

На правах рукописи

Ельников Роман Викторович

**Проектирование межпланетных траекторий космических аппаратов с  
электроракетными двигательными установками при использовании лунного  
гравитационного маневра**

Специальность 05.07.09

"Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов"

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Москва – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет, МАИ)» на кафедре «Космические системы и ракетостроение».

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор  
Московского авиационного института  
(национального исследовательского  
университета)  
Константинов Михаил Сергеевич

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор  
Московского авиационного института  
(национального исследовательского  
университета)  
Горбатенко Станислав Алексеевич

кандидат технических наук,  
старший научный сотрудник  
ГНЦ ФГУП «Исследовательский центр  
им. М.В. Келдыша»  
Синицын Алексей Андреевич

Ведущая организация: Федеральное государственное  
унитарное предприятие  
«Научно-производственное  
объединение им. С.А. Лавочкина»  
(ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина)  
141400, г.Химки, Московская область,  
ул. Ленинградская, д. 24

Защита состоится «27» декабря 2012 г. в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.12 в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете, МАИ) по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета, МАИ) по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

Автореферат разослан «23» ноября 2012 г.

Отзывы, заверенные печатью, просьба высылать по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4, МАИ, Ученый совет МАИ.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.125.12,  
кандидат технических наук, доцент

В.В. Дарных

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы работы.** Задачи исследования планет и малых небесных тел Солнечной системы на сегодняшний день являются весьма перспективными. Работы в этом направлении ведутся во многих странах мира, осуществляющих космическую деятельность. Такие исследования позволят изучить физику небесных тел, входящих в состав Солнечной системы, выявить наличие у них различных ресурсов, изучить многие вопросы теории образования Солнечной системы и других звездных систем, а также ответить на многие другие вопросы.

Одним из наиболее существенных факторов, определяющих реализуемость того или иного космического проекта, является его стоимость. Стремление к удешевлению или, по крайней мере, к ограничению стоимости космических исследовательских миссий заставляет разработчиков космических проектов все чаще и чаще ориентироваться на ракеты-носители среднего класса, выводящие на низкие околоземные орбиты сравнительно небольшие массы полезных грузов.

Усложнение научных задач, возлагаемых на аппараты по изучению дальнего космоса с одной стороны, и стремление к ограничению стартовой массы космического аппарата (КА) с другой стороны, зачастую ставит перед специалистами, занимающимися проектно-баллистическим анализом межпланетных космических полетов, достаточно сложные задачи. Дефицит массы, при проектировании межпланетного КА в этих условиях, является очень важным фактором.

Одной из наиболее красивых и плодотворных идей механики космического полета, позволяющих существенно улучшить энерго-массовые характеристики КА, является идея использования гравитационных маневров у различных небесных тел Солнечной системы.

Другой важной идеей, позволяющей существенно улучшить энергетические характеристики межпланетного перелета, является использование электроракетных двигательных установок на борту КА. Широко известно, что применение электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) в качестве маршевых двигательных установок (ДУ) позволяет существенно уменьшить массу рабочего тела на борту космического аппарата из-за высокого удельного импульса, которым обладают электроракетные двигатели (ЭРД).

В работе оценивается выигрыш от использования лунного гравитационного маневра при проектировании межпланетной траектории для космического аппарата, оснащенного ЭРДУ. Судя по литературе, этот вопрос еще мало изучен.

Актуальность выбранной темы связана с анализом перспективных технологий (электроракетных двигателей и новых схем полета), направленных на повышение эффективности космических транспортных операций.

**Основными целями диссертационной работы** являются:

- Разработка методики для расчета межпланетных траекторий КА с ЭРДУ при использовании гравитационного маневра у Луны;
- Оценка массового выигрыша, который можно обеспечить благодаря использованию лунного гравитационного маневра для межпланетного перелета Земля - Марс для космической транспортной системы на базе ракеты-носителя (РН) «Союз 2.1б» и химического разгонного блока (ХРБ) «Фрегат».

**Методы проведения исследования.** Для исследования задачи межпланетного перелета с использованием лунного гравитационного маневра, в рамках данной диссертационной работы были использованы следующие подходы и методы:

- Для нахождения и оптимизации законов управления вектором тяги ЭРДУ КА использовался принцип максимума Л.С. Понтрягина;
- Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение КА, осуществлялось численно с использованием адаптивного метода Рунге-Кутты 8-го порядка (метод Дормана-Принса);
- Задачи поиска безусловного максимума/минимума функционалов исследовались с использованием квазиньютоновского метода, использующего BFGS формулу;
- Для численного решения систем нелинейных уравнений использовался комбинированный метод Пауэла;
- В работе использовалась Парето-оптимизация, случайный поиск для определения начального приближения для сопряженных переменных (при решении краевых задач и задач оптимального управления), аппроксимация результирующих зависимостей с использованием метода наименьших квадратов, интерполяция результатов с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа.

**Объект исследования** – межпланетная траектория космических аппаратов, оснащенных электроракетными двигательными установками, при использовании гравитационного маневра у Луны. **Предмет исследования** – математические модели для расчета и оптимизации межпланетных траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками при использовании гравитационного маневра у Луны.

**Научная новизна полученных результатов.** К новым научным результатам, полученным в рамках данной работы, можно отнести:

- Разработанную методику, предназначенную для расчета и оптимизации межпланетных траекторий космических аппаратов, оснащенных электроракетными двигательными установками, при использовании гравитационного маневра у Луны;
- Качественные результаты анализа траекторий ухода из окрестности Земли при одинарном и двойном пролете КА окрестности Луны;
- Качественные и численные результаты анализа перелета Земля – Марс с гравитационным маневром у Луны для космической транспортной системы на базе ракеты-носителя «Союз 2.1б», химического разгонного блока «Фрегат» и КА, оснащенного ЭРДУ на базе двух СПД-140Д;
- Оценку массового выигрыша КА от использования лунного гравитационного маневра для рассмотренной транспортной космической системы по сравнению со схемой полета, не использующей гравитационный маневр у Луны.

**Практическая значимость** работы состоит в следующем:

- Разработано программно-алгоритмическое обеспечение, программный комплекс для расчета и оптимизации межпланетных траекторий космических аппаратов, оснащенных электроракетными двигательными установками, при использовании гравитационного маневра у Луны;

- Получено решение задачи межпланетного перелета Земля – Марс с гравитационным маневром у Луны для космической транспортной системы на базе ракеты-носителя «Союз 2.1б», химического разгонного блока «Фрегат» и КА, оснащенного ЭРДУ на базе двух СПД-140Д.

- Проведена оценка выигрыша в конечной массе КА от использования лунного гравитационного маневра, на основе которой можно сделать вывод о целесообразности его использования.

- Основные результаты диссертационной работы внедрены в Научно-исследовательском институте прикладной механики и электродинамики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (НИИ ПМЭ МАИ) и в учебном процессе Московского авиационного института при проведении практических и лабораторных занятий в рамках специальности 160802 «Космические летательные аппараты и разгонные блоки», что подтверждается соответствующими актами.

**Достоверность полученных результатов** подтверждается:

- Совпадением результатов расчета невозмущенных оптимальных геоцентрических и гелиоцентрических траекторий с малой тягой, выполненных с помощью разработанных автором методов, с результатами, известными в литературе;

- Использованием адекватных математических моделей движения, учитывающих основные возмущающие факторы (гравитационный потенциал Земли с учетом 2-й зональной гармоник, притяжение Луны и Солнца) на всех участках движения КА;

- Использованием апробированных численных методов для решения систем дифференциальных уравнений, систем нелинейных алгебраических уравнений, задач минимизации и задачи оптимального управления в виде полного набора необходимых условий оптимальности.

**Апробация работы.** Методы и результаты оптимизации схемы межпланетного перелета с использованием гравитационного маневра у Луны для КА с ЭРДУ обсуждались:

- На Третьей Международной конференции «Космические технологии: настоящее и будущее» (Передовые космические технологии на благо человечества), Днепропетровск, Украина, апрель 2011;

- На XLVI научных чтениях памяти К.Э. Циолковского, Калуга, октябрь 2011;

- На XXXVI Академических чтениях по космонавтике, посвященных памяти академика С.П.Королева, Москва, январь 2012.

**Личный вклад и публикации.** Все результаты, приведенные в диссертации, получены лично автором. Основные результаты опубликованы в четырех научных работах [1], [2], [3], [4] из которых [1], [2] – в издании из списка ВАК Минобрнауки России.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

- Методика расчета и оптимизации межпланетных траекторий космических аппаратов, оснащенных электроракетными двигательными установками, при использовании гравитационного маневра у Луны;

- Результаты анализа межпланетного перелета Земля – Марс с гравитационным маневром у Луны для космической транспортной системы на базе ракеты-носителя «Союз 2.1б», химического разгонного блока «Фрегат» и КА, оснащенного ЭРДУ на базе двух СПД-140Д;

- Результаты сравнительного анализа двух схем межпланетного перелета Земля-Марс с использованием и без использования гравитационного маневра у Луны.

**Структура и объем работы.** Работа состоит из введения, трех глав, заключения и библиографического списка. Основной текст содержит 119 страниц, включает 45 рисунков, 7 таблиц. Библиографический список содержит 63 наименования.

### **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследования, отмечена научная новизна и практическая значимость полученных результатов, приведены основные положения диссертационной работы, выносимые на защиту, сведения об апробации результатов работы и описана структура диссертации.

**В первой главе** анализируется схема межпланетного перелета космического аппарата (КА) с электроракетной двигательной установкой (ЭРДУ) при использовании гравитационного маневра у Луны, а также пошагово описывается разработанная методика для расчета и оптимизации таких схем перелета.

Рассматриваемая схема перелета включает в себя следующие участки (см. рисунок 1):

1. перевод КА с опорной круговой низкой околоземной орбиты (на которую КА вместе с химическим разгонным блоком (ХРБ) выводится с помощью ракеты-носителя) на некоторую эллиптическую промежуточную орбиту с помощью ХРБ. После этого следует отделение ХРБ;

2. участок "раскрутки" КА в гравитационном поле Земли с помощью ЭРДУ. Этот участок начинается в точке схода с промежуточной орбиты и заканчивается в момент входа КА в грависферу Луны;

3. участок, на котором обеспечивается пролет Луны. Данный участок движения начинается на границе грависферы Луны (относительно Земли) и заканчивается на границе грависферы Земли (относительно Солнца);

Первый, второй и третий участок вместе будем называть геоцентрическим участком движения КА.

4. гелиоцентрический участок движения КА, в конечной точке которого обеспечиваются условия нулевой стыковки КА с планетой назначения:

$$\vec{r}_{КА}(t_k) = \vec{r}_{Пл}(t_k); \quad \vec{V}_{КА}(t_k) = \vec{V}_{Пл}(t_k), \quad (1)$$

где  $\vec{r}_{КА}(t_k)$  - радиус-вектор КА в конечной точке траектории;  $\vec{r}_{Пл}(t_k)$  - радиус-вектор планеты назначения в конечный момент времени;  $\vec{V}_{КА}(t_k)$  и  $\vec{V}_{Пл}(t_k)$  вектор скорости КА и планеты назначения в конечный момент времени соответственно.

Участок движения КА в окрестности планеты назначения в данной работе не рассматривался.

Общая постановка задачи такова: требуется определить элементы промежуточной орбиты (большую полуось  $A_0$ , эксцентриситет  $e_0$ , наклонение  $i_0$ , долготу восходящего узла  $\Omega_0$ , аргумент перицентра  $\omega_0$ ), аргумент широты точки схода с неё ( $\psi_0$ ), дату старта ( $T_0$ ), а также законы управления космическим аппаратом на всех этапах его полета, чтобы за фиксированное время ( $T_{п}$ ) обеспечить перелет к планете назначения КА максимальной массы.

Под нахождением законов управления КА понимается нахождение временных зависимостей изменения углов тангажа и рыскания КА, определяющих направление вектора тяги, а также моментов времени включения и выключения ЭРДУ КА. При этом полагаем, что величина тяги и удельный импульс ЭРДУ постоянны.



Рисунок 1 - Участки межпланетного перелета при использовании лунного гравитационного маневра

Необходимо отметить, что при окончательном расчете на каждом из участков учитывается гравитационное влияние Земли, Луны и Солнца, при этом Земля рассматривается как сжатый по полюсам сфероид (учитывается вторая зональная гармоника гравитационного потенциала Земли). Математическая модель движения КА остается неизменной при

переходе от одного участка движения к другому. Иными словами, даже двигаясь, скажем, в грависфере Луны, помимо влияния Луны на траекторию КА, также учитывается влияние Солнца и Земли. Грависферы небесных тел в данном случае выступают лишь как некие условные границы, позволяющие разбить всю траекторию на ряд участков, каждый из которых анализируется отдельно.

Первый участок движения КА рассматривался в рамках импульсной аппроксимации активных участков работы ХРБ.

При анализе второго и четвертого участка рассматривалась задача нахождения оптимального управления КА, совершающего движение под действием силы тяги ЭРДУ. На втором участке управление выбирается из условия обеспечения перелета КА с промежуточной орбиты в начальную точку третьего участка за минимальное время, а на четвертом участке – из условия минимальных затрат топлива для перелета

из конечной точки третьего участка в конечную точку гелиоцентрического участка за фиксированное время.

В качестве основного методического подхода для нахождения и оптимизации законов управления на данных участках используется принцип максимума Л.С. Понтрягина. Исключение было сделано для третьего участка траектории, который является относительно небольшим по протяженности. На нем закон управления вектором тяги ЭРДУ принят тангенциальным. Также предполагается, что третий участок движения является полностью активным.

Анализируется программное движение КА. Реализация программного движения в настоящей работе не исследуется. По установившейся терминологии - рассматривается задача проектирования траектории межпланетного КА с использованием гравитационного маневра у Луны.

Задача анализа межпланетной траектории КА при использовании гравитационного маневра у Луны, в рамках предлагаемой в настоящей работе методики, разделяется на пять этапов. Перечислим и кратко охарактеризуем каждый из них.

*Этап первый* – этап предварительного анализа геоцентрического участка движения КА. На этом этапе рассматривается плоское движение КА в центральном поле тяготения Земли под действием силы тяги ЭРДУ. С помощью формализма принципа максимума анализируется задача набора некоторой энергии  $h_0$  за минимальное время с помощью "раскрутки" КА с некоторой промежуточной орбиты.

$$h_0 = V_r(T_k)^2 + V_n(T_k)^2 - \frac{2\mu}{r(T_k)} \tag{2}$$

где  $V_r, V_n$  - радиальная и тангенциальная проекции скорости КА в конечной точке участка "раскрутки";  $r$  - величина радиус-вектора КА в конечной точке участка "раскрутки".

В результате "раскрутки" КА переходит на другую эллиптическую орбиту с большим эксцентриситетом. Радиус апогея этой орбиты превышает средний радиус орбиты Луны. Предполагается, что в некоторой точке данной траектории (которую мы условно назвали "подлетной траекторией") КА встречает Луну.

Далее в рамках метода грависфер нулевой протяженности исследуется гравитационный маневр у Луны. Для этого этапа исследования принят ряд допущений:

- Орбита Луны – круговая с радиусом 384401 км;
- Подлетная траектория КА (на эту траекторию должен перейти КА в результате набора энергии  $h_0$  при "раскрутке") является коническим сечением с фокусом, располагающемся в центре масс Земли;
- Подлетная траектория КА лежит в плоскости орбиты Луны.

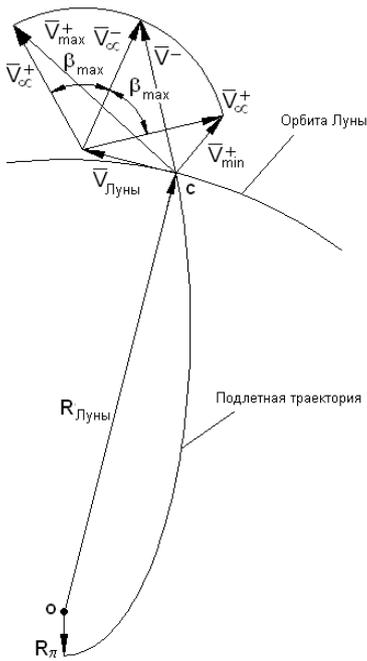


Рисунок 2 - Схема лунного гравитационного маневра

Схема гравитационного маневра при наличии данных допущений представлена на рисунке 2.

Здесь в точке О располагается центр Земли, в точке С - центр Луны в момент выполнения гравитационного маневра КА,  $R_{\text{Луны}}$  – радиус орбиты Луны,  $R_{\pi}$  - радиус перигея подлетной траектории КА;  $\vec{V}_{\text{Луны}}$  - вектор геоцентрической скорости Луны;  $\vec{V}^-$  - вектор геоцентрической скорости КА в момент подлета к Луне;  $\vec{V}_{\infty}^-$  - вектор гиперболического избытка скорости подлета к Луне;  $\vec{V}_{\infty}^+$  - вектор гиперболического избытка скорости отлета от Луны;  $\beta_{\text{max}}$  - максимальный угол поворота вектора гиперболического избытка скорости относительно Луны;  $\vec{V}_{\text{min}}^+$ ,  $\vec{V}_{\text{max}}^+$  - соответственно минимально и максимально возможная скорость КА относительно Земли после выполнения гравитационного маневра.

Приращение полной геоцентрической энергии КА в результате выполнения гравитационного маневра при наличии допущений, представленных выше – это разность квадратов геоцентрической скорости КА до и после пролета Луны:

$$\Delta h = V^{+2} - V^{-2} \quad (3)$$

Таким образом, для каждой величины геоцентрической энергии  $h_0$ , для каждой траектории раскрутки, соответствующей ей, существует возможность определить приращение энергии, которое получит КА в результате гравитационного маневра у Луны.

Для каждого варианта "раскрутки" ("раскрутки" с разных промежуточных орбит) можно построить свою зависимость  $\Delta h$  от  $h_0$ . На этих зависимостях можно увидеть, что существует некоторое оптимальное значение энергии  $h_0 = h_0^*$ , при котором Лунный гравитационный маневр обеспечивает наибольшее приращение энергии КА.

Решая задачу набора энергии  $h_0^*$ , из принципа максимума находится оптимальное управление и траектория "раскрутки", которая на последнем витке пересекает орбиту Луны. Для этого момента времени не составляет труда рассчитать радиальную и трансверсальную компоненты геоцентрической скорости КА ( $V_{r2}$ ,  $V_{n2}$ ), а также оценить его массу ( $m_2$ ). Данные характеристики будут использоваться при дальнейшем анализе.

*Второй этап* – этап предварительного анализа гелиоцентрического участка. Этот участок движения на рассматриваемом этапе исследования также анализируется в рамках метода грависфер нулевой протяженности. Основная цель этого этапа – это оценка направления вектора скорости КА в момент выхода из грависферы Земли.

Предварительный анализ четвертого участка траектории предлагается проводить при наличии ряда допущений. Перечислим их:

- Движение КА рассматривается в центральном гравитационном поле Солнца;
- Радиус-вектор КА в начальной точке гелиоцентрического участка равен радиус-вектору Земли;

- Скорость КА в начальной точке гелиоцентрического участка равна векторной сумме скорости Земли относительно Солнца и скорости КА относительно Земли в конечный момент движения на геоцентрическом участке;
- В конечной точке гелиоцентрического участка выполняются условия нулевой стыковки КА с планетой назначения (1);

Законы управления направлением вектора тяги ЭРДУ на гелиоцентрическом участке выбираются так, чтобы перелет между начальной и конечной точками гелиоцентрического участка осуществлялся бы за минимальное время. При этом полагается, что тяга ЭРДУ постоянна и на траектории отсутствуют пассивные участки. Для нахождения управления использовался принцип максимума.

Компоненты орта вектора скорости КА в момент выхода из грависферы Земли ( $\vec{P}_0$ ) являются функциями от юлианской даты выхода КА из грависферы Земли ( $T_3$ ), величины геоцентрической скорости КА ( $V_3$ ), а также реактивного ускорения ( $f_3$ ) в этот момент времени.

В результате анализа второго этапа удается построить зависимости компонент орта  $\vec{P}_0$  от юлианской даты ( $T_3$ ) (в диапазоне одного лунного месяца в окрестности оптимальной даты с точки зрения полета к планете назначения) для ряда значений  $V_3$  и  $f_3$ .

*Третий этап* – этап анализа участка гравитационного маневра у Луны в рамках уточненной математической модели. На данном этапе, а также на следующих двух этапах, движение КА рассматривается под действием сил гравитационного воздействия со стороны Солнца, Луны и Земли, при этом Земля рассматривается как сжатый по полюсам сфероид (учитывается вторая зональная гармоника гравитационного потенциала Земли). Систему уравнений движения КА можно представить в виде (4):

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \sum_{j=1}^2 \mu_j \left( \frac{\vec{r}_j - \vec{r}}{|\vec{r}_j - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j} \right) + \vec{a}_p; \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}; \quad (4)$$

где

$$U = \frac{\mu_{\oplus}}{r} - \frac{\mu_{\oplus}}{3r^3} \delta (3 \sin^2 \varphi - 1); \quad \delta = 66.07 \times 10^3 \text{ км}^2.$$

Здесь  $U$  - гравитационный потенциал Земли как сжатого сфероида;  $\mu_{\oplus}$  - гравитационный параметр Земли;  $\vec{r}$  - радиус-вектор КА;  $\mu_j$  - гравитационный параметр  $j$ -го небесного тела (индексом 1 обозначено Солнце, индексом 2 - Луна);  $\vec{r}_j$  - радиус-вектор  $j$ -го небесного тела;  $\vec{a}_p$  - вектор реактивного ускорения;  $\varphi$  - геоцентрическая широта КА.

Для проведения анализа третьего участка были приняты следующие допущения:

- длительность движения КА на третьем участке фиксирована;
- закон управления направлением вектора тяги принят тангенциальным (тяга направлена вдоль геоцентрической скорости КА в каждый момент времени);
- рассматриваемый участок движения полностью активный;

Основная цель третьего этапа – выбор такой точки входа КА в грависферу Луны и такого направления вектора геоцентрической скорости КА в этот момент времени, чтобы направление вектора скорости КА в конечной точке геоцентрического участка было бы требуемым (т.е. чтобы вектор геоцентрической скорости КА в конечной точке третьего участка был бы коллинеарен орту  $\vec{P}_0$ , компоненты которого найдены на *втором этапе*).

Анализ третьего этапа также может быть разбит на две части. Сначала будем полагать, что вектор скорости КА в момент входа в грависферу Луны, а также точка входа в грависферу Луны принадлежит мгновенной плоскости орбиты Луны. При этом считаем, что радиальная и тангенциальная компоненты этого вектора известны - они найдены на *первом этапе*.

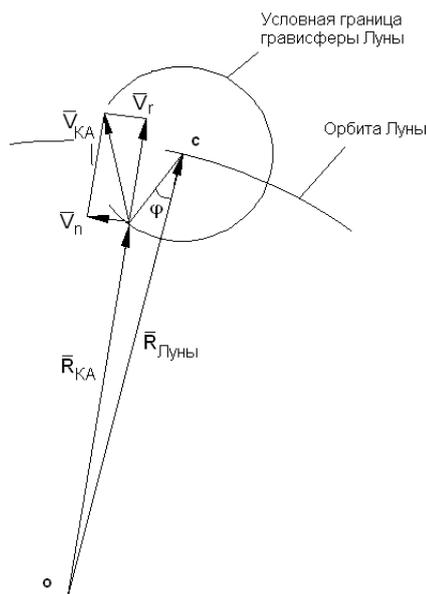


Рисунок 3 - Схема первого этапа анализа участка лунного гравитационного маневра

Схема данного этапа приведена на рисунке 3. Основная задача начального этапа расчета третьего участка состоит в том, чтобы найти такое положение Луны на орбите, т.е. юлианскую дату в момент входа КА в грависферу Луны, такую точку входа в нее (принадлежащую мгновенной плоскости орбиты Луны и характеризующуюся углом  $\varphi$  - см. рисунок 3), чтобы КА в конечной точке геоцентрического участка имел бы по возможности максимальное приращение геоцентрической энергии и минимальный угол между вектором геоцентрической скорости и ортом  $\vec{P}_0$ , компоненты которого определяются с помощью зависимостей найденных на *втором этапе*.

Перебирая значения угла  $\varphi$  от 0 до 360 градусов и юлианскую дату момента входа КА в грависферу Луны в диапазоне одного лунного месяца в окрестности оптимальной даты с точки зрения полета к планете назначения и интегрируя систему (4) по времени от 0 до  $t_k$  ( $t_k$  выбирается так, чтобы за это время КА оказался бы приблизительно на границе грависферы Земли относительно Солнца), можно построить множество траекторий пролета. Для каждой полученной траектории находим величину приращения энергии -  $\Delta h$ , а также угол между вектором геоцентрической скорости КА в конечной точке третьего участка и ортом  $\vec{P}_0$  в начальной точке четвертого участка -  $\chi$  (как угол между двумя векторами в пространстве он может изменяться в диапазоне  $0...180^\circ$ ).

Таким образом, каждая полученная траектория характеризуется двумя параметрами -  $\Delta h$  и  $\chi$ . Эти параметры можно нанести на координатную плоскость. Каждая точка такой диаграммы будет характеризовать одну из полученных траекторий. Для определенности, приведем пример качественного вида такой диаграммы для некоторого варианта перелета к Земля-Луна-Марс, расчет которого приводится во второй главе диссертационной работы. Пример диаграммы представлен на рисунке 4. По оси абсцисс отложен угол между вектором геоцентрической скорости

КА в конечной точке третьего участка и ортом вектора тяги (геоцентрической скорости – что то же самое) в начальной точке четвертого участка -  $\chi$ . По оси ординат отложена величина, обратная приращению энергии КА –  $1/\Delta h$ .

Одну из точек, представленных на диаграмме, предлагается использовать в качестве начального приближения для следующего этапа расчета. Такая точка (траектория) должна иметь как можно большее приращение энергии и как можно меньшее значение угла между вектором  $\vec{P}_0$  и вектором скорости КА в конечной точке

третьего участка.

Построив фронт Парето на представленной диаграмме, видим, что он имеет вид почти прямого угла. Именно угловая точка фронта (т.е. соответствующая ей траектория) будет использована в качестве начального приближения для дальнейшего расчета.

Далее, зафиксировав значения радиальной и трансверсальной скорости КА, будем выбирать точку входа КА в грависферу Луны и наклонение подлетной траектории в момент входа КА в грависферу Луны так, чтобы угол  $\chi$  стал равным нулю.

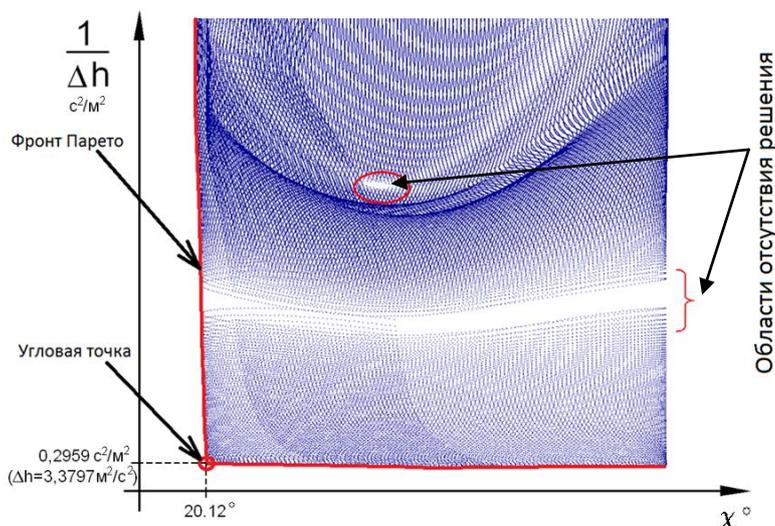


Рисунок 4 – Пример диаграммы решений первого этапа расчета участка лунного гравитационного маневра

Для выбора точки входа удобно перейти от декартовых координат КА ( $x_{20}, y_{20}, z_{20}$ ) к углам склонения ( $\delta$ ) и прямого восхождения ( $\eta$ ) радиус-вектора КА  $\vec{R}'_{КА}$ , определенного в селеноцентрической системе координат. Первая ось новой системы координат направлена по геоцентрическому радиус-вектору Луны, вторая ось направлена по трансверсали лунной геоцентрической орбиты, третья ось дополняет систему координат до правой.

Угол между вектором скорости КА и вектором  $\vec{P}_0$  в конечной точке третьего участка можно рассматривать как функцию шести параметров: юлианской даты входа КА в грависферу Луны ( $T_2$ ), склонения ( $\delta$ ) и прямого восхождения ( $\eta$ ) радиус-вектора КА в селеноцентрической системе координат, наклонения подлетной орбиты КА (определенного в геоцентрической экваториальной системе координат) -  $i$ , а также радиальной и трансверсальной скорости в момент входа КА в грависферу Луны. Радиальную и трансверсальную скорость КА предлагается зафиксировать и использовать значения  $V_{r2}, V_{n2}$ , полученные на *первом этапе* анализа. Таким образом, будем рассматривать угол  $\chi$  как функцию четырех аргументов:

$$\chi = F(T_2, \delta, \eta, i) \tag{5}$$

В результате появляется возможность свести поставленную задачу к задаче поиска безусловного минимума функции (5) в пространстве четырех переменных:  $\chi = F(T_2, \delta, \eta, i) \rightarrow \min$ .

Величина этого минимума – есть ноль функции F. В качестве начального приближения для поиска используются значения  $T_{20}, \delta_0, \eta_0$ , найденные для траектории, которая характеризуется угловой точкой на диаграмме решений (см. рисунок 4). В качестве начального приближения для наклона подлетной траектории используется значение наклона орбиты Луны в момент  $T_2$ :  $i_0 = i_{Луны}(T_2)$ . Переменные, обеспечивающие минимум функционала F обозначим  $T^{\min}, \delta^{\min}, \eta^{\min}, i^{\min}$ .

На следующем шаге расчета третьего участка производится переход от набора переменных  $T^{\min}, \delta^{\min}, \eta^{\min}, i^{\min}, V_{r2}, V_{n2}$  обратно к координатам и проекциям вектора скорости КА, определенных в геоцентрической экваториальной системе координат  $x_2, y_2, z_2, V_{x2}, V_{y2}, V_{z2}$ .

В результате данного этапа анализа получим фазовые характеристики КА в момент входа КА в грависферу Луны и в момент выхода из грависферы Земли.

*Четвертый этап* – совместный анализ участков под номерами один и два. Первый участок движения КА рассматривался в рамках импульсной аппроксимации активных участков работы ХРБ. На втором участке управление выбирается из условия обеспечения перелета КА с промежуточной орбиты в начальную точку третьего участка за минимальное время. Для нахождения законов управления используется принцип максимума Л.С. Понтрягина.

Оптимальный закон для вектора реактивного ускорения можно представить в виде:

$$\vec{a}_p = \frac{P_w}{m_1 w - Pt} \frac{\vec{\lambda}_v}{\lambda_v};$$

где  $m_1$  – масса КА на промежуточной орбите искусственного спутника Земли (ОИСЗ), где  $\vec{\lambda}_v \{ \lambda_{vx}, \lambda_{vy}, \lambda_{vz} \}$  – вектор переменных, сопряженных к проекциям вектора скорости КА.

Полная математическая модель оптимального движения КА состоит из системы (4) (с использованием записанного выше оптимального вектора реактивного ускорения) и системы уравнений для сопряженных переменных (6):

$$\frac{d\vec{\lambda}_v}{dt} = -\vec{\lambda}_r; \quad \frac{d\vec{\lambda}_r}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \vec{r}};$$

$$\text{где } K = \left( \vec{\lambda}_v, \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \sum_{j=1}^2 \mu_j \left[ \frac{\vec{r}_j - \vec{r}}{|\vec{r}_j - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j} \right] \right), \quad (6)$$

$\vec{\lambda}_r \{ \lambda_x, \lambda_y, \lambda_z \}$  – вектор переменных, сопряженных к проекциям радиус-вектора КА.

Анализ движения КА на втором участке предлагается проводить в обратном времени, совместно интегрируя системы (4) и (6) от конечной точки второго участка к начальной. В этом случае, начальными условиями задачи будут выступать фазовые

характеристики КА в момент входа КА в грависферу Луны  $T_2, x_2, y_2, z_2, V_{x2}, V_{y2}, V_{z2}, m_2$  (полученные на *третьем этапе*), а управление будет определять набор сопряженных переменных в конечной точке второго участка:  $\lambda_{x2}, \lambda_{y2}, \lambda_{z2}, \lambda_{vx2}, \lambda_{vy2}, \lambda_{vz2}$ .

Особенностью данной задачи есть то, что масса КА является заданной в обеих граничных точках рассматриваемого участка траектории. Это связано с тем, что известна масса КА на опорной орбите  $m_0$  - эта та масса, выведение которой обеспечивает РН, а также известна масса КА в конечной точке участка раскрутки -  $m_2$ .

Перечислим граничные условия поставленной задачи. Первое условие - условие равенства масс КА на промежуточной орбите, полученных из расчета первого и второго участка:

$$g_1 = m_1 - m_0 \exp\left(-\frac{\Delta V_\Sigma}{W_{хим}}\right) - m_{xpb} = 0; \quad (7)$$

где  $m_1$  - масса КА в начальной точке второго участка, полученная из обратного расчета;  $m_0 \exp\left(-\frac{\Delta V_\Sigma}{W_{хим}}\right) - m_{xpb}$  - масса КА в конечной точке первого участка (масса КА на промежуточной орбите после отброса ХРБ, полученная из расчета первого сегмента траектории с помощью импульсной аппроксимации активных участков ХРБ). В этом выражении:  $m_0$  - масса связки КА-ХРБ на опорной орбите;  $W_{хим}$  - эффективная скорость истечения для двигательной установки ХРБ;  $m_{xpb}$  - конечная масса ХРБ;  $\Delta V_\Sigma$  - суммарная характеристическая скорость маневра двухимпульсного компланарного перехода с опорной на промежуточную орбиту.

Второе граничное условие - условие равенства наклонений опорной и промежуточной орбиты:

$$g_2 = \cos(i_0) - \frac{\sigma_{z1}}{\sigma_1} = 0; \quad (8)$$

в этом выражении:  $i_0$  - наклонение опорной орбиты;  $\sigma_{z1}/\sigma_1$  - отношение z-ой компоненты вектора площадей КА к модулю этого вектора в начальной точке второго участка.

Дополним эти условия четырьмя условиями трансверсальности для начальной точки второго участка:

$$g_3 = \lambda_{z1} - \frac{\partial g_1}{\partial z} v_1 - \frac{\partial g_2}{\partial z} v_2 = 0; \quad (9)$$

$$g_4 = \lambda_{vx1} - \frac{\partial g_1}{\partial V_x} v_1 - \frac{\partial g_2}{\partial V_x} v_2 = 0; \quad (10)$$

$$g_5 = \lambda_{vy1} - \frac{\partial g_1}{\partial V_y} v_1 - \frac{\partial g_2}{\partial V_y} v_2 = 0; \quad (11)$$

$$g_6 = \lambda_{vz1} - \frac{\partial g_1}{\partial V_z} v_1 - \frac{\partial g_2}{\partial V_z} v_2 = 0; \quad (12)$$

где множители Лагранжа  $v_1, v_2$  определяются соотношениями:

$$v_1 = \frac{1}{\frac{\partial g_1}{\partial x}} \left( \lambda_{x1} - \frac{\partial g_2}{\partial x} v_2 \right); \quad v_2 = \frac{\lambda_{x1} \frac{\partial g_1}{\partial y} - \lambda_{y1} \frac{\partial g_1}{\partial x}}{\frac{\partial g_1}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial x} \frac{\partial g_2}{\partial y}}.$$

Таким образом, поставленная задача имеет шесть краевых условий: (7)-(12). Функции  $g_1 - g_6$  зависят от фазовых параметров КА в начальной точке второго участка  $V_{x1}, V_{y1}, V_{z1}, x_1, y_1, z_1$ , которые в свою очередь, являются функциями от сопряженных переменных в конечной точке второго участка и времени "раскрутки":  $T_p, \lambda_{x2}, \lambda_{y2}, \lambda_{z2}, \lambda_{vx2}, \lambda_{vy2}, \lambda_{vz2}$ . (Здесь  $T_p$  – время "раскрутки" – время движения КА на втором участке). Таким образом, выбираемыми параметрами задачи являются семь неизвестных:  $T_p, \lambda_{x2}, \lambda_{y2}, \lambda_{z2}, \lambda_{vx2}, \lambda_{vy2}, \lambda_{vz2}$ .

Сопряженная система (6) является однородной. Это обстоятельство позволяет ввести нормировку вектора сопряженных переменных в конечной точке участка - выразить переменные, сопряженные к проекциям скорости, через некие параметры  $\alpha$  и  $\beta$   $\left( \alpha \in [0; 2\pi], \beta \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right)$ :  $\lambda_{vx2} = \cos \alpha \cdot \cos \beta$ ;  $\lambda_{vy2} = \sin \alpha \cdot \cos \beta$ ;  $\lambda_{vz2} = \sin \beta$ .

Уменьшив, таким образом, число неизвестных на единицу, замкнем задачу, которая при шести краевых условиях (7)-(12) имеет шесть выбираемых параметров  $(T_p, \lambda_{x2}, \lambda_{y2}, \lambda_{z2}, \alpha, \beta)$ .

*Пятый этап* – этап расчета гелиоцентрического участка в рамках уточненной математической модели, учитывающей гравитационное воздействие со стороны Солнца, Луны и Земли. Управление на четвертом участке выбирается из условия минимальных затрат топлива для перелета из конечной точки третьего участка в конечную точку гелиоцентрического участка за фиксированное время. Используя формализм принципа максимума, задача поиска оптимального управления сводится к краевой задаче.

Начальной точкой этого сегмента траектории будет являться точка с фазовыми координатами  $x_3, y_3, z_3, V_{x3}, V_{y3}, V_{z3}, m_3$  для момента времени  $T_3$ , полученная в результате анализа *третьего этапа*. В конечной точке гелиоцентрической траектории должны быть выполнены условия нулевой стыковки (1).

Время перелета в рассматриваемой задаче варьируется от минимального до больших значений. Тяга ЭРДУ КА постоянна по величине, однако предполагается, что на гелиоцентрической траектории КА могут существовать пассивные участки движения.

Дополним систему (4) уравнением для массы КА:

$$\frac{dm}{dt} = -\delta \frac{P}{w}, \quad (13)$$

а систему для сопряженных переменных (6) - уравнением для переменной, сопряженной к массе КА:

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = \frac{\delta P}{m^2} \lambda_v; \quad (14)$$

Подставив в систему (4) выражение для оптимального вектора реактивного ускорения  $\vec{a}_p = \delta \frac{P}{m} \frac{\vec{\lambda}_v}{\lambda_v}$ , получим систему оптимального движения КА для поставленной задачи.

$\delta$  в этих соотношениях – функция включения/выключения ЭРДУ:

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi > 0; \\ 0, & \text{если } \psi < 0; \end{cases}$$

где  $\psi$  – функция переключения:

$$\psi = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{w};$$

Условия на правом конце траектории - шесть условий нулевой стыковки КА с планетой назначения (1).

Выбираемыми параметрами для поставленной задачи являются семь сопряженных переменных в начальной точке гелиоцентрической траектории:

$$\lambda_{x3}, \lambda_{y3}, \lambda_{z3}, \lambda_{vx3}, \lambda_{vy3}, \lambda_{vz3}, \lambda_{m3}.$$

Следуя принципу максимума, для поставленной задачи перелета за фиксированное время, будем требовать выполнения условия (15) в конечной точке гелиоцентрической траектории.

$$\lambda_m(t_{k4}) \geq 0 \tag{15}$$

Из уравнения (14) видим, что  $\frac{d\lambda_m}{dt} \geq 0$  для любого момента времени. Таким образом, для удовлетворения условия (15) достаточно, чтобы переменная, сопряженная к массе, в начальной точке была бы положительна либо равна нулю:  $\lambda_{m3} \geq 0$ . Выполним нормировку вектора сопряженных переменных в начальной точке, приняв  $\lambda_{m3} = 1$ . Уменьшив, таким образом, число выбираемых параметров на единицу, замкнем задачу.

Решив поставленную краевую задачу при фиксированном времени полета ( $T_n$ ), можно найти массу КА в конечной точке гелиоцентрической траектории. В результате появляется возможность построить зависимость конечной массы КА от времени перелета на гелиоцентрическом участке траектории.

**Во второй главе** приведен анализ характеристик перелета Земля-Луна-Мартс для транспортной космической системы на базе РН «Союз 2.1б», ХРБ «Фрегат» и КА с ЭРДУ на базе двух двигателей СПД-140Д. Данный анализ производится в соответствии с разработанной методикой, описание которой приведено в первой главе работы.

Исходные данные, использованные для проектно-баллистического анализа данного межпланетного перелета, представлены в таблице 1.

Рассматриваются четыре варианта межпланетного перелета, каждый из которых отличается от других, главным образом, временем «раскрутки» КА на геоцентрическом участке. Возможность выбора различных времен «раскрутки» определяется возможностью выбора различных параметров промежуточной орбиты, на которую КА выводится с помощью ХРБ.

Таблица 1 - Исходные данные для проведения баллистического анализа

Параметр	Величина
Высота круговой опорной орбиты	200 км
Наклонение опорной орбиты	51.6°
Масса транспортной системы на опорной орбите	8250 кг
Удельный импульс двигательной установки ХРБ	333.2 с
Конечная масса ХРБ (суммарная масса конструкции ХРБ и невырабатываемых остатков топлива)	800 кг
Удельный импульс ЭРДУ КА (на базе СПД-140Д)	2800 с
Тяга ЭРДУ КА (два одновременно работающих СПД-140Д)	0.34 Н

Основным результатом, полученным при анализе межпланетного перелета, можно считать зависимости конечной массы КА от суммарного времени перелета. Данные зависимости для четырех вариантов перелета, характеризующихся временем движения на геоцентрическом участке ( $T_{\text{Гео}}$ ), представлены на рисунке 5.

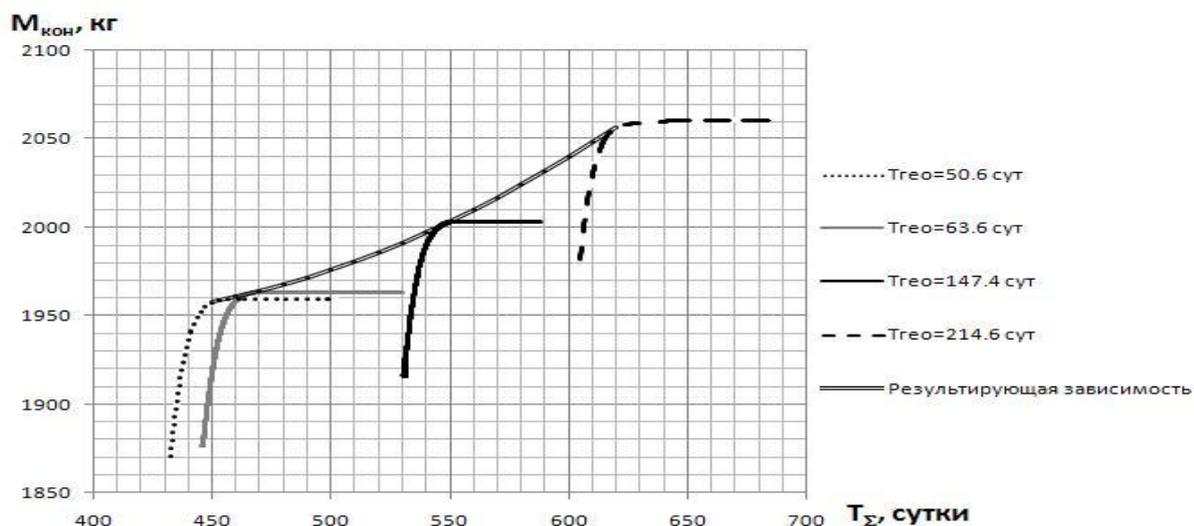


Рисунок 5 – Конечная масса КА как функция суммарного времени полета для четырех различных геоцентрических траекторий, характеризующихся временем движения на геоцентрическом участке  $T_{\text{Гео}}$ .

Огибающая эти графики - результирующая зависимость, показывающая связь между суммарным временем транспортной операции и конечной массой КА для межпланетного перелета Земля-Марс, использующего гравитационный маневр у Луны.

Абсциссы точек касания результирующей зависимости определяют оптимальное суммарное время перелета для геоцентрических траекторий, характеризующихся указанными временами  $T_{\text{Гео}}$ .

Заметим, что данная зависимость справедлива только для транспортной системы, рассматриваемой здесь в качестве примера.

**В третьей главе** приводятся результаты расчета схемы межпланетного перелета Земля-Марс, не использующей гравитационный маневр у Луны, а также производится оценка выигрыша в конечной массе КА, который может быть получен благодаря использованию лунного гравитационного маневра.

Рассматриваемая схема полета КА к Марсу без гравитационного маневра у Луны включает в себя следующие этапы:

1. Выведение КА вместе с химическим разгонным блоком на опорную круговую орбиту радиусом 6371 км и наклоном 51.6 градуса с помощью ракеты-носителя;
2. Перевод КА на некоторую гиперболическую отлетную траекторию с помощью ХРБ. Наклонение данной траектории равно наклонению опорной орбиты и составляет 51.6 градуса. Радиус перигея отлетной траектории составляет 6571 км, величина гиперболического избытка скорости оптимизировалась.
3. Отделение ХРБ и включение ЭРДУ КА;
4. Этап гелиоцентрического движения.

Анализ геоцентрического участка движения сводился к расчету одноимпульсного перехода КА с круговой орбиты на гиперболическую траекторию. Расчет проводился в рамках импульсной аппроксимации активного участка работы ХРБ. Движение КА рассматривалось в рамках ограниченной задачи двух тел «Земля-КА».

Анализ гелиоцентрического участка перелета проводился в рамках метода грависфер нулевой протяженности. Рассматривается задача о перелете КА между двумя точками фазового пространства за фиксированное время. В качестве критерия оптимальности перелета выступает конечная масса КА, которая максимизируется.

Величина тяги и удельного импульса ЭРДУ постоянны. Для нахождения и оптимизации законов управления вектором тяги ЭРДУ, используется принцип максимума Л.С. Понтрягина.

Время движения на гелиоцентрическом участке перебиралось в диапазоне от 450 до 620 суток. Величина гиперболического избытка скорости и дата старта варьировались и выбирались такими, чтобы обеспечить максимум массы КА в конечной точке гелиоцентрической траектории.

На рисунках 6 и 7 приведены основные результаты анализа, проведенного в рамках третьей главы – величины абсолютного и относительного выигрыша в конечной массе КА из-за использования лунного гравитационного маневра от суммарного времени межпланетного перелета.

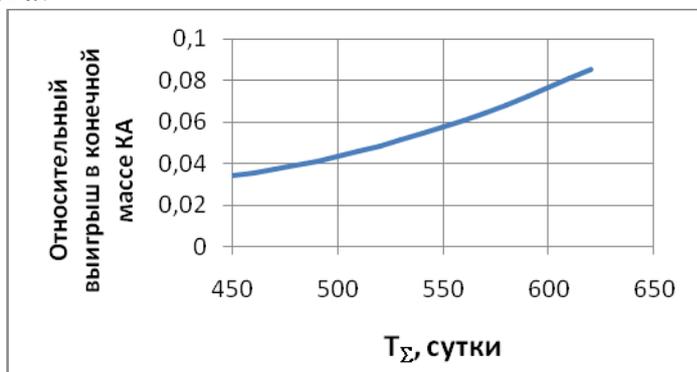
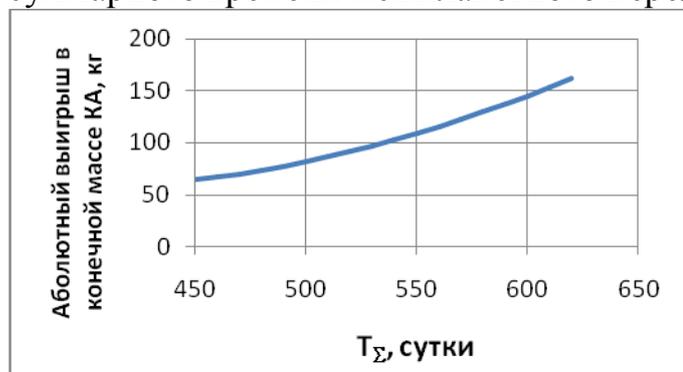


Рисунок 6 – Величина абсолютного выигрыша в конечной массе КА из-за использования лунного гравитационного маневра (маневров) от суммарного времени полета

Рисунок 7 - Относительный выигрыш в конечной массе КА из-за использования лунного гравитационного маневра

Из представленных рисунков можно сделать вывод, что для рассматриваемой транспортной системы выигрыш в конечной массе КА из-за использования гравитационного маневра у Луны достигает от 3.4 % до 8.5 %. Величину выигрыша нельзя назвать значительной, однако для некоторых вариантов межпланетных полетов такая величина может оказаться существенной и интересной для практического применения.

## ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

Результаты проведенной работы можно сформулировать в виде следующих выводов:

1. Разработана новая методика, позволяющая производить расчет и оптимизацию траекторий межпланетных КА, использующих гравитационный маневр у Луны и оснащенных электроракетными двигательными установками [1];
2. Разработаны алгоритмы и программное обеспечение, реализующее полученную методику;
3. На основе данной методики, с использованием разработанного программного обеспечения, проведен анализ характеристик перелета Земля-Мартс, использующего гравитационный маневр у Луны, для транспортной космической системы на базе РН «Союз 2.1б», ХРБ «Фрегат» и электроракетной двигательной установки [2], [3], [4];
4. Проведен анализ схемы межпланетного перелета Земля-Мартс, не использующей гравитационный маневр у Луны. При этом удалось определить величину выигрыша от использования лунного гравитационного маневра. Для рассматриваемого диапазона времен перелета схема с использованием лунного гравитационного маневра позволяет выиграть в конечной массе КА от 3.4 % до 8.5 % [2].

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Ельников Р.В. Гравитационный маневр у Луны при межпланетных перелетах КА с малой тягой. // Электронный журнал "Труды МАИ", №50, 2012. <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=27613>
2. Ельников Р.В. Анализ перелета Земля-Мартс с гравитационным маневром у Луны при использовании малой тяги. // Вестник МАИ. 2012. Т.19. №5. Стр. 38-44.
3. Ельников Р.В., Константинов М.С. Использование лунного гравитационного маневра при проектировании межпланетных траекторий Земля – Мартс для КА, оснащенных электроракетными двигательными установками. // Материалы 3-ей международной конференции «Космические технологии: настоящее и будущее» - Днепропетровск, 2011. - с. 34.
4. Ельников Р.В. Новый численный метод расчета лунного гравитационного маневра для реализации межпланетных траекторий КА, оснащенных электроракетными двигательными установками. // Материалы 46-ых научных чтений памяти К.Э. Циолковского - Калуга: Издательство «Эйдос», 2011. - с. 118-120.