

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования

«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
(МФТИ)

Юридический адрес: 117303, г. Москва,
ул. Керченская, дом 1А, корпус 1

Почтовый адрес: 141700, Московская обл.,
г. Долгопрудный, Институтский переулок, дом 9
Тел.: +7 (495) 408-57-00, факс: +7 (495) 408-68-69
info@mipt.ru

на № 22.01.2026 от № 26-17-354

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе



Баган Виталий
Анатольевич

2026 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию **Кулешова Александра Сергеевича**
«Точные решения некоторых задач динамики твердого тела», представленную
на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

Актуальность темы исследования

Диссертационная работа Кулешова Александра Сергеевича посвящена нахождению и исследованию новых интегрируемых случаев дифференциальных уравнений движения различных механических систем. Хорошо известно, что нахождение таких случаев, а также явное решение в квадратурах для этих систем, составляет одну из центральных проблем аналитической и теоретической механики, служит отправной точкой для исследований динамических систем, близких к интегрируемым, лежит в основе анализа устойчивости решений этих уравнений. С другой стороны, нахождение точных решений систем нелинейных дифференциальных уравнений, коими являются уравнения движения механических систем, важно и для смежных областей механики и математики. В частности, такие решения положены в основу изучения слоения Лиувилля фазового пространства вполне интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности особых (сингулярных) слоев, топологическая классификация с точностью до лиувиллевой эквивалентности, траекторная эквивалентность различных интегрируемых систем, изучение математических билиардов, а также многие другие задачи. Другим важным направлением исследований является нахождение условий, при выполнении которых возможно предъявить явный алгоритм решения дифференциальных уравнений, обладающих свойством полной интегрируемости, в квадратурах. В

ОТДЕЛ КОРРЕСПОНДЕНЦИИ
И КОНТРОЛЯ ИСПОЛНЕНИЯ
ДОКУМЕНТОВ МАИ

«23» 01 2026 г.

этом направлении стоит упомянуть теорему Якоби-Эйлера об интегрируемости систем n уравнений с набором из $(n - 2)$ независимых первых интегралов и обладающую инвариантной мерой. Но даже проинтегрированные в квадратурах уравнения часто требуют значительных усилий для нахождения явного решения. Примером, когда удастся продвинуться в этом направлении является появившийся в самом конце прошлого века алгоритм Ковачича. Он, в частности, дает ответ и на вопрос об отсутствии решений в определенном классе функций, что также представляет самостоятельный интерес. Диссертационная работа Кулешова А.С. в силу вышеуказанных причин бесспорно обладает актуальностью.

Общая характеристика диссертационной работы по главам

Диссертация А.С. Кулешова состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованной литературы, содержащего 204 наименования. Общий объем диссертации составляет 356 страниц.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационного исследования, а также научная новизна работы. Дан подробный литературный обзор современного состояния исследований в рассматриваемой предметной области. Сформулирована цель работы и описаны задачи, исследуемые в диссертации.

Первая глава диссертации посвящена обсуждению теоретических основ алгоритма Ковачича. Представлено полное описание самого алгоритма, а также дано обоснование, как с помощью алгоритма находятся лиувиллевы решения линейного дифференциального уравнения второго порядка. Даны определения лиувиллевых решений, а также сформулированы теоремы, принадлежащие Дж. Ковачичу, в которых указаны условия существования решений исследуемых уравнений в классе лиувиллевых функций, а также дан алгоритм их явного нахождения. В частности, исследуются аналитические свойства указанной в теореме функции комплексного переменного z , в зависимости, от типа особенности этой функции перечислены алгоритмы нахождения явного решения специального вида, а также приведен случай отсутствия решения в виде алгоритмически проверяемого условия. В дальнейшем, в главах со второй по пятую, приведенные первой главе результаты Дж. Ковачича используются для исследования ряда задач классической механики, в которых удастся получить существенно новые результаты.

Во второй главе диссертации рассматривается задача о качении без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, ось симметрии которой совпадает с осью динамической симметрии тела. В данной главе показано, что решение задачи о качении тяжелого тела вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости приводится к

нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка специального вида. Получено обобщение классических результатов Муштари, а именно, получено семейство поверхностей, удовлетворяющих так называемому условию Муштари. Два случая, указанные в первоначальной работе Х.М. Муштари, входят в представленное в диссертации семейство как частные случаи. Далее во второй главе с помощью алгоритма Ковачича исследуются на интегрируемость задачи качения для поверхностей из вышеупомянутого семейства, представленные в явном виде.

В третьей главе работы рассматривается другая классическая задача механики — задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса. В данном случае уравнения Эйлера-Пуассона допускают в частном случае четвертый интеграл (интеграл Гесса), с учетом которого уравнения движения в некоторых переменных может быть сведено к уравнению Рикатти, из которого можно получить уравнение второго порядка с рациональными коэффициентами. Применение алгоритма Ковачича дает ответ на вопрос о существовании лиувиллевых решений в задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса. В диссертации сформулирована и доказана соответствующая теорема.

В четвертой главе диссертации рассматривается классическая задача о качении тяжелого однородного шара по абсолютно шероховатой поверхности вращения. Далее задача о качении шара по неподвижной выпуклой поверхности под действием силы тяжести, в предположении, что центр масс шара движется по заданной поверхности вращения, сводится к интегрированию уравнения второго порядка, также исследуемого с помощью алгоритма Ковачича. Получены теоремы, в которых доказано, что задача о качении шара по поверхности такой, что при качении центр шара движется по невырожденной поверхности второго порядка, по поверхности, образованной вращением арки циклоиды вокруг её оси симметрии, по поверхности тора, по поверхности Бельтрами, является интегрируемой в лиувиллевых функциях (в случае тора в функциях Гойна). Далее доказана теорема, в которой решение задачи о качении шара по поверхности такой, что при качении центр шара принадлежит поверхности катеноида вращения, выражается с помощью функций Лежандра., является интегрируемой в лиувиллевых функциях. работы

В пятой главе диссертации рассмотрена задача о качении тела вращения по поверхности сферы. Предполагается, что приложенные к твердому телу силы имеют равнодействующую, приложенную к центру масс тела, направленную к центру опорной сферы, и зависящую только от расстояния между этими точками. После введения специально выбранных координат, задача вновь может исследована на интегрируемость в лиувиллевых функциях с применением алгоритма Ковачича к возникающему линейному дифференциальному уравнению, что приводит к следующему результату: задача о качении

неоднородного динамически симметричного шара по сфере под действием потенциальных сил с потенциалом специального вида, интегрируется в лиувиллевых функциях.

В заключении диссертационной работы приведены основные результаты и выводы выполненного исследования.

Научная новизна результатов

Все включённые в диссертацию результаты являются новыми. В работах соискателя с соавторами (которые в основном являются учениками соискателя) исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в задаче о качении тела вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости и абсолютно шероховатой сфере. Исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в задаче о качении тяжелого однородного шара по неподвижной абсолютно шероховатой поверхности вращения. Также исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений в интегрируемом случае Гесса задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

Достоверность и обоснованность

Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе Кулешова А.С., а также достоверность всех положений, выносимых на защиту, обоснована при помощи строгих математических методов. Все вычисления, проведённые в работе, проходили повторную проверку с помощью комплекса символьных вычислений MAPLE 7.

Теоретическая значимость результатов

Проведённые в диссертации Кулешова А.С. исследования позволили получить условия, при выполнении которых некоторые задачи динамики твердого тела интегрируются в явном виде. Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут применяться при проведении исследований в Московском физико-техническом институте (Национальном исследовательском университете), Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете), Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН и других научно-исследовательских организациях, занимающихся исследованием классических задач динамики твердого тела.

Практическая значимость результатов работы

Практическая значимость результатов работы состоит в том, что результаты, полученные в данной диссертационной работе, могут быть использованы при решении прикладных задач динамики твердого тела, в

частности построения систем ориентации, стабилизации, управления движения современных мобильных устройств.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 44 печатных работы. Из них 1 монография, 22 работы в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК, либо международной системе цитирования Web of Science, Scopus или RSCI, 21 работа в рецензируемых трудах международных и российских конференций и других изданиях. Результаты проведенного исследования докладывались автором диссертационной работы на научных семинарах, российских и международных конференциях.

Автореферат полностью и точно отражает содержание диссертации. Диссертационное исследование полностью соответствует паспорту научной специальности 1.1.7. — Теоретическая механика, динамика машин.

Замечания по диссертационной работе

К диссертационной работе имеются следующие замечания:

1. Приведенные в Главе 1 сведения из дифференциальной теории Галуа в некоторых случаях не содержат доказательств в тексте диссертации, например, теорема 2.2, стр. 36, лемма 2.1, стр. 37. То же относится к обоснованию алгоритма Ковачича теорема 2.3, стр. 40 и Случая 3, см. стр. 77, что делает текст диссертации незамкнутым и требует обращения к оригинальным работам, иногда содержащим отличные от текста диссертации обозначения.
2. На стр. 100 указано, что уравнения движения (5.12)-(5.13), выражающие законы изменения импульса и кинетического момента относительно системы координат, жестко связанных с твердым телом, тогда как данные уравнения являются теоремами об изменении количества движения и кинетического момента в инерциальной системе отсчета, спроецированные на оси системы координат, жестко связанной с твердым телом. Полученные уравнения абсолютно верны, что делает данное замечание терминологическим.
3. На рисунке 6, стр. 113 следовало выбрать параметры тора или ориентацию осей относительно плоскости чертежа, удобными для визуального восприятия, как, например, на рисунке 10, стр. 132.
4. Было бы желательным указать на связь полученных решений в лиувиллевых функциях с известными решениями, представленными в виде функций Бейкера-Ахиезера.
5. Данные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы, которая выполнена на высоком научном уровне и содержит новые и значимые научные результаты.

Заключение

Диссертация Кулешова Александра Сергеевича является законченной научно-исследовательской работой, которая посвящена актуальной научной проблеме. Достоверность выводов, полученных автором, не вызывает сомнений, все результаты диссертационной работы многократно апробированы. Все результаты, изложенные в тексте диссертации, опубликованы в рецензируемых научных журналах.

Диссертационная работа Кулешова Александра Сергеевича «Точные решения некоторых задач динамики твердого тела» отвечает всем требованиям Постановления Правительства РФ от 24.09.2013 N. 842 «О порядке присуждения ученых степеней», а её автор Кулешов Александр Сергеевич заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.7. — Теоретическая механика, динамика машин.

Отзыв на диссертацию обсуждён и одобрен на расширенном заседании научного семинара кафедры теоретической механики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», «17» декабря 2025 г., протокол № 5.

Заведующий кафедрой
теоретической механики,
доктор физ.-мат. наук,



Соколов Сергей Викторович

Почтовый адрес: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9.

Телефон: 8 (495) 408 78 66

Адрес электронной почты: sokolov.sv@mipt.ru

Организация - место работы: федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», кафедра теоретической механики

Должность: заведующий кафедрой

Web-сайт организации: <https://mipt.ru>

С отзывом ознакомлен

23.01.2026

Кулешов (А.С. Кулешов)