

На правах рукописи



АВДЮШКИН АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ

**Нелинейный анализ устойчивости
коллинеарной точки либрации в ограниченной
фотогравитационной задаче трёх тел**

1.1.7. – Теоретическая механика, динамика машин

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2023

Работа выполнена на кафедре «Мехатроника и теоретическая механика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ).

Научный руководитель: **Бардин Борис Сабирович**
доктор физико-математических наук, доцент, профессор РАН, заведующий кафедрой «Мехатроника и теоретическая механика» МАИ

Официальные оппоненты: **Асланов Владимир Степанович**
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Самарского университета имени Королёва

Баркин Михаил Юрьевич
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ФН-3 «Теоретическая механика» МГТУ им. Н. Э. Баумана

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Защита состоится «30» июня 2023 г. в 10:00 на заседании диссертационного совета 24.2.327.08, созданного на базе МАИ, по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МАИ и на сайте МАИ по ссылке: https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=172783

Автореферат разослан «_____» _____ 2023 г.

Ученый секретарь диссертационного совета 24.2.327.08,
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник

Гидаснов В.Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. При изучении движения небесных тел и космических аппаратов помимо гравитационных сил нередко приходится учитывать и силы светового давления. В этом случае хорошей математической моделью для описания динамики космических объектов может служить так называемая ограниченная фотогравитационная задача трёх тел. В данной задаче рассматривается движение тела малой массы, на которое со стороны двух излучающих тел действуют как силы гравитационного притяжения, так и отталкивающие силы светового давления. Тело малой массы не влияет на движение массивных излучающих тел, которые движутся по известным кеплеровским орбитам.

Впервые влияние силы светового давления в ограниченной задаче трёх тел исследовал В. В. Радзиевский, введя коэффициент редукции массы, который является показателем уменьшения силы притяжения из-за действующей отталкивающей силы светового давления. Как и в классической задаче трёх тел, уравнения движения фотогравитационной задачи допускают замечательные частные решения, описывающие движения тела малой массы, при которых оно расположено на прямой, соединяющей излучающие тела. По аналогии с классической задачей такие движения называют коллинеарными (или прямолинейными) точками либрации. Они соответствуют положениям равновесия в системе координат, вращающейся вместе с излучающими телами. В отличие от классической задачи трёх тел в фотогравитационной задаче важным является также вопрос о существовании и бифуркации коллинеарных точек либрации, так как они существуют не при всех значениях параметров. Исследование данного вопроса было выполнено в работах А. Л. Куницына, А. Т. Турешбаева, Л. Г. Лукьянова.

Как с теоретической точки зрения, так и для возможных приложений большой интерес представляет вопрос об устойчивости точек либрации в ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел. А. Л. Куницын и А. Т. Турешбаев впервые обнаружили, что в отличие от классической задачи трёх тел в круговой ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел коллинеарная точка либрации L_1 , располагающаяся между притягивающими телами, может быть устойчива в линейном приближении.

В. Н. Тхай и А. С. Зимовщиков проводили исследование устойчивости коллинеарной точки либрации L_1 в ограниченной эллиптической фотогравитационной задаче трёх тел. На основе линейного анализа ими были численно построены диаграммы устойчивости точки L_1 .

Несмотря на то, что исследованию устойчивости точек либрации посвящено большое количество работ, полное и строгое решение данной задачи не получено до сих пор. Стоит отметить, что большинство исследований устойчивости точки либрации L_1 были выполнены либо в линейном приближении, либо для некоторых специальных значений параметров. Однако исследова-

ния устойчивости линеаризованной системы недостаточно для определения устойчивости исходной нелинейной системы. В частности, устойчивая в линейном приближении точка либрации в резонансных случаях может быть неустойчивой.

Цель работы. Целью данной диссертационной работы является проведение нелинейного анализа и получение строгих выводов об устойчивости коллинеарной точки либрации L_1 в ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел. В работе рассмотрен как случай круговых, так и случай эллиптических орбит притягивающих тел.

Методы исследования. Основными методами исследования в диссертационной работе являются методы общей теории устойчивости, методы теории КАМ, метод малого параметра, метод нормальных форм и симплектических отображений. В работе также применяются методы численного интегрирования дифференциальных уравнений и используются компьютерные алгоритмы аналитических вычислений, реализованные в системе Maple.

Достоверность результатов. Достоверность представленных в диссертации результатов обеспечивается применением строгих математических методов исследования, высокой точностью проведенных численных расчетов, а также тем, что выводы, полученные аналитически, полностью согласуются с результатами численного анализа.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты:

- Получены выводы об устойчивости по Ляпунову точки либрации L_1 в ограниченной круговой фотогравитационной задаче трёх тел. Исследование выполнено для большинства значений параметров. А именно, во всех случаях, когда вопрос об устойчивости решается членами до четвёртого порядка включительно в разложении гамильтониана задачи в окрестности точки L_1 .
- Аналитически построены границы областей неустойчивости точки либрации L_1 в ограниченной слабоэллиптической фотогравитационной задаче трёх тел.
- В случае равных масс и интенсивностей излучения массивных тел, движущихся по слабоэллиптическим орбитам, получены строгие выводы о формальной устойчивости точки либрации L_1 в ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел.
- Получено решение задачи об устойчивости по Ляпунову положения равновесия (точки либрации L_1) в фотогравитационной задаче Ситникова.

Положения и результаты, выносимые на защиту.

1. Получены следующие строгие выводы об устойчивости по Ляпунову коллинеарной точки либрации в ограниченной круговой фотогравитационной задаче трёх тел.
 - Показано, что при резонансе третьего порядка возможна устойчивость по Ляпунову точки либрации L_1 , которая реализуется на одномерном множестве, а именно, на аналитически заданной кривой в трёхмерном пространстве параметров задачи. Получены уравнения данной кривой.
 - В трёхмерном пространстве параметров задачи на двумерных поверхностях, отвечающих резонансам первого, второго и четвёртого порядка, указаны области неустойчивости и устойчивости по Ляпунову точки либрации L_1 . Аналитически получены уравнения границ, разделяющих области устойчивости и неустойчивости.
 - Показано, что при отсутствии резонансов до четвёртого порядка включительно устойчивая в линейном приближении точка либрации L_1 будет почти всюду устойчива по Ляпунову. Исключение может составить лишь множество нулевой меры – двумерная поверхность вырождения в трёхмерном пространстве параметров задачи, уравнение которой получено в явной аналитической форме.
2. В предположении о малости эксцентриситета орбит притягивающих и излучающих тел получены следующие результаты по устойчивости коллинеарной точки либрации в ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел
 - Аналитически исследовано явление параметрического резонанса и построены границы неустойчивости точки либрации L_1 в виде рядов по степеням эксцентриситета орбит массивных тел.
 - В случае равных масс и интенсивностей излучения массивных тел выполнен нелинейный анализ и установлено, что устойчивая в линейном приближении точка либрации L_1 будет устойчива для большинства начальных условий, а при отсутствии резонанса четвёртого порядка будет иметь место и формальная устойчивость L_1 .
3. Доказано, что в фотогравитационной задаче Ситникова при значениях параметров из областей линейной устойчивости имеет место также и устойчивость положения равновесия (точки либрации L_1) по Ляпунову. Построена диаграмма устойчивости.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты проведённого исследования представляют общетеоретический интерес для развития мето-

дов небесной механики, а также могут иметь прикладное значение для разработки новых методов астрономических наблюдений пылевых скоплений в окрестности двойных звёзд.

Апробация результатов.

- на 15-й, 16-й, 17-й, 18-й, 19-й, 20-й международных конференциях "Авиация и космонавтика (МАИ, Москва);
- на 43-й, 44-й, 45-й, 46-й международных молодёжных научных конференциях "Гагаринские чтения (МАИ, Москва);
- на 53-й, 54-й, 55-й всероссийских конференциях по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники (РУДН, Москва);
- на 13-й международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (Алушта, 2020);
- на международных конференциях по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2020, 2022);
- на международных научных конференциях по механике "VIII Поляховские чтения" и "IX Поляховские чтения" (СПбГУ, Санкт-Петербург, 2018, 2021);
- на 46-х академических чтениях по космонавтике, (МГТУ им. Баумана, Москва, 2022).

Публикации. Основные положения диссертационного исследования опубликованы в 6 статьях [1-6] в журналах, входящих в перечень ВАК, либо индексируемых в Scopus и Web Of Science, а также в сборниках и материалах конференций [7-26].

Личный вклад автора. Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки задач, исследованных в рамках подготовки диссертационной работы, задавались научным руководителем. Соискателем выполнены аналитические вычисления и численные расчеты с использованием метода нормальных форм, метода малого параметра и метода симплектических отображений. Проведен нелинейный анализ, по результатам которого сформулированы выводы и построены диаграммы устойчивости.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения и списка литературы, включающего 103 наименования. Общий объем диссертации составляет 111 страниц и содержит 31 рисунок.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и задачи работы, приведён обзор исследований по устойчивости точек либрации ограниченной фотогравитационной задачи трёх тел и дано краткое изложение содержания работы по главам.

В первой главе рассмотрен вопрос о существовании и бифуркации коллинеарных точек либрации ограниченной фотогравитационной задачи трёх тел.

Рассматривается движение тела малой массы P под влиянием гравитационных сил и репульсивных сил светового давления, действующих со стороны тел P_1 и P_2 , которые движутся по известным кеплеровским орбитам вокруг их общего центра масс, взаимодействуя друг с другом по закону всемирного тяготения. Тело P не влияет на движение массивных тел P_1 и P_2 . Данная задача называется ограниченной фотогравитационной задачей трёх тел.

Для описания движения тела P введена подвижная (вращающаяся) система координат $Oxyz$ (см. Рис. 1), начало которой находится в центре масс O системы. Ось Ox проходит через притягивающие тела. Ось Oy лежит в плоскости движения тел, а кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy совпадает с направлением вращения тела P_2 по орбите. Ось Oz дополняет систему координат до правой тройки векторов.

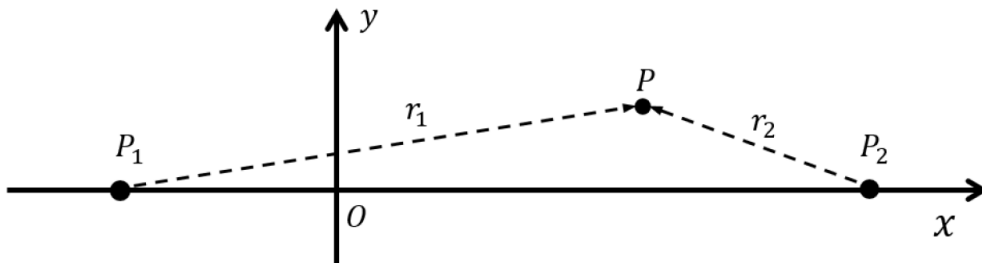


Рис. 1. Система координат.

Движение тела P рассматривается в безразмерных координатах Невилла ξ, η, ζ , введенных по формулам $x = r\xi$, $y = r\eta$, $z = r\zeta$, где x, y, z – координаты тела P в системе $Oxyz$, а r – расстояние между притягивающими телами P_1 и P_2 , которое определяется формулами кеплеровского движения, т. е. является заданной функцией истинной аномалии ν . Уравнения движения частицы P могут быть записаны в следующей канонической форме

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\nu} &= \frac{\partial H}{\partial p_\xi}, & \frac{d\eta}{d\nu} &= \frac{\partial H}{\partial p_\eta}, & \frac{d\zeta}{d\nu} &= \frac{\partial H}{\partial p_\zeta}, \\ \frac{dp_\xi}{d\nu} &= -\frac{\partial H}{\partial \xi}, & \frac{dp_\eta}{d\nu} &= -\frac{\partial H}{\partial \eta}, & \frac{dp_\zeta}{d\nu} &= -\frac{\partial H}{\partial \zeta}, \end{aligned} \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + p_\xi \eta - p_\eta \xi + \frac{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) e \cos \nu}{2(1 + e \cos \nu)} - \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left(\frac{Q_1(1 - \mu)}{r_1} + \frac{Q_2 \mu}{r_2} \right). \quad (2)$$

где величины r_1 и r_2 вычисляются по формулам

$$r_1 = \sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad r_2 = \sqrt{(\xi + \mu - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Через m_1, m_2 обозначены массы тел P_1 и P_2 , а через Q_1 и Q_2 – коэффициенты редукции масс, характеризующие собой силы светового давления.

Уравнения движения (1) допускают стационарное решение

$$\xi = \xi_*, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad p_\xi = 0, \quad p_\eta = \xi_*, \quad p_\zeta = 0, \quad (3)$$

где ξ_* – действительный корень уравнения

$$\xi_* - \frac{Q_1(1 - \mu)}{(\xi_* + \mu)|\xi_* + \mu|} - \frac{Q_2 \mu}{(\xi_* + \mu - 1)|\xi_* + \mu - 1|} = 0. \quad (4)$$

Решение (3) описывает такое движение тела P , при котором оно всё время находится на прямой, проходящей через тела P_1 и P_2 . В подвижной системе координат $Oxyz$ этим решениям отвечают положения относительного равновесия, которые называют коллинеарными точками либрации. В классической задаче трёх тел (когда $Q_1 = Q_2 = 1$) уравнение (4) при любых допустимых значениях параметра μ имеет три решения, координаты которых расположены в интервалах $(-\mu; 1 - \mu)$, $(1 - \mu; +\infty)$ и $(-\infty; -\mu)$. Точки либрации, соответствующие этим решениям, обозначаются L_1, L_2 и L_3 .

В фотогравитационной задаче трёх тел в зависимости от значений параметров Q_1, Q_2, μ уравнение (4) может иметь одно, два или три решения. На Рис. 2 представлено сечение трёхмерного пространства параметров задачи плоскостью $\mu = 0.45$. В сечении показаны семь областей, в каждой из которых число корней уравнения (4) неизменно. В частности, на интервале $(-\mu; 1 - \mu)$ в областях I и IIIb уравнение (4) имеет один корень, в областях IIa и IVa – два корня, в области IIIa – три корня, а в областях IIb и IVb уравнение (4) корней не имеет. При изменении значения параметра μ происходит деформация указанных областей, но качественно картина их расположения не изменяется. Последнее означает, что аналогичная ситуация имеет место и во всем трёхмерном пространстве параметров μ, Q_1, Q_2 : поверхность бифуркации точек либрации и координатные плоскости $Q_1 = 0, Q_2 = 0$ разделяют все множество значений параметров на семь областей, внутри каждой их ко-

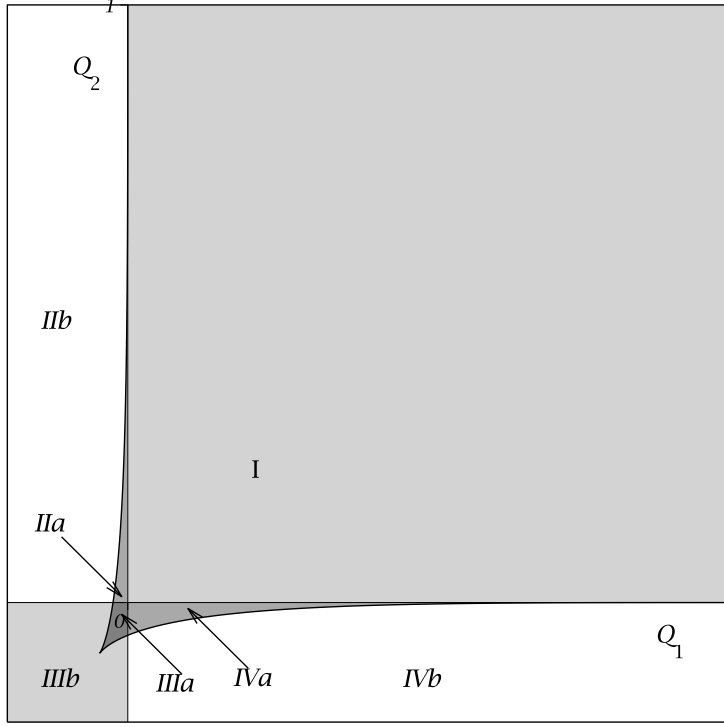


Рис. 2. Бифуркационная кривая и области существования решений уравнения (4) при $\mu = 0.45$.

торых число корней уравнения (4) внутри интервалов $(-\mu; 1-\mu)$, $(1-\mu; +\infty)$ и $(-\infty; -\mu)$ неизменно. В диссертации также дано полное описание бифуркации коллинеарных точек либрации в фотогравитационной задаче трёх тел для всех допустимых значений параметров Q_1 , Q_2 и μ , а также описан характер эволюции, т. е. перехода точек либрации из одного интервала в другой.

Во второй главе проведён строгий нелинейный анализ устойчивости по Ляпунову коллинеарных точек либрации в круговой ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел.

Для решения задачи об устойчивости точек либрации введены возмущения q_i , p_i ($i = 1, 2$) по формулам

$$\xi = \xi_* + q_1, \quad \eta = q_2, \quad p_\xi = p_1, \quad p_\eta = \xi_* + p_2.$$

Разложение гамильтониана в ряд по степеням q_i , p_i имеет вид

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \quad (5)$$

где

$$H_2 = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + p_1 q_2 - p_2 q_1 - a q_1^2 + \frac{a}{2} q_2^2, \quad (6)$$

$$H_3 = b q_1^3 - \frac{3b}{2} q_1 q_2^2, \quad H_4 = -c q_1^4 + 3c q_1^2 q_2^2 - \frac{3c}{8} q_2^4. \quad (7)$$

Коэффициенты форм (6)-(7) имеют вид

$$a = \frac{Q_1(1-\mu)}{|\xi_* + \mu|^3} + \frac{Q_2\mu}{|\xi_* + \mu - 1|^3}, \quad (8)$$

$$b = \frac{Q_1(1-\mu)}{|\xi_* + \mu|(\xi_* + \mu)^3} - \frac{Q_2\mu}{|\xi_* + \mu - 1|(\xi_* + \mu - 1)^3}, \quad (9)$$

$$c = \frac{Q_1(1-\mu)}{|\xi_* + \mu|^5} + \frac{Q_2\mu}{|\xi_* + \mu - 1|^5}. \quad (10)$$

В переменных q_i, p_i задача об устойчивости точки либрации сводится к задаче об устойчивости положения равновесия $q_i = p_i = 0$ ($i = 1, 2$) канонической системы с гамильтонианом (5).

Характеристическое уравнение системы, линеаризованной в окрестности коллинеарной точки либрации, имеет следующий вид

$$\lambda^4 + (2-a)\lambda^2 - 2a^2 + a + 1 = 0. \quad (11)$$

Выражение для коэффициента a задаётся формулой (8), где ξ_* – корень уравнения (4). Анализ коэффициента a показал, что коллинеарные точки либрации L_2 и L_3 неустойчивы в линейном приближении при всех допустимых значениях параметров Q_1, Q_2, μ . Из неустойчивости в линейной системе также следует и их неустойчивость по Ляпунову. Коллинеарная точка либрации L_1 устойчива в линейном приближении, если для коэффициента a , вычисленного для этой точки, выполнено условие $a \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{8}{9}; 1)$. Если же данное условие не выполнено, то точка либрации L_1 неустойчива в линейном приближении, откуда также следует и её неустойчивость по Ляпунову.

Условие $a \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{8}{9}; 1)$ определяет две области в трёхмерном пространстве параметров μ, Q_1, Q_2 . Границы этих областей задаются уравнениями $a = -\frac{1}{2}$, $a = 0$ и $a = \frac{8}{9}$, $a = 1$, где a определяется выражением (8). В явной параметрической форме эти уравнения принимают вид

$$\text{при } a = -\frac{1}{2}: \quad Q_1 = \frac{(3\xi_* + \mu - 1)(\xi_* + \mu)^3}{2(1-\mu)}, \quad Q_2 = \frac{(3\xi_* + \mu)(\xi_* + \mu - 1)^3}{2\mu};$$

$$\text{при } a = 0: \quad Q_1 = \frac{\xi_*(\xi_* + \mu)^3}{1-\mu}, \quad Q_2 = \frac{\xi_*(\xi_* + \mu - 1)^3}{2\mu};$$

$$\text{при } a = \frac{8}{9}: \quad Q_1 = \frac{(\xi_* - 8\mu + 8)(\xi_* + \mu)^3}{9(1-\mu)}, \quad Q_2 = \frac{(\xi_* - 8\mu)(\xi_* + \mu - 1)^3}{9\mu};$$

$$\text{при } a = 1: \quad Q_1 = (\xi_* + \mu)^3, \quad Q_2 = -(\xi_* + \mu - 1)^3,$$

где параметры μ и ξ_* принимают значения из интервалов $(0; 1)$ и $(-\mu; 1 - \mu)$ соответственно, причем параметр ξ_* следует интерпретировать как безразмерную координату точки либрации L_1 (корень уравнения (4)). На Рис. 3 пред-

ставлено сечение областей устойчивости в пространстве параметров задачи плоскостью $\mu = 0.45$. В данном сечении области устойчивости в линейном приближении обозначены серым цветом. Эти области примыкают к точкам $(0, 1)$ и $(1, 0)$ плоскости параметров Q_1, Q_2 . Верхняя область соответствует значениям коэффициента a из интервала $(\frac{8}{9}; 1)$, а нижняя – значениям a из интервала $(-\frac{1}{2}; 0)$. При приближении значений параметра μ к нулю указанные области вытягиваются вниз вдоль отрицательного направления оси Q_2 , а при приближении μ к единице – влево вдоль отрицательного направления оси Q_1 .

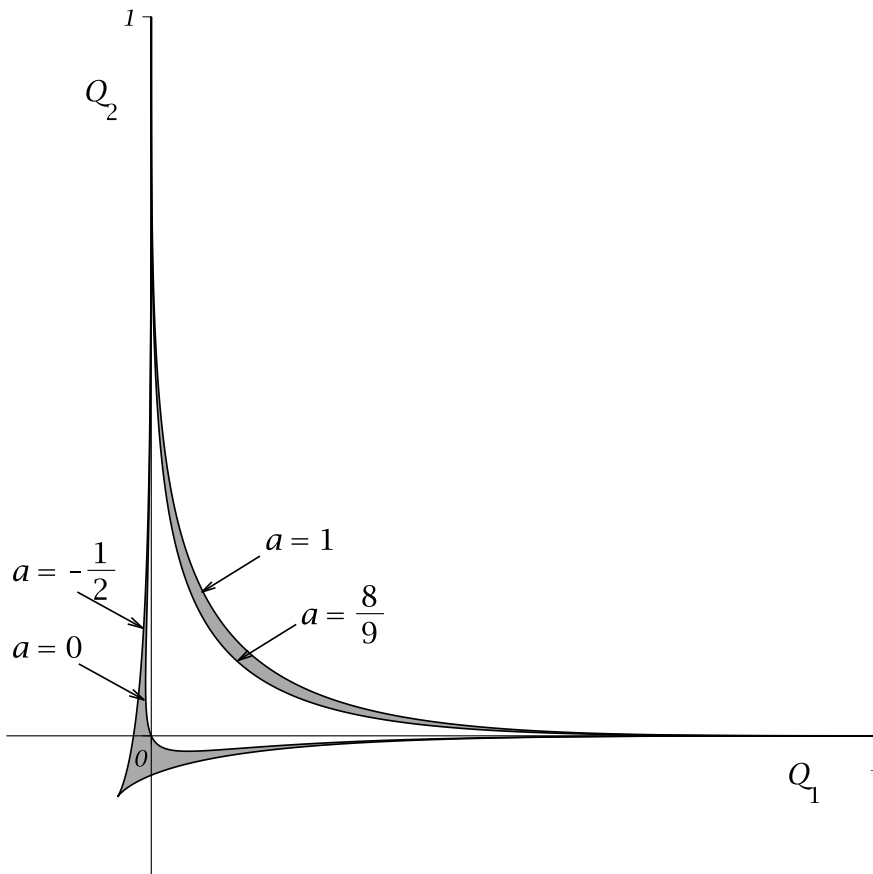


Рис. 3. Область устойчивости при $\mu = 0.45$.

Устойчивость коллинеарной точки либрации L_1 в линейном приближении не гарантирует её устойчивость по Ляпунову. Для строгого решения вопроса об устойчивости по Ляпунову при значениях параметров, удовлетворяющих условию $a \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{8}{9}; 1)$, в диссертации был проведён нелинейный анализ с учётом членов до четвёртой степени включительно в разложении гамильтониана (5). Выводы, полученные на основании этого анализа, представлены в работах [3–5], они являются основным результатом главы 2. Кратко опишем эти результаты.

Нелинейный анализ устойчивости выполнялся по следующей методике. Строилась каноническая замена переменных $q_i, p_i \rightarrow u_i, v_i$ ($i = 1, 2$), приводящая гамильтониан задачи к наиболее простой (нормальной) форме, а затем

применялись известные результаты об устойчивости гамильтоновых систем, полученные на основании теории КАМ и второго метода Ляпунова в работах В. И. Арнольда, Ю. Мозера, А. П. Маркеева и А. Г. Сокольского.

В нерезонансном и резонансных случаях нормальная форма имеет различный вид. Поэтому резонансные случаи рассматривались отдельно от нерезонансного. В нерезонансном случае гамильтониан задачи, нормализованный до членов четвёртого порядка, имеет вид

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right), \quad (12)$$

где канонические переменные r_i , φ_i ($i = 1, 2$) введены по формулам $u_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i$, $v_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i$. Величины ω_1 и ω_2 в (12) представляют собой частоты системы, линеаризованной в окрестности точки либрации L_1 . Они вычисляются по формулам

$$\omega_1 = \left(1 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{9a^2 - 8a}\right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \left(1 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{9a^2 - 8a}\right)^{1/2}. \quad (13)$$

Если $\Delta = c_{02}\omega_1^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{20}\omega_2^2 \neq 0$, то согласно теореме Арнольда-Мозера положение равновесия системы с гамильтонианом (12) устойчиво по Ляпунову.

Используя метод Депри-Хори, была выполнена нормализация функции Гамильтона и получены аналитические выражения для коэффициентов c_{02} , c_{11} , c_{20} , что позволило получить выражение для Δ в следующем явном виде

$$\Delta(a, b, c) = -\frac{3\delta}{16a(9a - 8)(54a^2 - 41a - 9)(a - 1)(2a + 1)^2}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \delta = & 11664a^7c - 7776a^6b^2 - 14688a^6c + 6336a^5b^2 - 8856a^5c + \\ & + 12110a^4b^2 + 17196a^4c - 19009a^3b^2 - 6483a^3c + 16439a^2b^2 - \\ & - 3189a^2c - 5256ab^2 + 3384ac - 2520b^2 + 648c. \end{aligned}$$

Таким образом, при отсутствии резонансов до четвёртого порядка включительно и выполнении условия $\delta \neq 0$ точка либрации L_1 устойчива по Ляпунову. При $\delta = 0$ имеет место случай вырождения. Для исследования устойчивости в случае вырождения необходимо учитывать члены не ниже шестого порядка. Равенство $\delta = 0$ определяет двумерные поверхности вырождения в областях устойчивости в линейном приближении трёхмерного пространства параметров задачи. Сечения данных поверхностей были построены численно при фиксированных значениях μ и представлены в диссертационной работе на диаграммах устойчивости.

При исследовании устойчивости наиболее существенную роль играют резонансы до четвёртого порядка включительно. Рассмотрим сначала случаи резонансов третьего ($\omega_1 = 2\omega_2$) и четвёртого ($\omega_1 = 3\omega_2$) порядков. Резонанс третьего порядка имеет место при $a = a_3^\pm$, где $a_3^- = \frac{41-5\sqrt{145}}{108}$, $a_3^+ = \frac{41+5\sqrt{145}}{108}$, а резонанс четвёртого порядка при $a = a_4^\pm$, где $a_4^- = \frac{68-60\sqrt{5}}{209}$, $a_4^+ = \frac{68+60\sqrt{5}}{209}$. В трёхмерном пространстве параметров μ , Q_1 , Q_2 этим резонансам соответствуют двумерные резонансные поверхности, уравнения которых можно записать в следующей явной параметрической форме

$$Q_1 = -\frac{(\xi_* + \mu)^3 (a_r \mu + a_r \xi_* - a_r - \xi_*)}{1 - \mu}, \quad Q_2 = -\frac{(\xi_* + \mu - 1)^3 (a_r \mu + a_r \xi_* - \xi_*)}{\mu}, \quad (15)$$

где $a_r = a_3^\pm$ при резонансе третьего порядка и $a_r = a_4^\pm$ при резонансе четвертого порядка, а параметры μ , ξ_* принимают значения из интервалов $\mu \in (0; 1)$ и $\xi_* \in (-\mu; 1 - \mu)$. Резонансные поверхности лежат внутри областей устойчивости в линейном приближении. На Рис. 4 для $Q_i \leq 0.4$ ($i = 1, 2$) изображены резонансные кривые, полученные пересечением резонансных поверхностей с плоскостью $\mu = 0.45$.

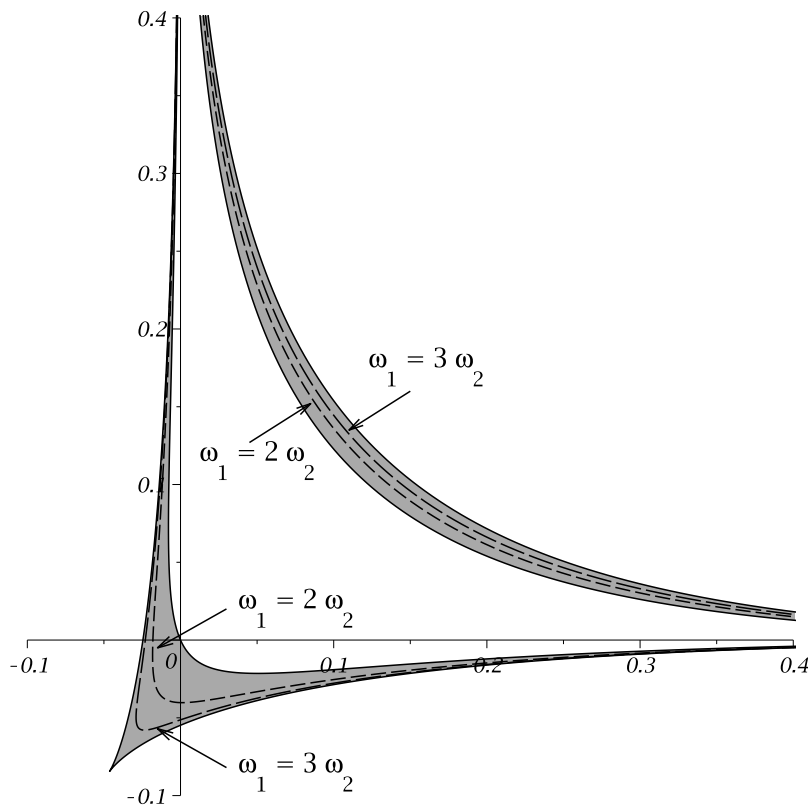


Рис. 4. Резонансные кривые (для $\mu = 0.45$).

При резонансе третьего порядка $\omega_1 = 2\omega_2$ функция Гамильтона приводится к следующей нормальной форме

$$H = 2\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 - 2\sqrt{2}k_{12}r_2\sqrt{r_1} \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + O((r_1 + r_2)^2). \quad (16)$$

Если коэффициент $k_{12} \neq 0$, то согласно теореме А. П. Маркеева имеет место неустойчивость положения равновесия системы с гамильтонианом (16), что означает и неустойчивость коллинеарной точки L_1 . Особый случай $k_{12} = 0$ возможен только при $b = 0$. В этом случае нормальная форма гамильтониана не содержит резонансную часть до членов четвёртого порядка включительно. При $k_{12} = 0$ нормализованный гамильтониан имеет вид (12), поэтому для решения вопроса устойчивости может быть применена теорема Арнольда-Мозера, на основании которой при $\Delta \neq 0$ коллинеарная точка L_1 устойчива по Ляпунову. Особый случай имеет место на кривой, которая лежит на резонансной поверхности в трёхмерном пространстве параметров μ , Q_1 , Q_2 и задается следующими параметрическими уравнениями

$$Q_1 = \frac{(a_r - \mu)^4 a_r}{(2a_r - 1)^4 (1 - \mu)}, \quad Q_2 = \frac{(a_r + \mu - 1)^4 a_r}{(2a_r - 1)^4 \mu}. \quad (17)$$

Вычисления показали, что на данной кривой неравенство $\Delta \neq 0$ всегда выполнено, т. е. коллинеарная точка либрации L_1 устойчива по Ляпунову.

Таким образом, на двухмерной поверхности, отвечающей резонансу третьего порядка, почти всюду имеет место неустойчивость коллинеарной точки либрации L_1 . Исключение составляет лишь кривая (17), где коллинеарная точка либрации L_1 устойчива по Ляпунову.

При резонансе четвёртого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$ нормальная форма гамильтониана имеет вид

$$H = 3\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + Br_2 \sqrt{r_1 r_2} \sin(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right). \quad (18)$$

Согласно теореме А. П. Маркеева условием устойчивости по Ляпунову канонической системы с гамильтонианом (18) является выполнение неравенства $|3\sqrt{3}B| < |C|$, где $C = c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}$. Если же это неравенство выполняется с противоположным знаком, то имеет место неустойчивость.

В диссертации строго показано, что в случае $a = a_4^-$ точка либрации L_1 устойчива в смысле Ляпунова. В случае $a = a_4^+$ в зависимости от значений параметров μ и ξ_* возможна как устойчивость, так и неустойчивость. На Рис. 5 в плоскости параметров μ и ξ_* представлена диаграмма устойчивости при $a = a_4^+$. На этой диаграмме области устойчивости обозначены через I, II и III. Границы областей неустойчивости в диссертационной работе были получены в явной аналитической форме. Они представляют собой отрезки эллипсов, пересекающиеся в точках $E_1 \left(\frac{141-60\sqrt{5}}{209}, \frac{68+60\sqrt{5}}{209} \right)$ и $E_2 \left(\frac{68+60\sqrt{5}}{209}, -\frac{68+60\sqrt{5}}{209} \right)$. Узкие области неустойчивости, обозначенные через IV и V, выделены белым цветом и показаны в увеличенном масштабе в нижней части Рис. 5.

В работе также был полностью исследован вопрос об устойчивости при

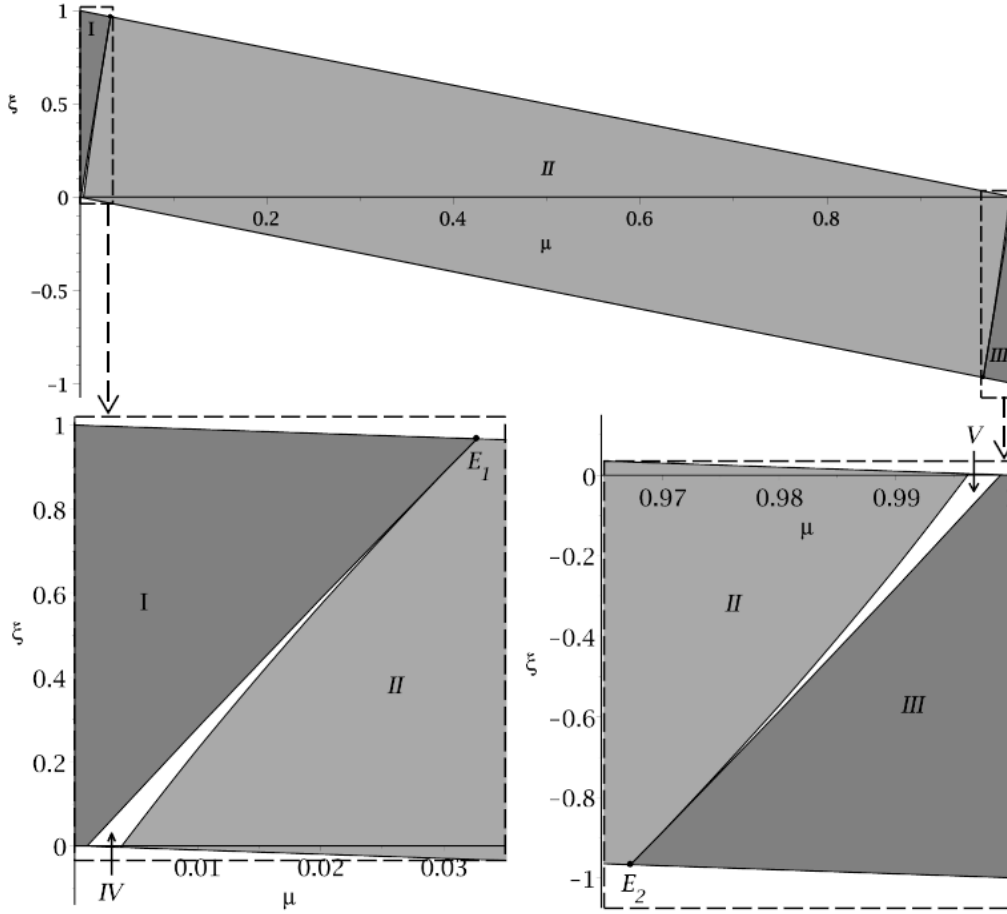


Рис. 5. Области устойчивости и неустойчивости в случае $a = a^+ = \frac{68+60\sqrt{5}}{209}$.

резонансах первого и второго порядков, которые имеют место на границах областей устойчивости в линейном приближении, т.е. в случаях, когда выполняется одно из равенств: $a = 1$, $a = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{8}{9}$ или $a = 0$. Как было указано выше, они реализуются на двумерных поверхностях в трехмерном пространстве параметров μ , Q_1 , Q_2 . Опишем каждый из указанных случаев отдельно.

На границах $a = 1$ и $a = -\frac{1}{2}$ имеет место резонанс первого порядка $\omega_2 = 0$. В рассматриваемой задаче матрица линейной системы при $a = 1$ и $a = -\frac{1}{2}$ не приводится к диагональному виду, поэтому линейная система неустойчива. Однако, в данном граничном случае из неустойчивости в линейном приближении не следует неустойчивость в полной нелинейной системе с гамильтонианом (2). Для строгого решения вопроса об устойчивости здесь необходим нелинейный анализ.

В этом случае нормальная форма гамильтониана, вычисленная до членов четвертой степени включительно, имеет вид

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} (u_1^2 + v_1^2) - \frac{1}{2} v_2^2 + k_3 u_2^3 + k_{12} (u_1^2 + v_1^2) u_2 + A u_2^4 + \\
 & + B (u_1^2 + v_1^2) u_2^2 + C (u_1^2 + v_1^2)^2.
 \end{aligned} \tag{19}$$

В соответствии с теоремой А. Г. Сокольского, если коэффициент k_3 в гамильтониане (19) отличен от нуля, то положение равновесия $x_i = y_i = 0$ неустойчиво. Если же коэффициент k_3 равен нулю, то при выполнении неравенства $A < 0$ имеет место устойчивость по Ляпунову, а при $A > 0$ – неустойчивость.

В диссертационной работе были получены явные выражения для коэффициентов k_3 , k_{12} , A , B и C нормальной формы (19).

Оказалось, что в случае $a = 1$ коэффициенты $k_3 = k_{12} = 0$, а коэффициент A имеет вид

$$A = \frac{27\mu(\mu - 1)}{8(\xi_* + \mu)^2(\xi_* + \mu - 1)^2}. \quad (20)$$

Поскольку $\mu \in (0; 1)$, то из (20) следует, что $A < 0$. Следовательно, на границе области устойчивости, заданной уравнением $a = 1$, коллинеарная точка либрации L_1 устойчива по Ляпунову.

На границе $a = -\frac{1}{2}$ необходимые для анализа устойчивости коэффициенты нормализованного гамильтониана (19) имеют вид

$$k_3 = -\frac{33\sqrt{6}}{100}b, \quad A = \frac{9(79\xi^2 + 154\xi\mu + 51\mu^2 - 77\xi - 51\mu + 19)}{1250(\xi + \mu - 1)^2(\xi + \mu)^2}. \quad (21)$$

Анализ выражений (21) показал, что на границе $a = -\frac{1}{2}$ имеет место неустойчивость коллинеарной точки либрации L_1 .

Резонанс второго порядка $\omega_1 = \omega_2$ реализуется на границах $a = \frac{8}{9}$ и $a = 0$. В этом случае гамильтониан задачи приводится к следующей нормальной форме

$$H = H_2 + (u_1^2 + v_1^2)(A(u_2^2 + v_2^2) + B(v_2u_1 - u_2v_1) + C(u_1^2 + v_2^2)) + \dots \quad (22)$$

В соответствии с теоремой А. Г. Сокольского положение равновесия канонической системы с гамильтонианом (22) устойчиво по Ляпунову, если выполняется неравенство $A > 0$. В противном случае, при $A < 0$, положение равновесия неустойчиво.

Для каждой из границ $a = \frac{8}{9}$ и $a = 0$ были в явной форме получены коэффициенты нормальной формы (22). На основании анализа этих выражений были построены области устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров μ , ξ_* . Эти диаграммы представлены на Рис. 6 и 7.

В областях, выделенных темно-серым цветом, коллинеарная точка либрации L_1 устойчива по Ляпунову. В областях, выделенных светло-серым цветом, коллинеарная точка либрации L_1 неустойчива.

В третьей главе исследовался вопрос об устойчивости коллинеарной точки либрации L_1 плоской ограниченной фотогравитационной задачи трёх тел в случае эллиптических орбит массивных тел. Полагая эксцентриситет орбит малым параметром задачи, аналитически были построены границы

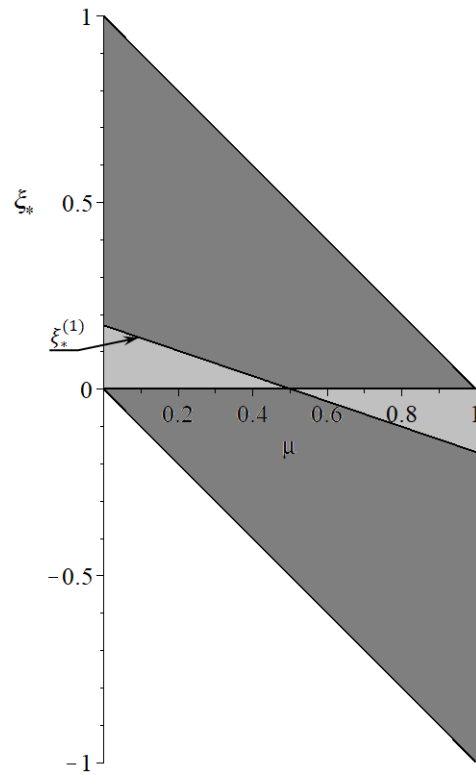
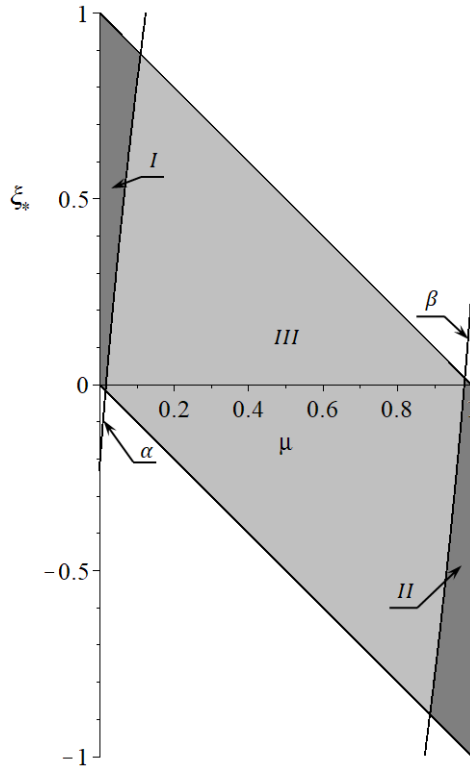


Рис. 6. Подобласти устойчивости и неустойчивости в случае $a = \frac{8}{9}$.

Рис. 7. Подобласти устойчивости и неустойчивости в случае $a = 0$.

областей неустойчивости (параметрического резонанса). Вне областей параметрического резонанса имеет место устойчивость точки L_1 в линейном приближении. В случае равных масс и интенсивностей излучения массивных тел был также проведён нелинейный анализ и получены выводы об устойчивости для большинства начальных условий и о формальной устойчивости точки L_1 . Результаты главы 3 опубликованы в [2,6].

Анализ устойчивости точки либрации L_1 в линейном приближении проводился на основе анализа канонической системы с гамильтонианом

$$H_2 = \frac{1}{2} (p_\xi^2 + p_\eta^2) + p_\xi \eta - p_\eta \xi + \frac{e \cos \nu - 2a}{2(1 + e \cos \nu)} \xi^2 + \frac{e \cos \nu + a}{2(1 + e \cos \nu)} \eta^2, \quad (23)$$

где коэффициент a вычисляется по формуле (8). Функция Гамильтона (23) представляет собой квадратичную часть разложения гамильтониана эллиптической задачи в окрестности точки либрации L_1 .

Предположение о малости эксцентриситета e позволило выполнить анализ устойчивости в линейном приближении аналитически. В частности, были получены аналитические выражения границ областей неустойчивости (параметрического резонанса).

Построение границ областей неустойчивости выполнялось на основании следующего подхода. Функция Гамильтона (23) была разложена в ряд по

степеням малого параметра e

$$H_2 = H_2^{(0)} + eH_2^{(1)} + e^2H_2^{(2)} + \dots \quad (24)$$

Далее при помощи линейной канонической замены переменных автономная часть функции Гамильтона (24) была приведена к следующей нормальной форме

$$\tilde{H}_2 = \frac{1}{2}\omega_1 (q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2}\omega_2 (q_2^2 + p_2^2) + e\tilde{H}_2^{(1)} + e^2\tilde{H}_2^{(2)} + O(e^3), \quad (25)$$

где ω_1 и ω_2 – частоты линейной системы при $e = 0$, которые определяются соотношениями (13).

Если при $e = 0$ выполнено хотя бы одно из резонансных соотношений: $2\omega_1 = n_1$, $2\omega_2 = n_2$ или $\omega_1 - \omega_2 = k$ (где n_1, n_2, k – некоторые целые числа), то при $e \neq 0$ в системе с гамильтонианом (25) возможно явление параметрического резонанса, приводящее к неустойчивости. Было установлено, что указанные резонансные соотношения выполняются в одной внутренней точке интервала $(\frac{8}{9}; 1)$ и в трёх внутренних точках интервала $(-\frac{1}{2}; 0)$, а также на границах указанных интервалов. В точках $a = \frac{5+\sqrt{97}}{16}$ и $a = \frac{5-\sqrt{97}}{16}$ имеет место равенство $2\omega_2 = 1$, в точке $a = \frac{13-3\sqrt{41}}{16}$ – равенство $2\omega_1 = 3$, в точке $a = -\frac{1}{3}$ – равенство $\omega_1 - \omega_2 = 1$. На границах $a = 1$ и $a = -\frac{1}{2}$ имеет место равенство $\omega_2 = 0$, а на границах $a = \frac{8}{9}$ и $a = 0$ – равенство $\omega_1 = \omega_2$.

В плоскости параметров a, e из точек с координатами $(1, 0)$, $(\frac{5+\sqrt{97}}{16}, 0)$, $(\frac{8}{9}, 0)$, $(0, 0)$, $(\frac{5-\sqrt{97}}{16}, 0)$, $(-\frac{1}{3}, 0)$, $(\frac{13-3\sqrt{41}}{16}, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ исходят области неустойчивости (параметрического резонанса). Границы указанных областей можно построить аналитически в виде сходящихся по степеням e рядов

$$a = a_0 + ea_1 + e^2a_2 + \dots, \quad (26)$$

где в качестве a_0 следует положить одно из указанных выше резонансных значений: $1, \frac{5+\sqrt{97}}{16}, \frac{8}{9}, 0, \frac{5-\sqrt{97}}{16}, -\frac{1}{3}, \frac{13-3\sqrt{41}}{16}$ или $-\frac{1}{2}$.

Коэффициенты рядов (26) находились следующим образом. После подставления (26) в гамильтониан (25) выполнялась нормализация линейной системы до членов конечного порядка. Затем на основании анализа корней характеристического уравнения нормализованной таким образом системы были получены условия неустойчивости и устойчивости в линейном приближении. Эти условия представляют собой неравенства на коэффициенты нормализованной функции Гамильтона. На границах областей устойчивости и неустойчивости указанные неравенства обращаются в равенства, представляющие собой уравнения относительно коэффициентов a_i рядов (26). Решая последние уравнения, можно определить коэффициенты a_i до любой сколько угодно вы-

сокой степени эксцентриситета e . Вид нормализованной функции Гамильтона зависит от типа резонанса, поэтому каждый резонансный случай рассматривался отдельно.

Резонансу основного типа $2\omega_2 = 1$ на плоскости параметров a, e соответствуют две области. Одна из этих областей исходит из точки $\left(\frac{5+\sqrt{97}}{16}, 0\right)$.

Вычисления показали, что её границы имеют вид

$$\begin{aligned} a_+ &= \frac{5 + \sqrt{97}}{16} + \frac{9(8 + \sqrt{97})}{4(97 + 19\sqrt{97})}e + \frac{27(444341\sqrt{97} - 9550369)}{32(97 + 19\sqrt{97})^2(97 + 107\sqrt{97})}e^2 + O(e^3), \\ a_- &= \frac{5 + \sqrt{97}}{16} - \frac{9(8 + \sqrt{97})}{4(97 + 19\sqrt{97})}e + \frac{27(444341\sqrt{97} - 9550369)}{32(97 + 19\sqrt{97})^2(97 + 107\sqrt{97})}e^2 + O(e^3). \end{aligned} \quad (27)$$

Другая область исходит из точки $\left(\frac{5-\sqrt{97}}{16}, 0\right)$, и её границы имеют вид

$$\begin{aligned} a_+ &= \frac{5 - \sqrt{97}}{16} + \frac{9(\sqrt{97} - 8)}{4(19\sqrt{97} - 97)}e + \frac{27(444341\sqrt{97} + 9550369)}{32(19\sqrt{97} - 97)^2(107\sqrt{97} - 97)}e^2 + O(e^3), \\ a_- &= \frac{5 - \sqrt{97}}{16} - \frac{9(\sqrt{97} - 8)}{4(19\sqrt{97} - 97)}e + \frac{27(444341\sqrt{97} + 9550369)}{32(19\sqrt{97} - 97)^2(107\sqrt{97} - 97)}e^2 + O(e^3). \end{aligned} \quad (28)$$

Основному резонансу $2\omega_1 = 3$ соответствует одна область параметрического резонанса, которая в плоскости a, e исходит из точки $\left(\frac{13-3\sqrt{41}}{16}, 0\right)$. Границы этой области задаются следующими выражениями

$$\begin{aligned} a_+ &= \frac{13 - 3\sqrt{41}}{16} + \frac{45(14598 - 1433\sqrt{41})}{4736(39\sqrt{41} - 287)}e^2 + \frac{915(3251\sqrt{41} - 20821)}{8192(10802\sqrt{41} - 69167)}e^3 + O(e^4), \\ a_- &= \frac{13 - 3\sqrt{41}}{16} + \frac{45(14598 - 1433\sqrt{41})}{4736(39\sqrt{41} - 287)}e^2 - \frac{915(3251\sqrt{41} - 20821)}{8192(10802\sqrt{41} - 69167)}e^3 + O(e^4). \end{aligned} \quad (29)$$

При комбинационном резонансе $\omega_1 - \omega_2 = 1$ область неустойчивости исходит из точки $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$, а её границы имеют следующий вид

$$\begin{aligned} a_+ &= -\frac{1}{3} - \frac{4\sqrt{66}}{99}e + \frac{70}{1089}e^2 + O(e^3), \\ a_- &= -\frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{66}}{99}e + \frac{70}{1089}e^2 + O(e^3). \end{aligned} \quad (30)$$

Комбинационному резонансу $\omega_1 - \omega_2 = 0$, исходящему из точки $(\frac{8}{9}; 0)$, соответствует широкая область неустойчивости. Её граница определяется выражением

$$a_* = \frac{8}{9} - \frac{140}{1089}e^2 + O(e^3). \quad (31)$$

В случае, когда массы притягивающих тел равны $m_1 = m_2$ ($\mu = \frac{1}{2}$), а также равны интенсивности их излучения $Q_1 = Q_2 = Q$, в областях линейной устойчивости был выполнен строгий нелинейный анализ устойчивости точки либрации L_1 по Ляпунову. В указанном случае $\xi_* = 0$, а $a = 8Q$, $b = 0$, $c = 32Q$. Вне областей параметрического резонанса и при отсутствии резонансов до четвёртого порядка включительно нелинейной канонической заменой переменных $q_i, p_i \rightarrow u_i, v_i$ ($i = 1, 2$) гамильтониан задачи можно привести к следующей нормальной форме

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right), \quad (32)$$

где канонические переменные φ_i, r_i вводятся по формулам $u_i = \sqrt{2r_i} \sin(\varphi_i)$, $v_i = \sqrt{2r_i} \cos(\varphi_i)$. Коэффициенты c_{20} , c_{11} и c_{02} являются аналитическими функциями эксцентриситета e . В диссертации они были вычислены явно с точностью до членов порядка e .

Если выполнено условие $c_{11}^2 - c_{20}c_{02} \neq 0$, то на основании теоремы В. И. Арнольда имеет место устойчивость для большинства начальных условий. Выражение $c_{11}^2 - c_{20}c_{02}$ было вычислено в диссертационной работе явно. Оно имеет следующий вид

$$c_{11}^2 - c_{20}c_{02} = -\frac{81(534528Q^4 - 90112Q^3 + 9600Q^2 - 480Q + 15)}{64(9Q - 1)^2(16Q + 1)(8Q - 1)} + O(e). \quad (33)$$

Было показано, что при $Q \in (-\frac{1}{16}; 0) \cup (\frac{1}{9}; \frac{1}{8})$ выражение (33) никогда не обращается в нуль. Следовательно, гамильтонова система с гамильтонианом (32), а значит, и точка либрации L_1 устойчивы для большинства начальных условий.

Также был исследован вопрос о формальной устойчивости точки либрации L_1 . Для получения строгих выводов о формальной устойчивости применялись результаты работ А. Д. Брюно и Дж. Глимма, на основании которых нулевое решение системы с Гамильтонианом (32) формально устойчиво, если квадратичная форма $c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2$ знакоопределена для $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$. С этой целью были проанализированы знаки величин c_{11} , c_{20} , c_{02} и $c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02}$, выражения для которых были получены в явной аналитической форме с точностью до первой степени эксцентриситета e . Проведённый в диссертации анализ показал, что для $e \ll 1$ и $Q \in (-\frac{1}{16}; 0) \cup (\frac{1}{9}; \frac{1}{8})$ коллинеарная точка L_1 формально устойчива при отсутствии резонансов до четвёртого порядка включительно.

Если имеет место резонанс третьего или четвёртого порядка, то в общем случае нормальная форма гамильтониана включает дополнительное резонансное слагаемое. В случае равных масс и интенсивностей излучения разложение функции Гамильтона не содержит членов третьей степени, поэтому резонансы третьего порядка в рассматриваемом приближении не проявляются. Таким образом, в исследуемой задаче возможны только следующие резонансы четвёртого порядка: $4\omega_1 = 3$, $4\omega_2 = 1$, $2(\omega_1 - \omega_2) = 1$, $\omega_1 - 3\omega_2 = 0$. В диссертации было показано, что в случае первых трёх равенств резонансное слагаемое имеет порядок $O(e)$, поэтому при наличии данных резонансов имеют место те же выводы об устойчивости, что и в нерезонансном случае, т. е. точка либрации L_1 формально устойчива.

Резонансный случай $\omega_1 - 3\omega_2 = 0$ потребовал отдельного анализа. При этом резонансе гамильтониан приводится к следующему виду

$$H = c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + Br_2\sqrt{r_1r_2}\sin(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O\left((r_1 + r_2)^{5/2}\right). \quad (34)$$

На основании теоремы А. П. Маркеева при выполнении условия $|3\sqrt{3}B| < |C|$, где $C = c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}$, имеет место устойчивость при учёте в функции Гамильтона (34) членов не выше второго порядка по r_i ($i = 1, 2$). Расчеты показали, что данное неравенство в исследуемой задаче выполняется. Поэтому при учёте в исходном гамильтониане членов не выше четвёртого порядка имеет место устойчивость точки либрации L_1 .

Таким образом, в плоской эллиптической фотогравитационной задаче трёх тел в случае равных масс и интенсивностей излучения при малых значениях эксцентриситета устойчивая в линейном приближении коллинеарная точка либрации L_1 является также формально устойчивой. Исключение может составить лишь случай резонанса четвёртого порядка, когда имеет место устойчивость при учёте членов не ниже четвёртого порядка в разложении гамильтониана в окрестности L_1 .

В четвёртой главе проведён анализ устойчивости по Ляпунову точки либрации L_1 в рамках эллиптической фотогравитационной задачи Ситникова, которая является частным случаем фотогравитационной задачи трёх тел. Результаты проведённого в главе 4 анализа устойчивости опубликованы в [1].

В задаче Ситникова рассматривается движение малого тела P по прямой, перпендикулярной плоскости орбит массивных тел P_1 , P_2 и проходящей через их центр масс. Интенсивности излучения и массы притягивающих тел полагаются равными. Массивные тела движутся по эллиптическим орбитам. В этом частном случае движение тела P описывается каноническими уравнениями (1) с гамильтонианом (2), где следует положить $\xi = \eta = p_\xi = p_\eta = 0$

$$H = \frac{1}{2}p_\zeta^2 + \frac{1}{1 + e \cos \nu} \left(\frac{e \cos \nu}{2} \zeta^2 - \frac{2Q}{(1 + 4\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (35)$$

Данная система допускает частное решение $\zeta = p_\zeta = 0$, которое соответствует коллинеарной точке либрации L_1 , совпадающей с центром масс системы, т. е. являющейся положением равновесия в инерциальной системе координат. В диссертационной работе был выполнен строгий нелинейный анализ устойчивости точки либрации L_1 по отношению к возмущениям, выводящим частицу из плоскости движения массивных тел. Анализ устойчивости точки либрации L_1 в линейном приближении сводится к исследованию канонической системы с гамильтонианом

$$H_2 = \frac{1}{2}p_\zeta^2 + \frac{8Q + e \cos \nu}{2(1 + e \cos \nu)}\zeta^2. \quad (36)$$

Характеристическое уравнение указанной линейной системы имеет вид

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0. \quad (37)$$

Из общей теории устойчивости А. М. Ляпунова следует, что если $|A| > 1$, то положение равновесия линеаризованной системы с гамильтонианом (36) неустойчиво, а значит, неустойчиво положение равновесия соответствующей нелинейной системы. Если же $|A| < 1$, то положение равновесия линейной системы с гамильтонианом (36) устойчиво. Последнее, однако, не гарантирует устойчивость положения равновесия в полной нелинейной системе. Для получения строгих выводов об устойчивости исходной системы при $|A| \leq 1$ необходимо провести нелинейный анализ.

Выводы об устойчивости, полученные на основании анализа корней характеристического уравнения (37), представлены на диаграмме устойчивости, изображённой на Рис. 8. Области неустойчивости (параметрического резонанса) закрашены серым цветом. Вне этих областей положение равновесия устойчиво в линейном приближении. Большинство областей неустойчивости очень узкие или вырождаются в линию, поэтому на Рис. 8 они показаны жирными линиями.

Отметим, что при $e = 0$ линейная система с гамильтонианом (36) описывает периодические колебания с частотой $\omega = \sqrt{8Q}$. Если $e \ll 1$ и ω близка к $N/2$, где $N = 1, 2, 3, 4, 5$, то в вышеуказанной линейной системе имеет место явление параметрического резонанса, которое приводит к неустойчивости. В плоскости параметров e и Q области параметрического резонанса (области неустойчивости) исходят из точек $Q_N = N^2/32$ оси Q (см. Рис. 8). Численные расчёты показали, что области параметрического резонанса, исходящие из точек Q_2, Q_4 , вырождаются в кривые.

Заметим, что при $e = 1$ правая часть линеаризованной системы имеет точку разрыва второго рода при $\nu = \pi$. Численные расчёты показали, что при приближении e к 1 коэффициент A характеристического уравнения (37) многократно меняет знак, каждый раз превосходя по модулю единицу. Это указывает на чередование областей устойчивости и неустойчивости, ко-

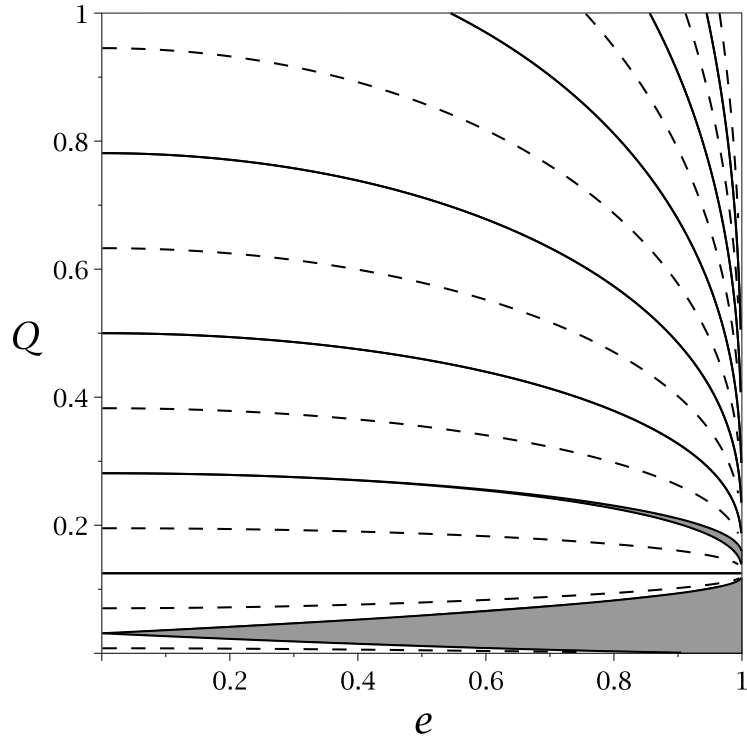


Рис. 8. Диаграмма устойчивости

торые при приближении значения эксцентриситета e к 1 становятся всё более узкими.

При значениях эксцентриситета, близких к нулю, области неустойчивости очень узкие, поэтому для получения их границ требуется высокая точность численных расчётов. С другой стороны, указанные границы при малых e могут быть получены аналитически на основании метода малого параметра. Эти границы были получены в диссертационной работе. Они имеют следующий вид

$$Q_1^{(l)} = \frac{1}{32} - \frac{3}{64}e + \frac{15}{1024}e^2 + \frac{27}{4096}e^3 + \frac{11805}{524288}e^4 + \frac{395079}{20971520}e^5 + O(e^6). \quad (38)$$

$$Q_1^{(t)} = \frac{1}{32} + \frac{3}{64}e + \frac{15}{1024}e^2 - \frac{27}{4096}e^3 + \frac{11805}{524288}e^4 - \frac{395079}{20971520}e^5 + O(e^6). \quad (39)$$

$$Q_2 = \frac{1}{8}. \quad (40)$$

$$Q_3^{(l)} = \frac{9}{32} - \frac{135}{2048}e^2 - \frac{45}{16384}e^3 - \frac{34695}{20971520}e^4 - \frac{585}{524288}e^5 + O(e^6). \quad (41)$$

$$Q_3^{(t)} = \frac{9}{32} - \frac{135}{2048} e^2 + \frac{45}{16384} e^3 - \frac{34695}{20971520} e^4 + \frac{585}{524288} e^5 + O(e^6). \quad (42)$$

$$Q_4 = \frac{1}{2} - \frac{3}{20} e^2 - \frac{39}{1000} e^4 - \frac{7023}{350000} e^6 + O(e^8). \quad (43)$$

$$Q_5^{(l)} = \frac{25}{32} - \frac{525}{2048} e^2 - \frac{141225}{20971520} e^4 - \frac{525}{16777216} e^5 + O(e^6). \quad (44)$$

$$Q_5^{(l)} = \frac{25}{32} - \frac{525}{2048} e^2 - \frac{141225}{20971520} e^4 + \frac{525}{16777216} e^5 + O(e^6). \quad (45)$$

В равенствах (38)–(45) $Q_n^{(l)}$ и $Q_n^{(t)}$ отвечают нижней и верхней границам соответственно.

Строгие выводы об устойчивости для значений параметров из областей линейной устойчивости были получены на основании нелинейного анализа, проведённого с учётом членов до четвёртого порядка включительно в разложении гамильтониана (35). С этой целью было построено симплектическое отображение, генерируемое системой нелинейных канонических уравнений с гамильтонианом (35), и исследована устойчивость неподвижной точки данного отображения. Задача об устойчивости неподвижной точки данного отображения эквивалентна задаче об устойчивости по Ляпунову точки либрации L_1 канонической системы с гамильтонианом (35).

В рассматриваемой задаче функция Гамильтона не содержит члены третьей степени, поэтому исследование устойчивости при резонансах третьего порядка было выполнено в рамках анализа устойчивости в общем нерезонансном случае. Резонансы четвёртого порядка имеют место на кривых, изображённых на Рис. 8 пунктирными линиями. Коэффициенты симплектического отображения вычислялись численно для всех значений параметров Q и e из областей устойчивости в линейном приближении. Симплектическое отображение приводилось к нормальному виду отдельно для резонансного и нерезонансного случаев. Расчёты показали, что как в общем нерезонансном случае, так и в случае резонансов четвёртого порядка неподвижная точка симплектического отображения устойчива по Ляпунову.

Таким образом, в диссертации было строго показано, что в областях устойчивости в линейном приближении коллинеарная точка либрации L_1 устойчива по Ляпунову.

В заключении приведены основные результаты выполненного в диссертационной работе исследования устойчивости коллинеарной точки либрации L_1 в фотогравитационной задаче трёх тел.

Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК

1. *Bardin B. S., Avdushkin A. N.* Stability analysis of an equilibrium position in the photogravitational Sitnikov problem // *AIP Conference Proceedings*, 2018, Vol. 1959, No. 1

2. *Bardin B. S., Avdushkin A. N.* Stability of the collinear point L1 in the planar restricted photogravitational three-body problem in the case of equal masses of primaries // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020, Vol. 927, No. 1

3. *Bardin B. S., Avdushkin A. N.* Nonlinear stability analysis of a collinear libration point in the planar circular restricted photogravitational three-body problem // *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, Vol. 1925, No. 1

4. *Bardin B. S., Avdushkin A. N.* On stability of a collinear libration point in the planar circular restricted photogravitational three-body problem in the cases of first and second order resonances // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2021, Vol. 927, No. 1

5. *Bardin B. S., Avdushkin A. N.* On Stability of the Collinear Libration Point L1 in the Planar Restricted Circular Photogravitational Three-Body Problem // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2022, Vol. 18, No. 4, p. 543-562

6. *Авдюшкин А.Н.* О параметрическом резонансе в окрестности точки либрации L1 плоской ограниченной фотогравитационной задачи трех тел // *Труды МАИ*, 2022, Вып. 126

Прочие публикации автора диссертации

7. *Бардин Б. С., Авдюшкин А. Н.* Об устойчивости положения равновесия в фотогравитационной задаче Ситникова // 15-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2016». 14–18 ноября 2016 года. Москва. Тезисы. – Типография «Люксор», 2016, с. 486-487.

8. *Авдюшкин А. Н.* Исследование устойчивости положения равновесия в фотогравитационной задаче Ситникова // Гагаринские чтения – 2017: XLIII Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов: М.; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2017, с. 1038.

9. *Бардин Б. С., Авдюшкин А. Н.* Линейный анализ устойчивости положения равновесия в фотогравитационной задаче Ситникова // LIII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Тезисы докладов. М.: Изд-во РУДН, 2017, с. 169-173.

10. *Авдюшкин А. Н.* Исследование устойчивости положения равновесия в фотогравитационной задаче Ситникова // Сборник тезисов участников форума «Наука будущего – наука молодых» – Нижний Новгород, 2017, с. 149-150.

11. *Бардин Б. С., Авдюшкин А. Н.* Исследование устойчивости по Ляпунову положения равновесия в фотогравитационной задаче Ситникова при малых значениях эксцентриситета // 16-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2017», 20–24 ноября 2017 года, Москва, Тезисы, – Типография «Люксор», 2017, с. 357-358.

12. *Бардин Б. С., Авдюшкин А. Н.* Анализ устойчивости тривиального положения равновесия в фотогравитационной задаче Ситникова // Восьмые Поляховские чтения: Тезисы докладов Международной научной конференции по механике, Санкт-Петербург, 30 января – 2 февраля 2018 г. – СПб.: Издательство СПбГУ, 2018, с. 59.

13. *Авдюшкин А. Н.* Исследование устойчивости коллинеарной точки либрации в плоской ограниченной задаче трёх тел // Гагаринские чтения – 2018: XLIV Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов. Том 2: М.; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2018, с. 398.

14. *Бардин Б. С., Авдюшкин А. Н.* Исследование устойчивости коллинеарной точки либрации в одном частном случае ограниченной фотогравитационной задачи трёх тел // LIV Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Тезисы докладов. М.: РУДН, 2018, с. 151-155.

15. *Авдюшкин А. Н.* Анализ устойчивости положения равновесия в фотогравитационной эллиптической задаче Ситникова // 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2018». 19–23 ноября 2018 года. Москва. Тезисы. – Типография «Люксор», 2018, с. 418-419.

16. *Авдюшкин А. Н.* Аналитическое и численное исследование устойчивости коллинеарной точки либрации фотогравитационной задачи трёх тел // «Гагаринские чтения – 2019»: Сборник тезисов докладов. – М.: МАИ, 2019, с. 750.

17. *Бардин Б. С., Авдюшкин А. Н.* Линейный анализ устойчивости коллинеарной точки либрации L_1 в плоской ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел // LV всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники: тезисы докладов. М.: Изд-во РУДН, 2019, с. 117-121.

18. *Бардин Б. С., Авдюшкин А. Н.* Исследование коллинеарной точки либрации L_1 в плоской эллиптической ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел в случае равных масс притягивающих центров // 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2019». 18–22 ноября 2019 года. Москва. Тезисы. – Типография «Логотип», 2019, с. 178.

19. *Авдюшкин А. Н.* Исследование устойчивости коллинеарной точки либрации L_1 в плоской ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел при наличии резонансов // «Гагаринские чтения – 2020»: Сборник тезисов докладов. – М.: МАИ, 2020, с. 908.

20. *Бардин Б. С., Авдюшкин А. Н.* Об устойчивости коллинеарной точ-

ки либрации L_1 в плоской ограниченной фотогравитационной задаче трех тел в случае равных масс притягивающих центров // Материалы XIII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2020), 6-13 сентября 2020 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2020, с. 365-366.

21. *Бардин Б. С., Авдюшкин А. Н.* Исследование устойчивости коллинеарной точки либрации L_1 в плоской эллиптической ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел при малых значениях эксцентриситета // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль, 3-8 июля 2020 г. – Владимир: ООО «Аркаим», 2020, с. 20-21.

22. *Бардин Б. С., Авдюшкин А. Н.* Нелинейный анализ устойчивости коллинеарной точки либрации L_1 в плоской ограниченной круговой фотогравитационной задаче трех тел // 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2020». 23–27 ноября 2020 года. Москва. Тезисы. – М.: Издательство «Перо», 2020., с. 445-446.

23. *Бардин Б. С., Авдюшкин А. Н.* Об устойчивости точки либрации L_1 в плоской ограниченной круговой фотогравитационной задаче трёх тел при наличии резонансов // IX Поляховские чтения: Материалы международной научной конференции по механике, 9-12 марта 2021 г., Санкт-Петербург, Россия. – СПб.: Издательство ВВМ, 2021, с. 141-143.

24. *Авдюшкин А. Н.* Нелинейный анализ устойчивости коллинеарной точки либрации L_1 в плоской ограниченной слабоэллиптической фотогравитационной задаче трех тел при резонансах третьего порядка // 20-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». 22-26 ноября 2021 года. Москва. Тезисы. – М.: Издательство «Перо», 2021, с. 401-402.

25. *Авдюшкин А. Н.* Нелинейный анализ устойчивости коллинеарной точки либрации L_1 в плоской ограниченной слабоэллиптической фотогравитационной задаче трех тел при резонансах третьего и четвертого порядков // XLVI Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства (Москва, 25–28 января 2022 г.): сборник тезисов: в 4 т. – Москва: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2022, с. 316-318.

26. *Авдюшкин А. Н.* Исследование устойчивости коллинеарной точки либрации L_1 в плоской слабоэллиптической ограниченной фотогравитационной задаче трёх тел при резонансах четвертого порядка // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль, 30 июня – 5 июля 2022. – Владимир: ООО «Аркаим», 2022, с. 78.