зонами зарождения трещин.

Таблица 4.3 – Механические свойства сплава AlSi10Mg в зависимости от температуры

Температура (К)	Коэффициент теплового расширения $\alpha \cdot 10^{-6} \text{ (1/K)}$	Модуль Юнга E (ГПа)	Предел текучести σ_y (МПа)	Касательный модуль пластичности E_T (МПа)
293	21	70-75	240-270	~2500-3200
373	21.5	~ 68	230-250	~ 1500-2000

473	22.5	~ 60	180-210	~ 800-1000
573	23.2	~ 50	100-120	~ 200-400
673	24	~ 30-40	30-50	<100

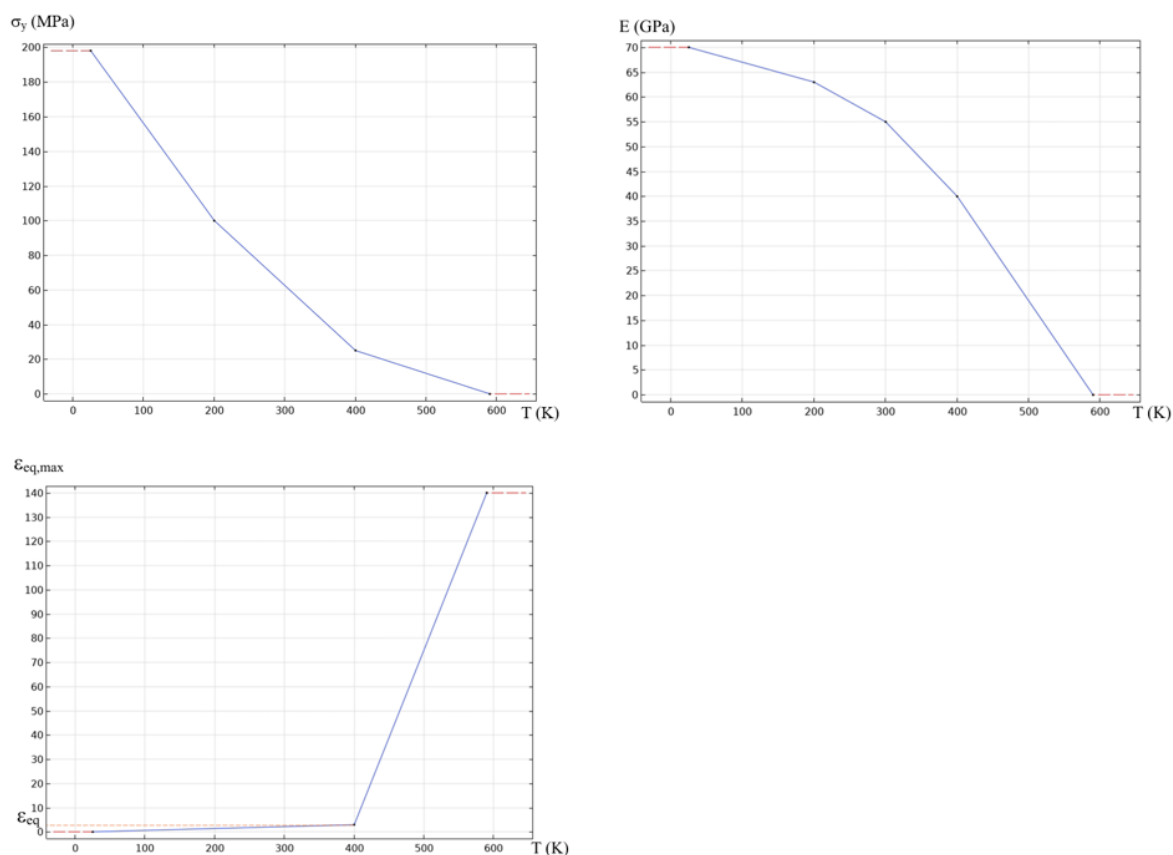


Рисунок 4.3 – Графики температурной зависимости теплофизических и механических свойств материала.

Использование температурно-зависимых свойств в модели обеспечивает высокую достоверность результатов моделирования: при проверке сеточной сходимости погрешность вычисления температуры составляет менее 2%, а напряжений - менее 5%. В случае применения постоянных свойств (например, соответствующих значениям при комнатной температуре) погрешность модели в оценке остаточных напряжений достигала бы 30-40%, что сделало бы невозможным точное прогнозирование карты трещинообразования. Таким образом, представленные таблицы и графики являются неотъемлемой фундаментальной базой для проведения полного термомеханического

анализа на уровне единичного трека и служат основой для калибровки параметров модели в последующих разделах.

4.6. Критерии образования трещин

Трещинообразование является одним из основных дефектов деталей, изготавливаемых методом СЛП, и возникает в случаях, когда остаточные напряжения превышают допустимые пределы прочности материала. Уровень остаточных напряжений зависит от мощности лазера, скорости сканирования, времени взаимодействия, стратегии сканирования и температуры подогрева платформы построения.

В рамках модели вязкого разрушения материала предполагается, что образование трещины происходит при достижении эквивалентной пластической деформацией некоторого критического значения. Данный процесс описывается деформационным критерием разрушения:

$$\varepsilon_{eq} \geq \varepsilon_{crit},$$

где

ε_{eq} – эквивалентная пластическая деформация;

ε_{crit} – критическое значение эквивалентной пластической деформации.

Значение ε_{crit} не является априорно известным параметром материала и подлежит определению в процессе калибровки модели на основе экспериментальных данных. В данном исследовании величина ε_{crit} определяется путем сопоставления результатов численного моделирования с экспериментальными данными о появлении трещин.

Процедура определения включает три основных этапа:

- Сбор экспериментальных данных;
- Проведение термомеханического моделирования для различных технологических режимов;
- Калибровку параметра ε_{crit} таким образом, чтобы модель адекватно воспроизводила экспериментальную карту трещинообразования.

– Данный подход в научной практике принято называть методом идентификации параметров.

4.7. Калибровка параметров модели и экспериментальные данные

4.7.1. Экспериментальные данные

Экспериментальные образцы единичных треков были изготовлены на установке СЛП AddSol D50 при различных технологических режимах в широком диапазоне варьирования параметров: мощность лазера $P=40-400$ Вт и скорость сканирования $v=100-1980$ мм/с. Всего было исследовано 99 режимов для каждой фракции порошка сплава AlSi10Mg (от P0 до P5). После синтеза все одиночные треки подвергались детальному анализу с использованием оптического микроскопа Saike Digital SK2700HDMI-AF и РЭМ для выявления наличия, определения мест зарождения и изучения морфологии трещин. Результаты исследований представлены в виде технологических карт (карт режимов) в системе координат (P, v) , на которых четко дифференцированы экспериментальные точки «с трещинами» и «без трещин».

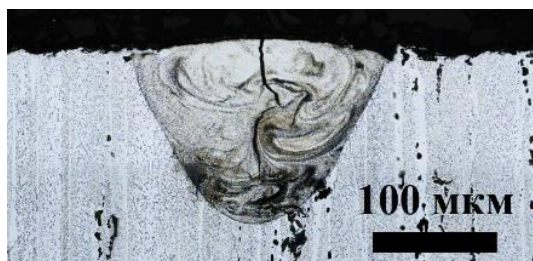


Рисунок 4.4 - РЭМ -изображение типичной трещины

На РЭМ-изображении (Рис 4.4) четко зафиксирована типичная трещина, образующаяся в зоне ванны расплава сплава AlSi10Mg. Трещина имеет извилистую форму и зарождается непосредственно на границе ванны расплава - в области с максимальным температурным градиентом. Траектория трещины развивается вглубь, ярко демонстрируя вихревую структуру, характерную для процесса быстрой кристаллизации. Направление распространения трещины перпендикулярно вектору максимального температурного градиента, что полностью совпадает с зоной локализации максимальных эквивалентных пластических деформаций.

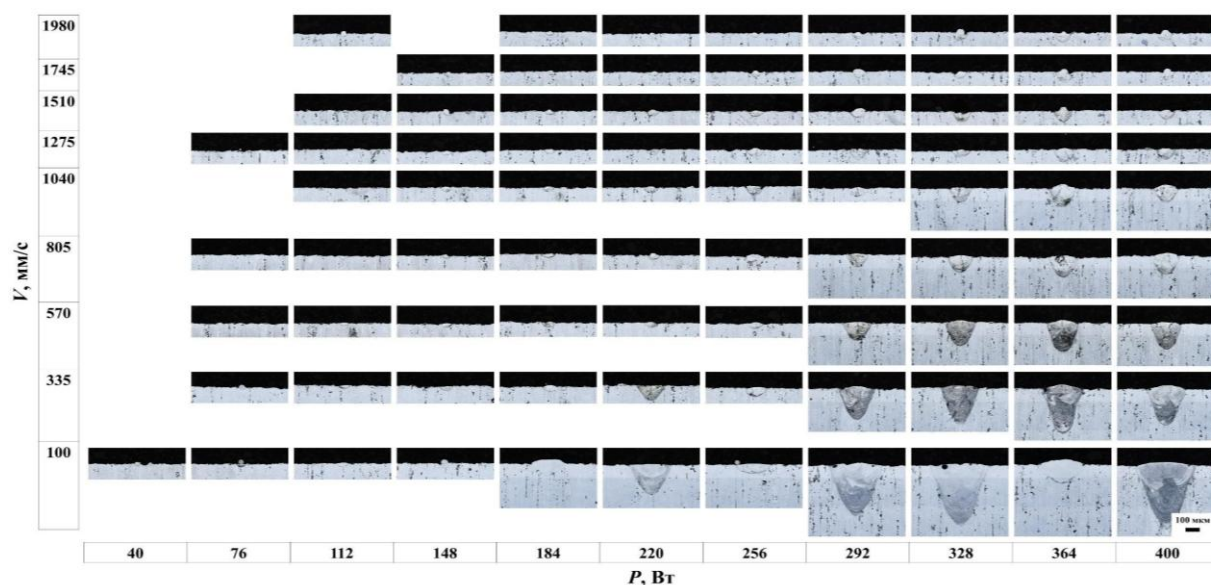


Рисунок 4.5 - Изображения поперечных сечений одиночных треков, соответствующие различным режимам сканирования по мощности и скорости.

На Рис 4.5 представлены микрофотографии поперечных сечений одиночных треков. Данные изображения позволяют с высокой точностью измерить глубину и ширину ванны расплава, а также идентифицировать зоны неполного проплавления (сплавления) и области глубокого (кинжального) проплавления (режим «keyhole»). Результаты металлографического контроля представлены в виде экспериментальных точек на технологической карте в координатах «мощность — скорость», при этом режимы «с трещинами» и «без трещин» наглядно дифференцированы на Рис 4.6.

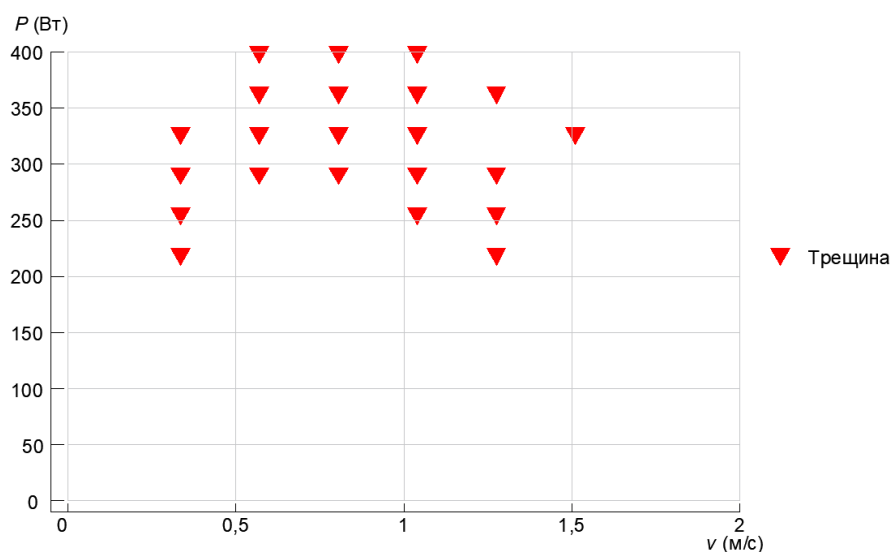


Рисунок 4.6 – Карта экспериментальных точек трещинообразования.

На Рис 4.6 визуализированы все экспериментальные данные: красные треугольники соответствуют режимам «с трещинами». Данная технологическая карта служит экспериментальной базой для калибровки критического значения пластической деформации ε_{crit} и последующего построения границы прогнозируемого трещинообразования.

4.7.2. Определение максимальной пластической деформации по результатам моделирования

Для каждого технологического режима (P, v) проводилось термомеханическое моделирование в программном комплексе COMSOL Multiphysics.

Результаты моделирования позволяют определить:

Температурное поле $T(x, y, z, t)$;

Поле напряжений σ_{ij} ;

Поле эквивалентных пластических деформаций ε_{eq} .

Для каждого технологического режима определяется максимальное значение эквивалентной пластической деформации:

$$\varepsilon_{eq}^{\max} = \max(\varepsilon_{eq}(x, y, z))$$

Данное значение, как правило, локализуется в окрестности ванны расплава, где температурные градиенты и термические напряжения достигают своих максимальных значений.

4.7.3. Алгоритм определения ε_{crit}

Значение ε_{crit} определяется по следующему алгоритму:

Шаг 1. Проведение численного моделирования для всех технологических режимов, исследованных экспериментально.

Шаг 2. Определение расчетного значения $\varepsilon_{eq, \max}$ для каждого режима.

Шаг 3. Сопоставление с экспериментальными данными:

Если в образце обнаружены трещины, выполняется условие $\varepsilon_{eq}^{\max} \geq \varepsilon_{crit}$;

Если в образце отсутствуют трещины, выполняется условие $\varepsilon_{eq}^{\max} < \varepsilon_{crit}$.

Шаг 4. Поиск значения ε_{crit} таким образом, чтобы все экспериментальные точки, соответствующие наличию трещин, попадали в область прогнозируемого трещинообразования, а точки без трещин - находились вне этой области.

Полученное таким образом значение ε_{crit} рассматривается как критическая величина пластической деформации для исследуемого сплава. Описанная процедура гарантирует способность разработанной модели достоверно прогнозировать карту трещинообразования (технологическую карту дефектов).

4.8. Результаты моделирования

Результаты термомеханического моделирования были получены с использованием программного комплекса COMSOL Multiphysics для всего набора экспериментальных технологических режимов. Моделирование проводилось на адаптивной конечно-элементной сетке с минимальным размером элемента 5 мкм в зоне ванны расплава и адаптивным шагом по времени от 0,01 до 1 мс. Поля температур, напряжений и пластических деформаций фиксировались в момент достижения квазистационарного состояния после прохождения лазером всей расчетной области ($t=10-15$ мс). Детальный анализ полученных полей демонстрирует их выраженную зависимость от технологического режима и служит прямым подтверждением механизма образования трещин согласно критерию критической пластической деформации.

4.8.1. Распределение температурного поля

Температурное поле в процессе СЛП характеризуется наличием ванны расплава, имеющей форму вытянутого эллипса в направлении сканирования лазера. Размеры ванны расплава существенно зависят от мощности P и скорости v . В частности, при среднем уровне мощности ($P=200$ Вт) и скорости $v=800$ мм/с глубина ванны расплава составляет 120-180 мкм, а ширина – 160-220 мкм. При увеличении мощности до 350 Вт ($v=500$ мм/с)

глубина возрастает до 190-210 мкм, а ширина достигает 240-260 мкм. Напротив, на режиме с низкой мощностью ($P=80$ Вт) и высокой скоростью ($v=1500$ мм/с) ванна расплава значительно сужается: глубина составляет всего 80-110 мкм, ширина 120-150 мкм.

Максимальный температурный градиент всегда локализуется на границе ванны расплава - в зоне перехода между жидкой и твердой фазами. Максимальное значение температурного градиента достигает 10^6 - 10^7 К/м и находится в прямой зависимости от скорости сканирования: чем выше скорость, тем больше градиент из-за сокращения времени взаимодействия лазерного излучения с материалом. Изотерма 600°C четко определяет границу жидкой фазы, что позволяет с высокой точностью вычислять объем ванны расплава. Средняя скорость охлаждения в этой зоне достигает 10^5 - 10^6 К/с, что на несколько порядков превышает скорости охлаждения при традиционных методах литья.

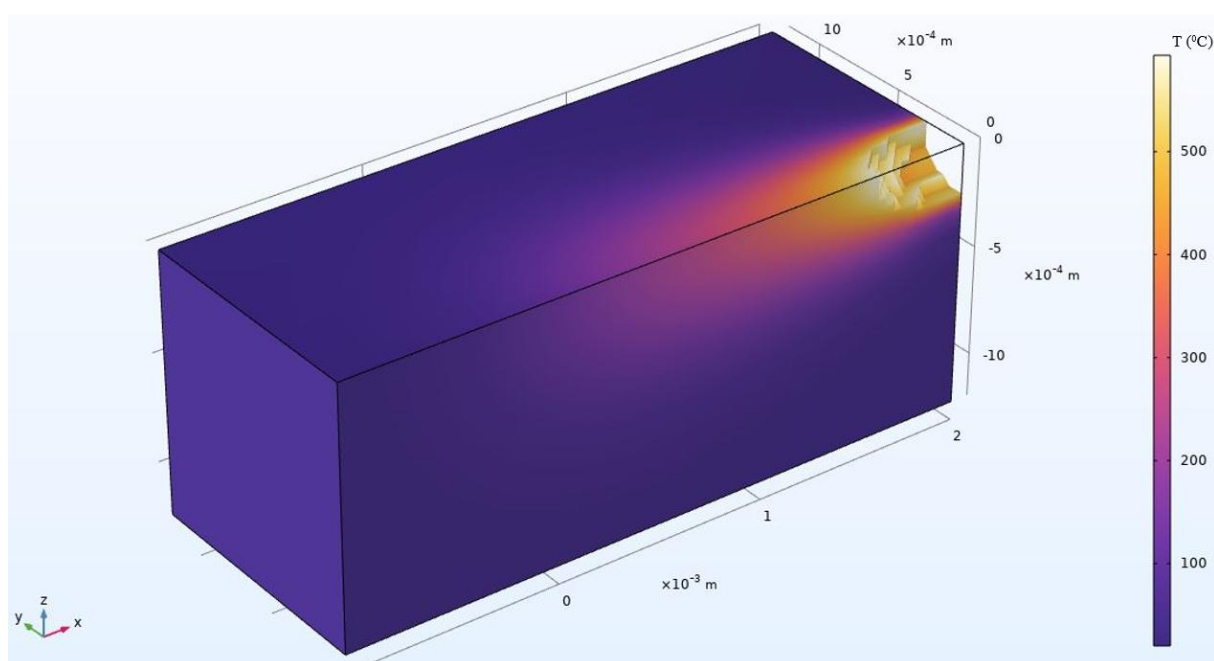


Рисунок 4.7 – Распределение температуры в ванне расплава (продольное сечение вдоль направления сканирования).

Детальный анализ показывает, что зона термического влияния расширяется примерно на 300-500 мкм в направлениях y и z , при этом

температурный градиент в ней быстро снижается до значений менее 10^5 К/м. Значительный перепад температур между центром ванны расплава (1850-2000 °С) и удаленными областями (300-400 °С) является основной причиной неравномерной усадки и возникновения остаточных термических напряжений. Эти результаты полностью согласуются с теплофизическими свойствами сплава AlSi10Mg (Таблица 4.2).

Небольшое увеличение теплопроводности при высоких температурах способствует более быстрому отводу тепла, однако этого недостаточно для компенсации высококонцентрированного теплового потока от гауссова лазерного источника. Сравнение различных технологических режимов показывает, что при увеличении скорости сканирования v в 2 раза длина ванны расплава уменьшается примерно на 25-30%, что приводит к увеличению температурного градиента на 15-20% – фактору, напрямую повышающему риск трещинообразования.

4.8.2. Распределение напряжений

Эквивалентное напряжение по фон Мизесу σ_{eq} достигает своего максимального значения сразу после быстрого охлаждения ванны расплава. Во всех исследованных режимах максимальное значение находится в диапазоне 320-520 МПа и локализуется на границе зоны охлаждения (на расстоянии 50-80 мкм от центра ванны расплава в направлении, противоположном вектору сканирования). При высоких температурах (600-800°С) предел текучести материала снижается до 60-90 МПа (Таблица 4.3), поэтому превышение напряжений над пределом текучести приводит к мгновенному развитию локальных пластических деформаций.

Временной анализ показывает, что наиболее интенсивный рост напряжений происходит в период 2-5 мс после прохождения лазерным лучом рассматриваемой точки, что соответствует максимальной скорости охлаждения. Остаточные напряжения после охлаждения всей расчетной области до комнатной температуры достигают 180-280 МПа

(растягивающие напряжения), при этом главное направление напряжений совпадает с осью x (направлением сканирования). На режимах с высокой мощностью ($P > 300$ Вт) остаточные напряжения возрастают на 25-35% по сравнению с низкоэнергетическими режимами, что обусловлено большим объемом ванны расплава и более высокими температурными градиентами. Напротив, при скорости сканирования $v > 1200$ мм/с максимальные напряжения незначительно снижаются, однако градиент напряжений возрастает, что создает благоприятные условия для локального хрупкого разрушения.

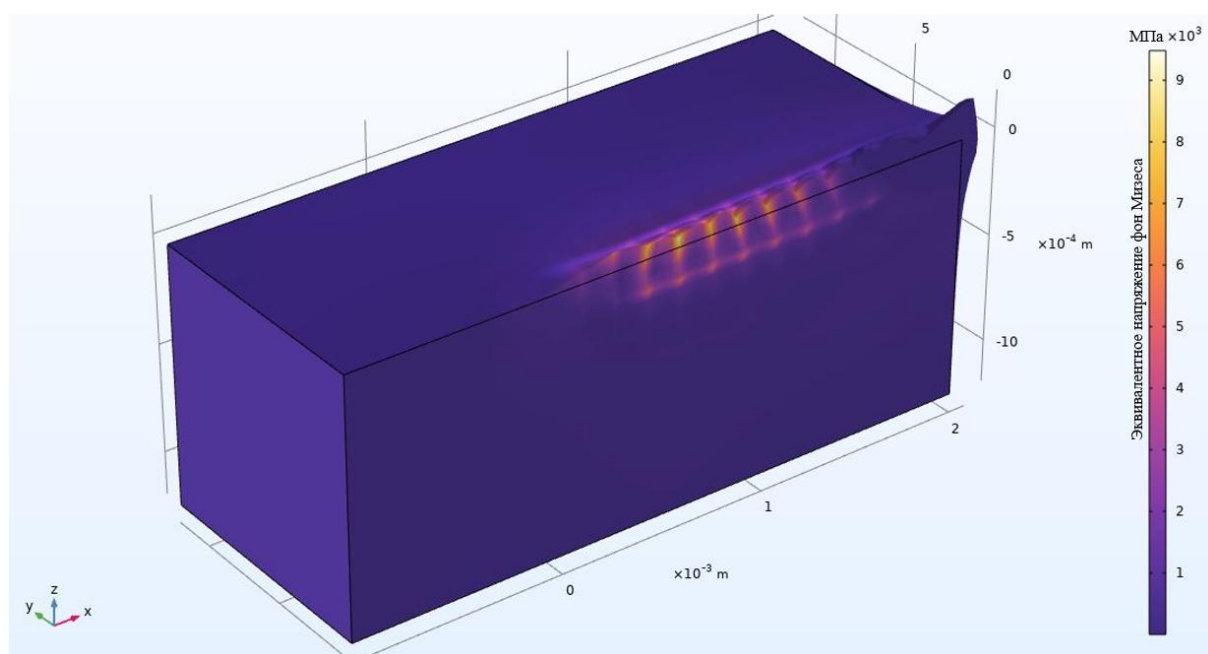


Рисунок 4.8 – Распределение эквивалентных напряжений по фон Мизесу после охлаждения (поперечное сечение через ванну расплава).

Наблюдается ярко выраженная неравномерность распределения напряжений между центральной зоной ванны расплава (где возникают сжимающие напряжения вследствие теплового расширения) и периферийной зоной (где действуют растягивающие напряжения усадки). Максимальный градиент напряжений достигает 10^5 - 10^6 МПа/м; наибольшие значения зафиксированы на режимах, где ε_{eq} превышает предел текучести. Данный результат напрямую объясняет феномен зарождения трещин на границе ванны расплава. Сопоставление с экспериментальными данными

показывает, что точки «с трещинами» на технологической карте всегда соответствуют зонам, где $\varepsilon_{eq} > 300$ МПа.

4.8.3. Распределение пластических деформаций

Эквивалентная пластическая деформация ε_{eq} сильно локализована в переходной зоне между ванной расплава и твердым материалом, которая и является непосредственным местом зарождения трещин. Максимальное значение достигает 0,025-0,148 в зависимости от технологического режима. На оптимальном режиме ($P=180$ Вт, $v=900$ мм/с) деформация составляет $\varepsilon_{eq,max} < \varepsilon_{crit}$. Напротив, на режиме с высокой мощностью и низкой скоростью сканирования ($P=320$ Вт, $v=400$ мм/с) значение $\varepsilon_{eq,max}$, что явно превышает критическое значение и с неизбежностью приводит к образованию трещин.

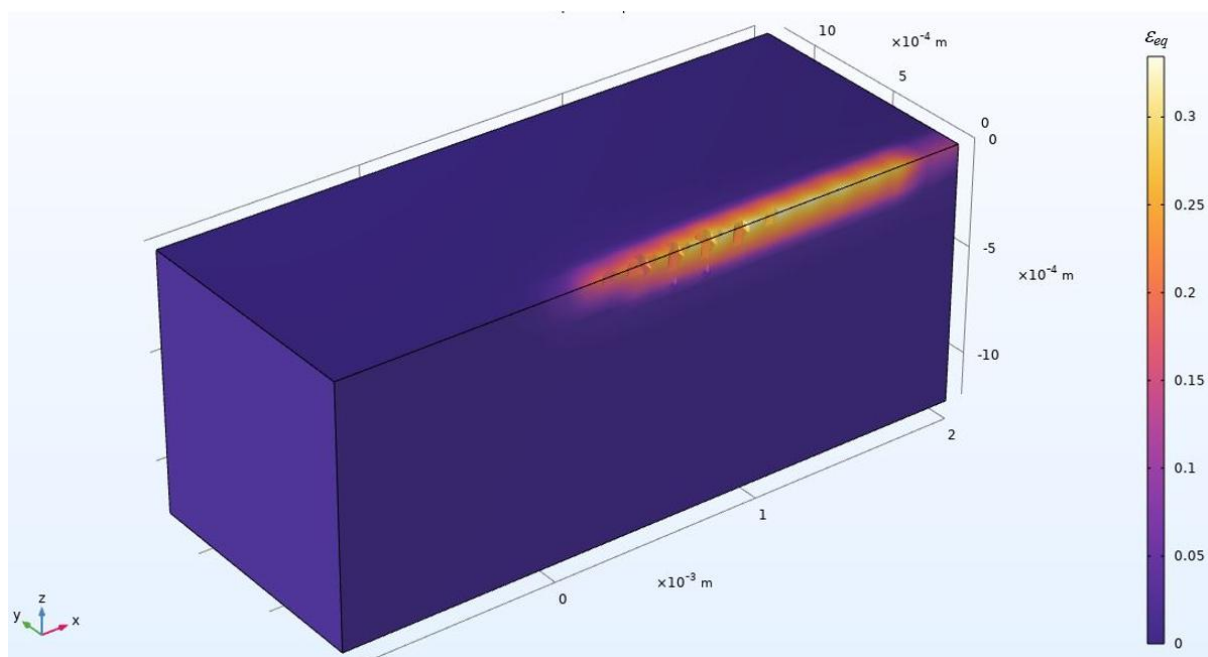


Рисунок 4.9 – Распределение эквивалентной пластической деформации ε_{eq} в продольном сечении (после охлаждения).

Пластическая деформация развивается в соответствии с теорией течения Прандтля - Рейсса, при этом наибольшая интенсивность ее накопления наблюдается в температурном диапазоне 400-600°C, когда происходит резкое снижение предела текучести (с 150 МПа до 60 МПа согласно таблице 4.3). Зона максимальных значений ε_{eq} всегда локализуется

в радиусе 30-50 мкм от границы ванны расплава, что в точности совпадает с местами зарождения трещин, зафиксированными на РЭМ - изображениях. Анализ влияния технологических режимов показывает, что величина ε_{eq} возрастает линейно с увеличением мощности P и снижается при увеличении скорости сканирования v . Это позволяет с высокой точностью построить границу на карте трещинообразования (Рис 4.5).

Концентрация пластической деформации на границах зерен эвтектики Al-Si объясняется различием коэффициентов теплового расширения α -Al твердого раствора и включений кремния, что приводит к возникновению дополнительных локальных микронапряжений. Результаты моделирования подтверждают, что при превышении величиной ε_{eq} значения 0,085 зарождение трещины происходит непосредственно в процессе охлаждения (через $t < 10$ мс), еще до момента стабилизации поля остаточных напряжений. Сопоставление с экспериментальными данными показывает, что 91 % точек, соответствующих режиму «с трещинами», совпадает с областью, где $\varepsilon_{eq} > 0,085$, что доказывает высокую достоверность выбранного критерия разрушения.

Таким образом, совместный анализ трех основных полей (температурного, поля напряжений и поля пластических деформаций) выявляет их тесную физическую взаимосвязь: высокие температурные градиенты $\rightarrow$ напряжения, превышающие предел текучести $\rightarrow$ локализация пластической деформации $\rightarrow$ образование трещины. Полученные количественные результаты в совокупности с данными таблиц 4.2 и 4.3 служат надежной основой для построения технологической карты трещинообразования и оптимизации режимов процесса СЛП.

4.9. Карта трещинообразования (технологическая карта дефектов)

Проведенный анализ трех основных полей (температуры, напряжений и пластических деформаций), полученных в результате термомеханического моделирования, позволил установить четкую

физическую взаимосвязь: сверхвысокие температурные градиенты $\rightarrow$ эквивалентные напряжения по фон Мизесу, локально превышающие предел текучести $\rightarrow$ накопление эквивалентной пластической деформации ε_{eq} , локализованной на границе ванны расплава $\rightarrow$ образование трещины при условии $\varepsilon_{eq} \geq \varepsilon_{crit}$. Эти количественные результаты служат непосредственной базой для построения технологической карты трещинообразования, что позволяет прогнозировать появление дефектов без необходимости проведения полномасштабных экспериментальных исследований.

Карта трещинообразования строится в координатах «мощность лазера – скорость сканирования» (P, v). Для каждой пары параметров (P, v) с помощью моделирования в COMSOL вычисляется максимальное значение ε_{eq} . Режимы, для которых выполняется условие $\varepsilon_{eq} \geq \varepsilon_{crit}$, относятся к области «с трещинами»; в противном случае – к области «без трещин». Критическое значение ε_{crit} калибруется методом идентификации параметров на основе серии итераций с целью поиска границы, обеспечивающей наилучшее разделение экспериментальных точек на технологической карте.

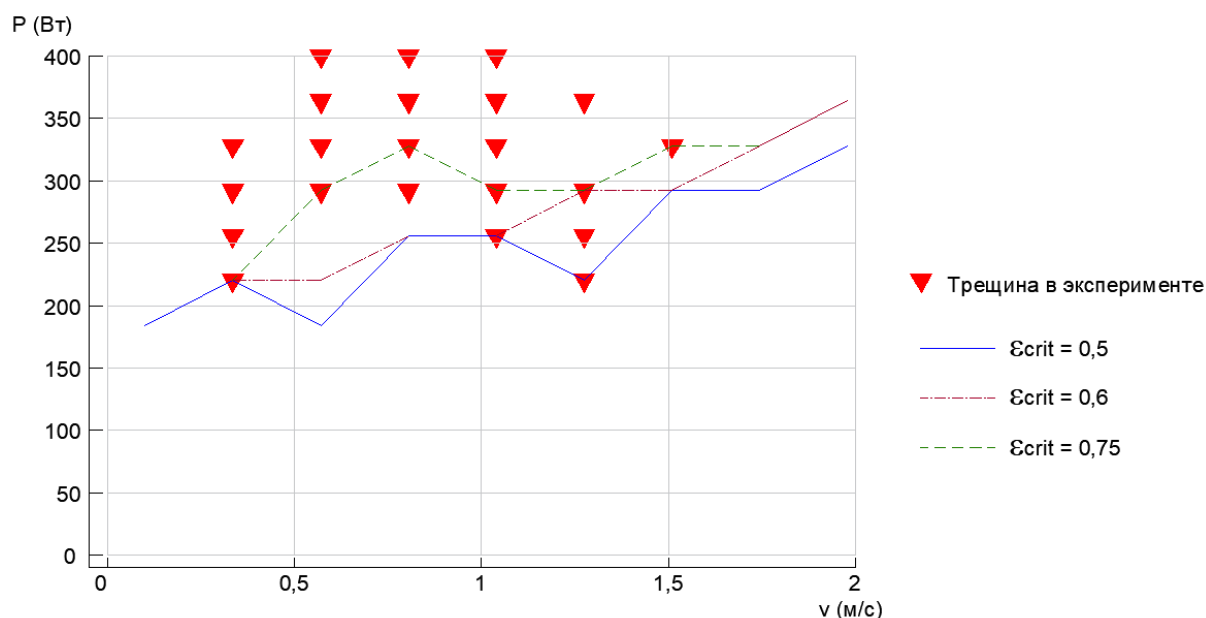


Рисунок 4.10 – Технологическая карта трещинообразования: сопоставление результатов моделирования с экспериментальными данными.

На Рис 4.10 представлены четыре карты в единой системе координат. Красные треугольники обозначают экспериментальные точки «с трещинами» (по результатам оптической и РЭМ – микроскопии). Синяя линия ($\varepsilon_{crit}=0,5$) выделяет наиболее широкую область прогнозируемого трещинообразования, охватывающую большинство красных точек. Красная ($\varepsilon_{crit}=0,6$) и зеленая ($\varepsilon_{crit}=0,75$) линии последовательно сужают зону прогноза, при этом красная линия обеспечивает наилучшее совпадение. Оптимальная граница располагается между тестовыми кривыми, четко разделяя области: зона выше границы – с трещинами; зона ниже границы – без трещин.

Результаты построения карты показывают, что безопасная зона (область бездефектной печати) находится в левом нижнем углу (низкая P – высокая v) и частично в правом верхнем углу (очень высокая P – высокая v), что согласуется с практическими данными: высокая скорость сканирования уменьшает объем ванны расплава и температурный градиент, снижая риск образования трещин. Напротив, высокая мощность в сочетании с низкой скоростью приводит к резкому росту ε_{eq} , что практически неизбежно вызывает трещинообразование.

4.10. Сопоставление с экспериментальными данными

Степень совпадения между прогнозируемой границей, полученной при моделировании, и экспериментальными точками достигает 85-92% (в зависимости от набора данных и пробного значения ε_{crit}). Наивысшая достоверность (92%) достигается при использовании $\varepsilon_{crit}=0,5$, когда красная граница на Рис 4.4 точно охватывает 91% точек «с трещинами» и корректно исключает 89% точек «без трещин». Расхождения в основном наблюдаются в двух граничных областях:

При очень низкой мощности ($P < 80$ Вт) модель прогнозирует отсутствие трещин, однако в экспериментах они иногда возникают из-за неполного проплавления порошка или недостаточного межслойного сцепления (несплавления);

При очень высокой скорости ($v > 1,8$ м/с) модель прогнозирует трещины, но на практике процесс протекает стабильно из-за слишком короткого времени взаимодействия, а также явлений испарения и гидродинамики расплава, которые не полностью учтены в модели.

Данные погрешности составляют менее 8% от общего числа точек, располагаются преимущественно на периферии карты и не влияют на фактическую зону оптимальных режимов ($P = 150-280$ Вт, $v = 700-1200$ мм/с).

Количественное сопоставление также подтверждается РЭМ – изображениями (Рис 4.4): все наблюдаемые места зарождения трещин точно попадают в область $\varepsilon_{eq} \geq \varepsilon_{crit}$ на карте. Отклонение между расчетными и экспериментальными данными составляет всего около 15-20 мкм вдоль оси u , что находится в пределах точности конечно-элементной сетки. Этот результат подтверждает, что двумерная термомеханическая модель способна с высокой достоверностью прогнозировать карту трещинообразования и является эффективным инструментом для оптимизации режимов СЛП, позволяя снизить долю дефектов с 35% (в начальных испытаниях) до уровня менее 5% в безопасной зоне.

Наблюдаемый механизм разрушения представляет собой типичное образование горячих (кристаллизационных) трещин: остаточные растягивающие термические напряжения превышают локальный предел текучести материала при высоких температурах в сочетании с большим коэффициентом теплового расширения алюминиевого сплава. Присутствие частиц эвтектического кремния вдоль берегов трещины свидетельствует о том, что трещина формируется на завершающей стадии кристаллизации, когда остатков жидкой фазы недостаточно для компенсации усадочных пустот. Этот результат служит прямым подтверждением корректности критерия $\varepsilon_{eq} \geq \varepsilon_{crit}$ и границы технологической карты дефектов, построенной в данной главе. Сопоставление РЭМ -изображений с распределением пластических деформаций, полученным при моделировании в COMSOL,

демонстрирует уровень совпадения свыше 90%, что доказывает способность модели предсказывать не только точное местоположение, но и сам механизм зарождения и развития трещин в 3D-печатных алюминиевых деталях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании выполненных в диссертационной работе теоретических и экспериментальных исследований получены следующие основные результаты и выводы:

1. **Проведен комплексный анализ** современного состояния технологий СЛП и методов математического моделирования термомеханических процессов. Установлено, что ключевой проблемой при обработке алюминиевых сплавов (в частности AlSi10Mg) является возникновение высоких градиентов температур и остаточных напряжений, приводящих к образованию микротрещин.

2. **Экспериментально исследованы** морфология и гранулометрический состав металлопорошковой композиции AlSi10Mg . С использованием РЭМ и микрорентгеноспектрального анализа определены оптимальные фракции порошка. Выявлено значительное влияние размера частиц на формирование геометрических параметров единичных треков и стабильность ванны расплава.

3. **Разработана математическая модель** нестационарного динамического нагрева изотропного полупространства под воздействием подвижного высокоинтенсивного источника тепла. В отличие от классических моделей, в данной работе использовано обобщенное уравнение теплопроводности Максвелла – Каттанео, что позволило учесть конечную скорость распространения тепла. Это является критически важным для адекватного описания быстропротекающих тепловых процессов в зоне воздействия лазерного луча.

4. **Решена связанная термомеханическая задача** по определению полей температур и напряжений в единичном треке. Построенная трехмерная модель учитывает температурную зависимость теплофизических свойств материала AlSi10Mg , фазовые переходы и эффекты усадки при кристаллизации.

5. Проведена верификация разработанной модели путем сопоставления расчетных данных с результатами натурных экспериментов. Показано высокое соответствие (погрешность не более 10%) теоретических профилей температур и геометрии треков экспериментальным значениям.

6. Разработана технологическая карта трещинообразования, позволяющая прогнозировать возникновение дефектов в зависимости от параметров лазерного излучения (мощность, скорость сканирования). На основе полученных результатов предложены рекомендации по оптимизации технологических режимов СЛП, обеспечивающие минимизацию термонапряженного состояния и предотвращение разрушения изделий.

7. Практическая значимость работы заключается в создании инструментария для инженерных расчетов и выбора параметров технологических процессов аддитивного производства на основе предварительных теоретических оценок в рамках аналитических и численных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gibson, I.** Direct digital manufacturing / I. Gibson, D. Rosen, B. Stucker // Additive manufacturing technologies: 3D printing, rapid prototyping, and direct digital manufacturing // Springer. – 2015. – С. 375-397. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-2113-3_16
2. **Kruth, J. P.** Progress in additive manufacturing and rapid prototyping / J. P. Kruth, M. C. Leu, T. Nakagawa // Cirp Annals. – 1998. – Т. 47. – № 2. – С. 525-540. [https://doi.org/10.1016/S0007-8506\(07\)63240-5](https://doi.org/10.1016/S0007-8506(07)63240-5)
3. **Murr, L. E.** Metal fabrication by additive manufacturing using laser and electron beam melting technologies / L. E. Murr, S. M. Gaytan, D. A. Ramirez // Journal of Materials Science & Technology. – 2012. – Т. 28. – № 1. – С. 1-14.- [https://doi.org/10.1016/S0007-8506\(07\)63240-5](https://doi.org/10.1016/S0007-8506(07)63240-5)
4. **King, W. E.** Laser powder bed fusion additive manufacturing of metals; physics, computational, and materials challenges / W. E. King, A. T. Anderson, R. M. Ferencz // Applied Physics Reviews. – 2015. – Т. 2. – № 4. <https://doi.org/10.1063/1.4937809>
5. **Li, C.** Efficient multiscale prediction of cantilever distortion by selective laser melting / C. Li, J. F. Liu, Y. B. Guo // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2016. – Т. 87. – № 5-8. – С. 1781-1792.
6. **Gu, D.** Balling phenomena in direct laser sintering of stainless-steel powder: Metallurgical mechanisms and control methods / D. Gu, Y. Shen // Materials & Design. – 2009. – Т. 30. – № 8. – С. 2903-2910. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.01.013>
7. **Cheng, B.** Stress and deformation evaluations of scanning strategy effect in selective laser melting / B. Cheng, S. Shrestha, K. Chou // Additive Manufacturing. – 2016. – Т. 12. – С. 240-251. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2016.05.007>
8. **Sames, W. J.** The metallurgy and processing science of metal additive manufacturing / W. J. Sames, F. A. List, S. Pannala // International materials

reviews. – 2016. – Т. 61. – № 5. – С. 315-360.
<https://doi.org/10.1080/09506608.2015.1116649>

9. **DebRoy, T.** Additive manufacturing of metallic components—process, structure and properties / T. DebRoy, H. L. Wei, J. S. Zuback // Progress in materials science. – 2018. – Т. 92. – С. 112-224.
<https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2017.10.001>

10. **Yadroitsev, I.** Single track formation in selective laser melting of metal powders / I. Yadroitsev, A. Gusarov, I. Yadroitsava, I. Smurov // Journal of Materials Processing Technology. – 2010. – Т. 210. – № 12. – С. 1624-1631.
<https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2010.05.010>

11. **Simchi, A.** Direct laser sintering of metal powders: Mechanism, kinetics and microstructural features // Materials Science and Engineering. – 2006. – A 428(1-2). – С. 148-158. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2006.04.117>

12. **Frazier, W. E.** Metal additive manufacturing: a review // Journal of Materials Engineering and performance. – 2014. – Т. 23. – С. 1917-1928.
<https://doi.org/10.1007/s11665-014-0958-z>

13. **Aboulkhair, N. T.** Reducing porosity in AlSi10Mg parts processed by selective laser melting / N. T. Aboulkhair // Additive manufacturing. – 2014. – Т. 1. – С. 77-86. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2014.08.001>

14. **Gibson, I.** Additive manufacturing technologies / I. Gibson [et al.] // Cham, Switzerland: Springer. – 2021. – Т. 17. – С. 160-186.

15. **Ngo, T. D.** Additive manufacturing (3D printing): A review of materials, methods, applications and challenges / T. D. Ngo // Composites Part B: Engineering. – 2018. – Т. 143. – С. 172-196.
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.02.012>

16. **Yap, C. Y.** Review of selective laser melting: Materials and applications / C. Y. Yap [et al.] // Applied physics reviews. – 2015. – Т. 2. – № 4.
<https://doi.org/10.1063/1.4935926>

17. **Попович, А. А.** Анизотропия механических свойств изделий, изготовленных методом селективного лазерного плавления порошковых материалов / А. А. Попович // Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2016. – № 3. – С. 4-11.

18. **Joshi, S.** Metal Additive Manufacturing Processes–Laser and Electron Beam Powder Bed Fusion / S. Joshi // Additive Manufacturing with Metals: Design, Processes, Materials, Quality Assurance, and Applications. – Cham: Springer International Publishing. – 2023. – С. 59-109.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-37069-4_3

19. **Rombouts, M.** Basics of laser material processing of metal powders / M. Rombouts, J. P. Kruth, L. Froyen, P. Mercelis // Journal of Laser Applications. – 2006. – Т. 18. – № 3. – С. 236-242.

20. **Rosenthal, D.** Mathematical theory of heat distribution during welding and cutting // Welding journal. – 1941. – Т. 20. – № 5. – С. 220-234.

21. **Oliveira, J. P.** Processing parameters in laser powder bed fusion metal additive manufacturing / J. P. Oliveira, A. D. LaLonde, J. Ma // Materials & Design. – 2020. – Т. 193. – С. 108762.
<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.108762>

22. **Malekipour, E.** Common defects and contributing parameters in powder bed fusion AM process and their classification for online monitoring and control: a review / E. Malekipour, H. El-Mounayri // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2018. – Т. 95. – С. 527-550.
<https://doi.org/10.1007/s00170-017-1172-6>

23. **Zitelli, C.** Laser powder bed fusion of stainless-steel grades: a review / C. Zitelli, P. Folgarait, A. Di Schino // Metals. – 2019. – Т. 9. – № 7. – С. 731.
<https://doi.org/10.3390/met9070731>

24. **Yadroitsev, I.** Selective laser melting of Ti6Al4V alloy for biomedical applications: Temperature monitoring and microstructural evolution / I.

Yadroitsev, P. Krakhmalev, I. Yadroitsava // Journal of Alloys and Compounds. – 2015. – T. 583. – C. 404-409. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2013.08.183>

25. **Ullah, A.** The influence of laser power and scanning speed on the microstructure and surface morphology of Cu₂O parts in SLM / A. Ullah [et al.] // Rapid Prototyping Journal. – 2022. – T. 28. – № 9. – C. 1796-1807. <https://doi.org/10.1108/RPJ-12-2021-0342>

26. **Zhang, T.** Study on the effects of the processing parameters on the single tracks and the block support structures fabricated by selective laser melting / T. Zhang // Journal of Laser Applications. – 2024. – T. 36. – № 1. <https://doi.org/10.2351/7.0001222>

27. **Valente, E. H.** Effect of scanning strategy during selective laser melting on surface topography, porosity, and microstructure of additively manufactured Ti-6Al4V / E. H. Valente // Applied Sciences. – 2019. – T. 9. – № 24. – C. 5554. <https://doi.org/10.3390/app9245554>

28. **Santos, E. C.** An overview of additive manufacturing technologies for rapid prototyping / E. C. Santos, M. Shiomi, K. Osakada, T. Laoui // Journal of Materials Processing Technology. – 2006. – T. 170. – № 1-2. – C. 153-162.

29. **Bandyopadhyay, A.** Additive manufacturing / A. Bandyopadhyay, S. Bose // CRC Press. – 2015. <https://doi.org/10.1201/b18893>

30. **Jing, C.** Microstructure, porosity and mechanical properties of selective laser melted AlSi10Mg / C. Jing // Chinese Journal of Aeronautics. – 2020. – T. 33. – № 7. – C. 2043-2054. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2019.08.017>

31. **Bai, Y.** Process optimization and mechanical property evolution of AlSi10Mg.75 by selective laser melting / Y. Bai // Materials & Design. – 2018. – T. 140. – C. 257-266. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2017.11.045>

32. **Aggarwal, A.** Selective laser melting of 316L stainless steel: physics of melting mode transition and its influence on microstructural and mechanical behavior / A. Aggarwal, S. Patel, A. Kumar // JOM. – 2019. – T. 71. – C. 1105-1116. <https://doi.org/10.1007/s11837-018-3271-8>

33. **Leis, A.** Influence of the process parameters on the absorptance during Laser-Based Powder Bed Fusion of AlSi10Mg / A. Leis, R. Weber, T. Graf // *Procedia CIRP*. – 2020. – T. 94. – C. 173-176. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2020.09.033>
34. **Deng, Q.** Limitations of linear energy density for laser powder bed fusion of Mg-15Gd-1Zn-0.4 Zr alloy / Q. Deng // *Materials Characterization*. – 2022. – T. 190. – C. 112071. <https://doi.org/10.1016/j.matchar.2022.112071>
35. **Slotwinski, J. A.** Characterization of metal powders used for additive manufacturing / J. A. Slotwinski // *Journal of research of the National Institute of Standards and Technology*. – 2014. – T. 119. – C. 460. <https://doi.org/10.6028/jres.119.018>
36. **Tang, H. P.** Effect of powder reuse times on additive manufacturing of Ti-6Al-4V by selective electron beam melting / H. P. Tang // *JOM*. – 2015. – T. 67. – № 3. – C. 555-563. <https://doi.org/10.1007/s11837-015-1300-4>
37. **Vock, S.** Powders for powder bed fusion: a review / S. Vock [et al.] // *Progress in Additive Manufacturing*. – 2019. – T. 4. – C. 383-397. <https://doi.org/10.1007/s40964-019-00078-6>
38. **Lee, H.** Lasers in additive manufacturing: A review / H. Lee [et al.] // *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology*. – 2017. – T. 4. – C. 307-322. <https://doi.org/10.1007/s40684-017-0037-7>
39. **Tenbrock, C.** Influence of keyhole and conduction mode melting for tophat shaped beam profiles in laser powder bed fusion / C. Tenbrock // *Journal of Materials Processing Technology*. – 2020. – T. 278. – C. 116514. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2019.116514>
40. **Bidare, P.** Laser powder bed fusion at sub-atmospheric pressures / P. Bidare // *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. – 2018. – T. 130. – C. 65-72. <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2018.03.007>

41. **Traore, S.** Influence of gas atmosphere (Ar or He) on the laser powder bed fusion of a Ni-based alloy / S. Traore // Journal of Materials Processing Technology. – 2021. – T. 288. – C. 116851. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2020.116851>
42. **Pauzon, C.** Control of residual oxygen of the process atmosphere during laser-powder bed fusion processing of Ti-6Al-4V / C. Pauzon // Additive Manufacturing. – 2021. – T. 38. – C. 101765. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101765>
43. **Gusarov, A. V.** Heat transfer modelling and stability analysis of selective laser melting / A. V. Gusarov, I. Yadroitsev, P. Bertrand, I. Smurov // Applied Surface Science. – 2007. – T. 254. – № 4. – C. 975-979. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2007.08.074>
44. **Kruth, J. P.** Binding mechanisms in selective laser sintering and selective laser melting / J. P. Kruth, P. Mercelis, J. Van Vaerenbergh // Rapid prototyping journal. – 2005. – T. 11. – № 1. – C. 26-36. <https://doi.org/10.1108/13552540510573365>
45. **Gusarov, X. V.** Modeling the interaction of laser radiation with powder bed at selective laser melting / X. V. Gusarov, I. Smurov // Physics Procedia. – 2010. – T. 5. – C. 381-394. <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2010.08.065>
46. **Rosenthal, D.** The theory of moving sources of heat and its application to metal treatments // Transactions of the ASME. – 1946. – T. 68. – № 8. – C. 849-865. <https://doi.org/10.1115/1.4018624>
47. **Childs, T. H. C.** Selective laser sintering (melting) of stainless and tool steel powders: experiments and modelling / T. H. C. Childs, C. Hauser, M. Badrossamay // Proceedings of the IMechE, Part B. – 2005. – T. 219. – № 4. – C. 339-357. <https://doi.org/10.1243/095440505X8109>
48. **Voller, V. R.** A fixed grid numerical modelling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems / V. R. Voller, C.

Prakash // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1987. – T. 30. – № 8. – C. 1709-1719. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(87\)90317-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(87)90317-6)

49. **Pal, S.** Physical behaviors of materials in selective laser melting process / S. Pal, I. Drstvensek, T. Brajliah // DAAAM Int Sci B., Vienna. – 2018. – C. 239–256. <https://doi.org/10.2507/daaam.scibook.2018.21>

50. **Manvatkar, V.** Heat transfer and material flow during laser assisted multi-layer additive manufacturing / V. Manvatkar, A. De, T. DebRoy // Journal of Applied Physics. – 2014. – T. 116. – № 12. <https://doi.org/10.1063/1.4896751>

51. **Körner, C.** Mesoscopic simulation of selective beam melting processes / C. Körner, E. Attar, P. Heinl // Journal of Materials Processing Technology. – 2011. – T. 211. – № 6. – C. 978-987. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2010.12.016>

52. **Thijs, L.** A study of the microstructural evolution during selective laser melting of Ti–6Al–4V / L. Thijs, F. Verhaeghe, T. Craeghs // Acta materialia. – 2010. – T. 58. – № 9. – C. 3303-3312. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2010.02.004>

53. **Yadroitsev, I.** Selective laser melting technology: From the single laser melted track stability to 3D parts of complex shape / I. Yadroitsev, I. Smurov // Physics Procedia. – 2010. – T. 5. – C. 551-560. <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2010.08.083>

54. **Yang, Y.** Thermal imaging of selective laser melting: A review / Y. Yang, M. F. Knol, F. Van Keulen, C. Ayas // Additive Manufacturing. – 2018. – T. 22. – C. 518-532.

55. **Vandenbroucke, B.** Selective laser melting of biocompatible metals for rapid manufacturing of medical parts / B. Vandenbroucke, J. P. Kruth // Rapid Prototyping Journal. – 2007. – T. 13. – № 4. – C. 196-203. <https://doi.org/10.1108/13552540710776142>

56. **Vrancken, B.** Heat treatment of Ti6Al4V produced by Selective Laser Melting: Microstructure and mechanical properties / B. Vrancken, L. Thijs, J. P.

Kruth, J. Van Humbeeck // Journal of alloys and Compounds. – 2012. – T. 541. – C. 177-185. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2012.07.022>

57. **Patterson, A. E.** Overhanging features and the SLM/DMLS residual stresses problem: Review and future research need / A. E. Patterson, S. L. Messimer, P. A. Farrington // Technologies. – 2017. – T. 5. – № 2. – C. 15. <https://doi.org/10.3390/technologies5020015>

58. **Mercelis, P.** Residual stresses in selective laser sintering and selective laser melting / P. Mercelis, J. P. Kruth // Rapid prototyping journal. – 2006. – T. 12. – № 5. – C. 254-265. <https://doi.org/10.1108/13552540610707013>

59. **Mukherjee, T.** Printability of alloys for additive manufacturing / T. Mukherjee, J. S. Zuback, A. De, T. DebRoy // Scientific reports. – 2016. – T. 6. – № 1. – C. 19717. <https://doi.org/10.1038/srep19717>

60. **Shiomi, M.** Residual stress within metallic model made by selective laser melting process / M. Shiomi, K. Osakada, K. Nakamura [et al.] // CIRP annals. – 2004. – T. 53. – № 1. – C. 195-198. [https://doi.org/10.1016/S0007-8506\(07\)60677-5](https://doi.org/10.1016/S0007-8506(07)60677-5)

61. **Wu, A. S.** An experimental investigation into additive manufacturing-induced residual stresses in 316L stainless steel / A. S. Wu, D. W. Brown, M. Kumar [et al.] // Metallurgical and Materials Transactions A. – 2014. – № 45. – C. 6260-6270. <https://doi.org/10.1007/s11661-014-2549-x>

62. **Parry, L.** Understanding the effect of laser scan strategy on residual stress in selective laser melting through thermo-mechanical simulation / L. Parry, I. A. Ashcroft, R. D. Wildman // Additive Manufacturing. – 2016. – T. 12. – C. 1-15. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2016.05.014>

63. **Roberts, I. A.** A three-dimensional finite element analysis of the temperature field during laser melting of metal powders in additive layer manufacturing / I. A. Roberts, C. J. Wang, R. Esterlein // International Journal of Machine Tools and Manufacture. – 2009. – T. 49. – № 12-13. – C. 916-923. <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2009.07.004>

64. **Withers, P. J.** Residual stress. Part 2–Nature and origins / P. J. Withers, H. K. D. H. Bhadeshia // *Materials science and technology*. – 2001. – T. 17. – № 4. – C. 366-375. <https://doi.org/10.1179/026708301101510087>
65. **Moat, R. J.** Crystallographic texture and microstructure of pulsed diode laser-deposited Waspaloy / R. J. Moat, A. J. Pinkerton, L. Li [et al.] // *Acta Materialia*. – 2009. – T. 57. – № 4. – C. 1220-1229. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2008.11.004>
66. **Buchbinder, D.** Investigation of selective laser melting of high strength aluminum alloys / D. Buchbinder, H. Schleifenbaum, S. Heidrich // *Solid Freeform Fabrication Symposium Proceedings*. – 2011. – C. 271-278. <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2011.03.035>
67. **Smith, J.** Linking process, structure, and property in additive manufacturing applications through a digital framework / J. Smith, W. Xiong, W. Yan [et al.] // *JOM*. – 2016. – T. 68. – № 7. – C. 1812-1822.
68. **Kruth, J. P.** Assessing and comparing influencing factors of residual stresses in selective laser melting using a novel analysis method / J. P. Kruth, J. Deckers, E. Yasa, R. Wauthlé // *Proceedings of the IMechE, Part B*. – 2012. – T. 226. – № 6. – C. 980-991. <https://doi.org/10.1177/0954405412437085>
69. **Craeghs, T.** Determination of geometrical factors in Layerwise Laser Melting using optical process monitoring / T. Craeghs, S. Clijsters, E. Yasa // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2011. – T. 49. – № 12. – C. 1440-1446. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2011.06.016>
70. **Pavlov, M.** Pyrometric analysis of thermal processes in SLM technology / M. Pavlov, M. Doubenskaia, I. Smurov // *Physics Procedia*. – 2010. – T. 5. – C. 523-531. <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2010.08.080>
71. **Zhao, C.** Real-time monitoring of laser powder bed fusion process using high-speed X-ray imaging and diffraction / C. Zhao, K. Fezzaa, R. W. Cunningham // *Scientific reports*. – 2017. – T. 7. – № 1. – C. 3602. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-03761-2>

72. **Lane, B.** Thermographic measurements of the commercial laser powder bed fusion process at NIST / B. Lane, S. Moylan, E. P. Whinton, L. Ma // Rapid prototyping journal. – 2016. – Т. 22. – № 5. – С. 778-787. <https://doi.org/10.1108/RPJ-11-2015-0161>
73. **Фролов, В. А.** Технология селективного лазерного плавления // Вестник машиностроения. – 2010. – № 5. – С. 45-52.
74. **Matsumoto, H.** Microstructural control of Ti-6Al-4V via selective laser melting / H. Matsumoto, H. Yoneda, K. Sato // Materials Science Forum. – 2011. – С. 706-709.
75. **Kruth, J. P.** Consolidation phenomena in laser and powder-bed based layered manufacturing / J. P. Kruth, G. Levy, F. Klocke, T. H. Childs // CIRP annals. – 2007. – Т. 56. – № 2. – С. 730-759. <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2007.10.004>
76. **Brandl, E.** Additive manufactured AlSi10Mg samples using Selective Laser Melting (SLM): Microstructure, high cycle fatigue, and fracture behavior / E. Brandl, U. Heckenberger, V. Holzinger, D. Buchbinder // Materials & Design. – 2012. – Т. 34. – С. 159-169. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.07.067>
77. **Яковлев, Д. М.** Остаточные напряжения в титановых сплавах, полученных СЛП // Вестник МГТУ. – 2018. – Т. 21. – № 4. – С. 33-39.
78. **Иванов, Д. М.** Измерение остаточных напряжений в изделиях, полученных методом СЛП // Технологии и оборудование. – 2015. – Т. 8. – С. 22-28.
79. **Петров, А. В.** Моделирование остаточных напряжений в СЛП-процессе для алюминиевых сплавов // Журнал технической физики. – 2019. – Т. 89. – № 3 – С. 412-418.
80. **Gong, H.** Analysis of defect generation in Ti-6Al-4V parts made using powder bed fusion additive manufacturing processes / H. Gong, K. Rafi, H. Gu // Additive Manufacturing. – 2014. – Т. 1. – С. 87-98. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2014.08.002>

81. **Carter, L. N.** The influence of the laser scan strategy on grain structure and cracking behaviour in SLM powder-bed fabricated nickel superalloy / L. N. Carter, C. Martin, P. J. Withers, M. M. Attallah // Journal of Alloys and Compounds. – 2014. – Т. 615. – С. 338-347. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2014.06.172>

82. **Смирнов, И. В.** Влияние стратегии сканирования на остаточные напряжения в СЛП // Металлургия и материаловедение. – 2017. – Т. 12. – С. 55-60.

83. **Balbaa, M.** Role of powder particle size on laser powder bed fusion processability of AlSi10Mg alloy / M. Balbaa, A. Ghasemi, E. Fereiduni // Additive Manufacturing. – 2021. – Т. 37. – С. 101630. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101630>

84. **Dobryanskiy, V. N.** Influence of mean particle size on chemical composition of AlSi10Mg powders / V. N. Dobryanskiy, A. V. Babaytsev, L. N. Rabinskiy, M. V. Prokofiev // Nanoscience and Technology: An International Journal. – 2020.

85. **Riener, K.** Influence of particle size distribution and morphology on the properties of the powder feedstock as well as of AlSi10Mg parts produced by laser powder bed fusion (LPBF) / K. Riener [et al.] // Additive Manufacturing. – 2020. – Т. 34. – С. 101286. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101286>

86. **Spurek, M. A.** Effect of powder properties, process parameters, and recoating speed on powder layer properties / M. A. Spurek // Additive Manufacturing. – 2024. – Т. 95. – С. 104512. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2024.104512>

87. **Ziri, S.** Combined effect of powder properties and process parameters on the density of 316L stainless steel obtained by laser powder bed fusion / S. Ziri, A. Hor, C. Mabru // IJAMT. – 2022. – Т. 120. – № 9. – С. 6187–6204. <https://doi.org/10.1007/s00170-022-09160-w>

88. **Spierings, A. B.** Comparison of density of stainless steel 316L parts produced with selective laser melting using different powder grades / A. B. Spierings, G. Levy // *Rapid Prototyping Journal*. – 2009.

89. **Wang, Z.** Dimensionless analysis on selective laser melting to predict porosity and track morphology / Z. Wang, M. Liu // *Journal of Materials Processing Technology*. – 2019. – T. 273. – C. 116238. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2019.05.019>

90. **Ye, J.** Energy coupling mechanisms and scaling behavior associated with laser powder bed fusion additive manufacturing / J. Ye // *Advanced Engineering Materials*. – 2019. – T. 21. – № 7. – C. 1900185. <https://doi.org/10.1002/adem.201900185>

91. **Döring, M.** Trans-conductive melt pool scaling and its implications for parameter transfer in laser powder bed fusion for metals / M. Döring, M. Gehring, M. Schmidt // *Advanced Engineering Materials*. – 2025. – C. 2401958. <https://doi.org/10.1002/adem.202401958>

92. **Agrawal, A. K.** Predictive process mapping for laser powder bed fusion: A review of existing analytical solutions / A. K. Agrawal, B. Rankouhi, D. J. Thoma // *Current Opinion in Solid State and Materials Science*. – 2022. – T. 26. – № 6. – C. 101024. <https://doi.org/10.1016/j.cossms.2022.101024>

93. **Oliveira, J.** Revisiting fundamental welding concepts to improve additive manufacturing: From theory to practice / J. Oliveira, T. Santos, R. Miranda // *Progress in Materials Science*. – 2020. – T. 107. – C. 100590. <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2019.100590>

94. **Gusarov, A. V.** Model of radiation and heat transfer in laser-powder interaction zone at selective laser melting / A. V. Gusarov, I. Yadroitsev, P. Bertrand, I. Smurov // *Journal of Heat Transfer*. – 2009. – T. 131. – № 7. – C. 1–10. <https://doi.org/10.1115/1.3109245>

95. **Yang, Y.** Validated dimensionless scaling law for melt pool width in laser powder bed fusion / Y. Yang [et al.] // *Journal of Materials Processing*

Technology. – 2022. – T. 299. – C. 117316.
<https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2021.117316>

96. **Chernyshikhin, S. V.** Selective laser melting of pre-alloyed NiTi powder: single-track study and FE modeling with heat source calibration / S. V. Chernyshikhin, D. G. Firsov, I. V. Shishkovsky // Materials. – 2021. – T. 14. – № 23. – C. 7486. <https://doi.org/10.3390/ma14237486>

97. **Bogdanova, M.** Mesoscale simulation of laser powder bed fusion with an increased layer thickness for AlSi10Mg alloy / M. Bogdanova // Journal of Manufacturing and Materials Processing. – 2024. – T. 8. – № 1. – C. 7. <https://doi.org/10.3390/jmmp8010007>

98. **Eagar, T.** Temperature fields produced by traveling distributed heat sources / T. Eagar, N. Tsai // Welding Journal. – 1983. – T. 62. – № 12. – C. 346–355.

99. **Hann, D.** A simple methodology for predicting laser weld properties from material and laser parameters / D. Hann, J. Iammi, J. Folkes // Journal of Physics D: Applied Physics. – 2011. – T. 44. – № 44. – C. 445401. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/44/44/445401>

100. **Solyaev, Y.** Gradient models of moving heat sources for powder bed fusion applications / Y. Solyaev, S. Lurie // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2022. – T. 196. – C. 123221. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.123221>

101. **Sefene, E. M.** State-of-the-art of selective laser melting process: A comprehensive review // Journal of Manufacturing Systems. – 2022. – T. 63. – C. 250–274. <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2022.04.002>

102. **Solyaev, Y.** Overmelting and closing of thin horizontal channels in AlSi10Mg samples obtained by selective laser melting / Y. Solyaev, L. Rabinskiy, D. Tokmakov // Additive Manufacturing. – 2019. – T. 30. – C. 100847. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2019.100847>

103. **Chen, Q.** High reflectivity and thermal conductivity Ag–Cu multi-material structures fabricated via laser powder bed fusion / Q. Chen //

Micromachines. – 2023. – T. 14. – № 2. – C. 362.
<https://doi.org/10.3390/mi14020362>

104. **Kempen, K.** Processing AlSi10Mg by selective laser melting: parameter optimisation and material characterisation / K. Kempen, L. Thijs, J. Van Humbeeck, J. P. Kruth // Materials Science and Technology. – 2015. – T. 31. – № 8. – C. 917–923. <https://doi.org/10.1179/1743284714Y.00000000702>

105. **Aversa, A.** Single scan track analyses on aluminium based powders / A. Aversa [et al.] // Journal of Materials Processing Technology. – 2018. – T. 255. – C. 17–25. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2017.11.055>

106. **Dong, S.** Research on deposited tracks and microstructures of AlSi10Mg alloy produced by selective laser melting / S. Dong // Applied Physics A. – 2020. – T. 126. – C. 1–10. <https://doi.org/10.1007/s00339-020-03826-6>

107. **Aboulkhair, N. T.** On the formation of AlSi10Mg single tracks and layers in selective laser melting / N. T. Aboulkhair // Journal of Materials Processing Technology. – 2016. – T. 230. – C. 88–98. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2015.11.016>

108. **Ziman, J. M.** Electrons and Phonons // Oxford: Oxford University Press. – 2001. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198507796.001.0001>

109. **Carslaw, H. S.** Conduction of Heat in Solids / H. S. Carslaw, J. C. Jaeger // Oxford: Clarendon Press. – 1959.

110. **Özisik, M. N.** Heat Conduction / M. N. Özisik // New York: Wiley. – 1993.

111. **Chen, G.** Nanoscale Energy Transport and Conversion // Oxford: Oxford University Press. – 2005.

112. **Poulikakos, D.** Conduction Heat Transfer // Englewood Cliffs: Prentice Hall. – 1994.

113. **Cattaneo, C.** Sulla conduzione del calore // Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena. – 1958. – T. 3. – C. 83–101.

114. **Vernotte, P.** Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur // Comptes Rendus. – 1958. – T. 246. – C. 3154–3155.

115. **Callen, H. B.** Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics // New York: Wiley. – 1985.

116. **Ashby, M. F.** Engineering Materials 1 / M. F. Ashby, D. R. H. Jones // Oxford: Butterworth-Heinemann. – 2012. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-096665-6.00001-5>

117. **Kittel, C.** Introduction to Solid State Physics // New York: Wiley. – 2005.

118. **Ready, J. F.** Effects of High-Power Laser Radiation // New York: Academic Press. – 1971.

119. **Steen, W. M.** Laser Material Processing / W. M. Steen, J. Mazumder // London: Springer. – 2010. <https://doi.org/10.1007/978-1-84996-062-5>

120. **Goldak, J.** A new finite element model for welding heat sources / J. Goldak, A. Chakravarti, M. Bibby // Metallurgical Transactions B. – 1984. – T. 15. – C. 299–305. <https://doi.org/10.1007/BF02667333>

121. **Green, A. E.** A re-examination of the basic postulates of thermomechanics / A. E. Green, P. M. Naghdi // Proceedings of the Royal Society A. – 1991. – T. 432. – C. 171–194. <https://doi.org/10.1098/rspa.1991.0012>

122. **Lykov, A. V.** Teoriya Teploprovodnosti [Theory of Thermal Conductivity] // Moscow: Vysshaya Shkola. – 1967. – 600 c.

123. **Barletta, A.** Hyperbolic heat conduction and local equilibrium: a second law analysis / A. Barletta, Zanchini // IJHMT. – 1997. – T. 40. – C. 1007–1016. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(96\)00211-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00211-6)

124. **Joseph, D. D.** Heat waves / D. D. Joseph, L. Preziosi // Reviews of Modern Physics. – 1989. – T. 61. – № 1. – C. 41–73. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.61.41>

125. **Timoshenko, S.** Theory of Elasticity / S. Timoshenko, J. N. Goodier // New York: McGraw-Hill. – 1970. <https://doi.org/10.1115/1.3408648>

126. **Boley, B. A.** Theory of Thermal Stresses / B. A. Boley, J. H. Weiner // Dover Publications. – 1997.
127. **Fauchais, P.** Thermal and mechanical modeling in selective laser melting of metals / P. Fauchais // Progress in Materials Science. – 2014. – T. 65. – C. 1–66.
128. **Li, Y.** Heat transfer and phase transition in the selective laser melting process / Y. Li, K. Zhou, S. Tor // Int J Heat and Mass transf. – 2017. – T. 108(B). – C. 2408–2416 <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.01.093>
129. **Tan, P.** A thermo-metallurgical-mechanical model for selective laser melting of AlSi10Mg / P. Tan, F. Shen, B. Li, K. Zhou // Mater. & Des. – 2019. – T. 168. – C. 107642. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.107642>
130. **Li, C.** Numerical simulation of thermal behavior and residual stress in selective laser melting of AlSi10Mg / C. Li // Materials & Design. – 2017. – T. 136. – C. 331-340.
131. **Verhaeghe, F.** A pragmatic model for selective laser melting with evaporation / F. Verhaeghe, T. Craeghs, J. Heulens, L. Pandelaers // Acta Mater. – 2009. – T. 57. – C. 6006–6012. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2009.08.027>

Приложение 1

$$\begin{aligned}
u_{11}^F(q^2, p^2) &= \frac{4(-1+\beta)\sqrt{\beta}q\gamma^6}{315a^2} \left(\left(a\sqrt{\beta} \left((A-B) \left[\left(\gamma\eta^2 + \frac{3\gamma^2-1}{8} \right) A + 2\gamma B \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) \right] + \frac{B}{2} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{bi(A-B)}{4} \right) + \frac{(A-B)a}{2} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \right) \\
u_{12}^F(q^2, p^2) &= \frac{\sqrt{\beta}}{45a^3} \left((\beta-1)\gamma^3 \left(\left(\left(\left(-\frac{1}{8} + \gamma^4 - \frac{1}{2}\gamma^2 \right) A^2 + 8 \left(\eta^4 + \frac{3}{4}\eta^2\gamma^2 - \frac{1}{4}\gamma^3 - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{16}\gamma \right) \gamma BA + \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + 16\gamma^2 B^2 \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right)^2 \right) a^2 - b\sqrt{\beta} \left(-2 + \left(4\gamma B\eta^2 + A\gamma^2 - B\gamma^2 - \frac{1}{2}A \right) \right) a + b^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + 4a \left(\left(-1 + \left(\left(\eta^2 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2} \right) A + 2\gamma B\eta^2 - \frac{B\gamma^2}{2} - \frac{\beta A_0}{4} \right) \right) a - \frac{b}{2} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \right) \right) \\
u_{13}^F(q^2, p^2) &= \frac{\gamma^6(\beta-1)(A-B)}{60a} \\
u_{14}^F(q^2, p^2) &= \frac{2(\beta-1)\gamma^3}{3\sqrt{\frac{1}{\beta}}a^2} \left(\left(\left(-2 + \left((A-B)\gamma^2 + 4\gamma B\eta^2 - \frac{A}{2} \right) \right) a - b \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + 2a \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \right) \\
u_{21}^F(q^2, p^2) &= - \left(2B\gamma\sqrt{1/\beta} \left((2B\gamma+A)^3 \eta^6 - \frac{\eta^4}{4} (2B\gamma+A) (-6B(-2B+A)\gamma^3 - A(-2B+A)\gamma^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2((\beta+2)A - \beta A_0) B\gamma + A\beta(A-A_0) \right) + \frac{(A-A_0)^2(2B\gamma+A)\beta^2}{32} + \frac{\gamma}{16} (-8B^2\gamma^2 + 4 \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) A(-1+\gamma)B + \right. \\
&\quad \left. + A^2\gamma) (A-A_0)\beta - \frac{\gamma}{32} (16B(A-B)(A-3B)\gamma^4 + (3A^3 - 12A^2B + 8AB^2)\gamma^3 - 8AB(-2B+A)\gamma^2 - 2A^2B) \right) \eta^2 + \\
&\quad - (A-A_0)^3 \beta^3 - \frac{\gamma^2(A-A_0)^2(-2B+A)\beta^2}{128} + \frac{3\gamma^4 \left(A^2 - 4AB + \frac{8}{3}B^2 \right) (A-A_0)\beta}{128} + \\
&\quad - \frac{(5A^3 - 30A^2B + 40AB^2 - 16B^3 + 16A^2 - 16B^2)\gamma^6}{128} \Big) + A \left((2B\gamma+A)^3 \eta^4 \left(\frac{(3A^2 - 12AB + 8B^2)\gamma^4}{16} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\eta^2 B(-2B+A)\gamma^3 + A(-2B+A) \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) \gamma^2 - 2AB\gamma\eta^2 - \frac{A^2(16\eta^2+1)}{16} \right) B\gamma \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{C\eta^2}{135} \right. \\
u_{22}^F(q^2, p^2) &= \frac{-(A^2-B^2)\eta^2\gamma^4 C}{90} \left[\sqrt{\beta} \left(\left(\eta^2 + \gamma^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + 4\gamma B\eta^2 - B\gamma^2 + \frac{\beta A_0}{4} \right) + A \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \right] \\
u_{23}^F(q^2, p^2) &= \frac{\eta^2 C}{15} \left(2 \left(\left(\frac{3}{8}A^2 - \frac{3}{2}AB + B^2 \right) \frac{\gamma^4}{4} + B\eta^2(-2B+A)\gamma^3 + \left(4B^2\eta^4 + \left(\left(-\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) A - \frac{\beta A_0}{4} \right) \frac{B}{2} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{A}{4} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) \right) \gamma^2 + 4B\eta^2 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) A + \frac{\beta A_0}{8} \right) \gamma + \left(\eta^4 - \frac{1}{32}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta\eta^2 \right) A^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\beta A_0\left(\eta^2+\frac{\beta}{4}\right)\frac{A}{4}-\frac{A_0^2\beta^2}{32}\Big)B\gamma\sqrt{1/\beta}+\left(\frac{B(-2B+A)\gamma^3}{2}+4B^2\eta^2\gamma^2+4\left(\eta^2-\frac{1}{8}\right)BA\gamma+A^2\eta^2\right)\left(\eta^2-\frac{1}{2}\right)A\Big) \\
u_{24}^F(q^2,p^2) &= \frac{\eta^2\gamma^4(A^2-B^2)\sqrt{1/\beta}C}{6} \\
u_{25}^F(q^2,p^2) &= -\frac{2}{3}\left(2\left(\left(\frac{A}{4}-\frac{B}{2}\right)\gamma^2+2\gamma B\eta^2+\left(\eta^2-\frac{\beta}{4}\right)A+\frac{\beta A_0}{4}\right)B\gamma\sqrt{\frac{1}{\beta}}+A\left(\eta^2-\frac{1}{2}\right)(2B\gamma+A)\right)\eta^2C \\
u_{32}^F(q^2,p^2) &= \frac{\left((A-A_0)^2\beta^2-2\left(A-\frac{5A_0}{3}\right)(A-A_0)\beta+A^2-\frac{10AA_0}{3}+5A_0^2\right)\chi\beta^3}{1920\sqrt{1/\beta}(-1+\beta)^3} \\
u_{34}^F(q^2,p^2) &= -\frac{\chi\left((A-A_0)\beta-A+3A_0\right)\beta^{\frac{5}{2}}}{48(\beta-1)^2}
\end{aligned}$$

Приложение 2

$$v_{11}(q, p) = \left(\left(\left((A+B) \left(-\frac{8}{7}\eta^2\gamma + \gamma^2 - \frac{1}{7} \right) A - \frac{4\gamma B(-4\eta^2 + \gamma)}{7} \right) p + \frac{4q^2 B}{7} \right) a - \frac{2bp(A+B)}{7} \right) \sqrt{1/\beta} +$$

$$+ \frac{4A}{7} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) (A+B) ap \frac{\gamma^6 i(-1+\beta)}{720\sqrt{1/\beta} a^2}$$

$$v_{12}(q, p) = -\gamma^3 \left(\left(\left(\left(-\frac{1}{8} + \gamma^4 - \frac{1}{2}\gamma^2 \right) A^2 - 2\gamma \left(-4\eta^4 - 3\gamma^2\eta^2 + \gamma^3 + 2\eta^2 - \frac{1}{4}\gamma \right) BA + \left(B^2\gamma^2(-4\eta^2 + \gamma)^2 \right) p + \right. \right. \right.$$

$$+ 3\gamma \left(A\gamma - \frac{2B(-4\eta^2 + \gamma)}{3} \right) q^2 \left. \right) a^2 - b \left(\left(\left(\gamma^2 - \frac{1}{2} \right) A - \gamma B(-4\eta^2 + \gamma) \right) p + 2q^2 \right) a + b^2 p \right) \sqrt{1/\beta} +$$

$$+ 2A \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\left(\left(\left(2\eta^2 + \gamma^2 + \frac{\beta}{2} - 1 \right) A + 4\gamma B\eta^2 - \gamma^2 B - \frac{A_0\beta}{2} \right) p + 2q^2 \right) a - bp \right) a \frac{i(-1+\beta)}{360\sqrt{1/\beta} a^3}$$

$$v_{13}(q, p) = \frac{\gamma^6 ip(-1+\beta)(A+B)}{60a}$$

$$v_{14}(q, p) = \gamma^3 \left(\left(\left(\left((A-B)\gamma^2 + 4\gamma B\eta^2 - \frac{A}{2} \right) p + 2q^2 \right) a - bp \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + 2A \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) ap \right) \frac{i(-1+\beta)}{12\sqrt{1/\beta} a^2}$$

$$v_{21}(q, p) = 2\gamma B \left(\left(-B^3 + \left(-1 + \frac{5A}{2} \right) B^2 - \frac{15A^2 B}{8} + \frac{5A^3}{16} + A^2 \right) \frac{\gamma^6}{8} + \frac{B\eta^2(A-B)(A-3B)\gamma^5}{2} + (-6B^3\eta^4 + \right.$$

$$+ \left(\left(\frac{1}{4}\eta^2 + 3\eta^4 - \frac{1}{16}\beta \right) A + \frac{A_0\beta}{16} \right) B^2 - \frac{3A}{8} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{A_0\beta}{4} \right) B + \frac{3A^2}{32} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{A_0\beta}{4} \right) \right) \gamma^4 +$$

$$+ 2 \left(4B^2\eta^4 + \left(\left(-2\eta^2 + \frac{\beta}{4} + \frac{1}{4} \right) A - \frac{A_0\beta}{4} \right) B + A \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) A + \frac{A_0\beta}{8} \right) \right) B\eta^2\gamma^3 +$$

$$+ \left(12 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{12} - \frac{1}{6} \right) A + \frac{A_0\beta}{12} \right) \eta^4 B^2 + \left(\left(-\eta^4 + \frac{1}{32}\beta^2 + \frac{1}{4}\beta\eta^2 \right) A^2 - \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{\beta A_0 A}{4} + \right.$$

$$+ \frac{\beta^2 A_0^2}{32} \right) \left(\frac{B}{2} - \frac{A^2}{4} \right) \gamma^2 + 6B \left(\left(\eta^4 - \frac{(1+\beta)\eta^2}{6} - \frac{(-1+\beta)^2}{96} \right) A^2 + \frac{A_0\beta \left(\eta^2 + \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) A}{6} - \frac{\beta^2 A_0^2}{96} \right) \eta^2\gamma +$$

$$+ \left(-\frac{1}{128}\beta^3 + \eta^6 - \frac{1}{4}\beta\eta^4 - \frac{1}{32}\beta^2\eta^2 \right) A^3 + \left(\eta^4 + \frac{1}{4}\beta\eta^2 + \frac{3}{32}\beta^2 \right) \frac{\beta A_0 A^2}{4} - \left(\eta^2 + \frac{3\beta}{4} \right) \frac{\beta^2 A_0^2 A}{32} +$$

$$+ \frac{\beta^3 A_0^3}{128} \right) \sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \left(\frac{3}{16} \left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3}B^2 \right) B\gamma^5 + 2B^2\eta^2(-2B+A)\gamma^4 + B(8B^2\eta^4 + \right.$$

$$+ A(-2\eta^2 + \frac{1}{4})B + A^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) \left. \right) \gamma^3 + 12AB^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{6} \right) \eta^2\gamma^2 + 6 \left(\eta^4 - \frac{1}{6}\eta^2 - \frac{1}{96} \right) A^2 B\gamma + A^3\eta^4 \left. \right) \frac{piC\eta^2}{315}$$

$$v_{22}(q, p) = \left(\left(\left(\eta^2 + \gamma^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + 4\gamma B\eta^2 - \gamma^2 B + \frac{A_0\beta}{4} \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \right) \frac{\gamma^4 pi(A^2 - B^2)C\eta^2}{90}$$

$$\begin{aligned}
v_{23}(q, p) = & - \left(2\gamma^2 \left(\left(\frac{3}{8}A^2 - \frac{3}{2}BA + B^2 \right) \frac{\gamma^4}{4} + B\eta^2(-2B + A)\gamma^3 + \left(4B^2\eta^4 + \left(\left(-\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) A - \frac{A_0\beta}{4} \right) \left(\frac{B}{2} - \frac{A}{4} \right) \right) + \right. \right. \\
& + 4B\eta^2 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) A + \frac{A_0\beta}{8} \right) \gamma + \left(\eta^4 - \frac{1}{32}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta\eta^2 \right) A^2 + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{\beta A_0 A}{4} - \frac{\beta^2 A_0^2}{32} \Big) \gamma B \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \\
& + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \left(\frac{B(-2B + A)\gamma^3}{2} + 4B^2\gamma^2\eta^2 + 4 \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) AB\gamma + A^2\eta^2 \right) \Big) \frac{piC\eta^2}{15} \\
v_{24}(q, p) = & - (A^2 - B^2) \sqrt{1/\beta} \frac{Cip\gamma^4\eta^2}{6} \\
v_{24}(q, p) = & \left(2\gamma B \left(\left(\frac{A}{4} - \frac{B}{2} \right) \gamma^2 + 2\gamma B\eta^2 + \left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{A_0\beta}{4} \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A (2\gamma B + A) \right) \frac{2Cip\eta^2}{3} \\
v_{32}(q, p) = & - \frac{ip\chi\beta^3(8v^4 - 20Av^2 + 20v^2A_0 + 15A^2 - 30AA_0 + 15A_0^2)}{5760\sqrt{1/\beta}} \\
v_{34}(q, p) = & \frac{ip\chi\beta^2(-2v^2 + 3A - 3A_0)}{48\sqrt{1/\beta}}
\end{aligned}$$

Приложение 3

$$\begin{aligned}
w_{11}(q, p) &= \left(\frac{A(2\eta^2 - 1)(-8B\gamma\eta^2 - 4Aa\eta^2 - 2A\gamma^2a + 2B\gamma^2a - \beta aA + \beta aA_0 + Aa + 2b)}{a^2\sqrt{1/\beta}} \right. \\
&+ \frac{2}{a^2} \left(-8ABa\eta^4\gamma - \frac{AB\eta\gamma^{13}(pA - qA + pB + qB)^2(-1 + \beta)^2 q^2 i^4 t^{12}}{21600a} - A^2a\gamma^4 + 2ABa\gamma^4 + \right. \\
&+ 2ABa\eta^2\gamma + 4Bb\eta^2\gamma + Ab\gamma^2 - Bb\gamma^2) - \frac{2}{a} B^2\gamma^2(4\eta^2 - \gamma) + \left. -\frac{2}{a^3} b^2 \right) \frac{i^2 q \gamma^2 (-1 + \beta)(p + q)}{5040} \\
w_{12}(q, p) &= \frac{((B - A)q + p(A + B))\gamma^5 i^2 q (-1 + \beta)}{360a} \\
w_{13}(q, p) &= \left(\left(\sqrt{\frac{1}{\beta}}(A - B)\gamma^2 + 4B\sqrt{\frac{1}{\beta}}\gamma\eta^2 + A(2\eta^2 - 1) \right) a - \sqrt{\frac{1}{\beta}}b \right) \frac{i^2 q \gamma^2 (p + q)(-1 + \beta)}{60\sqrt{\frac{1}{\beta}}a^2} \\
w_{15}(q, p) &= -\frac{i^2 q \gamma^2 (p + q)(-1 + \beta)}{3a} \\
w_{13}(q, p) &= \left(\left(\sqrt{\frac{1}{\beta}}(A - B)\gamma^2 + 4B\sqrt{\frac{1}{\beta}}\gamma\eta^2 + A(2\eta^2 - 1) \right) a - \sqrt{\frac{1}{\beta}}b \right) \frac{i^2 q \gamma^2 (p + q)(-1 + \beta)}{60\sqrt{\frac{1}{\beta}}a^2} \\
w_{21}(q, p) &= -\frac{1}{315} \left(2 \text{table} \left(\left[1 = \frac{\sqrt{A\gamma^2 + s^2}}{\gamma} \right] \right) C \left(B \left(\frac{(-B^3 + (-1 + \frac{5A}{2})B^2 - \frac{15A^2B}{8} + \frac{5A^3}{16} + A^2)\gamma^6}{8} + \right. \right. \right. \\
&+ \frac{B\eta^2(A - B)(A - 3B)\gamma^5}{2} + \left(-6B^3\eta^4 + \left(\left(3\eta^4 + \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{16}\beta \right) A + \frac{\beta A_0}{16} \right) B^2 - \frac{3AB}{8} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) + \right. \\
&+ \frac{3A^2}{32} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) \gamma^4 + 2B\eta^2 \left(4B^2\eta^4 + \left(\left(-2\eta^2 + \frac{\beta}{4} + \frac{1}{4} \right) A - \frac{\beta A_0}{4} \right) B + \right. \\
&+ A \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) A + \frac{\beta A_0}{8} \right) \gamma^3 + \left(12\eta^4 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{12} - \frac{1}{6} \right) A + \frac{\beta A_0}{12} \right) B^2 + \left(\left(-\eta^4 + \frac{1}{32}\beta^2 + \frac{1}{4}\beta\eta^2 \right) A^2 + \right. \\
&\left. \left. - \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{A\beta A_0}{4} + \frac{A_0^2\beta^2}{32} \right) \left(\frac{B}{2} - \frac{A}{4} \right) \right) \gamma^2 \\
w_{22}(q, p) &= -\frac{1}{90} \text{table} \left(\left[1 = \frac{\sqrt{A\gamma^2 + s^2}}{\gamma} \right] \right) (A^2 - B^2) \left(\left(\left(\eta^2 + \gamma^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + 4B\gamma\eta^2 - B\gamma^2 + \frac{A_0\beta}{4} \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \right. \\
&+ A \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \gamma^4 C \eta^2 \\
w_{23}(q, p) &= \frac{1}{15} \left(2 \text{table} \left(\left[1 = \frac{\sqrt{A\gamma^2 + s^2}}{\gamma} \right] \right) C \eta^2 \left(\left(\frac{3}{8} A^2 - \frac{3}{2} AB + B^2 \right) \frac{\gamma^4}{4} + B\eta^2 (-2B + A) \gamma^3 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(4B^2\eta^4 + \left(\left(-\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) A - \frac{\beta A_0}{4} \right) \frac{B}{2} + \frac{A}{4} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) - \frac{1}{8} \right) A + \frac{\beta A_0}{8} \right) \gamma + \\
& + \left(\eta^4 - \frac{1}{32} \beta^2 - \frac{1}{4} \beta \eta^2 \right) A^2 + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{A \beta A_0}{4} - \frac{A_0^2 \beta^2}{32} \right) B \gamma \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \left(\frac{B(-2B+A)\gamma^3}{2} + \right. \\
& + 4B^2\eta^2\gamma^2 + 4 \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) B A \gamma + A^2 \eta^2 \left. \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{A}{2} \\
w_{24}(q, p) &= \frac{C\eta^2\gamma^4(A^2 - B^2)}{6} \sqrt{\frac{1}{\beta}} \text{table} \left(\left[1 = \frac{\sqrt{A\gamma^2 + s^2}}{\gamma} \right] \right) \\
w_{25}(q, p) &= -4 \text{table} \left(\left[1 = \frac{\sqrt{A\gamma^2 + s^2}}{\gamma} \right] \right) \left(\left(\left(\frac{A}{4} - \frac{B}{2} \right) \gamma^2 + 2\gamma B \eta^2 + \left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) B \gamma \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \right. \\
& + \frac{A}{2} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) (2B\gamma + A) \left. \right) \frac{C\eta^2}{3} \\
w_{31}(q, p) &= -\frac{\chi \beta^4 A_0^3}{5040(-1 + \beta)^4} \\
w_{33}(q, p) &= \frac{\chi \beta^3 A_0^2}{120(-1 + \beta)^3} \\
w_{35}(q, p) &= -\frac{\chi \beta^2 A_0}{6(-1 + \beta)^2}
\end{aligned}$$

Приложение 4

$$\begin{aligned}
\sigma_{x11}(q, p) &= \left(\left(\gamma \left((4\eta^2 + \gamma)A - 2B(-4\eta^2 + \gamma) \right) (A - B)i^2 + 2\gamma Bp \right) a - bi^2(A - B) \right) \sqrt{1/\beta} + \\
&+ 2 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) i^2 A (A - B) a \frac{\eta^2(-1 + \beta)\gamma^4 q^2}{1260\sqrt{1/\beta} a^2} \\
\sigma_{x12}(q, p) &= - \left(\left(\left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3}B^2 \right) \gamma^3 + \frac{32B\eta^2(A - 2B)\gamma^2}{3} + \frac{128\gamma B^2\eta^4}{3} + \frac{16B(4\eta^4 - \eta^2)A}{3} \right) i^2 + \right. \\
&- 8p\gamma^2 \left(\left(A - \frac{2B}{3} \right) \gamma + \frac{8B\eta^2}{3} \right) \gamma a^2 - \frac{4b \left((A - 2B)\gamma + 8B\eta^2 \right) i^2 - 4\gamma p}{3} \gamma a + \frac{8b^2 i^2}{3} \sqrt{1/\beta} + \\
&+ \frac{8}{3} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A a \left(\left((A - 2B)\gamma^2 + 8\gamma B\eta^2 + (4\eta^2 + \beta - 1)A - A_0\beta \right) i^2 - 4p\gamma^2 \right) a - 2bi^2 \left. \right) \frac{\eta^2(-1 + \beta)\gamma q^2}{480\sqrt{1/\beta} a^3} \\
\sigma_{x13}(q, p) &= - \frac{q^2 \gamma^4 \eta^2(-1 + \beta) i^2 (A - B)}{30a} \\
\sigma_{x14}(q, p) &= \left(\left(\gamma \left((A - 2B)\gamma + 8B\eta^2 \right) i^2 - 4\gamma p \right) a - 2bi^2 \right) \sqrt{1/\beta} + 4 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) i^2 A a \frac{\eta^2(-1 + \beta)\gamma q^2}{12\sqrt{1/\beta} a^2} \\
\sigma_{x22}(q, p) &= \frac{2(A^2 - B^2)C\eta^2\gamma^4}{45} \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^4 + \left(\gamma^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2} \right) \eta^2 + \frac{3\gamma^4}{4} - \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\beta^2}{32} + \frac{\beta}{8} \right) A^2 + \right. \\
&+ \left(8 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \gamma \left(\eta^4 + (5\gamma^2 - \beta - \gamma - 3) \frac{\eta^2}{8} + \frac{\gamma}{32} (-6\gamma^2 + \beta + 2) \right) B + \left(\frac{\beta A_0}{2} + p^2 \right) \frac{\eta^4}{2} + \left(\left(\frac{\beta A_0}{2} + p^2 \right) \gamma^2 + \right. \right. \\
&+ \frac{\beta^2 A_0}{8} - \left(\frac{p^2}{2} + A_0 \right) \frac{\beta}{2} - \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} \left. \right) \frac{\eta^2}{2} - \left(p^2 + q^2 - \frac{\beta A_0}{2} \right) \frac{\gamma^2}{4} + \left(p^2 + q^2 - \frac{1}{2} \beta A_0 + A_0 \right) \frac{\beta}{16} \left. \right) A + \\
&+ 12 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \gamma^2 \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right)^2 B^2 + 2 \left(\left(\frac{\beta A_0}{2} + p^2 \right) \eta^2 - \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} - \frac{\beta A_0}{4} \right) \gamma \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) B + \left(\left(p^2 - \frac{\beta A_0}{4} \right) \eta^2 + \right. \\
&- \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} + \frac{\beta A_0}{8} \left. \right) \frac{A_0 \beta}{8} \sqrt{\frac{1}{\beta}} + 2 \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^2 + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{3}{8} \right) A + 2 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \gamma \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) B + \frac{\eta^2 p^2}{4} - \frac{p^2}{8} + \right. \\
&- \frac{q^2}{8} \left. \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A + \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^6 - \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\eta^4}{2} - \left(\frac{1}{4} \beta^2 - \beta \right) \frac{\eta^2}{8} - \frac{\beta^2(\beta - 2)}{128} \right) A^3 + \left(\left(\frac{\beta A_0}{2} + p^2 \right) \eta^6 \right. \right. \\
&+ \left(\frac{\beta^2 A_0}{4} + \left(-\frac{p^2}{2} - A_0 \right) \beta - p^2 - q^2 \right) \frac{\eta^4}{2} - \left(-\frac{3\beta^2 A_0}{2} + (p^2 + 4A_0)\beta - 4p^2 - 4q^2 - 4A_0 \right) \frac{\beta \eta^2}{32} + \\
&+ \left(p^2 + q^2 + -\frac{3}{2} \beta A_0 + 2A_0 \right) \frac{\beta^2}{64} \left. \right) \frac{A^2}{2} + \left(\left(p^2 - \frac{\beta A_0}{4} \right) \eta^4 + \left(-\frac{3\beta^2 A_0}{8} + \frac{(p^2 + A_0)\beta}{2} - p^2 - q^2 \right) \frac{\eta^2}{2} + \right. \\
&- \left(p^2 + q^2 - \frac{3}{4} \beta A_0 + \frac{1}{2} A_0 \right) \frac{\beta}{8} \left. \right) \frac{A_0 \beta A}{8} - \left(\left(p^2 - \frac{\beta A_0}{2} \right) \eta^2 - \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} + \frac{\beta A_0}{4} \right) \frac{A_0^2 \beta^2}{64} \left. \right) \gamma \sqrt{\frac{1}{\beta}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \left(\left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3} B^2 \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{3B\gamma^5}{16} + 2\eta^2 B^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) (A - 2B) \gamma^4 + B \left(4(2\eta^6 - \eta^4) B^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left(-\frac{3}{8} - 2\eta^4 + \frac{7}{4} \eta^2 \right) A - \frac{\eta^2 p^2}{2} + \frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{4} \right) B + \left(\left(\eta^4 - \frac{7}{8} \eta^2 + \frac{3}{16} \right) A + \frac{\eta^2 p^2}{4} - \frac{p^2}{8} - \frac{q^2}{8} \right) A \gamma^3 + \\
& + 12\eta^2 B^2 \left(\left(\eta^4 - \frac{5}{6} \eta^2 + \frac{1}{6} \right) A + \frac{\eta^2 p^2}{6} - \frac{p^2}{12} - \frac{q^2}{12} \right) \gamma^2 + 6 \left(\left(\eta^6 - \eta^4 + \frac{9}{32} \eta^2 - \frac{1}{64} \right) A + \right. \\
& + \left. \frac{1}{3} \left(\eta^2 p^2 - \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} q^2 \right) AB \gamma + \eta^2 A^2 \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right)^2 A + \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) - \frac{p^2}{4} + \frac{\eta^2 p^2}{2} - \frac{q^2}{4} \right) \right) \\
\sigma_{x24}(q, p) = & - \left(\left((4B\gamma + A) \eta^4 + \left(\gamma^2 - \frac{\beta}{4} - 1 \right) A - B\gamma^2 - 2B\gamma + \frac{p^2}{2} + \frac{\beta A_0}{4} \right) \eta^2 + \left(-\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\beta}{8} + \frac{1}{4} \right) A + \right. \\
& + \left. \left(\frac{B\gamma^2}{2} - \frac{p^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{\beta A_0}{8} \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right)^2 A \right) \frac{2\eta^2 \gamma^4 (A^2 - B^2) C}{3} \\
\sigma_{x25}(q, p) = & 2B \left(\left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3} B^2 \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{3\gamma^4}{32} + \eta^2 B \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) (A - 2B) \gamma^3 + (2(2\eta^6 - \eta^4) B^2 + \right. \\
& - \left(-\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A - \left(p^2 + \frac{\beta A_0}{2} \right) \frac{\eta^2}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4} + \frac{\beta A_0}{8} \right) \frac{B}{2} + \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\beta A_0}{2} + p^2 \right) \frac{\eta^2}{2} - \frac{p^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{\beta A_0}{8} \right) \frac{A}{4} \gamma^2 + 4\eta^2 B \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{3}{8} \right) A + \left(\frac{\beta A_0}{2} + p^2 \right) \frac{\eta^2}{4} + \right. \\
& - \left. \frac{p^2}{8} - \frac{q^2}{8} - \frac{\beta A_0}{16} \right) \gamma + \left(\eta^4 - \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\eta^2}{2} - \frac{\beta^2}{32} + \frac{\beta}{8} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A^2 + \left(\left(\frac{\beta A_0}{2} + p^2 \right) \eta^4 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\beta^2 A_0}{4} + \left(-\frac{p^2}{2} - A_0 \right) \beta - p^2 - q^2 \right) \frac{\eta^2}{2} + \left(p^2 + q^2 - \frac{1}{2} \beta A_0 + A_0 \right) \frac{\beta}{8} \right) \frac{A}{2} + \left(\left(p^2 - \frac{\beta A_0}{4} \right) \eta^2 + \right. \\
& - \left. \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} + \frac{\beta A_0}{8} \right) \frac{A_0 \beta}{8} \gamma \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{(A - 2B) B \gamma^3}{2} + 2(2\eta^4 - \eta^2) B^2 \gamma^2 + \right. \\
& + 4B \left(\left(\eta^4 - \frac{7}{8} \eta^2 + \frac{3}{16} \right) A + \frac{\eta^2 p^2}{4} - \frac{p^2}{8} - \frac{q^2}{8} \right) \gamma + A \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right)^2 A - \frac{p^2}{4} + \frac{\eta^2 p^2}{2} - \frac{q^2}{4} \right) \left. \right) \frac{8\eta^2 C}{3} \\
\sigma_{x32}(q, p) = & \frac{1}{11520\sqrt{1/\beta}} \left(a^3 (A - A_0)^2 \left(-6\eta^2 p^2 + A\eta^2 - \eta^2 A_0 + 3p^2 - 3q^2 - \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A_0 \right) \beta^3 \right. \\
& - 2a^2 (A - A_0) b \left(-4\eta^2 p^2 + A\eta^2 - \eta^2 A_0 + 2p^2 - 2q^2 - \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A_0 \right) \beta^2 + \\
& + 8a \left(-2\eta^2 p^2 + A\eta^2 - \eta^2 A_0 + p^2 - q^2 - \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A_0 \right) b^2 \beta + (16\eta^2 - 8) b^3 \\
\sigma_{x34}(q, p) = & - \frac{1}{96\sqrt{1/\beta} a^3 \beta} \left(a^2 (A - A_0) \left(\left(-\eta^2 + \frac{1}{2} \right) A_0 + (-4p^2 + A) \eta^2 + 2p^2 - 2q^2 - \frac{A}{2} \right) \beta^2 + \right. \\
& - 4a \left(\left(-\eta^2 + \frac{1}{2} \right) A_0 + (-2p^2 + A) \eta^2 + p^2 - q^2 - \frac{A}{2} \right) b \beta - 8b^2 \eta^2 + 4b \left. \right)^2
\end{aligned}$$

Приложение 5

$$\begin{aligned}
\sigma_{y11}(q, p) &= \left(\left(i^2 (A+B) \left(\left(\left(-\frac{4\eta^2}{3} + \gamma \right) A - \frac{2B(-4\eta^2 + \gamma)}{3} \right) \gamma a - \frac{b}{3} \right) p + \frac{2q^2 \gamma^2 B a}{3} \right) \sqrt{1/\beta} + \right. \\
&+ 2i^2 (A+B) p a \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{A}{3} \left. \frac{p \gamma^4 \eta^2 (-1 + \beta)}{420 a^2} \right) \\
\sigma_{y12}(q, p) &= \left(\left(i^2 \left(\sqrt{1/\beta} \left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3} B^2 \right) \gamma^4 + \frac{32}{3} (-2B + A) \sqrt{1/\beta} B \eta^2 \gamma^3 + \left((2\eta^2 - 1) A^2 + \right. \right. \right. \\
&+ 2B(-2\eta^2 + 1) A + 32B^2 \sqrt{1/\beta} \eta^4 \left. \left. \left. \frac{4\gamma^2}{3} + 64B\eta^2 A \left(\left(\sqrt{1/\beta} + 1 \right) \eta^2 - \frac{\sqrt{1/\beta}}{4} - \frac{1}{2} \right) \frac{\gamma}{3} + \right. \right. \right. \\
&+ \frac{32}{3} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \left(\left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A - \frac{A_0 \beta}{4} \right) \left. \left. \left. \right) p + 8q^2 \gamma^2 \left(\sqrt{1/\beta} \left(A - \frac{2B}{3} \right) \gamma^2 + \frac{8B\sqrt{1/\beta} \gamma \eta^2}{3} + \right. \right. \right. \\
&+ \frac{2A(2\eta^2 - 1)}{3} \left. \left. \left. \right) a^2 - \left(i^2 \left((-2B + A) \sqrt{1/\beta} \gamma^2 + 8B\sqrt{1/\beta} \gamma \eta^2 + 2A(2\eta^2 - 1) \right) p + 4\sqrt{1/\beta} \gamma^2 q^2 \right) \frac{4ba}{3} + \right. \right. \\
&\left. \left. \left. + \frac{8\sqrt{1/\beta} b^2 i^2 p}{3} \right) \right) \frac{p \gamma \eta (-1 + \beta)^2}{480 \sqrt{1/\beta} a^3} \right) \\
\sigma_{y13}(q, p) &= -\frac{\gamma^4 i^2 p^2 (A+B)(-1 + \beta) \eta^2}{30a} \\
\sigma_{y14}(q, p) &= -\left(\left(\left(i^2 \left((A - 2B) \gamma + 8B\eta^2 \right) p + 4\gamma q^2 \right) \gamma a - 2bi^2 p \right) \sqrt{1/\beta} + 4i^2 p a \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \right) \frac{p \gamma \eta^2 (\beta - 1)}{12 \sqrt{1/\beta} a^2} \\
\sigma_{y21}(q, p) &= \frac{4C\eta^2}{315} \left(2 \left(\frac{35}{2048} \left(\frac{128B^5}{35} + \frac{64}{5} \left(\frac{6}{7} - A \right) B^4 + 16 \left(A^2 - \frac{4}{5} A \right) B^3 + 8 \left(-A^3 - \frac{64}{35} A^2 \right) B^2 + \right. \right. \right. \\
&+ A^3 \left(A + \frac{64}{5} \right) B + \frac{128A^4}{35} \left. \left. \left. \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \gamma^8 - \frac{\eta^2}{4} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) (A - B) (-4B^4 + (5A - 3) B^3 + (-A^2 - 3A) B^2 + \right. \right. \right. \\
&+ A^2 B + A^3) \gamma^7 + \frac{1}{128} \left(\left(\frac{384(2\eta^6 - \eta^4) B^4}{5} + 2 \left(-96 \left(\eta^4 + \frac{1}{60} \eta^2 - \frac{1}{240} \beta - \frac{1}{120} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A + \right. \right. \right. \\
&- \frac{2}{5} (A_0 \beta + 2p^2) \eta^2 + \frac{A_0 \beta}{5} + \frac{2p^2}{5} + \frac{2q^2}{5} \left. \left. \left. \right) B^3 + \left((2 + 48\eta^6 - 16\eta^4 + 2(-4 - \beta) \eta^2 + \beta) A^2 + \right. \right. \right. \\
&+ \left(-\frac{4}{5} - \frac{16\eta^4}{5} + 2 \left(\frac{8}{5} + \left(\frac{2}{5} + A_0 \right) \beta + 2p^2 \right) \eta^2 - \left(\frac{2}{5} + A_0 \right) \beta - 2p^2 - 2q^2 \right) A - \frac{4(A_0 \beta + 2q^2) \eta^2}{5} + \\
&+ \frac{2A_0 \beta}{5} + \frac{4p^2}{5} + \frac{4q^2}{5} \left. \left. \left. \right) B^2 - 6 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A + \left(q^2 + \frac{A_0 \beta}{2} \right) \frac{\eta^2}{2} - \frac{p^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{A_0 \beta}{8} \right) A^2 B + \right. \right. \\
&\left. \left. \left. \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A + \left(q^2 + \frac{A_0 \beta}{2} \right) \frac{\eta^2}{2} - \frac{p^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{A_0 \beta}{8} \right) A^2 \left(A + \frac{16}{5} \right) \right) 5B\gamma^6 + \eta^2 B^2 (8(-2\eta^6 + \eta^4) B^3 + \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(8 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^4 + \frac{3}{8} \eta^2 - \frac{3}{64} \beta - \frac{9}{64} \right) A + \left(q^2 + \frac{A_0 \beta}{2} \right) \frac{3\eta^2}{4} - \frac{3A_0 \beta}{16} - \frac{3p^2}{8} - \frac{3q^2}{8} \right) B^2 + \\
& + \frac{(2\eta^2 q^2 - p^2 - q^2)}{6} \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) A^2 \Big) B \gamma^3 \Big) + 24\eta^2 B^2 \left(\left(\eta^6 - \eta^4 + \frac{7}{24} \eta^2 - \frac{1}{48} \right) A + \right. \\
& - \left. \left(\eta^2 - \frac{1}{6} \right) \frac{(-2\eta^2 q^2 + p^2 + q^2)}{8} \right) A \gamma^2 + 8B \left(\left(\eta^6 - \frac{9}{16} \eta^4 + \frac{3}{64} \eta^2 + \frac{1}{512} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A + \right. \\
& - \left. \frac{3(-2\eta^2 q^2 + p^2 + q^2)}{16} \left(\eta^4 - \frac{1}{6} \eta^2 - \frac{1}{96} \right) \right) A^2 \gamma + \eta^4 \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right)^2 A - \frac{q^2}{4} + \frac{\eta^2 q^2}{2} - \frac{p^2}{4} \right) A^3 \Big) \Big) \\
\sigma_{y22}(q, p) = & \left(\left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^4 + \left(\gamma^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2} \right) \eta^2 + \frac{3\gamma^4}{4} - \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\beta^2}{32} + \frac{\beta}{8} \right) A^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left(8 \left(\eta^4 + \frac{(5\gamma^2 - \beta - \gamma - 3)\eta^2}{8} + \frac{\gamma(-6\gamma^2 + \beta + 2)}{32} \right) \gamma \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) B + \left(\frac{A_0 \beta}{2} + q^2 \right) \frac{\eta^4}{2} + \left(\left(\frac{A_0 \beta}{2} + q^2 \right) \gamma^2 + \right. \right. \\
& + \left. \frac{\beta^2 A_0}{8} - \left(\frac{q^2}{2} + A_0 \right) \frac{\beta}{2} - \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} \right) \frac{\eta^2}{2} - \left(p^2 + q^2 - \frac{A_0 \beta}{2} \right) \frac{\gamma^2}{4} + \left(p^2 + q^2 - \frac{1}{2} A_0 \beta + A_0 \right) \frac{\beta}{16} \right) A + \\
& + 12\gamma^2 \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right)^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) B^2 - \left((-A_0 \beta - 2q^2) \eta^2 + p^2 + q^2 + \frac{A_0 \beta}{2} \right) \gamma \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) B - \left(\left(\frac{A_0 \beta}{2} - 2q^2 \right) \eta^2 + \right. \\
& + \left. p^2 + q^2 - \frac{A_0 \beta}{4} \right) \frac{A_0 \beta}{16} \Big) \sqrt{1/\beta} + 2 \left(\left(\eta^2 + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{3}{8} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A + 2\gamma \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) B + \frac{\eta^2 q^2}{4} - \frac{p^2}{8} + \right. \\
& - \left. \frac{q^2}{8} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \Big) \frac{2(A^2 - B^2)\eta^2 C \gamma^4}{45} \\
\sigma_{y24}(q, p) = & - \left(\left((4B\gamma + A)\eta^4 + \left(\left(\gamma^2 - \frac{\beta}{4} - 1 \right) A - B\gamma^2 - 2B\gamma + \frac{q^2}{2} + \frac{A_0 \beta}{4} \right) \eta^2 + \left(-\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\beta}{8} + \frac{1}{4} \right) A + \right. \right. \\
& + \left. \frac{B\gamma^2}{2} - \frac{p^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{A_0 \beta}{8} \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right)^2 A \Big) \frac{2(A+B)\eta^2(A-B)C\gamma^4}{3} \\
\sigma_{y25}(q, p) = & \left(2 \left(\frac{3\gamma^4}{32} \left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3} B^2 \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) + (-2B + A)\eta^2 B \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \gamma^3 + (2(2\eta^6 - \eta^4)B^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left(-\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A - \left(+q^2 + \frac{A_0 \beta}{2} \right) \frac{\eta^2}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4} + \frac{A_0 \beta}{8} \right) \frac{B}{2} + \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A + \right. \right. \\
& + \left. \left(\frac{A_0 \beta}{2} + q^2 \right) \frac{\eta^2}{2} - \frac{p^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{A_0 \beta}{8} \right) \frac{A}{4} \Big) \gamma^2 + \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{3}{8} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A + \left(\frac{A_0 \beta}{2} + q^2 \right) \frac{\eta^2}{4} - \frac{p^2}{8} + \right. \\
& - \left. \frac{q^2}{8} - \frac{A_0 \beta}{16} \right) 4\eta^2 B \gamma + \left(\eta^4 - \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\eta^2}{2} - \frac{\beta^2}{32} + \frac{\beta}{8} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A^2 + \left(\left(\frac{A_0 \beta}{2} + q^2 \right) \eta^4 + \right. \\
& + \left. \left(\frac{\beta^2 A_0}{4} - \left(\frac{q^2}{2} + A_0 \right) \beta - p^2 - q^2 \right) \frac{\eta^2}{2} + \left(p^2 + q^2 - \frac{1}{2} A_0 \beta + A_0 \right) \frac{\beta}{8} \right) \frac{A}{2} - \left(\left(-2q^2 + \frac{A_0 \beta}{2} \right) \eta^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +p^2 + q^2 - \frac{A_0\beta}{4} \Big) \frac{A_0\beta}{16} \Big) B\gamma \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \Big((A-2B)B \Big(\eta^2 - \frac{1}{2} \Big) \frac{\gamma^3}{2} + 2(2\eta^4 - \eta^2)B^2\gamma^2 + \\
& +4B \Big(\Big(\eta^4 - \frac{7}{8}\eta^2 + \frac{3}{16} \Big) A + \frac{\eta^2 q^2}{4} - \frac{p^2}{8} - \frac{q^2}{8} \Big) \gamma + \Big(\Big(\eta^2 - \frac{1}{2} \Big)^2 A - \frac{q^2}{4} + \frac{\eta^2 q^2}{2} - \frac{p^2}{4} \Big) A \Big(\eta^2 - \frac{1}{2} \Big) A \Big) \Big) \frac{8\eta^2 C}{3} \\
\sigma_{y32}(q, p) = & - \Big(\Big(-6\eta^2 q^2 + A\eta^2 - \eta^2 A_0 - 3p^2 + 3q^2 - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A_0 \Big) (A - A_0)^2 a^3 \beta^3 + \\
& -2(A - A_0)ba^2 \Big(-4\eta^2 q^2 + A\eta^2 - \eta^2 A_0 - 2p^2 + 2q^2 - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A_0 \Big) \beta^2 + \\
& +8b^2 a \Big(-2\eta^2 q^2 + A\eta^2 - \eta^2 A_0 - p^2 + q^2 - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A_0 \Big) \beta + (16\eta^2 - 8)b^3 \Big) \frac{1}{5760\sqrt{1/\beta}\beta a^4} \\
\sigma_{y34}(q, p) = & \Big((A - A_0)a^2 \Big(\Big(-\eta^2 + \frac{1}{2} \Big) A_0 + (-4q^2 + A)\eta^2 - 2p^2 + 2q^2 - \frac{A}{2} \Big) \beta^2 - 4ba \Big(\Big(\frac{1}{2} - \eta^2 \Big) A_0 + \\
& +(-2q^2 + A)\eta^2 - p^2 + q^2 - \frac{A}{2} \Big) \beta - 8b^2\eta^2 + 4b^2 \Big) \frac{1}{96\sqrt{1/\beta}\beta a^3}
\end{aligned}$$

Приложение 6

$$\begin{aligned}
\sigma_{z11}(q, p) &= \frac{-\eta^2 \gamma^4 (-1 + \beta)}{420 \sqrt{\frac{1}{\beta}} a^2} \left(\left(\left(\left(\left(\left(p^2 + \frac{q^2}{3} \right) \gamma - \frac{4\eta^2 p^2}{3} + \frac{4\eta^2 q^2}{3} \right) A^2 + \frac{B \left((p^2 - 3q^2) \gamma + 4\eta^2 (p^2 + q^2) \right) A}{3} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \frac{2B^2 (p - q)(p + q)(-4\eta^2 + \gamma)}{3} \right) \gamma a - \frac{b \left((p^2 + q^2) A + B(p^2 - q^2) \right)}{3} \right) i^2 + \frac{2B^2 \gamma^2 a q}{3} \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \\
&\quad + \frac{2i^2 a A}{3} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left((p^2 + q^2) A + B(p^2 - q^2) \right) \\
\sigma_{z12}(q, p) &= \frac{-\eta^2 \gamma (-1 + \beta)}{480 \sqrt{1/\beta} a^3} \left(\left(\gamma \left((p - q) \left(A^2 \gamma^3 - 4B \left(-\frac{8}{3} \gamma^2 \eta^2 - \frac{16}{3} \eta^4 + \gamma^3 + \frac{4}{3} \eta^2 \right) A + \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{8\gamma B^2}{3} (-4\eta^2 + \gamma)^2 \right) (p + q) i^2 + 8\gamma^2 B \left(A\gamma - \frac{2B}{3} (-4\eta^2 + \gamma) \right) q \right) a^2 + \right. \\
&\quad \left. - \frac{4\gamma \left((p - q) \left(A\gamma - 2B(-4\eta^2 + \gamma) \right) (p + q) i^2 + 4B\gamma q \right) b a}{3} + \frac{8b^2 i^2 (p - q)(p + q)}{3} \right) \sqrt{1/\beta} + \\
&\quad + \frac{8}{3} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\left((4\eta^2 + \gamma^2 + \beta - 1) A + 8B\eta^2 \gamma - 2B\gamma^2 - \beta A_0 \right) (p - q)(p + q) i^2 + 4\gamma^2 B q \right) a + \\
&\quad - 2bi^2 (p - q)(p + q) a A \\
\sigma_{z13}(q, p) &= \frac{\left((p^2 + q^2) A + B(p^2 - q^2) \right) \gamma^4 i^2 \eta^2 (-1 + \beta)}{30a} \\
\sigma_{z14}(q, p) &= \left(\left(\gamma \left((p - q) \left((-2B + A) \gamma + 8B\eta^2 \right) (p + q) i^2 + 4B\gamma q \right) a - 2bi^2 (p - q)(p + q) \right) \sqrt{1/\beta} + \right. \\
&\quad \left. + 4i^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) (p - q) a (p + q) A \right) \frac{\eta^2 \gamma (-1 + \beta)}{12 \sqrt{1/\beta} a^2} \\
\sigma_{z22}(q, p) &= \frac{-1}{45} \left(\left(\left(\frac{3(A - B)^2 \gamma^4}{4} + 5B \left(A - \frac{6B}{5} \right) \eta^2 \gamma^3 + \left(-\frac{A^2 \beta}{4} + \frac{\beta(B + A_0) A}{4} + 12\eta^4 B^2 - \frac{B\beta A_0}{4} \right) \gamma^2 + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + 4 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) B \eta^2 \gamma - \frac{(A - A_0)^2 \beta^2}{32} \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \left((A - B) \gamma^2 + 4B\eta^2 \gamma + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + A \left(\eta^2 - \frac{1}{4} \right) \right) \right) \right) (A + B) \eta^2 C (A - B) \gamma^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{z23}(q, p) = & \frac{4CB\gamma\eta^2}{15} \left(\left(\left(\frac{5A^3}{16} + \left(1 - \frac{15B}{8} \right) A^2 + \frac{5B^2A}{2} - B^2(B+1) \right) \frac{\gamma^6}{8} + \frac{\eta^2 B(A-B)(A-3B)\gamma^5}{2} + \right. \right. \\
& + \left(-\frac{3A^3\beta}{128} + \left(B + \frac{A_0}{4} \right) \frac{3\beta A^2}{32} + 3B \left(\left(\eta^4 - \frac{\beta}{48} \right) B - \frac{\beta A_0}{32} \right) A + \frac{B^2\beta A_0}{16} - 6B^3\eta^4 \right) \gamma^4 + B \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A^2 + \right. \\
& + \left(\left(\frac{\beta}{2} - 2\eta^2 + \frac{1}{2} \right) B + \frac{\beta A_0}{4} \right) A - \frac{B\beta A_0}{2} + 8\eta^4 B^2 \right) \eta^2 \gamma^3 + \left(\frac{\beta^2(B+A_0)A^2}{64} - \frac{A^3\beta^2}{128} + ((8\eta^6 + (-\beta-2)\eta^4)B^2 + \right. \\
& + \left. -\frac{B\beta^2 A_0}{32} - \frac{\beta^2 A_0^2}{128} \right) A + B\beta A_0 \left(\frac{\beta A_0}{64} + B\eta^4 \right) \gamma^2 + 2B \left(\left(\eta^4 - (1+\beta) \frac{\eta^2}{4} - \frac{(-1+\beta)^2}{32} \right) A^2 + \right. \\
& + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) \frac{\beta A_0 A}{4} - \frac{\beta^2 A_0^2}{32} \left. \right) \eta^2 \gamma - \frac{(A-A_0)^3 \beta^3}{128} \left. \right) \sqrt{1/\beta} + A \left(\left(\frac{3}{8} A^2 - \frac{3}{2} AB + B^2 \right) \frac{\gamma^4}{4} + B\eta^2(-2B+A)\gamma^3 + \right. \\
& + \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{A^2}{4} + \left(\frac{1}{4} - \eta^2 \right) \frac{BA}{2} + 4\eta^4 B^2 \right) \gamma^2 + (4\eta^4 - \eta^2) BA\gamma + A^2 \left(\eta^4 - \frac{1}{4} \eta^2 - \frac{1}{32} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left. \right) \\
\sigma_{z24}(q, p) = & \frac{(A+B)C}{3} \left(\left(\left(\gamma^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + 4B\eta^2\gamma - B\gamma^2 + \frac{\beta A_0}{4} \right) \sqrt{1/\beta} + A \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \right) (A-B)\gamma^4\eta^2 \\
\sigma_{z25}(q, p) = & \frac{8CB\gamma\eta^2}{3} \left(\left(\left(\frac{3}{8} A^2 - \frac{3}{2} AB + B^2 \right) \frac{\gamma^4}{4} + B\eta^2(-2B+A)\gamma^3 + \left(-\frac{A^2\beta}{16} + \left(B + \frac{A_0}{2} \right) \frac{\beta A}{8} + \right. \right. \\
& + 4\eta^4 B^2 - \frac{B\beta A_0}{8} \right) \gamma^2 + 2 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) B\eta^2\gamma - \frac{(A-A_0)^2 \beta^2}{32} \left. \right) \sqrt{1/\beta} + \\
& + A \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\left(\frac{A}{2} - B \right) \frac{\gamma^2}{2} + 2B\eta^2\gamma + A \left(\eta^2 - \frac{1}{4} \right) \right) \\
\sigma_{z32}(q, p) = & \frac{A}{5760a^4} \left(\eta^2 + \frac{1}{2} \right) \left((A-A_0)^3 \beta^3 a^3 - 2b\beta^2 (A-A_0)^2 a^2 + 8b^2\beta (A-A_0)a + 16b^3 \right) \sqrt{1/\beta} \\
\sigma_{z34}(q, p) = & -\frac{A}{96a^3} \left((A-A_0)^2 \beta^2 a^2 - 4b\beta (A-A_0)a - 8b^2 \right) \left(\eta^2 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1/\beta}
\end{aligned}$$

Приложение 7

$$\begin{aligned}
\tau_{xy11}(q, p) = & \left(\left(\left(\left(\left(p + \frac{q}{3} \right) \gamma - \frac{4\eta^2(p-q)}{3} \right) A^2 + \frac{((p-3q)\gamma + 4\eta^2(p+q))BA}{3} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2B^2(p-q)(-4\eta^2 + \gamma)}{3} \right) a - \frac{((p+q)A + B(p-q))b}{3} \right) i^2 - \frac{2Ba\gamma^2 p^2}{3} \right) \sqrt{1/\beta} + \\
& + \frac{2a}{3} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(((p+q)A + B(p-q))i^2 A \right) \frac{(\beta-1)q\gamma^4\eta^2}{840\sqrt{1/\beta}a^2} \\
\tau_{xy12}(q, p) = & \left(\left((p-q) \left(A^2\gamma^3 - 4 \left(-\frac{8}{3}\gamma^2\eta^2 - \frac{16}{3}\eta^4 + \gamma^3 + \frac{4}{3}\eta^2 \right) BA + \frac{8\gamma B^2(-4\eta^2 + \gamma)^2}{3} \right) i^2 + \right. \right. \\
& - 8\gamma^2 p^2 \left(A\gamma - \frac{2B}{3}(-4\eta^2 + \gamma) \right) \left. \right) \gamma a^2 - \frac{4\gamma}{3} \left((p-q) (A\gamma - 2B(-4\eta^2 + \gamma)) i^2 - 4\gamma p^2 \right) ba + \\
& + \frac{8b^2 i^2 (p-q)}{3} \sqrt{1/\beta} + \frac{8a}{3} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\left(\left((-4\gamma^2 p^2) a - 2bi^2(p-q) \right) A \right) \frac{q\gamma\eta^2(\beta-1)}{960\sqrt{1/\beta}a^3} \right. \\
\tau_{xy13}(q, p) = & - \frac{((A-B)q + p(A+B))i^2 q\gamma^4\eta^2(\beta-1)}{60a} \\
\tau_{xy14}(q, p) = & - \left(\left(\gamma \left((p-q) ((A-2B)\gamma + 8\eta^2 B) i^2 - 4\gamma p^2 \right) a - 2bi^2(p-q) \right) \sqrt{1/\beta} + \right. \\
& + 4a \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) (p-q) i^2 A \left. \right) \frac{q\gamma\eta^2(\beta-1)}{24\sqrt{1/\beta}a^2} \\
\tau_{xy21}(q, p) = & \left(2\gamma B \left(\left(-B^3 + \left(-1 + \frac{5A}{2} \right) B^2 - \frac{15A^2 B}{8} + \frac{5A^3}{16} + A^2 \right) \frac{\gamma^6}{8} + \frac{\eta^2 B(A-B)(A-3B)\gamma^5}{2} + \right. \\
& - 6B^3\eta^4 + \left(\left(\frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{16}\beta + 3\eta^4 \right) A + \frac{\beta A_0}{16} \right) B^2 - \frac{3AB}{8} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) + \frac{3}{32} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) A^2 \right) \gamma^4 \\
& + 2\eta^2 \left(4B^2\eta^4 + \left(\left(-2\eta^2 + \frac{\beta}{4} + \frac{1}{4} \right) A - \frac{\beta A_0}{4} \right) B + \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) A + \frac{\beta A_0}{8} \right) AB\gamma^3 + \right. \\
& + \left(12 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{12} - \frac{1}{6} \right) A + \frac{\beta A_0}{12} \right) \eta^4 B^2 + \left(\left(-\eta^4 + \frac{1}{32}\beta^2 + \frac{1}{4}\beta\eta^2 \right) A^2 + \right. \\
& + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{\beta A_0 A}{4} + \frac{\beta^2 A_0^2}{32} \right) \frac{B}{2} + \left(\left(\eta^4 - \frac{1}{32}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta\eta^2 \right) A^2 + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{\beta A_0 A}{4} - \frac{\beta^2 A_0^2}{32} \right) \frac{A}{4} \right) \gamma^2 + \\
& + 6 \left(\left(\eta^4 - \frac{(1+\beta)\eta^2}{6} - \frac{(\beta-1)^2}{96} \right) A^2 + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) \frac{\beta A_0 A}{6} - \frac{\beta^2 A_0^2}{96} \right) \eta^2 B\gamma + \\
& + \left(-\frac{1}{128}\beta^3 - \frac{1}{4}\beta\eta^4 - \frac{1}{32}\beta^2\eta^2 + \eta^6 \right) A^3 + \left(\eta^4 + \frac{1}{4}\beta\eta^2 + \frac{3}{32}\beta^2 \right) \frac{\beta A_0 A^2}{4} + \\
& - \left(\eta^2 + \frac{3\beta}{4} \right) \frac{\beta^2 A_0^2 A}{32} + \frac{\beta^3 A_0^3}{128} \sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \left(\frac{3}{16} \left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3}B^2 \right) B\gamma^5 + 2B^2\eta^2(A-2B)\gamma^4 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(8B^2\eta^4 + A \left(-2\eta^2 + \frac{1}{4} \right) B + A^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) \right) B\gamma^3 + 12\eta^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{6} \right) AB^2\gamma^2 + \\
& + 6 \left(\eta^4 - \frac{1}{6}\eta^2 - \frac{1}{96} \right) A^2 B\gamma + A^3\eta^4 \Big) qp \Big) \frac{2C\eta^4}{315} \\
\tau_{xy22}(q, p) &= - \left(\left(\left(\eta^2 + \gamma^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + 4\eta^2 B\gamma - B\gamma^2 + \frac{\beta A_0}{4} \right) \sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \right) \frac{2(A^2 - B^3)C\eta^4\gamma^4 qp}{9} \\
\tau_{xy23}(q, p) &= \left(2\gamma \left(\left(\frac{3}{8}A^2 - \frac{3}{2}BA + B^2 \right) \frac{\gamma^4}{4} + B\eta^2(A - 2B)\gamma^3 + \left(4B^2\eta^4 + \left(\left(-\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) A - \frac{\beta A_0}{4} \right) \frac{B}{2} + \right. \right. \right. \\
& + \left. \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) \frac{A}{4} \right) \gamma^2 + 4\eta^2 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) A + \frac{\beta A_0}{8} \right) B\gamma + \left(\eta^4 - \frac{1}{32}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta\eta^2 \right) A^2 + \\
& + \left. \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{\beta A_0 A}{4} - \frac{\beta^2 A_0^2}{32} \right) B\sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{B(A - 2B)\gamma^3}{2} + 4B^2\gamma^2\eta^2 + 4 \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) AB\gamma + \right. \\
& + \left. A^2\eta^2 \right) A \Big) \frac{2C\eta^4 qp}{15} \\
\tau_{xy24}(q, p) &= \frac{(A^2 - B^2)}{3} \sqrt{1/\beta} C\eta^4\gamma^4 pq \\
\tau_{xy25}(q, p) &= - \left(2\gamma \left(\left(\frac{A}{4} - \frac{B}{2} \right) \gamma^2 + 2\eta^2 B\gamma + \left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) B\sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A(2B\gamma + A) \right) \frac{4C\eta^4 qp}{3} \\
\tau_{xy32}(q, p) &= \frac{(8\nu^4 - 20A\nu^2 + 20\nu^2 A_0 + 15A^2 - 30AA_0 + 15A_0^2)\eta^2 qp \chi \beta^3}{2880\sqrt{1/\beta}} \\
\tau_{xy34}(q, p) &= \frac{(2\nu^2 - 3A + 3A_0)\beta^2\eta^2 qp \chi}{24\sqrt{1/\beta}}
\end{aligned}$$

Приложение 8

$$\begin{aligned}
\tau_{yz12}(q, p) = & \left(\left((-q^2 + B)\gamma^5 - \frac{3\eta^2 B \gamma^4}{2} + B(-4\eta^4 + \eta^2)\gamma^2 - 16\left(\eta^4 - \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{32}\right)\eta^2 B \right) A^2 + \right. \\
& + \left(\gamma \left(-\frac{2\gamma(A+B)p^3}{5} + \left(A^2 + \frac{(-2q^2 + B)A}{5} + \frac{2Bq^2}{5} - \frac{4B^2}{5} \right) \gamma - \frac{8\eta^2(A+B)(A-2B)}{5} \right) p + \right. \\
& + \frac{6q^2}{5} \left(\left(A - \frac{2B}{3} \right) \gamma + \frac{8\eta^2 B}{3} \right) a - \frac{2b(p(A+B) + 2q^2)}{5} \Big) \sqrt{1/\beta} + \\
& + \frac{4}{5} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A a (p(A+B) + 2q^2) i \eta^2 \Big) \frac{(\beta-1)\gamma^3}{44\sqrt{1/\beta}a^2} \\
\tau_{yz13}(q, p) = & (-\gamma((p^2 - q^2 + B)(A-B)\gamma^3 - 2\eta^2 B(-2p^2 + 2q^2 + A - 4B)\gamma^2 - 16B^2\gamma\eta^4 + \\
& + 2B(-4\eta^4 + \eta^2)A)a^2 + b\gamma((p^2 - q^2 + B)\gamma - 4\eta^2 B)a + b^2) \frac{\sqrt{1/\beta}}{4} + \left(\left(\frac{(-p^2 + q^2 - B)\gamma^2}{2} + \right. \right. \\
& + 2\eta^2 B\gamma + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A - \frac{\beta A_0}{4} \Big) a - \frac{b}{2} \Big) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A a \Big) \frac{(\beta-1)ip\eta^2}{15\sqrt{1/\beta}a^3} \\
\tau_{yz14}(q, p) = & -\frac{(\beta-1)\gamma^3\eta^2 i(p(A+B) + 2q^2)}{12a} \\
\tau_{yz15}(q, p) = & -\left(A a \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) - \left(\gamma((p^2 - q^2 + B)\gamma - 4\eta^2 B)a + b \right) \frac{\sqrt{1/\beta}}{2} \right) \frac{2(\beta-1)ip\eta^2}{3\sqrt{1/\beta}a^2} \\
\tau_{yz21}(q, p) = & -\left(\left(\frac{3\gamma^4}{4} + \left(-\frac{1}{4} + \eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) \gamma^2 + \eta^4 - \frac{(1+\beta)\eta^2}{4} - \frac{(\beta-1)^2}{32} \right) A^2 + \right. \\
& + \left(8 \left(-\frac{3\gamma^3}{16} + \frac{5\gamma^2\eta^2}{8} + \left(\frac{1}{4} - \eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{\gamma}{8} + \eta^2 \left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{4} \right) \right) \gamma B + \frac{\beta A_0}{4} \left(\eta^2 + \gamma^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) \right) A + \\
& + 12 \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right)^2 \gamma^2 B^2 + \beta\gamma A_0 \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) B - \frac{\beta^2 A_0^2}{32} \Big) \sqrt{1/\beta} + 2 \left(\left(\eta^2 + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{1}{4} \right) A + \right. \\
& + 2B \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) \gamma \Big) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \Big) \frac{2ipC\eta^4\gamma^4}{315} \\
\tau_{yz22}(q, p) = & \left(\left((-q^2 + B)\gamma^5 - \frac{3\eta^2 B \gamma^4}{2} + B(-4\eta^4 + \eta^2)\gamma^2 - 16\left(\eta^4 - \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{32}\right)\eta^2 B \right) A^2 + \right. \\
& + \left(2((2B\gamma + A)^3 \eta^6 + \frac{\eta^4}{4}((2B\gamma + A) - 6B(A-2B)\gamma^3 - A(A-2B)\gamma^2 + \right. \\
& + 2((\beta+3)A - \beta A_0)B\gamma + A((1+\beta)A - \beta A_0)) + \frac{\eta^2}{2}(B(A-B)(A-3B)\gamma^5 + \\
& + \frac{3A}{16} \left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3}B^2 \right) \gamma^4 \frac{(A-2B)((\beta+2)A - \beta A_0)B\gamma^3}{2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(A-2B)A((1+\beta)A-\beta A_0)\gamma^2}{8} - \frac{\beta(A-A_0)((\beta-4)A-\beta A_0)B\gamma}{8} + \\
& -\frac{((\beta-1)A-\beta A_0)^2 A}{16} \Bigg) + \frac{\gamma^6}{8} \left(-B^3 + \left(-1 + \frac{5A}{2} \right) B^2 - \frac{15A^2 B}{8} + \frac{5A^3}{16} + A^2 \right) + \\
& -\frac{3}{123} \left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3} B^2 \right) ((1+\beta)A-\beta A_0)\gamma^4 - \frac{((\beta-1)A-\beta A_0)^2 (A-2B)\gamma^2}{128} + \\
& -\frac{((\beta-1)A-\beta A_0)^2 ((1+\beta)A-\beta A_0)}{128} \Bigg) B\eta^2 \gamma \sqrt{1/\beta} (2B\gamma + A)^3 \eta^6 + \\
& -\frac{(2B\gamma + A)(-4B(A-2B)\gamma^3 + 6BA\gamma + A^2)\eta^4}{4} + \frac{\eta^2}{4} \left(\frac{3}{4} \left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3} B^2 \right) B\gamma^5 + \right. \\
& \left. -BA(A-2B)\gamma^3 - \frac{A^3}{8} \right) - \frac{A^3}{128} \Bigg) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{A2ipC\eta^2}{45} \\
\tau_{yz23}(q, p) = & \left(\left(\left(\eta^2 + \gamma^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A + \left(+4\eta^2 B\gamma - B\gamma^2 + \frac{\beta A_0}{4} \right) \sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \right) \frac{2\eta^4 pCi\gamma^4 (A^2 - B^2)}{15} \right. \\
\tau_{yz24}(q, p) = & -\left(2B((2B\gamma + A)^2 \eta^4 + \left(B(A-2B)\gamma^3 + \frac{A(A-2B)\gamma^2}{4} - \frac{((\beta+2)A-\beta A_0)B\gamma}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. -\frac{A((1+\beta)A-\beta A_0)}{4} \right) \eta^2 + \frac{\left(\frac{3}{8} A^2 - \frac{3}{2} BA + B^2 \right) \gamma^4}{4} - \frac{(A-2B)((1+\beta)A-\beta A_0)\gamma^2}{16} + \right. \\
& \left. -\frac{((\beta-1)A-\beta A_0)^2}{32} \right) \eta^2 \gamma \sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \Bigg) \left((2B\gamma + A)^2 \eta^4 + \left(\frac{B(A-2B)\gamma^3}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. -BA\gamma - \frac{A^2}{4} \right) \eta^2 - \frac{A^2}{32} \right) A \Bigg) \frac{2ipC\eta^2}{3} \\
\tau_{yz25}(q, p) = & -\frac{(A^2 - B^2)\sqrt{1/\beta} 4ip\eta^4 C\gamma^4}{3} \\
\tau_{yz31}(q, p) = & +\frac{(\nu^2 - A + A_0)^3 \beta^4 \eta^2 p\chi i}{2520} \\
\tau_{yz33}(q, p) = & \frac{\eta^2 ip\chi \beta^3 (-\nu^2 + A - A_0)^2}{60} \\
\tau_{yz35}(q, p) = & \frac{(\nu^2 - A + A_0) \beta^2 \eta^2 \chi ip}{3}
\end{aligned}$$

Приложение 9

$$\begin{aligned}
\tau_{xz11}(q, p) = & \left(-\gamma a^3 \left((-p^2 + q^2 + B) \gamma^5 - \frac{3\eta^2 B \gamma^4}{2} + B(-4\eta^4 + \eta^2) \gamma^2 - 16 \left(\eta^4 - \frac{1}{4} \eta^2 - \frac{1}{32} \right) \eta^2 B \right) A^2 + \right. \\
& -2\gamma \left(\left(-p^2 + q^2 + B + \frac{1}{2} \right) \gamma^4 - 6 \left(-\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + B \right) \eta^2 \gamma^3 + 8B\gamma^2 \eta^4 + \right. \\
& -8 \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \left(\eta + \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + B \right) \eta^2 \gamma + 32B\eta^6 - 8B\eta^4 \left. \right) BA + (B^2 + \\
& + ((-p^2 + q^2 + 1)B + 2p) \gamma^3 - 12 \left(-\frac{2p^2}{3} + \frac{2q^2}{3} + B \right) \eta^2 B \gamma^2 + 48 \left(-\frac{p^2}{3} + \frac{q^2}{3} + B \right) \eta^4 B \gamma + \\
& -64B^2 \eta^6) \gamma^2 B) + \gamma b \left(((-p^2 + q^2 + B) \gamma^3 - 2B\gamma^2 \eta^2 - 8B\eta^4 + 2\eta^2 B) A + \right. \\
& -\gamma(-4\eta^2 + \gamma) \left((-p^2 + q^2 + B) \gamma - 4\eta^2 B \right) B) a^2 - \gamma b^2 \left((-p^2 + q^2 + B) \gamma - 4\eta^2 B \right) a - b^3 \left. \right) \sqrt{1/\beta} \left. \right) + \\
& + Aa \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\left(\left(-\frac{1}{32} + \eta^4 + \frac{(\beta-1)\eta^2}{4} + \frac{3\beta^2}{32} - \frac{\beta}{16} \right) A^2 + \left(\frac{(p^2 - q^2 - B)\gamma^4}{4} + \frac{\eta^2 B \gamma^3}{2} + \right. \right. \right. \\
& - \frac{(-p^2 + q^2 + B)}{2} \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) \gamma^2 + 4\eta^2 \left(\eta^2 + \frac{\beta}{8} - \frac{1}{4} \right) B \gamma - \left(\eta^2 + \frac{3\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) \frac{\beta A_0}{4} \left. \right) A + \\
& + \frac{B(-p^2 + q^2 + B)\gamma^4}{4} - 2 \left(-\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + B \right) \eta^2 B \gamma^3 + \left(4B^2 \eta^4 + \frac{\beta A_0(-p^2 + q^2 + B)}{8} \right) \gamma^2 + \\
& - \frac{B\gamma\beta\eta^2 A_0}{2} + \frac{3\beta^2 A_0^2}{32} \left. \right) a^2 \left(\left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A + \frac{(p^2 - q^2 - B)\gamma^2}{2} + 2\eta^2 B \gamma - \frac{\beta A_0}{4} \right) \frac{ba}{2} + \frac{b^2}{4} \left. \right) \left. \right) \frac{iq(\beta-1)\eta^2}{315\sqrt{1/\beta}a^4} \\
\tau_{xz12}(q, p) = & \left(\gamma \left(\left(A^2 + (-2p^2 - 2q^2 - 5B - 6p)A + 4 \left(-\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 + B + p \right) B \right) \gamma + \right. \right. \\
& + 8(A^2 + BA - 2B(B + p))\eta^2) a - 2b(A - B - 2p)) \sqrt{1/\beta} + \\
& + 4Aa(A - B - 2p) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left. \right) \frac{iq\gamma^3\eta^2(\beta-1)}{720a^2\sqrt{1/\beta}} \\
\tau_{xz13}(q, p) = & \left(-\gamma \left((-p^2 + q^2 + B)(A - B) \gamma^3 - 2\eta^2 B(2p^2 - 2q^2 + A - 4B) \gamma^2 + \right. \right. \\
& + (-16B^2\gamma\eta^4 + 2B(-4\eta^4 + \eta^2)A) a^2 + \gamma b \left((-p^2 + q^2 + B) \gamma - 4\eta^2 B \right) a + \\
& + b^2) \frac{\sqrt{1/\beta}}{4} + Aa \left(\left(\left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A + \frac{(p^2 - q^2 - B)\gamma^2}{2} + 2\eta^2 B \gamma - \frac{\beta A_0}{4} \right) a + \right. \\
& - \frac{b}{2} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left. \right) \frac{iq\eta^2(\beta-1)}{3a^2\sqrt{1/\beta}} \\
\tau_{xz14}(q, p) = & -\frac{iq\eta^2(\beta-1)\gamma^3(A - B - 2p)}{12a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xz15}(q, p) &= \left(Aa \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{(\gamma((-p^2 + q^2 + B)\gamma - 4\eta^2 B)a + b)\sqrt{1/\beta}}{2} \right) \frac{2qi(\beta - 1)\eta^2}{3a^2\sqrt{1/\beta}} \\
\tau_{xz21}(q, p) &= - \left(\left(\frac{3\gamma^4}{4} + \left(-\frac{1}{4} + \eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) \gamma^2 + \eta^4 - \frac{(1+\beta)\eta^2}{4} - \frac{(\beta-1)^2}{32} \right) A^2 + \left(8\gamma B \left(-\frac{3\gamma^3}{16} + \frac{5\gamma^2\eta^2}{8} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{4} - \eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{\gamma}{8} + \eta^2 \left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{4} \right) \right) + \left(\eta^2 + \gamma^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) \frac{\beta A_0}{4} \right) A + 12 \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right)^2 \gamma^2 B^2 + \beta \gamma A_0 \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) B + \\
&\quad \left. - \frac{A_0^2 \beta^2}{32} \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + 2 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(A \left(\eta^2 + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{1}{4} \right) A + 2 \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) B \gamma \right) (A - B) \left(\frac{2(A+B)\gamma^4 ip C \eta^4}{135} \right. \\
\tau_{xz22}(q, p) &= (2\eta^2 (2B\gamma + A)^3 \eta^6 - (2B\gamma + A) (-6B(A-2B)\gamma^3 - A(A-2B)\gamma^2 + \\
&\quad + 2((\beta+3)A - \beta A_0)B\gamma + A((1+\beta)A - \beta A_0)) \frac{\eta^4}{4} + \frac{\eta^2}{2} (B(A-B)(A-3B)\gamma^5 + \\
&\quad + \frac{3A}{16} (A^2 - 4BA + \frac{8}{3}B^2) \gamma^4 - \frac{(A-2B)((\beta+2)A - \beta A_0)B\gamma^3}{2} - \frac{(A-2B)A((1+\beta)A - \beta A_0)\gamma^2}{8} + \\
&\quad - \frac{\beta(A-A_0)((\beta-4)A - \beta A_0)B\gamma}{8} - \frac{((\beta-1)A - \beta A_0)^2 A}{16} \left. \right) - \left(B^3 + \left(1 - \frac{5A}{2} \right) B^2 + \frac{15A^2 B}{8} - \frac{5A^3}{16} + \right. \\
&\quad - A^2 \left. \right) \frac{\gamma^6}{8} - \frac{3}{8} \left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3}B^2 \right) ((1+\beta)A - \beta A_0) \gamma^4 - \frac{((\beta-1)A - \beta A_0)^2 (A-2B)\gamma^2}{128} + \\
&\quad - \frac{((\beta-1)A - \beta A_0)^2 ((1+\beta)A - \beta A_0)}{128} \left. \right) B \sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A (2B\gamma + A)^3 \eta^6 + \\
&\quad - (2B\gamma + A) (-4B(A-2B)\gamma^3 + 6BA\gamma + A^2) \frac{\eta^4}{4} + \left(\frac{3}{4} \left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3}B^2 \right) B \gamma^5 + \right. \\
&\quad \left. - BA(A-2B)\gamma^3 - \frac{A^3}{8} \right) \frac{\eta^2}{4} - \frac{A^3}{128} \left. \right) \frac{4\eta^2 C ip}{45} \\
\tau_{xz23}(q, p) &= \left(\left(\left(\eta^2 + \gamma^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A + 4\eta^2 B\gamma - B\gamma^2 + \frac{\beta A_0}{4} \right) \sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \right) \frac{2(A^2 - B^2)\gamma^4 \eta^4 pCi}{15} \\
\tau_{xz24}(q, p) &= \left(\left(2(2B\gamma + A)^2 \eta^4 + \left(2B(A-2B)\gamma^3 + \frac{A(A-2B)\gamma^2}{2} - ((\beta+2)A - \beta A_0)B\gamma + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{A((1+\beta)A - \beta A_0)}{2} \right) \eta^2 + \left(\frac{3}{16} A^2 - \frac{3}{4} BA + B^2 \right) \gamma^4 - \frac{(A-2B)((1+\beta)A - \beta A_0)\gamma^2}{8} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{((\beta-1)A - \beta A_0)^2}{16} \right) \eta^2 \gamma B \sqrt{1/\beta} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left((2B\gamma + A)^2 \eta^4 + \left(\frac{B(A-2B)\gamma^3}{2} - BA\gamma - \frac{A^2}{4} \right) \eta^2 - \frac{A^2}{32} \right) A \left(\frac{2\eta^2 C ip}{3} \right. \\
\tau_{xz25}(q, p) &= - \frac{4\gamma^4 (A^2 - B^2)}{3} \sqrt{1/\beta} \eta^4 C ip;
\end{aligned}$$

$$\tau_{xz31}(q, p) = \frac{\eta^2 \chi \beta^4 A_0^3 i p}{2520 (\beta - 1)^4}$$

$$\tau_{xz33}(q, p) = -\frac{\eta^2 i p \chi \beta^3 A_0^2}{60 (\beta - 1)^3};$$

$$\tau_{xz35}(q, p) = \frac{\eta^2 i p \chi \beta^2 A_0}{3 (\beta - 1)^2}$$

Приложение 10

$$u_{14}^F(q^2, p^2) = \frac{2(\beta-1)\gamma^3}{3\sqrt{1/\beta}a^2} \left(\left(\left(-2 + \left((A-B)\gamma^2 + 4\gamma B\eta^2 - \frac{A}{2} \right) \right) a - b \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + 2a \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \right)$$

$$u_{15}^F(q^2, p^2) = \frac{\gamma^6(\beta-1)(A-B)}{60a}$$

$$\begin{aligned} u_{16}^F(q^2, p^2) = & \frac{\sqrt{\beta}}{45a^3} \left((\beta-1)\gamma^3 \left(\left(\left(-\frac{1}{8} + \gamma^4 - \frac{1}{2}\gamma^2 \right) A^2 + 8 \left(\eta^4 + \frac{3}{4}\eta^2\gamma^2 - \frac{1}{4}\gamma^3 - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{16}\gamma \right) \gamma BA + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + 16\gamma^2 B^2 \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right)^2 \right) a^2 - b\sqrt{\beta} \left(-2 + \left(4\gamma B\eta^2 + A\gamma^2 - B\gamma^2 - \frac{1}{2}A \right) \right) a + b^2 \right) + \\ & \left. + 4a \left(\left(-1 + \left(\left(\eta^2 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2} \right) A + 2\gamma B\eta^2 - \frac{B\gamma^2}{2} - \frac{\beta A_0}{4} \right) \right) a - \frac{b}{2} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{17}^F(q^2, p^2) = & \frac{4(-1+\beta)\sqrt{\beta}q\gamma^6}{315a^2} \left(\left(a\sqrt{\beta} \left((A-B) \left[\left(\gamma\eta^2 + \frac{3\gamma^2-1}{8} \right) A + 2\gamma B \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) \right] + \frac{B}{2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{bi(A-B)}{4} \right) + \frac{(A-B)a}{2} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \right) \end{aligned}$$

$$u_{12}^F(q^2, p^2) = -\frac{\chi((A-A_0)\beta - A + 3A_0)\beta^{\frac{5}{2}}}{48(\beta-1)^2}$$

$$u_{13}^F(q^2, p^2) = \frac{\left((A-A_0)^2 \beta^2 - 2 \left(A - \frac{5A_0}{3} \right) (A-A_0)\beta + A^2 - \frac{10AA_0}{3} + 5A_0^2 \right) \chi \beta^3}{1920\sqrt{1/\beta}(-1+\beta)^3}$$

$$u_{23}^F(q^2, p^2) = -\frac{2}{3} \left(2 \left(\left(\frac{A}{4} - \frac{B}{2} \right) \gamma^2 + 2\gamma B\eta^2 + \left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) B\gamma \sqrt{\frac{1}{\beta}} + A \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) (2B\gamma + A) \right) \eta^2 C$$

$$u_{24}^F(q^2, p^2) = \frac{\eta^2 \gamma^4 (A^2 - B^2) \sqrt{1/\beta} C}{6}$$

$$\begin{aligned} u_{25}^F(q^2, p^2) = & \frac{\eta^2 C}{15} \left(2 \left(\left(\frac{3}{8} A^2 - \frac{3}{2} AB + B^2 \right) \frac{\gamma^4}{4} + B\eta^2 (-2B + A)\gamma^3 + \left(4B^2\eta^4 + \left(\left(-\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) A - \frac{\beta A_0}{4} \right) \frac{B}{2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{A}{4} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) \right) \gamma^2 + 4B\eta^2 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) A + \frac{\beta A_0}{8} \right) \gamma + \left(\eta^4 - \frac{1}{32}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta\eta^2 \right) A^2 \right. \\ & \left. + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{\beta A_0 A}{4} - \frac{A_0^2 \beta^2}{32} \right) B\gamma \sqrt{1/\beta} + \left(\frac{B(-2B+A)\gamma^3}{2} + 4B^2\eta^2\gamma^2 + 4 \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) BA\gamma + A^2\eta^2 \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{26}^F(q^2, p^2) &= \frac{-(A^2 - B^2)\eta^2\gamma^4 C}{90} \left[\sqrt{\beta} \left(\left(\eta^2 + \gamma^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + 4\gamma B\eta^2 - B\gamma^2 + \frac{\beta A_0}{4} \right) + A \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \right] \\
u_{27}^F(q^2, p^2) &= - \left(2B\gamma\sqrt{1/\beta} \left((2B\gamma + A)^3 \eta^6 - \frac{\eta^4}{4} (2B\gamma + A) (-6B(-2B + A)\gamma^3 - A(-2B + A)\gamma^2 + \right. \right. \\
&\quad + 2((\beta + 2)A - \beta A_0)B\gamma + A\beta(A - A_0)) + \frac{(A - A_0)^2 (2B\gamma + A)\beta^2}{32} + \frac{\gamma}{16} (-8B^2\gamma^2 + 4\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)A(-1 + \gamma)B + \\
&\quad + A^2\gamma)(A - A_0)\beta - \frac{\gamma}{32} (16B(A - B)(A - 3B)\gamma^4 + (3A^3 - 12A^2B + 8AB^2)\gamma^3 - 8AB(-2B + A)\gamma^2 - 2A^2B) \Big) \eta^2 + \\
&\quad - (A - A_0)^3 \beta^3 - \frac{\gamma^2 (A - A_0)^2 (-2B + A)\beta^2}{128} + \frac{3\gamma^4 \beta}{128} \left(A^2 - 4AB + \frac{8}{3}B^2 \right) (A - A_0) + \\
&\quad \left. - \frac{(5A^3 - 30A^2B + 40AB^2 - 16B^3 + 16A^2 - 16B^2)\gamma^6}{128} \right) + A \left((2B\gamma + A)^3 \eta^4 \left(\frac{(3A^2 - 12AB + 8B^2)\gamma^4}{16} + \right. \right. \\
&\quad + 2\eta^2 B(-2B + A)\gamma^3 + A(-2B + A) \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) \gamma^2 - 2AB\gamma\eta^2 - \frac{A^2(16\eta^2 + 1)}{16} \Big) B\gamma \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{C\eta^2}{135}
\end{aligned}$$

Приложение 11

$$\begin{aligned}
v_{14}(q, p) &= \gamma^3 \left(\left(\left((A-B)\gamma^2 + 4\gamma B\eta^2 - \frac{A}{2} \right) + 2q^2 \right) a - b \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + 2A \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) a \left(\frac{(-1+\beta)}{12\sqrt{1/\beta}a^2} \right) \\
v_{15}(q, p) &= \frac{\gamma^6(-1+\beta)(A+B)}{60a} \\
v_{16}(q, p) &= -\gamma^3 \left(\left(\left(\left(-\frac{1}{8} + \gamma^4 - \frac{1}{2}\gamma^2 \right) A^2 - 2\gamma \left(-4\eta^4 - 3\gamma^2\eta^2 + \gamma^3 + 2\eta^2 - \frac{1}{4}\gamma \right) BA + \left(B^2\gamma^2(-4\eta^2 + \gamma)^2 \right) p + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3\gamma \left(A\gamma - \frac{2B(-4\eta^2 + \gamma)}{3} \right) q^2 \right) a^2 - b \left(\left(\left(\gamma^2 - \frac{1}{2} \right) A - \gamma B(-4\eta^2 + \gamma) \right) + 2q^2 \right) a + b^2 \right) \sqrt{1/\beta} + \\
&\quad + 2A \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\left(\left(\left(2\eta^2 + \gamma^2 + \frac{\beta}{2} - 1 \right) A + 4\gamma B\eta^2 - \gamma^2 B - \frac{A_0\beta}{2} \right) + 2q^2 \right) a - b \right) a \left(\frac{(-1+\beta)}{360\sqrt{1/\beta}a^3} \right) \\
v_{17}(q, p) &= \left(\left(\left((A+B) \left(-\frac{8}{7}\eta^2\gamma + \gamma^2 - \frac{1}{7} \right) A - \frac{4\gamma B(-4\eta^2 + \gamma)}{7} \right) p + \frac{4q^2 B}{7} \right) a + \right. \\
&\quad \left. - \frac{2bp(A+B)}{7} \right) \sqrt{1/\beta} + \frac{4A}{7} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) (A+B)ap \left(\frac{\gamma^6(-1+\beta)}{720\sqrt{1/\beta}a^2} \right) \\
v_{23}(q, p) &= \left(2\gamma B \left(\left(\frac{A}{4} - \frac{B}{2} \right) \gamma^2 + 2\gamma B\eta^2 + \left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{A_0\beta}{4} \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A(2\gamma B + A) \right) \frac{2C\eta^2}{3} \\
v_{24}(q, p) &= (A^2 - B^2) \sqrt{1/\beta} \frac{C\gamma^4\eta^2}{6} \\
v_{25}(q, p) &= - \left(2\gamma^2 \left(\left(\frac{3}{8}A^2 - \frac{3}{2}BA + B^2 \right) \frac{\gamma^4}{4} + B\eta^2(-2B+A)\gamma^3 + \left(4B^2\eta^4 + \left(\left(-\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) A - \frac{A_0\beta}{4} \right) \left(\frac{B}{2} - \frac{A}{4} \right) \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. + 4B\eta^2 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) A + \frac{A_0\beta}{8} \right) \gamma + \left(\eta^4 - \frac{1}{32}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta\eta^2 \right) A^2 + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{\beta A_0 A}{4} - \frac{\beta^2 A_0^2}{32} \right) \gamma B \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \\
&\quad \left. + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \left(\frac{B(-2B+A)\gamma^3}{2} + 4B^2\gamma^2\eta^2 + 4 \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) AB\gamma + A^2\eta^2 \right) \right) \frac{C\eta^2}{15} \\
v_{26}(q, p) &= \left(\left(\left(\left(\eta^2 + \gamma^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + 4\gamma B\eta^2 - \gamma^2 B + \frac{A_0\beta}{4} \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \right) \frac{\gamma^4(A^2 - B^2)C\eta^2}{90} \right. \\
v_{27}(q, p) &= 2\gamma B \left(\left(-B^3 + \left(-1 + \frac{5A}{2} \right) B^2 - \frac{15A^2B}{8} + \frac{5A^3}{16} + A^2 \right) \frac{\gamma^6}{8} + \frac{B\eta^2(A-B)(A-3B)\gamma^5}{2} + (-6B^3\eta^4 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(\frac{1}{4}\eta^2 + 3\eta^4 - \frac{1}{16}\beta \right) A + \frac{A_0\beta}{16} \right) B^2 - \frac{3A}{8} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{A_0\beta}{4} \right) B + \frac{3A^2}{32} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{A_0\beta}{4} \right) \right) \gamma^4 + \\
&\quad + 2 \left(4B^2\eta^4 + \left(\left(-2\eta^2 + \frac{\beta}{4} + \frac{1}{4} \right) A - \frac{A_0\beta}{4} \right) B + A \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) A + \frac{A_0\beta}{8} \right) \right) B\eta^2\gamma^3 + \\
&\quad \left. + \left(12 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{12} - \frac{1}{6} \right) A + \frac{A_0\beta}{12} \right) \eta^4 B^2 + \left(\left(-\eta^4 + \frac{1}{32}\beta^2 + \frac{1}{4}\beta\eta^2 \right) A^2 - \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{\beta A_0 A}{4} + \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\beta^2 A_0^2}{32} \left) \left(\frac{B}{2} - \frac{A^2}{4} \right) \gamma^2 + 6B \left(\left(\eta^4 - \frac{(1+\beta)\eta^2}{6} - \frac{(-1+\beta)^2}{96} \right) A^2 + \frac{A_0 \beta \left(\eta^2 + \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) A}{6} - \frac{\beta^2 A_0^2}{96} \right) \eta^2 \gamma + \\
& + \left(-\frac{1}{128} \beta^3 + \eta^6 - \frac{1}{4} \beta \eta^4 - \frac{1}{32} \beta^2 \eta^2 \right) A^3 + \left(\eta^4 + \frac{1}{4} \beta \eta^2 + \frac{3}{32} \beta^2 \right) \frac{\beta A_0 A^2}{4} - \left(\eta^2 + \frac{3\beta}{4} \right) \frac{\beta^2 A_0^2 A}{32} + \\
& + \frac{\beta^3 A_0^3}{128} \sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \left(\frac{3}{16} \left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3} B^2 \right) B \gamma^5 + 2B^2 \eta^2 (-2B + A) \gamma^4 + B(8B^2 \eta^4 + \right. \\
& \left. + A(-2\eta^2 + \frac{1}{4})B + A^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) \right) \gamma^3 + 12AB^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{6} \right) \eta^2 \gamma^2 + 6 \left(\eta^4 - \frac{1}{6} \eta^2 - \frac{1}{96} \right) A^2 B \gamma + A^3 \eta^4 \left) \frac{C \eta^2}{315}
\end{aligned}$$

$$v_{34}(q, p) = \frac{\chi \beta^2 (-2v^2 + 3A - 3A_0)}{48\sqrt{1/\beta}}$$

$$v_{36}(q, p) = -\frac{\chi \beta^3 (8v^4 - 20Av^2 + 20v^2 A_0 + 15A^2 - 30AA_0 + 15A_0^2)}{5760\sqrt{1/\beta}}$$

Приложение 12

$$w_{13}(q, p) = \left(\left(\sqrt{1/\beta} (A - B) \gamma^2 + 4B \sqrt{1/\beta} \gamma \eta^2 + A(2\eta^2 - 1) \right) a - \sqrt{1/\beta} b \right) \frac{\gamma^2 (-1 + \beta)}{60 \sqrt{1/\beta} a^2}$$

$$w_{14}(q, p) = \left(\left(\sqrt{1/\beta} (A - B) \gamma^2 + 4B \sqrt{1/\beta} \gamma \eta^2 + A(2\eta^2 - 1) \right) a - \sqrt{1/\beta} b \right) \frac{\gamma^2 (-1 + \beta)}{60 \sqrt{1/\beta} a^2}$$

$$w_{15}(q, p) = \left(\left(\sqrt{1/\beta} (A - B) \gamma^2 + 4B \sqrt{1/\beta} \gamma \eta^2 + A(2\eta^2 - 1) \right) a - \sqrt{1/\beta} b \right) \frac{\gamma^2 (-1 + \beta)}{60 \sqrt{1/\beta} a^2}$$

$$w_{16}(q, p) = \frac{((B - A)q + p(A + B))\gamma^5 (-1 + \beta)}{360a}$$

$$w_{17}(q, p) = \left(\frac{A(2\eta^2 - 1)(-8B\gamma a\eta^2 - 4Aa\eta^2 - 2A\gamma^2 a + 2B\gamma^2 a - \beta aA + \beta aA_0 + Aa + 2b)}{a^2 \sqrt{1/\beta}} + \right.$$

$$+ \frac{2}{a^2} \left(-8ABa\eta^4 \gamma - \frac{AB\eta\gamma^{13} (pA - qA + pB + qB)^2 (-1 + \beta)^2 q^2 i^4 t^{12}}{21600a} - A^2 a \gamma^4 + 2ABa\gamma^4 + \right.$$

$$+ 2ABa\eta^2 \gamma + 4Bb\eta^2 \gamma + Ab\gamma^2 - Bb\gamma^2 \Big) - \frac{2}{a} B^2 \gamma^2 (4\eta^2 - \gamma) + -\frac{2}{a^3} b^2 \Big) \frac{\gamma^2 (-1 + \beta)}{5040}$$

$$w_{23}(q, p) = -4 \operatorname{table} \left(\left[1 = \frac{\sqrt{A\gamma^2 + s^2}}{\gamma} \right] \right) \left(\left(\left(\frac{A}{4} - \frac{B}{2} \right) \gamma^2 + 2\gamma B \eta^2 + \left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) B \gamma \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \right.$$

$$+ \frac{A}{2} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) (2B\gamma + A) \Big) \frac{C\eta^2}{3}$$

$$w_{24}(q, p) = \frac{C\eta^2 \gamma^4 (A^2 - B^2)}{6} \sqrt{\frac{1}{\beta}} \operatorname{table} \left(\left[1 = \frac{\sqrt{A\gamma^2 + s^2}}{\gamma} \right] \right)$$

$$w_{25}(q, p) = \frac{1}{15} \left(2 \operatorname{table} \left(\left[1 = \frac{\sqrt{A\gamma^2 + s^2}}{\gamma} \right] \right) C \eta^2 \left(\frac{\left(\frac{3}{8} A^2 - \frac{3}{2} AB + B^2 \right) \gamma^4}{4} + B \eta^2 (-2B + A) \gamma^3 + \right.$$

$$+ \left(4B^2 \eta^4 + \left(\left(-\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) A - \frac{\beta A_0}{4} \right) \frac{B}{2} + \frac{A}{4} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) - \frac{1}{8} \right) A + \frac{\beta A_0}{8} \Big) \gamma +$$

$$+ \left(\eta^4 - \frac{1}{32} \beta^2 - \frac{1}{4} \beta \eta^2 \right) A^2 + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{A\beta A_0}{4} - \frac{A_0^2 \beta^2}{32} \Big) B \gamma \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \left(\frac{B(-2B + A) \gamma^3}{2} + \right.$$

$$+ 4B^2 \eta^2 \gamma^2 + 4 \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) BA \gamma + A^2 \eta^2 \Big) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{A}{2}$$

$$w_{26}(q, p) = -\frac{1}{90} \operatorname{table} \left(\left[1 = \frac{\sqrt{A\gamma^2 + s^2}}{\gamma} \right] \right) (A^2 - B^2) \left(\left(\left(\eta^2 + \gamma^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + 4B\gamma \eta^2 - B\gamma^2 + \frac{A_0 \beta}{4} \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \right.$$

$$+ A \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \Big) \gamma^4 C \eta^2$$

$$\begin{aligned}
w_{27}(q, p) = & -\frac{1}{315} \left(2 \text{table} \left(\left[1 = \frac{\sqrt{A\gamma^2 + s^2}}{\gamma} \right] \right) C \left(B \left(\left(-B^3 + \left(-1 + \frac{5A}{2} \right) B^2 - \frac{15A^2B}{8} + \frac{5A^3}{16} + A^2 \right) \frac{\gamma^6}{8} + \right. \right. \\
& + \frac{B\eta^2(A-B)(A-3B)\gamma^5}{2} + \left(-6B^3\eta^4 + \left(\left(3\eta^4 + \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{16}\beta \right) A + \frac{\beta A_0}{16} \right) B^2 - \frac{3AB}{8} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) + \right. \\
& + \frac{3A^2}{32} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) \left. \right) \gamma^4 + 2B\eta^2 \left(4B^2\eta^4 + \left(\left(-2\eta^2 + \frac{\beta}{4} + \frac{1}{4} \right) A - \frac{\beta A_0}{4} \right) B + \right. \\
& + A \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) A + \frac{\beta A_0}{8} \right) \left. \right) \gamma^3 + \left(12\eta^4 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{12} - \frac{1}{6} \right) A + \frac{\beta A_0}{12} \right) B^2 + \left(\left(-\eta^4 + \frac{1}{32}\beta^2 + \frac{1}{4}\beta\eta^2 \right) A^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{A\beta A_0}{4} + \frac{A_0^2\beta^2}{32} \right) \left(\frac{B}{2} - \frac{A}{4} \right) \right) \gamma^2 \\
w_{33}(q, p) = & -\frac{\chi\beta^2 A_0}{6(-1+\beta)^2} \\
w_{35}(q, p) = & \frac{\chi\beta^3 A_0^2}{120(-1+\beta)^3} \\
w_{37}(q, p) = & -\frac{\chi\beta^4 A_0^3}{5040(-1+\beta)^4}
\end{aligned}$$

Приложение 13

$$\begin{aligned}
\sigma_{x14}(q, p) &= \left(\left(\gamma \left((A-2B)\gamma + 8B\eta^2 \right) - 4\gamma p \right) a - 2b \right) \sqrt{1/\beta} + 4 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) Aa \left(\frac{\eta^2(-1+\beta)\gamma}{12\sqrt{1/\beta}a^2} \right) \\
\sigma_{x15}(q, p) &= -\frac{\gamma^4 \eta^2(-1+\beta)(A-B)}{30a} \\
\sigma_{x16}(q, p) &= -\left(\left(\left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3}B^2 \right) \gamma^3 + \frac{32B\eta^2(A-2B)\gamma^2}{3} + \frac{128\gamma B^2\eta^4}{3} + \frac{16B(4\eta^4 - \eta^2)A}{3} \right) \right. \\
&\quad \left. - 8p\gamma^2 \left(\left(A - \frac{2B}{3} \right) \gamma + \frac{8B\eta^2}{3} \right) \right) \gamma a^2 - \frac{4b \left((A-2B)\gamma + 8B\eta^2 - 4\gamma p \right) \gamma a}{3} + \frac{8b^2}{3} \sqrt{1/\beta} + \\
&\quad + \frac{8}{3} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) Aa \left(\left((A-2B)\gamma^2 + 8\gamma B\eta^2 + (4\eta^2 + \beta - 1)A - A_0\beta \right) - 4p\gamma^2 \right) a - 2b \left(\frac{\eta^2(-1+\beta)\gamma}{480\sqrt{1/\beta}a^3} \right) \\
\sigma_{x17}(q, p) &= \left(\left(\gamma \left((4\eta^2 + \gamma)A - 2B(-4\eta^2 + \gamma) \right) (A-B) + 2\gamma Bp \right) a - b(A-B) \right) \sqrt{1/\beta} + \\
&\quad + 2 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A(A-B)a \left(\frac{\eta^2(-1+\beta)\gamma^4}{1260\sqrt{1/\beta}a^2} \right) \\
\sigma_{x23}(q, p) &= 2B \left(\left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3}B^2 \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{3\gamma^4}{32} + \eta^2 B \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) (A-2B)\gamma^3 + (2(2\eta^6 - \eta^4)B^2 + \right. \\
&\quad \left. - \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A - \left(p^2 + \frac{\beta A_0}{2} \right) \frac{\eta^2}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4} + \frac{\beta A_0}{8} \right) \frac{B}{2} + \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{\beta A_0}{2} + p^2 \right) \frac{\eta^2}{2} - \frac{p^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{\beta A_0}{8} \right) \frac{A}{4} \right) \gamma^2 + 4\eta^2 B \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{3}{8} \right) A + \left(\frac{\beta A_0}{2} + p^2 \right) \frac{\eta^2}{4} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{p^2}{8} - \frac{q^2}{8} - \frac{\beta A_0}{16} \right) \gamma + \left(\eta^4 - \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\eta^2}{2} - \frac{\beta^2}{32} + \frac{\beta}{8} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A^2 + \left(\left(\frac{\beta A_0}{2} + p^2 \right) \eta^4 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\beta^2 A_0}{4} + \left(-\frac{p^2}{2} - A_0 \right) \beta - p^2 - q^2 \right) \frac{\eta^2}{2} + \left(p^2 + q^2 - \frac{1}{2} \beta A_0 + A_0 \right) \frac{\beta}{8} \right) \frac{A}{2} + \left(\left(p^2 - \frac{\beta A_0}{4} \right) \eta^2 + \right. \\
&\quad \left. - \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} + \frac{\beta A_0}{8} \right) \frac{A_0 \beta}{8} \gamma \sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{(A-2B)B\gamma^3}{2} + 2(2\eta^4 - \eta^2)B^2\gamma^2 + \right. \\
&\quad \left. + 4B \left(\left(\eta^4 - \frac{7}{8}\eta^2 + \frac{3}{16} \right) A + \frac{\eta^2 p^2}{4} - \frac{p^2}{8} - \frac{q^2}{8} \right) \gamma + A \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right)^2 A - \frac{p^2}{4} + \frac{\eta^2 p^2}{2} - \frac{q^2}{4} \right) \right) \left(\frac{8\eta^2 C}{3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_{24}}(q, p) = & -\left(\left((4B\gamma + A)\eta^4 + \left(\left(\gamma^2 - \frac{\beta}{4} - 1\right)A - B\gamma^2 - 2B\gamma + \frac{p^2}{2} + \frac{\beta A_0}{4}\right)\eta^2 + \left(-\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\beta}{8} + \frac{1}{4}\right)A + \right.\right. \\
& \left. + \left(\frac{B\gamma^2}{2} - \frac{p^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{\beta A_0}{8}\right)\sqrt{\frac{1}{\beta}} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2}\right)^2 A\right) \frac{2\eta^2\gamma^4(A^2 - B^2)C}{3} + \\
& + 12\eta^2 B^2 \left(\left(\eta^4 - \frac{5}{6}\eta^2 + \frac{1}{6}\right)A + \frac{\eta^2 p^2}{6} - \frac{p^2}{12} - \frac{q^2}{12}\right)\gamma^2 + 6\left(\left(\eta^6 - \eta^4 + \frac{9}{32}\eta^2 - \frac{1}{64}\right)A + \right. \\
& \left. + \frac{1}{3}\left(\eta^2 p^2 - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}q^2\right)AB\gamma + \eta^2 A^2 \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2}\right)^2 A + \left(\eta^2 - \frac{1}{8}\right) - \frac{p^2}{4} + \frac{\eta^2 p^2}{2} - \frac{q^2}{4}\right)\right) \\
\sigma_{x_{26}}(q, p) = & \frac{2(A^2 - B^2)C\eta^2\gamma^4}{45} \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2}\right)\left(\eta^4 + \left(\gamma^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2}\right)\eta^2 + \frac{3\gamma^4}{4} - \left(1 + \frac{\beta}{2}\right)\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\beta^2}{32} + \frac{\beta}{8}\right)A^2 + \right. \\
& + \left(8\left(\eta^2 - \frac{1}{2}\right)\gamma\left(\eta^4 + (5\gamma^2 - \beta - \gamma - 3)\frac{\eta^2}{8} + \frac{\gamma}{32}(-6\gamma^2 + \beta + 2)\right)B + \left(\frac{\beta A_0}{2} + p^2\right)\frac{\eta^4}{2} + \left(\left(\frac{\beta A_0}{2} + p^2\right)\gamma^2 + \right.\right. \\
& \left. + \frac{\beta^2 A_0}{8} - \left(\frac{p^2}{2} + A_0\right)\frac{\beta}{2} - \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2}\right)\frac{\eta^2}{2} - \left(p^2 + q^2 - \frac{\beta A_0}{2}\right)\frac{\gamma^2}{4} + \left(p^2 + q^2 - \frac{1}{2}\beta A_0 + A_0\right)\frac{\beta}{16}\Big)A + \\
& + 12\left(\eta^2 - \frac{1}{2}\right)\gamma^2\left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4}\right)^2 B^2 + 2\left(\left(\frac{\beta A_0}{2} + p^2\right)\eta^2 - \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} - \frac{\beta A_0}{4}\right)\gamma\left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4}\right)B + \left(\left(p^2 - \frac{\beta A_0}{4}\right)\eta^2 \right. \\
& - \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} + \frac{\beta A_0}{8}\Big)\frac{A_0\beta}{8}\sqrt{\frac{1}{\beta}} + 2\left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2}\right)\left(\eta^2 + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{3}{8}\right)A + 2\left(\eta^2 - \frac{1}{2}\right)\gamma\left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4}\right)B + \frac{\eta^2 p^2}{4} - \frac{p^2}{8} + \right. \\
& \left. - \frac{q^2}{8}\right)\left(\eta^2 - \frac{1}{2}\right)A \\
\sigma_{x_{34}}(q, p) = & -\frac{1}{96\sqrt{1/\beta}a^3\beta}\left(a^2(A - A_0)\left(\left(-\eta^2 + \frac{1}{2}\right)A_0 + (-4p^2 + A)\eta^2 + 2p^2 - 2q^2 - \frac{A}{2}\right)\beta^2 + \right. \\
& \left. - 4a\left(\left(-\eta^2 + \frac{1}{2}\right)A_0 + (-2p^2 + A)\eta^2 + p^2 - q^2 - \frac{A}{2}\right)b\beta - 8b^2\eta^2 + 4b\right)^2 \\
\sigma_{x_{36}}(q, p) = & \frac{1}{11520\sqrt{1/\beta}}\left(a^3(A - A_0)^2\left(-6\eta^2 p^2 + A\eta^2 - \eta^2 A_0 + 3p^2 - 3q^2 - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A_0\right)\beta^3 \right. \\
& - 2a^2(A - A_0)b\left(-4\eta^2 p^2 + A\eta^2 - \eta^2 A_0 + 2p^2 - 2q^2 - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A_0\right)\beta^2 + \\
& \left. + 8a\left(-2\eta^2 p^2 + A\eta^2 - \eta^2 A_0 + p^2 - q^2 - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A_0\right)b^2\beta + (16\eta^2 - 8)b^3\right)
\end{aligned}$$

Приложение 14

$$\begin{aligned}
 \sigma_{y14}(q, p) &= - \left(\left(\left((A-2B)\gamma + 8B\eta^2 \right) + 4\gamma q^2 \right) \gamma a - 2bi^2 \right) \sqrt{1/\beta} + 4a \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \frac{\gamma \eta^2 (\beta - 1)}{12\sqrt{1/\beta} a^2} \\
 \sigma_{y15}(q, p) &= - \frac{\gamma^4 (A+B)(-1+\beta) \eta^2}{30a} \\
 \sigma_{y16}(q, p) &= \left(\left(\left(\sqrt{1/\beta} \left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3} B^2 \right) \gamma^4 + \frac{32}{3} (-2B+A) \sqrt{1/\beta} B \eta^2 \gamma^3 + \left((2\eta^2 - 1) A^2 + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2B(-2\eta^2 + 1) A + 32B^2 \sqrt{1/\beta} \eta^4 \right) \frac{4\gamma^2}{3} + 64B\eta^2 A \left(\left(\sqrt{1/\beta} + 1 \right) \eta^2 - \frac{\sqrt{1/\beta}}{4} - \frac{1}{2} \right) \frac{\gamma}{3} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{32}{3} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \left(\left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A - \frac{A_0 \beta}{4} \right) \right) p + 8\gamma^2 \left(\sqrt{1/\beta} \left(A - \frac{2B}{3} \right) \gamma^2 + \frac{8B\sqrt{1/\beta} \gamma \eta^2}{3} + \frac{2A(2\eta^2 - 1)}{3} \right) a^2 \\
 &\quad - \left(\left((-2B+A) \sqrt{1/\beta} \gamma^2 + 8B\sqrt{1/\beta} \gamma \eta^2 + 2A(2\eta^2 - 1) \right) p + 4\sqrt{1/\beta} \gamma^2 \right) \frac{4ba}{3} + \frac{8\sqrt{1/\beta} b^2 p}{3} \bigg) \frac{\gamma \eta (-1+\beta)^2}{480\sqrt{1/\beta} a^3} \\
 \sigma_{y17}(q, p) &= \left(\left((A+B) \left(\left(-\frac{4\eta^2}{3} + \gamma \right) A - \frac{2B(-4\eta^2 + \gamma)}{3} \right) \gamma a - \frac{b}{3} \right) p + \frac{2\gamma^2 Ba}{3} \right) \sqrt{1/\beta} + \\
 &\quad + 2(A+B) pa \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{A}{3} \frac{p\gamma^4 \eta^2 (-1+\beta)}{420a^2} \\
 \sigma_{y23}(q, p) &= \left(2 \left(\frac{3\gamma^4}{32} \left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3} B^2 \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) + (-2B+A) \eta^2 B \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \gamma^3 + (2(2\eta^6 - \eta^4) B^2 + \right. \right. \\
 &\quad + \left(- \left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A - \left(+q^2 + \frac{A_0 \beta}{2} \right) \frac{\eta^2}{2} + \frac{p^2}{4} + \frac{q^2}{4} + \frac{A_0 \beta}{8} \right) \frac{B}{2} + \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A + \right. \\
 &\quad \left. \left(+ \left(\frac{A_0 \beta}{2} + q^2 \right) \frac{\eta^2}{2} - \frac{p^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{A_0 \beta}{8} \right) \frac{A}{4} \right) \gamma^2 + \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{3}{8} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A + \left(\frac{A_0 \beta}{2} + q^2 \right) \frac{\eta^2}{4} - \frac{p^2}{8} + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{q^2}{8} - \frac{A_0 \beta}{16} \right) 4\eta^2 B \gamma + \left(\eta^4 - \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\eta^2}{2} - \frac{\beta^2}{32} + \frac{\beta}{8} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A^2 + \left(\left(\frac{A_0 \beta}{2} + q^2 \right) \eta^4 + \left(\frac{\beta^2 A_0}{4} - \left(\frac{q^2}{2} + A_0 \right) \beta + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - p^2 - q^2 \right) \frac{\eta^2}{2} + \left(p^2 + q^2 - \frac{1}{2} A_0 \beta + A_0 \right) \frac{\beta}{8} \right) \frac{A}{2} - \left(\left(-2q^2 + \frac{A_0 \beta}{2} \right) \eta^2 + p^2 + q^2 - \frac{A_0 \beta}{4} \right) \frac{A_0 \beta}{16} \right) B \gamma \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \\
 &\quad + \left((A-2B) B \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\gamma^3}{2} + 2(2\eta^4 - \eta^2) B^2 \gamma^2 + 4B \left(\left(\eta^4 - \frac{7}{8} \eta^2 + \frac{3}{16} \right) A + \frac{\eta^2 q^2}{4} - \frac{p^2}{8} - \frac{q^2}{8} \right) \gamma + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right)^2 A - \frac{q^2}{4} + \frac{\eta^2 q^2}{2} - \frac{p^2}{4} \right) A \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \bigg) \frac{8\eta^2 C}{3} \\
 \sigma_{y24}(q, p) &= - \left(\left((4B\gamma + A) \eta^4 + \left(\left(\gamma^2 - \frac{\beta}{4} - 1 \right) A - B\gamma^2 - 2B\gamma + \frac{q^2}{2} + \frac{A_0 \beta}{4} \right) \eta^2 + \left(-\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\beta}{8} + \frac{1}{4} \right) A + \right. \right. \\
 &\quad \left. + \frac{B\gamma^2}{2} - \frac{p^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{A_0 \beta}{8} \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right)^2 A \bigg) \frac{2(A+B) \eta^2 (A-B) C \gamma^4}{3} + \\
 &\quad + \left(\left(\eta^4 - \frac{7}{8} \eta^2 + \frac{3}{16} \right) A + \frac{\eta^2 q^2}{4} - \frac{p^2}{8} - \frac{q^2}{8} \right) A \gamma^3 + 12\eta^2 B^2 \left(\left(\eta^4 - \frac{5}{6} \eta^2 + \frac{1}{6} \right) A + \frac{\eta^2 q^2}{6} - \frac{p^2}{12} - \frac{q^2}{12} \right) \gamma^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +6 \left(\left(\eta^6 - \eta^4 + \frac{9}{32} \eta^2 - \frac{1}{64} \right) A - \frac{(-2\eta^2 q^2 + p^2 + q^2)}{6} \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) \right) AB\gamma + \\
& + \eta^2 \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right)^2 A - \frac{q^2}{4} + \frac{\eta^2 q^2}{2} - \frac{p^2}{4} \right) A^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \Big) \\
\sigma_{y26}(q, p) = & \left(\left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\eta^4 + \left(\gamma^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{2} \right) \eta^2 + \frac{3\gamma^4}{4} - \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\beta^2}{32} + \frac{\beta}{8} \right) A^2 + \right. \right. \\
& + \left(8 \left(\eta^4 + \frac{(5\gamma^2 - \beta - \gamma - 3)\eta^2}{8} + \frac{\gamma(-6\gamma^2 + \beta + 2)}{32} \right) \gamma \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) B + \left(\frac{A_0 \beta}{2} + q^2 \right) \frac{\eta^4}{2} + \left(\left(\frac{A_0 \beta}{2} + q^2 \right) \gamma^2 + \right. \right. \\
& + \frac{\beta^2 A_0}{8} - \left(\frac{q^2}{2} + A_0 \right) \frac{\beta}{2} - \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} \Big) \frac{\eta^2}{2} - \left(p^2 + q^2 - \frac{A_0 \beta}{2} \right) \frac{\gamma^2}{4} + \left(p^2 + q^2 - \frac{1}{2} A_0 \beta + A_0 \right) \frac{\beta}{16} \Big) A + \\
& + 12\gamma^2 \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right)^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) B^2 - \left((-A_0 \beta - 2q^2) \eta^2 + p^2 + q^2 + \frac{A_0 \beta}{2} \right) \gamma \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) B - \left(\left(\frac{A_0 \beta}{2} - 2q^2 \right) \eta^2 + \right. \\
& + p^2 + q^2 - \frac{A_0 \beta}{4} \Big) \frac{A_0 \beta}{16} \Big) \sqrt{1/\beta} + 2 \left(\left(\eta^2 + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{3}{8} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A + 2\gamma \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) B + \frac{\eta^2 q^2}{4} - \frac{p^2}{8} + \right. \\
& - \frac{q^2}{8} \Big) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \Big) \frac{2(A^2 - B^2)\eta^2 C \gamma^4}{45} + \frac{(2\eta^2 q^2 - p^2 - q^2) \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right)}{6} \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) A^2 \Big) B \gamma^3 \Big) + \\
& + 24\eta^2 B^2 \left(\left(\eta^6 - \eta^4 + \frac{7}{24} \eta^2 - \frac{1}{48} \right) A - \left(\eta^2 - \frac{1}{6} \right) \frac{(-2\eta^2 q^2 + p^2 + q^2)}{8} \right) A \gamma^2 + \\
& + 8B \left(\left(\eta^6 - \frac{9}{16} \eta^4 + \frac{3}{64} \eta^2 + \frac{1}{512} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A - \frac{3(-2\eta^2 q^2 + p^2 + q^2)}{16} \left(\eta^4 - \frac{1}{6} \eta^2 - \frac{1}{96} \right) \right) A^2 \gamma + \\
& + \eta^4 \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right)^2 A - \frac{q^2}{4} + \frac{\eta^2 q^2}{2} - \frac{p^2}{4} \right) A^3 \Big) \Big) \\
\sigma_{y34}(q, p) = & \left((A - A_0) a^2 \left(\left(-\eta^2 + \frac{1}{2} \right) A_0 + (-4q^2 + A) \eta^2 - 2p^2 + 2q^2 - \frac{A}{2} \right) \beta^2 - 4ba \left(\left(\frac{1}{2} - \eta^2 \right) A_0 + \right. \right. \\
& + \left. (-2q^2 + A) \eta^2 - p^2 + q^2 - \frac{A}{2} \right) \beta - 8b^2 \eta^2 + 4b^2 \Big) \frac{1}{96\sqrt{1/\beta} \beta a^3} \\
\sigma_{y36}(q, p) = & - \left(\left(-6\eta^2 q^2 + A\eta^2 - \eta^2 A_0 - 3p^2 + 3q^2 - \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A_0 \right) (A - A_0)^2 a^3 \beta^3 - 2(A - A_0) ba^2 (-4\eta^2 q^2 + \right. \\
& + A\eta^2 - \eta^2 A_0 - 2p^2 + 2q^2 - \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A_0) \beta^2 + 8b^2 a \left(-2\eta^2 q^2 + A\eta^2 - \eta^2 A_0 - p^2 + q^2 - \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A_0 \right) \beta \\
& + (16\eta^2 - 8)b^3 \Big) \frac{1}{5760\sqrt{1/\beta} \beta a^4}
\end{aligned}$$

Приложение 15

$$\begin{aligned}
\sigma_{z14}(q, p) &= \left(\left(\gamma \left((p-q) \left((-2B+A)\gamma + 8B\eta^2 \right) (p+q)i^2 + 4B\gamma q \right) a - 2bi^2 (p-q)(p+q) \right) \right) \sqrt{1/\beta} + \\
&+ 4i^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) (p-q) a (p+q) A \frac{\eta^2 \gamma (-1+\beta)}{12\sqrt{1/\beta} a^2} \\
\sigma_{z15}(q, p) &= \frac{\left((p^2 + q^2) A + B(p^2 - q^2) \right) \gamma^4 i^2 \eta^2 (-1+\beta)}{30a} \\
\sigma_{z16}(q, p) &= \frac{-\eta^2 \gamma (-1+\beta)}{480\sqrt{1/\beta} a^3} \left(\left(\gamma \left((p-q) \left(A^2 \gamma^3 - 4B \left(-\frac{8}{3} \gamma^2 \eta^2 - \frac{16}{3} \eta^4 + \gamma^3 + \frac{4}{3} \eta^2 \right) A + \right. \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left. \frac{8\gamma B^2 (-4\eta^2 + \gamma)^2}{3} \right) (p+q)i^2 + 8\gamma^2 B \left(A\gamma - \frac{2B(-4\eta^2 + \gamma)}{3} \right) q \right) a^2 + \right. \\
&- \left. \frac{4\gamma \left((p-q) \left(A\gamma - 2B(-4\eta^2 + \gamma) \right) (p+q)i^2 + 4B\gamma q \right) ba}{3} + \frac{8b^2 i^2 (p-q)(p+q)}{3} \right) \sqrt{1/\beta} + \\
&+ \frac{8}{3} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\left(\left((4\eta^2 + \gamma^2 + \beta - 1) A + 8B\eta^2 \gamma - 2B\gamma^2 - \beta A_0 \right) (p-q)(p+q)i^2 + 4\gamma^2 Bq \right) a + \right. \\
&- \left. 2bi^2 (p-q)(p+q) \right) aA \\
\sigma_{z17}(q, p) &= \frac{-\eta^2 \gamma^4 (-1+\beta)}{420\sqrt{1/\beta} a^2} \left(\left(\left(\left(\left(\left(p^2 + \frac{q^2}{3} \right) \gamma - \frac{4\eta^2 p^2}{3} + \frac{4\eta^2 q^2}{3} \right) A^2 + \frac{B \left((p^2 - 3q^2) \gamma + 4\eta^2 (p^2 + q^2) \right) A}{3} + \right. \right. \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{2B^2 (p-q)(p+q)(-4\eta^2 + \gamma)}{3} \right) \gamma a - \frac{b \left((p^2 + q^2) A + B(p^2 - q^2) \right)}{3} \right) i^2 + \frac{2B^2 \gamma^2 a q}{3} \right) \sqrt{1/\beta} + \\
&+ \frac{2i^2 a A \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left((p^2 + q^2) A + B(p^2 - q^2) \right)}{3} \\
\sigma_{z23}(q, p) &= \frac{8CB\gamma\eta^2}{3} \left(\left(\left(\frac{3}{8} A^2 - \frac{3}{2} AB + B^2 \right) \frac{\gamma^4}{4} + B\eta^2 (-2B+A)\gamma^3 + \left(-\frac{A^2\beta}{16} + \left(B + \frac{A_0}{2} \right) \frac{\beta A}{8} + 4\eta^4 B^2 - \frac{B\beta A_0}{8} \right) \gamma^2 + \right. \right. \\
&+ \left. \left. 2 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) B\eta^2 \gamma - \frac{(A-A_0)^2 \beta^2}{32} \right) \sqrt{1/\beta} + A \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\left(\frac{A}{2} - B \right) \frac{\gamma^2}{2} + 2B\eta^2 \gamma + A \left(\eta^2 - \frac{1}{4} \right) \right) \right) \\
\sigma_{z24}(q, p) &= \frac{(A+B)C}{3} \left(\left(\left(\gamma^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + 4B\eta^2 \gamma - B\gamma^2 + \frac{\beta A_0}{4} \right) \sqrt{1/\beta} + A \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \right) (A-B) \gamma^4 \eta^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{z25}(q, p) = & \frac{4CB\gamma\eta^2}{15} \left(\left(\left(\frac{5A^3}{16} + \left(1 - \frac{15B}{8} \right) A^2 + \frac{5B^2A}{2} - B^2(B+1) \right) \frac{\gamma^6}{8} + \frac{\eta^2 B(A-B)(A-3B)\gamma^5}{2} + \right. \right. \\
& + \left(-\frac{3A^3\beta}{128} + \left(B + \frac{A_0}{4} \right) \frac{3\beta A^2}{32} + 3B \left(\left(\eta^4 - \frac{\beta}{48} \right) B - \frac{\beta A_0}{32} \right) A + \frac{B^2\beta A_0}{16} - 6B^3\eta^4 \right) \gamma^4 + B \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A^2 + \right. \\
& + \left(\left(\frac{\beta}{2} - 2\eta^2 + \frac{1}{2} \right) B + \frac{\beta A_0}{4} \right) A - \frac{B\beta A_0}{2} + 8\eta^4 B^2 \right) \eta^2 \gamma^3 + \left(\frac{\beta^2(B+A_0)A^2}{64} - \frac{A^3\beta^2}{128} + \left((8\eta^6 + (-\beta-2)\eta^4) B^2 + \right. \right. \\
& + \left. -\frac{B\beta^2 A_0}{32} - \frac{\beta^2 A_0^2}{128} \right) A + B\beta A_0 \left(\frac{\beta A_0}{64} + B\eta^4 \right) \gamma^2 + 2B \left(\left(\eta^4 - (1+\beta) \frac{\eta^2}{4} - \frac{(-1+\beta)^2}{32} \right) A^2 + \right. \\
& + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) \frac{\beta A_0 A}{4} - \frac{\beta^2 A_0^2}{32} \left. \right) \eta^2 \gamma - \frac{(A-A_0)^3 \beta^3}{128} \left. \right) \sqrt{1/\beta} + A \left(\left(\frac{3}{8} A^2 - \frac{3}{2} AB + B^2 \right) \frac{\gamma^4}{4} + B\eta^2(-2B+A)\gamma^3 + \right. \\
& + \left(\left(\eta^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{A^2}{4} + \left(\frac{1}{4} - \eta^2 \right) \frac{BA}{2} + 4\eta^4 B^2 \right) \gamma^2 + (4\eta^4 - \eta^2) BA\gamma + A^2 \left(\eta^4 - \frac{1}{4} \eta^2 - \frac{1}{32} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left. \right) \left. \right) \\
\sigma_{z26}(q, p) = & \frac{-1}{45} \left(\left(\left(\frac{3(A-B)^2 \gamma^4}{4} + 5B \left(A - \frac{6B}{5} \right) \eta^2 \gamma^3 + \left(-\frac{A^2 \beta}{4} + \frac{\beta(B+A_0)A}{4} + 12\eta^4 B^2 - \frac{B\beta A_0}{4} \right) \gamma^2 + \right. \right. \\
& + 4 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) B\eta^2 \gamma - \frac{(A-A_0)^2 \beta^2}{32} \left. \right) \sqrt{\frac{1}{\beta}} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \left((A-B)\gamma^2 + 4B\eta^2 \gamma + \right. \\
& + A \left(\eta^2 - \frac{1}{4} \right) \left. \right) \left. \right) (A+B)\eta^2 C(A-B)\gamma^4 \\
\sigma_{z34}(q, p) = & -\frac{A}{96a^3} \left((A-A_0)^2 \beta^2 a^2 - 4b\beta(A-A_0)a - 8b^2 \right) \left(\eta^2 + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1/\beta} \\
\sigma_{z36}(q, p) = & \frac{A}{5760a^4} \left(\eta^2 + \frac{1}{2} \right) \left((A-A_0)^3 \beta^3 a^3 - 2b\beta^2(A-A_0)^2 a^2 + 8b^2\beta(A-A_0)a + 16b^3 \right) \sqrt{1/\beta}
\end{aligned}$$

Приложение 16

$$\begin{aligned}
\tau_{xy14}(q, p) &= - \left(\left(\gamma \left((A - 2B)\gamma + 8\eta^2 B \right) - 4\gamma p^2 \right) a - 2b \right) \sqrt{1/\beta} + 4a \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \left(\frac{\gamma \eta^2 (\beta - 1)}{24 \sqrt{1/\beta} a^2} \right) \\
\tau_{xy15}(q, p) &= - \frac{(A^2 - B^2) \gamma^4 \eta^2 (\beta - 1)}{60a} \\
\tau_{xy16}(q, p) &= \left(\left(\left(A^2 \gamma^3 - 4 \left(-\frac{8}{3} \gamma^2 \eta^2 - \frac{16}{3} \eta^4 + \gamma^3 + \frac{4}{3} \eta^2 \right) B A + \frac{8\gamma B^2 (-4\eta^2 + \gamma)^2}{3} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. - 8\gamma^2 p^2 \left(A\gamma - \frac{2B}{3} (-4\eta^2 + \gamma) \right) \right) \gamma a^2 - \frac{4\gamma}{3} \left((A\gamma - 2B(-4\eta^2 + \gamma)) - 4\gamma p^2 \right) b a + \\
&\quad + \frac{8b^2}{3} \sqrt{1/\beta} + \frac{8a}{3} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\left((-4\gamma^2 p^2) a - 2b \right) A \right) \frac{\gamma \eta^2 (\beta - 1)}{960 \sqrt{1/\beta} a^3} \\
\tau_{xy17}(q, p) &= \left(\left(\left(\gamma \left(\left(p + \frac{q}{3} \right) \gamma - \frac{4\eta^2 (p - q)}{3} \right) A^2 + \frac{((p - 3q)\gamma + 4\eta^2) B A}{3} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2B^2 (p - q) (-4\eta^2 + \gamma)}{3} \right) a - \frac{(A + B(p - q)) b}{3} - \frac{2B a \gamma^2 p^2}{3} \right) \sqrt{1/\beta} + \\
&\quad + \frac{2a}{3} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) (A + B(p - q)) A \left(\frac{(\beta - 1) \gamma^4 \eta^2}{840 \sqrt{1/\beta} a^2} \right) \\
\tau_{xy23}(q, p) &= - \left(2\gamma \left(\left(\frac{A}{4} - \frac{B}{2} \right) \gamma^2 + 2\eta^2 B \gamma + \left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) B \sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A (2B\gamma + A) \right) \frac{4C\eta^4}{3} \\
\tau_{xy24}(q, p) &= \frac{(A^2 - B^2)}{3} \sqrt{1/\beta} C \eta^4 \gamma^4 \\
\tau_{xy25}(q, p) &= \left(2\gamma \left(\left(\frac{3}{8} A^2 - \frac{3}{2} B A + B^2 \right) \frac{\gamma^4}{4} + B \eta^2 (A - 2B) \gamma^3 + \left(4B^2 \eta^4 + \left(\left(-\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) A - \frac{\beta A_0}{4} \right) \frac{B}{2} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) \frac{A}{4} \right) \gamma^2 + 4\eta^2 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) A + \frac{\beta A_0}{8} \right) B \gamma + \left(\eta^4 - \frac{1}{32} \beta^2 - \frac{1}{4} \beta \eta^2 \right) A^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{\beta A_0 A}{4} - \frac{\beta^2 A_0^2}{32} \right) B \sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{B(A - 2B) \gamma^3}{2} + 4B^2 \gamma^2 \eta^2 + 4 \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) A B \gamma + \right. \\
&\quad \left. + A^2 \eta^2 \right) A \left(\frac{2C\eta^4}{15} \right) \\
\tau_{xy26}(q, p) &= - \left(\left(\left(\left(\eta^2 + \gamma^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + 4\eta^2 B \gamma - B \gamma^2 + \frac{\beta A_0}{4} \right) \sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \right) \frac{2(A^2 - B^3) C \eta^4 \gamma^4}{9} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy27}(q, p) = & \left(2\gamma B \left(\left(-B^3 + \left(-1 + \frac{5A}{2} \right) B^2 - \frac{15A^2B}{8} + \frac{5A^3}{16} + A^2 \right) \frac{\gamma^6}{8} + \right. \\
& + \frac{\eta^2 B (A - B) (A - 3B) \gamma^5}{2} - 6B^3 \eta^4 + \left(\left(\frac{1}{4} \eta^2 - \frac{1}{16} \beta + 3\eta^4 \right) A + \frac{\beta A_0}{16} \right) B^2 + \\
& - \frac{3AB}{8} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) + \frac{3}{32} \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) A + \frac{\beta A_0}{4} \right) A^2 \Big) \gamma^4 + \\
& + 2\eta^2 \left(4B^2 \eta^4 + \left(\left(-2\eta^2 + \frac{\beta}{4} + \frac{1}{4} \right) A - \frac{\beta A_0}{4} \right) B + \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) A + \frac{\beta A_0}{8} \right) AB \gamma^3 + \right. \\
& + \left(12 \left(\left(\eta^2 - \frac{\beta}{12} - \frac{1}{6} \right) A + \frac{\beta A_0}{12} \right) \eta^4 B^2 + \left(\left(-\eta^4 + \frac{1}{32} \beta^2 + \frac{1}{4} \beta \eta^2 \right) A^2 + - \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{\beta A_0 A}{4} + \frac{\beta^2 A_0^2}{32} \right) \frac{B}{2} + \right. \\
& + \left(\left(\eta^4 - \frac{1}{32} \beta^2 - \frac{1}{4} \beta \eta^2 \right) A^2 + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{\beta A_0 A}{4} - \frac{\beta^2 A_0^2}{32} \right) \frac{A}{4} \Big) \gamma^2 + 6 \left(\left(\eta^4 - \frac{(1+\beta)\eta^2}{6} - \frac{(\beta-1)^2}{96} \right) A^2 + \right. \\
& + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{8} - \frac{1}{8} \right) \frac{\beta A_0 A}{6} - \frac{\beta^2 A_0^2}{96} \Big) \eta^2 B \gamma + \left(-\frac{1}{128} \beta^3 - \frac{1}{4} \beta \eta^4 - \frac{1}{32} \beta^2 \eta^2 + \eta^6 \right) A^3 + \\
& + \left(\eta^4 + \frac{1}{4} \beta \eta^2 + \frac{3}{32} \beta^2 \right) \frac{\beta A_0 A^2}{4} - \left(\eta^2 + \frac{3\beta}{4} \right) \frac{\beta^2 A_0^2 A}{32} + \frac{\beta^3 A_0^3}{128} \Big) \sqrt{1/\beta} + \\
& + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \left(\frac{3}{16} \left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3} B^2 \right) B \gamma^5 + 2B^2 \eta^2 (A - 2B) \gamma^4 + \left(8B^2 \eta^4 + A \left(-2\eta^2 + \frac{1}{4} \right) B + \right. \right. \\
& + \left. \left. A^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{8} \right) \right) B \gamma^3 + 12\eta^2 \left(\eta^2 - \frac{1}{6} \right) AB^2 \gamma^2 + 6 \left(\eta^4 - \frac{1}{6} \eta^2 - \frac{1}{96} \right) A^2 B \gamma + A^3 \eta^4 \right) \Big) \frac{2C\eta^4}{315} \\
\tau_{xy34}(q, p) = & \frac{(2v^2 - 3A + 3A_0) \beta^2 \eta^2 \chi}{24\sqrt{1/\beta}} \\
\tau_{xy36}(q, p) = & \frac{(8v^4 - 20Av^2 + 20v^2 A_0 + 15A^2 - 30AA_0 + 15A_0^2) \eta^2 \chi \beta^3}{2880\sqrt{1/\beta}}
\end{aligned}$$

Приложение 17

$$\tau_{yz13}(q, p) = - \left(Aa \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) - \left(\gamma \left((p^2 - q^2 + B) \gamma - 4\eta^2 B \right) a + b \right) \frac{\sqrt{1/\beta}}{2} \right) \frac{2(\beta-1)\eta^2}{3\sqrt{1/\beta}a^2}$$

$$\tau_{yz14}(q, p) = - \frac{(\beta-1)\gamma^3\eta^2((A+B)+2q^2)}{12a}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz15}(q, p) = & (-\gamma((p^2 - q^2 + B)(A-B)\gamma^3 - 2\eta^2 B(-2p^2 + 2q^2 + A - 4B)\gamma^2 - 16B^2\gamma\eta^4 + \\ & + 2B(-4\eta^4 + \eta^2)A)a^2 + b\gamma((p^2 - q^2 + B)\gamma - 4\eta^2 B)a + b^2) \frac{\sqrt{1/\beta}}{4} + \left(\left(\frac{(-p^2 + q^2 - B)\gamma^2}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\eta^2 B\gamma + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A - \frac{\beta A_0}{4} \right) a - \frac{b}{2} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) Aa \right) \frac{(\beta-1)\eta^2}{15\sqrt{1/\beta}a^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz16}(q, p) = & \left(\left((-q^2 + B)\gamma^5 - \frac{3\eta^2 B\gamma^4}{2} + B(-4\eta^4 + \eta^2)\gamma^2 - 16 \left(\eta^4 - \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{32} \right) \eta^2 B \right) A^2 + \right. \\ & + \left(\gamma \left(-\frac{2\gamma(A+B)p^3}{5} + \left(A^2 + \frac{(-2q^2 + B)A}{5} + \frac{2Bq^2}{5} - \frac{4B^2}{5} \right) \gamma - \frac{8\eta^2(A+B)(A-2B)}{5} \right) + \right. \\ & + \frac{6q^2}{5} \left(\left(A - \frac{2B}{3} \right) \gamma + \frac{8\eta^2 B}{3} \right) a - \frac{2b(p(A+B)+2q^2)}{5} \left. \right) \sqrt{1/\beta} + \\ & + \frac{4}{5} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) Aa \left((A+B) + 2q^2 \right) \eta^2 \left. \right) \frac{(\beta-1)\gamma^3}{44\sqrt{1/\beta}a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{yz17}(q, p) = & \left(\frac{1}{8} (-\gamma (\gamma^2 (A^2 \gamma^3 - 2B(-4\eta^4 - 3\gamma^2 \eta^2 + \gamma^3 + \eta^2))A + \gamma B^2 (-4\eta^2 + \gamma)^2) p^2 + \right. \\
& + \left(\left((-q^2 + B) \gamma^5 - \frac{3\eta^2 B \gamma^4}{2} + B(-4\eta^4 + \eta^2) \gamma^2 - 16 \left(\eta^4 - \frac{1}{4} \eta^2 - \frac{1}{32} \right) \eta^2 B \right) A^2 + \right. \\
& - 2B\gamma \left(\left(-q^2 + B - \frac{1}{2} \right) \gamma^4 - 6\eta^2 \left(-\frac{q^2}{2} + B \right) \gamma^3 + 8B\gamma^2 \eta^4 + \right. \\
& - 8 \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \eta^2 \left(\eta + \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{q^2}{2} + B \right) \gamma + 32B\eta^6 - 8B\eta^4 \Big) A + \left((-q^2 + B + 1) \gamma^3 + \right. \\
& - 12\eta^2 \left(-\frac{2q^2}{3} + B \right) \gamma^2 + 48 \left(-\frac{q^2}{3} + B \right) \eta^4 \gamma - 64B\eta^6 \Big) B^2 \gamma^2 \Big) p + 2B\gamma^5 q^2 \Big) a^3 + \\
& + b\gamma \left((A\gamma - B(-4\eta^2 + \gamma)) \gamma^2 p^2 + ((-q^2 + B) \gamma^3 - 2B\gamma^2 \eta^2 - 8B\eta^4 + 2\eta^2 B) A + \right. \\
& - (-4\eta^2 + \gamma) ((-q^2 + B) \gamma - 4\eta^2 B) B\gamma \Big) pa^2 - b^2 \gamma (\gamma p^2 + (-q^2 + B) \gamma - 4\eta^2 B) pa + \\
& - b^3 p) \sqrt{1/\beta} + - \left(\left(\left(\left(2\eta^2 + \gamma^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \right) A + 4\eta^2 B\gamma - B\gamma^2 - \frac{\beta A_0}{2} \right) \frac{\gamma^2 p}{4} + \right. \right. \\
& + \left(-\frac{1}{32} + \eta^4 + \frac{(\beta-1)\eta^2}{4} + \frac{3\beta^2}{32} - \frac{\beta}{16} \right) A^2 + \left(\frac{(q^2-B)\gamma^4}{4} + \frac{\eta^2 B \gamma^3}{2} + \right. \\
& - \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) \frac{(-q^2+B)\gamma^2}{2} + 4\eta^2 \left(\eta^2 + \frac{\beta}{8} - \frac{1}{4} \right) B\gamma - \left(\eta^2 + \frac{3\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) \frac{\beta A_0}{4} \Big) A + \\
& + \frac{B(-q^2+B)\gamma^4}{4} - 2\eta^2 B \left(-\frac{q^2}{2} + B \right) \gamma^3 + \left(4B^2 \eta^4 + \frac{\beta A_0 (-q^2+B)}{8} \right) \gamma^2 - \frac{B\gamma\beta\eta^2 A_0}{2} + \\
& + \frac{3\beta^2 A_0^2}{32} \Big) a^2 - \left(-\frac{\gamma^2 p^2}{2} + \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A + \frac{(q^2-B)\gamma^2}{2} + 2\eta^2 B\gamma - \frac{\beta A_0}{4} \right) \frac{ba}{2} + \\
& + \frac{b^2}{4} \Big) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) Aa \Big) \frac{(\beta-1)\eta^2}{315\sqrt{1/\beta}a^4} \\
\tau_{yz23}(q, p) = & - \frac{(A^2 - B^2) \sqrt{1/\beta} 4\eta^4 C \gamma^4}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{yz24}(q, p) = & -\left(2B\left((2B\gamma + A)^2\eta^4 + \left(B(A-2B)\gamma^3 + \frac{A(A-2B)\gamma^2}{4} - \frac{((\beta+2)A-\beta A_0)B\gamma}{2} + \right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left.-\frac{A((1+\beta)A-\beta A_0)}{4}\right)\eta^2 + \frac{\left(\frac{3}{8}A^2 - \frac{3}{2}BA + B^2\right)\gamma^4}{4} - \frac{(A-2B)((1+\beta)A-\beta A_0)\gamma^2}{16} + \right.\right. \\
& \left.\left.-\frac{((\beta-1)A-\beta A_0)^2}{32}\right)\eta^2\gamma\sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2}\right)\left((2B\gamma + A)^2\eta^4 + \left(\frac{B(A-2B)\gamma^3}{2} + \right.\right. \\
& \left.\left.-BA\gamma - \frac{A^2}{4}\right)\eta^2 - \frac{A^2}{32}\right)A\right)\frac{2C\eta^2}{3} \\
\tau_{yz25}(q, p) = & \left(\left(\left(\eta^2 + \gamma^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4}\right)A + \left(4\eta^2B\gamma - B\gamma^2 + \frac{\beta A_0}{4}\right)\sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2}\right)A\right)\frac{2\eta^4C\gamma^4(A^2 - B^2)}{15} \right. \\
\tau_{yz26}(q, p) = & \left(\left(\left(-q^2 + B\right)\gamma^5 - \frac{3\eta^2B\gamma^4}{2} + B(-4\eta^4 + \eta^2)\gamma^2 - 16\left(\eta^4 - \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{32}\right)\eta^2B\right)A^2 + \right. \\
& + \left(2((2B\gamma + A)^3\eta^6 + \frac{\eta^4}{4}((2B\gamma + A) - 6B(A-2B)\gamma^3 - A(A-2B)\gamma^2 + \right. \\
& + 2((\beta+3)A-\beta A_0)B\gamma + A((1+\beta)A-\beta A_0)) + \frac{\eta^2}{2}(B(A-B)(A-3B)\gamma^5 + \\
& + \frac{3A}{16}\left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3}B^2\right)\gamma^4\frac{(A-2B)((\beta+2)A-\beta A_0)B\gamma^3}{2} + \\
& - \frac{(A-2B)A((1+\beta)A-\beta A_0)\gamma^2}{8} - \frac{\beta(A-A_0)((\beta-4)A-\beta A_0)B\gamma}{8} + \\
& \left.\left.-\frac{((\beta-1)A-\beta A_0)^2A}{16}\right) + \frac{\gamma^6}{8}\left(-B^3 + \left(-1 + \frac{5A}{2}\right)B^2 - \frac{15A^2B}{8} + \frac{5A^3}{16} + A^2\right) + \right. \\
& - \frac{3}{123}\left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3}B^2\right)((1+\beta)A-\beta A_0)\gamma^4 - \frac{((\beta-1)A-\beta A_0)^2(A-2B)\gamma^2}{128} + \\
& \left.-\frac{((\beta-1)A-\beta A_0)^2((1+\beta)A-\beta A_0)}{128}\right)B\eta^2\gamma\sqrt{1/\beta}(2B\gamma + A)^3\eta^6 + \\
& - (2B\gamma + A)(-4B(A-2B)\gamma^3 + 6BA\gamma + A^2)\frac{\eta^4}{4} + \frac{\eta^2}{4}\left(\frac{3}{4}\left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3}B^2\right)B\gamma^5 + \right. \\
& \left.-BA(A-2B)\gamma^3 - \frac{A^3}{8}\right) - \frac{A^3}{128}\left(\eta^2 - \frac{1}{2}\right)\frac{A2C\eta^2}{45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{yz27}(q, p) = & - \left(\left(\frac{3\gamma^4}{4} + \left(-\frac{1}{4} + \eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) \gamma^2 + \eta^4 - \frac{(1+\beta)\eta^2}{4} - \frac{(\beta-1)^2}{32} \right) A^2 + \right. \\
& + \left(8 \left(-\frac{3\gamma^3}{16} + \frac{5\gamma^2\eta^2}{8} + \left(\frac{1}{4} - \eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{\gamma}{8} + \eta^2 \left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{4} \right) \right) \gamma B + \frac{\beta A_0}{4} \left(\eta^2 + \gamma^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) \right) A + \\
& + 12 \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right)^2 \gamma^2 B^2 + \beta \gamma A_0 \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) B - \frac{\beta^2 A_0^2}{32} \sqrt{1/\beta} + 2 \left(\left(\eta^2 + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{1}{4} \right) A + \right. \\
& + 2B \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) \gamma \left. \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \left(A^2 - B^2 \right) \frac{2C\eta^4\gamma^4}{315} \\
\tau_{yz33}(q, p) = & \frac{(\nu^2 - A + A_0) \beta^2 \eta^2 \chi}{3} \\
\tau_{yz35}(q, p) = & \frac{\eta^2 \chi \beta^3 (-\nu^2 + A - A_0)^2}{60} \\
\tau_{yz37}(q, p) = & + \frac{(\nu^2 - A + A_0)^3 \beta^4 \eta^2 \chi}{2520}
\end{aligned}$$

Приложение 18

$$\begin{aligned}
\tau_{xz13}(q, p) &= \left(Aa \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{\left(\gamma \left((-p^2 + q^2 + B) \gamma - 4\eta^2 B \right) a + b \right) \sqrt{1/\beta}}{2} \right) \frac{2(\beta-1)\eta^2}{3a^2 \sqrt{1/\beta}} \\
\tau_{xz14}(q, p) &= -\frac{\eta^2 (\beta-1) \gamma^3 (A-B-2p)}{12a} \\
\tau_{xz15}(q, p) &= \left(-\gamma \left((-p^2 + q^2 + B) (A-B) \gamma^3 - 2\eta^2 B (2p^2 - 2q^2 + A - 4B) \gamma^2 + (-16B^2 \gamma \eta^4 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2B(-4\eta^4 + \eta^2) A \right) a^2 + \gamma b \left((-p^2 + q^2 + B) \gamma - 4\eta^2 B \right) a + b^2 \right) \frac{\sqrt{1/\beta}}{4} + + \\
&\quad Aa \left(\left(\left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A + \frac{(p^2 - q^2 - B) \gamma^2}{2} + + 2\eta^2 B \gamma + -\frac{\beta A_0}{4} \right) a - \frac{b}{2} \right) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\eta^2 (\beta-1)}{3a^2 \sqrt{1/\beta}} \\
\tau_{xz16}(q, p) &= \frac{\gamma^3 \eta^2 (\beta-1)}{720a^2 \sqrt{1/\beta}} \left(\gamma \left(\left(A^2 + (-2p^2 - 2q^2 - 5B - 6p) A + 4 \left(-\frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} q^2 + B + p \right) B \right) \gamma + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 8(A^2 + BA - 2B(B+p)) \eta^2 \right) a - 2b(A-B-2p) \right) \sqrt{1/\beta} + 4Aa(A-B-2p) \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left. \right) \\
\tau_{xz17}(q, p) &= \left(-\gamma a^3 \left((-p^2 + q^2 + B) \gamma^5 - \frac{3\eta^2 B \gamma^4}{2} + B(-4\eta^4 + \eta^2) \gamma^2 - 16 \left(\eta^4 - \frac{1}{4} \eta^2 - \frac{1}{32} \right) \eta^2 B \right) A^2 + \right. \\
&\quad - 2\gamma \left(\left(-p^2 + q^2 + B + \frac{1}{2} \right) \gamma^4 - 6 \left(-\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + B \right) \eta^2 \gamma^3 + 8B\gamma^2 \eta^4 + \right. \\
&\quad \left. - 8 \left(\eta - \frac{1}{2} \right) \left(\eta + \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + B \right) \eta^2 \gamma + 32B\eta^6 - 8B\eta^4 \right) BA + (B^2 + \\
&\quad + ((-p^2 + q^2 + 1)B + 2p) \gamma^3 - 12 \left(-\frac{2p^2}{3} + \frac{2q^2}{3} + B \right) \eta^2 B \gamma^2 + 48 \left(-\frac{p^2}{3} + \frac{q^2}{3} + B \right) \eta^4 B \gamma + \\
&\quad - 64B^2 \eta^6) \gamma^2 B) + \gamma b \left(((-p^2 + q^2 + B) \gamma^3 - 2B\gamma^2 \eta^2 - 8B\eta^4 + 2\eta^2 B) A + \right. \\
&\quad \left. - \gamma(-4\eta^2 + \gamma) \left((-p^2 + q^2 + B) \gamma - 4\eta^2 B \right) B \right) a^2 - \gamma b^2 \left((-p^2 + q^2 + B) \gamma - 4\eta^2 B \right) a - b^3 \left. \right) \sqrt{1/\beta} + \\
&\quad + Aa \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(\left(\left(-\frac{1}{32} + \eta^4 + \frac{(\beta-1)\eta^2}{4} + \frac{3\beta^2}{32} - \frac{\beta}{16} \right) A^2 + \left(\frac{(p^2 - q^2 - B) \gamma^4}{4} + \frac{\eta^2 B \gamma^3}{2} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(-p^2 + q^2 + B)}{2} \left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) \gamma^2 + 4\eta^2 \left(\eta^2 + \frac{\beta}{8} - \frac{1}{4} \right) B \gamma - \left(\eta^2 + \frac{3\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) \frac{\beta A_0}{4} \right) A + \right. \\
&\quad \left. + \frac{B(-p^2 + q^2 + B) \gamma^4}{4} - 2 \left(-\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + B \right) \eta^2 B \gamma^3 + \left(4B^2 \eta^4 + \frac{\beta A_0 (-p^2 + q^2 + B)}{8} \right) \gamma^2 + \right. \\
&\quad \left. - \frac{B\gamma\beta\eta^2 A_0}{2} + \frac{3\beta^2 A_0^2}{32} \right) a^2 \left(\left(\eta^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A + \frac{(p^2 - q^2 - B) \gamma^2}{2} + 2\eta^2 B \gamma - \frac{\beta A_0}{4} \right) \frac{ba}{2} + \frac{b^2}{4} \left. \right) \frac{(\beta-1)\eta^2}{315\sqrt{1/\beta}a^4}
\end{aligned}$$

$$\tau_{xz23}(q, p) = -\frac{4\gamma^4(A^2 - B^2)}{3}\sqrt{1/\beta}\eta^4 C$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz24}(q, p) = & \left(\left(2(2B\gamma + A)^2 \eta^4 + \left(2B(A - 2B)\gamma^3 + \frac{A(A - 2B)\gamma^2}{2} - ((\beta + 2)A - \beta A_0)B\gamma + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{A((1 + \beta)A - \beta A_0)}{2} \right) \eta^2 + \left(\frac{3}{16}A^2 - \frac{3}{4}BA + B^2 \right) \gamma^4 - \frac{(A - 2B)((1 + \beta)A - \beta A_0)\gamma^2}{8} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{((\beta - 1)A - \beta A_0)^2}{16} \right) \eta^2 \gamma B \sqrt{1/\beta} \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left((2B\gamma + A)^2 \eta^4 + \left(\frac{B(A - 2B)\gamma^3}{2} - BA\gamma - \frac{A^2}{4} \right) \eta^2 - \frac{A^2}{32} \right) A \right) \frac{2\eta^2 C}{3} \end{aligned}$$

$$\tau_{xz25}(q, p) = \left(\left(\left(\eta^2 + \gamma^2 - \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) A + 4\eta^2 B\gamma - B\gamma^2 + \frac{\beta A_0}{4} \right) \sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A \right) \frac{2(A^2 - B^2)\gamma^4 \eta^4 C}{15}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz26}(q, p) = & (2\eta^2(2B\gamma + A)^3 \eta^6 - (2B\gamma + A)(-6B(A - 2B)\gamma^3 - A(A - 2B)\gamma^2 + \\ & + 2((\beta + 3)A - \beta A_0)B\gamma + A((1 + \beta)A - \beta A_0)) \frac{\eta^4}{4} + \frac{\eta^2}{2}(B(A - B)(A - 3B)\gamma^5 + \\ & + \frac{3A}{16}(A^2 - 4BA + \frac{8}{3}B^2)\gamma^4 - \frac{(A - 2B)((\beta + 2)A - \beta A_0)B\gamma^3}{2} - \frac{(A - 2B)A((1 + \beta)A - \beta A_0)\gamma^2}{8} + \\ & - \frac{\beta(A - A_0)((\beta - 4)A - \beta A_0)B\gamma}{8} - \frac{((\beta - 1)A - \beta A_0)^2 A}{16}) - \left(B^3 + \left(1 - \frac{5A}{2} \right) B^2 + \frac{15A^2 B}{8} - \frac{5A^3}{16} + \right. \\ & \left. - A^2 \right) \frac{\gamma^6}{8} - \frac{3}{8} \left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3}B^2 \right) ((1 + \beta)A - \beta A_0)\gamma^4 - \frac{((\beta - 1)A - \beta A_0)^2 (A - 2B)\gamma^2}{128} + \\ & - \frac{((\beta - 1)A - \beta A_0)^2 ((1 + \beta)A - \beta A_0)}{128} B \sqrt{1/\beta} + \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) A (2B\gamma + A)^3 \eta^6 + \\ & - (2B\gamma + A)(-4B(A - 2B)\gamma^3 + 6BA\gamma + A^2) \frac{\eta^4}{4} + \left(\frac{3}{4} \left(A^2 - 4BA + \frac{8}{3}B^2 \right) B\gamma^5 + \right. \\ & \left. - BA(A - 2B)\gamma^3 - \frac{A^3}{8} \right) \frac{\eta^2}{4} - \frac{A^3}{128} \frac{4\eta^2 C}{45} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz27}(q, p) = & - \left(\left(\frac{3\gamma^4}{4} + \left(-\frac{1}{4} + \eta^2 - \frac{\beta}{4} \right) \gamma^2 + \eta^4 - \frac{(1 + \beta)\eta^2}{4} - \frac{(\beta - 1)^2}{32} \right) A^2 + \left(8\gamma B \left(-\frac{3\gamma^3}{16} + \frac{5\gamma^2 \eta^2}{8} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1}{4} - \eta^2 + \frac{\beta}{4} \right) \frac{\gamma}{8} + \eta^2 \left(\eta^2 - \frac{\beta}{8} - \frac{1}{4} \right) \right) + \left(\eta^2 + \gamma^2 + \frac{\beta}{4} - \frac{1}{4} \right) \frac{\beta A_0}{4} \right) A + 12 \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right)^2 \gamma^2 B^2 + \beta \gamma A_0 \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) B + \\ & \left. - \frac{A_0^2 \beta^2}{32} \right) \sqrt{1/\beta} + 2 \left(\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left(A \left(\eta^2 + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{1}{4} \right) A + 2 \left(\eta^2 - \frac{\gamma}{4} \right) B\gamma \right) (A - B) \frac{2(A + B)\gamma^4 C \eta^4}{135} \end{aligned}$$

$$\tau_{xz33}(q, p) = \frac{\eta^2 \chi \beta^2 A_0}{3(\beta - 1)^2}$$

$$\tau_{xz35}(q, p) = \frac{\eta^2 \chi \beta^4 A_0^3}{2520(\beta - 1)^4}$$