

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
**«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»**

На правах рукописи

Березко Максим Эдуардович



**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИСТЕНОЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ
В РАСШИРЕННОМ КНУДСЕНОВСКОМ СЛОЕ**

Специальность: 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, старший научный сотрудник
Никитченко Юрий Алексеевич

Москва – 2022 год

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. Сшивание моментных уравнений с кинетическим уравнением.....	20
1.1. Общий метод сшивания моментных уравнений с кинетическим уравнением.....	20
1.2. Сшивание системы моментных уравнений неполного второго порядка с кинетическим уравнением.....	21
1.3. Численная реализация комбинированной модели КИН_НСФ	29
1.4. Результаты расчётов модели КИН_НСФ.....	37
1.5. Сшивание системы моментных уравнений третьего порядка МЗ с кинетическим уравнением.....	43
1.6. Численная реализация комбинированной модели КИН_МЗ	44
1.7. Результаты расчётов модели КИН_МЗ.....	47
1.8. Выводы к Главе 1	55
ГЛАВА 2. Выбор граничных условий для течений высокой степени неравновесности	56
2.1. Общие замечания	56
2.2. Модели течений и граничные условия	57
2.3. Результаты численных расчётов.....	60
2.4. Выводы к Главе 2	66
ГЛАВА 3. Расчёт гиперзвукового течения в окрестности поверхности большой кривизны	68
3.1. Постановка задачи	68
3.2. Численная реализация задачи.....	73
3.3. Результаты расчётов	79
3.4. Выводы к Главе 3	85

ЗАКЛЮЧЕНИЕ	87
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	90
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	99

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы.

В настоящее время одной из актуальных задач современной механики газов и плазмы является описание сверх- и гиперзвуковых течений с высокими числами Маха и Кнудсена. В этой области течения имеют место процессы, которые характеризуются высокой динамической неравновесностью, обусловленной высокими градиентами параметров течения и малым временем протекания этих процессов. Количественная оценка степени неравновесности приведена далее в настоящей работе.

В неравновесной газовой среде энергия неравномерно распределена между степенями свободы молекул, как поступательными, так и внутренними, и использование методов модели сплошной среды приводит к существенным количественным, а в отдельных случаях и качественным погрешностям.

Физически адекватно описать неравновесное течение позволяют кинетические модели, описывающие течение на молекулярном уровне, но кинетический расчёт поля течения слишком неэкономичен в смысле количества вычислительных операций.

Повысить скорость вычисления помогают комбинированные кинетико-гидродинамические модели, которые используют кинетические модели только в областях, в которых важно учитывать микроскопические эффекты (неравновесные области). В остальной области, для экономии вычислительных ресурсов и ускорения вычислений, используются менее информативные гидродинамические модели.

Степень разработанности темы.

Изучение неравновесных течений является довольно сложной задачей для учёных и инженеров. Потребность в решении задач, в которых в том или ином виде проявляется неравновесность газового потока, появилась в начале 50-х годов, в связи с быстрым развитием авиационно-космической техники, микроэлектроники, вакуумных технологий и т.п. Обычно, при выборе подхода к

решению задачи неравновесной газовой динамики, выбирают элементарный объект, относительно которого будет решаться задача. Это в свою очередь создаёт некоторую «иерархию» уровней газодинамического описания, отличающиеся полнотой информации о состоянии газовой среды.

Исчерпывающей информативностью обладают методы, основанные на статистических подходах [1-5], которые более известны под названием – методы Монте-Карло или методы прямого статистического моделирования (DirectsimulationMonteCarlo–DSMC). На этом уровне описания минимизированы упрощения и допущения моделей, что даёт физически адекватные результаты, соответствующие реальным физическим процессам. Однако, модели этого уровня чрезвычайно трудоёмки, в плане численной реализации и требует огромного количества вычислительных ресурсов.

Вышесказанное накладывает определённые ограничения на использование данных моделей при решении практических задач. Например, рассмотрение полного статистического ансамбля технически невозможно даже на современных суперкомпьютерах, поэтому в расчётах используются сокращённые ансамбли, с последующим распространением на полный ансамбль с определёнными допущениями.

Граничные условия на поверхности, взаимодействующей с газом, записываются с учётом межмолекулярных процессов взаимодействия в адсорбированных слоях. Принципиальных ограничений по числам Маха и числам Кнудсена, такие модели не имеют. Также стоит отметить, результаты, полученные с помощью статистических моделей, часто используют в качестве эталонных для многих модельных задач.

Следующий, менее информативный уровень описания, кинетический, имеющий в своей основе методы молекулярно-кинетической теории газов– МКТ. Для данного уровня элементарным объектом принимается группа молекул, объединённых каким-то газодинамическим параметром, например, скоростью. Баланс количества молекул, входящих в эту группу, описывается с помощью одночастичной функции распределения. Эволюция самой же функции

распределения во времени, геометрическом и скоростном пространствах, описывается уравнением Больцмана [6].

Математическая сложность интеграла столкновений, входящего в правую часть уравнения Больцмана, привела к необходимости использования на практике упрощённых «модельных» кинетических уравнений. На практике широко распространена модель Бхатнагара-Гросса-Крука (БГК-модель)[7, 8], в которой интеграл столкновений заменён отношением разности равновесной и неравновесной функций распределения к времени релаксации неравновесной функции распределения. Недостатком БГК-модели является неверное значение числа Прандтля для газа, строго равное единице (для одноатомного газа корректное число Прандтля равно $2/3$ [9]).

Правильное значение числа Прандтля удаётся получить в S-модели, которая была разработана Шаховым[10]. Данная модель получена путём разложения интеграла столкновений по полиномам Эрмита до третьего порядка. S-модель широко используется при решении задач [11, 12] и результаты, полученные с её помощью, хорошо согласуются с результатами DSMC. Однако для этой модели не удаётся всюду сохранить положительной функцию распределения, что является весомым недостатком, т.к. не удаётся доказать H-теорему для такого случая.

Сохранить положительность функции распределения удаётся для эллипсоидальной модели (ES)[13], которая обладает основными свойствами интеграла столкновений. Однако данная модель показывает меньшее время релаксации для тепловых потоков, чем для напряжений, что ставит под сомнение физическую адекватность данной модели. Также, по сравнению с S-моделью, ES-модель существенно сложнее для численной реализации и требует больших вычислительных ресурсов, что ограничило использование данной модели на практике.

Приведённые выше модели, в частности S-модель, применимы для расчёта параметров одноатомного газа. Оценка точности различных модельных кинетических уравнений одноатомных газов приведена в работе [14]

Одними из первых модельных кинетических уравнений для многоатомных газов были разработаны в [15]. На практике широко используется R-модель [16-18]. В настоящее время насчитывается большое количество разработанных модельных кинетических уравнений многоатомных газов [19-24]. Общей особенностью модельных кинетических уравнений многоатомных газов является использование определённого вида взаимодействия между газовыми молекулами. В настоящей работе, в качестве кинетической модели, будет использоваться модельное кинетическое уравнение многоатомных газов [24]. Эта модель даёт результаты близкие к результатам R-модели, однако является более экономичной за счёт некоторых допущений, не влияющих на качество разработанной модели.

Кинетические модели также достаточно информативны для задач газодинамики. Возможность их численной реализации гораздо проще по сравнению с численной реализацией статистических моделей, что привело к их широкому распространению для решения практических задач. Для постановки граничных условий на границе раздела фаз в кинетических моделях используется функция распределения того или иного вида для отражённых молекул. Такая постановка граничных условий позволяет учесть межмолекулярные процессы взаимодействия между газом и обтекаемой поверхностью.

Следующий уровень описания основывается на методах сплошной среды и формально его можно назвать гидродинамическим. Этот уровень описания теоретически обоснован лишь для достаточно малых чисел Кнудсена. Элементарным объектом этого уровня является «жидкая частица». Для такой гипотетической «жидкой частицы» записываются законы сохранения массы, импульса и энергии, которые образуют систему дифференциальных уравнений более известную как модель Эйлера. Для плотных газов число Kn стремится к нулю и их состояние близко к локально-равновесному и в таких случаях обычно используют методы сплошной среды, которые теоретически обоснованы в этой области. Для несжимаемых, невязких и плотных газов достаточно информативной можно считать модель Эйлера. Для сжимаемого, вязкого и теплопроводного газа модель Эйлера дополняется реологическим законом Ньютона (закон трения

Стокса) и законом теплопроводности Фурье, что в сумме является системой Навье-Стокса-Фурье (НСФ).

В середине прошлого века была сконструирована общая теория модели сплошной среды [25], которая, стоит заметить, не сыскала популярности при решении газодинамических задач.

Граничные условия на твёрдой поверхности для модели Эйлера вытекают из самой постановки задачи, то есть предполагается отсутствие трения и тепловых потоков. Для модели НСФ на границе раздела фаз устанавливаются граничные условия прилипания (скорость газа на твёрдой поверхности принимается равной нулю), которые хорошо согласуются с физическими процессами взаимодействия газ-поверхность.

Для низкорейнольдсовых течений исчерпывающей информативностью обладает модель НСФ, которая используются для широкого спектра практических задач. При достаточно высоких числах Рейнольдса ($\sim 10^5$) весомый вклад в основные газодинамические параметры вносят турбулентные эффекты, для описания которых вводят специальные модели турбулентности, например [26-28]. В настоящей работе, ввиду оперирования с достаточно низкими числами Рейнольдса, модели турбулентности рассматриваться не будут.

Для неравновесных течений и течений с умеренными и большими характерными числами Кнудсена (Kn^*) физико-математические модели сплошной среды перестают адекватно описывать процессы, происходящие в газовом потоке. Под характерным числом Кнудсена будем понимать критерий подобия рассчитанный относительно характерного размера в решаемой задаче. Этот критерий подобия может служить индикатором неравновесности даже в достаточно плотных газах, для которых число Кнудсена мало. В настоящей работе, в качестве тестовых задач, будут использоваться задачи обтекания бесконечно острой кромки и течение Куэтта. В такого рода задачах характерное число Кнудсена может быть достаточно велико по сравнению с общим числом Кнудсена из-за малости характерного размера задач (радиус скругления острой кромки и величина зазора между поверхностями).

В неравновесных газовых потоках начинает проявляться ограниченная информативность моделей газодинамического приближения. Линейная связь тензора напряжений и скоростей деформации, пропорциональность теплового потока градиенту температур, является достаточно грубым приближением. Также стоит отметить пренебрежение коэффициентом объёмной вязкости при решении практических задач моделью НСФ[29]. Правильный учёт объёмной вязкости необходим уже в слабонеравновесных течениях, что показано в работе [30].

В качестве граничных условий на границе газ-поверхность устанавливаются условия скольжения скорости и скачка температуры [31]. Такие граничные условия хорошо описывают взаимодействие газа с поверхностью даже в сильнонеравновесных течениях[32].

Также существуют модели описания газодинамических параметров на границе гидродинамического и кинетического уровней, называемые моментными моделями. Эти модели конструируются путём подстановки аппроксимирующей функции распределения специального вида в уравнение Больцмана. Существует множество методов построения моментных уравнений, например метод Грэда [33], Чепмена-Энскога [34, 35], Гильберта [31] и более поздние методы, например [36]. Получаемые модели обладают информацией о молекулярных процессах в газе, но, в то же время, лишены избыточной информативности кинетического уровня, что позволяет высказаться о вычислительной экономичности, в смысле численной реализации таких моделей на ЭВМ.

Во многих практических задачах газодинамики, течение можно считать равновесным в доминирующей части вычислительной области, за исключением небольших зон, для которых важно учесть микроскопические эффекты. К таким зонам можно отнести ударные волны, область в окрестности поверхностей большой кривизны, пристеночные течения и т.д. При таком условном разбиении вычислительной области можно использовать экономичные гидродинамические модели везде, где это возможно и ограничить использование более информативных моделей (например, кинетических) только в областях, которые требуют учёта молекулярных процессов в газе. Эта идея легла в основу создания

гибридных (комбинированных) моделей, в которых гидродинамические модели сшиваются с моделями более старшего уровня (в основном с моделями кинетического уровня).

Одним из первых методов сшивания моделей было предложено в [37]. Он был заключён в изменение интервала действия гидродинамической модели рядом с границами, используя анализ пограничного слоя. Этот метод даёт хорошие результаты в линеаризованном переносе с диффузионным пределом [38, 39], но он становится недостаточно эффективным в кинетическом/гидродинамическом случае.

В последние годы, были опубликован ряд исследований, посвящённых сшиванию кинетического уравнения Больцмана с системой уравнений Эйлера, либо Навье-Стокса для решений проблем аэродинамики спускаемых космических летательных аппаратов в атмосферу. В работе [40] найдены граничные условия для гидродинамических уравнений путём численного решения кинетического уравнения в пограничном слое («сшивание по трению»). В [41, 42] разработано сшивание приближением области разложения. Похожие методы были предложены в [43, 44]. Общей чертой этих методов является то, что в них используются методы декомпозиции области и, затем, в получившихся подобластях, решаются гидродинамическая и кинетическая модели. Передача информации определяется через заданные граничные условия на интерфейсе между подобластями. Эти условия используют сплошнородные моменты или потоки через интерфейс [41, 42], кинетическое представление гидродинамических потоков [43, 44] или анализ пограничного слоя [45, 46]. Математический анализ этих методов приведён в работах [47, 48].

Наиболее современный способ сшивания моделей предложен в [49]. Предлагается для каждой ячейки вычислительной области может быть рассмотрено кинетическое или гидродинамическое уравнение, используя некоторый физический критерий. Этот критерий должен определять, развивается ли функция распределения в ячейке из-за случайного процесса столкновения или же она проецируется в гидродинамическое равновесие. Однако такой подход

очень затратный в плане вычислительных ресурсов, так как он использует большое количество степеней свободы для кинетических ячеек.

Другой подход, предложенный в [50], осуществляет разложение расчётной области на гидродинамическую и кинетическую, по средствам искусственной функции переноса уравнений. Это осуществлено введением буферной зоны около интерфейса, и искусственная функция переноса плавно меняет своё значение от 1 в кинетической области до 0 в гидродинамической области. Этот метод довольно прост в использовании и хорошо работает для линейных случаев. В дальнейшем этот метод был развит для применения в нелинейных случаях для сшивания кинетической и гидродинамической моделей [51]. В частности, этот метод используется для сшивания уравнения Больцмана с уравнениями Эйлера или Навье-Стокса.

В приведённых выше работах в качестве кинетической модели используется БГК-модель. Её недостатком, как было отмечено ранее, является неверная оценка числа Прандтля, которое в этой модели строго равно единице. Это является причиной того, что эта модель даёт хорошую точность лишь в задачах, в которых имеют место только процессы, обусловленные вязкостью, либо обусловленные теплопроводностью, но не их совместное явление. Этот недостаток БГК-модели ведёт к излому функции в области сшивания модели, что хорошо видно в работе [51].

Использование S-модели вместо БГК-модели для кинетической области сшитой модели, помогает устранить излом функции в области сшивания, так как в ней учитывается реальное число Прандтля, что показано в работе [52]. Также S-модель даёт правильные выражения для тензора напряжений и вектора теплового потока при переходе к гидродинамической области. Недостатком же, как было указано выше, является возможность использования такой модели лишь для одноатомных газов.

В настоящей работе будет использоваться метод сшивания разработанный в [53]. Её суть заключается в использовании в расширенном кнудсеновском слое модельного кинетического уравнения многоатомных газов, а в остальной

расчётной области – гидродинамической модели НСФ. В области сшивания моделей восстанавливается аппроксимирующая функция распределения, которая представляет собой разложение локально-равновесной функции Максвелла по степеням тепловой скорости. В такой постановке неравновесные напряжения и тепловые потоки определяются в приближении модели НСФ. Такой подход позволил исправить недостатки представленных выше методов, что позволило получить удовлетворительную точность описания параметров газа на широком интервале чисел Маха и Кнудсена.

Характерное число Кнудсена может быть достаточно велико в случае обтекания газом поверхности большой кривизны. Окрестность поверхности большой кривизны представляет собой высокоградиентную область, характерным размером которой является расширенный кнудсеновский слой. Такие задачи часто возникают на практике, например задача гиперзвукового обтекания потоком газа острого клина. Эта задача в настоящее время является весьма актуальной, в связи с быстрым развитием гиперзвуковых транспортных систем и правильный расчёт напряжений и тепловых потоков, прямо влияет на ресурс таких систем. Области применения той или иной модели для решения задачи об обтекании гиперзвуковым потоком газа острого клина иллюстративно представлены на Рисунке 1.

Гидродинамическая модель НСФ для описания гиперзвуковых течений идеального газа рассматривалась в работах [97-99]. Довольно часто для расчёта неравновесных течений используют гидродинамическую модель НСФ. Например, в работах [100-103] показано, что при низких и средних числах Рейнольдса гидродинамическая модель оказывается весьма неточной для расчёта гиперзвуковых течений. Физически адекватное описание процессов требует применение методов молекулярно-кинетической теории газов, описывающие течение на молекулярном уровне.

При численном решении такого рода задачи, для экономии вычислительных ресурсов и времени, острый клин заменяют бесконечно тонкой пластинкой. Согласно работе [54] угол отклонения нижней поверхности практически не

влияет на газодинамические параметры на верхней поверхности вплоть до угла $\approx 40^\circ$ при числе Маха $M \approx 10$. Этот факт позволяет сделать такое упрощение при решении задач.

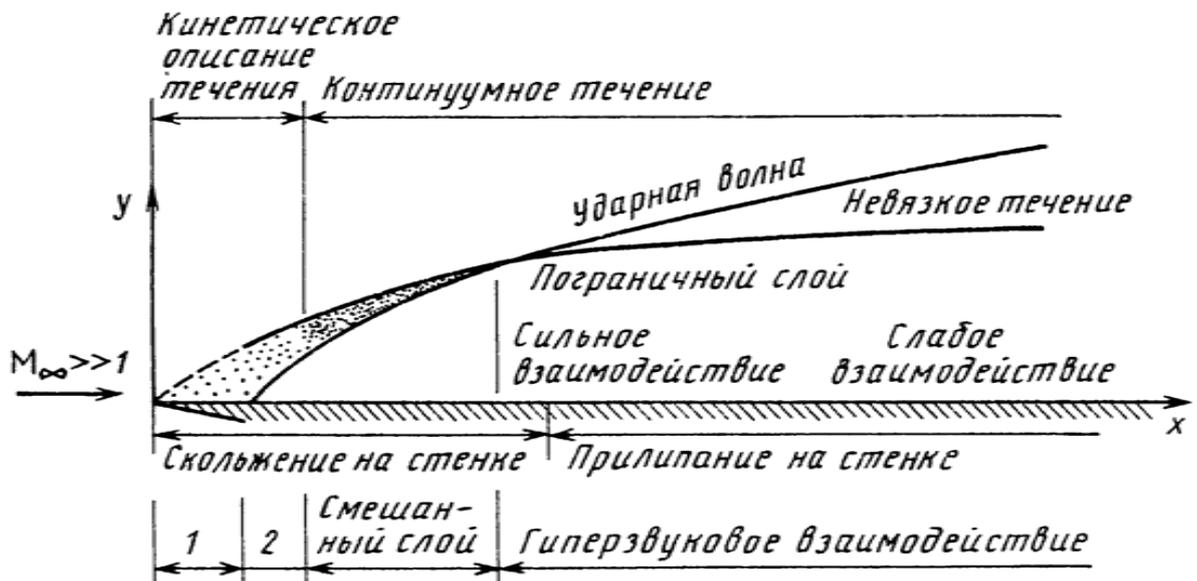


Рисунок 1. Режимы течений при гиперзвуковом обтекании острогочлина гиперзвуковым потоком газа. 1 – почти свободномолекулярное обтекание, 2 – переходной режим обтекания;

Бесконечно тонкая пластина – теоретический объект, существование которого в реальности невозможно, однако численные исследования тонкой пластины помогают спроецировать методы, полученные при таком подходе, на реальные объекты, например, на острые кромки носовых частей летательных аппаратов или воздухозаборников.

Применение как гидродинамических, так и кинетических моделей, для описания бесконечно тонкой пластины имеет свои особенности. В такой постановке между бесконечно острой пластинкой и газовой средой существует особая точка. В области порядка кнудсеновского слоя в пространстве скоростей фазового пространства кинетического уравнения, в этой точке имеет место возникновение поверхности разрыва функции распределения. Эта поверхность разделяет молекулярные потоки, сформированные в газовой среде и на поверхности обтекаемого тела. Таким образом, в одной точке геометрического пространства существуют два вида молекулярных потоков, имеющие разные статистики, т.е. функции распределения молекул по скоростям.

Такая особая точка является своего рода препятствием не только для гидродинамических, но и для кинетических моделей, если последние решаются в форме дифференциально-интегрального уравнения с использованием вычислительных схем дифференциальных уравнений. Это связано с указанным выше наличием разрыва газодинамических параметров в особой точке. Стоит уточнить – данное утверждение относится лишь к теоретической постановке задачи, так как особая точка является математическим объектом и в реальных условиях такой особой точки не существует.

Задача обтекания тонкой пластины гиперзвуковым потоком решалась многими авторами. Существуют работы на основе как аналитических методов [55-59, 94], так и на численных методов [23, 60-64, 93, 95, 96]. Во многих работах граница невозмущенного набегающего потока устанавливалась на носике пластины [60], и, соответственно, в них отсутствовала информация о торможении потока перед носиком. В других работах, область перед носиком рассматривалась [61], но анализ проводился лишь для усредненных газодинамических параметров, например для таких как давление, которое является свертком тензора напряжений.

В связи с актуальностью расчётов течений, для которых критически важным является физически адекватное описание процессов, происходящих в областях, сравнимых с размерами расширенного кнудсеновского слоя, количество исследований достаточно велико и вышеприведённый обзор источников является далеко не полным.

На основе приведённого литературного обзора можно сформулировать цель и основные задачи настоящей работы.

Цель работы– Создание эффективных методов расчёта высоконеравновесных течений.

Основные задачи работы.

- Разработка эффективных методов сшивания кинетической и гидродинамической моделей.

- Изучение различных моделей гидродинамического приближения и типа граничных условий для выбора наиболее точных и экономичных,
- Разработка физически адекватной дискретизации пространства в окрестности поверхностей большой кривизны

Объект исследования – течения высокой степени динамической неравновесности.

Предмет исследования – физико-математические модели неравновесных течений однокомпонентных газов.

Методология и методы исследования.

В работе применялся аналитический метод исследования. Для изучения свойств полученной гибридной модели использовался метод численного эксперимента. В численных экспериментах рассматривались вырожденные течения: плоское течение Куэтта, обтекание тонкой пластины гиперзвуковым потоком.

Научная новизна работы.

- Предложен метод описания высоко неравновесных течений в пристеночных областях, описывающий взаимодействие газа с поверхностью на молекулярном уровне.

- Показано, что в качестве гидродинамической составляющей кинетико-гидродинамических моделей целесообразно использовать модель Навье-Стокса-Фурье.

- Разработан метод решения модельного кинетического уравнения в окрестности абсолютно острой кромки, позволяющий учитывать разрывы пространства скоростей в расширенном кнудсеновском слое.

На защиту выносятся:

- Физико-математическая модель течения в пристеночной области.
- Метод решения модельного кинетического уравнения в окрестности поверхности большой кривизны.

- Интервалы применимости по числам Маха и Кнудсена граничных условий прилипания и граничных условий скольжения погранслоя на твердой поверхности.

На защиту, также выносятся положения:

- В качестве гидродинамической составляющей кинетико-гидродинамической модели целесообразно использовать систему моментных уравнений неполного второго порядка (модель Навье-Стокса-Фурье). В области пристеночных течений повышение порядка системы моментных уравнений не приводит к повышению точности модели.

- В особой точке, разделяющей газовую среду и острую кромку, газодинамические параметры претерпевают разрыв второго рода, причем значения параметра в самой особой точке выходит за границы интервала, ограниченного значениями параметра в окрестностях этой точки.

Научная и практическая значимость работы.

Научная ценность работы:

- изучены основные свойства кинетико-гидродинамической модели применительно к пристеночным течениям;

- получено численное решение задачи обтекания поверхности большой кривизны.

Практическая значимость работы заключается в возможности разработки вычислительных ядер CFD-пакетов, ориентированных на расчеты высокоскоростных и разреженных течений.

Достоверность результатов исследования подтверждена сравнением полученных расчетных данных с данными экспериментальных исследований разных авторов.

Апробация и внедрение результатов.

Материалы работы докладывались:

- Гагаринские чтения – 2017: XLII Международная молодёжная научная конференция. Доклад «Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта»

- 18-я международная конференция «Авиация и космонавтика – 2019». Доклад «Сравнение комбинированных кинетическо-гидродинамических моделей различных порядков на примере течения Куэтта»

- 19-я международная конференция «Авиация и космонавтика – 2020». Доклад «Методика построения расчётных сеток с выделением поверхности разрыва для решения кинетических уравнений»

- XXII международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. Доклад «Метод решения модельного кинетического уравнения в окрестности абсолютно острой кромки обтекаемого тела

Результаты работы использованы в учебном процессе МАИ:

- в курсе «Динамика неравновесных сред», читаемом студентам специальности 24.03.03

- в курсе «Современные модели неравновесных течений», читаемом аспирантам специальности 05.07.01.

Зарегистрированы программные продукты:

- «Программа расчёта газодинамических параметров в течении Куэтта с использованием кинетико-гидродинамической модели», свидетельство о регистрации №2021667827

- «Программа расчёта гиперзвукового обтекания тонкой пластины, установленной параллельно потоку», свидетельство о регистрации №2022612341

Публикации.

Статьи в журналах из списка ВАК:

- Березко М. Э., Никитченко Ю. А., Тихоновец А. В. Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта // Труды МАИ, 2017, №94

- Березко М. Э., Никитченко Ю. А. Сравнение комбинированных кинетическо-гидродинамических моделей различных порядков на примере течения Куэтта // Труды МАИ, 2020, №110

- Березко М. Э., Никитченко Ю. А. Численное решение задачи гиперзвукового обтекания тонкой пластины // МЖГ №2. – 2022. – с.87-95

- Березко М. Э. Влияние выбора граничных условий на результаты расчёта пристеночных течений // Труды МАИ, 2022, №122

Тезисы докладов:

- Березко М.Э., Тихоновец А.В. Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта. // Гагаринские чтения – 2017: XLIII Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов. – М.; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2017. – 1479 с.

- Березко М.Э. Сравнение комбинированных кинетическо-гидродинамических моделей различных порядков на примере течения Куэтта. // Материалы 18-ой международной конференции «Авиация и космонавтика – 2019». - Тезисы. – Москва МАИ. - 2019. – с. 181

- Березко М.Э. Методика построения расчётных сеток с выделением поверхности разрыва для решения кинетических уравнений. // Материалы 19-ой международной конференции «Авиация и космонавтика – 2020». – Тезисы. – Москва. - МАИ. - 2020. – с. 447

- Березко М.Э. Материалы XXII международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. – Тезисы. – Алушта, Крым. – 2021. – с. 318-319

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, списка сокращений и условных обозначений, трёх глав, заключения и библиографического списка. Общий объём составляет 102 страницы, включая 33 рисунка. Библиографический список содержит 104 наименования.

Представленная диссертационная работа является одним из результатов комплексной исследовательской работы в области неравновесной газовой динамики, проводимой на кафедре «Аэродинамика ЛА» МАИ. Работа выполнена

в рамках государственного задания Минобрнауки России, номер темы FSFF-2020-0013.

ГЛАВА 1. СШИВАНИЕ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ С КИНЕТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ

1.1. Общий метод сшивания моментных уравнений с кинетическим уравнением

Методика сшивания моментных уравнений с кинетическим уравнением заключается в разделении рассматриваемой области течения на две подобласти – гидродинамическую и кинетическую. Далее будет приведен подход, предложенный в работе [53]. Кинетическая область непосредственно на границе раздела газа и обтекаемой твёрдой поверхности. Протяжённость кинетической области по нормали к твёрдой поверхности составляет несколько длин свободного пробега молекул λ , что по сути является расширенным кнудсенновским слоем. Другая подобласть, не граничащая с твёрдой поверхностью, использует гидродинамическую модель.

На границе стыка кинетической и гидродинамической области существует область сшивания этих моделей. В кинетической и гидродинамической областях комбинированной модели используются традиционные для них методы численной реализации, но в области сшивания моделей требуют специфичных методов решения.

Преобладание информативности кинетической модели над гидродинамической является известным фактом [23]. Обмен информацией в виде гидродинамических параметров ρ , u_i , T , p между кинетической моделью и гидродинамической моделью не может вызвать трудностей. Приведённые газодинамические параметры являются моментами функции распределения, которая определяется кинетической моделью.

В то же время обратный обмен информацией, между гидродинамической и кинетической моделями, встречает определённые трудности. Гидродинамические параметры, определённые в гидродинамической модели, принципиально не могут восстановить функцию распределения в неравновесном течении газа. Однако в условиях, достаточно близких к равновесным, возможны аппроксимации

функции. Гидродинамическая модель НСФ (модель первого приближения процедуры Чепмена-Энскога) теоретически обоснована для слабо неравновесных течений и этой модели соответствует функция распределения, которая носит название «навье-стоксовской» [31].

Путём расположения области сшивания моделей в слабонеравновесной области течения, появляется обоснованная возможность передачи информации от модели НСФ к кинетической модели посредством навье-стоксовской функции распределения. В таком случае модель течения газа и аппроксимирующая функция распределения будут иметь одинаковый порядок приближения. Адекватность использования модели течения для определения параметров в рассматриваемой области будет означать возможность применимости аппроксимирующей функции для передачи информации в кинетическую модель.

Оценка толщины кинетической области проводится из соображений того, что профиль скорости в пограничном слое меняет логарифмическую форму на линейную примерно на расстоянии $(1...2)\lambda$ от обтекаемой поверхности [31]. Линейный профиль скорости характерен для гидродинамической модели НСФ. Также, как показывают экспериментальные и теоретические исследования (см., например, [54, 64, 65]) размер высоконеравновесных пристеночных областей ограничен несколькими длинами свободного пробега молекулы. За пределами этих областей течение может считаться слабо неравновесным.

1.2. Сшивание системы моментных уравнений неполного второго порядка с кинетическим уравнением

Как уже указывалось выше, в качестве гидродинамической модели выбрана модель неполного второго порядка НСФ. Система имеет неполный второй порядок, так как содержит свёртки третьих моментов, то есть тепловых потоков, для которых дифференциальные уравнения записываются только в системе третьего порядка. Вывод системы этих дифференциальных уравнений и замыкающих их зависимостей приведены в работах [23, 66].

Также, в этой системе, явно выражен коэффициент объёмной вязкости. Здесь стоит остановиться подробнее: при феноменологическом выводе уравнений гидродинамики в уравнениях появляются коэффициенты переноса [80]. Одним из таких коэффициентов является коэффициент вязкости. Обобщённый закон Ньютона для газа имеет следующий вид:

$$P = 2\mu S + \left[-p - \left(\frac{2}{3}\mu - \mu' \right) \operatorname{div} V \right] E$$

Здесь:

S – тензор напряжений,

E – тензор скоростей деформаций,

V – скорость,

μ и μ' – динамическая и объёмная вязкости.

«Гипотеза Стокса» говорит о том, что в большинстве задач коэффициентом объёмной вязкости можно пренебречь [81], чему следуют многие исследователи по настоящее время. Кинетическая теория также даёт коэффициент объёмной μ' равным нулю для одноатомных газов [82]. Необходимость учёта объёмной вязкости при расчёте сильно неравновесных течений доказывается в работе [30].

В модели НСФ коэффициент объёмной вязкости предназначен для связи термодинамического давления (давления в традиционном понимании) с механическим давлением, представляющим собой треть следа тензора напряжений.

В более информативных моделях, например в кинетических или моментных, необходимость в коэффициенте объёмной вязкости отпадает, так как процессы энергообмена между поступательными и внутренними степенями свободы в таких моделях описаны явно.

Модель НСФ представлена ниже:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \end{array} \right. \quad \#(1)$$

$$p_{ij} = -\mu \frac{\partial u_*}{\partial u_*} + \delta_{ij} c_\mu \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad \#(2)$$

$$q_i = -\frac{c_p}{Pr} \mu \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad \#(3)$$

$$c_\mu = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{5 - 3\gamma}{2} h \right) \quad \#(4)$$

В этих выражениях:

ρ, u_i, T – плотность, скорость и термодинамическая температура газа;

$P_{ij} = p_{ij} + \delta_{ij} p$ – тензор напряжений, $T_{ij} = \frac{P_{ij}}{\rho R}$ – удельные напряжения;

p, p_{ij} – давление и тензор неравновесных напряжений;

q_i – вектор теплового потока;

$\mu = \mu(T^s)$ – коэффициент вязкости, – свободный параметр модели;

$h = Z \frac{(7-2s)(5-2s)}{30}$ – свободный параметр модели, имеющий смысл отношения

времени поступательно-вращательной релаксации к времени поступательно-поступательной релаксации энергии молекул, в настоящей работе принят $h = 5$, в соответствии с [1, 2]. Величина $\frac{1}{Z}$ в выражении представляет долю неупругих столкновений по отношению к общему числу столкновений молекул; s – показатель степени температуры в аппроксимации коэффициента вязкости;

c_v, c_p, γ, R – изохорная и изобарная теплоёмкости, показатель адиабаты, удельная газовая постоянная.

Условия взаимодействия газа с твёрдой поверхностью для модели НСФ формулируются как условия скольжения пограничного слоя [31]. В комбинированных моделях такие условия не требуются.

В качестве модели для кинетической области будет использоваться модельное кинетическое уравнение многоатомных газов [24]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| + \xi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| = \frac{p}{\mu} \left| \frac{f_t^+ - f_t}{f_t - f_r} \right| \#(5)$$

Здесь:

$$f_t = \int f d\varepsilon; f_r = \int \varepsilon f d\varepsilon;$$

$$f_t^+ = \frac{n}{(2\pi RT_t^+)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t^+}\right) \left(1 + \frac{\varphi_\alpha c_\alpha}{3\rho(RT_t^+)^2} \left(\frac{c^2}{5RT_t^+} - 1\right)\right);$$

$$f_r^+ = \frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} kT_r^+ f_t^+;$$

$$T_t^+ = T + \frac{5 - 3\gamma}{2} \left(1 - \frac{1}{Z}\right) (T_t - T_r); T_r^+ = T - \frac{3}{2}(\gamma - 1) \left(1 - \frac{1}{Z}\right) (T_t - T_r);$$

ξ_i – молекулярная скорость (координата пространства скоростей);

$f \equiv f(t, x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon)$ – функция распределения, фазовое пространство, которой дополнено подпространством вращательной энергии молекулы ε .

$c_i = \xi_i - u_i$ – тепловая скорость движения молекул;

Макроскопические параметры газа определяются следующими выражениями:

$$n = \int f_t d\mathbf{c}; P_{ij} = m_0 \int c_i c_j f_t d\mathbf{c}; T_t = P_{\alpha\alpha}/3\rho R; \frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} nkT_r = \int f_r d\mathbf{c};$$

$$\varphi_i = \int \frac{m_0 c^2}{2} c_i f_t d\mathbf{c};$$

в этих выражениях:

m_0 – масса молекулы,

k – постоянная Больцмана.

Для формулировки граничных условий для функции распределения на твёрдой поверхности, необходимо знать механизм взаимодействия молекул газа с этой поверхностью. Другими словами, должен быть задан закон отражения молекул (функция распределения отраженных от поверхности молекул).

Одной из наиболее популярных и давно известных функций распределения отражённых молекул является предложенная Максвеллом зеркально-диффузная функция следующего вида [Баранцев]:

$$f_r(\bar{r}_w, \bar{\xi}_r, \tau) = (1 - \alpha_\tau) f_i(\bar{r}_w, \bar{\xi}_r - 2\xi_{rn} \bar{n}, \tau) + \alpha_\tau \frac{n_r}{(2\pi RT_r)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\xi_r^2}{2RT_r}\right) \#(6)$$

здесь:

α_τ – коэффициент аккомодации тангенциального импульса;

$n_r = N_i \sqrt{\frac{2\pi}{RT_r}}$, где N_i – количество падающих молекул;

T_r – температура отражённых молекул;

f_r – функция распределения отражённых молекул;

R – газовая постоянная;

\bar{r}_w – радиус-вектор точки поверхности тела;

f_i – функция распределения падающих молекул.

Функция распределения отражённых молекул состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое в правой части уравнения (6) учитывает молекулы, которые отражаются от поверхности зеркально, а второе – диффузно.

Коэффициент α_τ , называемый коэффициентом диффузного отражения, представляет собой долю молекул, отражающихся от поверхности диффузно. Величина $(1 - \alpha_\tau)$ представляет собой долю молекул, отражающихся зеркально.

В настоящей работе, в качестве граничных условий, используется предельный случай зеркально-диффузной схемы отражения, когда все молекулы отражаются диффузно с максвелловском распределением, отвечающим температуре стенки. В этом случае $\alpha_\tau = 1$. Такие граничные условия вполне адекватно описывают физические процессы, которые протекают на шероховатых поверхностях при умеренных энергиях движения молекул (<1 эВ).

Как уже было сказано выше, для передачи информации между моделями необходимо составить аппроксимирующую функцию распределения. Для передачи информации между моделью НСФ и модельным кинетическим уравнением будет принята аппроксимирующая функция f_A , аналогичная навье-

стоксовской функции. Эта функция получена путём разложения равновесной максвелловой функции. Аналогичное разложение функции используется в ряде работ, например для одноатомных газов [52]. Для многоатомных газов интегралы этой функции распределения по пространству вращательных энергий имеют следующий вид:

$$f_{At} = f_{Mt} \left(1 + \frac{1}{p^m RT_t} \left(\frac{1}{2} p_{\alpha\beta}^m c_\alpha c_\beta + \left(\frac{c^2}{5RT_t} - 1 \right) \varphi_\alpha c_\alpha \right) \right) \#(7)$$

$$f_{Ar} = kT_r \left(\frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} f_{At} + f_{Mt} \frac{\omega_\alpha c_\alpha}{p^m RT_r} \right); \#(8)$$

$$f_{Mt} = \frac{n}{(2\pi RT_t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t}\right) \#(9)$$

Макропараметры функций f_{At}, f_{Ar} определяются в приближении модели НСФ [23]:

$$T_t = T - \frac{5 - 3\gamma}{3} \frac{h\mu}{R\rho} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}; \quad T_r = T + (\gamma - 1) \frac{h\mu}{R\rho} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}; \quad p^m = \rho RT_t;$$

;

$$p_{ij}^m = -\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \right); \quad \varphi_i = -\frac{15}{4} R\mu \frac{\partial T}{\partial x_i}; \quad \omega_i = -\left(c_v - \frac{3}{2} R \right) \mu \frac{\partial T}{\partial x_i};$$

Комбинацию модели НСФ и модельного кинетического уравнения многоатомных газов в дальнейшем для краткости будем называть КИН_НСФ. На Рисунке 2 проиллюстрирована схема расчётной области для её реализации конечно-разностным методом.

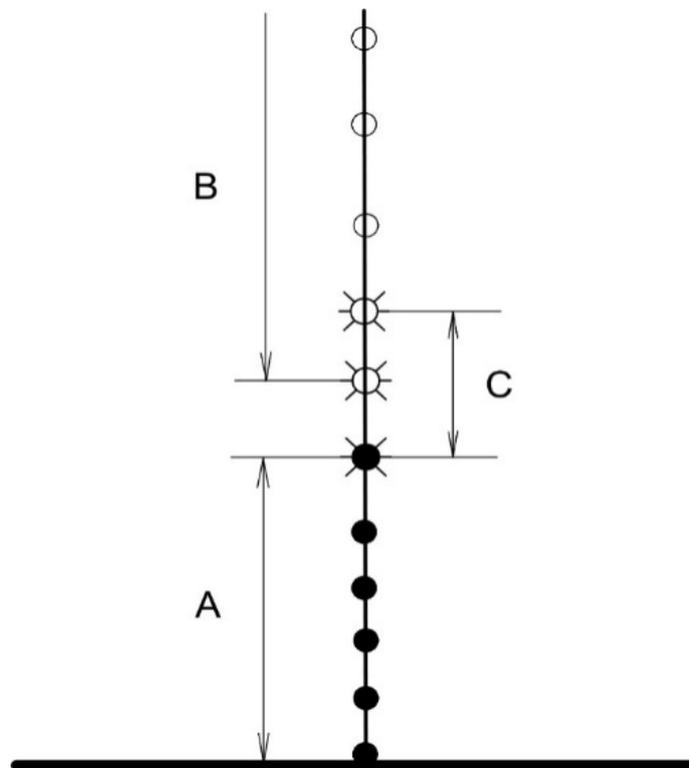


Рисунок 2. Схема расчётной области. А – кинетическая область, В – гидродинамическая область, С – область сшивания.

В узлах, которые соответствуют кинетической области (область А, чёрные точки) решается кинетическое модельное уравнение многоатомных газов (5). Гидродинамические параметры ρ, u_i, T, p , которые определяются в верхней точке кинетической области А, служат крайними значениями для гидродинамической модели НСФ. Эта модель решается в гидродинамической области (область В, незакрашенные точки). Аппроксимирующая функция распределения восстанавливается в двух верхних узлах области сшивания, которая обозначена буквой С с тремя перечёркнутыми узлами.

Количество узлов, необходимых для аппроксимирующей функции распределения, зависит от выбора шаблона конечно-разностной схемы кинетической модели. На Рисунке 2 предложена аппроксимация производной по трем точкам, для чего необходимо расположить два крайних узла. Для модели НСФ достаточно одного крайнего узла, если для решения поставлена крайняя задача, которая реализуется на ленточной трёхдиагональной матрице.

На твёрдой поверхности, обтекаемой газом, в нижнем узле кинетической области А, выставляются кинетические граничные условия в форме, которая была описана выше.

Для выполнения численных экспериментов, в качестве тестовой задачи выбрано течения Куэтта. Выбор этого течения в качестве теста, объясняется наличием множества теоретических и экспериментальных работ по данной тематике [70-79, 86-88, 91, 92].

Схема течения проиллюстрирована на Рисунке 3. Система координат связана с центральной областью течения. Бесконечные параллельные поверхности, имеющие одинаковую температуру T_w движутся в противоположных направлениях со скоростью u_w . До начала движения плотность газа и концентрация молекул имели значения ρ_0 и n_0 .

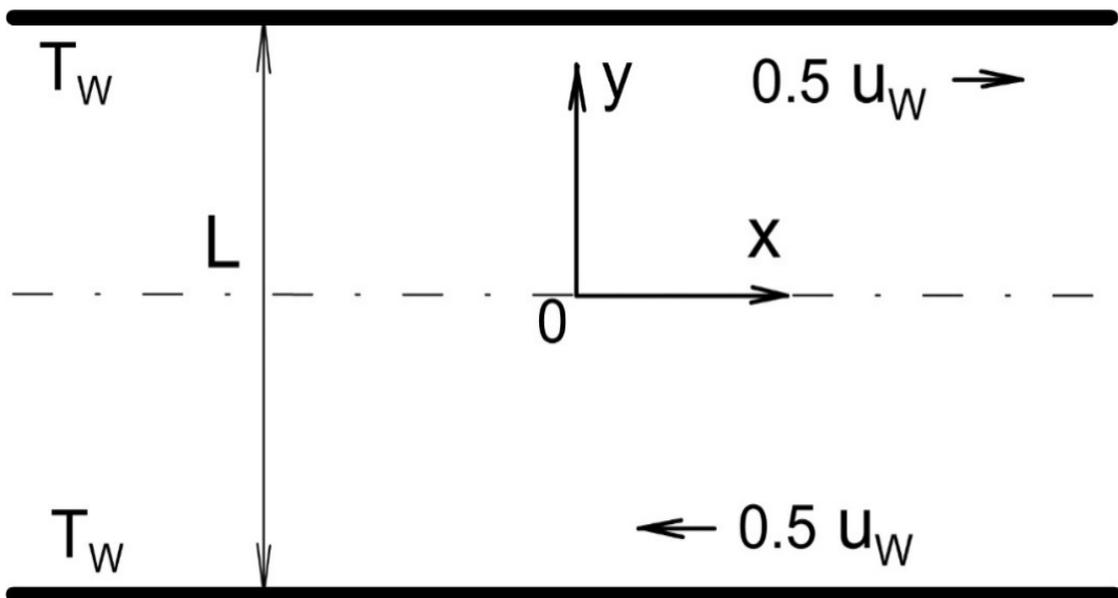


Рисунок 3. Схема течения Куэтта

Средняя длина свободного пробега молекулы в невозмущенном (неподвижном) газе определяется как:

$$\lambda_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0 \sqrt{RT_w}} \quad \#(10)$$

Число Маха и число Кнудсена определяются следующими выражениями:

$$M = \frac{u_w}{\sqrt{\gamma RT_w}}; Kn = \frac{\mu_0}{\rho_0 \sqrt{\gamma RT_w}} \frac{1}{L}$$

здесь μ_0 – коэффициент вязкости, рассчитанный по температуре стенки T_w ,
 L – величина зазора между пластинами.

Различные комбинации чисел Маха M и чисел Кнудсена Kn позволяют изучать течения различной степени неравновесности. Касательное напряжение p_{xy} может приближаться по значению к величине давления p .

1.3. Численная реализация комбинированной модели КИН_НСФ

Численная реализация комбинированной модели КИН_НСФ для задачи течения Куэтта имеет следующие особенности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \\ u_x \Big|_{y=0} = 0, \quad u_y = 0; \end{aligned}$$

В качестве исходных данных используются:

ρ_0 – плотность газа до начала движения пластин,

u_w – скорость движения пластин,

T_w – температура пластин;

С учётом этих особенностей система уравнений (1) принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} = 0 + 0 = 0 \\ \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} = 0 \\ (\gamma - 1) P_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + (\gamma - 1) \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad \#(11)$$

Здесь:

$$P_{xy} = -\mu \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad P_{yy} = p = \rho RT, \quad q_y = -\frac{9\gamma - 5}{4(\gamma - 1)} \mu R \frac{\partial T}{\partial y};$$

Для числа Прандтля Pr принята аппроксимация Эйкена: $Pr = \frac{9\gamma-5}{4\gamma}$.

Дифференциальное уравнение закона сохранения массы в данной задаче, как показано выше, сводится к тривиальному решению. Сам закон формулируется следующим образом:

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \rho dy = \frac{L}{2} \rho_0$$

Из третьего уравнения системы и определения $P_{yy} = \rho RT$ следует:

$$\rho RT = const$$

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \rho dy = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\rho RT}{RT} dy = \rho T \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dy}{T} = \frac{L}{2} \rho_0.$$

В результате получаем для определения плотности, выражающее закон сохранения массы в условиях данной задачи:

$$\rho = \frac{L}{2} \rho_0 \left(T \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dy}{T} \right)^{-1}$$

Из этого следует:

$$\rho(y) = \frac{L\rho_0}{2T(y) \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dy}{T(y)}} \#(12)$$

Значения для поля плотности рассчитывается локально с помощью алгебраического уравнения (12). В отличие от дифференциальных уравнений для определения u_x и T , уравнение (12) явно не связано с фиксированными параметрами u_w и T_w на границе расчётной области. По этой причине происходит накопление вычислительной погрешности в процессе итерационного решения системы (1) и уравнения (5).

Коррекция значений поля плотности на каждой итерации проводится соотношением (12). Скорректированное значение плотности ρ' определяется выражением:

$$\rho' = \frac{\rho}{\frac{2}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \rho dy} \cdot \#(13)$$

Эта корректировка носит приближённый характер, как как требует постоянства только средней по полю плотности. При правильном выборе схемы решения вычислительная погрешность на одной итерации имеется только в последних знаках мантиссы числа. При проведении корректировки (13) для каждой итерации её неточности практически не влияют на установившиеся значения параметров течения, которые определены моделью НСФ и кинетической моделью.

Для разрабатываемой гибридной модели влияние корректировки плотности на установившиеся решения немногим больше. Причиной этому является то, что кинетическая модель имеет большую вычислительную погрешность, чем модель НСФ. Дополнительная погрешность возникает вследствие численного интегрирования по пространству скорости в кинетической модели. Поэтому результаты корректировки (13) оказывают завышенное влияние на гидродинамическую область и заниженное на кинетическую область.

Стоит отметить, что приведённая выше корректировка плотности является следствием специфики течения Куэтта. В других задачах, например в задачах внешнего обтекания, фиксированные значения плотности (плотность невозмущённого потока ρ_∞) определены на границах вычислительной области и проблемы накопления вычислительной погрешности не возникает.

Используя вышеуказанные выражения система (11) принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{L}{2} \rho_0 \left(T \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dy}{T} \right)^{-1} \\ \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} = 0 \\ (\gamma - 1) P_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + (\gamma - 1) \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad \#(14)$$

С учётом определений P_{xy} и q_y дифференциальные уравнения системы (14) принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \\ \mu \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{4(\gamma - 1) \mu}{9\gamma - 5} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 = 0 \end{array} \right.$$

или в общей форме:

$$a \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + b \frac{\partial F}{\partial y} + cF = r \quad \#(15)$$

Параметры уравнения (15) представлены в Таблице 1:

Таблица 1. Коэффициенты уравнения (15)

F	a	b	c	r
u_x	μ	$\frac{\partial \mu}{\partial y}$	0	0
T	μ	$\frac{\partial \mu}{\partial y}$	$\frac{4(\gamma - 1) \mu}{9\gamma - 5} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2$	0

Для аппроксимации производных на дискретной сетке с постоянным шагом Δy приняты разностные шаблоны второго порядка точности:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_i = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta y}$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right|_i = \frac{F_{i-1} - 2F_i + F_{i+1}}{\Delta y^2}$$

После подстановки аппроксимаций в дифференциальные уравнения получаем трёхдиагональную матрицу следующего вида:

$$A_i F_{i-1} + B_i F_i + C_i F_{i+1} = R_i \quad (16)$$

Коэффициенты матрицы (16) представлены в Таблице 2:

Таблица 2. Коэффициенты матрицы (16)

A	B	C	R
$a - \frac{b}{2} \Delta y$	$\Delta y^2 c - 2a$	$a - \frac{b}{2} \Delta y$	$\Delta y^2 r$

В такой постановке, поставленная задача хорошо решается с помощью метода прогонки (алгоритм Томаса) [67, 68, 69].

Граничные условия для модели НСФ записываются следующим образом:

Для скорости.

$$u_x|_{y=0} = 0, u_x|_{y=\frac{L}{2}} = \frac{1}{2} u_w \text{— для граничных условий прилипания,}$$

$$u_x|_{y=\frac{L}{2}} = \frac{1}{2} u_w - 1.21 Kn \frac{\mu}{\rho \sqrt{T}} \frac{\partial u_x}{\partial y} \text{— для условий скольжения пограничного слоя.}$$

В комбинированной кинетико-гидродинамической модели значение u_w в узлах сшивания определено кинетической моделью.

Таким образом при использовании условий прилипания пограничного слоя решение матрицы сводится ко второй краевой задаче. В остальных случаях имеет место первая краевая задача.

Для температуры.

$$T(y = 0 - \Delta y) = T(y = 0 + \Delta y) \text{— условие симметрии}$$

$$T|_{y=\frac{L}{2}} = T_w \text{— для граничных условий прилипания.}$$

$$T|_{y=\frac{L}{2}} = T_w - 0.55 \frac{15}{4} Kn \frac{\mu}{\rho \sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial y} \text{— для граничных условий скольжения}$$

пограничного слоя.

В комбинированной кинетико-гидродинамической модели значение температуры в узлах сшивания определено кинетической моделью.

Модельное кинетическое уравнение многоатомных газов (5) применительно к течению Куэтта в безразмерной форме имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| + \xi_y \frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| = \frac{1}{Kn} \frac{p}{\mu} \left| \frac{f_t^+ - f_t}{f_t^- - f_r} \right|$$

Для сокращения размерности задачи по скоростным координатам ξ_x и ξ_z введены функции:

$$F_n = \int f_t d\xi_x d\xi_z$$

$$F_u = \int \xi_x f_t d\xi_x d\xi_z$$

$$F_p = \int (\xi_x^2 + \xi_z^2) f_t d\xi_x d\xi_z$$

$$\Phi = \int f_r d\xi_x d\xi_z$$

Система кинетических уравнений преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} F_n \\ F_u \\ F_p \\ \Phi \end{vmatrix} + \xi_y \frac{\partial}{\partial y} \begin{vmatrix} F_n \\ F_u \\ F_p \\ \Phi \end{vmatrix} = \frac{1}{Kn} \frac{p}{\mu} \begin{vmatrix} F_n^+ - F_t \\ F_u^+ - F_u \\ F_p^+ - F_p \\ \Phi^+ - \Phi \end{vmatrix}$$

В этой системе:

$$F_n^+ = \frac{n}{\sqrt{2\pi T_t^+}} \exp\left(-\frac{c^2}{2T_t^+}\right) \left(1 + \frac{\varphi_y c_y}{15n(T_t^+)^2} \left(\frac{c_y^2}{T_t^+} - 3\right)\right)$$

$$F_u^+ = u_x F_n^+$$

$$F_p^+ = (2T_t^+ + u_x^2) F_n^+ + \frac{4}{15} \frac{\varphi_y c_y}{n T_t^+} \frac{n}{\sqrt{2\pi T_t^+}} \exp\left(-\frac{c^2}{2T_t^+}\right)$$

$$\Phi^+ = \frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} T_r^+ F_n^+$$

Макропараметры вычисляются следующим образом:

$$n = \int F_n d\xi_y$$

$$u_x = \frac{1}{n} \int F_u d\xi_y$$

$$P_{xy} = \int \xi_y F_u d\xi_y$$

$$P_{yy} = \int \xi_y^2 F_n d\xi_y$$

$$P_{xx} + P_{yy} = \int F_p d\xi_y - nu_x^2$$

$$T_r = \frac{2(\gamma - 1)}{(5 - 3\gamma)n} \int \Phi d\xi_y$$

$$\varphi_y = \frac{1}{2} \int (\xi_y^3 F_n + \xi_y F_p) d\xi_y - u_x P_{xy}$$

$$\omega_y = \int \xi_y \Phi d\xi_y$$

Аппроксимирующие функции, размерность которых сокращена по скоростным координатам ξ_x и ξ_z :

$$F_{An} = F_{Mt} \left(1 + \frac{\varphi_y c_y}{5nT_t^2} \left(\frac{c_y^2}{T_t} - 3 \right) \right)$$

$$F_{Au} = u_x F_{An} + \frac{P_{xy} c_y}{nT_t} F_{Mt}$$

$$F_{Ap} = (2T_t + u_x^2) F_{An} + \frac{2}{nT_t} \left(u_x P_{xx} + \frac{2}{5} \varphi_y \right) c_y F_{Mt}$$

$$\Phi_A = \frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} T_r F_{An} + \frac{\omega_y c_y}{nT_t} F_{Mt}$$

$$F_{Mt} = \frac{n}{\sqrt{2\pi T_t}} \exp\left(-\frac{c_y^2}{2T_t}\right)$$

Выражения для граничных условий на твёрдой поверхности (все функции на интервале $c_y \in (-\infty, 0)$):

$$F_n = \frac{n_w}{\sqrt{2\pi T_w}} \exp\left(-\frac{c_y^2}{2T_w}\right)$$

$$F_u = \frac{1}{2} u_w F_n$$

$$F_p = \left(2T_w + \frac{1}{4} u_w^2 \right) F_n$$

$$\Phi = \frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} T_w F_n$$

$$n_w = \sqrt{2\pi T_w} \int_0^{+\infty} c_y F_n d c_y$$

Центральная область ($y = 0, u_x = 0, \varphi_y = 0$):

$$F_n(c_y > 0) = F_n(c_y < 0)$$

$$F_n(-\infty < c_y < +\infty) = 0$$

$$F_p(c_y > 0) = F_p(c_y < 0)$$

$$\Phi(c_y > 0) = \Phi(c_y < 0)$$

Для численного решения использовалась стационарная форма кинетического уравнения

$$\xi_y \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{Kn} \frac{p}{\mu} (F^+ - F)$$

Производная аппроксимировалась полиномом второй степени на трёх узлах расчётной сетки с постоянным шагом. Разности строились против молекулярного потока, т.е. в разностную схему закладывались оба возможных направления движения молекул, что характерно для решения кинетических уравнений:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \approx \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{3}{2} F_i - 2F_{i-1} + \frac{1}{2} F_{i-2} \right), \quad \xi_y > 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \approx -\frac{1}{\Delta y} \left(\frac{3}{2} F_i - 2F_{i+1} + \frac{1}{2} F_{i+2} \right), \quad \xi_y < 0$$

Конечноразностная схема имеет следующий вид:

$$F_i = \frac{1}{\frac{3}{2}\xi_y + \frac{\Delta y p_i}{Kn \mu_i}} \left(2\xi_y F_{i-1} - \frac{1}{2}\xi_y F_{i-2} + \frac{\Delta y p_i}{Kn \mu_i} F_i^+ \right), \quad \xi_y > 0$$

$$F_i = \frac{1}{\frac{3}{2}\xi_y + \frac{\Delta y p_i}{Kn \mu_i}} \left(2\xi_y F_{i+1} - \frac{1}{2}\xi_y F_{i+2} + \frac{\Delta y p_i}{Kn \mu_i} F_i^+ \right), \quad \xi_y < 0$$

1.4. Результаты расчётов модели КИН_НСФ

Перед началом численных тестов разработанной гибридной модели, проводился выбор свободных параметров s , h и Z_0 по условию лучшего соответствия экспериментальных расчётных коэффициентов. Более подробное описание этого, сравнение и иллюстрация полученных результатов будут приведены в следующем разделе. Для модели НСФ выбраны следующие значения свободных параметров: $s=0.7$, $h=5$. Для кинетической модели: $s=1$, $h=5$. Такие же значения использовались и для гидродинамической и кинетической моделей гибридной модели. Область сшивания модели располагалась на расстоянии 2λ от твёрдой поверхности.

Наибольшее расхождение результатов различных моделей наблюдаются на профилях температуры. Для оценки отклонения профилей температуры и общей физической адекватности примем результаты кинетической модели в качестве эталонных.

На Рисунке 4 изображены профили температуры для двухатомного газа при числе Маха $M=1$ и числе Кнудсена $Kn=0.01$. Здесь и на следующих рисунках профили кинетической модели проиллюстрированы сплошной линией, модель НСФ – мелким пунктиром, комбинированная модель – крупным пунктиром.

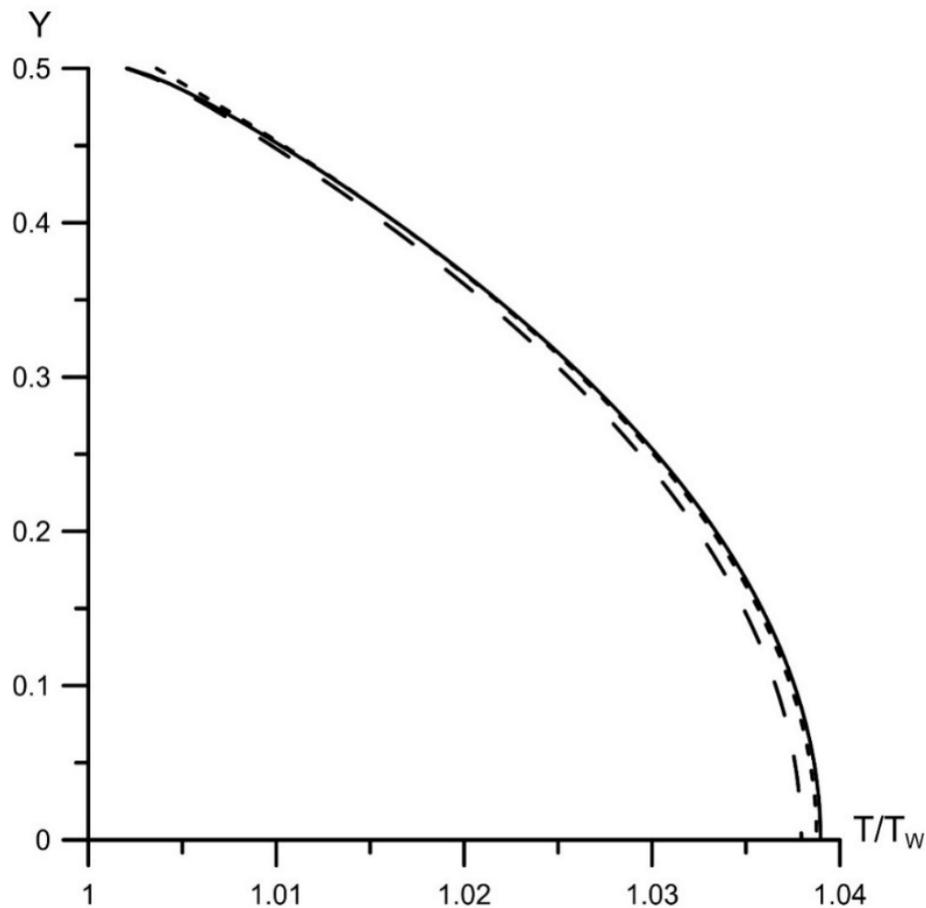


Рисунок 4. Профили температуры, $M=1$, $Kn=0.01$. Сплошная линия – кинетическая модель; мелкий пунктир – модель НСФ; крупный пунктир – комбинированная модель.

Для данного числа Кнудсена модель НСФ с граничными условиями скольжения пограничного слоя теоретически обоснована. Профили всех моделей практически совпадают. Наибольшее отклонение от результатов кинетической модели имеет профиль комбинированной модели. Это объясняется погрешностями коррекции концентрации, о которых было сказано выше.

Стоит отметить возросшую эффективность комбинированной модели: при данных параметрах комбинированная модель потребляла в несколько десятков раз меньше процессорного времени и оперативной памяти по сравнению с кинетической моделью.

На Рисунке 5 проиллюстрированы результаты расчёта для числа Маха $M=1$ и $Kn=0.1$. Это значение числа Кнудсена соответствует переходной области течения, для которой не существует теоретического обоснования

гидродинамической модели НСФ, что и подтверждает Рисунок 5. Комбинированная модель, которая использует НСФ в доминирующей части вычислительной области, даёт лучшее согласование с результатами расчёта кинетической модели, даже с учётом погрешности коррекции концентрации.

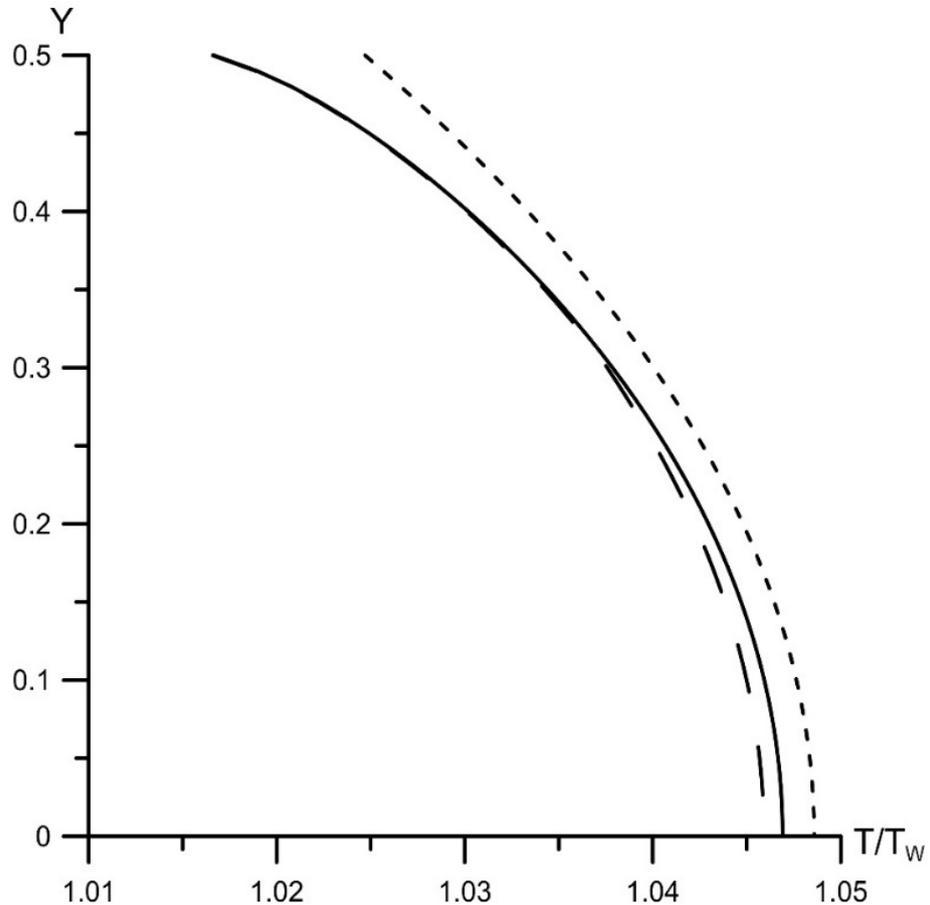


Рисунок 5. Профили температуры, $M=1$, $Kn=0.1$. Сплошная линия – кинетическая модель; мелкий пунктир – модель НСФ; крупный пунктир – комбинированная модель.

Профили на Рисунке 6 построены для числа Маха $M=4$ и числа Кнудсена $Kn=0.01$. Сравнение с Рисунком 4 показывает, что увеличение числа Маха до гиперзвуковых значений не существенно влияет на погрешность модели НСФ до тех пор, пока число Кнудсена соответствует континуальной области течения. Отклонения профиля температуры, полученного комбинированной моделью, не велики.

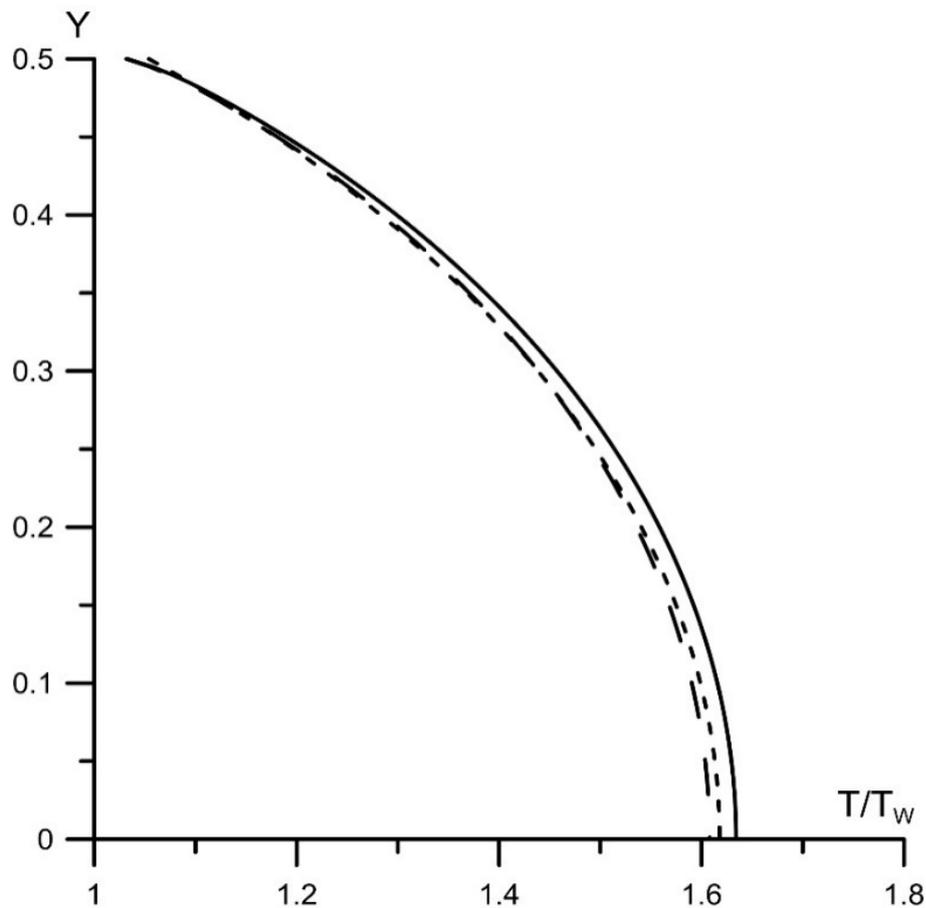


Рисунок 6. Профили температуры, $M=4$, $Kn=0.01$. Сплошная линия – кинетическая модель; мелкий пунктир – модель НСФ; крупный пунктир – комбинированная модель.

На Рисунке 7 показаны профили температур для числа Маха $M=4$ и числа Кнудсена $Kn=0.1$. Также как и на Рисунке 4, можно отметить существенные отклонения профиля модели НСФ в верхней части рисунка, которая соответствует пристеночной области. Это свидетельствует о том, что в переходной области течения при больших числах Маха граничные условия скольжения пограничного слоя перестают физически адекватно описывать процесс взаимодействия газа с твёрдой поверхностью.

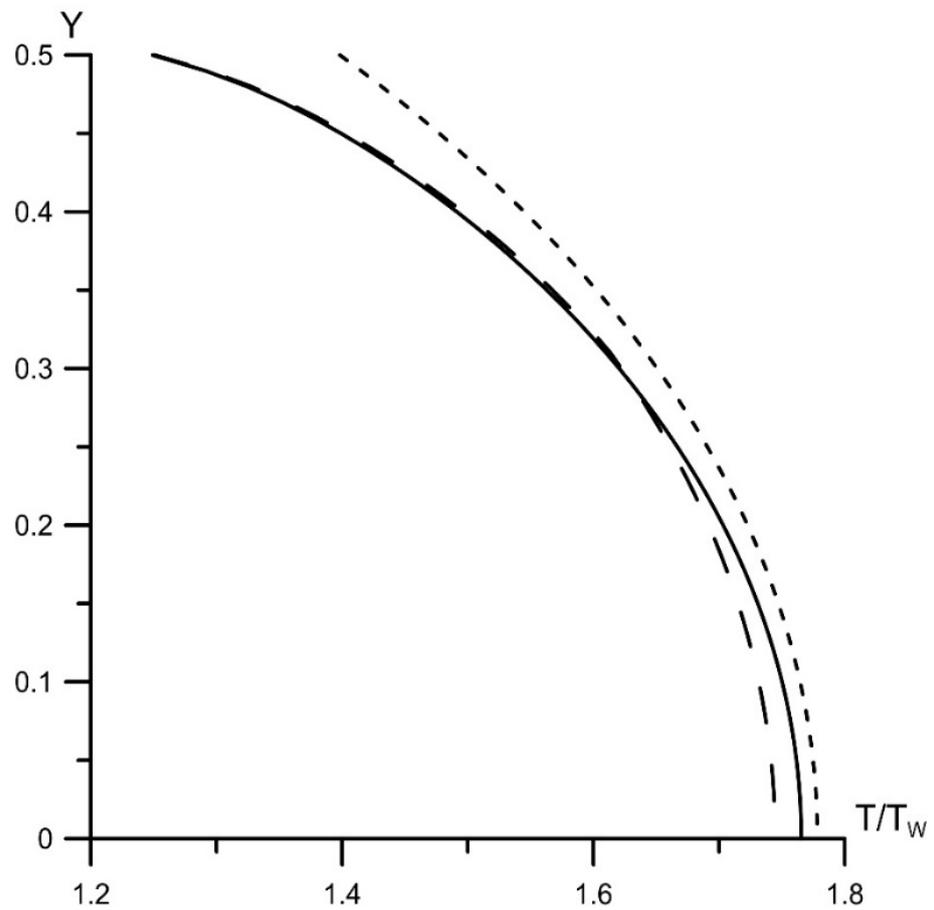


Рисунок 7. Профили температуры, $M=4$, $Kn=0.1$. Сплошная линия – кинетическая модель; мелкий пунктир – модель НСФ; крупный пунктир – комбинированная модель.

На Рисунке 8 представлена зависимость среднеквадратичного отклонения σ профилей температуры T/T_w , полученных с помощью модели НСФ и комбинированной модели от профилей температуры, рассчитанных кинетической моделью для различных чисел Маха и чисел Кнудсена.

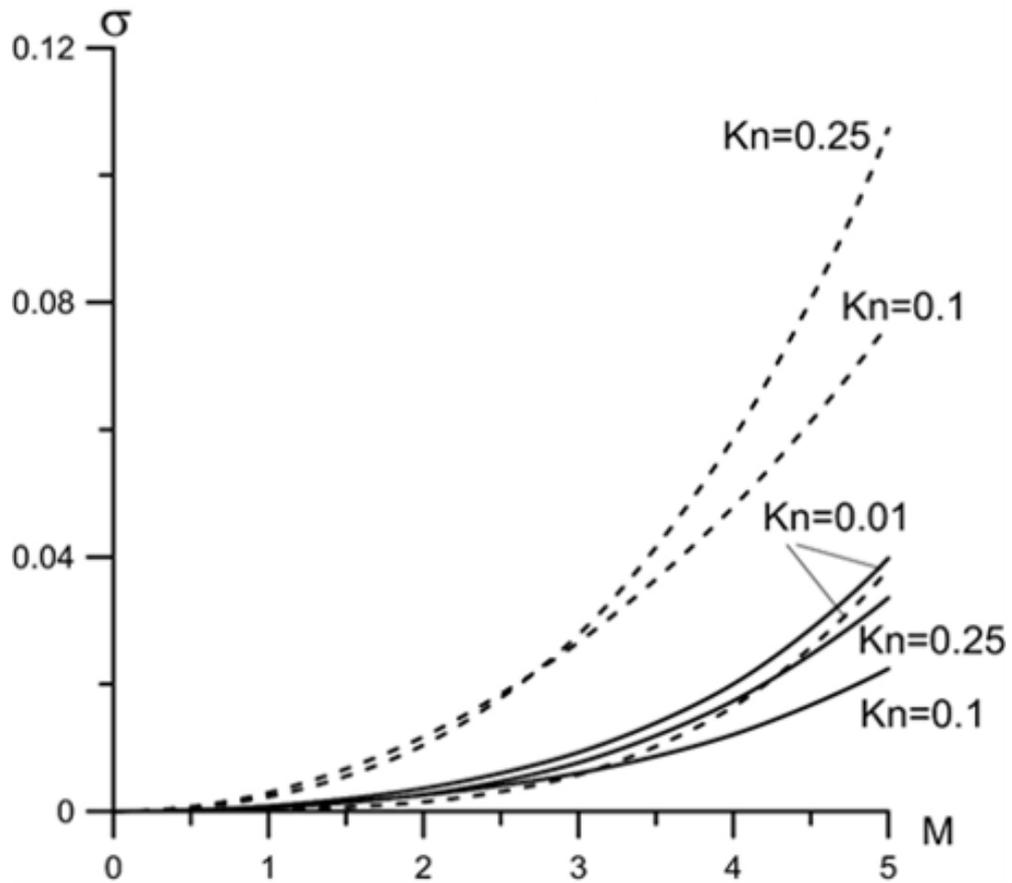


Рисунок 8. Зависимость среднеквадратичного отклонения профилей температуры от чисел Маха и Кнудсена. Сплошная линия – комбинированная модель, пунктирная линия – НСФ.

Данные зависимости показывают, что увеличение чисел Маха и Кнудсена ведёт к увеличению степени неравновесности течения, которая оценивается как произведение $M \cdot Kn$ [23]. Модель НСФ теоретически обоснована лишь для слаборавновесных течений, что и подтверждают зависимости, проиллюстрированные на Рисунке 8. Отклонения комбинированной модели существенно меньше.

Стоит обратить внимание на кривую комбинированной модели при значении числа Кнудсена $Kn = 0.01$, которая отвечает минимальной степени неравновесности в рассмотренном интервале чисел Kn . Эта кривая немного выше соответствующей кривой модели НСФ. Кроме того, эта кривая проходит значительно выше кривых комбинированной модели, которые соответствуют большей степени неравновесности.

По представленным выше результатам можно заключить, что такое поведение комбинированной модели можно объяснить неточностью коррекции концентрации, так как при этом числе Кнудсена и НСФ и кинетическая модель достаточно хорошо описывают течение. Стоит напомнить, что введение коррекции концентрации является специфической процедурой при решении задачи о течении Куэтта.

1.5. Сшивание системы моментных уравнений третьего порядка МЗ с кинетическим уравнением

В данном разделе исследуется влияние повышения порядка системы моментных уравнений. В качестве модели старшего порядка выбрана система моментных уравнений третьего порядка, которую в дальнейшем будем сокращённо называть МЗ. Она представляет собой систему, состоящую из 24 уравнений, записанных в термодинамических переменных [23]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} p_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha p_{ij}) + P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} - \delta_{ij} (\gamma - 1) P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (2\varphi_{ij\alpha} - \delta_{ij} (\gamma - 1) q_\alpha) = - \frac{p_{ij}}{\tau_p} \delta_{ij} \frac{1}{3} \frac{h - 1}{h} \frac{p_{\alpha\alpha}}{\tau_p} \quad \#(17) \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{ijk} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \varphi_{ijk}) + \varphi_{ij\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + \varphi_{ik\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \varphi_{jk\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \\ + \frac{R}{2} \left(P_{i\alpha} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_\alpha} + P_{j\alpha} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_\alpha} + P_{k\alpha} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) = - \frac{2}{3} \frac{\varphi_{ijk}}{\tau_p} \\ \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha q_i) + q_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + 2\varphi_{i\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + c_p P_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + P_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{p_{i\beta}}{\rho} \right) = \\ = - \frac{c_\Omega}{c_\omega} \frac{q_i}{\tau_p} - \left(\frac{2}{3} - \frac{c_\Omega}{c_\omega} \right) \frac{\varphi_i}{\tau_p} \end{array} \right.$$

Здесь:

c_{Ω} – удельная теплоёмкость внутренних степеней свободы;

$$c_{\omega} = \frac{c_p}{Pr} - \frac{15}{4}R, \text{ где } Pr\text{-число Прандтля.}$$

Условия взаимодействия газа с твёрдой поверхностью для моделей НСФ и МЗ формулируются как условия скольжения пограничного слоя [31]. В комбинированных, как уже указывалось выше, такие условия не требуются. В качестве кинетической модели также используется модельное кинетическое уравнение (5). Комбинацию модели МЗ и модельного кинетического уравнения далее будем называть КИН_МЗ.

Для моделей неравновесных течений старшего порядка комбинирование происходит аналогичным образом, который описан в разделе 1.1 настоящей работы. Исключение составляет вид аппроксимирующей функции распределения молекул. Для модели МЗ аппроксимирующая функция выглядит следующим образом:

$$f = \frac{n}{(2\pi RT_t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t}\right) \times \frac{2\sqrt{\varepsilon/\pi}}{(2/3 \eta k T_r)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2/3 \eta k T_r}\right) \times \\ \times \left(1 + \frac{1}{\rho RT_t} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_p}\right) p_{\alpha\beta} c_{\alpha} c_{\beta} + \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\tau}{\tau_p}\right) \varphi_{\alpha} \left(\frac{c^2}{5RT_t} - 1\right) c_{\alpha} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_p}\right) \frac{\omega_{\alpha} T_t}{\eta T_r} \left(\frac{\varepsilon}{\eta k T_r} - 1\right) c_{\alpha} \right) \right)$$

1.6. Численная реализация комбинированной модели КИН_МЗ

Уместно будет повторить математические особенности, возникающие при преобразовании системы моментных уравнений (14) для её использования при решении задачи течения Куэтта, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \\ u_x \Big|_{y=0} = 0, \quad u_y = 0;$$

Используя указанные выше выражения приведём систему моментных уравнений третьего порядка (17) к следующему виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{L}{2} \left(T_{yy} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dy}{T_{yy}} \right)^{-1} \\ \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{2}{3} T_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{2}{3\rho R} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = \frac{5 - 3\gamma T_t - T_r}{2h} \frac{\tau_p}{\tau_p} \\ \frac{2}{\rho R} \frac{\partial \varphi_{yyy}}{\partial y} = -\frac{T_{yy} - T_r}{\tau_p} - \frac{5 - 3\gamma T_t - T_r}{2h} \frac{\tau_p}{\tau_p} \\ \frac{2(\gamma - 1)}{\rho(5 - 3\gamma)} \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = \frac{3\gamma - 1}{2} \frac{T_t - T_r}{h} \frac{\tau_p}{\tau_p} \end{array} \right. \quad \#(18)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} P_{xy} &= -\mu_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y}, \\ \varphi_{yyy} &= -\frac{9}{4} R \tau_p P_{yy} \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} = -\frac{9}{4} R \mu_{yy} \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \\ \varphi_{yxx} &= -\frac{3}{4} R \tau_p P_{yy} \left(P_{yy} \frac{\partial T_{xx}}{\partial y} + 2P_{xy} \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \right) \\ \varphi_{yzz} &= -\frac{3}{4} R \tau_p P_{yy} \frac{\partial T_{zz}}{\partial y} \\ \varphi_y &= -\frac{9}{4} R \mu_{yy} \frac{\partial T_t}{\partial y} - \frac{3}{2} R \mu_{yy} \left(\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{T_{xy}}{T_{yy}} \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \right) \\ \omega_y &= -\frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} R \mu_{yy} \frac{\partial T_r}{\partial y} \\ \mu_{xy} &= \mu_0 \left(\frac{T_{xy}}{T} \right)^s \\ \mu_{yy} &= \mu_0 \left(\frac{T_{yy}}{T} \right)^s \\ T_{ij} &= P_{ij} / R\rho \end{aligned}$$

Если в качестве единиц измерения принять ρ_0, μ_0 – плотность и вязкость газа до начала движения пластин, а величины u_w, T_w – скорость и температура пластин, то после подстановки этих выражений для моментов второго и третьего порядков, приходим к следующей системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{L}{2} \left(T_{yy} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dy}{T_{yy}} \right)^{-1} \\ \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \\ \mu_{yy} \frac{\partial^2 T_t}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} \frac{\partial T_t}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{yy} \left(\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{T_{xy}}{T_{yy}} \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \right) \right) - \#(19) \\ \frac{2}{3} \rho r_\omega T_{yy} + \frac{4}{9} \mu_{yy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 = 0 \\ \mu_{yy} \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} - \frac{2}{9} \rho (r_{yy} + r_\omega) = 0 \\ \mu_{yy} \frac{\partial^2 T_r}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} \frac{\partial T_r}{\partial y} + \frac{3\gamma - 1}{2} \frac{\rho^2}{h} \frac{T_{yy}}{\mu_{yy}} (T_t - T_r) = 0 \end{array} \right.$$

В этой системе уравнений:

$$r_\omega = \frac{5 - 3\gamma}{2h} \frac{\rho T_{yy}}{\mu_{yy}} (T_t - T_r)$$

В общей форме можно записать:

$$a \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + b \frac{\partial F}{\partial y} + cF = r \#(20)$$

Где:

$$a = \mu_{yy},$$

$$b = \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y},$$

$$c = 0$$

Для аппроксимации производных на дискретной сетке с постоянным шагом Дуприняты разностные шаблоны второго порядка точности:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_i = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta y}$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right|_i = \frac{F_{i-1} - 2F_i + F_{i+1}}{\Delta y^2}$$

После подстановки аппроксимаций в дифференциальные уравнения получаем трехдиагональную матрицу, аналогичную матрице модели НСФ:

$$A_i F_{i-1} + B_i F_i + C_i F_{i+1} = R_i \quad (21)$$

Коэффициенты матрицы (21) представлены в Таблице 2:

Таблица 3. Коэффициенты матрицы (21)

A	B	C	R
$a - \frac{b}{2}\Delta y$	$2a$	$a + \frac{b}{2}\Delta y$	$\Delta y^2 r$

Конечно-разностная реализация кинетической модели аналогично реализации, представленной в разделе 1.3 настоящей работы.

1.7. Результаты расчётов модели КИН_МЗ

Свободные параметры s , h и Z , как отмечалось ранее, были подобраны путём наилучшего соответствия результатов моделей экспериментально полученным коэффициентам трения в интервале числа Кнудсена – Kn 0.01...10 при фиксированном числе Маха $M=1.4$, исследуемый газ – воздух [83]. Для модели МЗ, эти свободные параметры совпадают со свободными параметрами модели НСФ, для того чтобы исключить их влияние на несовпадение в полученных решениях. Результаты сравнения приведены на Рисунке 9.

Анализ зависимостей коэффициента трения от числа Кнудсена показывает полную несостоятельность модели НСФ с граничными условия прилипания при увеличении неравновесности течения. Комбинированные модели и кинетическая модель дают примерно одинаковые результаты на всём интервале исследуемых чисел Кнудсена.

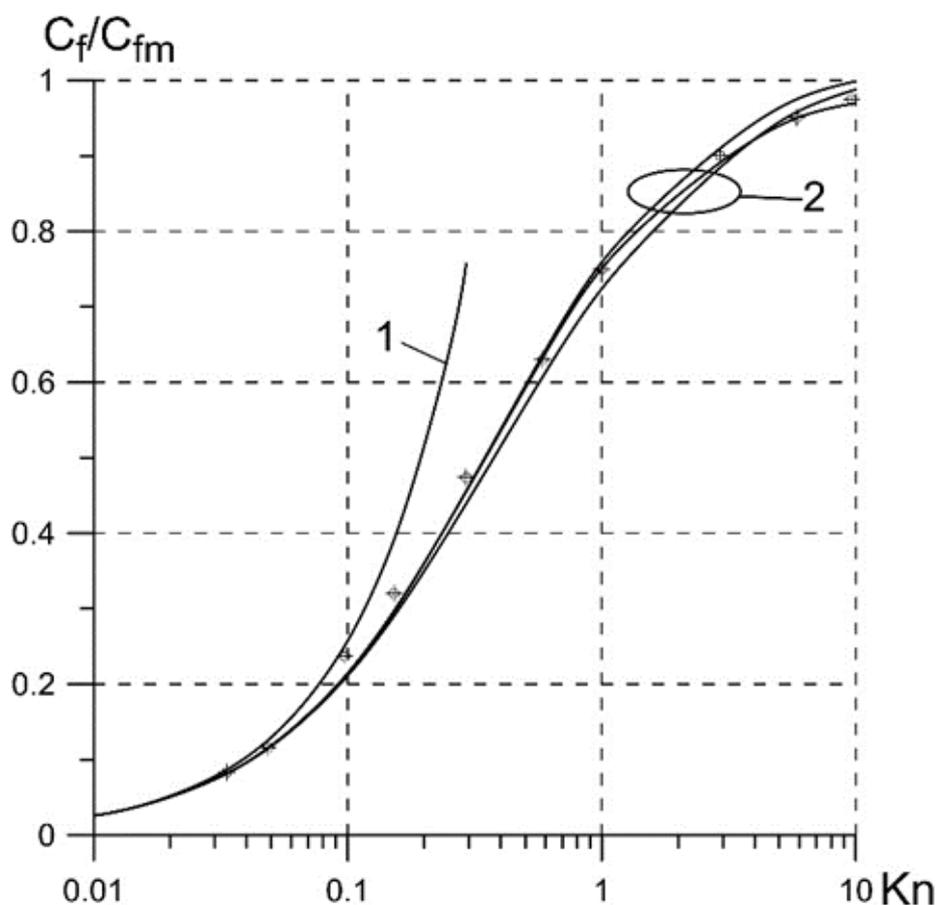


Рисунок 9. Значение отношений коэффициента трения к коэффициенту трения в свободномолекулярном пределе. 1 - НСФ с граничными условиями прилипания; 2 - НСФ, МЗ условия скольжения, кинетика и комбинированные модели с кинетическими граничными условиями, крестики – экспериментальные данные [83].

Стоит отметить, что коэффициент трения является интегральной величиной. Для более детального анализа различных моделей лучше использовать распределённые величины. В связи с этим, далее приведём сравнение профилей температур, которые рассчитаны с помощью различных моделей.

На Рисунке 10 показаны профили температуры для двухатомного газа для числа Маха $M=1$ и числа Кнудсена $Kn=0.01$. Здесь и на следующих иллюстрациях: сплошная линия соответствует кинетической модели, мелкий пунктир – комбинированной модели КИН_МЗ, крупный пунктир – КИН_НСФ, штрих-пунктир – модель НСФ, штрих-пунктир с номером 1 – граничные условия скольжения пограничного слоя, штрих-пунктир 2 – граничные условия

прилипания, чёрная точка – точка кинетической составляющей комбинированной модели в области сшивания.

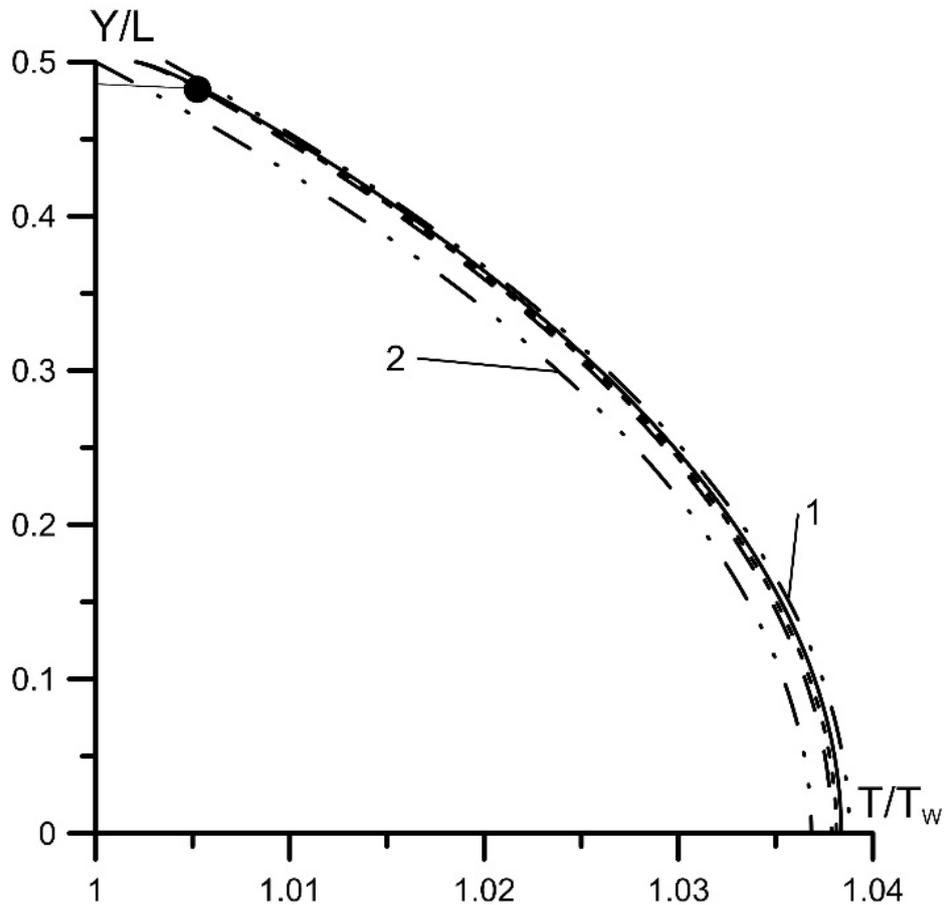


Рисунок 10. Профили температуры, $M=1$, $Kn=0.01$. сплошная линия соответствует кинетической модели, мелкий пунктир – комбинированной модели КИН_М3, крупный пунктир – КИН_НСФ, штрих-пунктир – модель НСФ, штрих-пунктир с номером 1 – граничные условия скольжения пограничного слоя, штрих-пунктир 2 – граничные условия прилипания, чёрная точка – точка кинетической составляющей комбинированной модели в области сшивания

Представленные результаты повторяют выводы сделанные относительно гидродинамической модели НСФ. При данном числе Кнудсена модель НСФ с граничными условиями скольжения пограничного слоя теоретически обоснована. Профили всех моделей практически совпадают. Наибольшее отклонение имеет модель НСФ с граничными условиями прилипания.

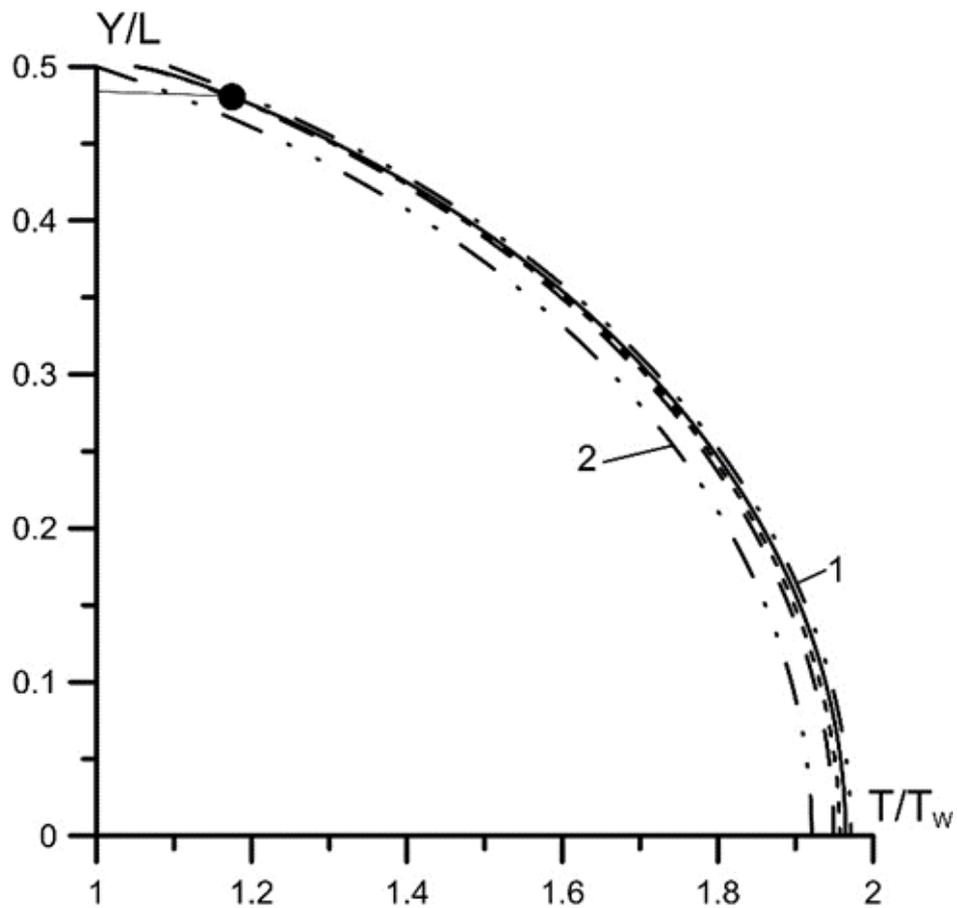


Рисунок 11. Профили температуры, $M=5$, $Kn=0.01$. сплошная линия соответствует кинетической модели, мелкий пунктир –комбинированной модели КИН_МЗ, крупный пунктир – КИН_НСФ, штрих-пунктир – модель НСФ, штрих-пунктир с номером 1 – граничные условия скольжения пограничного слоя, штрих-пунктир 2 – граничные условия прилипания, чёрная точка – точка кинетической составляющей комбинированной модели в области сшивания

Из Рисунка 11 видно, что увеличение числа Маха до гиперзвуковых значений не существенно влияет на погрешность гидродинамических моделей, пока число Кнудсена находится в сплошносредной области течения. Отличия результатов, полученных различными комбинированными моделями от эталонного кинетического решения малы. Можно сказать, что результаты всех моделей, за исключением результатов модели НСФ с граничными условиями прилипания, довольно близки между собой.

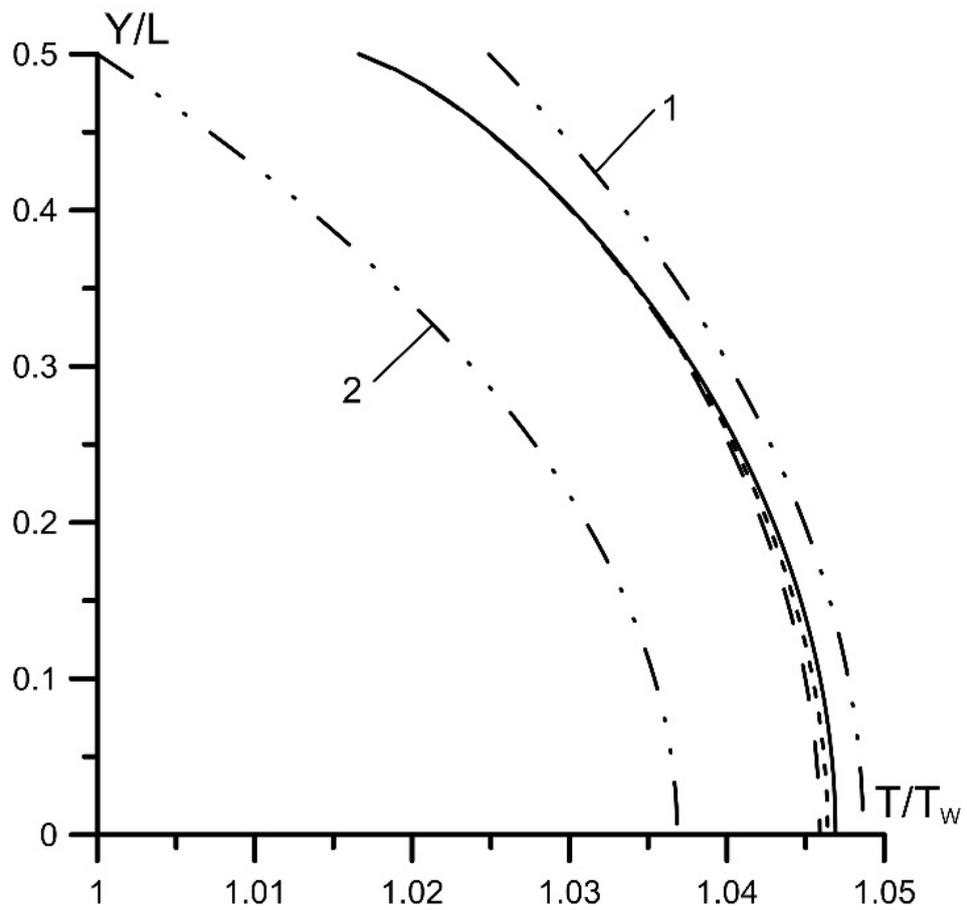


Рисунок 12. Профили температуры, $M=1$, $Kn=0.1$. сплошная линия соответствует кинетической модели, мелкий пунктир –комбинированной модели КИН_МЗ, крупный пунктир – КИН_НСФ, штрих-пунктир – модель НСФ, штрих-пунктир с номером 1 – граничные условия скольжения пограничного слоя, штрих-пунктир 2 – граничные условия прилипания, чёрная точка – точка кинетической составляющей комбинированной модели в области сшивания

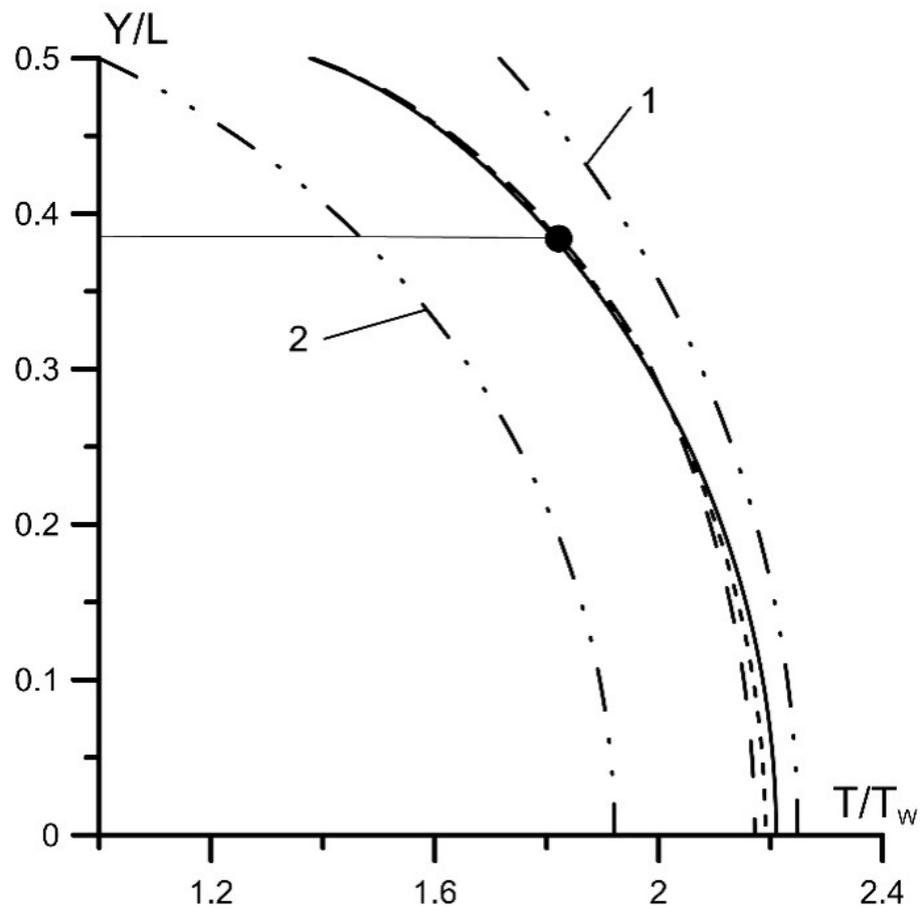


Рисунок 13. Профили температуры, $M=5$, $Kn=0.1$. сплошная линия соответствует кинетической модели, мелкий пунктир –комбинированной модели КИН_М3, крупный пунктир – КИН_НСФ, штрих-пунктир – модель НСФ, штрих-пунктир с номером 1 – граничные условия скольжения пограничного слоя, штрих-пунктир 2 – граничные условия прилипания, чёрная точка – точка кинетической составляющей комбинированной модели в области сшивания

Сравнение Рисунка 12 и Рисунка 13 показывает существенные отклонения профиля моделей НСФ и М3 в верхней части профиля температуры, которая соответствует пристеночной области. Ещё раз подтверждается тот факт, что в переходной области течения, при больших скоростях, граничные условия скольжения пограничного слоя перестают адекватно описывать процесс взаимодействия газ с твёрдой поверхностью. Обе комбинированные модели показывают довольно хорошее совпадение с результатами расчёта кинетической модели, которую можно считать эталонной.

На Рисунке 14и на Рисунке 15 показаны расчётные профили температуры для числа Кнудсена $Kn=0.2$ и чисел Маха $M=1, 2$, соответственно.

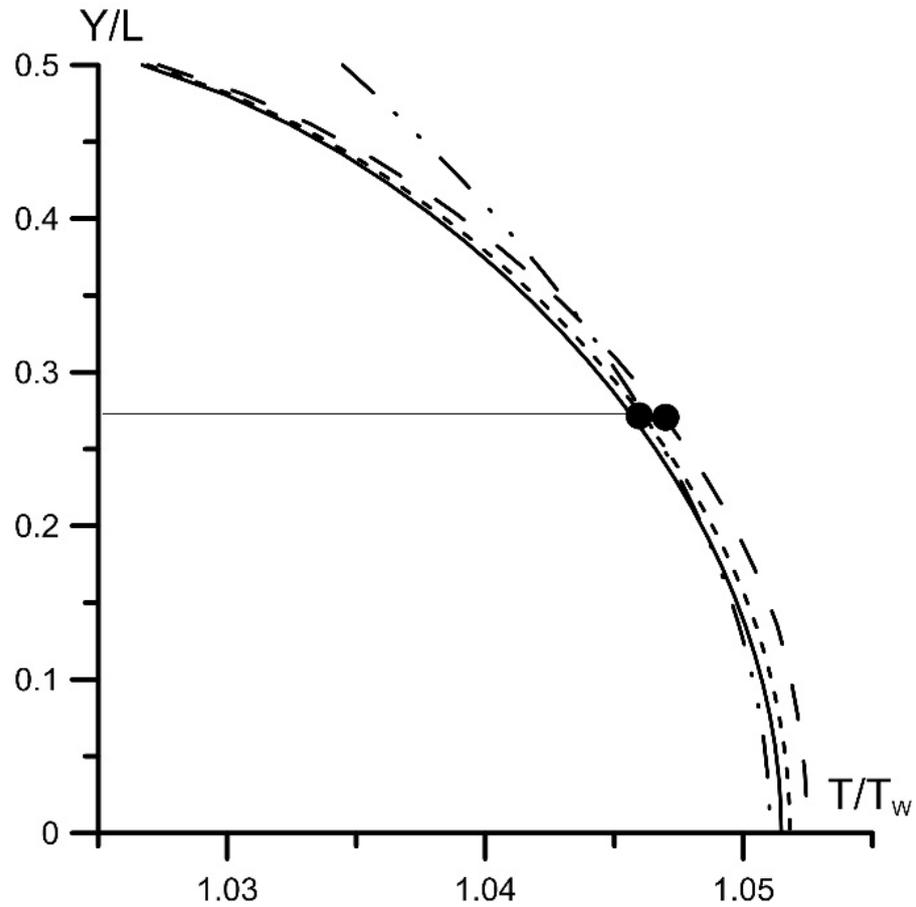


Рисунок 14. Профили температуры, $M=1$, $Kn=0.2$. сплошная линия соответствует кинетической модели, мелкий пунктир –комбинированной модели КИН_МЗ, крупный пунктир – КИН_НСФ, штрих-пунктир – модель НСФ, штрих-пунктир с номером 1 – граничные условия скольжения пограничного слоя, штрих-пунктир 2 – граничные условия прилипания, чёрная точка – точка кинетической составляющей комбинированной модели в области сшивания

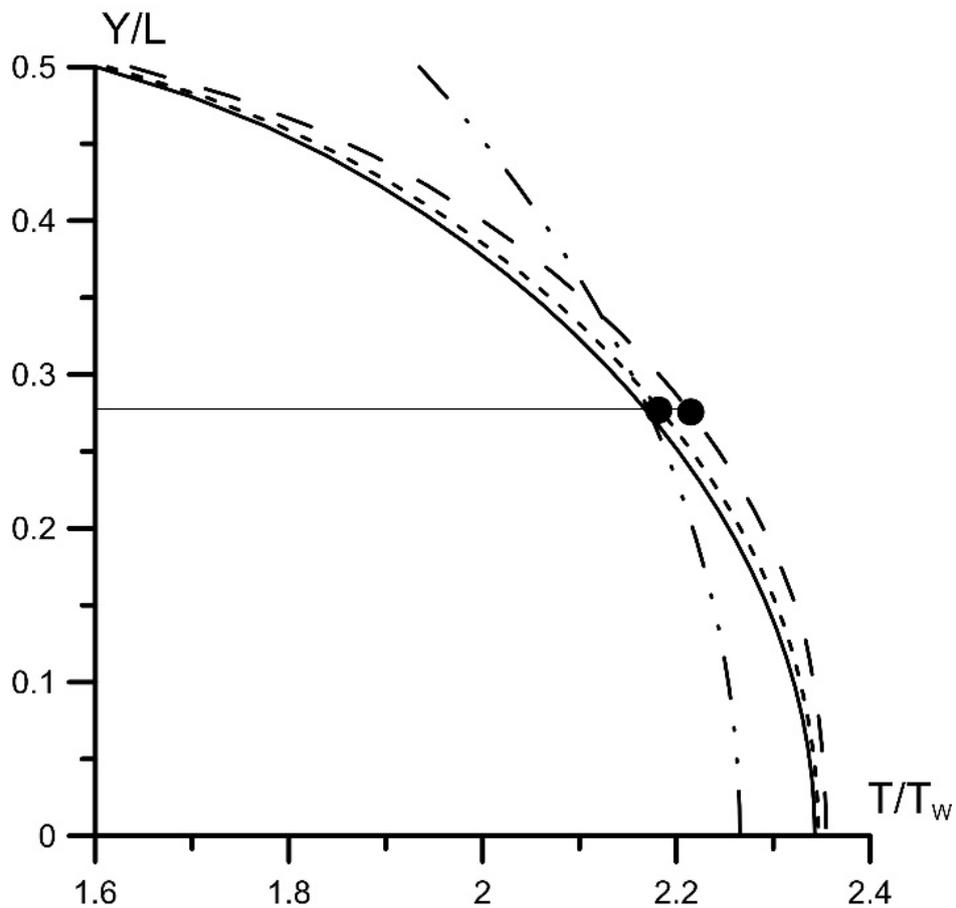


Рисунок 15. Профили температуры, $M=5$, $Kn=0.2$. сплошная линия соответствует кинетической модели, мелкий пунктир – комбинированной модели КИН_М3, крупный пунктир – КИН_НСФ, штрих-пунктир – модель НСФ, штрих-пунктир с номером 1 – граничные условия скольжения пограничного слоя, штрих-пунктир 2 – граничные условия прилипания, чёрная точка – точка кинетической составляющей комбинированной модели в области сшивания

Увеличение чисел Маха и чисел Кнудсена означает повышение степени неравновесности течения, которая оценивается как произведение числа Маха на число Кнудсена. Модель НСФ теоретически обоснована только в слаборавновесных течениях. Комбинированные модели помогают получить результаты близкие к кинетическим. Модель КИН_М3 даже при высокой неравновесности даёт решение, слабо (в пределах вычислительной погрешности) отличающееся от кинетического.

1.8. Выводы к Главе 1

Разработан метод комбинирования гидродинамической и кинетической моделей. Результаты тестовых расчётов показали, что модель КИН_НСФ ненамного уступает в точности кинетической модели и существенно уменьшает время расчёта на ЭВМ. При описании течений плотных газов экономичность комбинированных моделей не зависит от числа Кнудсена Kn и слабо зависит от числа Маха M .

Для комбинированных моделей КИН_НСФ и КИН_М3 стоит отметить то, что в точке сшивания областей отсутствует излом профилей газодинамических параметров.

Сравнение полученных результатов позволяет выделить следующие преимущества комбинированных моделей:

- Точность комбинированных моделей сравнима с точностью кинетической модели;
- Существенно повышена экономичность, в смысле количества вычислительных операций, этих моделей, по сравнению с кинетической моделью;
- Комбинированные модели позволяют выставить физически адекватные граничные условия, которые учитывают молекулярные процессы, в отличие от гидродинамических моделей.

При числе Кнудсена $Kn < 0.1$, модель НСФ с граничными условиями скольжения пограничного слоя обеспечивает удовлетворительную точность. Комбинированная модель КИН_НСФ даёт удовлетворительные результаты во всей рассмотренной области параметров течения.

При описании пристеночных течений уточнение гидродинамической составляющей комбинированной модели выше третьего порядка не приведёт к повышению точности. Для практических приложений вполне достаточно неполного второго приближения, т. е. модели КИН_НСФ.

ГЛАВА 2. ВЫБОР ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ НЕРАВНОВЕСНОСТИ

2.1. Общие замечания

Ранее в работе был предложен метод комбинирования моделей, который позволяет использовать кинетическое уравнение в пристеночной области с кинетическими граничными условиями, а в остальной области используется модель НСФ. Такая комбинация гидродинамической и кинетической моделей позволило существенно улучшить решение в пристеночной области. Особое внимание стоит обратить на отсутствие излома в области сшивания моделей, который характерен для методов сшивания, предложенных в ряде работ, например [50, 51].

В разделе 1.5 настоящей работы показано влияние увеличения порядка гидродинамической (моментной) модели на точность получаемого решения. Сделан вывод о том, что повышение порядка не приводит к существенному улучшению точности и для практических задач достаточно использовать модель неполного 2-го порядка (НСФ).

В настоящей главе проведен анализ различных граничных условий на твёрдой стенке для гидродинамической и кинетической моделей. В качестве тестовой задачи выбрано плоское течение Куэтта, а для величины сравнения – относительный коэффициент трения. Выбор этой величины обуславливается её важностью в практических задачах. Так, например, при расчётах аэродинамических сил, действующих на летательный аппарат, именно коэффициент трения влияет на общее аэродинамическое сопротивление летательного аппарата. Для гидродинамической модели НСФ выбирались граничные условия прилипания и скольжения пограничного слоя. Для кинетической модели – диффузный закон отражения молекул от твёрдой стенки.

Такая постановка задачи позволит:

- Оценить физическую адекватность граничных условий при описании неравновесных течений в широком интервале чисел Маха и чисел Кнудсена.

- Дать рекомендации при выборе граничных условий на твёрдой поверхности для обеспечения удовлетворительной точности и экономичности в широком спектре степени неравновесности газового потока.

2.2. Модели течений и граничные условия

Сравнение будет проводиться для кинетической модели и гидродинамических моделей с различными граничными условиями. В качестве кинетической модели будет использоваться, ранее рассмотренное, модельное кинетическое уравнение (5) с граничными условиями диффузного отражения (6) с полной аккомодацией энергии. В качестве гидродинамической модели будет анализироваться модель неполного второго порядка НСФ с двумя вариантами граничных условий: граничные условия прилипания и условия скольжения пограничного слоя.

Граничные условия прилипания подразумевают равенство нулю скорости газа на обтекаемой поверхности. Вывод граничных условий скольжения пограничного слоя носят является нетривиальной задачей. Подробный вывод таких условий представлены в работах [9, 104]. Далее будет приведено краткое описание рассуждений, приводящих к таким граничным условиям.

Гидродинамическая модель НСФ, полученная с помощью процедуры Чепмена-Энскога является асимптотическим приближением к уравнению Больцмана при исчезающе малых числах Кнудсена. Вблизи границ обтекаемой поверхности характерное число Кнудсена Kn^* может иметь довольно большое значение и разложение Чепмена-Энскога перестаёт соответствовать кинетическому уравнению Больцмана. По нормали к поверхности эта область имеет протяжённость нескольких длин свободного пробега молекул. Эта область и имеет название расширенного кнудсеновского слоя. Схематичное изображение области вблизи твёрдой поверхности представлено на Рисунке 16.

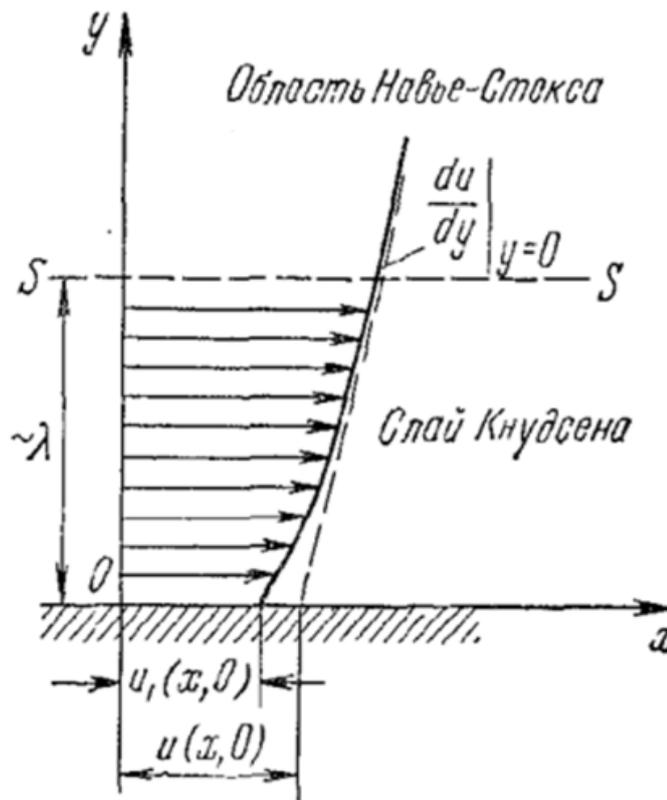


Рисунок 16. Профили скорости вблизи границы твёрдой поверхности.

Взаимодействие молекул газа с твёрдой поверхностью, должна задавать навье-стоксовская функция распределения. Однако, вышеуказанные особенности пристеночного течения, показывают несостоятельно такой функции адекватно описать процесс взаимодействия на границе раздела фаз. При продолжении применения модели НСФ в расширенном кнудсеновском слое, можно получить некоторые приближённые значения скорости и температуры газа около обтекаемой поверхности. Эти значения не будут равны истинной скорости и температуре как у поверхности, так и на самой поверхности. Разность между приближённой скоростью и скоростью поверхности называют скоростью скольжения, а разность их температур называют температурным скачком. Общее название этих условий звучит как условия скольжения пограничного слоя.

Стоит отметить, что газодинамические величины u_i , и T , получаемые с помощью модели НСФ с граничными условиями скольжения пограничного слоя отличаются от соответствующих величин, которые получены с помощью

кинетического уравнения Больцмана, на величины порядка Kn^2 вне кнудсенновского слоя и на величины порядка Kn внутри 'этого слоя.

Выражения для условий скольжения скорости и скачка температур в терминах работы [84] имеют следующий вид:

$$\Delta u_i = -1.431 \frac{p_{i1}^m}{\rho \sqrt{RT_t}} - 0.224 \frac{\varphi_i^{[1]}}{p^m}, i = 2, 3 \#(22)$$

$$\Delta T_t = -0.735 \frac{\varphi_1^{[1]}}{\rho R \sqrt{RT_t}} \#(23)$$

Здесь координата x_1 , входящая в напряжение $p_{i1}^{m[1]}$ и тепловой поток $\varphi_1^{[1]}$, имеет смысл нормали к обтекаемой поверхности. Верхние индексы в квадратных скобках означают приближение величин. В данном случае тепловой поток $\varphi_1^{[1]}$ является величиной первого приближения.

Выражения(22) и (23) получены как граничные условия, удовлетворяющие модели НСФ для одноатомного газа. При решении краевых задач, эти граничные условия весьма эффективны. Анализ экспериментальных и расчётных данных для вырожденных течений помогают уточнить постоянные коэффициенты выражений (22) и (23) для их применения к другим моделям течений и к течениям многоатомных газов [23]. В настоящей работе используются следующие граничные условия скольжения пограничного слоя:

$$\Delta u_i = -\xi_u \frac{p_{i1}^{m[1]}}{\rho \sqrt{RT_t}} - \xi_{uT} \frac{\varphi_i^{[1]}}{p^m} \quad i = 2, 3 \#(24)$$

$$\Delta T_t = -\xi_T \frac{\varphi_1^{[1]}}{\rho R \sqrt{RT_t}} \#(25)$$

Здесь ξ_u , ξ_{uT} и ξ_T являются свободными параметрами граничных условий. В настоящей работе, значения свободных параметров принимается для $\xi_u = 1.21$ и $\xi_T = 0.55$ в соответствии с [23]. Значение коэффициента ξ_{uT} не может быть определено, в силу одномерности тестовой задачи (течение Куэтта).

Выражения (24) и (25) для задачи Куэтта преобразуются к следующему виду:

$$u_x|_{y=\frac{L}{2}} = \frac{1}{2}u_w - 1.21Kn \frac{\mu}{\rho\sqrt{T}} \frac{\partial u_x}{\partial y} \#(26)$$

$$T|_{y=\frac{L}{2}} = T_w - 0.55 \frac{15}{4} Kn \frac{\mu}{\rho\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial y} \#(27)$$

где выражение (26) – скольжение скорости, выражение (27) – скачок температуры.

2.3. Результаты численных расчётов

Для удобства анализа различных граничных условий используется отношение коэффициента трения c_f к его свободномолекулярному пределу c_{fm} :

$$\frac{c_f}{c_{fm}} = 2 \frac{|P_{12}|}{\rho(2u_w)^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2u_w}{\sqrt{RT_w}}$$

здесь ρ – средняя по толщине зазора плотность газа, L –расстояние между пластинами.

На начальном этапе расчётов, для валидации различных моделей были использованы экспериментальные значения коэффициента трения, полученные в интервале чисел Кнудсена – Kn 0.01...10 при фиксированном числе Маха $M=1.4$ [83]. Результаты этого сравнения показаны на Рисунке 17. Здесь и на следующих рисунках цвета соответствуют: красный – НСФ с условиями прилипания, синий – НСФ с условиями скольжения пограничного слоя, чёрный - модельное кинетическое уравнение с диффузным законом отражения молекул от поверхности.

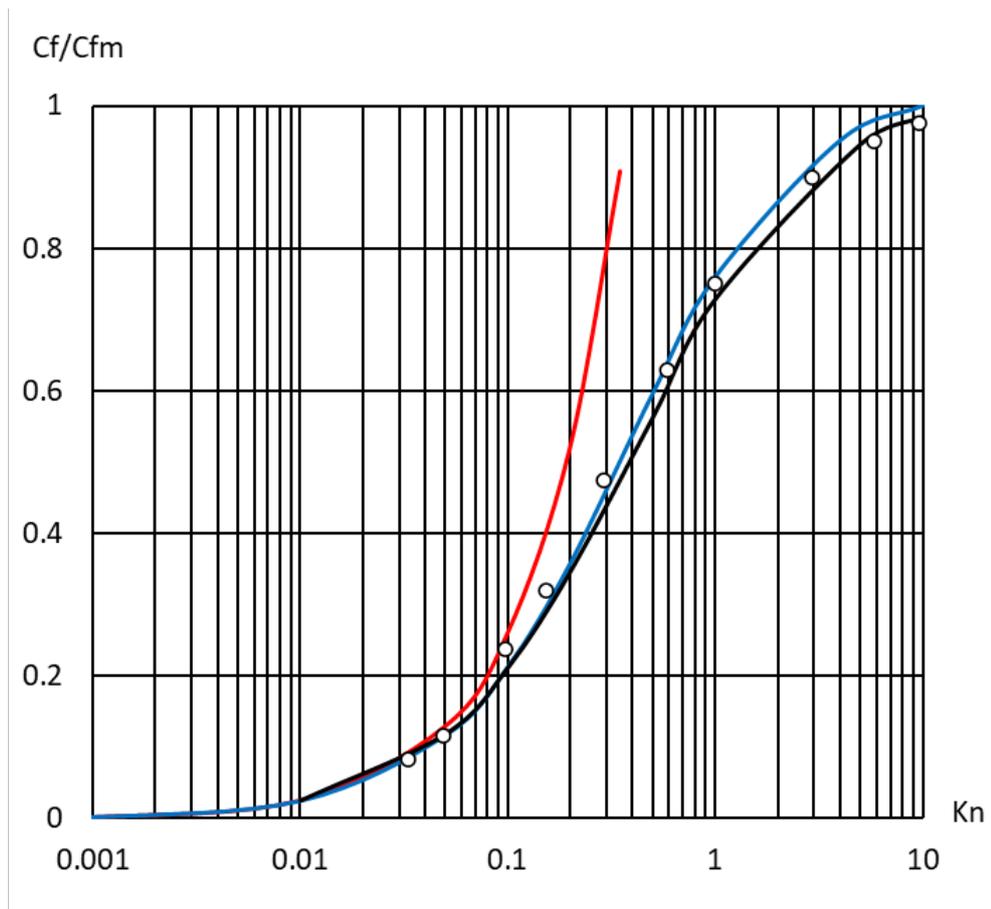


Рисунок 17. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. Число Маха $M=1.4$. Кружки – экспериментальные данные [83].

Сравнение зависимостей коэффициента трения от числа Кнудсена показывает, как указывалось ранее, физическую несостоятельность модели НСФ с граничными условиями прилипания при увеличении числа Кнудсена. Удовлетворительное совпадение с экспериментом даёт модель НСФ с условиями скольжения пограничного слоя. Однако при высоких значениях степени неравновесности течения, величины отношений коэффициентов трения выше теоретического предела, что, очевидно, не верно.

Далее проиллюстрированы результаты расчётов отношений коэффициентов трения различными моделями для дозвуковых, трансзвуковых, сверхзвуковых и гиперзвуковых чисел Маха, в широком диапазоне чисел Кнудсена.

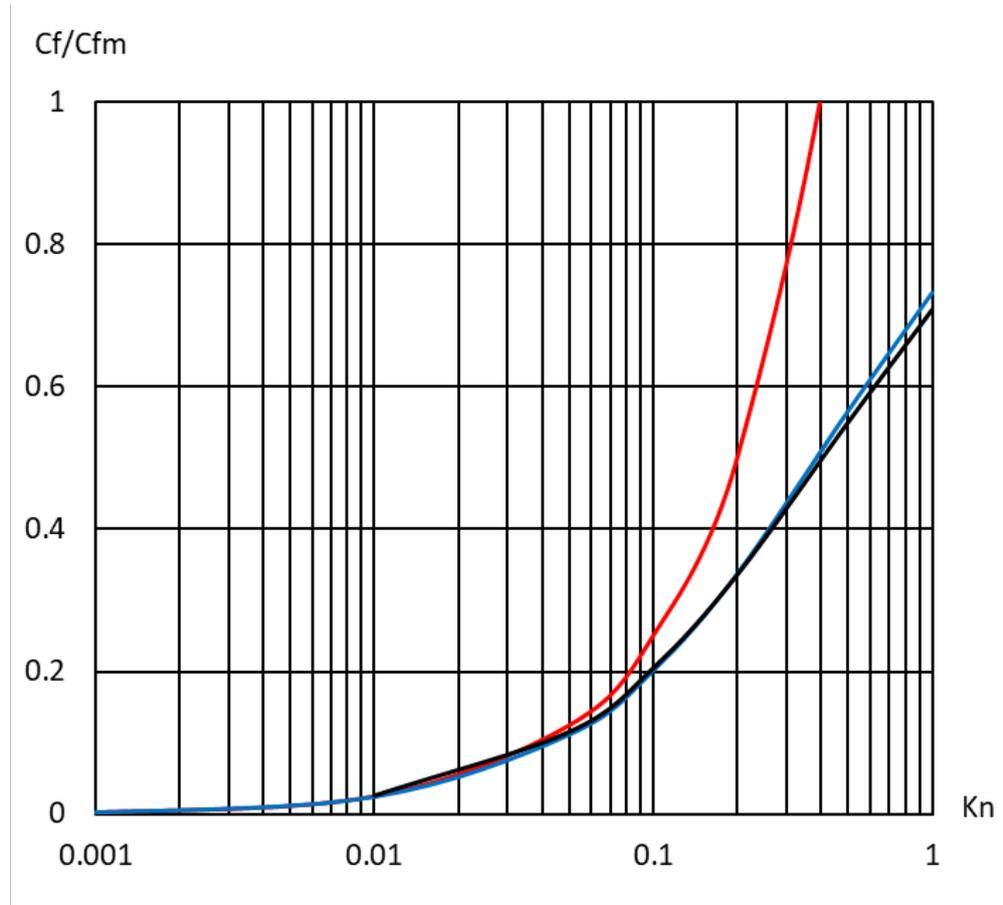


Рисунок 18. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. $M=0.1$. Красный – НСФ с условиями прилипания, синий – НСФ с условиями скольжения пограничного слоя, чёрный - модельное кинетическое уравнение.

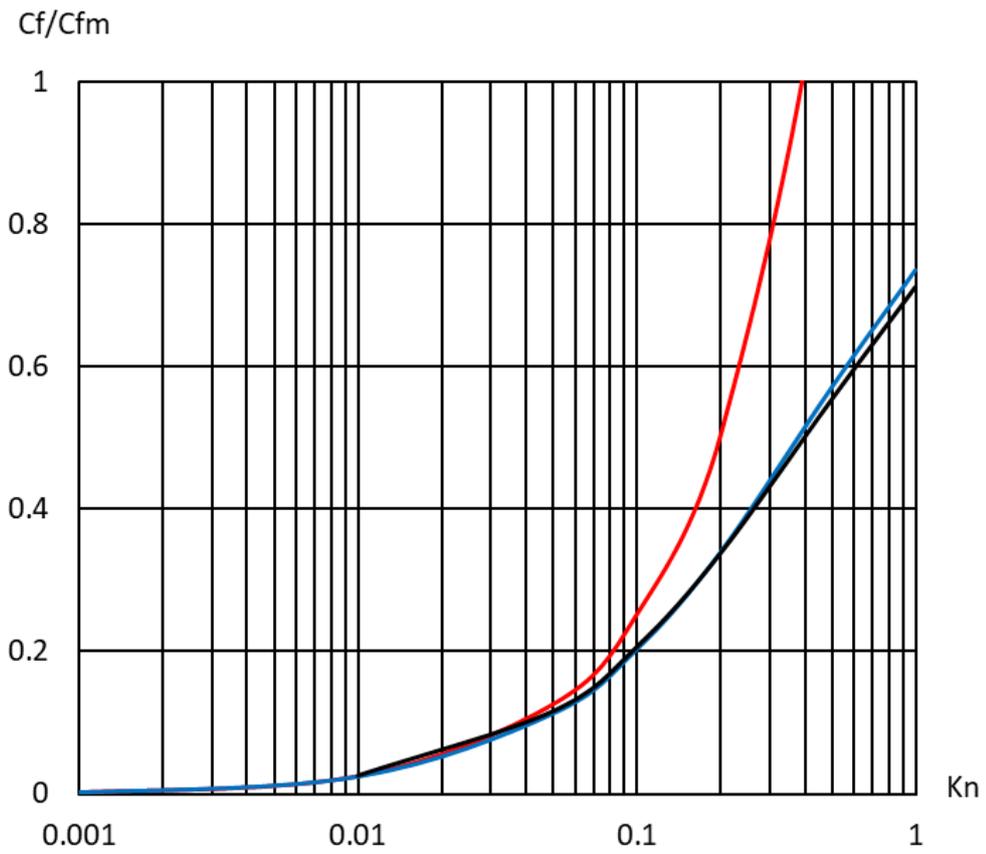


Рисунок 19. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. $M=0.5$. Красный – НСФ с условиями прилипания, синий – НСФ с условиями скольжения пограничного слоя, чёрный - модельное кинетическое уравнение.

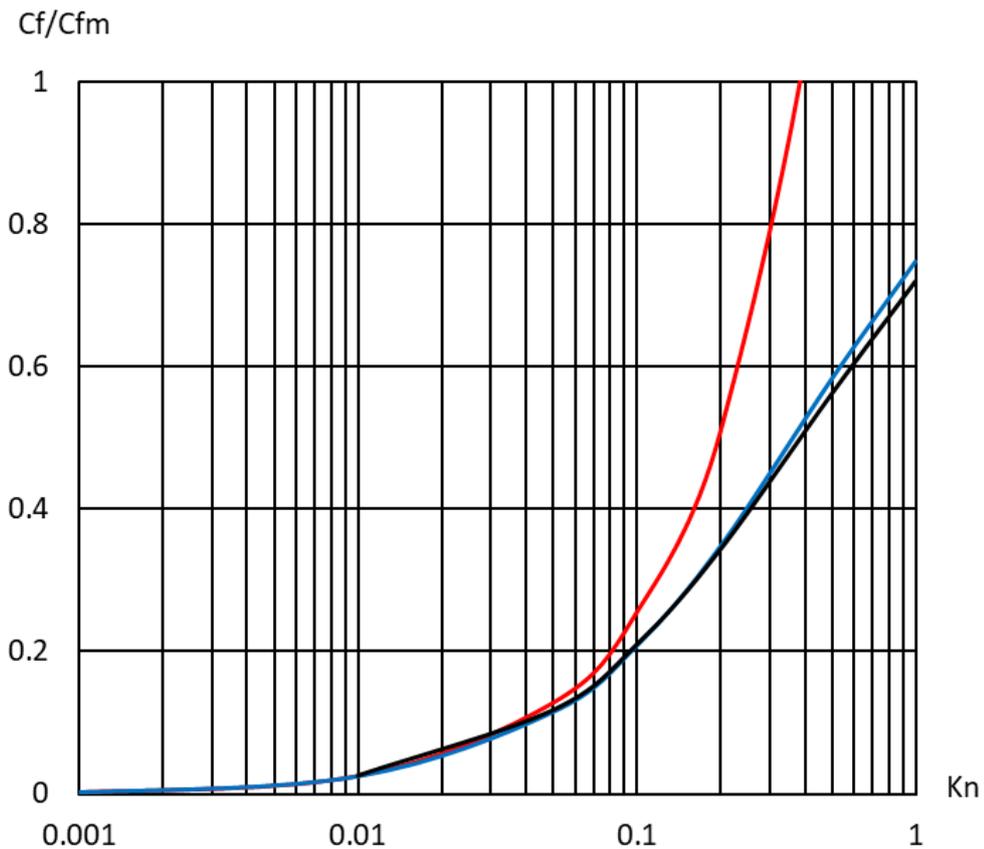


Рисунок 20. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. $M=1$. Красный – НСФ с условиями прилипания, синий – НСФ с условиями скольжения пограничного слоя, чёрный - модельное кинетическое уравнение.

На приведённых выше иллюстрациях, показаны графики зависимости отношения коэффициентов трения от числа Кнудсена для дозвуковых ($M=0.1, 0.5$) и трансзвуковых ($M=1$) чисел Маха. Из иллюстраций можно заметить, что для малых чисел Кнудсена значения коэффициентов для всех моделей практически совпадают. Это объясняется тем, что при малых числах Кнудсена модель НСФ теоретически обоснована. С увеличением числа Кнудсена модель НСФ с граничными условиями прилипания имеет наибольшее отклонение от кинетического решения, которое можно считать эталонным. Модель НСФ с граничными условиями скольжения пограничного слоя имеет удовлетворительное совпадение со значениями, полученными с помощью кинетической модели, даже при высоких числах Кнудсена.

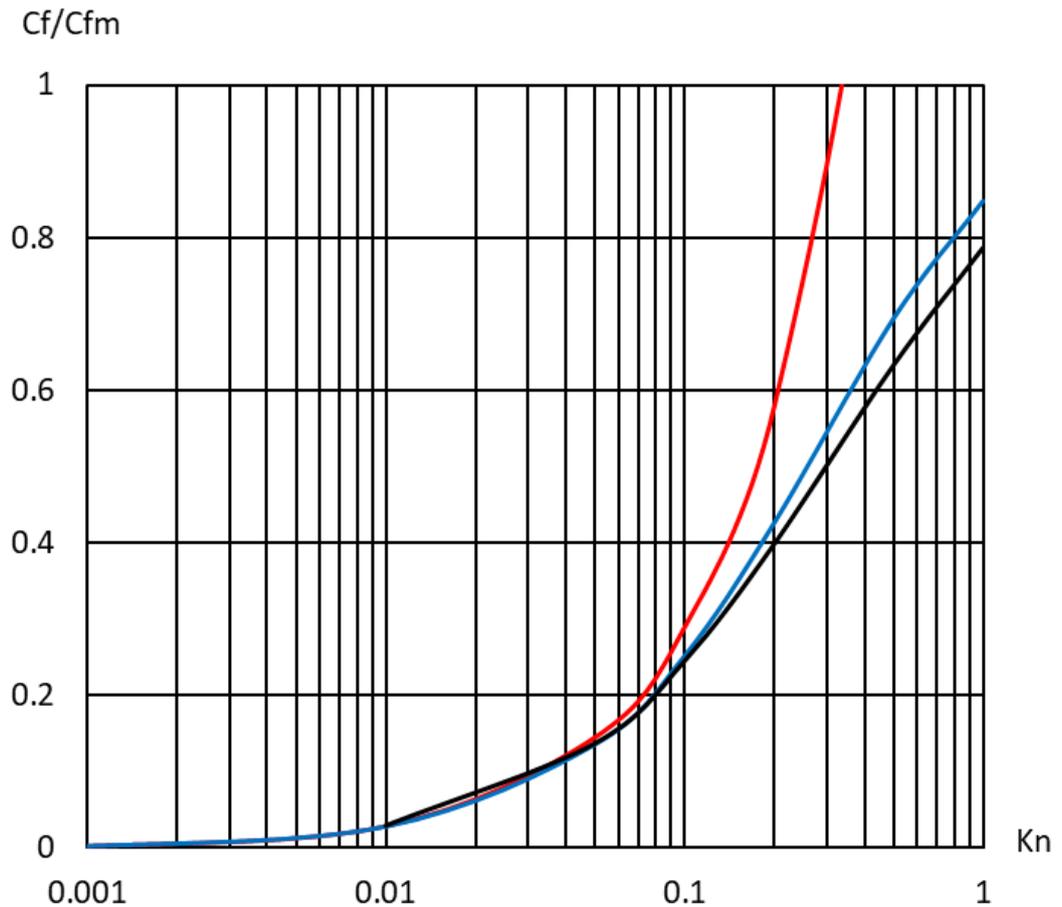


Рисунок 21. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. $M=3$. Красный – НСФ с условиями прилипания, синий – НСФ с условиями скольжения пограничного слоя, чёрный - модельное кинетическое уравнение.

На Рисунке 21 видно, что повышении числа Маха до сверхзвуковых значений не дает преимуществ кинетическим граничным условиям для течений с малым числом Кнудсена. Однако, для переходных течений заметное отклонение начинает показывать и модель НСФ с граничными условиями скольжения пограничного слоя.

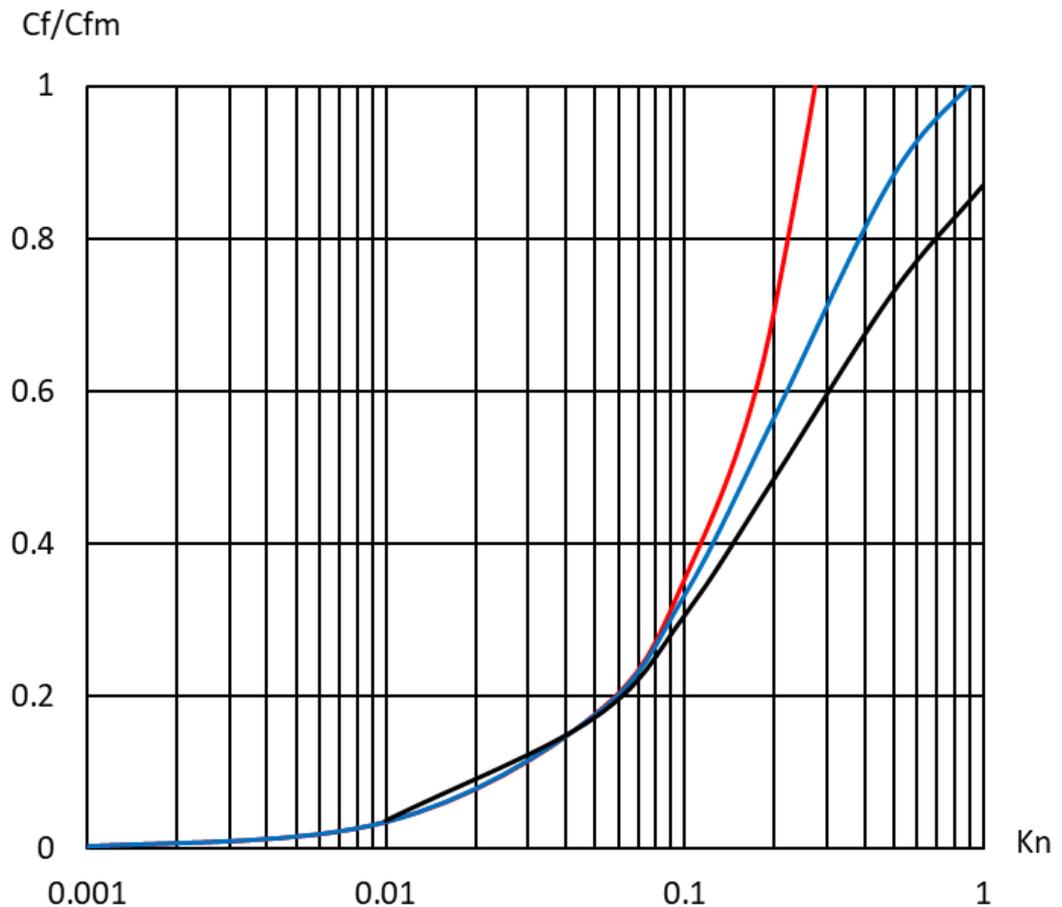


Рисунок 22. Зависимость коэффициента трения от числа Кнудсена. $M=5$. Красный – НСФ с условиями прилипания, синий – НСФ с условиями скольжения пограничного слоя, чёрный - модельное кинетическое уравнение.

Для течений разреженного газа с гиперзвуковыми скоростями, физически адекватные величины для отношений коэффициентов трения дает лишь кинетическая модель с описанием взаимодействия газа с твёрдой поверхностью на молекулярном уровне, что показано на Рисунке 22. Для высоких чисел Кнудсена модель НСФ с граничными условиями скольжения пограничного слоя даёт значения отношения коэффициентов трения выше значения теоретического предела, что является физически неверным.

2.4. Выводы к Главе 2

Результаты расчетов коэффициента трения показывают:

- граничные условия прилипания могут быть использованы при $Kn < 0.1$;

- граничные условия скольжения пограничного слоя применимы для сверхзвуковых течений до $Kn < 1$, и для гиперзвуковых течений до $Kn < 0.1$.

В остальных областях, определяемых числами Маха и Кнудсена, целесообразно использовать комбинированные кинетико-гидродинамические модели, предлагаемые в Главе 1 настоящей работы.

ГЛАВА 3. РАСЧЁТ ГИПЕРЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПОВЕРХНОСТИ БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ

3.1. Постановка задачи

В настоящей Главе численно исследуется гиперзвуковое обтекание бесконечно острой кромки с нулевым углом атаки. Как указывалось выше, результаты экспериментальной работы [54] позволяют утверждать, что, если угол раствора клина (Рисунок 23) не превышает $\approx 40^\circ$, интерференция верхней и нижней поверхностей клина практически отсутствует. Этот факт позволяет рассматривать настоящие объекты, обладающих хоть и достаточно малым, но конечным радиусом кривизны передней кромки (к таким объектам можно отнести, например, переднюю кромку воздухозаборника прямооточного гиперзвукового двигателя) как бесконечно тонкую пластину.

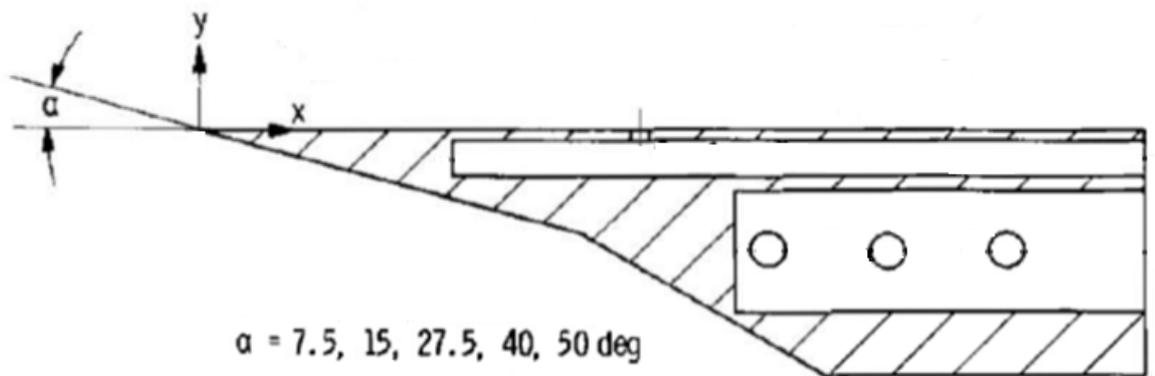


Рисунок 23. Схема экспериментальной установки [54]. α – угол заострения передней кромки (в градусах).

Пристальное внимание уделено течению в окрестности особой точки с позиций молекулярно-кинетической теории газов. Уместно напомнить, что особой точкой считается точка разделения молекулярных потоков на два потока, принадлежащих разным статистикам. Эта точка является математическим объектом и наибольший интерес представляет для теоретических исследований. В реальности (в эксперименте или в натурных испытаниях) такой особой точки не существует.

На Рисунке 24 схематически проиллюстрировано движение молекулярных потоков в расширенном кнудсеновском слое в окрестности носика обтекаемого клина. В двух произвольных точках геометрического пространства OXY построена декартова система координат пространства $O\xi_x\xi_y$ молекулярных скоростей ξ . Из передней кромки клина проведены линии, которые являются траекториями молекулярных потоков, пришедших из области в окрестности носика клина. Стоит уточнить: рассматривается электрически нейтральная среда при отсутствии гравитационных сил. В этом случае молекулярные траектории представляют собой прямые линии.

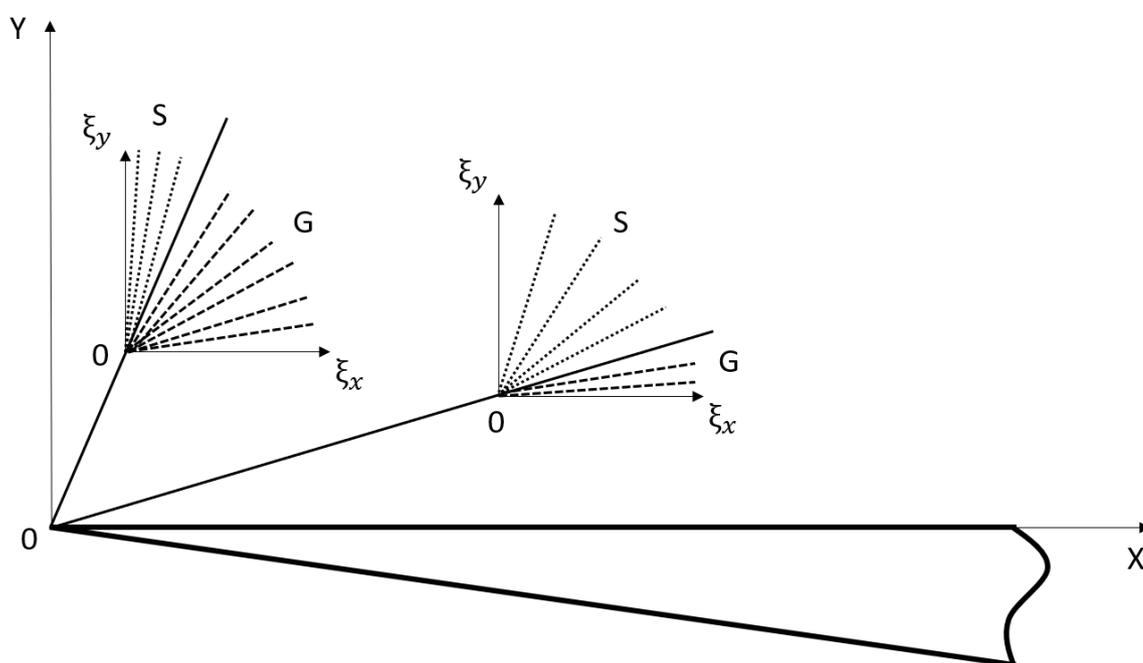


Рисунок 24. Схема распределения молекулярных потоков в кнудсеновском слое. OXY и $O\xi_x\xi_y$ – системы координат в геометрическом пространстве и в пространстве молекулярных скоростей. G – область молекулярных потоков, сформировавшихся в газовой среде перед носиком клина. S – область молекулярных потоков, отраженных поверхностью клина.

Указанные линии делят пространство молекулярных скоростей на две области, условно обозначенные G и S. В области G присутствуют молекулярные потоки, сформировавшиеся в газовой среде перед носиком клина. В области S – потоки, отраженные поверхностью клина. На линии, разделяющей эти области, имеют место две различные функции распределения молекул по скоростям, а сама

линия является линией разрыва функции распределения в пространстве молекулярных скоростей.

Из общих физических соображений понятно, что разрыв функции распределения вдоль траектории невозможен, что учтено при постановке данной задачи. Разрыв возникает между соседними, сколь угодно близкими траекториями, где имеет место разрыв первого рода. Если положение линии (в общем случае будет иметь место поверхность) разрыва определено, то вычисление моментов функции распределения (макропараметров газа) осуществляется стандартными методами вычислительной математики.

Описанное течение характерно для обтекания поверхностей свободномолекулярным потоком, которое в значительной степени реализуется в расширенном кнудсеновском слое. В частности, такого рода разрывы возникают всегда при взаимодействии газа с поверхностью и отсутствуют только в условиях теплового и динамического неравновесия. Специально отметим, что в условиях сильно неравновесных течений для описания такого процесса взаимодействия используют модели молекулярно-кинетической теории газов, даже в достаточно плотных средах. К моделям такого рода относится и используемое в данной работе модельное кинетическое уравнение многоатомных газов [24]. Экспериментальные данные [54] получены для воздуха.

Математическую модель обтекания тонкой пластины целесообразно строить в полярных системах координат как в геометрическом, так и скоростном пространствах. Полнос полярной системы является особой точкой, так как не содержит полярного угла. Эта особая точка отличается от бесконечно малого элемента поверхности отсутствием нормали, т.е. полярного угла, определяющего направление нормали. Можно предположить, что это свойство особой точки потока и особой точки системы координат делает полярную систему наиболее удобной. В трехмерной задаче используется цилиндрическая система координат. Допускается даже криволинейная ось этой системы.

Спецификой решаемой задачи является то, что полярные углы геометрической и скоростной системы координат взаимосвязаны. Полярный угол

геометрической системы должен быть кратен полярному углу скоростной. Такая связь не характерна для кинетических уравнений, в которых геометрическое и скоростное пространства независимы. Для решения данной задачи эта взаимосвязь необходима для выделения линии разрыва.

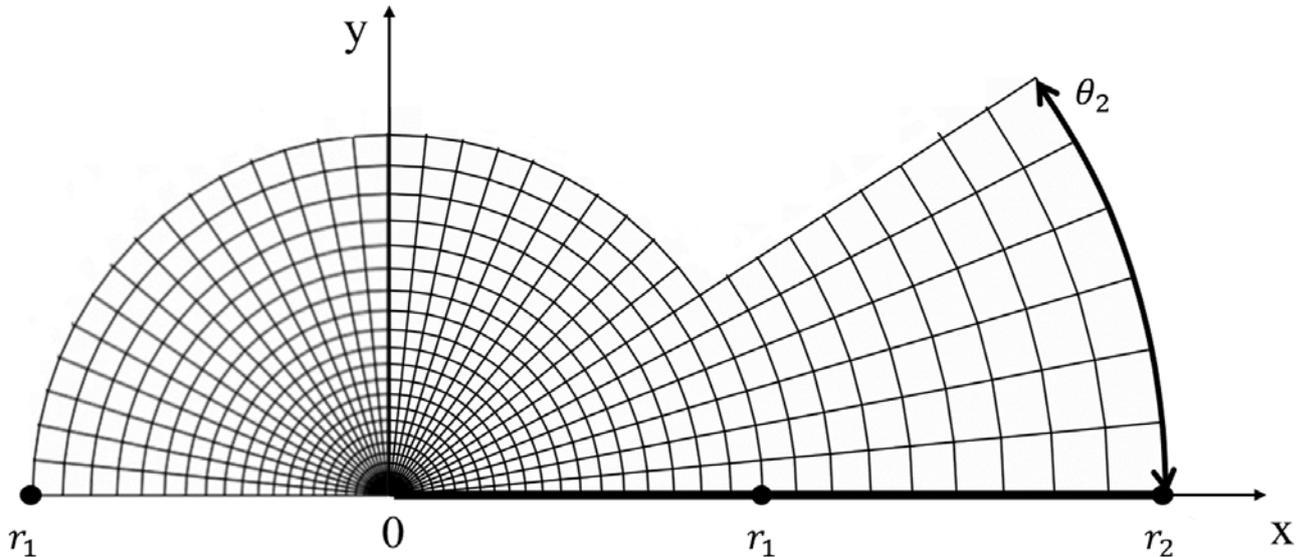


Рисунок 25. Полярная система координат $Or\theta$ геометрического пространства. Пластина изображена утолщенной линией. Дополнительно нанесены оси декартовой системы OXY .

Система координат геометрического пространства $Or\theta$ показана на Рисунке 25. Полюс системы совмещен с особой точкой, т.е. носиком пластины. Сама пластина изображена утолщенной линией. Дополнительно нанесены оси OX и OY прямоугольной декартовой системы, используемые для вычисления моментов функции распределения и иллюстрации результатов. В пространстве молекулярных скоростей полюс системы координат $O\xi\psi$ соответствует $\xi = 0$. На Рисунке 3 изображен первый квадрант этой системы.

Решение кинетического уравнения будет строиться вдоль траектории молекулярного потока $\xi \in (0, \xi_{max}), \psi = const$. Это позволит выделить линии разрыва функции распределения, для которых $\psi = \theta$.

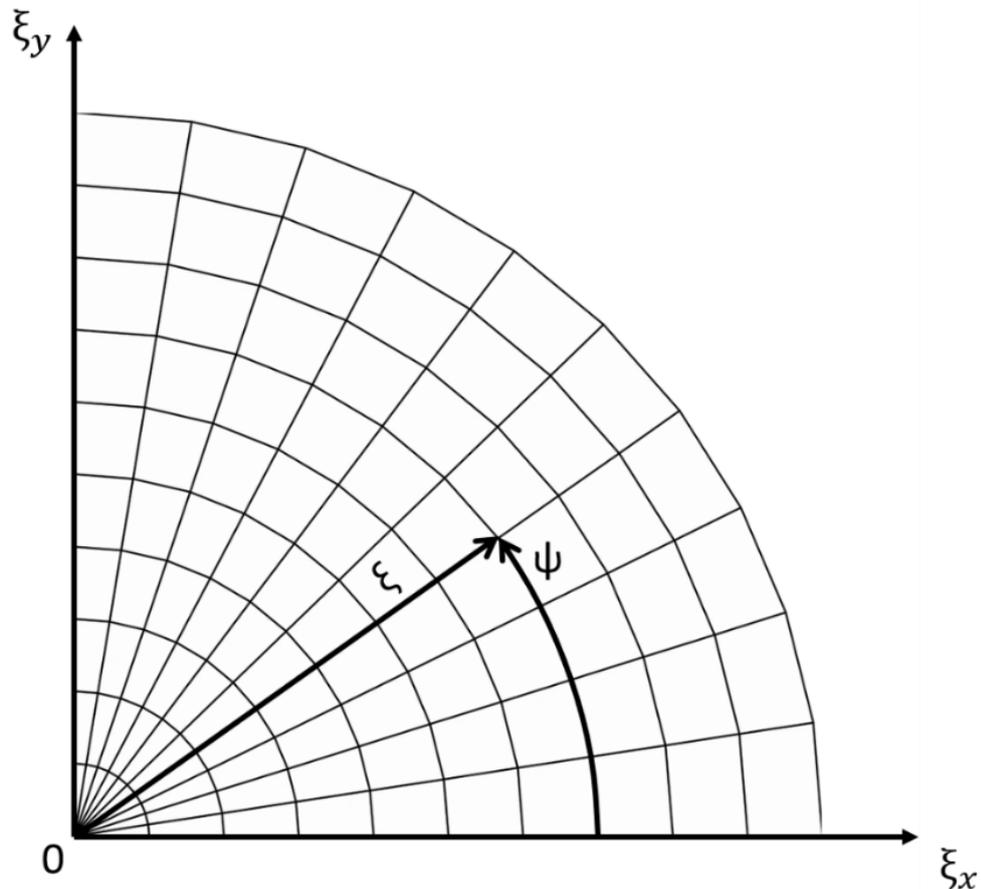


Рисунок 26. Первый квадрант полярной системы координат $0\xi\psi$ пространства молекулярных скоростей ξ . Дополнительно нанесены оси декартовой системы $0\xi_x\xi_y$

Модельное кинетическое уравнение релаксационного типа, записанное вдоль траектории молекулярного потока, имеет вид:

$$\frac{df}{dt} = \frac{f^+ - f}{\tau} \quad \#(28)$$

В этом уравнении:

f – одночастичная функция распределения молекул по скоростям;

f^+ – функция распределения, моделирующая интеграл обратных столкновений;

τ – характерное время релаксации. Символом d/dt обозначена лагранжева производная.

Специфика кинетических уравнений релаксационного типа заключается в следующем. После элементарных преобразований приходим к выражению

$$f + \frac{df}{dt}\tau = f^+ \text{ или}$$

$$f + \frac{df}{dt}\tau = f(t = t_1) = f^+ \#(29)$$

Моменты времени t_0 и t_1 соответствуют начальной и конечной точкам траектории молекулярного потока на интервале времени τ .

Стоит отметить, что характерное время релаксации близко к среднему времени свободного пробега молекулы τ_c . В области сильнонеравновесных течений, когда существенное изменение параметров газа происходит на интервале τ_c , зависимость (29) имеет характер сильного допущения. Тем не менее, если шаг вычислительной сетки $\Delta t \ll \tau$, модель (28) вполне адекватно описывает реальное течение.

Как указывалось выше (см. Введение) это утверждение не относится к ВГК-модели [7], в которой f^+ соответствует локально максвелловской функции распределения и, следовательно, неравновесные напряжения (девиатор напряжений) и тепловые потоки релаксируют одновременно, что противоречит известным физическим законам. В частности, в одноатомных газах тепловые потоки релаксируют в полтора раза медленнее напряжений. Еще более худший результат дает эллипсоидальная модель [13], в которой напряжения релаксируют медленнее тепловых потоков. В настоящей работе для двухатомного газа используется модель [24], переходящая в S-модель [85] в случае одноатомного газа, и лишенная указанных недостатков.

3.2. Численная реализация задачи

Модельное кинетическое уравнение [24] записано для двух функций распределения: f_t – функция распределения молекул по скоростям при поступательном движении; f_r – функция распределения молекул по вращательным энергиям. Характерное время релаксации соответствует времени релаксации напряжений τ_c .

Адаптация f_t и f_r к условиям решаемой задачи аналогична, поэтому обозначим обе функции общим символом f , как это записано в (19). Время релаксации $\tau = \tau_p = \mu/(\rho RT_t)$, где ρ – плотность, R – удельная газовая постоянная.

После формального интегрирования (19) на интервале от t_0 до t_1 и в предположении стационарного течения приходим к выражению:

$$f_1 = f_0 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{f^+}{\tau_p} dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{f}{\tau_p} dt \quad \#(30)$$

Эта интегральная форма дифференциально-интегрального уравнения (28) отличается от классического интегрального уравнения [31] тем, что в ней не учтено рассеивание на интервале (t_0, t_1) молекул, образовавшихся в результате обратных столкновений. Однако на интервалах времени, меньших среднего времени свободного пробега, молекулы, на которых релаксационные уравнения физически адекватны, изменение функции распределения в результате как прямых, так и обратных столкновений достаточно мало. Изменение статистики вновь образовавшихся молекул, описываемой f^+ , на таком интервале времени представляет собой величину второго порядка малости. Можно ожидать, что на мелких геометрических расчетных сетках, соответствующих малому интервалу времени, погрешность (30) не будет превышать погрешности самой физико-математической модели, положенной в основу кинетических уравнений релаксационного типа.

Подынтегральные функции (30) на интервале $\Delta t = t_1 - t_0$ аппроксимировались линейной зависимостью, а интеграл по времени заменялся интегралом по пространству на интервале $\Delta l = \Delta t \xi$. Полученная дискретная форма (30) имеет вид:

$$f_1 = \left(\left(1 - \frac{\Delta l}{2\xi\tau_{p0}} \right) f_0 + \frac{\Delta l}{2\xi} \left(\frac{f_0^+}{\tau_{p0}} + \frac{f_1^+}{\tau_{p1}} \right) \right) \left(1 + \frac{\Delta l}{2\xi\tau_{p1}} \right)^{-1} \quad \#(31)$$

В особой точке пространства скоростей ($\xi = 0$) при условии стационарного течения из (28) следует $f_1 = f_1^+$.

Решение (31) вдоль траектории молекулярного потока связано с интерполяцией значений f_0 и τ_{p0} на геометрической сетке, проиллюстрированной на Рисунке 25. В настоящей работе использована линейная интерполяция. Для молекулярных скоростей, лежащих в разных квадрантах пространства скоростей, требуются различные геометрические схемы решения, что усложняет программный код, но позволяет выделять линии разрыва функции распределения в первом и во втором квадрантах. Пример геометрической схемы представлен на Рисунке 27. В третьем и четвертом квадрантах линии разрыва отсутствуют по естественным причинам.

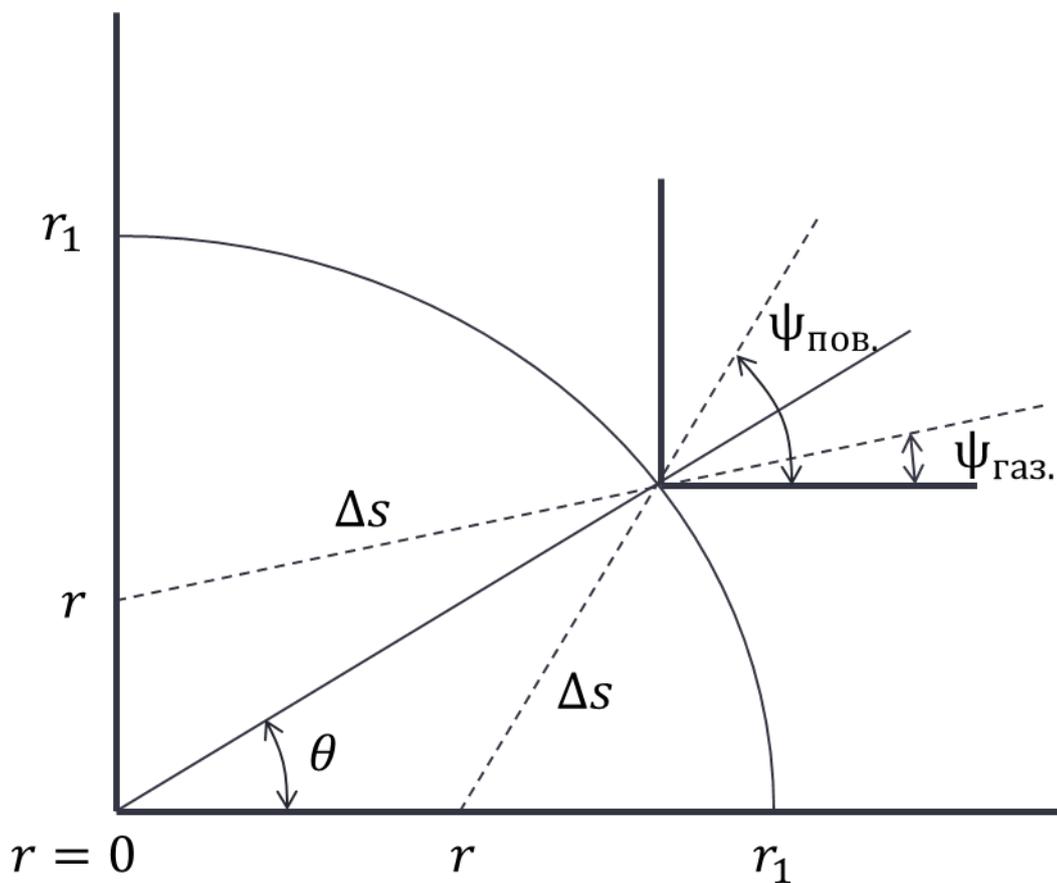


Рисунок 27. Геометрическая схема для расчёта параметров в первом квадранте.

Для сокращения размерности задачи в пространстве молекулярных скоростей, по аналогии с изложенным выше методом решения течения Куэтта, вводились функции:

$$F_n = \int f_t d\xi_z$$

$$F_p = \int \xi_z^2 f_t d\xi_z$$

$$\Phi = \int f_r d\xi_z$$

Соответствующие им функции f^+ , записанные с использованием моментов, вычисленных в декартовой системе координат:

$$F_M^+ = \frac{n}{\sqrt{2\pi T_t^+}} \exp\left(-\frac{c_x^2 + c_y^2}{2T_t^+}\right)$$

$$F_n^+ = F_M^+ \left(1 + \frac{\varphi_x c_x + \varphi_y c_y}{15n(T_t^+)^2} \left(\frac{c_x^2 + c_y^2}{T_t^+} - 4\right)\right)$$

$$F_u^+ = u_x F_n^+$$

$$F_p^+ = T_t^+ F_n^+ + \frac{2}{15} \frac{\varphi_x c_x + \varphi_y c_y}{nT_t^+} F_M^+$$

$$\Phi^+ = \frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} T_r^+ F_n^+$$

Моменты функции распределения выражены через декартовы проекции молекулярной скорости: $\xi_x = \xi(\cos(\psi))$ и $\xi_y = \xi(\sin(\psi))$.

$$n = \int F_n d\xi_x d\xi_y$$

$$u_x = \frac{1}{n} \int \xi_x F_n \xi_x d\xi_y$$

$$u_y = \frac{1}{n} \int \xi_y F_n \xi_x d\xi_y$$

$$P_{xx} = \int \xi_x^2 F_n d\xi_x d\xi_y - nu_x^2$$

$$P_{yy} = \int \xi_y^2 F_n d\xi_x d\xi_y - nu_y^2$$

$$P_{zz} = \int F_p d\xi_x d\xi_y$$

$$P_{xy} = \int \xi_x \xi_y F_n d\xi_x d\xi_y - nu_x^2 u_y^2$$

$$nT_r = \frac{2(\gamma - 1)}{(5 - 3\gamma)n} \int \Phi d\xi_x d\xi_y$$

$$\varphi_x = \frac{1}{2} \int \xi_x \left((\xi_x^2 + \xi_y^2) F_n + F_p \right) d\xi_x d\xi_y - u_x P_{xx} - \frac{3}{2} u_x p - u_y P_{xy} - \frac{1}{2} n u_x (u_x^2 + u_y^2)$$

$$\varphi_y = \frac{1}{2} \int \xi_y \left((\xi_x^2 + \xi_y^2) F_n + F_p \right) d\xi_x d\xi_y - u_y P_{yy} - \frac{3}{2} u_y p - u_x P_{xy}$$

$$- \frac{1}{2} n u_{xy} (u_x^2 + u_y^2)$$

$$\omega_x = \int \xi_x \Phi d\xi_x d\xi_y - u_x \frac{(5 - 3\gamma)}{2(\gamma - 1)} n T_r$$

$$\omega_y = \int \xi_y \Phi d\xi_x d\xi_y - u_y \frac{(5 - 3\gamma)}{2(\gamma - 1)} n T_r$$

В качестве характерных величин или единиц измерения в безразмерных выражениях использованы параметры невозмущенного потока:

$$\rho_\infty, T_\infty, p_\infty = \rho_\infty R T_\infty - \text{единица напряжения,}$$

$$\tau_\infty = \frac{\mu_\infty}{p_\infty} - \text{единица времени,}$$

$$\sqrt{RT_\infty} - \text{единица скорости,}$$

$$\lambda_\infty = \tau_\infty \sqrt{RT_\infty} - \text{длина свободного пробега или единица длины;}$$

В геометрическом пространстве (Рисунок 25) использовалась расчетная сетка с переменным шагом по r . В полюсе $\Delta r = 0.1\lambda_\infty$, на периферии вычислительной области $\Delta r = \lambda_\infty$. Протяженность сетки $r_1 = 5\lambda_\infty$. Максимальная протяженность сетки $r_2 = 100\lambda_\infty$.

Шаг полярного угла $\Delta\theta$ принимался постоянным и был определен соотношением $r_2\Delta\theta = \lambda_\infty$. Раствор полярного угла $\theta_2 = \pi/6$.

Сетка пространства скоростей строилась с постоянным шагом по переменным ξ и ψ : $\Delta\xi = 0.1\sqrt{RT_\infty}$, $\Delta\psi = 0.5\Delta\theta$. Граница скоростной сетки $\xi_{max} = 20\sqrt{RT_\infty}$. Такие параметры скоростной сетки позволили выполнять законы сохранения до 7-го знака. При вычислении макропараметров использовалась аппроксимация f полиномом второй степени.

Граничные условия задачи поставлены следующим образом. На дуге радиуса r_1 в интервале угла θ от θ_2 до π и на радиусе с полярным углом θ_2 в интервале от r_1 до r_2 приняты условия невозмущенного потока. Здесь функция

распределения молекул по скоростям является максвелловой функцией с параметрами невозмущенного потока. На радиусе с полярным углом $\theta = \pi$ выставлены граничные условия симметрии, т.е. $f(\xi_y < 0) = f(\xi_y > 0)$. На нижней по потоку границе (дуга с радиусом r_2) приняты граничные условия Неймана, а именно – вторые производные по координате X всех макропараметров приравнены нулю. По значениям этих макропараметров восстановлены аппроксимирующие функции вида

$$f_{At} = f_M \left(1 + \frac{1}{\rho(RT_t)^2} \left(\frac{1}{2}(p_{xx}c_x^2 + p_{yy}c_y^2 + p_{zz}c_z^2) + p_{xy}c_xc_y + \left(\frac{c^2}{5RT_t} - 1 \right) (\varphi_xc_x + \varphi_yc_y) \right) \right)$$

$$f_{Ar} = kT_r \left(\frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} f_{At} + f_M \frac{(\omega_xc_x + \omega_yc_y)}{\rho R^2 T_t T_r} \right)$$

$$f_M = \frac{n}{(2\pi RT_t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t}\right)$$

Аппроксимирующие функции уменьшенной размерности имеют следующий вид:

$$F_{Mt} = \frac{n}{2\pi T_t} \exp\left(-\frac{c_x^2 + c_y^2}{2T_t}\right)$$

$$F_{An} = F_{Mt} \left(1 + \frac{1}{p} \left(\frac{p_{xx}}{2} \left(\frac{c_x^2}{T_t} - 1 \right) + \frac{p_{yy}}{2} \left(\frac{c_y^2}{T_t} - 1 \right) + p_{xy} \frac{c_xc_y}{T_t} + \frac{\varphi_xc_x + \varphi_yc_y}{5T_t} \left(\frac{c_x^2 + c_y^2}{T_t} - 4 \right) \right) \right)$$

$$F_{Ap} = T_t F_{An} + \frac{1}{p} \left(\frac{2}{5} (\varphi_xc_x + \varphi_yc_y) - T_t (p_x + p_y) \right) F_{Mt}$$

$$\Phi_A = \frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} T_t F_{An} + \frac{\omega_xc_x + \omega_yc_y}{nT_t} F_{Mt}$$

На поверхности пластины принимался диффузный закон взаимодействия молекул газа с поверхностью: концентрация отраженных молекул определялась условиями непротекания, групповая скорость отраженных молекул относительно

пластины принималась равной нулю, температура отраженных молекул считалась равной температуре пластины.

Функция распределения отражённых молекул:

$$F_n = \frac{n_w}{2\pi T_w} \exp\left(-\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{2T_w}\right)$$

$$F_p = T_w F_n$$

$$\Phi = \frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} F_p$$

$$n_w = -\sqrt{\frac{2\pi}{T_w}} \int_{-\infty}^0 \xi_y F_n d\xi_x d\xi_y$$

3.3. Результаты расчётов

Расчеты проводились для течения, исследованного экспериментально в [54]. Число Маха принималось равным $M_\infty = 10.15$. Температура пластины $T_w = 2.16T_\infty$. Рассматривалось течение двухатомного газа. Свободные параметры модели: показатель степени s для аппроксимации вязкости степенной зависимостью $\mu = \mu(T_t^s)$ принят равным $s = 0.72$. Аппроксимация для Z представлена следующим выражением: $Z = 1.3(1 + 0.75 T_r/T_t)$. Значения этих свободных параметров взяты из работы [24], где они получены из сравнения экспериментальных и расчётных данных для задачи о профиле ударной волны (Рисунок 28).

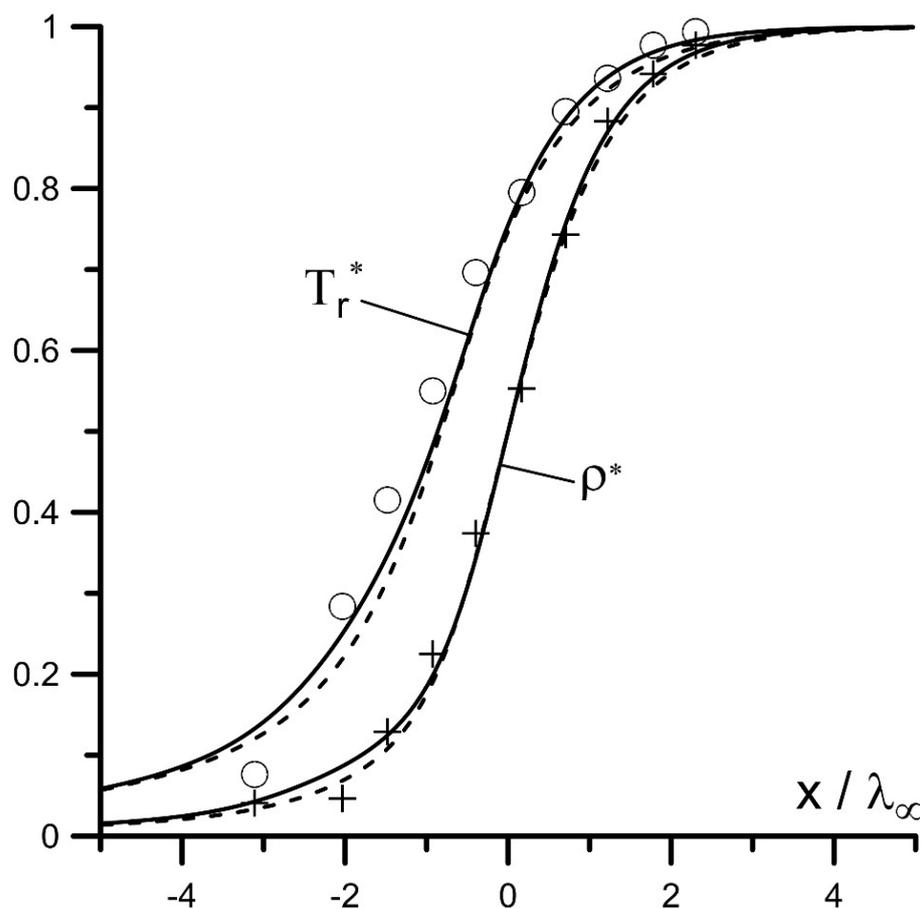


Рисунок 28. Приведенные профили плотности и вращательной температуры в азоте. Символы \circ и $+$ – экспериментальные данные [89]; Аппроксимации $\mu = \mu(T_t^s)$ и $Z = 1.3(1 + 0.75 T_r/T_t)$. Сплошная линия – разрабатываемая модель. Штриховая линия соответствует R-модели.

T_r^* и ρ^* на Рисунке 28 – вращательная температура и плотность, приведённые к единичному отрезку. Выражение для Z отличается от теоретически обоснованной зависимости из работы [90] только множителем 1.3, который подобран опытным путём. Такая же аппроксимация для Z использована в работе [18], но для иного режима течения.

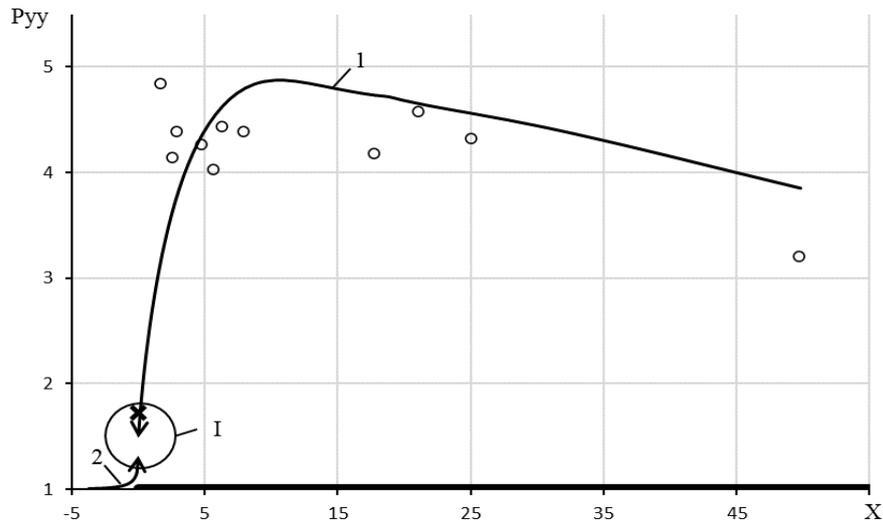


Рисунок 29. Распределение нормального напряжения P_{yy} на линии $y = 0$. Кружками отмечены экспериментальные данные [6-пластина], 1 и 2 – расчетная кривая. Крестик соответствует значению P_{yy} в особой точке, т.е. на носике пластины. Область I увеличена на Рисунке 30.

На Рисунке 29 показано распределение нормального напряжения P_{yy} на линии $y = 0$ вдоль координаты OX декартовой системы координат или координаты r при $\theta = 0$ полярной системы. На поверхности пластины расчетные данные удовлетворительно согласуются с экспериментальными. Перед носиком пластины (кривая 2) газ достаточно сильно возмущен, что не учитывается в ряде цитированных работ.

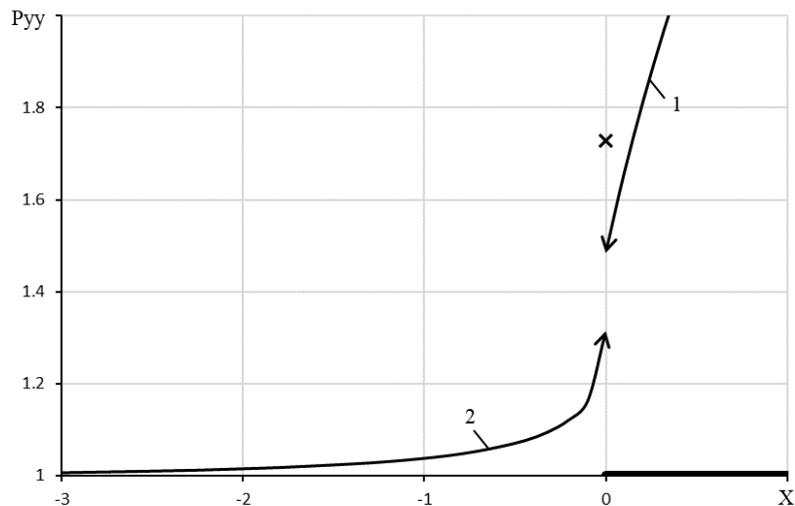


Рисунок 30. Увеличенное изображение области I Рисунка 29.

На носике пластины, в особой точке течения, имеет место разрыв, подробно показанный на Рисунке 30. Обращает на себя внимание характер разрыва в особой точке, левая окрестность которой принадлежит набегающему потоку, а правая – поверхности пластины. Значение P_{yy} в самой особой точке существенно превышает значения в обеих ее окрестностях.

Этот факт имеет простое объяснение даже при упрощенном рассмотрении. Будем считать, что концентрация молекул (интеграл функции распределения по пространству скоростей) в областях геометрических пространств, непосредственно прилегающих к особой точке, равна единице. Декартова система координат $0\xi_x\xi_y$ соответствует Рисунку 23, на котором показан первый квадрант системы.

В условиях гиперзвукового течения в левой (согласно Рисунку 29) окрестности особой точки почти все молекулы будут сосредоточены в 1-м и 4-м квадрантах пространства скоростей, так как только незначительное количество молекул движется против потока газа. Концентрации молекул в каждом из этих квадрантов (интегралы функции распределения по соответствующим квадрантам) будет составлять примерно по 0.5, а в квадрантах 2 и 3 – примерно 0.

В правой окрестности особой точки квадранты 3 и 4 заполнены так же, как и в левой. Это обусловлено тем, что они содержат молекулы, пришедшие из той же области течения, расположенной выше пластины. В квадрантах 1 и 2 содержатся отраженные поверхностью молекулы. Если пренебречь различием температур поверхности и газа, то суммарная концентрация в квадрантах 1 и 2 должна соответствовать суммарной концентрации квадрантов 3 и 4, т.е. 0.5. При диффузном законе отражения концентрация в квадрантах 1 и 2 будет составлять по 0.25.

В особой точке концентрация молекул в квадрантах 3 и 4 составляет 0 и 0.5, как и в окрестностях этой точки. Квадрант 1 содержит молекулы набегающего потока. Их концентрация принята нами 0.5. Квадрант 2 наполнен отраженными молекулами с концентрацией 0.25. Суммарная концентрация молекул в особой

точке составляет 1.25, т.е. на четверть превосходит концентрацию молекул в ее окрестностях.

Этот модельный эффект возникает в точке, разделяющей газовую среду и твердую поверхность при достаточно больших числах Маха и при любых числах Кнудсена. В реальных условиях такой точки не существует. Взаимодействие набегающего потока с твердой поверхностью происходит в области конечного размера.

Здесь анализировалась концентрация молекул, момент нулевого порядка. Очевидно, аналогичные выкладки справедливы и для моментов более высоких порядков. Графики, представленные на Рисунке 29 и Рисунке 30, демонстрируют описанный эффект для момента второго порядка, P_{yy} .

При решении задачи обтекания острой кромки с использованием гидродинамических уравнений в достаточно широкой области, охватывающей особую точку, наблюдается осцилляция решения [23], что проиллюстрировано на Рисунке 31.

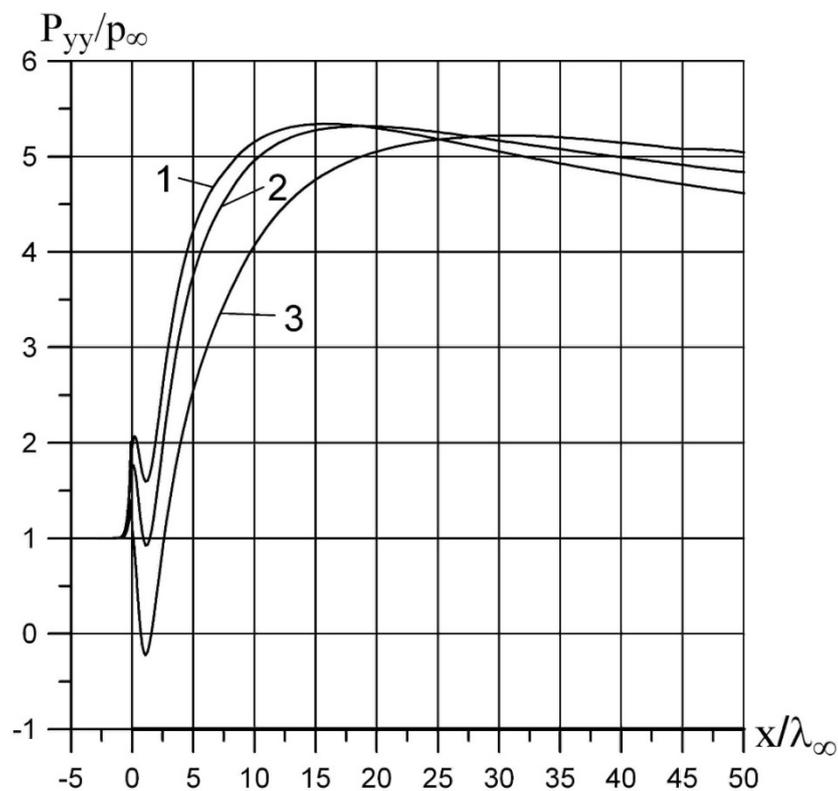


Рисунок 31. Распределение нормального напряжения при $Y=0$. Модель 1-го приближения. Число Маха $M_\infty = 10.15$, температура пластины $T_w = 2.16, \mu \sim T^s$.
1 – $s = 0.5$; 2 – $s = 0.6$; 3 – $s = 0.9$

Как видно на Рисунке 31 в районе передней кромки пластины имеются значительные нефизичные осцилляции. Для кривой 3 можно наблюдать «провал» нормального напряжения P_{yy} до отрицательных значений. При использовании кинетического подхода по описанной методике разрыв решения возникает только в особой точке. В остальной области течения решение является гладким.

Если рассматривать область течения, расположенную выше ($y > 0$) особой точки на сколь угодно малом расстоянии от последней, то разрыв не будет наблюдаться. Все точки этой области принадлежат газовой среде и, следовательно, не являются граничными токами газообразной и твердой сред.

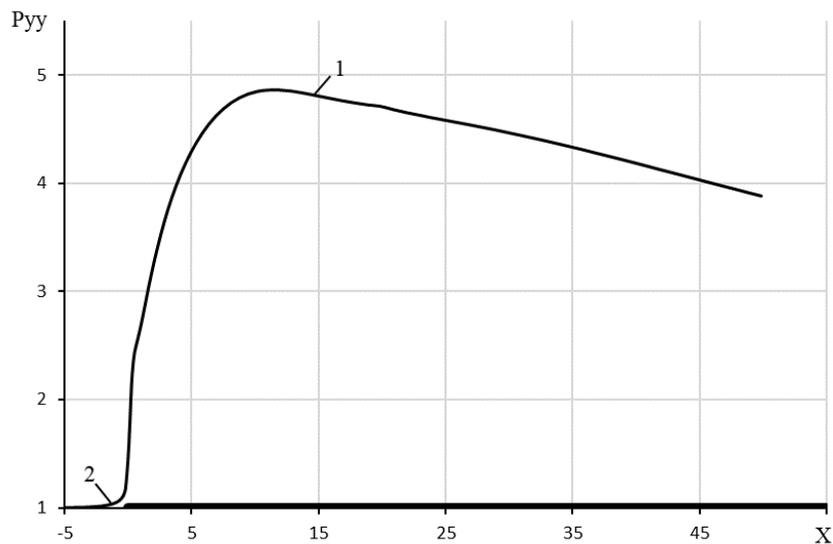


Рисунок 32. Распределение нормального напряжения P_{yy} на линии $y = 0.1\lambda_{\infty}$, 1 и 2 – участки расчетной кривой.

На Рисунке 32 показано распределение P_{yy} вдоль оси OX (r при $\theta = 0$) при значении координаты $y = 0.1\lambda_{\infty}$. Распределение является гладкой кривой. Между участками 1 и 2 разрыв отсутствует. Это характерно только для моментов функции распределения. Разрыв функции распределения между соседними траекториями в пространстве скоростей наблюдается на протяжении нескольких длин свободного пробега молекулы.

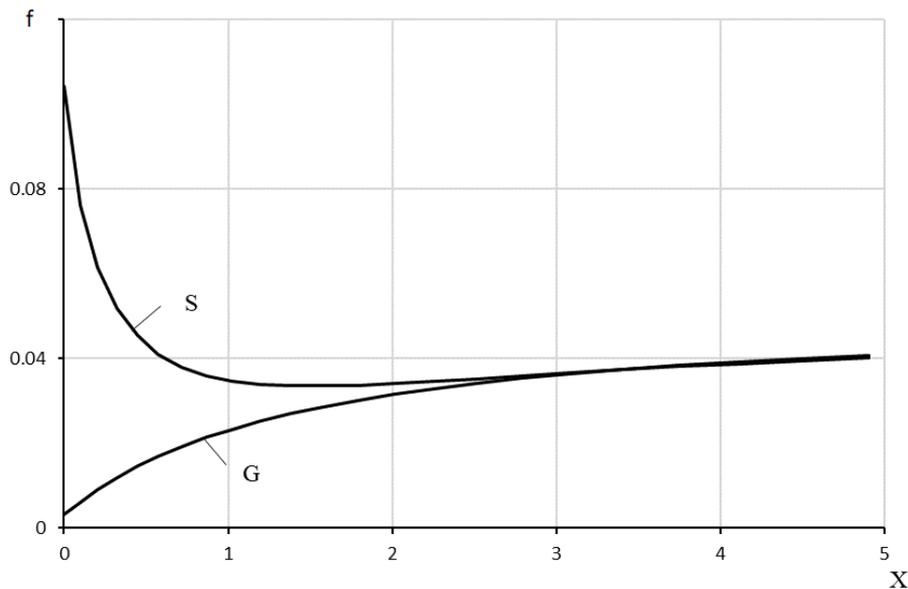


Рисунок 33. Изменение интегралов f функции распределения областей G и S , вычисленных на линии разрыва. Полярный угол линии разрыва $\theta = \pi/8$.

На Рисунке 33 показано сглаживание разрыва функции распределения вдоль линии разрыва по мере удаления от носика пластины. Анализируется значение интеграла

$$f = \int_0^{\infty} f(\xi, \psi = \theta = const) d\xi$$

Полярный угол линии разрыва составлял $\theta = \pi/8$. Интеграл f вычислялся для молекулярных потоков, принадлежащих областям G и S согласно Рисунку 33. Различие в значениях интегралов становится несущественным при $r \approx 3\lambda_{\infty}$. При меньших удалениях от особой точки различие в этих “неполных” моментах функции распределения достаточно велико.

3.4. Выводы к Главе 3

Предложенный метод решения модельного кинетического уравнения позволяет явным образом выделять поверхности разрыва в пространстве молекулярных скоростей. В пределах кнудсеновского слоя такие разрывы играют существенную роль.

Проведенные расчеты показывают, что даже при гиперзвуковом обтекании абсолютно острой кромки имеет место значительное возмущение потока перед кромкой.

Показано, что значение макропараметров газа в особой точке, разделяющей набегающий поток и носовую часть кромки, не является некоторым усредненным значением параметров в окрестности этой точки. В особой точке значение макропараметра значительно выходит за пределы интервала значений, определенных в окрестностях этой точки. Этот факт необходимо учитывать при разработке физико-математических моделей, направленных на описание динамики газа в окрестностях острой кромки.

Также необходимо учитывать, что разрыв значений макропараметров возникает только на линии тока, проходящей через особую точку. На других линиях тока, сколь угодно близких к указанной выше, разрывов не возникает. Имеет место гладкое решение.

Результаты проведенного исследования могут быть полезны при разработке математических моделей течения динамически неравновесных сред.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработан метод комбинирования моментных уравнений различных порядков и кинетической модели для расчёта высоко неравновесных течений в пристеночных областях, позволяющий описать взаимодействие газа с поверхностью на молекулярном уровне.

2. Анализ расчётов комбинированных моделей показал, что модель КИН_НСФ ненамного уступает в точности кинетической модели и существенно уменьшает время расчёта на ЭВМ. При описании течений плотных газов экономичность комбинированных моделей не зависит от числа Кнудсена Kn и слабо зависит от числа Маха M .

3. Сравнение полученных результатов позволяет выделить следующие преимущества комбинированных моделей:

- Точность комбинированных моделей сравнима с точностью кинетической модели;
- Существенно повышена экономичность, в смысле количества вычислительных операций, этих моделей, по сравнению с кинетической моделью;
- Комбинированные модели позволяют выставить физически адекватные граничные условия, которые учитывают молекулярные процессы, в отличие от гидродинамических моделей.
- При числе Кнудсена $Kn < 0.1$, модель НСФ с граничными условиями скольжения пограничного слоя обеспечивает удовлетворительную точность. Комбинированная модель КИН_НСФ даёт удовлетворительные результаты во всей рассмотренной области параметров течения.
- При описании пристеночных течений уточнение гидродинамической составляющей комбинированной модели выше третьего порядка не приведёт к повышению точности. Для практических приложений вполне достаточно неполного второго приближения, т. е. модели КИН_НСФ.

4. Исследованы различные типы граничных условий на твёрдой поверхности для гидродинамической модели НСФ. Результаты численных расчетов коэффициента трения показывают:

- граничные условия прилипания могут быть использованы при $Kn < 0.1$;
- граничные условия скольжения пограничного слоя применимы для сверхзвуковых течений до $Kn < 1$, и для гиперзвуковых течений до $Kn < 0.1$.
- В остальных областях, определяемых числами Маха и Кнудсена, целесообразно использовать комбинированные кинетико-гидродинамические модели, предлагаемые в Главе 1 настоящей работы.

5. Разработан метод решения модельного кинетического уравнения в окрестности абсолютно острой кромки, позволяющий учитывать разрывы пространства скоростей в расширенном кнудсеновском слое.

Предложенный метод решения модельного кинетического уравнения позволяет явным образом выделять поверхности разрыва в пространстве молекулярных скоростей.

Проведенные расчеты показывают, что даже при гиперзвуковом обтекании абсолютно острой кромки имеет место значительное возмущение потока перед кромкой.

Показано, что значение макропараметров газа в особой точке, разделяющей набегающий поток и носовую часть кромки, не является некоторым усредненным значением параметров в окрестности этой точки. В особой точке значение макропараметра значительно выходит за пределы интервала значений, определенных в окрестностях этой точки.

Показано, что разрыв значений макропараметров возникает только на линии тока, проходящей через особую точку. На других линиях тока, сколь угодно близких к указанной выше, разрывов не возникает. Имеет место гладкое решение.

Выполненные автором исследования имеют значение для развития методов решения задач механики жидкости, газа и плазмы, которые имеют существенное значение для развития страны.

Разработанные метод комбинирования гидродинамической и кинетической моделей, а также методика расчёта течения около поверхности большой кривизны в дальнейшем могут быть распространены на задачи большей размерности. В дальнейшем планируется провести дополнительные исследования в этой области, а также рассмотреть иные граничные условия в кинетической области.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берд, Г. Молекулярная газовая динамика / Г.Берд.–М.: Мир, 1981. – 320 с.
2. Bird G. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Oxford: Clarendon Press; 1994. p. 458.
3. Ivanov MS, Gimelshein SF. Computational hypersonic rarefied flows. *AnnuRevFluidMech* 1998; 30:469–505.
4. Muntz EP. Rarefied gas dynamics. *Annu Rev Fluid Mech* 1989;21:387–417.
5. Belotserovskii OM, YanitskiiVYe. The statistical particles-in-cells method to solve problems of rarefied gas dynamics. II. Computational aspects of the method. *ZhVychisl Mat MatFiz* 1975;15(6):1553–67.
6. Больцман, Л. Лекции по теории газов / Л.Больцман. – М.: Гостехиздат, 1953. – 235с.
7. Bhatnagar PL, Gross EP, Krook M. A model for collision processes in gases. *Phys Rev* 1954;94(3):511–25.
8. Continuum equations in the dynamics of rarefied gases. *J Fluid Mech* 1959;6(Pt 4):523–41.
9. Шахов Е. М. Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 5. С. 142–145.
10. Е.М. Шахов. Метод исследования движений разреженного газа. – М.: Наука, 1975, 207 с.
11. Satofuka N, Morinishi K, Oishi T. Numerical solution of the kinetic model equations for hypersonic flow. *Comput Mech* 1993;11(5/6):452–64.
12. Titarev VA, Shakhov Ye M. Numerical calculation of the transverse hypersonic flow of a rarefied gas over a cold plate. *IzvAkadNaukMZhG*2005;5:139–54.
13. Holway L.H. New statistical models for kinetic theory: Methods of construction // *Physics of Fluids*. 1966, vol.9. № 9. P.1658-1673.
14. Галкин В.С., Русаков С.В. О точности модельных кинетических уравнений // Изв. АН СССР. Механ. Жидкости и газа. 2016. № 1. С. 105-114
15. Рыков В.А. Модельное кинетическое уравнение для газа с вращательными степенями свободы // Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, №6, с.107-115;

16. Ларина И.Н., Рыков В.А. Пространственное обтекание конических тел потоком разреженного газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 1. С. 110-117.
17. Рыков В.А., Титарев В.А., Шахов Е.М. Структура ударной волны в двухатомном газе на основе кинетической модели // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2008. № 2. С. 171-182.
18. И.Н., Рыков В.А. Кинетическая модель уравнения Больцмана для двухатомного газа с вращательными степенями свободы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 12. С. 2233-2245.
19. Жданов, В.М. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах / В.М.Жданов, М.Я.Алиевский. –М.: Наука, 1989. – 336 с.
20. Блохинцев, Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды / Д.И.Блохинцев. – М.: Наука, 1981. – 206 с.
21. Титарев, В.А. Течение Пуазейля и термокрип в капилляре на основе кинетической R-модели / В.А.Титарев, Е.М.Шахов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2012. – № 5. – С. 114-125.
22. Черемисин, Ф.Г. Метод решения кинетического уравнения Больцмана для многоатомного газа / Ф.Г.Черемисин. // Ж. вычислит. матем. и матем. физ.. – 2012. – Т. 52. – № 2. – С. 270-287. Tcheremissin FG. Direct numerical solution of the Boltzmann equation. In: Proc. 24th Int. Symp. on Gas Dynamics, 2004. N.Y.: Amer. Inst. Phys.; 2005. p. 677–85.
23. Никитченко Ю.А. Модели неравновесных течений. – М.: Изд-во МАИ, 2013, 160 с.; Yu.A. Nikitchenko. Modelineravnovesnykh techenii. – М.: Izd-vo MAI, 2013, 160 s.
24. Никитченко Ю.А. Модельное кинетическое уравнение многоатомных газов // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2017, том 57, № 11, с. 117–129; англ. пер.: Yu.A. Nikitchenko. Model Kinetic Equation for Polyatomic Gases // Computational Mathematics and Mathematical Physics, November 2017, Volume 57, Issue 11, pp 1843–1855.
25. Седов Л.И. Доклады АН СССР. 1965. Т. 165. №3.

26. Spalart P., Allmaras S. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. Technical Report AIAA-92-0439. American Institute of Aeronautics and Astronautics. 1992.
27. Menter F.R. Two-equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. AIAA Journal. 32(8). August 1994. 1598-1605.
28. Launder B.E., Spalding D.B. Lectures in Mathematical Models of Turbulence. Academic Press. London. England. 1972.
29. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа М.: Наука, 1987. 840 с.
30. Никитченко Ю.А. О целесообразности учета коэффициента объемной вязкости в задачах газовой динамики // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 2. С. 128-138.
31. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. – М.: Наука, 1967. - 440 с. Kogan M.N. Rarefied Gas Dynamics. Moscow: Nauka; 1967.
32. Гусев В.Н., Егоров И.В., Ерофеев А.И., Провоторов В.П. Верификация моделей и методов в динамике разреженных газов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. №2. С.128-137.
33. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов: перевод с английского / Г.Грэд // Механика. – 1952. – №4. – С.71-97.
34. Enskog, D. The kinetic theory of phenomena in fairly rare gases / D.Enskog – Upsala, 1917. – 279 p.
35. Chapman, S. On the law of distribution of velocities and on the theory of viscosity and thermal conduction in a non-uniform simple monatomic gas / S.Chapman // Phil. Trans. Roy. Soc. – 1916. – A 216. – Pp.279.
36. Никитченко Ю.А. Вариант замыкания системы моментных уравнений произвольного порядка // ЖВМ и МФ, 2022, том 62, № 3, с. 499–520.
37. Coron A. Derivation of slip boundary conditions for the Navier–Stokes system from the Boltzmann equation, J. Stat. Phys. 54 (3–4) (1989) 829–857.
38. Yamahakki A. Second order boundary conditions for the drift-diffusion equations of semiconductors, Math. Models Meth. Appl. Sci. 5 (4) (1995) 429–455.

39. Golse F., Jin S., Levermore C.D. A domain decomposition analysis for a two-scale linear transport problem, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 37 (6) (2003) 869–892.
40. Bourgat J.F., Le Tallec P., Tidriri M.D. Coupling Boltzmann and Navier–Stokes equations by friction, *J. Comput. Phys.* 127 (1996) 227–245.
41. Qiu Y. Etude des equations d'Euler et de Boltzmann et de leur couplage. Application a` la simulation numerique d'ecoulements hypersoniques de gaz rarefies, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA), Rocquencourt. 1993. The`se. Universite Paris VI. Paris. 1993.
42. Le Tallec P., Mallinger F. Coupling Boltzmann and Navier–Stokes equations by half fluxes. *J. Comput. Phys.* 136 (1) (1997) 51–67.
43. Klar A., Neunzert H., Struckmeier J. Transition from kinetic theory to macroscopic fluid equations: a problem for domain decomposition and a source for new algorithms. *Transport Theory Stat. Phys.* 29 (1–2) (2000) 93–106.
44. Schneider J. Direct coupling of fluid and kinetic equations. *Transport Theory Stat. Phys.* 25 (6) (1996) 681–698.
45. Klar A. Domain decomposition for kinetic problems with nonequilibrium states, *Eur. J. Mech. B* 15 (2) (1996) 203–216.
46. Klar A. Asymptotic analysis and coupling conditions for kinetic and hydrodynamic equations, *Comput. Math. Appl.* 35 (1–2) (1998) 127–137.
47. Klar A. Convergence of alternating domain decomposition schemes for kinetic and aerodynamic equations, *Math. Meth. Appl. Sci.* 18 (8) (1995) 649–670.
48. Tidriri M. Rigorous derivation and analysis of coupling of kinetic equations and their hydrodynamic limits for a simplified Boltzmann model, *J. Stat. Phys.* 104 (1–2) (2001) 255–290.
49. S. Tiwari S. Coupling of the Boltzmann and Euler equations with automatic domain decomposition, *J. Comput. Phys.* 144 (2) (1998) 710–726.
50. Degond P., Jin S. A smooth transition model between kinetic and diffusion equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 42 (2005) 2671–2687.

51. Degond P., Jin S., Mieussens L. A smooth transition model between kinetic and hydrodynamic equations, *Journal of Computational Physics* 209 (2005) 665–694.
52. Rovenskaya O.I., Croce G. Numerical simulation of gas flow in rough microchannels: hybrid kinetic–continuum approach versus Navier–Stokes. *Microfluid Nanofluid* (2016) 20:81.
53. Березко М. Э., Никитченко Ю. А., Тихоновец А. В. Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта // Труды МАИ, 2017, №94, http://mai.ru/upload/iblock/f5f/berezko_nikitchenko_tikhonovets_rus.pdf
54. Becker M., Boyland D.E. Flow field and surface pressure measurements in the fully merged and transition flow regimes on a cooled sharp flat plate, *Rarefied Gas Dynamics*, Suppl. 4, V. 2 / Ed. by C.L. Brundin. New York: Academic Press, 1967. P. 993–1014.
55. Дорренс У.Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа. М.: Мир, 1966. 439 с.
56. Балашов А.А., Дубинин Г.Н. Обтекание пластины на режиме сильного взаимодействия при наличии массообмена // Труды МФТИ. 2015. Т. 7. № 1.
57. Балашов А.А., Дубинин Г.Н. Исследование обтекания пластины в режиме сильного взаимодействия // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 3. С. 63–70.
58. Кузнецов М.М., Липатов И.И., Никольский В.С. Асимптотический анализ эффектов поступательной неравновесности в гиперзвуковом течении около плоской поверхности с острой передней кромкой // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. Вып. 8. С. 21–28.
59. Кузнецов А.А., Лунев В.В. Нагрев тонкого острого клина в сверхзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 1. С. 115–119.
60. Егоров И.В., Ерофеев А.И. Сопоставление моделирования гиперзвукового обтекания плоской пластины на основе метода Монте-Карло и уравнений Навье–Стокса // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 1. С. 133–145.
61. Шершнев А.А., Кудрявцев А.Н., Бондарь Е.А. Численное моделирование сверхзвукового течения газа около плоской пластины на основе

- кинетических и континуальных моделей // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16. № 6. С. 93–104.
62. Выонг Ван Тьен, Горелов С.Л., Русаков С.В. Эффекты немонотонности аэродинамических характеристик пластины в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды МАИ. 2020. Вып. 110.
63. Сумбатян М.А., Бердник Я.А., Бондарчук А.А. Итерационный метод для решения уравнений Навье–Стокса в задаче об обтекании тонкой пластинки потоком вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Томского гос. ун-та. 2020. № 66.
64. Tannehill J.C., Mohling R.A., Rakich J.V. Numerical computation of the hypersonic rarefied flow near the sharp leading edge of a flat plate // AIAA Paper. 1973 №73-200, pp. 1-13.
65. Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Решетникова Ю.Г., Смотрова Л.В., Условия возникновения и величина эффекта высокоскоростного перехлёста в ударно-сжатой смеси газов // Труды МАИ. Выпуск №95.
66. Никитченко Ю. А. Модели первого приближения для неравновесных течений многоатомных газов // Труды МАИ. 2014. №77. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=52938>
67. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Том 1. – М.: Мир, 1991. – 502с.
68. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р., Вычислительная гидромеханика и теплообмен, Том 1, 1990.
69. Пирумов У.Г., Росляков Г.С Численные методы газовой динамики. - М.: Высшая школа, 1987.
70. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977
71. Richardson, S.. (2006). COUETTE FLOW. Atomization and Sprays - ATOMIZATION SPRAYS. с. 10.1615/AtoZ.c.COUFLO.
72. Golubkin, Valerii&Sizykh, Grigory. (2018). ON THE COMPRESSIBLE COUETTE FLOW. TsAGI Science Journal. 49. 10.1615/TsAGISciJ.2018026781.

73. Aristov, S. & Prosviryakov, Evgenii. (2014). Inhomogeneous Couette flow. *Nelineinaya Dinamika*. 177-182. 10.20537/nd1402004.
74. Isah, B.Y.. (2018). On a Couette Flow of Conducting Fluid. *International Journal of Theoretical and Applied Mathematics*. 4. 8. 10.11648/j.ijtam.20180401.12.
75. Lebiga, V. & Pak, A. & Zinovyev, V. & Mironov, D. & Medvedev, Alexey. (2019). Simulation of Couette flow in semicircular channel. *AIP Conference Proceedings*. 2125. 030017. 10.1063/1.5117399.
76. Wang, A. & Gelhar, Lynn. (1974). Turbulent Couette Flow. *Journal of Fluids Engineering*. 96. 265. 10.1115/1.3447150.
77. Karp, M. & Cohen, J.. (2014). Transition to turbulence in Couette flow. *54th Israel Annual Conference on Aerospace Sciences 2014*. 1. 342-351.
78. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // *Труды МАИ*, 2019, №104.,
79. Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения плоской задачи Куэтта для турбулентного режима течения жидкости // *Труды МАИ*, 2022, №122.
80. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. // М.: Наука. 1986. – 736 с. (т. VI)
81. Stokes G.G. On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids // *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 8, No. 22, 1845, pp. 287-342.
82. Chapman S., Cowling T.G. *Mathematical Theory of Non-Uniform Gases* // Cambridge U.P., London, 1960.
83. Alofs H., Springer G.S. Cylindrical Couette flow experiments in the transition regime // *The Physics of Fluids*. 1971. V. 14. №2. Pp. 298-305.
84. Березко М.Э. Влияние выбора граничных условий на результаты расчёта пристеночных течений // *Труды МАИ*, 2022, №122
85. Шахов Е.М. Метод исследования движений разреженного газа. М.: ВЦ АН СССР, 1975. 207 с.

86. Bech K.H., Tillmark N., Alfredson P.H., Andersson H.I. An investigation of turbulent plane Couette flow at low Reynolds numbers // *J. Fluid Mech.* (1995), vol.286, pp. 291-325
87. Выонг Ван Тьен, Горелов С.Л. Теплопередача в цилиндрическом течении Куэтта разреженного газа // *Изв. РАН. МЖГ.* 2016. № 6. С. 101-107.
88. Ravi B., Cummings P.T., Cochran H.D. An efficient parallel algorithm for non-equilibrium molecular dynamics simulations of very large systems in planar Couette flow // *Molecular Physics*, 88, 1996, 1665-1670
89. Robben F., Talbot L. Experimental study of the rotational distribution function of nitrogen in a shock wave // *Phys. Fluids.* 1966. V. 9. № 4. P. 653–662.
90. Ерофеев А.И. Исследование структуры ударной волны в азоте на основе траекторных расчетов взаимодействия молекул // *Изв. РАН. Механ. жидкости и газа.* 2002. № 6. С. 134–147.
91. Выонг В.Т., Горелов С.Л. Нелинейные явления в разреженном газе в задаче Куэтта // *Труды МАИ,* 2018, №100
92. Выонг В.Т., Горелов С.Л. Нелинейные кинетические эффекты в задаче Куэтта в разреженном газе при переходном режиме // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика.* 2018. №1. С. 16-22
93. Никитченко Ю.А. Применение модели Навье-Стокса-Фурье к расчету гиперзвукового обтекания тонкой пластины // *Вестник Московского авиационного института.* 2011. Т. 18. № 3. С. 21.
94. Гусев В.Н., Ерофеев А.И., Климова Е.В., Перепухов В.А., Рябов В.В., Толстых А.И. Теоретические и экспериментальные исследования обтекания тел простой формы гиперзвуковым потоком разреженного газа // *Труды ЦАГИ.* – 1977. Вып. 1855.
95. Pullin D.I., Harvey J.K. A numerical simulation of the rarefied hypersonic flat-plate problem // *J. Fluid Mech.* – 1976. V. 78, pt. 4.

96. Nagamatsu H.T., Messitt D.G., Myrabo L.N., Sheer R.E. Computational, theoretical and experimental investigation of flow over a sharp flat-plate, $M=10 - 25$ // AIAA Paper 94-2350. – 1994.
97. Tirskiy GA. Continuum models in problems of hypersonic flow of a rarefied gas over blunt bodies. *Prikl Mat Mekh* 1997;61(6):903–30.
98. Tirskiy GA. Continuum models for the problem of hypersonic flow of rarefied gas over blunt body. *Syst Anal Modelling Simulation* 1999;34(4):205–40.
99. Tirskiy GA. The theory of the hypersonic flow of a viscous chemically reacting multicomponent gas over plane and axisymmetrical blunt bodies with injection. *Nauch Trudy Inst Mekh MGU* 1975;39:5–38.
100. Probstein RF, Kemp NH. Viscous aerodynamic characteristics in hypersonic rarefied gas flow. *J Aero/Space Sciences* 1960;27(3):174–92.
101. Ho H-T, Probstein RF. The compressible viscous layer in rarefied hypersonic flow. *Proc. 2nd Intern. Symp. Rarefied Gas Dynamics*. Ed. L.Talbot, N.Y.: Acad. Press, 1961. p. 525–52.
102. Tolstykh AI. The aerodynamic characteristics of a cooled spherical bluntness in a hypersonic flow of a slightly rarefied gas. *IzvAkadNauk SSSR MZhG* 1969;6:163–6.
103. Davis RT. Numerical solution of the hypersonic viscous shock layer equations. *AIAA Journal* 1970;8(5):843–51.
104. Welander P. *Arkiv far Fysik* 7, Hafte 6, 507 (1954).

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Операции

Интегралы по пространству молекулярных скоростей и пространству внутренних энергий молекул:

$$\int \dots d\bar{c} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \dots dc_1 dc_2 dc_3, \quad \int \dots d\bar{\xi} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \dots d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

$$\int \dots d\bar{c} d\varepsilon = \iiint_{-\infty}^{\infty} dc_1 dc_2 dc_3 \int_0^{\infty} \dots \varepsilon, \quad \int \dots d\bar{\xi} d\varepsilon = \iiint_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \int_0^{\infty} \dots \varepsilon.$$

Повторяющиеся греческие подстрочные индексы, используемые в одночленах, подразумевают суммирование от 1 до 3, например:

$$P_{\alpha\alpha} = P_{11} + P_{22} + P_{33}.$$

Подстрочный символ «звёздочка» обозначает симметрирование одночленов по всем «различимым» перестановкам индексов («неразличимыми» считаются перестановки, различающиеся транспозицией индексов в пределах одного симметрического тензора), например:

$$M_{**\alpha}^{(3)} \equiv M_{ij\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + M_{ki\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + M_{jk\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}.$$

Здесь $M^{(3)}$ – симметрический тензор третьего ранга. Полученная сумма представляет собой симметрический тензор. Таким образом, подстрочные звёздочки обозначают операцию симметрирования с исключением повторений тождественных по значению членов. Количество звёздочек в одночлене равно рангу тензорного уравнения.

Надстрочные и подстрочные символы

δ_{ij} – символ Кронекера.

X^+ (надстрочный символ) обозначает принадлежность величины (X) к процессу обратных столкновений молекул.

X^* (надстрочный символ) обозначает величину (X), приведённую к единичному отрезку.

X' (надстрочный символ) обозначает безразмерные величины (X).

X_∞ (подстрочный символ) используется для обозначения величины (X), относящейся к невозмущённому потоку.

$X^{[...]}$ надстрочные квадратные скобки обозначают номер приближения, соответствующего приближению процедуры Чепмена-Энскога, например: $q_i^{[1]}$ тепловой поток в гидродинамическом (первом) приближении.

Символы микроскопических величин

m_0 – масса молекулы.

$\xi_i = c_i + u_i$ – молекулярная, тепловая и групповая (макроскопическая) скорости.

ε – внутренняя энергия молекулы.

$f \equiv f(t, x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon)$ – функция распределения, фазовое пространство, которой дополнено подпространством вращательной энергии молекулы ε .

$f_0 = \frac{n}{(2\pi RT_t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t}\right)$ – равновесная функция распределения.

J_{down} – интеграл прямых столкновений.

$J_{reflect}$ – интеграл обратных столкновений.

τ – среднее время свободного пробега молекулы.

$\frac{1}{\tau^+}$ – средняя частота обратных столкновений молекул.

τ_p – время релаксации напряжений.

$\lambda = \frac{\mu}{p} \sqrt{RT}$ – средняя длина свободного пробега молекулы.

n_w – концентрация отражённых поверхностью молекул.

Символы макроскопических величин

n – концентрация молекул.

$\rho = m_0 n$ – плотность газа.

u_i – проекция вектора макроскопических скорости газа.

$P_{ij} = p_{ij} + \delta_{ij} p$ – тензор напряжений.

$T_{ij} = \frac{P_{ij}}{\rho R}$ – удельные напряжения.

p^m – «механическое» давление

p – «термодинамическое» давление.

T_t – «поступательная» температура.

T_r – температура внутренних степеней свободы молекул.

$\theta = T_t - T_r$.

T – «термодинамическая» температура.

p_{ij}^m – компонент тензора неравновесных напряжений (механических).

p_{ij} – компонент тензора неравновесных напряжений (термодинамическая форма).

q_i – проекция вектора теплового потока.

φ_i – проекция вектора теплового потока, обусловленного только поступательным движением молекул.

ω_i – проекция вектора теплового потока, обусловленного переносом внутренней энергией молекул.

φ_{ijk} – моменты третьего порядка (по поступательным степеням свободы).

$\mu = \mu(T^s)$ – коэффициент вязкости.

s – свободный параметр модели.

h – свободный параметр модели, имеющий смысл отношения времени релаксации разности поступательной и вращательной температур к времени релаксации напряжений.

α – коэффициент поглощения поверхности.

Основные константы и критерии подобия

k – постоянная Больцмана.

c_p, c_v – изобарная и изохорная удельные теплоёмкости.

$R = \frac{k}{m_0}$ – удельная газовая постоянная.

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – показатель адиабаты.

Pr – число Прандтля.

M – число Маха.

Kn – число Кнудсена.

Аббревиатуры

НСФ – модель Навье-Стокса-Фурье.

БГК – кинетическая модель Бхатнагара-Гросса-Крука.

DSMC – методы прямого статистического моделирования
(DirectsimulationMonteCarlo–DSMC)

МЗ – система моментных уравнений третьего порядка.

КИН_НСФ – комбинация гидродинамической модели НСФ и кинетической модели.

КИН_МЗ – комбинация модели моментных уравнений третьего порядка МЗ и кинетической модели.

ES – эллиптическая статистическая модель.

S-модель – кинетическая модель Шахова.

ЭВМ – электронно-вычислительная машина