

На правах рукописи



Калягин Максим Юрьевич

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ВЫСОКОИНТЕНСИВНЫХ НАГРУЗОК РАЗЛИЧНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ

Специальность: 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени кандидата технических наук

Москва 2026 г.

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ).

Научный руководитель: **Рабинский Лев Наумович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Перспективные материалы и технологии аэрокосмического назначения», профессор кафедры «Сопrotивление материалов, динамика и прочность машин» МАИ, г. Москва.

Официальные оппоненты: **Могилевич Лев Ильич** доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», г. Саратов.

Хомченко Антон Васильевич, кандидат технических наук, начальник отдела нагрузок и аэроупругости ООО «АУРУС-АЭРО», г. Москва.

Ведущая организация: федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва.

Защита диссертации состоится 19 июня 2026 г. в 13 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.13, созданном на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4 и на сайте: https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=187176

Автореферат разослан « _____ » _____ 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.2.327.13, к.т.н.



Орехов Александр Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации и степень её разработанности. Тема исследования связана с изучением особенностей деформирования пористых материалов при статическом и динамическом нагружении. Актуальность темы определяется тем, что с одной стороны пористые среды с заданной пористостью представляют специальный класс материалов со специальными эксплуатационными свойствами (например, в задачах связанных с фильтрацией, термо- и шумозащите, в медицине и др.), а с другой стороны модели пористых сред привлекаются для адекватного моделирования и объяснения особенностей деформирования многих конструкционных материалов в определенных условиях когда требуется учитывать появление микроструктурных особенностей связанных с полями дефектов типа пористости, появляющимися в процессе изготовления (композиты при пультрузии), а также при описании эффектов накопления повреждений и пластического поведения в областях концентрации напряжений, когда привлекаются дислокационные модели со скалярной характеристикой дефектности – свободной дилатацией), а также в сравнительно новых областях когда требуются развития континуальные модели метаматериалов. Теоретическое и экспериментальное изучение в этой области далеко от завершения, многие вопросы, например, градиентные масштабные эффекты в теории пористых сред и вовсе почти не изучены.

В качестве **объекта исследования** выступают пористые материалы, работающие в условиях динамических, высокоинтенсивных нагрузок различной физической природы.

Предметом исследования является расширенный вариант моделей пористых сред, учитывающий и дефектность (свободные – неинтегрируемые дилатации) и градиентную дилатацию-масштабные эффекты варианта градиентной теории упругости, связанной лишь с шаровым тензором деформаций, динамические свойства пористых конструкций, под действием высокоинтенсивных нагрузок различной физической природы.

Целью работы является развитие новых адекватных моделей пористых сред, в уточнении известных моделей типа Ковина, в построении новых методов расчета конструктивных элементов из пористых материалов (тонкостенные стержни), в экспериментальном изучении динамических свойств элементов пористых конструкций, а также получения численных и аналитических решений для пористых изделий.

Научная новизна определяется в области построения модели тем, что представлено общее решение уравнений дефектных пористых сред, предложена идентификация неклассических физических параметров, построена вариационная модель обобщенных градиентных пористых сред со свободной и стесненной дилатацией, установлен вид инерционных составляющих для обобщенной пористой среды. Предложен и апробирован проекторный расчет модели ударного взаимодействия преграды и тела, основанная на теории деформации Генки-Ильюшина.

Методология и методы исследования. Для определения динамических свойств рассматриваемых материалов применялись аналитические и численные методы, включающие в себя классическую и градиентную теорию упругости, теорию дифференциальных уравнений. Реализация поставленной задачи осуществлялась на основе математического пакета MATLAB. При выполнении численного моделирования задач с **использованием метода** конечных элементов применялся программный комплекс Ansys Workbench. Статические испытания проводились с использованием универсальной разрывной машины Instron, динамические испытания проводились с использованием вибростенда TIRA TV, а исследование микроструктуры проводилось с использованием растрового электронного микроскопа Karl Zeiss.

Практическая ценность работы заключается в разработке метода проведения динамических испытаний и численно-аналитического расчета динамических свойств пористых материалов. Важность представленных результатов на практике связана с точными оценками динамических характеристик пористых материалов, используемых в авиационных и аэрокосмической промышленности.

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и полученных результатов подтверждается использованием строгих и апробированных подходов классической и градиентной теории упругости, теории колебаний, результатами аналитического и численного моделирования, а также результатами экспериментальных исследований, выполненных с использованием высокоточного оборудования и с соблюдением стандартов проведения испытаний.

Основные положения, выносимые на защиту:

- вариационная модель обобщенных градиентных пористых сред со свободной и стесненной дилатацией;
- результаты исследований механических и динамических свойств пористых материалов при статическом и динамическом нагружении;
- предложенные приближенные оценки эффективных свойств пористых структур на основе соотношений механики композитов по объемному содержанию пустот в матрице;
- модели деформирования пористых тонких структур (стержней и пластин) с двумя параметрами масштаба (пористость-дефектность и градиентность);
- методика и результаты конечно-элементного моделирования высокоскоростного удара пористого тела о преграду.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на конференциях:

- Международная научно-практическая конференция, посвященная 70-летию БелИИЖТа - БелГУТа, Гомель, 16–17 ноября 2023 года;
- Международный симпозиум им. А.Г. Горшкова «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред», Кремёнки, 15–19 мая 2023 года;
- XIII международная научно-практическая конференция, посвященная Году качества, Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, 21–22 ноября 2024 года;
- Международный симпозиум им. А.Г. Горшкова «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред», Кремёнки, 19–23 мая 2025 года;

Объём и структура диссертации. Работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, содержащего 100 ссылок. Всего 123 страницы, включая 27 рисунков, 5 таблиц.

Содержание работы

Во **Введении** приведен обзор диссертационной работы, обоснована актуальность работы, сформулированы задачи и цель исследования, описана научная новизна, методология, чем обосновывается достоверность полученных основных результатов, личный вклад автора, а также приводится список публикаций и структура диссертационной работы.

В **Главе 1** сформулирована и исследована обобщенная модель градиентной пористой среды. Обобщенной она названа в связи с учетом в плотности потенциальной энергии билинейного слагаемого относительно градиентов совместного и несовместного изменения

объёма, что отличает модель и от градиентной теории Тупина, и от теории Миндлина. Показано, что они являются частными случаями обобщенной модели. Так же показано, что классическая теория упругости и теория среды с алгебраической пористостью так же являются частными случаями обобщенной модели. В качестве прикладных моделей рассмотрены формулировки «плохой» и «хорошей» теории цилиндрического изгиба пористых пластин. «Плохая» теория отличается от «хорошей» тем, что в ней классическая цилиндрическая жесткость получает поправку за счет градиентных жесткостей, в то время как в точной постановке обобщенной теории пористой среды такого эффекта нет.

Рассматривается линейная изотропная среда, в качестве кинематических переменных выступает вектор перемещения, тензор девиатора (γ_{ij}) перемещений и шаровой (θ), а также скаляр φ , по сути являющийся свободной дисторсией. Здесь рассматривается простейший случай модели Миндлина, когда φ связана только шаровым тензором.

Лагранжиана L , работа внешних сил A , потенциальная энергия U и плотность энергии U_V для обобщенной модели дефектной-пористой и градиентной среды выглядит следующим образом:

$$L = A - U, \quad A = \int_V P_i^V R_i dV + \int_F P_i^F R_i dF, \quad U = \int_V U_V dV \quad (1)$$

$$U_V = \frac{1}{2} [2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + (K^{11}\theta\theta + 2K^{12}\theta\varphi + K^{22}\varphi\varphi) + (C^{11}\theta_{,k}\theta_{,k} + 2C^{12}\theta_{,k}\varphi_{,k} + C^{22}\varphi_{,k}\varphi_{,k})]$$

Здесь запятая перед индексом означает частную производную. Коэффициенты K^{11} , K^{22} отвечают в (1) за наличие дефектов ($\varphi \neq 0$). А коэффициенты C^{ij} отвечают за «градиентность» C^{11} , и эволюцию пор, коэффициент C^{12} отвечает за связанность градиентных упругих дилатационных эффектов и полей дефектов-пор, P_i^V , P_i^F - плотности объемных и поверхностных сил.

Определяющие соотношения вводятся в следующем виде:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial \gamma_{ij}} = 2\mu\gamma_{ij}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^\theta = \frac{\partial U_V}{\partial \theta} = K^{11}\theta + K^{12}\varphi \\ \sigma^\varphi = \frac{\partial U_V}{\partial \varphi} = K^{12}\theta + K^{22}\varphi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} m_k^\theta = \frac{\partial U_V}{\partial \theta_{,k}} = C^{11}\theta_{,k} + C^{12}\varphi_{,k} \\ m_k^\varphi = \frac{\partial U_V}{\partial \varphi_{,k}} = C^{12}\theta_{,k} + C^{22}\varphi_{,k} \end{array} \right.$$

Полные напряжения определяются формулой: $\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda\theta + K^{12}\varphi)\delta_{ij}$

Квази-классические напряжения (total stress, в градиентных моделях) определяются формулой:

$$s_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial U_V}{\partial R_{i,jk}} \right) = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda\theta + K^{12}\varphi - C^{11}\Delta\varphi)\delta_{ij}$$

Уравнения равновесия записываются в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(R_{i,j} - R_{j,i})_{,j} + [(2\mu + \lambda)\theta + K^{12}\varphi - C^{11}\Delta\theta - C^{12}\Delta\varphi]_{,i} + P_i^V = 0 \\ C^{12}\Delta\theta + C^{22}\Delta\varphi - K^{12}\theta - K^{22}\varphi = 0 \end{array} \right.$$

Граничные условия в виде силовых факторов:

$$\int_F (P_i^F - s_{ij} n_j) \delta R_i dF = 0 \quad \int_F m_k^0 n_k \delta \theta dF = 0 \quad \int_F m_k^0 n_k \delta \varphi dF = 0$$

Граничные условия через кинематические переменные:

$$\begin{aligned} \int_F \left\{ P_i^F - \left[\mu (R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda R_{r,r} - C^{11} \Delta R_{r,r} + K^{12} \varphi - C^{12} \Delta \varphi) \delta_{ij} \right] n_j \right\} \delta R_i dF &= 0 \\ \int_F (C^{11} R_{r,rk} + C^{12} \varphi_{,k}) n_k \delta R_{i,i} dF &= 0 \\ \int_F (C^{12} R_{r,rk} + C^{22} \varphi_{,k}) n_k \delta \varphi dF &= 0 \end{aligned}$$

Также в **Главе 1** рассматриваются частные случаи дилатационной среды Миндлина, в которой учтены градиенты как совместного, так и несовместного изменения объёма. Частные случаи возникают за счет равенства нулю соответствующих модулей из общей модели.

Классический случай возникает при равенстве нулю всех неклассических модулей: $K^{12} = K^{22} = 0$, $C^{11} = C^{12} = C^{22} = 0$.

Тогда плотность потенциальной энергии приобретает вид:

$$U_V = \frac{1}{2} (2\mu \gamma_{ij} \gamma_{ij} + K^{11} \theta \theta) = \frac{1}{2} (2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda \theta \theta) \quad (2)$$

Здесь полные напряжения совпадают с классическими, так как отсутствует моментная поправка:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = \mu (R_{i,j} + R_{j,i}) + \lambda R_{k,k} \delta_{ij}$$

Вариационное уравнение имеет вид:

$$\delta L = \int_V (\sigma_{ij,j} + P_i^V) \delta R_i dV + \int_F (P_i^F - \sigma_{ij} n_j) \delta R_i dF = 0$$

Уравнения Эйлера и граничные условия в силовых факторах:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + P_i^V &= 0 \\ \int_F (P_i^F - \sigma_{ij} n_j) \delta R_i dF &= 0 \end{aligned}$$

Уравнения Эйлера и граничные условия в кинематических переменных:

$$\begin{aligned} \mu (R_{i,j} - R_{j,i})_{,j} + (2\mu + \lambda) R_{k,ki} + P_i^V &= 0 \\ \int_F \{ P_i^F - [\mu (R_{i,j} + R_{j,i}) + \lambda R_{r,r} \delta_{ij}] n_j \} \delta R_i dF &= 0 \end{aligned}$$

«Алгебраическая» пористая среда Миндлина

Пусть равны нулю неклассические модули: $C^{11} = C^{12} = C^{22} = 0$

Тогда плотность потенциальной энергии приобретает вид:

$$U_V = \frac{1}{2} (2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda \theta \theta + 2K^{12} \theta \varphi + K^{22} \varphi \varphi) \quad (3)$$

Здесь полные напряжения совпадают с классическими, так как отсутствует моментная поправка:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda R_{k,k} + K^{12}\varphi)\delta_{ij} \\ \sigma^\varphi = \frac{\partial U_V}{\partial \varphi} = K^{12}R_{k,k} + K^{22}\varphi \end{cases}$$

Вариационное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta L &= \left(\int_V P_i^V \delta R_i dV + \int_F P_i^F \delta R_i dF \right) - \int_V (\sigma_{ij} \delta R_{i,j} + \sigma^\varphi \delta \varphi) dV = \\ &= \int_V [(\sigma_{ij,j} + P_i^V) \delta R_i + \sigma^\varphi \delta \varphi] dV + \int_F (P_i^F - \sigma_{ij} n_j) \delta R_i dF = 0 \end{aligned}$$

Уравнения Эйлера и граничные условия в силовых факторах:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + P_i^V = 0 \\ \sigma^\varphi = 0 \\ \int_F (P_i^F - \sigma_{ij} n_j) \delta R_i dF = 0 \end{cases}$$

Уравнения Эйлера и граничные условия в кинематических переменных:

$$\begin{cases} \mu(R_{i,j} - R_{j,i})_{,j} + (2\mu + \lambda)R_{k,ki} + K^{12}\varphi_{,i} + P_i^V = 0 \\ K^{12}R_{k,k} + K^{22}\varphi = 0 \\ \int_F \{P_i^F - [\mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda R_{r,r} + K^{12}\varphi)\delta_{ij}]n_j\} \delta R_i dF = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Примечательным свойством модели алгебраической пористости является то, что пористость можно исключить (алгебраически выразить через совместное изменение объёма) с помощью уравнения пористости – второе уравнение системы (4): $\varphi = -K^{12}\theta / K^{22}$

Подставим это допущение в выражение плотности потенциальной энергии (3):

$$U_V = \frac{\left[2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\theta - 2K^{12}\frac{K^{12}}{K^{22}}\theta\theta + K^{22}\frac{K^{12}}{K^{22}}\frac{K^{12}}{K^{22}}\theta\theta \right]}{2} = \frac{\left[2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \left(\lambda - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}}\right)\theta\theta \right]}{2} \quad (5)$$

Как видно из (5), модель среды с алгебраической пористостью отличается от модели классической среды только величиной второго коэффициента Ламе или модуля объёмного сжатия. Вместо классических λ и $K^{11} = 2\mu/3 + \lambda$ среда с алгебраической пористостью содержит

$$\text{соответственно } \tilde{\lambda} = \lambda - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}} \text{ и } \tilde{K}^{11} = \left(2\mu/3 + \lambda - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}} \right).$$

Градиентная среда Миндлина

Пусть равны нулю неклассические модули: $C^{11} = C^{12} = 0$. Тогда плотность потенциальной энергии приобретает вид:

$$U_V = \frac{\left(2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + K^{11}\theta\theta + 2K^{12}\theta\varphi + K^{22}\varphi\varphi + C^{22}\varphi_{,k}\varphi_{,k} \right)}{2} \quad (6)$$

Силовая модель, вытекающая из формул Грина, определяет не только напряжения, но и моментные напряжения, которые в отличие от моментных напряжений теории Тупина, зависят не от градиентов совместного изменения объёма, а от градиентов несовместного изменения объёма (пористости):

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda\theta + K^{12}\varphi)\delta_{ij} \\ \sigma^\varphi = \frac{\partial U_V}{\partial \varphi} = K^{12}\theta + K^{22}\varphi \\ m_k^\varphi = \frac{\partial U_V}{\partial \varphi_{,k}} = C^{22}\varphi_{,k} \end{cases}$$

Вариационное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta L &= \left(\int_V P_i^V \delta R_i dV + \int_F P_i^F \delta R_i dF \right) - \int_V (\sigma_{ij} \delta R_{i,j} + m_k^\varphi \delta \varphi_{,k} + \sigma^\varphi \delta \varphi) dV = \\ &= \int_V P_i^V \delta R_i dV + \int_F [P_i^F \delta R_i - m_k^\varphi n_k \delta \varphi] dF - \int_V (\sigma_{ij} \delta R_{i,j} - (m_{k,k}^\varphi - \sigma^\varphi) \delta \varphi) dV = \\ &= \int_V [(\sigma_{ij,j} + P_i^V) \delta R_i + (m_{k,k}^\varphi - \sigma^\varphi) \delta \varphi] dV + \int_F [(P_i^F - \sigma_{ij} n_j) \delta R_i - m_k^\varphi n_k \delta \varphi] dF = 0 \end{aligned}$$

Уравнения Эйлера и граничные условия в силовых факторах:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + P_i^V = 0 \\ m_{k,k}^\varphi - \sigma^\varphi = 0 \end{cases} \quad \int_F (P_i^F - \sigma_{ij} n_j) \delta R_i dF = 0, \quad \int_F m_k^\varphi n_k \delta \varphi dF = 0$$

Уравнения Эйлера и граничные условия в кинематических переменных:

$$\begin{cases} \mu(R_{i,j} - R_{j,i})_{,j} + (2\mu + \lambda)R_{k,ki} + K^{12}\varphi_{,i} + P_i^V = 0 \\ C^{22}\Delta\varphi - K^{22}\varphi = K^{12}\theta \end{cases}$$

$$\int_F \{P_i^F - [\mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + \lambda\theta\delta_{ij} + K^{12}\varphi\delta_{ij}]n_j\} \delta R_i dF = 0$$

$$\int_F C^{22}\varphi_{,k} n_k \delta \varphi dF = 0$$

Обратим внимание на то, что взаимодействие совместного и несовместного изменения объёма в модели Миндлина имеет место только в не градиентной части, за счет билинейного слагаемого в (6) с модулем K^{12} . В случае, когда и модуль K^{12} равен нулю, уравнения равновесия и пористости разделяются. При этом краевая задача на пористость оказывается однородной и приводит к тривиальному решению. В этом видится недостаток модели Миндлина.

В **Главе 2** говорится о преимуществах и перспективе использования трехслойных конструкций в авиастроении, которые состоят из внешних силовых обшивок и облегченного заполнителя, в качестве которого используются сотовые элементы, пенопласты, подкрепляющие элементы различной геометрической формы. Пористые структуры также активно используют в качестве заполнителей для повышения эффективных жёсткостных характеристик материалов. В особенности они актуальны для элементов конструкций, подверженных динамическому воздействию. Пористые материалы способны поглощать и рассеивать механическую энергию, что делает их эффективными демпфирующими материалами.

К тому же в текущей части диссертации описывается динамический эксперимент (виброудар и частотные) и испытание на квази-статiku (трехточечный изгиб).

В качестве объектов исследования брались образцы из акрида, полученные по технологии вспенивания на основе полиметакрилида с разной плотностью. Исследовались образцы с плотностью 80 кг/м^3 и 100 кг/м^3 . Для этого были получены однотипные образцы. Для каждой партии испытывались 3 однотипных образца с габаритами $4 \times 10 \times 60 \text{ мм}$. Проводилось

исследование микроструктуры образца. Для определения микроструктуры использовался растровый электронный микроскоп Karl Zeiss 40 (рис. 1а), а также оптического (рис. 1б-в). С помощью последнего было возможным контролировать размеры пор на протяжении всей поверхности образца. Так для образца средний размер (диаметр) поры с плотностью 80 кг/м³ составлял 0,1 мм, а для образца с пористостью 100 кг/м³ составлял 0,11 мм, рисунок 1б-в.

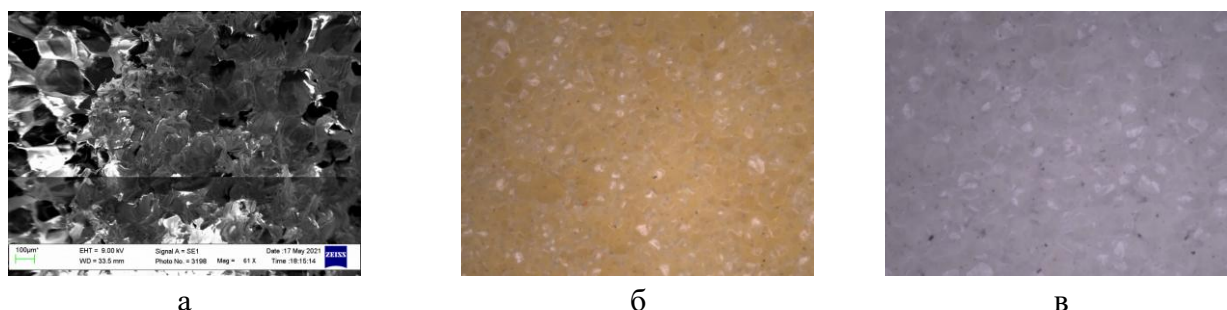


Рисунок 1. Результаты микроскопии: а) РЭМ; б) с оптического микроскопа для материалов с плотностью 80 кг/м³; в) с оптического микроскопа для материалов с плотностью 100 кг/м³.

Для оценки влияния пористости на механические свойства проводились испытания на трехточечный изгиб. Испытания проводились в соответствии со стандартными методиками испытаний на универсальной испытательной машине Instron 5969 с программным обеспечением Bluehill. Образцы в процессе испытания представлены на рисунке 2. Испытание проводилось с постоянной скоростью нагружения 1 мм/мин. Расстояние между опорами составляло 32 мм. Радиус опор составлял 2,5 мм, а радиус давящей поверхности 5 мм. В процессе испытания контролировался прогиб образца с помощью дефлектометра с контактным тензодатчиком. База тензодатчика составляла 50 мм. Для каждой испытанной партии была построена кривая напряжение-деформация, рисунок 3. Коэффициент вариации для каждой партии образцов не превышал 5%.



Рисунок 2. Образец во время проведения испытаний (а - для материалов с плотностью 80 кг/м³, б - для материалов с плотностью 100 кг/м³).

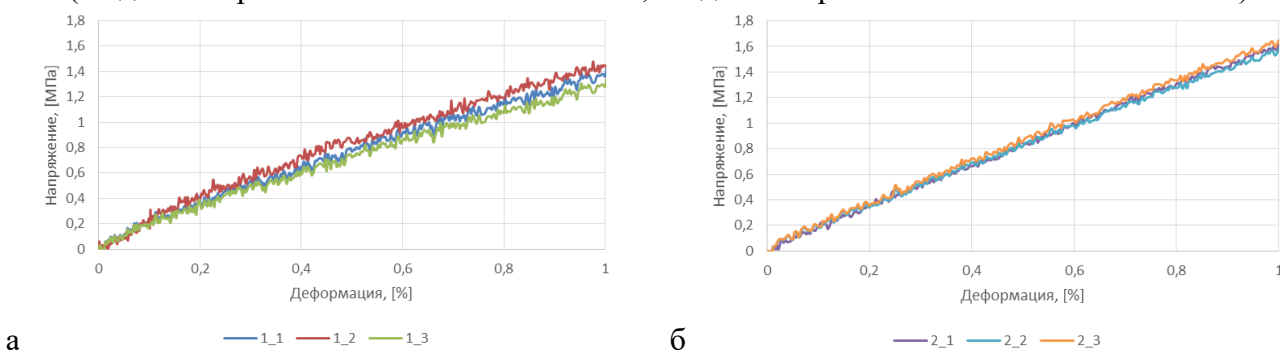


Рисунок 3. Графики напряжения-деформация для каждой партии.

(а - для материалов с плотностью 80 кг/м³, б - для материалов с плотностью 100 кг/м³).

Также эксперимент валидировался с численным моделированием трехточечного изгиба. Для этого использовалась та же геометрия, что и при эксперименте. Расчет производился в квазистатической постановке методом конечных элементов в среде **Ansys Workbench**. При моделировании трехточечного изгиба задавалось условие заделки у элементов опоры, а к давящей поверхности прикладывалась усилие, рисунок 4.

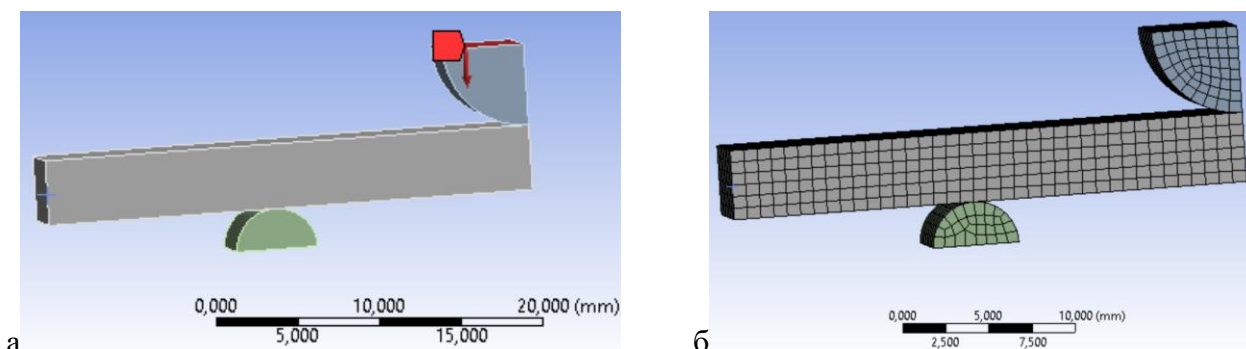


Рисунок 4. Численная модель изгиба: а) геометрия с граничными условиями; б) КЭ разбиение.

Коэффициент трения равнялся 0,1. Моделирование проводилось с учетом симметрии в двух плоскостях глобальной системы координат (в плоскости XY и YZ). По результатам численного моделирования для исследуемых образцов были получены диаграммы зависимостей деформация – напряжение при изгибе. Численный результат достаточно точно накладывается на результат, полученный в эксперименте, рисунок 5.

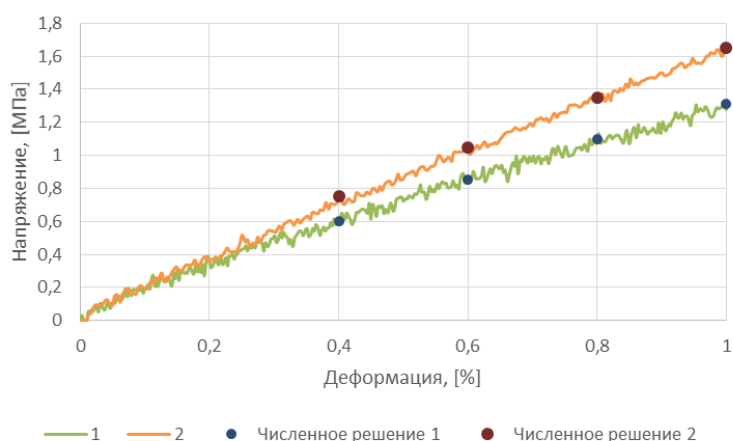


Рисунок 5. Сравнение эксперимента и численного моделирования.

Наряду с изгибом были проведены частотные испытания и на виброудар для тех же образцов с различной плотностью. Испытание проводилось с использованием вибростенда TIRA, рисунок 6.



Рисунок 6. Снимок динамического испытания с образцом из материала с плотностью:
а) 80 кг/м³; б) 100 кг/м³.

Испытания с постепенным увеличением частоты проводилось в виде выхода на минимально возможную частоту вибростенда равную 4,5 Гц и равномерное увеличение её до 9 Гц, при этом виброускорение возрастало до 2g. Результат измерения с акселерометра в процессе постепенного увеличения частоты колебания заделки представлен на рисунке 7а. Результат свободного конца с высокоскоростного лазерного датчика перемещения для каждого типа образца представлен на рисунке 7б.

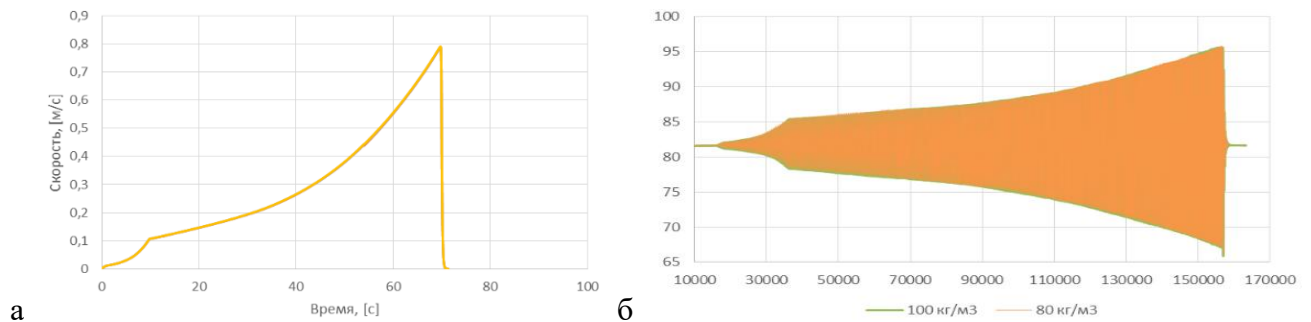


Рисунок 7. Результаты испытаний с постепенно нарастающей частотой:
а) с возбудителя; б) со свободного конца.

Нагружение виброударом проводилось с аналогичным условием закрепления и регистрацией параметров образца. Время каждого удара соответствует ~1мс. Нагружение устанавливалось в виде четырех вариантов виброудара с амплитудами ударов равной: 1) 21,7g; 2) 43,5g; 3) 65,2g; 4) 87g. Результат измерения с акселерометра в процессе различного уровня виброудара представлен в таблице 1.

Таблица 1. Результаты измерений

	Виброудар, [g]	Скорость, [м/с]	Амплитуда, [мм]	Длительность, [мс]
1	21,7	0,105513	0,06445	0,9936
2	43,5	0,217485	0,126331	1,0368
3	65,2	0,329579	0,191776	1,0368
4	87	0,440685	0,256547	1,0368

Проводилось исследование влияния заделки на динамическое поведение пористых материалов. Закрепление было сформировано таким образом, чтобы оно было максимально приближено шарнирного закрепления образца. Подобное закрепление достигалось путем упругой фиксации образцов. Влияние заделки существенно влияет на форму и динамический отклик образца. Особенно это зафиксировано на образце с большей пористостью.

Таким образом, в процессе испытаний исследовано динамическое поведение пористых структур в условии равномерно возрастающих колебаний и в условии виброудара. Определены амплитудно-частотные характеристики каждого образца. Пористая структура способствует распределению энергии удара по объему материала. Подобные материалы, как правило, обладают меньшей инерцией, что позволяет им быстрее реагировать на изменения в условиях нагрузки, тем самым минимизируя потенциальные повреждения. В результате исследования выявлено, что пористые материалы обладают способностью эффективно поглощать и рассеивать вибрационные нагрузки, что делает их идеальными для использования в средах, подверженных динамическим воздействиям.

В **Главе 3** подробно описан алгоритм построения вариационной модели, включающий определение списка аргументов, запись работы внешних сил на возможных перемещениях, запись плотности потенциальной энергии, формулировку соотношений Грина для определения физических соотношений, применение принципа Лагранжа для получения уравнений Эйлера и системы из граничных условий, поэтому далее кратко приводятся необходимые выражения. Основу модели составляет подход Ковина (Cowin), в рамках которого вводится скалярный параметр пористости φ , количественно характеризующий распределение дефектов в материале.

Разработка математической модели для задачи статического изгиба стержня из пористого материала при шарнирном закреплении осуществляется по следующему алгоритму:

- определение списка аргументов модели – устанавливаются независимые переменные и функции состояния, описывающие поведение системы;
- выражение работы внешних сил – формулируется работа внешних сил на множестве возможных перемещений и обобщённых вариаций;
- запись плотности потенциальной энергии – для линейных процессов определяется плотность потенциальной энергии деформации;
- формулировка соотношений Грина – устанавливаются достаточные условия потенциальности, определяющие физические соотношения материала;
- построение принципа Лагранжа – формируется вариационный принцип для системы;
- вычисление вариаций и получение результатов – уравнений Эйлера.

Приводится анализ двух принципиальных случаев нагружения: растяжения и чистого изгиба. Для каждого случая получены разрешающие уравнения и разработаны методы их решения, включая потенциальный подход.

В случае растяжения ($w = 0, \varphi_1 = 0$), потенциальная энергия имеет вид:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l [Eu'u' + 2K^{12}u'\varphi_0 + K^{22}\varphi_0\varphi_0 + C^{11}u''u'' + 2C^{12}u''\varphi_0' + C^{22}\varphi_0'\varphi_0'] F dx$$

Используя вариационный принцип Лагранжа, запишем:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta A - \delta U = \\
&= \int_0^l N \delta u dx + [n \delta u]_0^l - \int_0^l [Eu' \delta u' + K^{12} \delta u' \varphi_0 + K^{12} u' \delta \varphi_0 + K^{22} \varphi_0 \delta \varphi_0 + \\
&\quad + C^{11} u'' \delta u'' + C^{12} \delta u'' \varphi_0' + C^{12} u'' \delta \varphi_0' + C^{22} \varphi_0' \delta \varphi_0'] F dx = \\
&= \int_0^l \{ (Eu'' + K^{12} \varphi_0' - C^{11} u'''' - C^{12} \varphi_0'' + N) \delta u - \\
&\quad - [K^{12} u' + K^{22} \varphi_0 - C^{12} u''' - C^{22} \varphi_0'] \delta \varphi_0 \} F dx - \\
&\quad + [-(C^{11} u'' + C^{12} \varphi_0') \delta u' - (C^{12} u'' + C^{22} \varphi_0') \delta \varphi_0 + \\
&\quad + (n - Eu' - K^{12} \varphi_0 + C^{11} u''' + C^{12} \varphi_0') \delta u]_0^l = 0
\end{aligned}$$

Уравнения равновесия (уравнения Эйлера), уравнение пористости и соответствующие граничные условия представляются видом:

$$\begin{aligned}
\sigma &= Eu' + K^{12} \varphi_0 - C^{11} u''' - C^{12} \varphi_0'' \\
\sigma' &= -N \Rightarrow \sigma = \sigma_0 - \int_0^x N dx \\
\begin{cases} Eu' + K^{12} \varphi_0 - C^{11} u''' - C^{12} \varphi_0'' = \sigma_0 - \int_0^x N dx \\ K^{12} u' + K^{22} \varphi_0 - C^{12} u''' - C^{22} \varphi_0' = 0 \end{cases} & \quad (7)
\end{aligned}$$

Потенциальная энергия растяжения зависит от шести модулей. Напомним из формулировки физического смысла параметров модели. Модули $K^{11} = E$, C^{11} определяют классические и градиентные свойства бездефектной среды. Модули K^{22} , C^{22} определяют «классические» (алгебраические) и градиентные свойства дефектной (пористой) среды. Модули K^{12} , C^{12} определяют энергии взаимодействия совместного и несовместного изменения объёма (пористости) и их градиентов.

Для «алгебраической» пористой среды Миндлина ($C^{12} = C^{22} = 0$), уравнения (7) принимают вид:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} K^{12} u' + K^{22} \varphi_0 = 0 \\ Eu'' + K^{12} \varphi_0' - C^{11} u'''' + N = 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_0 = -\frac{K^{12}}{K^{22}} u' \\ (E - \frac{K^{12} K^{12}}{K^{22}}) u'' - C^{11} u'''' + N = 0 \end{cases} \\
\begin{cases} [C^{11} u'' \delta u']_0^l = 0 \\ [(n - (E - \frac{K^{12} K^{12}}{K^{22}}) u' + C^{11} u''') \delta u]_0^l = 0 \end{cases} &
\end{aligned}$$

Для градиентной среды Миндлина ($C^{11} = C^{12} = 0$), уравнения (7) принимают вид:

$$\begin{cases} K^{12} u' - C^{12} u'''' + K^{22} \varphi_0 - C^{22} \varphi_0'' = 0 \\ Eu'' - C^{11} u'''' + K^{12} \varphi_0' - C^{12} \varphi_0'' + \frac{p}{F} = 0 \end{cases}$$

Граничные условия:

$$\left[\frac{N}{F} - (Eu' - C^{11}u''' + K^{12}\varphi_0 - C^{12}\varphi_0'') \right] \delta u|_0 = 0, (C^{11}u'' + C^{12}\varphi_0') \delta u'|_0 = 0, (C^{12}u'' + C^{22}\varphi_0') \delta \varphi_0|_0 = 0$$

Процедура разрешения этих уравнений через предвнесённый дифференциальный потенциал с выводом общего и частного решений. В результате получено разрешающее уравнение, выраженное только относительно осевого перемещения:

$$\left[E - \frac{(K^{12})^2}{K^{22}} \right] u' - \left[C^{11} - \frac{(C^{12})^2}{C^{22}} + C^{11} \left(1 - \frac{K^{12}}{K^{22}} \right) - C^{22} \left(\frac{K^{12}}{K^{22}} - \frac{E}{K^{22}} \right) \right] u'' + \frac{C^{22}}{K^{22}} \left[C^{11} - \frac{(C^{12})^2}{C^{22}} \right] u'''' + \frac{p}{F} - \frac{C^{22}}{K^{22}} \cdot \frac{p''(x)}{F} \quad (7a)$$

Анализ этого уравнения показывает, что эффективный модуль упругости при растяжении:

- Не зависит от масштабного параметра;
- Определяется исключительно поврежденным модулем, связанным с деградацией пористого материала через алгебраическую пористость.

Такое решение является физически естественным и называется «хорошим» решением, поскольку эффективная жесткость при растяжении не зависит ни от масштабного параметра, ни от толщины стержня.

В случае *изгиба* ($u = 0, \varphi_0 = 0$), потенциальная энергия имеет вид:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[(EJ + C^{11}F)w''w'' - 2(K^{12}J + C^{12}F)w''\varphi_1 + (K^{22}J + C^{22}F)\varphi_1\varphi_1 + C^{11}Jw''''w'''' - 2C^{12}Jw''''\varphi_1' + C^{22}J\varphi_1'\varphi_1' \right] dx$$

Потенциальная энергия *чистого изгиба* зависит от шести линейных комбинаций модулей. Комбинации модулей $(EJ + C^{11}F)$, $C^{11}J$ определяют классические и градиентные свойства бездефектной среды. Комбинации модулей $(K^{22}J + C^{22}F)$, $C^{22}J$ определяют «классические» (алгебраические) и градиентные свойства дефектной (пористой) среды. Комбинации модулей $(K^{12}J + C^{12}F)$, $C^{12}J$ определяют энергии взаимодействия совместного и несовместного изменения объёма (пористости) и их градиентов.

Используя вариационный принцип Лагранжа, запишем:

$$\begin{aligned} \delta L = \delta A - \delta U = \\ = \int_0^l (q\delta w - m\delta w')dx + (-M\delta w' + Q\delta w)|_0^l - \int_0^l \{ [(EJ + C^{11}F)w'' - (K^{12}J + C^{12}F)\varphi_1] \delta w'' + [-(K^{12}J + C^{12}F)w'' + K^{22}J\varphi_1] \delta \varphi_1 + (C^{11}Jw'''' - C^{12}J\varphi_1') \delta w'''' + [-C^{12}Jw'''' + (C^{22}J + C^{22}F)\varphi_1'] \delta \varphi_1' \} dx \end{aligned}$$

Это позволяет записать уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} (EJ + C^{11}F)w'''' - C^{11}Jw'''''' - (K^{12}J + C^{12}F)\varphi_1'' + C^{12}J\varphi_1'''' = q + m' \\ EJ \left(1 + \frac{C^{11}F}{EJ} \right) w'''' - C^{11}Jw'''''' - K^{12}J \left(1 + \frac{C^{12}F}{K^{12}J} \right) \varphi_1'' + C^{12}J\varphi_1'''' = q + m' \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь:

$$\frac{C^{11}F}{EJ} = \frac{C^{11}h}{Eh^3/12} = \frac{C^{11}}{E} \frac{1}{(h^2/12)} = \frac{(12El_{11}^2)}{E} \frac{1}{(h^2/12)} = \frac{l_{11}^2}{h^2} = \left(\frac{l_{11}}{h}\right)^2$$

$$C^{11} = 12El_{11}^2$$

$$\frac{C^{12}F}{K^{12}J} = \frac{C^{12}h}{K^{12}h^3/12} = \frac{C^{12}}{K^{12}} \frac{1}{h^2/12} = \frac{(12K^{12}l_{12}^2)}{K^{12}} \frac{1}{h^2/12} = \frac{l_{12}^2}{h^2} = \left(\frac{l_{12}}{h}\right)^2$$

$$C^{12} = 12K^{12}l_{12}^2$$

Тогда уравнения равновесия записываются в виде для *изгиба*:

$$\begin{aligned} \left(1 + \left(\frac{l_{11}}{h}\right)^2\right) w'''' - \frac{C^{11}}{E} w'''' - \frac{K^{12}}{E} \left(1 + \left(\frac{l_{12}}{h}\right)^2\right) \varphi_1'' + \frac{C^{12}}{E} \varphi_1'''' &= \frac{1}{EJ} (q + m') \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(1 + \left(\frac{l_{11}}{h}\right)^2\right) w'''' - 12l_{11}^2 w'''' - \frac{K^{12}}{E} \left(1 + \left(\frac{l_{12}}{h}\right)^2\right) \varphi_1'' + 12l_{12}^2 \frac{K^{12}}{E} \varphi_1'''' &= \frac{1}{EJ} (q + m') \end{aligned}$$

И пористости:

$$\begin{aligned} (K^{12}J + C^{12}F)w'' - C^{12}Jw'''' - (K^{22}J + C^{22}F)\varphi_1 + C^{22}F\varphi_1'' &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{C^{12}F}{K^{12}J}\right)w'' - \frac{C^{12}}{K^{12}}w'''' - \frac{K^{22}}{K^{12}}\left(1 + \frac{C^{22}F}{K^{22}J}\right)\varphi_1 + \frac{C^{22}F}{K^{12}J}\varphi_1'' &= 0 \end{aligned}$$

Алгоритм построения общего решения аналогичен способу построения общего решения для задачи *растяжения* через операторную форму.

Приведенные обобщающиеся жёсткости представлены следующим образом:

$$\begin{cases} [(EJ + C^{11}F)(K^{22}J + C^{22}F) - (K^{12}J + C^{12}F)(K^{12}J + C^{12}F)] = \overline{EJ} \\ [(EJ + C^{11}F)C^{22}F + C^{11}J(K^{22}J + C^{22}F) - 2(K^{12}J + C^{12}F)C^{12}J] = \overline{EJ}(l_1^2 + l_2^2) \\ [C^{11}JC^{22}F - C^{12}JC^{12}J] = \overline{EJ}l_1^2l_2^2 \end{cases}$$

Тогда разрешающее уравнение на потенциал с учётом последнего выражения:

$$[(EJ + C^{11}F)(K^{22}J + C^{22}F) - (K^{12}J + C^{12}F)(K^{12}J + C^{12}F)]\Phi'''' - [(EJ + C^{11}F)C^{22}F + C^{11}J(K^{22}J + C^{22}F) - 2(K^{12}J + C^{12}F)C^{12}J]\Phi'''''' + [C^{11}JC^{22}F - C^{12}JC^{12}J]\Phi'''''''' = q + m'$$

↓

$$\Phi'''' - (l_1^2 + l_2^2)\Phi'''''' + l_1^2l_2^2\Phi'''''''' = \frac{q + m'}{EJ}$$

Оператор этого уравнения можно представить как произведение четырёх операторов второго порядка с учетом того, что два оператора будут кратными:

$$(\dots)''''[(\dots) - l_1^2(\dots)][(\dots) - l_2^2(\dots)]\Phi = \frac{q + m'}{EJ} \quad (9)$$

Общее решение последнего уравнения теперь можно построить как линейную комбинацию собственных функций Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 этих операторов и частного решения Φ_* неоднородного уравнения:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_* \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Phi_0'''' = 0 \\ \Phi_1 - l_1^2 \Phi_1'' = 0 \\ \Phi_2 - l_2^2 \Phi_2'' = 0 \\ \Phi_*'''' - (l_1^2 + l_2^2) \Phi_*'''' + l_1^2 l_2^2 \Phi_*'''' = \frac{q + m'}{EJ} \end{cases} \quad (8a)$$

Общее решение краевой задачи для прогиба при *изгибе* и пористости даётся формулами (9) и

$$\begin{aligned} (K^{12}J + C^{12}F)w'' - C^{12}Jw'''' - (K^{22}J + C^{22}F)\varphi_1 + C^{22}F\varphi_1'' &\equiv 0 \\ \begin{cases} w = (K^{22}J + C^{22}F)\Phi - C^{22}F\Phi'' \\ \varphi_1 = (K^{12}J + C^{12}F)\Phi'' - C^{12}J\Phi'''' \end{cases} \end{aligned}$$

Классическая составляющая (четвертая производная) включает изгибную жесткость. Общее решение представляет собой сумму:

- классического решения, определяемого приведенной жесткостью;
- двух специальных решений, соответствующих пористости и градиентным эффектам.

Нетрудно увидеть, что в приведенных уравнениях коэффициенты при четвертой производной от прогиба в окончательном уравнении изгиба определяют приведенную изгибную жесткость и она определяется с точностью до масштабных параметров и при малых толщин определяется соотношением $(l_{11} / h)^2$. В этом нетрудно убедиться уже по первому слагаемому в уравнении прогиба (8) вида $(EJ + C^{11}F)w''''$, $C^{11} \sim (l_{11} / h)^2$.

В данной ситуации получаем парадокс: при уменьшении толщины относительная изгибная жесткость стремится к бесконечности. Этот парадокс хорошо известен и многократно обсуждается в литературе. Тем не менее, полагаем, что данный результат является не вполне корректным для задачи изгиба, хотя и приводится в многочисленных исследованиях по теории сверхтонких стержней.

Заметим, что с другой стороны, эксперименты показывают возможное увеличение относительной изгибной жесткости при уменьшении толщины, но это связано не с градиентными эффектами, а, по мнению автора, с поверхностными свойствами стержня, роль которых возрастает при уменьшении толщины стержня.

Также в **Главе 3** рассматривается динамическая постановка задачи изгиба цилиндрического пористого стержня, где учитывается кинетическая энергия и к основному алгоритму построения вариационной модели, добавляется вывод выражений для:

Уравнения движения:

$$\mu \Delta R_i + (\mu + \lambda) \theta_{,i} + K^{12} \varphi_{,i} - C^{11} \Delta \theta_{,i} - C^{12} \Delta \varphi_{,i} - (\rho \ddot{R}_i + \rho_{\theta\theta} \ddot{\theta}_{,i} + \rho_{\varphi\varphi} \ddot{\varphi}_{,i}) + P_i^V = 0$$

Уравнения пористости:

$$K^{12} \theta + K^{22} \varphi - C^{12} \Delta \theta - C^{22} \Delta \varphi + \rho_{\theta\varphi} \ddot{\theta} + \rho_{\varphi\varphi} \ddot{\varphi} = 0$$

Таким образом, сформулирована динамическая постановка теории пористых сред, содержащая одиннадцать физических постоянных на примере цилиндрического пористого стержня.

Семь физических постоянных μ , K^{11} , K^{12} , K^{22} , C^{11} , C^{12} , C^{22} отражают свойства стационарных состояний пористой среды. Среди них: классические упругие μ , K^{11} и градиентные C^{11} свойства непрерывной среды, «алгебраические» K^{22} и градиентные C^{22} свойства пористой среды, а также константы взаимодействия непрерывной и пористой среды в «алгебраической» K^{12} и градиентной C^{12} частях потенциальной энергии. Кроме свойств, проявляющихся в стационарных состояниях, имеется четыре физические постоянные, отражающие инерционные свойства непрерывной матрицы ρ , $\rho_{\theta\theta}$, пористой среды $\rho_{\varphi\varphi}$ и константы динамического взаимодействия непрерывной матрицы и пористой среды $\rho_{\theta\varphi}$.

В **Главе 4** проводится идентификация физико-механических свойств пористых материалов согласно рассматриваемым различным постановками для моделей с полями дефектов. Пористый материал можно также попытаться моделировать как композит с «пустыми» сферическими включениями (у включений нулевые упругие модули). То есть предполагается, что у пористого материала и материала с пустотами одинаковые, как эффективные упругие модули K_{eff} , μ_{eff} , так упругие модули матрицы K_m , μ_m , из которых данные материалы изготовлены. Фактически предполагается, что пористый материал, хоть и не имеет пустот, но ведёт себя, как материал с пустотами.

При малой объемной доле включений c можно вычислить эффективный объёмный модуль следующим образом:

$$K_{eff} = K_m + \frac{(K_i - K_m)c}{1 + (K_i - K_m) / (K_m + \frac{4}{3}\mu_m)}.$$

Здесь i – индекс включений (inclusion), а m – индекс матрицы (matrix).

Тогда для материала с пустотами необходимо приравнять нулю модули включений:

$$K_{eff} = K_m \left(1 - \frac{K_m + \frac{4}{3}\mu_m}{K_m} c \right).$$

В силу того, что у материалов равны, как эффективные модули, так и модули матрицы, то:

$$K^{12} = K^{22} = 0 \quad C^{11} = C^{12} = C^{22} = 0$$

В общем случае используется модель трёх фаз, которая дает выражение:

$$K_{eff} = K_m + \frac{(K_i - K_m)c}{1 + (1-c)(K_i - K_m) / (K_m + \frac{4}{3}\mu_m)}.$$

Чтобы получить формулу для материала с пустотами необходимо приравнять нулю модули включений:

$$K_{eff} = K_m \left[1 - c \cdot \left(K_m + \frac{4}{3}\mu_m \right) / \left(\frac{4}{3}\mu_m + cK_m \right) \right]$$

В силу того, что у материалов равны, как эффективные модули K_{eff} , так и модули матрицы K_m , то:

$$\frac{(K^{12})^2}{K^{22}} = \frac{K_m(K_m + \frac{4}{3}\mu_m)}{\frac{4}{3}\mu_m + cK_m} c.$$

Как известно, в модели дефектной пористости модуль сдвига не меняется. Это означает, что в моделях оценки эффективного модуля композита, приведённых ранее, модуль сдвига «должен меняться незначительно».

Оценка для модуля сдвига, как в модели при малом объёмном содержании, так и в модели трёх фаз, одинакова и при нулевых модулях включений имеет вид:

$$\frac{\mu_{eff}}{\mu_m} = 1 - \frac{15(1-\nu_m)}{7-5\nu_m} c$$

Предположим, что удовлетворительным является случай, когда относительное изменение модуля сдвига не превышает некоторого фиксированного x , тогда концентрация пустот c удовлетворяет неравенству:

$$c < \frac{7-5\nu_m}{15(1-\nu_m)} x$$

Также существует более общее, хоть и более строгое условие, не зависящее от материала матрицы. Верны следующие выражения:

$$\frac{7-5\nu_m}{15(1-\nu_m)} x \geq \frac{7-7\nu_m}{15(1-\nu_m)} x = \frac{7}{15} x$$

Поэтому если выполнено неравенство $c < \frac{7}{15} x$, то выполнено и неравенство более общее.

В таблице 2 представлена погрешность при вычислении эффективного модуля сдвига в зависимости от концентрации c если пользоваться формулами механики композитов.

Таблица 2. Погрешность при вычислениях

Изменение x не превышает (%)	1	5	10	15	20
Концентрация включений c не превышает (%)	0.47	2.33	4.67	7	9.33

В **Главе 4** с помощью ПО MATLAB, моделируется статический изгиб стержня при шарнирном закреплении для определения величины прогиба в зависимости от различных параметров масштабных параметров и свойств, отвечающих за микроструктуру. А именно варьирование следующих характеристик:

- $\alpha = (K^{12} / E)(K^{12} / K^{22})$ — коэффициент связи между упругостью и пористостью;
- $l_{\phi\phi}$ — характерный масштаб, связанный с пористостью;
- $l_{\theta\theta}$ — характерный масштаб, связанный с деформацией;
- $l_{\phi\theta}$ — параметр связи между полем деформаций и изменением пористости.

В качестве объектов исследования вновь выбран пористый стержень размером $4 \times 10 \times 60$ мм с различной плотностью (80 кг/м^3 - материал А и 100 кг/м^3 - материал Б), у которых модули Юнга 136 МПа и 159 МПа , соответственно.

Результаты параметрического исследования представлены на рисунке 8. Влияние параметров пористости на амплитуду прогиба для материала А на рисунке 8а, а для материала Б на рисунке 8б.

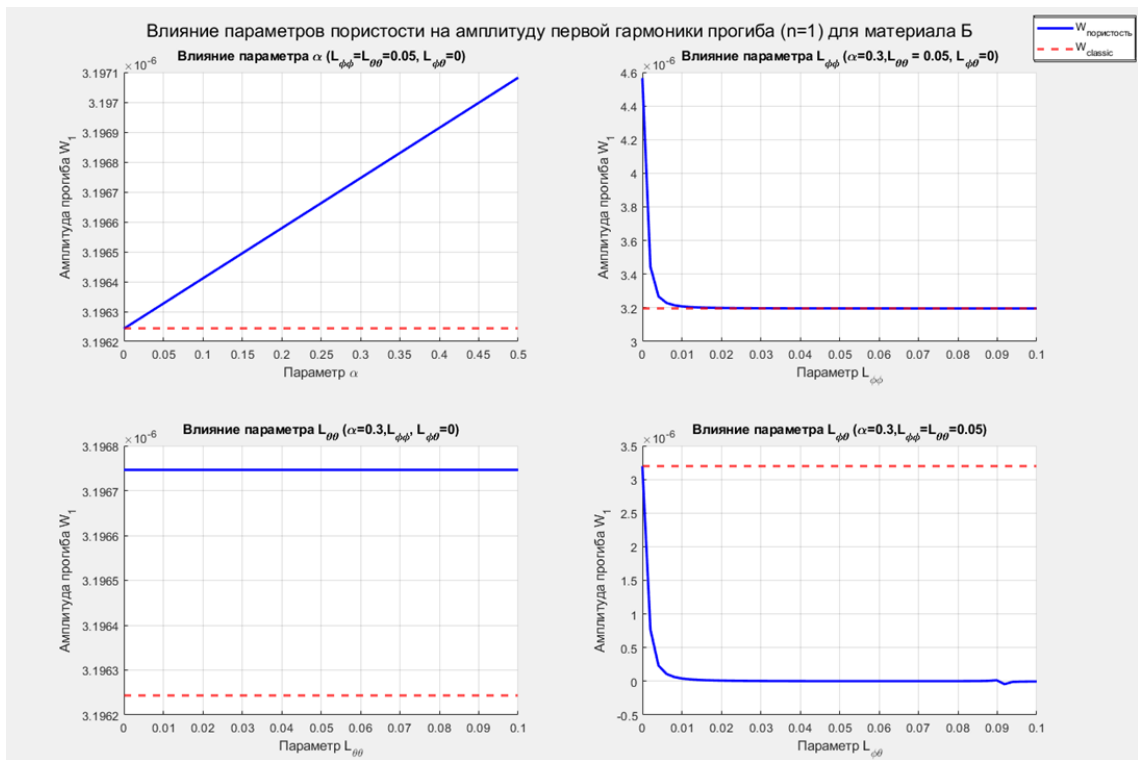
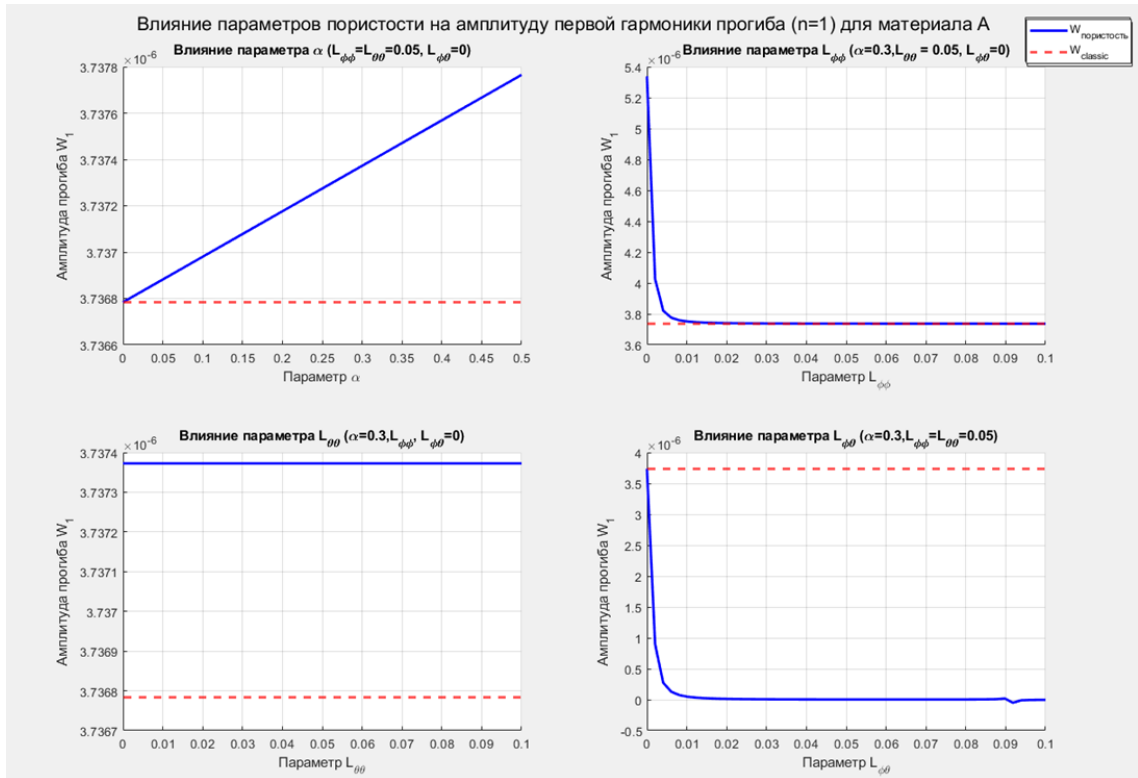


Рисунок 8. Влияние параметров пористости на амплитуду прогиба для материала (а – для материала А, б – для материала Б)

Обобщая выводы к рассмотренной **Главе 4**, можно заключить, что:

— при варьировании $\alpha, l_{\varphi\varphi}, l_{\theta\theta}$, амплитуда прогиба W_1 демонстрирует слабую нелинейную зависимость, оставаясь близкой к классическому значению. Это свидетельствует о том, что при отсутствии связи между деформацией и пористостью ($l_{\varphi\theta} = 0$) параметры $\alpha, l_{\varphi\varphi}, l_{\theta\theta}$ оказывают второстепенное влияние на механическое поведение;

— наиболее значимые результаты получены при исследовании влияния параметра $l_{\varphi\theta}$.

В отличие от предыдущего случая, здесь наблюдается сильное отклонение от классического решения. Этот эффект имеет фундаментальное значение и объясняется возникновением дополнительных микроструктурных напряжений, связанных с: сопротивлением пор изменению своей геометрии при деформации; локальными градиентами плотности в области порового пространства, диссипативными процессами перераспределения материала порового каркаса.

В **Главе 5** описывается математическая модель процесса высокоскоростного удара БСЛА о жёсткую преграду. Эта модель ударного взаимодействия преграды и тела основана на теории деформации Генки-Ильюшина, приведен численный метод решения уравнения взаимодействия методом сеток в неявном виде, приведены результаты расчета по математической модели для изменения касательных напряжений, температуры преграды. Также численно моделируется высокоскоростной удар в ПК **Ansys** с решателем **LS-Dyna**. Реальный объект заменяется эквивалентным.

Разработка математической модели процесса соударения ударника неоднородной структуры с преградой и методики инженерного расчета количественных оценок, характеризующих данный процесс – основная цель текущей главы.

Если рассматривать ударник (БСЛА) строго как либо идеально-упругое тело, либо пластическое (тело, которое при ударе теряют свою форму и размеры) в действительности не будет являться корректным. Это тем более справедливо для ударников, которые должны моделировать ударное взаимодействие приборных отсеков летательного аппарата (ЛА) с преградами. Здесь для упрощения приборный отсек ЛА (рис. 9) представляют в виде подкрепленной цилиндрической оболочки, заполненной различной аппаратурой. При этом элементы, входящие в конструкцию агрегатов и узлов приборных отсеков, выполняются из различных материалов, резко отличающихся по своим физико-механическим характеристикам. Отметим также, что распределение материала по объему отсека крайне неравномерное из-за наличия пустот, что приводит к скачкообразному изменению характеристик ударного процесса по объему отсека. Следовательно, математическая модель ударника, моделирующего приборный отсек, должна учитывать: нерегулярность структуры, наличие пустот и физико-механические характеристики материалов, входящих в состав приборного отсека. Поэтому такая математическая задача будет весьма комплексной и нетривиальной. Но все же допустим, что реальный приборный отсек можно рассматривать как неоднородный пористый ударник, с регулярной структурой, имеющий такие же размеры, как и реальный отсек, с плотностью равной средней плотности отсека. Материал ударника пористая смесь, в которой нет химического взаимодействия между компонентами, т.е. ударник, моделирующий приборный отсек, выполнен из композиционного материала типа простая смесь.

Рассмотрим взаимодействие пористого ударника и преграды, которая представляет собой жестко защемленную по краям пластину из стали. Панели являются типовыми элементами

конструкций многих сооружений и технических объектов. Ограничимся построением модели нормального удара. Схема нагружения пластины пористым ударником показана на рисунке 9.

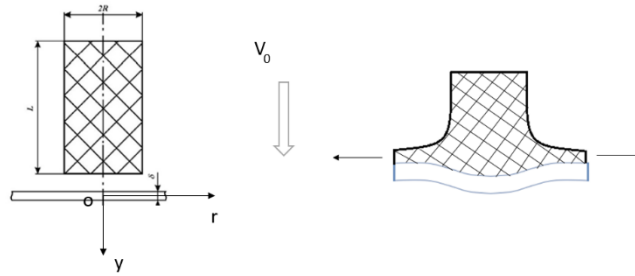


Рисунок 9. Схема нагружения пластины ударником.

При высокоинтенсивных импульсных нагрузках материал преграды проявляет в основном пластические свойства, и панели с такими свойствами материала характеризуются качественно иным поведением по сравнению с их упругой стадией работы. Для решения соответствующих задач наибольшее применение находят подходы, основанные на модели жесткопластического тела.

Рассматривается нормальный удар пластического ударника радиуса R и плотностью ρ_0 по пластине толщиной δ . Вводится цилиндрическая СК (r, Θ, x) , начало которой расположено в центре пластины. Процесс ударного взаимодействия пластического ударника с пластиной включает совместное проявление таких явлений как радиальная и осевая деформация ударника, его разрушение и образование осколков, деформация пластины, нагрева и трения, влияния на механические характеристики материала ударника и пластины скорости деформации, распространение ударных волн и т.д. Точное исследование этого процесса практически не осуществимо, поэтому рассмотрим упрощенную модель ударного взаимодействия пластического ударника с пластиной. Введем следующие допущения:

- контактное давление, приложенное вне зоны, ограниченной окружностью радиуса R (зоны контакта), не учитывается;
- разлет части материала ударника из зоны контакта в радиальном направлении не вызывает перераспределение давления в зоне контакта;
- пластина работает в основном на сдвиг, в ней развивается вязко-пластическое тело (ВПТ) Шведова-Бингама, которое описывается уравнением:

$$\tau = -\tau_0 + \mu \frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

Здесь $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ – скорость угловой деформации. За критерий начала ВПТ принять параметр

$$\Pi = K_3 \frac{Re''}{2Sen}, \text{ где } Re'' \text{ – приведенный параметр Рейнольдса, а также } Sen \text{ - параметр Сен-Венана.}$$

В таком случае при $\Pi > 1$ - в пластине развивается ВПТ, если же $\Pi \leq 1$, то пластина ведет себя под нагрузкой как жесткое тело.

- давление на контактной поверхности определяется формулой:

$$p = \begin{cases} \rho_0 V^2 \\ \rho_0 V^2 \alpha(\beta, U_{sc}, U_{pc}^*) \end{cases}$$

$$\alpha(\beta, U_{sc}, U_{pc}^*) = \begin{cases} \frac{U_{sc}/V}{\sqrt[3]{\beta} + (1 - \sqrt[3]{\beta}) \frac{U_{sc}}{V} (2 - \frac{V}{U_{pc}^*})}, & \text{при } U_{pc}^* \geq V \\ \frac{U_{sc}/V}{\sqrt[3]{\beta} + (1 - \sqrt[3]{\beta}) \frac{U_{sc}}{V}}, & \text{при } V \geq U_{pc}^* \end{cases} \quad (10)$$

Гриффице и Ванзаг экспериментально обнаружили, что при высоких скоростях динамического нагружения материал круговых пластин имеет тенденцию двигаться в основном в поперечном направлении. Допустим, что под действием высокоинтенсивной ударной нагрузки материал преграды будет также двигаться в поперечном направлении, следовательно:

$$V_r = V_\phi = 0, \quad V_z = V_z(r, t),$$

тогда из трех основных дифференциальных уравнений движения вязко-пластической среды Генки-Ильюшина остается одно:

$$F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\mu + \frac{\tau_0}{\gamma_i} \right) \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) - \frac{\tau_0}{\rho \gamma_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial r} \frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{\partial V_z}{\partial t} \quad (11)$$

где F_z – инерционная сила, $\gamma_i = \frac{\partial \omega}{\partial r}$ – интенсивность скорости деформации сдвига.

Так как в рассматриваемом случае $F_z = 0$, а $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{q}{\delta}$, то уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\mu}{q} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] - \frac{\tau_0}{r\rho} + \frac{q}{\rho\delta}$$

Давление $p(r, t)$, развиваемое ударником на контактной поверхности, будет определяться выражением: $p(r, t) = K_9 \rho_0 (V_0 - \omega)^2$. Здесь K_9 – коэффициент полноты импульса, учитывающий потери энергии на радиальную деформацию ударника, трение, разлет осколков и т.д. $0 \leq K_9 \leq 1$. Таким образом, распределенная нагрузка, действующая на пластину:

$$q(r, t) = K_9 \rho_0 (V_0 - \omega)^2 [1 - H(r - R)],$$

где функция Хевисайда, учитывающая локальность приложения нагрузки:

$$H(r - R) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \geq R \\ 1, & \text{если } r < R \end{cases}$$

Тогда уравнение движения примет вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\mu}{q} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] - \frac{\tau_0}{r\rho} + \frac{K_9 \rho_0}{\rho\delta} (V_0 - \omega)^2 [1 - H(r - R)] \quad (12)$$

Краевые условия, допущения в характере разрушения и инерционных характеристиках летящего тела приведены в Главе 5.

На основании их уравнение движение записывается в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{\xi}} \left\{ He + K_m \operatorname{Re}'' [1 - H(\bar{x} - 1)] \int_0^{\bar{\xi}} (1 - \bar{U}) d\bar{\xi} \right\} = \\ & = \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial^2 \bar{x}} + \frac{1}{\bar{x}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} - \frac{Sen}{\bar{x}} + K_9 \operatorname{Re}'' (1 - \bar{U})^2 [1 - H(\bar{x} - 1)] \end{aligned} \quad (13)$$

Аналитическое решение уравнения (13) с учётом краевых условий связано с большими трудностями математического характера, так как требуется знать не только функции $\bar{U}(\bar{x}, \bar{\xi})$, но и законы изменения внешней и внутренней границ зоны вязко-пластического течения. Однако, решение можно получить путем применения численных методов решения уравнений взаимодействия методом сеток, реализовав их на ЭВМ.

Приводятся результаты решения контактного взаимодействия ЛА в виде пластического ударника в форме цилиндра с плотностью $\rho_0 = 750 \text{ кг/м}^3$ и радиусом $R = 25 \text{ см}$ о преграду толщиной $\delta = 2 \text{ см}$; $S_{\text{ПП}} = 20 \text{ см}^2$; $S_{\text{П}} = 15 \text{ см}^2$; $\tau_0 = \tau_{0\text{П}} = \tau_{0\text{ПП}} = 0,4 \text{ ГПа}$; $\mu = \mu_{\text{П}} = \mu_{\text{ПП}} = 0,4 \cdot 10^4 \text{ н.с./м}^2$; $\rho = \rho_{\text{П}} = \rho_{\text{ПП}} = 8000 \text{ кг/м}^3$. В расчете принималось, что $K_T = 1,1$ и $K_S = 0,8$. Результаты моделирования представлены на рисунке 10.

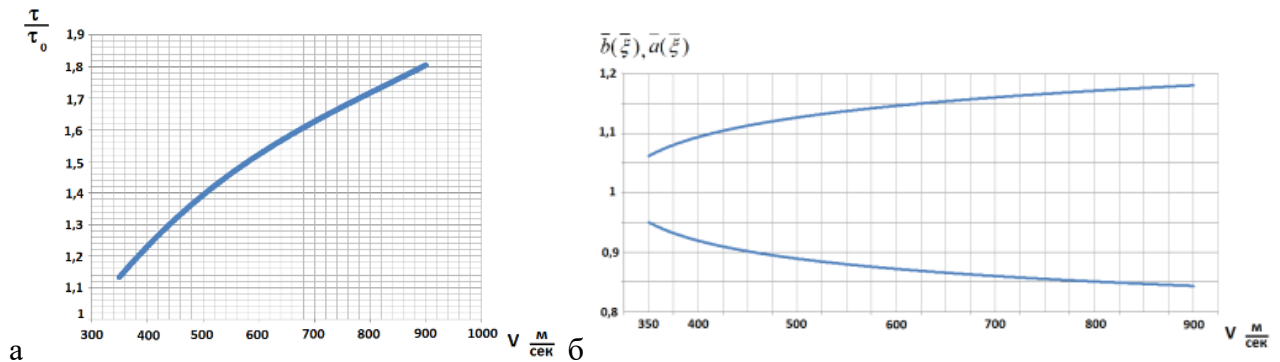


Рисунок 10. Графики зависимостей от скорости подхода: а) касательных напряжений; б) внутренней и внешней границ ВПТ в случае нормального удара.

Помимо нормального удара рассматривается соударение цилиндрического тела при «косой» траектории. Для такого взаимодействия характерно пятно удара в виде эллипса.

Также рассматривается частный случай: когда нагрузка будет импульсной. Если воспользоваться одним из критериев разрушения, например, критерием, ограничивающим максимальный угол сдвига, то можно, зная решение $\bar{U}(\bar{x}, \bar{\xi})$, определить координату \bar{x}^* , и время $\bar{\xi}^*$, начала разрушения панели, а также необходимый для этого импульс внешней нагрузки.

Пусть импульс нагрузки вызывается ударом пористого тела по панели, тогда контактное давление можно определить по формуле: $p = \rho_0 U_{S\beta} (V_0 - \omega)^2$, где ρ_0 – средняя плотность тела; скорость ударной волны в пористом теле – $U_{S\beta} = \frac{U_S}{\sqrt[3]{\beta + (1 - \sqrt[3]{\beta}) \frac{U_S}{V_0 - \omega} (2 - \frac{V_0 - \omega}{V^*})}}$. Здесь коэффициент пористого тела – $\beta = \rho_0 / \rho_T$; ρ_T – плотность материала тела; V^* – критическая скорость, учитывающая влияние схлопывания пор на U_S ($V^* \approx 3000 \dots 4000 \text{ м/с}$); $U_S = a + b (V_0 - \omega)$ – скорость ударной волны в теле при $\beta = 1$.

Если требуется определить минимальную скорость подхода тела для разрушения панели при известной его длине, то можно воспользоваться формулой:

$$V_{0\text{min}} = \sqrt{\frac{\delta \tau_0}{KR \rho_0 \cos \varphi} \left[\frac{a_{np} R \delta [1 + 2(\bar{S}_{np} \cos \varphi + \bar{S}_{\text{П}})]^2}{0,02 \cos^2 \varphi} + a_1(\varphi) + \bar{S}_{np} \right]},$$

где a_{np} определяется по при заданном значении $\lambda_{np} = 5R\lambda \sqrt{2/a_1(\varphi)}$.

Последнее выражение минимальной скорости пробития эквивалентного пористого ударника можно упростить, если принять что преграда в виде стальной пластины не

подразумевает наличие поперечного и продольного подкрепления (т.е. $\overline{S_{\Pi}} = \overline{S_{\Pi P}} = 0$). Тогда в случае нормального удара ($\cos \varphi = \cos 0 = 1$), и приняв, что $\rho_0 = 750 \text{ кг/м}^3$; $k_{\Pi} = 0,6$; $K = 1,1$. В таком случае скорость выражается формулой:

$$V_{0\min} = \sqrt{\frac{\delta \sigma}{KR\rho_0}} \cdot \left(\frac{a_{np} R \delta}{0,02} + 2 \right) \quad (14)$$

Корректность этого выражения подтверждена численным моделированием удара цилиндрической оболочки о преграду в ПК **Ansys** с решателем **LS DYNA**. Было установлено, что при малой толщине преграды согласованность результатов математической модели и численных результатов уменьшается. Расчет проводился для ударника диаметром 0,3м и длиной 0,4м. Минимальная скорость пробития в Ansys для толщины преграды 0,001м – 76 м/с, 0,002м – 140м/с, 0,003м – 174м/с, а для математического моделирования для толщины преграды 0,001м – 108м/с, 0,002м – 152м/с, 0,003м – 186м/с.

Для поведения упруго-пластического поведения стальной пластины привлекался критерий по Johnson-Cook.

Результаты численного расчета в различные моменты времени: перед пробитием, и непосредственно сам момент проникновения представлены эпюрами с перемещениями и напряжениями на рисунке 11.

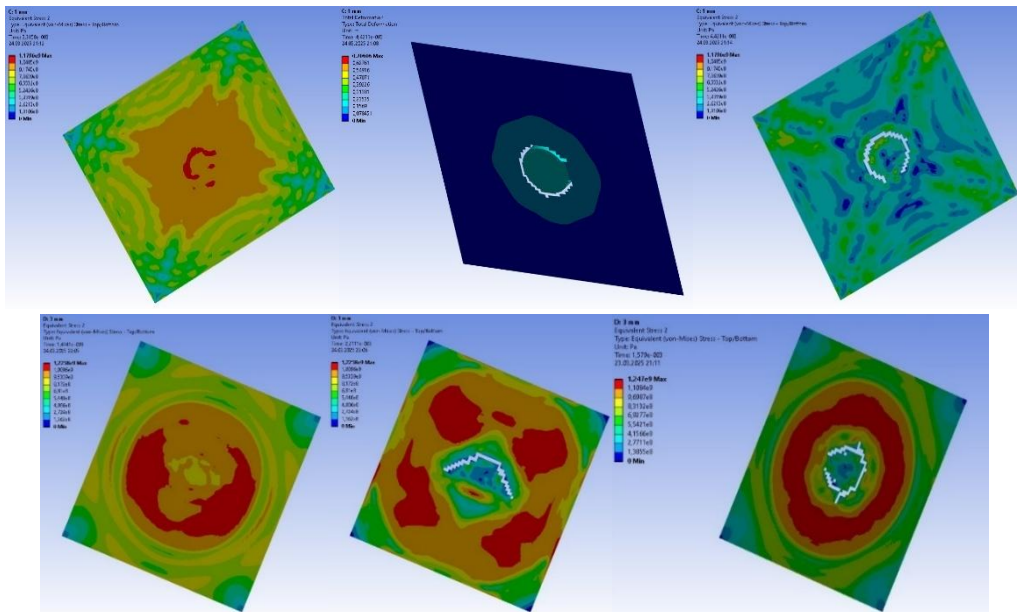


Рисунок 11. Слева направо – мгновение до пробития (распределение напряжений), далее момент пробития (перемещения). (а – панель $\delta = 1 \text{ мм}$; б – панель $\delta = 3 \text{ мм}$.)

В **Заключении** приведены результаты работы, которые состоят в следующем:

В первой главе сформулирована обобщенная модель градиентной пористой среды. Её физические свойства определялись семью модулями, входящими в выражение плотности потенциальной энергии:

$$U_V = \frac{1}{2} [2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + (K^{11}\theta\theta + 2K^{12}\theta\varphi + K^{22}\varphi\varphi) + (C^{11}\theta_{,k}\theta_{,k} + 2C^{12}\theta_{,k}\varphi_{,k} + C^{22}\varphi_{,k}\varphi_{,k})]$$

Модули μ и $K^{11} = 2\mu/3 + \lambda$ определяют классические свойства среды, модуль K^{22} - свойство среды с алгебраической пористостью, модуль K^{12} является константой взаимодействия

классической среды и среды с «алгебраической» пористостью, модуль C^{11} определяет градиентные свойства бездефектной среды Тупина, модуль C^{22} определяет градиентные свойства дефектной среды Миндлина с сохраняющимися дислокациями. Наконец, модуль C^{12} является константой взаимодействия градиентной среды Тупина и градиентной пористой среды Миндлина. Рассмотрены четыре частных случая модели:

Первый частный случай – классическая теория упругости, при $K^{12} = K^{22} = 0$ и $C^{11} = C^{12} = C^{22} = 0$.

Второй частный случай – среда с алгебраической пористостью, при $C^{11} = C^{12} = C^{22} = 0$.

Третий частный случай – градиентная бездефектная среда Тупина, при $K^{12} = K^{22} = 0$ и $C^{12} = C^{22} = 0$.

Четвертый частный случай – градиентная дефектная среда Миндлина, при $C^{11} = C^{12} = 0$.

В качестве прикладных моделей рассмотрены формулировки теории цилиндрического изгиба пористых пластин.

Общее решение представляет собой сумму: классического решения, определяемого приведенной жесткостью; двух специальных решений, соответствующих: эффекту пористости и градиентным эффектам.

В ходе экспериментальных исследований были проведены исследования структуры акримида и механические испытания образцов на изгиб. По результатам исследования микроскопии определен характерный размер пор и их распределение. Размер пор отличается на 9% между образцами с плотностями 80 кг/м^3 и 100 кг/м^3 . Образцы испытывались на трехточечный изгиб, где результат показал значительное влияние пористости на модуль упругости материалов. Для материалов с плотностью 80 кг/м^3 модуль упругости составляет порядка 136 МПа , а с плотностью 100 кг/м^3 модуль упругости составляет порядка 159 МПа . При этом предел прочности для материалов с плотностью 80 кг/м^3 составляет $2,5 \text{ МПа}$, а с плотностью 100 кг/м^3 3 МПа . Проведено численное моделирование в квазистатической постановке. Результат, полученный при численном моделировании, хорошо согласуется с результатом, полученным в ходе экспериментального исследования.

Рассмотренная в диссертации математическая модель пористо-смесового ударника является обобщением известных ранее моделей однородных ударников. Выражение (10), позволяющая определить количественную оценку контактного давления, развиваемого при соударении пористо-смесового ударника с деформирующейся преградой (металлической панелью) при $\beta=1$, т.е. при отсутствии пустот в теле ударника, совпадает с ранее известными результатами исследований. Результаты расчетов по представленной модели практически не отличаются от результатов, полученных экспериментальным путем что подтверждает корректность полученных в данной работе результатов.

Результаты проведенных расчетов, которые в значительной мере согласуются с результатами более ранних экспериментальных исследований, позволили сделать следующие основные выводы о характере соударения пористо-смесового ударника с деформирующейся преградой.

СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК РФ:

1. Калягин, М. Ю. Моделирование приборных отсеков летательных аппаратов пористо-смесевыми ударниками / М. Ю. Калягин // Труды МАИ. – 2018. – № 98. – С. 8. – EDN YVGDUH.
2. Калягин, М. Ю. Исследование влияния пористости на физико-механические характеристики полиимидного пенопласта / М. Ю. Калягин, Л. Н. Рабинский, С. А. Шумская // Труды МАИ. – 2024. – № 138. – EDN DHHIVK.
3. Егорова, М. С. Теория стержней (пластин), построенная для неклассических моделей пористой среды механики деформируемого тела / М. С. Егорова, М. Ю. Калягин, Л. Н. Рабинский // Труды МАИ. – 2025. – № 142. – EDN HUNGID.

Публикации в изданиях, входящих в международную систему цитирования Scopus:

1. Babaytsev, A. V. Defect Development in Multilayer Composites under Static Loads / A. V. Babaytsev, M. Yu. Kalyagin, L. N. Rabinskiy // Russian Engineering Research. – 2024. – Vol. 44, No. 1. – P. 112-115. – DOI 10.3103/S1068798X24010064. – EDN EFLZME.
2. Rabinskiy, L. N. Numerical Estimates of the Physicomechanical Properties of Porous Composites / L. N. Rabinskiy, S. A. Shumskaya, M. Yu. Kalyagin // Russian Engineering Research. – 2025. – Vol. 45, No. 1. – P. 133-135. – DOI 10.3103/S1068798X24703404. – EDN WHTRLJ.
3. Babaytsev, A. V. Dynamic Behavior of Materials with Different Porosity / A. V. Babaytsev, M. Yu. Kalyagin, L. N. Rabinskiy // Russian Engineering Research. – 2025. – Vol. 45, No. 4. – P. 539-541. – DOI 10.3103/S1068798X2570039X. – EDN IKEYJW.

Прочие публикации, входящие в РИНЦ:

1. Калягин, М. Ю. Исследование роста поврежденности в композиционных материалах / М. Ю. Калягин, Л. Н. Рабинский // Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов : Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 70-летию БелИИЖТа - БелГУТа, Гомель, 16–17 ноября 2023 года. – Гомель: Учреждение образования "Белорусский государственный университет транспорта", 2023. – С. 92-93. – EDN NMIDEL.
2. Калягин, М. Ю. Исследование особенностей разрушения композитных панелей с учётом структурной неоднородности и поврежденности / М. Ю. Калягин, Л. Н. Рабинский // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : Материалы XXIX Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, Кремёнки, 15–19 мая 2023 года. – Москва: Общество с ограниченной ответственностью "ТРИП", 2023. – С. 24-25. – EDN JVZGNS.
3. Калягин, М. Ю. Исследование влияния пористости на физико-механические характеристики полиимидного пенопласта / М. Ю. Калягин, Л. Н. Рабинский, С. А. Шумская // Проблемы безопасности на транспорте: Материалы XIII международной научно-практической конференции, посвященной Году качества. В 2-х частях, Гомель, 21–22 ноября 2024 года. – Гомель: Белорусский государственный университет транспорта, 2024. – С. 152-153. – EDN NAKINH.
4. Егорова, М. С. Исследование влияния пористости на физико-механические характеристики / М. С. Егорова, М. Ю. Калягин, Л. Н. Рабинский // Проблемы безопасности на транспорте: Материалы XIII международной научно-практической конференции, посвященной Году качества. В 2-х частях, Гомель, 21–22 ноября 2024 года. – Гомель: Белорусский государственный университет транспорта, 2024. – С. 139-140. – EDN НТКОЕВ.
5. Егорова, М. С. Анализ вариационных моделей градиентных и дилатационных моделей с полями дефектами (порами) / М. С. Егорова, М. Ю. Калягин, Л. Н. Рабинский // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : Материалы XXXI Международного симпозиума имени А.Г. Горшкова, Кремёнки, 19–23 мая 2025 года. – Москва: ООО "ТРИП", 2025. – С. 82-83. – EDN IISQIE.