УДК 519.977

Управление пучками траекторий стационарных систем автоматного типа при наличии дискретных неточных измерений

Немыченков Г.И.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, 125993, Россия

e-mail: grigorian_05@list.ru

Аннотация

Рассматривается задача оптимального управления детерминированными дискретными стационарными системами автоматного типа в условиях параметрической неопределенности. Изменение состояния (переключение) системы описывается рекуррентным уравнением. Моменты переключений, а также их количество заранее не заданы и находятся в результате оптимизации. Состояние объекта управления точно неизвестно, при этом оно конкретизируется в результате дискретных неточных измерений. Поэтому исследуется задача оптимального в среднем управления пучком траекторий. Для управления пучком применяется оптимальное управление одной траекторией. Такой подход, основанный на принципе разделения, приводит к субоптимальному управлению пучком, приемлемому для практики. Разработаны алгоритмы синтеза субоптимального управления пучками.

Ключевые слова: система автоматного типа, субоптимальное управление, принцип разделения, пучок траекторий.

Введение

Дискретная система автоматного типа (САТ) описывается рекуррентными уравнениями и служит математической моделью устройств управления в форме автомата с памятью. На непрерывном промежутке времени функционирования САТ конечное число раз меняет свое состояние. В моменты переключений, когда происходят изменения состояния, траектория системы имеет скачки. Между переключениями система сохраняет свое состояние. В отличие от классических моделей дискретных систем [1,2], изменения состояний которых происходят в заданные (*тактовые*) моменты времени, переключения САТ могут быть в произвольные, заранее не заданные моменты времени [3,4]. Качество управления одной траекторией системы оценивается функционалом, в котором учитываются затраты на переключения. Выбор количества переключений и тактовых моментов является одним из ресурсов управления и подлежит оптимизации [5]. При этом не исключаются многократные переключения в фиксированный момент времени [3]. Таким образом, задача синтеза оптимальной САТ обобщает задачу управления дискретной управляемой системой [1,2].

Представляют интерес задачи, в которых субоптимальное управление пучком оказывается оптимальным. Известные результаты относятся к линейно-квадратичным задачам, в которых управление линейными системами оценивается квадратичным функционалом качества. В [6] показано, что оптимальное в среднем управление пучком траекторий непрерывной системы совпадает с оптимальным управлением одной (изолированной) траекторией, исходящей из геометрического центра тяжести множества возможных начальных состояний. Эти результаты затем были перенесены на непрерывно-дискретные системы (см. Введение в [7]).

Управляемые процессы с переключениями встречаются и в стохастических системах, которые меняют свои свойства скачкообразно в случайные моменты времени. Такие системы относятся к системам со случайной структурой. Исследованию таких систем посвящено большое количество работ, в частности [8-17]. В статье стохастические процессы не рассматриваются.

В линейно-квадратичной задаче управления пучками траекторий САТ принцип разделения, вообще говоря, не выполняется. В [7] приводятся примеры, в которых оптимальное в среднем управление не совпадает с оптимальным управлением для траектории, исходящей из геометрического центра тяжести множества возможных начальных состояний. Причина этого заключается в том, что функция цены в линейно-квадратичной задаче управления нестационарными САТ не является квадратичной. В [20] показано, что для линейно-квадратичной задачи управления стационарными САТ функция цены кусочно-квадратичная. Это обстоятельство позволяет доказать справедливость принципа разделения (с некоторой модификацией) [21].

В работе предложены алгоритмы синтеза субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений. Выведены уравнения. Приведены академические примеры оптимального в среднем управления пучками траекторий САТ.

1. Постановки задач

Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ САТ совершает N переключений в моменты времени t_i, $i = 1, \dots, N$, образующие неубывающую последовательность $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \{t_1, \dots t_N\}$:

$$t_0 \le t_1 \dots \le t_N \le t_{N+1} \doteq t_F. \qquad (1.1)$$

Между неравными последовательными моментами переключений система сохраняет свое состояние, а в моменты переключений состояние меняется согласно рекуррентным соотношениям

$$x_i = g(x_{i-1}, v_i), \qquad (1.2)$$

$$v_i \in V(x_{i-1}), \qquad (1.3)$$

где $x_i = x(t_i)$ и $v_i = v(t_i)$ – состояние системы и управление в момент переключения t_i соответственно, причем $x_i \ne x_{i-1}$, $x_i \in X \subset R^m$, $v_i \in V \subset R^q$, $i = 1, \dots, N$. Равенство последовательных моментов в (1.1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения [3,5]. Значение управления между тактовыми моментами времени не существенно. Будем считать, что оно *нейтральное*: $v(t) = o$, $t \in T \backslash \boldsymbol{\mathcal{T}}$, где o – некоторый *нейтральный* элемент множества V. При нейтральном значении управления переключений нет и система сохраняет свое состояние, т.е. $g(x, o) = y$, при всех $x \in X$.

Начальное состояние системы задано:

$$x(t_0) = x_0. \qquad (1.4)$$

Условие (1.4) не исключает одного или нескольких переключений в начальный момент времени t_0, поскольку первые несколько моментов (1.1) могут совпадать.

Функция $g: X \times V \to X$ в уравнении (1.2) определяет состояние $x_i = x(t_i)$ системы в момент t_i в зависимости от предшествующего состояния $x_{i-1} = x(t_{i-1})$ и допустимого значения управления $v_i = v(t_i)$, которое ограничено включением (1.3). Многозначное отображение $x \to V(x): X \to 2^V$ считаем замкнутым [22]. Здесь 2^V – множество всех подмножеств V.

1.1. Задача оптимального управления одной траекторией. Программное управление $v: T \to V$ однозначно определяется множеством $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \{t_1, \dots t_N\}$ моментов переключений и значениями $v_i = v(t_i) \neq 0$ управления в эти моменты. Программное управление будем считать допустимым, если его значения $v_i = v(t_i)$, в силу рекуррентных соотношений (1.2),(1.3) и начального условия (1.4), порождают последовательность состояний $x_i = x(t_i)$ траектории $x: T \to X$, постоянной между неравными последовательными моментами переключений:

$$x(t) = x(t_{i-1}), \quad t_{i-1} \le t < t_i, \qquad \text{если } t_{i-1} < t_i. \tag{1.5}$$

Множество допустимых программных управлений обозначим $\boldsymbol{\mathcal{V}}(t_0, x_0)$. Множества $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \boldsymbol{\mathcal{T}}(v(\cdot))$ моментов переключений у разных допустимых управлений $v \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(t_0, x_0)$ могут отличаться.

На множестве $\boldsymbol{\mathcal{V}}(t_0, x_0)$ задан функционал качества управления одной траекторией, исходящей из состояния x_0:

$$I(t_0, x_0, v(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_F} f(x(t))dt + \sum_{i=1}^{N} g^+(x_{i-1,}v_i) + F(x(t_F)). \tag{1.6}$$

Скалярные функции $f(x)$, $g^{+}(x,v)$, $F(x)$ определены на множествах X, $X \times V$, X соответственно, причем функция $g^{+}(x,v)$ – неотрицательная. Предполагаем, что функционал (1.6) ограничен снизу. Количество N и моменты $t_1, \dots t_N$ переключений заранее не заданы и подлежат оптимизации. Заметим, что в стационарном случае моменты переключений не входят явно в функционал (1.6), но его интегральный член, разумеется, зависит от разбиения (1.1).

Требуется найти минимальное значение функционала (1.6) и оптимальное допустимое управление $v^{*}(\cdot)$, на котором это значение достигается:

$$I\big(t_0, x_0, v^{*}(\cdot)\big) = \min_{v(\cdot)\in\mathbf{V}(t_0,x_0)} I(t_0, x_0, v(\cdot)). \tag{1.7}$$

В прикладных задачах нередко возникают ограничения на количество переключений. Задача минимизации функционала (1.6) на множестве допустимых траекторий с заданным числом переключений формулируется следующим образом. Пусть $\boldsymbol{\mathcal{V}}_N(t_0,x_0)$ – множество допустимых управлений из $\boldsymbol{\mathcal{V}}(t_0,x_0)$ с N переключениями. Требуется найти минимальное значение функционала (1.6) на множестве $\boldsymbol{\mathcal{V}}_N(t_0,x_0)$ и допустимое управление $v_N(\cdot)$ с N переключениями, на котором это значение достигается:

$$I\big(t_0, x_0, v_N(\cdot)\big) = \min_{v(\cdot)\in\boldsymbol{\mathcal{V}}_N(t_0,x_0)} I(t_0, x_0, v(\cdot)). \tag{1.8}$$

Такое управление $v_N(\cdot)$ будем называть *условно оптимальным*, имея в виду его оптимальность при дополнительном условии – заданном числе переключений. В множестве $\boldsymbol{\mathcal{V}}_N(t_0,x_0)$ допускаются управления, которым соответствуют фиктивные переключения, при которых состояние системы не меняется. При условии (1.7) положительности затрат на каждый скачок траектории фиктивные переключения исключаются при минимизации, поскольку траектории без фиктивных переключений лучше (в смысле минимума функционала).

В линейно-квадратичной задаче пространство состояний системы $X = \mathbf{R}^m$, уравнение движения (1.2) линейное, ограничения (1.3) на управление отсутствуют, а функционал (1.6) квадратичный:

$$x_i = Ax_{i-1} + Bv_i, \qquad v_i \in \mathbf{R}^q, \tag{1.9}$$

$$I\big(t_0, x_0, v(\cdot)\big) = \int_{t_0}^{t_F} \frac{1}{2} x^T(t) C x(t) dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left[\lambda + \frac{1}{2} x_{i-1}^T D x_{i-1} + \frac{1}{2} v_i^T G v_i\right] + \frac{1}{2} x^T(t_F) F x(t_F). \tag{1.10}$$

Здесь A, B, C, D, F, G – матрицы соответствующих размеров, причем матрицы C, D, F квадратичных форм неотрицательно определенные, а матрица G – положительно определена, λ – положительное число. Задача синтеза оптимального позиционного управления для задачи (1.9), (1.10) аналогична проблеме аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) [23].

1.2. Задача оптимального управления пучком траекторий. Пусть в отличие от задачи (1.6) начальное состояние $x_0 \in X$ точно не известно, а известно множество σ_0 возможных начальных состояний ($\sigma_0 \subset X$). Обозначим через $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ множество допустимых программных управлений $v(\cdot)$, каждое из которых для любого начального состояния (1.4) порождает в силу уравнения движения (1.2) траекторию $x(\cdot)$. Объединение этих траекторий образует пучок $t \to \sigma(t)$, исходящий из множества возможных начальных состояний $\sigma(t_0) = \sigma_0$. Пусть, по-прежнему, качество управления одной траекторией САТ, исходящей из позиции (t_0, x_0), характеризуется функционалом (1.6), а качество управления пучком траекторий, исходящих из множества σ_0, оценивается средним значением функционала (1.6)

$$I^c\big(t_0, \sigma_0, v(\cdot)\big) = \int\limits_{\sigma_0} \rho\,(x_0)\, I\,\big(t_0, \sigma_0, v(\cdot)\big) dx_0. \qquad (1.11)$$

Множество σ_0 считаем либо компактным, либо имеющим ненулевую меру соответственно. В (1.11) измеримую и неотрицательную весовую функцию $\rho: X \to \mathbf{R}_+$, в частности, можно считать плотностью вероятности начального состояния системы, предполагая при этом, что

$$\int\limits_{\sigma_0} \rho\,(x)\, dx = 1. \qquad (1.12)$$

Требуется найти оптимальное в среднем управление $v^{\mathrm{c}}(\cdot)$, минимизирующее функционал (1.11):

$$I^{\mathrm{c}}\big(t_0, \sigma_0, v^{\mathrm{c}}(\cdot)\big) = \min_{v(\cdot)\in\mathcal{V}} I^{\mathrm{c}}\,\big(t_0, \sigma_0, v(\cdot)\big). \qquad (1.13)$$

Как и в случае управления одной траекторией (см. разд.1.1), минимизация в (1.13) может проводиться при дополнительном условии – заданном количестве N переключений.

1.3. Задача субоптимального управления пучком траекторий. Для управления пучком траекторий предлагается использовать управление, оптимальное для одной траектории, возможно не принадлежащей этому пучку. Наилучшее для пучка траекторий управление, оптимальное хотя бы для одной траектории системы, будем называть *субоптимальным* управлением пучком траекторий. Субоптимальное управление, вообще говоря, не является оптимальным для пучка траекторий, но оно может оказаться вполне приемлемым на практике. Сформулируем задачу поиска такого управления.

Пусть $\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\text{опт}}$ – множество оптимальных программных управлений отдельными траекториями, т.е. каждое программное управление $\hat{v}(\cdot) \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^{\text{опт}}$ хотя бы для одного начального состояния $\hat{x}_0 \in X$ порождает в силу уравнения движения (1.2) оптимальный процесс, минимизирующий функционал (1.6). Начальное состояние $\hat{x}_0$ может не принадлежать множеству σ_0. В рассматриваемой задаче любое управление, оптимальное для одной траектории, считаем допустимым для всех траекторий пучка, т.е. $\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\text{опт}} \subset \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

Требуется найти субоптимальное в среднем управление $\hat{v}^{\text{с}}(\cdot)$, минимизирующее функционалы (1.11) на множестве $\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\text{опт}}$:

$$I^{\text{с}}\big(t_0, \sigma_0, \hat{v}^{\text{с}}(\cdot)\big) = \min_{v(\cdot) \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^{\text{опт}}} I^{\text{с}}\left(t_0, \sigma_0, v(\cdot)\right). \tag{1.14}$$

Наименьшее значение (1.14) не меньше минимального значения (1.13), так как $\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\text{опт}} \subset \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

1.4. Задача субоптимального управления пучком траекторий при наличии дискретных неточных измерений. Пусть в некоторые моменты времени $t^1, \dots, t^m$, образующие возрастающую последовательность $t_0 < t^1 < \dots < t^m < t_F$ на промежутке $[t_0, t_F]$, производятся неточные измерения, в результате которых соответственно определяются "измеренные" множества $\sigma^1, \dots, \sigma^m$ возможных состояний системы. Предполагаем, что моменты измерений не совпадают с моментами мгновенных многократных переключения из последовательности (1.1). Измерения позволяют "сузить" пучок траекторий [24]. В самом деле, пусть $\sigma^i(t)$ – пучок траекторий после i - го измерения, $t^i < t < t^{i+1}$, $\mathrm{i} = 1, \ldots, m-1$, а σ_0^m – множество всех возможных состояний системы в момент времени $\mathrm{t^m}$ с учетом начального множества σ_0 и всех m измерений, проведенных до этого момента включительно. Это множество получается путем последовательного пересечения множества возможных состояний системы с "измеренными" множествами

$$\sigma_0^0 = \sigma_0 = \sigma^0(t_0),\ \ \sigma_0^1 = \sigma^0(t^1) \cap \sigma^1, \ldots, \sigma_0^m = \sigma^{m-1}(t^m) \cap \sigma^m. \quad (1.15)$$

Задача субоптимального управления пучком траекторий с учетом измерений формулируется так же, как в разд.1.3, только процесс управления пучком происходит на промежутке времени $[t^m, t_F]$, и начинается из множества в σ_0^m. Требуется найти субоптимальное в среднем управление w^{c}, минимизирующее функционал $I^{\text{c}}(t^m, \sigma_0^m, w)$ на множестве $\boldsymbol{\mathcal{V}}^{\text{опт}}(t^m)$ оптимальных программных управлений, определенных на $[t^m, t_F]$:

$$I^{\text{c}}(t^m, \sigma_0^m, w^{\text{c}}) = \min_{w \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^{\text{опт}}(t^m)} I^{\text{c}}(t^m, \sigma_0^m, w). \quad (1.16)$$

2. Алгоритм синтеза оптимального управления

На основании статьи [21] можно сформулировать следующий алгоритм синтеза оптимального позиционного управления.

1). В конечный момент времени t_F находим образующие функции цены $\varphi_{0k}(t_F, x), k \in \mathbf{N}$, решая рекуррентное уравнение

$$\varphi_{0k}(t_F, x) = \min_{v \in V(x)} [\varphi_{0k-1}(t_F, g(x, v)) + g^+(x, v))] \quad (2.6)$$

с начальным условием

$$\varphi_{00}(t_F, x) = F(x). \tag{2.7}$$

2). Определяем условное оптимальное позиционное управление

$$\boldsymbol{v}_{0k}(t_F, x) = \arg\min_{v \in V(x)} [\varphi_{0k-1}(t_F, g(x, v)) + g^{+}(x, v))] \tag{2.8}$$

при первом переключении из k оставшихся.

3). Для каждого момента $t \in [t_0, t_F]$ находим «нулевые» образующие по формуле

$$\varphi_{0k}(t, x) = f(x)(t_F - t) + \varphi_{0k}(t_F, x). \tag{2.9}$$

4). Остальные образующие $\varphi_{sk}(t, x)$, $s \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}_{+}$, получаем, решая рекуррентное уравнение

$$\varphi_{sk}(t, x) = \min_{v \in V(x)} [\varphi_{s-1k}(t, g(x, v)) + g^{+}(x, v))] \tag{2.10}$$

с начальным условием (2.9).

5). Определяем условное оптимальное позиционное управление

$$\boldsymbol{v}_{sk}(t, x) = \arg\min_{v \in V(x)} [\varphi_{s-1k}(t, g(x, v)) + g^{+}(x, v))] \tag{2.11}$$

при первом переключении из $s + k$ оставшихся.

Алгоритм позволяет получить образующие $\varphi_{sk}(t, x)$ функции цены $\varphi(t, x)$ и условные оптимальные позиционные управления $\boldsymbol{v}_{sk}(t, x)$, т.е. оптимальные управления при заданном количестве оставшихся переключений. Функция цены находится по своим образующим

$$\varphi(t_0, x_0) = \min_{(s,k) \in \mathbf{Z}_{+}^{2}} \varphi_{sk}(t_0, x_0). \tag{2.12}$$

Оптимальное количество переключений вычисляется по формуле

$$(\mathbf{s},\mathbf{k}) = \arg\min_{(s,k)\in \mathbf{Z}_+^2} \varphi_{sk}(t_0,x_0). \tag{2.13}$$

3. Алгоритм синтеза субоптимального управления

На основании статьи [21] можно сформулировать следующий алгоритм синтеза субоптимального управления пучком траекторий.

1). В конечный момент времени t_F находим образующие функции стоимости полуоптимального процесса $\beta_{0k}(t_F,x,\hat{x}), k\in\mathbf{N}$, решая рекуррентное уравнение

$$\beta_{0k}(t_F,x,\hat{x}) = \beta_{0k-1}\Big(t_F, g\big(x, v_{0k}(t_F,\hat{x})\big), g\big(\hat{x}, v_{0k}(t_F,\hat{x})\big)\Big) + \\ + g^{+}\big(x, v_{0k}(t_F,\hat{x})\big), \tag{3.1}$$

с начальным условием

$$\beta_{00}(t_F,x,\hat{x}) = F(x). \tag{3.2}$$

2). Для каждого момента $t\in[t_0,t_F]$ определяем «нулевые» образующие по формуле

$$\beta_{0k}(t,x,\hat{x}) = f(y)(t_F - t) + \beta_{0k}(t_F,x,\hat{x}). \tag{3.3}$$

3). Остальные образующие $\beta_{sk}(t,x,\hat{x})$, $s\in\mathbf{N}, k\in\mathbf{Z}_+$, получаем, решая рекуррентное уравнение

$$\beta_{sk}(t,x,\hat{x}) = \beta_{sk-1}\big(t, g\big(x,\boldsymbol{v}_{sk}(t,\hat{x})\big), g(\hat{x},\boldsymbol{v}_{sk}(t,\hat{x}))\big) + g^{+}\big(x,\boldsymbol{v}_{sk}(t,\hat{x})\big) \tag{3.4}$$

с начальным условием (3.2).

4). Получаем субоптимальную оценку начального состояния по формуле

$$\hat{x}^{\mathrm{c}} \in \operatorname*{Arg\,min}_{\hat{x}\in X} \int\limits_{\sigma_0} \rho(x_0)\,\beta_{\hat{s}\hat{k}}(t_0,x_0,\hat{x})\,dx_0, \tag{3.5}$$

где $\hat{s} = \mathbf{s}(t_0, \hat{x})$, $\hat{k} = \mathbf{k}(t_0, \hat{x})$ – количество переключений в начальный и конечный моменты времени оптимальной траектории, исходящей из позиции $(t_0, \hat{x}^c)$.

5). Находим субоптимальное в среднем программное управление, решая уравнение движения

$$\hat{x}_i = g(\hat{x}_{i-1}, \hat{v}_i) \tag{3.6}$$

с управлением $\hat{v}_i = \boldsymbol{v}_{\hat{s}\hat{k}}(t_i, \hat{x}_i)$, оптимальным для траектории, исходящей в момент времени t_0 из состояния $\hat{x}$.

Алгоритм позволяет получить образующие $\beta_{sk}(t, x, \hat{x})$ функции $\beta(t, x, \hat{x})$ стоимости полуоптимального процесса и субоптимальную оценку начального состояния (3.5). Функция стоимости полуоптимального процесса находится по своим образующим

$$\beta(t, x, \hat{x}) = \beta_{\hat{s}\hat{k}}(t, x, \hat{x}), \qquad (\hat{s}, \hat{k}) = \arg\min_{(s,k)\in\mathbf{Z}_+^2} \varphi_{sk}(t, x). \tag{3.7}$$

4. Алгоритм синтеза условного субоптимального управления

Как показано в [21] оценку (3.5) можно улучшить, если использовать не оптимальное управление опорной траекторией, а условно оптимальное (см. разд.1.1), т.е. оптимальное управление с фиксированным числом переключений. Поэтому алгоритм синтеза условного субоптимального управления повторяет пункты 1) – 3) алгоритма синтеза субоптимального управления (см. разд. 3), но отличается выбором оценки.

4). Находим наилучшую условную субоптимальную оценку начального состояния, решая задачу дискретной оптимизации

$$\left(\hat{s}^{c},\hat{k}^{c}\right)=\mathrm{Arg}\min_{(s,k)\in \mathrm{Z}_{+}^{2}}\int\limits_{\sigma_0}\rho(x_0)\,\beta_{sk}\,(t_0,x_0,\hat{x}_{sk}^{c})dx_0, \qquad (4.1)$$

где условная субоптимальная оценка $\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{sk}}^{\mathrm{c}}$ находится по формуле

$$\hat{x}_{sk}^{c}\in \mathrm{Arg}\min_{\hat{x}\in X}\int\limits_{\sigma_0}\rho(x_0)\,\beta_{sk}\,(t_0,x_0,\hat{x})\,dx_0. \qquad (4.2)$$

5). Получаем условное субоптимальное в среднем программное управление, решая уравнение движения

$$\hat{x}_i=g(\hat{x}_{i-1},\hat{v}_i) \qquad (4.3)$$

с управлением $\hat{v}_i=\boldsymbol{v}_{\hat{s}^c\hat{k}^c}(t_i,\hat{x}_i)$, оптимальным для траектории, исходящей в момент времени t_0 из состояния $\hat{x}_{\hat{s}^c\hat{k}^c}^{c}$.

Если выполняется модифицированный (условный) принцип разделения [21]: "оптимальное в среднем управление пучком траекторий совпадает с условным оптимальным управлением одной траекторией", то условное субоптимальное управление совпадает с оптимальным в среднем управлением пучком траекторий.

5. Алгоритм синтеза условного субоптимального управления при наличии дискретных неточных измерений

Предполагается, что в результате m дискретных неточных измерений в моменты времени $t^1,\dots,t^m$ получено множество σ_0^m возможных состояний (см. (1.15)) в момент t^m. Тогда оптимальное в среднем управление нужно формировать на промежутке $[t^m,t_F]$. Для этого надо использовать оценку состояния в момент t^m аналогичную (3.5)

$$\hat{x}^m \in \operatorname*{Arg\,min}_{\hat{x}\in X} \int_{\sigma_0^m} \rho(t^m, x)\, \beta_{\hat{s}\hat{k}}(t^m, x, \hat{x})\, dx, \qquad (5.1)$$

где $\rho(t^m, x) = 2/(\mathrm{mes}\, \sigma_0^m)$

Теорема (достаточные условия субоптимальности управления пучком траекторий стационарных САТ при наличии дискретных неточных измерений). Если существует последовательность функций $\beta_{sk}: T \times X \times X \to \mathbf{R}$, $s, k \in \mathbf{Z}_+$, удовлетворяющая на всей области определения уравнениям (3.1)–(3.3), то управление $\hat{v}^c(\cdot)$, оптимальное для траектории, исходящей в момент времени t^m из начального состояния (5.1), будет субоптимальным в среднем управлением пучком траекторий при наличии m дискретных неточных измерений в моменты времени $t^1, \dots, t^m$.

Действительно, из равенств (3.1)–(3.3) следует, что указанные в формулировке функции β_{sk} представляют собой образующие, по которым строится функция β стоимости полуоптимального процесса, согласно формулам (3.7). Оценка (5.1) обеспечивает субоптимальность управления пучком траекторий. Теорема доказана.

6. Алгоритм решения линейно-квадратичной задачи управления пучком траекторий при наличии дискретных неточных измерений

Для линейно-квадратичной задачи [21] функция цены и функция стоимости полуоптимального процесса являются квадратичными:

$$\varphi_{sk}(t, x) = \frac{1}{2} x^T \Phi_{sk}(t) x + \gamma_{sk}(t), \qquad (6.1)$$

$$\beta_{sk}(t, x, \hat{x}) = \frac{1}{2} x^T \Phi_{sk}(t) x + \frac{1}{2} (x - \hat{x})^T \Psi_{sk}(t)(x - \hat{x}) + \gamma_{sk}(t), \qquad (6.2)$$

где Φ_{sk}, Ψ_{sk} – симметрические неотрицательно определенные матрицы порядка n, γ_{sk} – скалярная функция, $s,k\epsilon\mathbf{Z}_+$; $x\epsilon\mathbf{R}^m$, $v_i\epsilon\mathbf{R}^q$. Поэтому можно применить следующий алгоритм синтеза субоптимального управления пучком траекторий.

1). В конечный момент времени t_F находим матрицы образующих функции стоимости полуоптимального процесса $\beta_{0k}(t_F,x,\hat{x}),k\in\mathbf{N}$, решая рекуррентные уравнения

$$\Phi_{0k-1}(t_F)=A^T\Phi_{0k-1}A+D-A^T\Phi_{0k-1}A,\quad \gamma_{0k}(t_F)=\gamma_{0k-1}+\lambda. \quad (6.3)$$

$$\Psi_{0k}(t_F)=A^T\Psi_{0k-1}A+A^T\Phi_{0k-1}BP_{0k-1}B^T\Phi_{0k-1}A,\ \ k=1,2,\ldots \quad (6.4)$$

с начальными условиями

$$\Phi_{00}(t_F)=F,\quad \Psi_{00}(t_F)=0,\quad \gamma_{00}(t_F)=0. \quad (6.5)$$

2). Определяем условное оптимальное позиционное управление при первом переключении из k оставшихся:

$$\boldsymbol{v}_{0k}(t_F,x)=-P_{0k-1}B^T\Phi_{0k-1}, \quad (6.6)$$

где $P_{0k-1}(t_F)=[G+B^T\Phi_{0k-1}(t_F)B]^{-1}$, $k=1,2,\ldots$

3). Для каждого момента $t\in[t_0,t_F]$ находим матрицы «нулевых» образующих

$$\Phi_{0k}(t)=(t_F-t)C+\Phi_{0k}(t_F),\quad \gamma_{0k}(t)=\gamma_{0k}(t_F) \quad (6.7)$$

$$\Psi_{sk}(t)=A^T\Psi_{s-1k}A+A^T\Phi_{s-1k}BP_{s-1k}B^T\Phi_{s-1k}A,\qquad \Psi_{0k}(t)=\Psi_{0k}(t_F), \quad (6.8)$$

4). Для остальных образующих $\beta_{sk}(t,x,\hat{x})$, $s\in\mathbf{N},k\in\mathbf{Z}_+$, получаем, решая рекуррентные уравнения

$$\Phi_{sk}(t_0)=A^T\Phi_{s-1k}A+D-A^T\Phi_{s-1k}BP_{s-1k}B^T\Phi_{s-1k}A,$$

$$\gamma_{sk}(t_0)=\gamma_{s-1k}+\lambda, \quad (6.8)$$

$$\Psi_{sk}(t_0)=A^T\Psi_{s-1k}A+A^T\Phi_{s-1k}BP_{s-1k}B^T\Phi_{s-1k}A,\qquad \Psi_{0k}(t_0)=\Psi_{0k}(t_F), \quad (6.9)$$

с начальными условиями (6.7), (6.8). Здесь $P_{sk}(t_F) = [G + B^T \Phi_{sk}(t_F) B]^{-1}$, $k = 1,2, \dots$

5). Получаем условное оптимальное позиционное управление при первом переключении из $s + k$ оставшихся:

$$\boldsymbol{v}_{sk}(t_0, x) = -P_{s-1k} B^T \Phi_{s-1k} A y \tag{6.10}$$

6). Находим наилучшую условную субоптимальную оценку начального состояния

$$\hat{x}^{\text{c}}_{\hat{s}^{\text{c}} \hat{k}^{\text{c}}} \in \operatorname{Arg} \min_{\hat{x} \in X} \int\limits_{\sigma_0} \rho(x_0)\, \beta_{\hat{s}^{\text{c}} \hat{k}^{\text{c}}}\, (t_0, x_0, \hat{x})\, dx_0, \tag{6.11}$$

где количество переключений $\hat{s}^{\text{c}}, \hat{k}^{\text{c}}$ получаем, решая задачу дискретной оптимизации

$$\left(\hat{s}^{\text{c}}, \hat{k}^{\text{c}}\right) = \operatorname{Arg} \min_{(s,k) \in \mathbf{Z}^2_+} \int\limits_{\sigma_0} \rho(x_0)\, \beta_{sk}\, (t_0, x_0, \hat{x}^{\text{c}}_{sk}) dx_0. \tag{6.12}$$

7). Находим условное субоптимальное в среднем программное управление, решая уравнение движения

$$\hat{x}_i = g(\hat{x}_{i-1}, \hat{v}_i) \tag{6.13}$$

с управлением $\hat{v}_i = \boldsymbol{v}_{\hat{s}^{\text{c}} \hat{k}^{\text{c}}}(t, \hat{x}_i)$, оптимальным для траектории, исходящей в момент времени t_0 из состояния $\hat{x}^{\text{c}}_{\hat{s}^{\text{c}} \hat{k}^{\text{c}}}$.

Так как модифицированный (*условный*) принцип разделения выполняется [19], то условное субоптимальное управление совпадает с оптимальным в среднем управлением пучком траекторий.

7. Пример

Рассмотрим линейно-квадратичную задачу оптимального управления пучком траекторий стационарной дискретной САТ:

$$\hat{x}_i^1 = \hat{x}_{i-1}^1 + h\hat{x}_{i-1}^2,$$

$$\hat{x}_i^2 = \hat{x}_{i-1}^2 + v_i, \qquad (6.1)$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2}[x^2(t)]^2 dt + \sum_{i=1}^{N} \left(\lambda + \frac{\mu}{2} v_i^2\right) + \frac{1}{2}[x^1(1)]^2 + \frac{1}{2}[x^2(1)]^2 \to \min, \quad (6.2)$$

где $x_i = (x_i^1, x_i^2)^T = x(t_i)$ – вектор состояния системы, $v_i = v(t_i)$ – управление в момент переключения t_i соответственно, причем $x_i \neq x_{i-1}$, $x_i \in \mathbf{R}^2$, $v_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, N$; параметр $h = 0.5$. Тактовые моменты времени, в которые система совершает переключения, образуют неубывающую конечную последовательность: $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N \leq 1$. Параметры $\lambda = 0.05$ и $\mu = 1$ определяют затраты на каждое переключение. Количество N переключений и сами моменты переключений заранее не заданы и находятся в результате оптимизации. Начальное состояние системы x_0 точно не известно, а известно множество

$$\sigma_0 = \{(x_0, z_0) | 0.75 \leq x^1 \leq 1.25; 0.75 \leq x^2 \leq 1.25\}$$

возможных начальных состояний. Требуется найти:

а) оптимальное в среднем (с постоянной весовой функцией $\rho(x,z) \equiv 1$) управление пучком траекторий, исходящих из множества σ_0;

б) оптимальное в среднем управление при одном неточном измерении в момент времени $t = 0.5$.

По сравнению с общей постановкой задачи (1.9),(1.10) имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; G = \mu.$$

Образующие $\beta_{sk}(t,x,\hat{x})$ позиционного отклонения цены находятся в виде квадратичной функции (5.2) с матрицами Φ_{sk}, Ψ_{sk} и скалярной величиной γ_{sk}, удовлетворяющими уравнениям (5.5), (5.7), (5.8), (5.4), (5.9).

Субоптимальное в среднем управление (a)) совпадает с оптимальным управлением траекторией, исходящей из центра $\hat{x}^{\text{с}} = \hat{x}^{\text{с}}_{sk} = (1 \quad 1)^T$ квадрата σ_0. Наилучшее количество переключений при этом находится по формуле (4.7) (при $\rho_0(x) \equiv 1$). В результате целочисленной минимизации получаем $\hat{s}^{\text{с}} = 2$, $\hat{k}^{\text{с}} = 6$, т.е. субоптимальное в среднем управление имеет два переключения в начальный момент времени и пять – в конечный. Это программное управление находится при помощи позиционного управления (5.6), (5.10): - управление: $v_1 = -1.055$, $v_2 = -0.858$, $v_3 = -0.574$, $v_4 = -0.378$, $v_5 = -0.181$, $v_6 = 0.016$, $v_7 = 0.212$, $v_8 = 0.409$. Минимальное среднее значение функционала $\min I^{\text{с}} = 2.6085$. На рисунке представлен соответствующий пучок траекторий. Траектории, исходящие из двух вершин квадрата σ_0, изображены пунктирными стрелками. Траектория, исходящая из центра квадрата, – штриховыми линиями с полужирными точками (состояниями системы). Заметим, что оптимальная траектория, исходящая из центра квадрата, не совпадает с субоптимальной. Она имеет два переключения в начальный момент времени и шесть – в конечный. Оптимальная траектория изображена на рисунке штрихпунктирными линиями с полужирными квадратиками (состояниями системы).

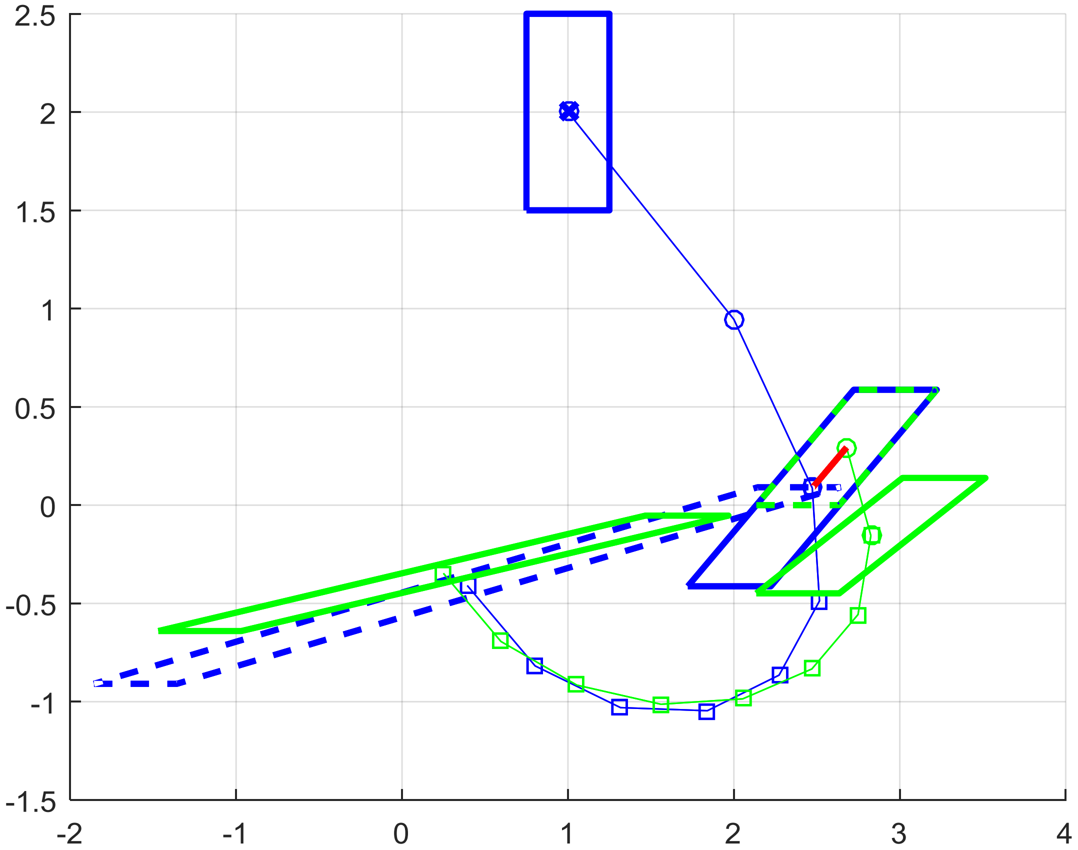

Рис. 1.

Пусть (б)) в момент $t = 0.5$ производится неточное измерение скорости x_2. Расчеты проводились для «измеренного» промежутка $x_2 \in [0,1]$. В этом случае оптимальное в среднем управление после измерения имеет одно переключение в начальный момент времени и семь переключений в конечный момент (k0= 1; k1= 7), а управление: $v_1 = -0.449$, $v_2 = -0.402$, $v_3 = -0.277$, $v_4 = -0.152$, $v_5 = -0.027$, $v_6 = 0.097$, $v_7 = 0.222$, $v_8 = 0.347$. Значение функционала с учетом измерения $\min I^c = 2.2565$. По сравнению с управлением без измерения значение функционала уменьшилось на 13.5%.

Заключение

Поставлена задача оптимального в среднем управления стационарными САТ в условиях параметрической неопределенности при наличии дискретных неточных измерений. На основе достаточных условий разработаны алгоритмы синтеза субоптимального и условного субоптимального управления пучками траекторий САТ. Эффективность работы алгоритма продемонстрирована на академическом примере линейно-квадратичной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 18-08-00128 а.

Библиографический список

1. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных систем. - М.: Наука, 1973. - 256 с.

2. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. - М.: Наука, - 1973. – 448 с.

3. Бортаковский А.С. Оптимизация переключающих систем. - М.: Изд-во МАИ, 2016. – 120 с.

4. Немыченков Г.И. Приближенный синтез оптимальных дискретных систем автоматного типа // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=73376

5. Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А. Синтез оптимального управления линейными логико-динамическими системами // Труды МАИ. 2007. № 27. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=34013

6. Овсянников Д.А. Математические методы управления пучками. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. – 228 с.

7. Бортаковский А.С. Оптимальное и субоптимальное управления пучками траекторий детерминированных систем автоматного типа // Известия Российской Академии Наук. Теория и системы управления. 2016. № 1. С.5 - 26.

8. Борисов А.В., Босов А.В., Кибзун А.И., Миллер Г.Б., Семенихин К.В. Метод условно минимаксной нелинейной фильтрации и современные подходы к оцениванию состояний нелинейных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2018. № 1. С. 3 - 17.

9. Кибзун А.И., Хромова О.М. О коррекции положения стохастической системы по квантильному критерию // Труды МАИ. 2014. № 72. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=47323

10. Красильщиков М.Н., Себрякова Г.Г. Навигация и наведение беспилотных маневренных ЛА на основе современных информационных технологий. – М.: Физматлит, 2005 – 280 с.

11. Рыбаков К.А. Спектральные характеристики линейных функционалов и их приложения к анализу и синтезу стохастических систем управления // Труды МАИ. 2005. № 18. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=34184

12. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Оптимальное управление нелинейными стохстическими системами со случайной структурой при неполной информации о векторе состояния // Автоматика и телемеханика. 2006. № 7. С.62 - 75.

13. Рыбаков К.А. Спектральные характеристики линейных функционалов и их приложения к анализу и синтезу стохастических систем управления // Труды МАИ. 2005. № 18. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=34184

14. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. - М.: Наука, 1988. – 320 с.

15. Хрусталев М.М., Румянцев Д.С. Оптимизация квазилинейных динамических стохастических систем со сложной структурой // Автоматика и телемеханика. 2011. № 10. С.154 - 169.

16. Хрусталёв М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А. Метод Галёркина в задачах оптимизации квазилинейных динамических стохастических систем с информационными ограничениями // Труды МАИ. 2013. № 66. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=40831

17. Fleming W.H. Optimal control of partially observable diffusions // SIAM Journal on Control, 1968, vol. 6, no. 2. pp.194 - 214.

18. McLane P.J. Linear optimal stochastic control using instantaneous output feedback // International Journal Control, 1971, vol. 13, no. 2, pp. 383 – 396.

19. Wonham W.M. On the separation theorem of stochastic control. J. SIAM Control. – 1968. – v.6. – p.312 - 326.

20. Бортаковский А.С. Необходимые и достаточные условия оптимальности стационарных дискретных систем автоматного типа // Известия РАН. Теория и системы управления. 2016. № 6. С. 53 - 70.

21. Бортаковский А.С., Немыченков Г.И. Субоптимальное управление пучками траекторий детерминированных стационарных систем автоматного типа1 // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 6. С. 20 -34.

22. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - М.: Наука, 1974. - 479.

23. Летов А.М. Динамика полета и управление. - М.: Наука, 1973. – 443 с.

24. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. – М.: Наука, 1978. – 270 с.

Статья поступила в редакцию 28.01.2019