

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



Егорова Мария Сергеевна

**ДИНАМИКА ГРАДИЕНТНЫХ ПОРИСТЫХ СТЕРЖНЕЙ:
ВАРИАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ
ВЕРИФИКАЦИЯ**

Специальность

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

к.т.н., доцент

Тушавина Ольга Валериановна

Москва – 2026

Оглавление

Оглавление	2
ВВЕДЕНИЕ	3
1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ	11
2. ТЕОРИЯ ИЗГИБА СТЕРЖНЕЙ (ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПЛАСТИН) ИЗ ГРАДИЕНТНЫХ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ	25
2.1. Общая связанная вариационная модель градиентной теории деформации для пористой среды	25
2.1.1. Традиционный вариант цилиндрического изгиба пластины (стержня)	29
2.2. Корректный вариант цилиндрического изгиба пластины(стержня)	38
2.3. Решение задачи изгиба стержня без привлечения гипотез	48
Выводы по главе 2	58
3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В МЕХАНИКЕ ПОРИСТЫХ СРЕД	60
3.1. Общая постановка динамических задач в пористых средах	61
3.1.1. Классическая теория упругости	64
3.1.2. «Алгебраически» пористая среда	65
3.1.3. Градиентная среда по Тупину	66
3.1.4. Градиентная среда по Миндлину.	67
3.1.5. Классификация динамических взаимодействий	67
3.2. Динамическая задача чистого изгиба градиентного пористого стержня	76
3.2.1. Кинематика, скорости и пятичленная кинетическая энергия	76
3.2.2. Потенциальная энергия и функционал Даламбера	79
3.2.4. Частные модели	82
3.3. Дисперсионные соотношения	84
Выводы по главе 3	88
4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОРИСТЫХ ОБРАЗЦОВ	90
4.1. Микроскопические исследования структуры образцов	93
4.2. Динамические испытания	96
4.3. Определение резонанса	98
4.4. Определение прогиба от частоты колебаний	100
4.5. Виброударные испытания	103
4.6. Обработка экспериментальных данных и идентификация внутренних параметров модели	106
5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ANSYS	115
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	125
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	127

ВВЕДЕНИЕ

Пористые материалы занимают особое место в современном материаловедении и механике деформируемого твёрдого тела. Благодаря сочетанию малой плотности, высокой удельной жёсткости, развитой внутренней поверхности и способности к рассеянию энергии они находят широкое применение в авиа- и ракетостроении, судостроении, строительстве, биомедицине, фильтрационных и теплообменных системах. Особый интерес представляют градиентно-пористые среды, в которых объёмная доля пустот и её пространственные производные влияют на эффективные упругие и инерционные свойства, что позволяет создавать конструкции с локально изменяемой жёсткостью и заданными волновыми характеристиками.

Однако классическая линейная теория упругости Коши, опирающаяся только на поле перемещений, не в состоянии адекватно описать многие эффекты, наблюдаемые в пористых и ячеистых структурах: масштабную зависимость отклика, дисперсию упругих волн, влияние локальных вращений и моментных взаимодействий, приповерхностные явления. Именно поэтому во второй половине XX века начали активно развиваться обобщённые (градиентные) теории континуума – подходы Тупина, Миндлина, Коссера, Аэро-Кувшинского, а позже – микро-дилатационная теория Ковина–Нинзиато, в которой пористость вводится как дополнительная кинематическая переменная.

Несмотря на значительный прогресс, большинство исследований остаются в рамках статических или квазистатических постановок и не дают ответа на ключевые вопросы: как правильно редуцировать трёхмерную градиентную модель к одномерным теориям изгиба стержней, как динамически взаимодействуют поле деформаций и поле пористости, и какие новые волновые явления (зоны «запираания», связанные моды) при этом возникают.

Настоящая диссертация посвящена именно этим вопросам. В работе последовательно построены статическая и динамическая вариационные модели

цилиндрического изгиба градиентных пористых стержней, доказана необходимость выбора «корректной» формы потенциальной энергии, получено разрешающее уравнение восьмого порядка, исследованы волновые процессы и проведены экспериментальные испытания на пенополиимидном пенопласте акримид при жёстком закреплении.

Актуальность темы исследования

Необходимость исследования специфики деформирования пористых структур при статических и динамических воздействиях продиктована широким спектром их практического применения. С одной стороны, материалы с контролируемой пористостью востребованы как самостоятельный класс объектов с уникальными характеристиками, незаменимыми в фильтрационных системах, тепло- и звукоизоляции, а также в биомедицинских технологиях. С другой стороны, в современном авиа- и ракетостроении трёхслойные конструкции с наполнителем из полимерных пенопластов (в частности, акримиды) активно вытесняют традиционные сотовые наполнители благодаря выигрышу в весе, высокой технологичности и способности работать при температурах до 200–220°C.

Однако практическое применение пористых материалов наталкивается на серьёзные теоретические трудности. Классическая линейная теория упругости Коши, лежащая в основе большинства инженерных расчётов, принципиально неспособна описать такие ключевые для пористых сред эффекты, как:

- масштабные эффекты (зависимость изгибной жёсткости от абсолютной толщины образца, а не только от относительных пропорций);
- дисперсию упругих волн, приводящую к зависимости фазовой скорости от длины волны;
- влияние локальных вращений и моментных взаимодействий, которое особенно существенно в ячеистых структурах;
- наличие внутренних масштабов длины, связанных с характерным размером пор;

- приповерхностные явления и чувствительность к пространственной неоднородности деформационного поля.

Именно в связи с этими обстоятельствами в механике деформируемого твёрдого тела возникли обобщённые (градиентные) теории континуума.

Традиционный подход, основанный на прямом подчинении кинематических гипотез (линейное распределение перемещений и пористости по толщине) и интегрировании полной плотности потенциальной энергии, приводит к так называемому некорректному варианту модели. В этой модели эффективная изгибная жёсткость аномально возрастает при уменьшении толщины стержня, что противоречит как классическому пределу, так и здравому физическому смыслу. В диссертации доказано, что корректная модель должна базироваться на редуцированном выражении потенциальной энергии, где исключены перекрёстные слагаемые с производными от пористости по толщине. Эта корректная модель сохраняет классический предел, правильно описывает масштабные эффекты и требует постановки четырёх пар альтернативных граничных условий (вместо двух в классической теории), что важно для расчёта тонкостенных конструкций и элементов микро- и наномасштаба.

Особую актуальность приобретают динамические задачи. Большинство существующих работ по механике пористых сред сосредоточено на статических или квазистатических нагрузках, однако для реальных условий эксплуатации (ударное нагружение, виброзащита, распространение ультразвука, акустическая диагностика, сейсмостойкость) динамические эффекты становятся определяющими.

В диссертации показано, что динамическая постановка не сводится к простому добавлению инерционного члена в статическое уравнение. Необходимо последовательно вывести кинетическую энергию из принятой кинематики, что приводит к пятичленной квадратичной форме, включающей не только поперечную инерцию, но и продольную инерцию изгибаемого сечения, инерцию кривизны,

связанную инерцию кривизны и пористости, а также собственную инерцию пористости. Эти члены порождают новые волновые явления: существование нескольких ветвей дисперсионного спектра, чередование зон прозрачности и «запираания» (непрозрачности) среды для волн определённых длин, а также связанные комбинированные волны, в которых деформация сжатия и изменение пористости не могут быть разделены.

С практической точки зрения остро стоит проблема идентификации материальных констант градиентных пористых моделей. Экспериментальных работ, направленных на определение параметра связанности микро-дилатационной теории, известно крайне мало. В диссертации впервые на примере отечественного пенополиимидного пенопласта акримид (плотностью 80 и 100 кг/м³) проведены систематические динамические испытания: определены резонансные частоты, выполнены виброударные испытания с амплитудами до 3g, исследована микроструктура методами растровой электронной микроскопии. Эти данные позволяют не только верифицировать предложенную теоретическую модель, но и дают конкретные числовые значения для инженерных расчётов трёхслойных панелей с заполнителем из акримида, используемых в конструкциях типа воздухозаборных каналов, гермошпангоутов и силовых профилей.

Таким образом, актуальность темы определяется необходимостью создания непротиворечивой вариационной теории изгиба градиентных пористых стержней (как статической, так и динамической), которая устраняет внутренние противоречия известных моделей, учитывает все возможные каналы взаимодействия полей деформации и пористости, предсказывает новые волновые эффекты и допускает экспериментальную верификацию на реальных конструкционных материалах.

Цель исследования

Целью диссертационной работы является разработка, аналитическое исследование и экспериментальная верификация математических моделей

цилиндрического изгиба (статического и динамического) элементов конструкций из градиентных пористых материалов, учитывающих совместное влияние пористости, градиентных эффектов и инерционных свойств.

Объект и предмет исследований

Объект исследования – градиентные пористые материалы, работающие в условиях статических, динамических и высокоинтенсивных ударных нагрузок различной физической природы, а также тонкостенные элементы конструкций (стержни, балки) из этих материалов.

Предмет исследования – закономерности напряжённо-деформированного состояния и волновой динамики при чистом изгибе градиентных пористых стержней, включая масштабные эффекты, дисперсию, связанность полей перемещений и пористости, а также методы идентификации материальных параметров.

Методы исследования

Для решения поставленных задач в работе применялся комплекс взаимодополняющих методов:

- **Аналитические методы** механики сплошной среды: построение кинематических гипотез (обобщённых гипотез Бернулли и Кирхгоффа), формулировка квадратичных форм потенциальной и кинетической энергии.
- **Вариационное исчисление:** принцип возможных перемещений, функционал Даламбера, вывод уравнений Эйлера–Лагранжа и естественных граничных условий.
- **Теория дифференциальных уравнений:** сведение связанных систем к разрешающим уравнениям высокого (вплоть до восьмого) порядка, операторный метод, анализ дисперсионных соотношений, метод разделения переменных для задач на собственные значения.

• **Экспериментальные методы:**

- Растровая электронная микроскопия для определения морфологии пор (средний диаметр, объёмная доля, доля закрытых пор).
- Вибродинамические испытания на вибростенде TIRA TV 55240 с регистрацией акселерометром и лазерным датчиком перемещений.
- Испытания на виброудар с амплитудами от 0,8g до 3g для оценки демпфирования и ударной прочности.

Научная новизна

1. **Впервые** строго доказана теорема о необходимости редукции общей плотности потенциальной энергии градиентной пористой среды к специальному виду (с исключением перекрёстных слагаемых с производными от пористости по толщине) для получения физически корректной модели изгиба тонких стержней. Показано, что «традиционная» (некорректная) модель приводит к аномальному росту изгибной жёсткости при стремлении толщины к нулю, в то время как корректная модель сохраняет классический предел.
2. **Разработана новая динамическая модель чистого изгиба градиентного пористого стержня**, в которой кинетическая энергия впервые представлена в виде полной квадратичной формы из пяти членов, включающей помимо стандартной поперечной инерции также продольную инерцию изгибаемого сечения, инерцию кривизны, связанную инерцию кривизны и пористости, а также собственную инерцию пористости.
3. **Получено разрешающее дифференциальное уравнение восьмого порядка** по пространственной координате для прогиба, что отражает наличие четырёх пар альтернативных граничных условий и аккумулирует все эффекты: упругие, градиентные, инерционные и перекрёстные.

4. **Выполнена классификация динамических взаимодействий** в пористой среде по трём каналам (кинетическому, алгебраическому, градиентному) и обнаружены новые волновые эффекты: чередование зон прозрачности и «запираания» (непрозрачности) в зависимости от волнового числа.
5. **Впервые для пенополиимида (акримид) проведены систематические виброударные испытания** в широком диапазоне амплитуд (до 3g) и получены количественные данные по резонансным частотам (291,8 Гц и 319,7 Гц для плотности 80 кг/м³) при различных граничных условиях, а также выполнена трёхмерная томографическая оценка пористой структуры.

Апробация работы

Результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на научно-практических конференциях и симпозиумах, в том числе, международных:

Проблемы безопасности на транспорте: Материалы XIII международной научно-практической конференции, посвященной Году качества, 21 ноября 2024 год

Проблемы безопасности на транспорте: XIV международной научно-практической конференции, посвященной пятилетке качества, 20 ноября 2025г.

Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: XXXII Международный симпозиум имени А.Г. Горшкова, Кремёнки, 18 мая 2026 года

Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: XXXI Международный симпозиум имени А.Г. Горшкова, Кремёнки, 19 мая 2025 года.

Публикации

1. Егорова М. С. Теория стержней (пластин), построенная для неклассических моделей пористой среды механики деформируемого тела / М. С. Егорова, М. Ю. Калягин, Л. Н. Рабинский // Труды МАИ. – 2025. – № 142. – EDN HUNGID
2. Egorova M.S. A Dynamic Model of a Porous Gradient Medium and Classification of Wave Processes/ Egorova M.S. // Technical Physics Letters, 2026, Vol. 52, No. 2, pp. 39–43. DOI: 10.1134/S1063785026700112
3. Егорова М.С., Тушавина О.В. Обобщенная динамическая модель пористой градиентной среды и классификация волновых процессов// Труды МАИ: электрон. журнал. № 148. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188264>
4. Егорова М. С. Исследование влияния пористости на физико-механические характеристики / М. С. Егорова, М. Ю. Калягин, Л. Н. Рабинский // Проблемы безопасности на транспорте: Материалы XIII международной научно-практической конференции, посвященной Году качества. В 2-х частях, Гомель, 21–22 ноября 2024 года. – Гомель: Белорусский государственный университет транспорта, 2024. – С. 139-140. – EDN НТКОЕВ.
5. Егорова М. С. Анализ вариационных моделей градиентных и дилатационных моделей с полями дефектами (порами) / М. С. Егорова, М. Ю. Калягин, Л. Н. Рабинский // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XXXI Международного симпозиума имени А.Г. Горшкова, Кремёнки, 19–23 мая 2025 года. – Москва: ООО "ТРП", 2025. – С. 82-83. – EDN IISQIE
6. Егорова М. С., Тушавина О. В. Теория стержней и пластин для градиентных пористых сред: корректные вариационные постановки// МАТЕРИАЛЫ XIV МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ, ПОСВЯЩЕННОЙ ПЯТИЛЕТКЕ КАЧЕСТВА (Гомель, 20–21 ноября 2025 г.), с.88
7. Егорова М. С., Тушавина О. В. Динамическая модель градиентной пористой среды для тонкостенных элементов// Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XXXII Международного симпозиума имени А.Г. Горшкова, Кремёнки, май 2026 года. – Москва: ООО "ТРП", 2026. – С. – EDN IISQIE

1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Материалы, обладающие внутренней полостной структурой, представляют собой один из наиболее значимых и динамично развивающихся классов объектов в современном материаловедении и механике деформируемого твердого тела. Их отличительной чертой является наличие распределенной системы пустот, которые могут существенно варьироваться по геометрическим характеристикам, объемному содержанию и пространственной организации. Объемная доля таких пустот в общем объеме материала может достигать весьма значительных величин, составляя от 20 до 95 процентов, что определяет уникальный комплекс физико-механических свойств.

Систематизация пористых материалов осуществляется по нескольким основополагающим критериям, среди которых ключевое значение имеет размерный параметр внутренних полостей. Согласно рекомендациям Международного союза по чистой и прикладной химии (ИЮПАК), установлена следующая градация: микропористыми признаются структуры с диаметром пор, не превышающим 2 нанометра; мезопористые материалы характеризуются размерами пор в интервале от 2 до 50 нанометров; наконец, макропористые системы включают полости диаметром свыше 50 нанометров. Помимо этой классификации, в научной литературе широко используется термин «нанопоры», который охватывает диапазон размеров от 0,1 до 100 нанометров, что позволяет более гибко описывать объекты на стыке микро- и наноразмерных масштабов.

Важным классификационным признаком выступает также характер сообщаемости пор с внешней средой. В этом аспекте материалы подразделяются на две принципиальные категории: системы с открытой (проницаемой) пористостью и системы с закрытыми (изолированными) полостями. Открытые поры обеспечивают возможность фильтрации жидкостей и газов, что делает такие материалы незаменимыми в процессах сорбции, катализа и мембранного разделения веществ. Закрытые поры, напротив, придают материалам высокие

тепло- и звукоизолирующие характеристики благодаря отсутствию конвективного переноса внутри структуры. Некоторые нанопористые структуры находят применение в перспективных областях, таких как энергетика, фотоника, биология и сенсорные технологии.

Таким образом, пористые материалы занимают промежуточное положение между конструкционными и функциональными системами, что определяет чрезвычайно широкий спектр их практического применения. Они активно используются в авиационной и космической промышленности, судостроении, строительном комплексе, а также в системах очистки и теплообмена. Интерес к ним постоянно возрастает, что стимулирует как совершенствование технологий их получения, так и развитие теоретических методов описания их механического поведения.

Классическая линейная теория упругости, сформулированная в работах Коши, представляет собой фундаментальную и в высшей степени плодотворную модель механики сплошной среды. Ее основополагающая идея заключается в том, что состояние материала в каждой точке полностью описывается вектором перемещений, а внутренние силовые взаимодействия между соседними элементами среды исчерпываются поверхностными силами (тензором напряжений Коши). Эта схема оказалась чрезвычайно успешной для решения широкого круга инженерных задач, однако при рассмотрении материалов со сложной микроструктурой проявляются ее принципиальные ограничения.

Прежде всего, классический подход оказывается несостоятельным при попытке объяснить масштабные эффекты, когда механический отклик элемента конструкции зависит не только от его относительных пропорций, но и от абсолютных размеров. Это явление особенно ярко выражено в тонких пленках, микробалках и наноразмерных структурах. Кроме того, классическая теория не способна адекватно описать дисперсию упругих волн — зависимость фазовой скорости распространения возмущений от их длины, что критически важно для акустических и ультразвуковых задач.

Другим значимым недостатком является игнорирование локальных вращений и моментных взаимодействий. В материалах с ячеистой или зернистой структурой микроскопические элементы могут не только смещаться, но и поворачиваться, что порождает дополнительные моментные напряжения. Наконец, классическая теория нечувствительна к приповерхностным эффектам и особенностям поведения материала в зонах высокой градиентности деформационного поля.

Именно осознание этих ограничений привело к активному развитию начиная со второй половины XX века целого спектра обобщенных континуальных теорий. Эти подходы исходят из различных физических представлений о роли микроструктуры, используют различные кинематические и силовые переменные и ориентированы на разные классы материалов. Их объединяющей целью является преодоление ограничений модели Коши и обеспечение возможности адекватного описания сложных эффектов, наблюдаемых в реальных гетерогенных средах.

Зарождение градиентных теорий упругости, по общему признанию исследователей, связано с новаторскими работами Тупина и Миндлина [1-3]. Эти авторы предложили расширить классическую кинематику, включив в нее наряду с деформациями также и градиенты деформаций, что позволяет учитывать неоднородность деформационного поля и его внутренние масштабы.

Разработанная Миндлиным общая градиентная теория для изотропных сред вводит пять дополнительных независимых физических постоянных, которые описывают свойства материала через тензор градиентных модулей упругости. Однако, как справедливо отмечается в литературе, практическая идентификация этих констант, даже для простейшего случая изотропных материалов, связана с огромными экспериментальными трудностями. Это обстоятельство стимулирует развитие упрощенных версий градиентных теорий, которые содержали бы минимальное количество дополнительных параметров, в идеале — всего один масштабный коэффициент.

При построении физических моделей деформирования особую важность приобретают фундаментальные свойства симметрии механических структур. Эти свойства, основанные на пространственной симметрии кристаллической решетки или статистической симметрии структуры композита, накладывают строгие ограничения на тензоры упругих постоянных. В классической теории упругости Коши-Пуассона упругие константы представлены тензором четвертого ранга, который в силу этих ограничений должен оставаться неизменным при перестановке индексов в первой и второй парах. Кроме того, требование потенциальности упругих сил приводит к дополнительной симметрии относительно перестановки первой и второй пар индексов.

В градиентных теориях ситуация становится более сложной: физические свойства сред описываются тензорами шестого ранга, для которых также должны быть сформулированы условия симметрии. Именно использование этих условий позволило в работах [35, 36] существенно сократить общее число независимых физических постоянных — с трехсот до семи для случая изотропных, центрально-симметричных материалов. Тем не менее, на протяжении длительного времени этому аспекту уделялось недостаточно внимания, и систематические исследования в данной области были начаты сравнительно недавно.

Особое место в иерархии обобщенных моделей занимает теория упругих материалов с пустотами, которая была разработана и получила развитие в трудах таких ученых, как Ковин, Гудман, Нинзиато, Марков и другие [4-6]. Основополагающей идеей этого подхода является введение объемной доли пор в качестве независимой кинематической переменной. Это принципиально отличает теорию от классической постановки, в которой пористость рассматривается либо как пассивная характеристика, либо вообще не учитывается.

В работах Нинзиато и Ковина [4, 5] представлена теория поведения пористых твердых тел, в которой материал матрицы считается упругим. Данная теория допускает как конечные деформации, так и нелинейные определяющие соотношения, что делает ее достаточно универсальной. Существенным отличием

от классической линейной теории упругости здесь является то, что объемная доля, соответствующая пустотам, принимается за независимую кинематическую переменную наряду с перемещениями. В работе Маркова [6] дается прогноз в отношении механического поведения сред, в которых имеется малое объемное содержание микроскопических пор-дефектов, способных в незначительной степени оказывать влияние на жесткость материала, однако играющих существенную роль в процессе накопления повреждений в задачах прочности и разрушения.

Отдельный интерес представляет влияние пористости на коэффициент Пуассона [7,8]. Частным случаем являются среды и метаматериалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетики), поведение которых может быть описано в рамках данного подхода.

В рамках дилатационной теории упругости, являющейся линейным вариантом теории материалов с пустотами, был получен ряд замкнутых аналитических решений, которые служат важными тестовыми задачами для верификации численных алгоритмов и для понимания физических эффектов, присущих пористым средам.

Рассмотрим некоторые из этих классических решений. В работе Ковина и Нинзиато [5] исследуются однородные деформации. Авторы доказывают, что некоторые материальные коэффициенты, включая коэффициенты упругости C_{ijkl} , могут быть определены из экспериментов, основанных на использовании однородных деформаций, если и только если материал обладает центральной симметрией. Это важное утверждение накладывает жесткие требования на процедуру экспериментальной идентификации материальных констант.

В работе Ковина и Пури [5] решаются задачи о толстостенных сферических и круглых цилиндрических оболочках, находящихся под действием внутреннего и внешнего давления. Эти задачи являются классическими аналогами задач Ламе, но в постановке, учитывающей эволюцию пустотности. Монография Ковина [9]

связана с решением задачи о распределении напряжений около круглого отверстия в пластине, подвергнутой одноосному растяжению вдали от отверстия. Это классическая задача Кирша, но для линейного упругого материала с пустотами. В ходе решения задачи получается, что коэффициент концентрации напряжений для этой задачи всегда больше или равен трем, а в некоторых случаях может быть существенно больше трех.

Интересной особенностью представленных решений является то, что напряжения, деформации и перемещения совпадают с предсказанными в рамках классической теории упругости в начальный момент времени (при $t=0$), а при устремлении времени к бесконечности получается новое равновесное решение для напряжений, деформаций и перемещений. Этот эффект отражает релаксацию внутренней структуры и перераспределение напряжений между твердой матрицей и пустотами.

Задачи Сен-Венана для линейного упругого пористого материала рассматриваются в работах [110-113]. Проблема сводится к решению двух плоских эллиптических задач, что позволяет найти зависимость поперечных и продольных перемещений как функцию координат. Также показано, что гипотезы Сен-Венана/Клебша и Фойгта не применимы к этой проблеме. Соответствующим критерием является то, что вторая производная компонент напряжений в плоскости по осевой координате должна обращаться в ноль. Кроме того, обращение в ноль первой производной по осевой координате не эквивалентно обращению в ноль этих компонент, как это имеет место в классической линейной теории упругости.

Отдельным направлением являются температурные эффекты, которые одним из первых стал изучать Иесан [10]. В его работе рассматривалась реакция на концентрированный источник тепла, деформации толстостенной сферической оболочки и полого цилиндра. В каждом случае определялось изменение объема пустот, вызванное деформацией и температурным полем.

Для описания механического поведения пористых стержней, в научных трудах Бирсана и Альтенбаха [11] используются модели с динамическими нелинейными уравнениями поля. В рамках линейной теории доказывается единственность решения соответствующей задачи. Предполагается, что поперечное сечение стержней не меняет свою форму при деформировании, а только поворачивается, что соответствует гипотезе плоских сечений. Вводятся два вектора, которые объясняют соответственно растяжения со сдвигом и изгибно-крутильную деформацию.

Исследование контактных задач представлено в работах [12, 13]. В работе Помпеи и др. рассматривается контактная задача о жестком прямоугольном штампе, принудительно помещенном на полупространство из линейного упругого изотропного материала с пустотами. Авторы сравнивают два различных решения - прямое численное, полученное методом коллокации, и результаты полуаналитического асимптотического метода. Также приводится сравнение с более ранними асимптотическими подходами [14].

Механизмы поведения пористых материалов с точки зрения механики разрушений вызывали значительный интерес у исследователей. В работах [15, 16] рассматривается задача о трещинах. С помощью преобразований Фурье задача сводится к некоторым интегральным уравнениям. Исследуется распределение коэффициента концентрации напряжений в зависимости от пористости материала. Авторы приходят к выводу о том, что в среде с пустотами коэффициент концентрации напряжений всегда выше при тех же условиях, чем в классической упругой среде.

В работах Лурье и Белова [17-23] вводится новая теория дефектов в сплошных средах. Авторами представлено кинематическое описание сплошной среды с дефектами, дается описание дефектов разного уровня и вводится классификация сплошных сред с дефектами. В работе [17] тех же авторов на основе вариационного кинематического принципа строится теория, которая позволяет единообразно описывать различные типы дефектов — от точечных до протяженных.

Дальнейший значительный интерес к обобщенным теориям упругости во многом определялся необходимостью объяснять и моделировать необычные физико-механические свойства новых материалов с тонкой и сверхтонкой структурой (например, микро- и наночастицы, наполненные композиты с микро/нановключениями, металлокомпозиты, нано-модифицированные керамики и пр.). В этом отношении большие надежды возлагались на обобщенные модели сплошных сред при моделировании свойств различных микро/наноструктур, в которых эффекты ближнего взаимодействия когезии и адгезии и других проявлений масштабных эффектов могут иметь решающее значение [4-9].

Первоначально прикладные градиентные теории были разработаны Айфантисом [24, 25] в начале восьмидесятых годов для градиентной пластичности, а в 90-х годах — для теории упругости [30-32]. История развития и обзор исследований, посвященных разработке прикладных градиентных теорий за указанный период, представлены в работе Гао и Парка [26]. Дальнейший прогресс в области развития градиентных теорий связан с расширением области приложения этих теорий на задачи термо-упруго-пластичности [27], а также на прикладные статические и динамические задачи упругости, проблемы теплопроводности и диффузии [28].

В перечисленных работах разрабатывались варианты градиентных моделей сред для описания масштабных эффектов без учета адгезивных взаимодействий. Весьма перспективными являются градиентные теории для моделирования межфазных взаимодействий в неоднородных и многофазных материалах [29]. Особенно перспективны они при моделировании упругих свойств композиционных материалов, структурированных материалов с субмикронными и наноразмерными внутренними структурами.

Построение моделей дефектных сплошных сред является необходимым при моделировании масштабных эффектов в упругости и пластичности. Было показано [30-34], что градиентная теория достаточно эффективна для анализа среды на нано- и микроуровнях. В градиентной теории упругости физические свойства сред,

которые представлены через тензор градиентных модулей упругости шестого ранга, также должны подчиняться некоторым условиям симметрии.

Для построения моделей сложных структур активно используются градиентная теория упругости. Она развивалась такими авторами как Миндлин, Коссера, Аэро, Кувшинский и др. В отличие от классической теории упругости, в которой в определяющих уравнениях не принимается во внимание какие-либо масштабные параметры, в градиентной теории деформации включают параметры размерности длины, поэтому они подходят для моделирования масштабных и адгезионных эффектов.

В общем случае, наличие в материале дефектности и различных включений приводит к тому, что для корректного решения конкретной задачи и учета концентраторов напряжений вводятся неклассические модели материала. К таким неклассическим моделям относятся, например, модели сред с полями дефектов, градиентные модели и прочее. Однако в ходе разрешения задачи может возникнуть проблема: перейти к квазиклассическим средам или использовать преимущества неклассических моделей и решать задачу более высокого порядка. Первый способ приводит к необходимости установки корректных подходов для осуществления такого перехода, т.е. вывода энергетически эквивалентных соотношений. Применение второго подхода, т.е. неклассических моделей, связано с наличием масштабного параметра, который необходимо определить, и решением проблем, связанных с механикой разрушения, а также длительной прочностью, усталостью. Эти явления хорошо описаны для изотропной модели материала, однако возникают трудности при их учете для сред с полями дефектов.

Экспериментально размерные эффекты стали наблюдаться сравнительно недавно. Например, в работах [37-39] экспериментально обнаружено влияние масштабных эффектов на жесткостные характеристики сверхтонких алюминиевых и эпоксидных консольных балок. Экспериментальных работ, направленных на идентификацию материальных констант микро-дилатационной теории, известно не так много. Единственные на сегодняшний день примеры успешной

экспериментальной идентификации параметра связанности микро-дилатационной теории для растворов цемента были представлены в работах [40, 41].

В экспериментальных работах R. Lakes и соавторов [42, 43] было показано, что микро-дилатационная теория не применима для описания изотропных полимерных пен-ауксетиков [73], для которых существенные масштабные эффекты проявляются как при изгибе, так и при кручении. В микро-дилатационной модели масштабных эффектов при кручении изотропных тел не возникает, так как связанность между сдвиговыми деформациями и полем пористости отсутствует. Однако в работе [42] было показано, что возможна связь между микро-дилатацией и касательными напряжениями, как эффект повышенного порядка. Но для описания подобных явлений необходимо использовать либо более общие модели микроструктуры [44, 45, 43], либо использовать модели второго порядка [5].

Можно отметить работы [47, 48], где было показано, что микро-дилатационная теория применима для описания деформированного состояния метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетиков), и в том числе, для описания масштабных эффектов, возникающих в задачах с этими материалами. Эта модель также является базовой для построения уточненных моделей накопления повреждений, в том числе необратимых (где пористость не закрывается после возникновения). Микропоры образуются в областях материала, где напряженное состояние близко к всестороннему растяжению, то есть дилатации, что соответствует рассматриваемой кинематике модели. Таким образом, микро-дилатационная теория может быть использована для оценки возможного зарождения макродефектов. Когда параметр, характеризующий поврежденность, стремится к единице, увеличивается вероятность зарождения макродефектов.

Для определения адгезионного контакта существует и другой подход, развиваемый в работах Шоркина [49, 50], основанный на феноменологических методах механики сплошных сред. Предложенный подход позволяет, в том числе, установить связь адгезионных и когезионных свойств композиционных материалов с несплошностью адгезионного контакта элементов композита [49, 50].

Кинематика дефектов составляет основу в развитии феноменологических моделей теории дефектов. Во-первых, она является наиболее важным элементом при применении вариационных методов для описания градиентных моделей высокого порядка [51, 52, 53]. Действительно, знание кинематики дефектов позволяет установить список аргументов для корректной формулировки соответствующего лагранжиана. Во-вторых, кинематический анализ позволяет установить связи между различными типами дефектов и проанализировать причины и условия их развития и исчезновения [55, 54]. В данной работе сделан акцент на пористость как один из видов дефектов, рассматриваемый в дальнейшем.

В теоретических исследованиях, посвященных динамике пористых сред, выделяется комплекс фундаментальных проблем, связанных с необходимостью установления количественных связей между микроскопическими процессами, происходящими в поровом пространстве, и наблюдаемым макроскопическим поведением системы. Традиционные феноменологические модели, основанные на законе Дарси и классических уравнениях переноса, часто оказываются недостаточными для описания существенно неравновесных, эволюционных и резонансных явлений. Это стимулирует развитие принципиально новых теоретических и вычислительных подходов.

Фундаментальная проблема переноса в гетерогенных пористых средах получила новое осмысление в работе Meigel и соавторов (2022) [78], где был предложен концептуальный сдвиг от рассмотрения статистики отдельных пор к анализу статистики поровых соединений. Экспериментально и численно исследуя двумерные микрофлюидные чипы с контролируемой степенью беспорядка, авторы обнаружили немонотонную зависимость эффективности переноса от неоднородности среды. Оказалось, что при умеренном увеличении беспорядка дисперсионный фронт не расширяется, как можно было бы ожидать, а парадоксальным образом сужается, и лишь при дальнейшем росте неоднородности эффективность переноса падает. Аналитическое объяснение этого эффекта,

основанное на гауссовой статистике потоков в поровых соединениях, позволило выявить конструктивную роль шума в процессах переноса.

Задача моделирования полностью динамического поведения насыщенных пористых сред, где инерционные эффекты существенны как для твердого скелета, так и для поровой жидкости, требует разработки устойчивых численных методов. В работе Lotfian и Sivaselvan (2018) [79] предложена трехполевая конечно-элементная формулировка, использующая смешанные элементы для полей скорости и давления жидкости в сочетании со стандартными элементами для поля перемещений скелета. Авторами было показано, что при очень низкой гидравлической проводимости линейный элемент демонстрирует шахматную неустойчивость поля давления. Переход к квадратичному элементу для перемещений устраняет этот дефект.

Проблема эволюции микроструктуры, включая закупоривание пор, требует применения методов гомогенизации. В работе Ray и соавторов (2012) [80] разработан строгий многомасштабный подход, отправляющийся от уравнений Нернста-Планка для переноса коллоидов и модифицированных уравнений Стокса для течения жидкости на поровом уровне. В результате получены модифицированный закон Дарси и уравнение конвекции-диффузии с эффективными коэффициентами, которые явно зависят от локальной геометрии пор и потенциала взаимодействия частиц с матрицей.

Альтернативный подход к проблеме эволюции микроструктуры был предложен Отто (1999) [81] для задачи о неустойчивом вытеснении двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде. Ключевая идея работы заключается в релаксации ограничения на индикаторную функцию фазы: вместо резкой границы раздела вводится локально-усредненная насыщенность, принимающая промежуточные значения. Показано, что получаемая вариационная задача приводит к корректному макроскопическому описанию в виде скалярного закона сохранения.

Современный прагматический синтез микро- и макромасштабов представлен в цикле работ Elrahmani и Al-Raoush, выполненных с использованием вычислительной платформы CFD-DEM. В работе 2023 года [76] проведено систематическое исследование динамики закупоривания с варьированием размера инжектируемых частиц. Введены количественные параметры: длина зоны закупоривания, критический размер горловины, доля закупоренных горловин и снижение проницаемости. Логическим продолжением этого исследования стала работа 2024 года [77], в которой данные, полученные в результате 120 ресурсоемких CFD-DEM симуляций, были использованы для обучения модели машинного обучения.

Особое место в динамике пористых сред занимают резонансные явления, связывающие фундаментальную физику волновых процессов с акустикой, геофизикой и технологиями интенсификации добычи. В фундаментальной работе Liurekevicius и соавторов разработана схема гомогенизации для анализа распространения нестационарных волн в гетерогенных пороупругих средах. Ключевым результатом является введение «базиса локального резонанса», позволяющего замкнуть макроскопические определяющие соотношения с помощью внутренних переменных.

Обобщая представленный обзор, можно заключить, что современное состояние механики пористых и градиентных сред характеризуется наличием широкого спектра теоретических моделей. Эти модели различаются по физическим принципам, математической сложности и области применения. В таблице 1 представлена сводная сравнительная характеристика трех ключевых подходов: теории с моментными напряжениями (Тупин), градиентной теории упругости (Миндлин) и теории упругих материалов с пустотами (Ковин-Нунциато).

Анализ показывает, что каждый из подходов имеет свои сильные и слабые стороны. Теория Тупина эффективна для описания локальных вращений, но не учитывает эффекты изменения внутренней структуры. Теория Миндлина хорошо описывает дисперсию волн и масштабную зависимость, но требует определения

большого числа материальных констант. Теория Ковина-Нунциато позволяет моделировать влияние пустотности, но недостаточна для сред с существенными локальными вращениями.

Таким образом, актуальной научной задачей является создание непротиворечивой вариационной теории, которая объединяла бы преимущества этих подходов и была бы свободна от их недостатков. В частности, требуется разработка теории изгиба градиентных пористых стержней (как статической, так и динамической), которая устраняет внутренние противоречия известных моделей, учитывает все возможные каналы взаимодействия полей деформации и пористости, предсказывает новые волновые эффекты и допускает экспериментальную верификацию на реальных конструкционных материалах. Решению этих задач посвящена настоящая диссертационная работа.

2. ТЕОРИЯ ИЗГИБА СТЕРЖНЕЙ (ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ИЗГИБА ПЛАСТИН) ИЗ ГРАДИЕНТНЫХ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

Настоящая глава посвящена разработке и анализу математических моделей цилиндрического изгиба элементов конструкций (пластин и стержней), выполненных из градиентных пористых материалов. Их особенностью является зависимость механических свойств не только от деформаций, но и от градиентов деформаций и параметра пористости, что требует применения обобщенных моделей механики сплошной среды.

Основная цель главы – сформулировать последовательную теорию, позволяющую учесть совместное влияние пористости и градиентных эффектов на напряженно-деформированное состояние пластин, и сравнить две альтернативные постановки задачи: упрощенную («некорректную») и полную («корректную»).

2.1. Общая связанная вариационная модель градиентной теории деформации для пористой среды

Рассматривается градиентная теория упругости второго порядка для пористой среды. Модель пористой среды является частным случаем континуальной модели Миндлина с полями дефектов [3], где дефекты среды характеризуется скалярной функцией. Таким образом предлагается рассмотреть модель среды с двумя масштабными параметрами, определяемыми с одной стороны градиентностью, а с другой стороны дефектностью среды. Каждый из этих масштабных параметров является равноценным в данной постановке, поэтому одной из целей работы является оценка влияния обоих масштабных параметров с указанием роли значимости каждого из них.

В качестве объекта исследования рассматриваются тонкие стержни, в которых учет масштабных параметров традиционно представляется теоретический и практический интерес.

Для формулировки модели привлекается вариационный подход, в рамках которого предполагается получить замкнутую систему уравнений, включающих определяющие соотношение, кинематику, и граничные условия.

Рассматривается линейная обратимая обобщенная модель среды в качестве кинематических аргументов принимаются вектор перемещений R_i , тензор дисторсии, тензор градиента дисторсии (тензор кривизны перемещений третьего ранга), функции пористости и градиенты пористости.

Для формулировки модели определим список аргументов потенциальной энергии:

$$2U = G_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + K^{11} \theta \theta + 2K^{12} \theta \varphi + K^{12} \varphi \varphi + C^{11} \theta_{,k} \theta_{,k} + 2C^{12} \theta_{,k} \varphi_{,k} + C^{22} \varphi_{,k} \varphi_{,k}$$

Потенциальная энергия U в общем случай зависит от деформаций, параметра пористости и их градиентов:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-h/2}^{+h/2} \left[2\mu \gamma_{ij} \gamma_{ij} + K^{11} \theta \theta + 2K^{12} \theta \varphi + K^{22} \varphi \varphi + C^{11} \theta_{,k} \theta_{,k} + 2C^{12} \theta_{,k} \varphi_{,k} + C^{22} \varphi_{,k} \varphi_{,k} \right] dy dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \left[2\mu \left(\varepsilon_{xx} - \frac{\theta}{3} \right) + K^{11} \theta \theta + 2K^{12} \theta \varphi + K^{22} \varphi \varphi + C^{11} \theta_{,x} \theta_{,x} + C^{11} \theta_{,y} \theta_{,y} \right. \\ &\quad \left. + 2C^{12} \theta_{,x} \varphi_{,x} + 2C^{12} \theta_{,y} \varphi_{,y} + C^{22} \varphi_{,x} \varphi_{,x} + C^{22} \varphi_{,y} \varphi_{,y} \right] dy dx \end{aligned} \quad (2.1)$$

Это наиболее общая форма, учитывающая взаимное влияние упругих и пористых свойств.

Определяющие соотношения

В общем случае определяющие соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ m_k &= \frac{\partial U}{\partial \theta_{,k}} \\ h &= \frac{\partial U}{\partial \varphi} \\ g_k &= \frac{\partial U}{\partial \varphi_{,k}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Определяющие соотношения, связывающие напряжения с деформациями (2.2), находятся с помощью формул Грина, которые в дальнейшем могут быть уточнены после использования кинематической модели и интегрирования по толщине, то есть после сведения к одномерной задаче. Приведём потенциальную энергию (2.1) к виду, удобному для интегрирования по поперечной координате:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2} \int_0^l \left[\int_{-h/2}^{+h/2} (2\mu + \lambda) u' u' dy - 2u' w'' \int_{-h/2}^{+h/2} (2\mu + \lambda) y dy + w'' w'' \int_{-h/2}^{+h/2} (2\mu + \lambda) y y dy + \right. \\
 & + 2u' \varphi_0 \int_{-h/2}^{+h/2} K^{12} dy + 2(u' \varphi_1 - \varphi_0 w'') \int_{-h/2}^{+h/2} K^{12} y dy - 2\varphi_1 w'' \int_{-h/2}^{+h/2} K^{12} y y dy + \\
 & + \varphi_0 \varphi_0 \int_{-h/2}^{+h/2} K^{22} dy + 2\varphi_0 \varphi_1 \int_{-h/2}^{+h/2} K^{22} y dy + \varphi_1 \varphi_1 \int_{-h/2}^{+h/2} K^{22} y y dy + \\
 & + u'' u'' \int_{-h/2}^{+h/2} C^{11} dy - 2u'' w''' \int_{-h/2}^{+h/2} C^{11} y dy + w''' w''' \int_{-h/2}^{+h/2} C^{11} y y dy + w'' w'' \int_{-h/2}^{+h/2} C^{11} dy + \\
 & + 2u'' \varphi_0' \int_{-h/2}^{+h/2} C^{12} dy + 2(u'' \varphi_1' y - w''' \varphi_0') \int_{-h/2}^{+h/2} C^{12} y dy - 2\varphi_1' w''' \int_{-h/2}^{+h/2} C^{12} y y dy - 2w'' \varphi_1 \int_{-h/2}^{+h/2} C^{12} dy + \\
 & \left. + \varphi_0' \varphi_0' \int_{-h/2}^{+h/2} C^{22} dy + 2\varphi_0' \varphi_1' \int_{-h/2}^{+h/2} C^{22} y dy + \varphi_1' \varphi_1' \int_{-h/2}^{+h/2} C^{22} y y dy + \varphi_1 \varphi_1 \int_{-h/2}^{+h/2} C^{22} dy \right] dx
 \end{aligned}$$

Лагранжиан L , работа внешних сил A , потенциальная энергия U и плотность потенциальной энергии U_V пористой градиентной среды:

$$L = A - U$$

$$A = \int_V P_i^V R_i dV + \int_F P_i^F R_i dF$$

$$U = \int_V U_V dV$$

$$U_V = \frac{1}{2} [2\mu \gamma_{ij} \gamma_{ij} + (K^{11} \theta \theta + 2K^{12} \theta \varphi + K^{22} \varphi \varphi) + (C^{11} \theta_{,k} \theta_{,k} + 2C^{12} \theta_{,k} \varphi_{,k} + C^{22} \varphi_{,k} \varphi_{,k})]$$

$$(K^{11} \theta \theta + 2K^{12} \theta \varphi + K^{22} \varphi \varphi) = (K^{11} - \frac{K^{12} K^{12}}{K^{22}}) \theta \theta + K^{22} (\varphi + \frac{K^{12}}{K^{22}} \theta) (\varphi + \frac{K^{12}}{K^{22}} \theta)$$

$$(C^{11} \theta_{,k} \theta_{,k} + 2C^{12} \theta_{,k} \varphi_{,k} + C^{22} \varphi_{,k} \varphi_{,k}) = (C^{11} - \frac{C^{12} C^{12}}{C^{22}}) \theta_{,k} \theta_{,k} + C^{22} (\varphi_{,k} + \frac{C^{12}}{C^{22}} \theta_{,k}) (\varphi_{,k} + \frac{C^{12}}{C^{22}} \theta_{,k})$$

Где μ -коэффициент Пуассона, φ - коэффициент, отвечающий за пористость, θ -параметр, отвечающий за градиентность.

При записи плотности потенциальной энергии обобщённой среды учитывается, что пористость как скалярная функция, может иметь связанные эффекты только со скаляром объемной деформации. Поэтому при записи плотности потенциальной энергии уделяется энергия деформации формы связанности с девиатором деформации γ_{ij} , с которой пористости в принципе не взаимодействует формально в силу тензорных свойств- свертка шарового тензора и девиатора всегда 0.

Силовые факторы, как следствие формул Грина (2.2), которые являются необходимым условием потенциальности (обратимость процесса деформирования):

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \frac{\partial U_v}{\partial \gamma_{ij}} = 2\mu\gamma_{ij} \\ \left\{ \begin{aligned} \sigma^\theta &= \frac{\partial U_v}{\partial \theta} = K^{11}\theta + K^{12}\varphi \\ \sigma^\varphi &= \frac{\partial U_v}{\partial \varphi} = K^{12}\theta + K^{22}\varphi \end{aligned} \right. & \left\{ \begin{aligned} m_k^\theta &= \frac{\partial U_v}{\partial \theta_{,k}} = C^{11}\theta_{,k} + C^{12}\varphi_{,k} \\ m_k^\varphi &= \frac{\partial U_v}{\partial \varphi_{,k}} = C^{12}\theta_{,k} + C^{22}\varphi_{,k} \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Полные напряжения σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_v}{\partial R_{i,j}} = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda\theta + K^{12}\varphi)\delta_{ij} \quad (2.4)$$

Классические напряжения s_{ij} (такие комбинации формируются в уравнениях равновесия в градиентных моделях):

$$s_{ij} = \frac{\partial U_v}{\partial R_{i,j}} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial U_v}{\partial R_{i,jk}} \right) = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda\theta + K^{12}\varphi - C^{11}\Delta\theta - C^{12}\Delta\varphi)\delta_{ij} \quad (2.5)$$

Из формул Грина (2.3), (2.4) и (2.5) следует:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_v}{\partial R_{i,j}} = \left[\frac{\partial U_v}{\partial R_{i,j}} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial U_v}{\partial R_{i,jk}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial U_v}{\partial R_{i,jk}} \right) = s_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial U_v}{\partial R_{i,jk}} \right) \delta_{ij} = s_{ij} + \frac{\partial m_k^\theta}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (2.6)$$

В дальнейшем рассматривается плоская задача изгиба стержней (пластин) толщиной h и длиной l . Так что полагаем что все кинематические факторы являются функциями от координаты x, y $x > 0, x < l, y$

Поэтому в общем случае для такой постановки полагаем что тензор градиента дисторсии и имеет вид:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-h/2}^{+h/2} \left[2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + K^{11}\theta\theta + 2K^{12}\theta\varphi + K^{22}\varphi\varphi + C^{11}\theta_{,k}\theta_{,k} + 2C^{12}\theta_{,k}\varphi_{,k} + C^{22}\varphi_{,k}\varphi_{,k} \right] dydx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \left[2\mu\left(\varepsilon_{ij} - \frac{\theta}{3}\delta_{ij}\right) + K^{11}\theta\theta + 2K^{12}\theta\varphi + K^{22}\varphi\varphi + C^{11}\theta_{,x}\theta_{,x} + C^{11}\theta_{,y}\theta_{,y} \right. \\
 &\quad \left. + 2C^{12}\theta_{,x}\varphi_{,x} + 2C^{12}\theta_{,y}\varphi_{,y} + C^{22}\varphi_{,x}\varphi_{,x} + C^{22}\varphi_{,y}\varphi_{,y} \right] dydx
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) в дальнейшем является основой путем привлечения известных гипотез теории стержней.

2.1.1. Традиционный вариант цилиндрического изгиба пластины (стержня)

В основе модели лежит обобщение классических гипотез Кирхгоффа-Лява для пластин и гипотез Бернулли для стержней.

Определение кинематических переменных и кинематических гипотез (гипотез Бернулли) основано на предположении о линейном законе изменения кинематических параметров. Вводимые кинематические переменные (продольное перемещение $u(x, y)$, поперечное перемещение $w(x, y)$ и параметр пористости $\varphi(x, y)$). Закон изменения перемещений по толщине принимается линейным (2.8), что является стандартным допущением для тонких конструкций. Идея построения является традиционной. Она основана на введении кинематических гипотез типа Бернулли (для стержней), формулировки потенциальной энергии и известной процедуры редукции (трехмерной) двумерной постановки к одномерной путем интегрирования по частям. Вариационный подход обеспечивает вроде бы согласованную формулировку, включающую уравнения равновесия и краевые условия. Начнем с кинематических гипотез.

Кинематическая модель

Рассмотрим плоскую постановку и введем кинематические соотношения модели Бернулли расширив их на характеристику пористости

$$\begin{cases} u(x, y) = u(x) - w'(x)y \\ w(x, y) = w(x) \\ \varphi(x, y) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)y \\ \gamma_{xy} = 0 \\ \varepsilon_{yy} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Тогда, деформации и их производные выражаются через перемещения и параметры пористости, получим:

$$\varepsilon_{xx} = u'(x) - w''(x)y \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \theta = u'(x) - w''(x)y \\ \theta_{,x} = u''(x) - w'''(x)y \\ \theta_{,y} = -w''(x) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)y \\ \varphi_{,x} = \varphi_0'(x) + \varphi_1'(x)y \\ \varphi_{,y} = \varphi_1(x) \end{cases} \quad (2.11)$$

Определение работы внешних сил и потенциальной энергии

Список аргументов для вариационной постановки сформулирован. Запишем выражение для работы заданных сил и потенциальной энергии

Работа внешних сил выражается через погонные нагрузки (растягивающую силу - p , перерезывающую силу - q , изгибающий момент - m) и торцевые нагрузки (N_x , Q_x , M_x):

$$\begin{aligned}
\delta A = & \int_0^l \left[\int_{-h/2}^{+h/2} (P_x^V \delta(u - w'y) + P_y^V \delta w) dy \right] dx = \\
& \int_0^l \left[(P_x^{F_1} \Big|_{-h/2}^{+h/2}) \delta u - (P_x^{F_1} \Big|_{-h/2}^{+h/2} (+h/2) - P_x^{F_1} \Big|_{-h/2} (-h/2)) \delta w' + (P_y^{F_1} \Big|_{-h/2}^{+h/2}) \delta w \right] dx + (2.11) \\
& + \left[\int_{-h/2}^{+h/2} P_x^{F_2} dy \delta u - \int_{-h/2}^{+h/2} P_x^{F_2} y dy \delta w' + \int_{-h/2}^{+h/2} P_y^{F_2} dy \delta w \right] \Big|_0^l
\end{aligned}$$

где погонные нагрузки определяются как:

$$\begin{cases} p = P_x^{F_1} \Big|_{-h/2}^{+h/2} + \int_{-h/2}^{+h/2} P_x^V dy \\ q = P_y^{F_1} \Big|_{-h/2}^{+h/2} + \int_{-h/2}^{+h/2} P_y^V dy \\ m = P_x^{F_1} \Big|_{-h/2}^{+h/2} (+h/2) - P_x^{F_1} \Big|_{-h/2} (-h/2) + \int_{-h/2}^{+h/2} P_x^V y dy \end{cases} \quad (2.12)$$

а г торцевые нагрузки находятся по формулам:

$$\begin{cases} N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} P_x^{F_2} dy \\ Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} P_y^{F_2} dy \\ M_{xx} = \int_{-h/2}^{+h/2} P_x^{F_2} y dy \end{cases} \quad (2.13)$$

Таким образом, работа внешних сил, записанная через обобщённые переменные, определяется выражением:

$$\delta A = \int_0^l (p \delta u + q \delta w - m \delta w') dx + (N \delta u - M \delta w' + Q \delta w) \Big|_0^l \quad (2.14)$$

Вариационная постановка изгиба пористых стержней с учетом градиентности и пористости

Рассмотрим вариационное уравнение после интегрирования по частям. Фактически на данном этапе вариационная модель остается общей трехмерной.

$$\begin{aligned}
\delta L = \delta A - \int_V [2\mu\gamma_{ij} \delta\gamma_{ij} + \underbrace{(K^{11}\theta + K^{12}\varphi)}_{\sigma^\theta} \delta\theta + \underbrace{(K^{12}\theta + K^{22}\varphi)}_{\sigma^\varphi} \delta\varphi + \\
+ \underbrace{(C^{11}\theta_{,k} + C^{12}\varphi_{,k})}_{m_k^\theta} \delta\theta_{,k} + \underbrace{(C^{12}\theta_{,k} + C^{22}\varphi_{,k})}_{m_k^\varphi} \delta\varphi_{,k}] dV = \\
= \int_V [(\tau_{ij,j} + \sigma_{,i}^\theta - m_{k,ki}^\theta + P_i^V) \delta R_i + (m_{k,k}^\varphi - \sigma^\varphi) \delta\varphi] dV + \\
+ \int_F [P_i^F - (\tau_{ij} + \sigma^\theta \delta_{ij} - m_{k,k}^\theta \delta_{ij}) n_j] \delta R_i - m_k^\theta n_k \delta\theta - m_k^\varphi n_k \delta\varphi] dF = 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Уравнения Эйлера (уравнения равновесия) в силовых факторах записываются с учетом (2.12-2.14):

$$\begin{cases} s_{ij,j} + P_i^V = 0 \\ m_{k,k}^\varphi - \sigma^\varphi = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Уравнения Эйлера в кинематических переменных с учетом (2.11-2.12) имеют вид:

$$\begin{cases} \mu(R_{i,j} - R_{j,i})_{,j} + [(2\mu + \lambda)\theta + K^{12}\varphi - C^{11}\Delta\theta - C^{12}\Delta\varphi]_{,i} + P_i^V = 0 \\ C^{12}\Delta\theta + C^{22}\Delta\varphi - K^{12}\theta - K^{22}\varphi = 0 \end{cases} \tag{2.16a}$$

Запишем граничные условия, вытекающие из вариационной постановки. Граничные условия в силовых факторах имеют вид:

$$\begin{aligned}
\int_F (P_i^F - s_{ij} n_j) \delta R_i dF &= 0 \\
\int_F m_k^\theta n_k \delta\theta dF &= 0 \\
\int_F m_k^\varphi n_k \delta\varphi dF &= 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Аналогично, получим граничные условия в кинематических переменных:

$$\begin{aligned}
\int_F \{P_i^F - [\mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda R_{r,r} - C^{11}\Delta R_{r,r} + K^{12}\varphi - C^{12}\Delta\varphi) \delta_{ij}] n_j\} \delta R_i dF &= 0 \\
\int_F (C^{11}R_{r,rk} + C^{12}\varphi_{,k}) n_k \delta R_{i,i} dF &= 0 \\
\int_F (C^{12}R_{r,rk} + C^{22}\varphi_{,k}) n_k \delta\varphi dF &= 0
\end{aligned}$$

Для трехмерной постановки под F подразумевается совокупность боковой и торцевой поверхности стержня, каждый из которых определяется нормалью.

Чистый изгиб, учет сдвига по модели Тимошенко

Рассмотрим плоскую постановку (2.8) и постулируем кинематическую модель в виде (2.18):

$$\begin{cases} u(x, z) = u_1(x)z \\ w(x, z) = w_0(x) \\ \varphi(x, z) = \varphi_1(x)z \end{cases} \quad (2.18)$$

Используется упрощенная кинематическая гипотеза (2.18), в которой продольное перемещение линейно зависит от поперечной координаты, а параметр пористости предполагается также линейным по толщине. Растяжение нейтральной линии связанные с деформированием пористости считаются равными 0 в отличии от (2.1)

Найдем производные от этих величин приведены в (2.19)

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_1 z \\ \begin{cases} u_{,x}(x, z) &= u_1' z \\ u_{,z}(x, z) &= u_1(x) \end{cases} \\ w(x, z) &= w_0 \\ \begin{cases} w_{,x}(x, z) &= w_0' + w_2' y^2 \\ w_{,z}(x, z) &= 0 \end{cases} \\ \varphi(x, z) &= \varphi_1 z \\ \begin{cases} \varphi_{,x}(x, z) &= \varphi_1' z \\ \varphi_{,z}(x, z) &= \varphi_1 \end{cases} \\ \theta &= u_{,x} + w_{,z} = u_1' z \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из общей постановки теории пористых сред можно определить силовые факторы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \frac{\partial U^V}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \theta + K^{12} \varphi) \delta_{ij} \\ m = \frac{\partial U^V}{\partial \varphi} = (K^{12} \theta + K^{22} \varphi) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_k = \frac{\partial U^V}{\partial \theta_{,k}} = C^{11} \theta_{,k} + C^{12} \varphi_{,k} \\ m_k = \frac{\partial U^V}{\partial \varphi_{,k}} = C^{12} \theta_{,k} + C^{22} \varphi_{,k} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

С учетом кинематических гипотез (2.18) и (2.19), силовые факторы имеют следующий вид разложения:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= [(2\mu + \lambda)u'_1 + K^{12}\varphi_1]z \\ \sigma_{xz} &= \mu(u_1 + w'_0) \\ \sigma_{zz} &= [\lambda u'_1 + K^{12}\varphi_1]z \\ \theta_{,z} &= u'_1 \\ \varphi_{,z} &= \varphi_1 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Получим выражение работы внешних сил с учетом (2.18):

$$\begin{aligned} A &= \\ &= \int_V (P_x^V u + P_z^V w) dV + \int_{n_i Z_i=1} (pu + qw) dF + \int_{n_i Z_i=0} (Mu + Qw) dF = \\ &= \int_0^l [P_{x1} u_1 + P_{z0} w_0] dx + [M_1 u_1 + Q_0 w_0] \Big|_0^l \\ P_{z0} &= \int_{-h/2}^{-h/2} P_z^V dz + 2q, \quad P_{x1} = \int_{-h/2}^{-h/2} P_x^V z dz + ph, \quad M_1 = \int_{-h/2}^{-h/2} M z dz, \quad Q_0 = \int_{-h/2}^{-h/2} Q dz \end{aligned} \quad (2.22)$$

Выражение потенциальной энергии с учетом (2.18):

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l [(u'_1)^2 \int_{-h/2}^{+h/2} ((2\mu + \lambda)z^2 + C^{11}) dz + 2u'_1 \varphi_1 \int_{-h/2}^{+h/2} (K^{12}z^2 + C^{12}) dz + \\ &+ (\varphi_1)^2 \int_{-h/2}^{+h/2} (K^{22}z^2 + C^{22}) dz + \\ &+ (u_1'')^2 \int_{-h/2}^{+h/2} C^{11}z^2 dz + 2u_1'' \varphi_1' \int_{-h/2}^{+h/2} C^{12}z^2 dz + (\varphi_1')^2 \int_{-h/2}^{+h/2} C^{22}z^2 dz + \\ &+ (u_1 + w_0')^2 \int_{-h/2}^{+h/2} \mu dz] dV \end{aligned} \quad (2.23)$$

Дадим определения характерным длинам масштабных эффектов следующим образом:

$$\begin{cases} C^{11} = (2\mu + \lambda)l_{11}^2 \\ C^{12} = K^{12}l_{12}^2 \\ C^{22} = K^{22}l_{22}^2 \end{cases} \quad (2.24)$$

Дадим определения обобщенных жесткостей, вытекающих из (2.6.6):

$$\begin{cases} \int_{-h/2}^{+h/2} C^{11} z^2 dz = (2\mu + \lambda)l_{11}^2 \bar{J} \\ \int_{-h/2}^{+h/2} C^{12} z^2 dz = K^{12}l_{12}^2 \bar{J} \\ \int_{-h/2}^{+h/2} C^{22} z^2 dz = K^{22}l_{22}^2 \bar{J} \end{cases}$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \mu dz = \mu h$$

$$\begin{cases} E\bar{J} = \int_{-h/2}^{+h/2} ((2\mu + \lambda)z^2 + C^{11}) dz = (2\mu + \lambda)\bar{J}(1 + \frac{l_{11}^2}{h^2}) \\ K^{12}\bar{J} = \int_{-h/2}^{+h/2} (K^{12}z^2 + C^{12}) dz = K^{12}\bar{J}(1 + \frac{l_{12}^2}{h^2}) \\ K^{22}\bar{J} = \int_{-h/2}^{+h/2} (K^{22}z^2 + C^{22}) dz = K^{22}\bar{J}(1 + \frac{l_{22}^2}{h^2}) \end{cases} \quad (2.25)$$

где $\bar{J} = \frac{h^3}{12}$

Определения (2.25) сразу выявляют недостаток исследуемой здесь модели (2.23), так как она приводит для тонких пластин к аномальному увеличению изгибных жесткостей при $h \rightarrow 0$, что не имеет места в точной теории (2.16).

Поэтому эта приближенная модель получила название условно «некорректный» вариант. Выражение потенциальной энергии с учетом (2.23), (2.24) и (2.25):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l [E\bar{J}(u_1')^2 + 2K^{12}\bar{J}u_1'\varphi_1 + K^{22}\bar{J}(\varphi_1)^2 + C^{11}J(u_1'')^2 + 2C^{12}Ju_1''\varphi_1' + C^{22}J(\varphi_1')^2 + \mu h(u_1 + w_0')^2] dx \quad (2.26)$$

Вариационное уравнение записывается в виде:

$$\begin{aligned}
\delta L = & \int_0^l \{ [\mu h(u_1' + w_0'') + P_{z0}] \delta w_0 + \\
& + [-\mu h(u_1 + w_0') + EJ u_1'' - C^{11} \bar{J} u_1''' + K^{12} J \varphi_1' - C^{12} \bar{J} \varphi_1''' + P_{x1}] \delta u_1 + \\
& + (C^{12} \bar{J} u_1''' - K^{12} J u_1' + C^{22} \bar{J} \varphi_1'' - K^{22} J \varphi_1) \delta \varphi_1 \} dx + \\
& + [\mu h(u_1 + w_0') + Q_0] \delta w_0 \big|_0^l + \\
& + [C^{11} \bar{J} u_1''' - EJ u_1' + C^{12} \bar{J} \varphi_1'' - K^{12} J \varphi_1 + M_1] \delta u_1 \big|_0^l + \\
& - \frac{h^3}{12} (C^{11} u_1'' + C^{12} \varphi_1') \delta u_1' \big|_0^l - \\
& - \frac{h^3}{12} (C^{12} u_1'' + C^{22} \varphi_1') \delta \varphi_1 \big|_0^l = 0
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Уравнения Эйлера представлено:

$$\begin{cases}
\mu h(u_1' + w_0'') + P_{z0} = 0 \\
-\mu h(u_1 + w_0') + EJ u_1'' - \frac{C^{11} h^3}{12} u_1''' + K^{12} J \varphi_1' - \frac{C^{12} h^3}{12} \varphi_1''' + P_{x1} = 0 \\
\frac{C^{12} h^3}{12} u_1''' - K^{12} J u_1' + \frac{C^{22} h^3}{12} \varphi_1'' - K^{22} J \varphi_1 = 0
\end{cases} \tag{2.28}$$

Первое уравнение интегрируется в квадратурах:

$$u_1 = -w_0' + \frac{1}{\mu h} [Q(0) - \int_0^x P_{z0} dx] \tag{2.29}$$

Фактически, (2.29) является формулировкой гипотезы Кирхгоффа, если пренебречь внешними нагрузками. Это и будем делать в дальнейшем.

При этом второе уравнение равновесия принимает вид:

$$C^{11} \bar{J} w_0''' - EJ w_0''' - C^{12} \bar{J} \varphi_1''' + K^{12} J \varphi_1' = Q(0) - \int_0^x P_{z0} dx + \frac{EJ}{\mu h} P_{z0}' - \frac{1}{\mu h} EJP_{z0}''' - P_{x1} \tag{2.30}$$

Уравнение (2.30) можно проинтегрировать в квадратурах. Для случая (2.29) получим:

$$C^{11} \bar{J} w_0''' - EJ w_0''' - C^{12} \bar{J} \varphi_1''' + K^{12} J \varphi_1 = M_1(0) \tag{2.31}$$

Уравнение (2.31) совместно с уравнением пористости, составляет линейную алгебраическую систему относительно φ_1 и φ_1'' :

$$\begin{cases} -C^{12}\bar{J}\varphi_1'' + K^{12}J\varphi_1 = [M_1(0) - C^{11}\bar{J}w_0'''' + EJw_0''] \\ C^{22}\bar{J}\varphi_1'' - K^{22}J\varphi_1 = [C^{12}\bar{J}w_0'''' - K^{12}Jw_0''] \end{cases} \quad (2.32)$$

Её решение:

$$\begin{cases} \varphi_1'' = -\frac{[M_1(0) - C^{11}\bar{J}w_0'''' + EJw_0'']K^{22}J + [C^{12}\bar{J}w_0'''' - K^{12}Jw_0'']K^{12}J}{\bar{J}(C^{12}K^{22}J - C^{22}K^{12}J)} \\ \varphi_1 = -\frac{[M_1(0) - C^{11}\bar{J}w_0'''' + EJw_0'']C^{22} + [C^{12}\bar{J}w_0'''' - K^{12}Jw_0'']C^{12}}{(C^{12}K^{22}J - C^{22}K^{12}J)} \end{cases} \quad (2.33)$$

Исключая из (2.33) пористость, получим обобщенное уравнение Софи Жермен:

$$\begin{aligned} & (C^{11}C^{22} - C^{12}C^{12})\bar{J}^2w_0'''' - \\ & -[C^{22}(EJ) - 2C^{12}(K^{12}J) + C^{11}(K^{22}J)]\bar{J}w_0''' + \\ & + ((EJ)(K^{22}J) - (K^{12}J)^2)w_0'' = \\ & = -M_1(0)(K^{22}J) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Используя определения изгибных жесткостей (2.25), окончательно получим:

$$\begin{aligned} & [l_{11}^2l_{22}^2 - \frac{K^{12}K^{12}}{(2\mu + \lambda)K^{22}}l_{12}^2l_{12}^2]w_0'''' - \\ & -[l_{22}^2(1 + \frac{l_{11}^2}{h^2}) + l_{11}^2(1 + \frac{l_{22}^2}{h^2}) - 2\frac{K^{12}K^{12}}{(2\mu + \lambda)K^{22}}l_{12}^2(1 + \frac{l_{12}^2}{h^2})]w_0''' + \\ & + [(1 + \frac{l_{11}^2}{h^2})(1 + \frac{l_{22}^2}{h^2}) - \frac{K^{12}K^{12}}{(2\mu + \lambda)K^{22}}(1 + \frac{l_{12}^2}{h^2})(1 + \frac{l_{12}^2}{h^2})]w_0'' = \\ & = -\frac{M_1(0)}{(2\mu + \lambda)J}(1 + \frac{l_{22}^2}{h^2}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Из (2.35) видно, что в «некорректном» варианте пористой пластины в предельном случае классической теории упругости классическая цилиндрическая жесткость не получается.

2.2. Корректный вариант цилиндрического изгиба пластины(стержня)

Рассмотрим общую вариационную постановку. Запишем плотность потенциальной энергии в виде

$$U = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^L [2\mu \gamma_{ij} \gamma_{ij} + K^{11} \theta \theta + 2K^{12} \theta \varphi + K^{22} \varphi \varphi + C^{11} \theta_{,k} \theta_{,k} + 2C^{12} \theta_{,k} \varphi_{,k} + C^{22} \varphi_{,k} \varphi_{,k}] dz dx \quad (1T)$$

Запишем не нулевые компоненты перемещений, кривизн перемещений, характеристики пористости

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= -w''(x)z & R_{2,1} &= w'(x), & R_{1,2} &= -w'(x), & R_{2,2} &= 0 \\ R_{1,11} &= -zw'''(x), & R_{2,11} &= w''(x), & R_{1,12} &= -w'''(x) \\ R_{1,21} &= R_{1,12} = -w''(x), & R_{1,22} &= 0, & R_{2,21} &= R_{2,22} = 0 \\ \varphi_{1,1} &= \varphi_{1,1}z, & \varphi_{1,2} &= \varphi_1, & \theta_{1,1} &= R_{1,11}, & \theta_{1,2} &= R_{1,12} \end{aligned} \quad (2T)$$

Можно записать и компоненты моментных напряжений

$$\begin{aligned} \mu_{111} = \sigma_1 &= \frac{\partial U}{\partial \theta_{1,1}} = C^{11} \theta_{1,1} + C^{12} \varphi_{1,1}, & \mu_{211} &= 0, & R_{1,21} &= R_{1,12}, & \varphi_{1,1} &= \varphi_{1,1}z, & \varphi_{1,2} &= \varphi_1 \\ \mu_{112} = \sigma_2 &= \frac{\partial U}{\partial \theta_{1,2}} = C^{11} R_{1,12} + C^{12} \varphi_{1,2} = -C^{11} w''(x) + C^{12} \varphi_{1,2}, \end{aligned} \quad (3T)$$

Учтем (3T) и запишем вариационную форму согласно принципу возможных перемещений

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^L [\sigma_{11} \delta R_{1,1} + \mu_{111} \delta R_{1,11} + \mu_{112} \delta R_{1,12} + m \delta \varphi + m_1 \delta \varphi_{1,1} + m_2 \delta \varphi_{1,2}] dz dx \quad (4T)$$

Докажем, что для получения корректного варианта модели, в котором изгибная жесткость не модифицируется и напряженное состояние вдали от краевых эффектов совпадает с классическим имеет следующий редуцированный вид вместо (4T)

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^L [\sigma_{11} \delta R_{1,1} + \mu_{111} \delta R_{1,11} + m \delta \varphi + m_1 \delta \varphi_{1,1}] dy dx \quad (5T)$$

Теорема. Корректная теория тонких пористых и градиентных структур-стержней должна базироваться на вариационной модели с энергией деформацией, даваемой равенством (5т).

Доказательство основано на двух положениях. Первое положение связано с доказательством необходимости редуцирования общего выражения (4т) плотности потенциальной энергии к виду (5т). Второе положение связано с прямым доказательством того, что использование в вариационной модели потенциальной энергии (5т) ведет к корректной модели.

Доказательство положения 1. Рассмотрим выражение

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^L [\mu_{112} \delta R_{1,12}] dz dx \quad (6т)$$

Интегрирование по частям в (6т) в отношении трансверсальной координаты дает

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^L [\mu_{112} \delta R_{1,12}] dz dx = \int_0^L \mu_{112} \delta R_{1,1} \Big|_{-h/2}^{h/2} dx - \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^L \mu_{112,2} \delta R_{1,1} dz dx = \\ &= \int_0^L \mu_{112} \delta \theta \Big|_{-h/2}^{h/2} dx - \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^L \mu_{112,2} \delta R_{1,1} dz dx = 0 \end{aligned} \quad (7т)$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, так как в градиентной векторной модели при вариации шарового тензора граничное условие определяется через моментные напряжения. Второе слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю в силу принятых кинематических гипотез.

Рассмотрим теперь аналогично и слагаемое в выражении (5т)

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^L [g_2 \delta \varphi_{,2}] dz dx \quad (8т)$$

Преобразуем выражением (7т) интегрированием по частям. Получим

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^L [m_2 \delta \varphi_{,2}] dz dx = \int_0^L [m_2 \delta \varphi] \Big|_{-h/2}^{h/2} dx - \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^L [m_{2,2} \delta \varphi] dz dx \quad (9т)$$

Правая часть соотношения (9т) равна нулю в силу граничных условий на статический фактор при пористости и в силу принятых кинематических гипотез.

Таким образом показано, что форма (4т) должна использоваться в качестве редуцированного выражения для потенциальной энергии.

Использование кинематической модели и процедуры интегрирования по частям приводит к следующей вариационной модели

$$\begin{aligned}
 \delta L = & \int_0^l \{[-(2\mu + \lambda)w'''' + C^{11}w'''' + K^{12}\varphi'' - C^{12}\varphi''']J + (q + p')\}\delta w dx + \\
 & + \int_0^l (K^{12}w'' - C^{12}w''' - K^{22}\varphi + C^{22}\varphi'')J\delta\varphi dx + \\
 & + \{Q - p - [-(2\mu + \lambda)w'''' + C^{11}w'''' + K^{12}\varphi' - C^{12}\varphi''']J\}\delta w|_{x=0}^{x=l} - \\
 & - \{M - [-(2\mu + \lambda)w'' + C^{11}w''' + K^{12}\varphi - C^{12}\varphi'']J\}\delta w'|_{x=0}^{x=l} + \\
 & + (C^{11}w''' - C^{12}\varphi')J\delta w|_{x=0}^{x=l} + \\
 & + (C^{12}w'' - C^{22}\varphi')J\delta\varphi|_{x=0}^{x=l} = 0
 \end{aligned} \tag{10т}$$

Отсюда найдём, что система разрешающих уравнений имеет вид

$$\begin{cases} (2\mu + \lambda)w'''' - C^{11}w'''' - K^{12}\varphi'' + C^{12}\varphi''' = (q + p') / J \\ K^{12}w'' - C^{12}w''' - K^{22}\varphi + C^{22}\varphi'' = 0 \end{cases} \tag{11т}$$

Исключим из первого уравнения системы (11т) φ''' с помощью второго уравнения системы:

$$[(2\mu + \lambda) - K^{12} \frac{C^{12}}{C^{22}}]w'''' - (C^{11} - \frac{C^{12}C^{12}}{C^{22}})w'''' - (K^{12} - K^{22} \frac{C^{12}}{C^{22}})\varphi'' = (q + p') / J \tag{2.36}$$

Получили уравнение, которое имеет множителем при четвертой производной классическое выражение изгибной жесткости. Т.е. приходим к корректной модели.

Теорема доказана

Далее для преодоления недостатков «некорректной» модели в данном разделе разрабатывается уточненная, физически корректная постановка задачи. Предлагаются уточненные кинематические гипотезы, которые являются обобщением классических гипотез Кирхгоффа для градиентной пористой среды.

Они позволяют более адекватно описать распределение напряжений и деформаций по толщине.

Лагранжиан L , работа внешних сил A , потенциальная энергия U и плотность потенциальной энергии U_V пористой градиентной среды выбираются в соответствии с общей постановкой. Запишем редуцированное выражение для потенциальной энергии

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^L [\sigma_{11} \delta R_{1,1} + \mu_{111} \delta R_{1,11} + h \delta \varphi + m_1 \delta \varphi_{,1}] dy dx = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^L \underbrace{[2\mu R_{1,1} + \lambda R_{1,1} + K^{12} \varphi]}_{\sigma_{11}} \delta R_{1,1} + \underbrace{[C^{11} \theta_{,1} + C^{12} \varphi_{,1}]}_{\sigma_1} \delta R_{1,1} + \\ &+ \underbrace{[(K^{12} \theta + K^{22} \varphi)]}_{m} \delta \varphi + \underbrace{[C^{12} \theta_{,1} + C^{22} \varphi_{,1}]}_{m_1} \delta \varphi_{,1} dz dx\end{aligned}$$

Вариация лагранжиана дает:

$$\begin{aligned}\delta L &= \int_V P_i^V \delta R_i dV + \int_F \{P_i^F \delta R_i - (C^{11} \theta_{,x} + C^{12} \varphi_{,x}) n_x \delta \theta\} dF - \\ &- \int_V \{[(2\mu + \lambda) \varepsilon_{xx} + \lambda \varepsilon_{zz} + K^{12} \varphi - C^{11} \theta_{,xx} - C^{12} \varphi_{,xx}] \delta \varepsilon_{xx} + \\ &+ (K^{12} \theta + K^{22} \varphi) \delta \varphi + (C^{12} \theta_{,x} + C^{22} \varphi_{,x}) \delta \varphi_{,x}\} dV\end{aligned}\quad (2.37)$$

Вариация последнего лагранжиана может быть формально получена и путем формального обнуления слагаемых с выделенными подчеркиванием выражений (координата x может быть встречаться и как единица-1 в нижних индексах и обозначениях производных)

$$\begin{aligned}\delta L &= \int_V P_i^V \delta R_i dV + \int_F \{P_i^F \delta R_i - (C^{11} \theta_{,x} + C^{12} \varphi_{,x}) n_x \delta \theta\} dF - \\ &- \int_V \{[(2\mu + \lambda) \varepsilon_{xx} + \lambda \varepsilon_{zz} + K^{12} \varphi - C^{11} \theta_{,xx} - C^{12} \varphi_{,xx}] \delta \varepsilon_{xx} + \\ &+ 2\mu \varepsilon_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \\ &+ [\lambda \varepsilon_{xx} + (2\mu + \lambda) \varepsilon_{zz} + K^{12} \varphi - (C^{11} \theta_{,xx} + C^{12} \varphi_{,xx})] \delta \varepsilon_{zz} + \\ &+ (C^{11} \theta_{,z} + C^{12} \varphi_{,z}) \delta \theta_{,z} + \\ &+ (K^{12} \theta + K^{22} \varphi) \delta \varphi + (C^{12} \theta_{,x} + C^{22} \varphi_{,x}) \delta \varphi_{,x} + (C^{12} \theta_{,z} + C^{22} \varphi_{,z}) \delta \varphi_{,z}\} dV\end{aligned}$$

Приведем далее полное описание модели. Постулируем следующие кинематические гипотезы, являющиеся, на наш взгляд, обобщением гипотез Кирхгоффа для градиентной пористой среды:

$$\begin{cases} u(x, z) = -w_0'(x)z \\ w(x, z) = w_0(x) \\ \theta_{,z}(x, z) = -w_0''(x) \\ \varphi_{,z} = \varphi_1(x) \end{cases} \quad (2.38)$$

В соответствии изложенным выше утверждением (можно в первом приближении сослаться и на гипотезу Ландау), для тонкостенных конструкций силовые факторы, обращающиеся в ноль на поверхности тонкостенной конструкции, малы и внутри конструкции. Поэтому ими можно пренебречь в выражении вариации лагранжиана. Таким образом, если кинематические переменные удовлетворяют гипотезам (2.38), вариация лагранжиана (2.37) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_V P_i^V \delta R_i dV + \int_F \{P_i^F \delta R_i - (C^{11}\theta_{,x} + C^{12}\varphi_{,x})\delta(u_{,x}n_x)\}dF - \\ & - \int_V \{[(2\mu + \lambda)u_{,x} + K^{12}\varphi - C^{11}u_{,xxx} - C^{12}\varphi_{,xx}]\delta u_{,x} + \\ & + (K^{12}u_{,x} + K^{22}\varphi)\delta\varphi + (C^{12}u_{,xx} + C^{22}\varphi_{,x})\delta\varphi_{,x}\}dV \end{aligned} \quad (2.39)$$

Вариация работы внешних сил в (2.39) приобретет вид:

$$\begin{aligned} \delta A = & \int_0^l \left\{ \left[\int_{-h/2}^{+h/2} P_x^V z dz + (P_x^F z) \Big|_{y=-h/2}^{y=+h/2} \right] \delta u + \left[\int_{-h/2}^{+h/2} P_z^V dz + P_z^F \Big|_{y=-h/2}^{y=+h/2} \right] \delta w \right\} dx + \\ & + \left[\int_{-h/2}^{+h/2} P_x^F z dz \delta u + \int_{-h/2}^{+h/2} P_z^F dz \delta w \right] \Big|_{x=0}^{x=l} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Введем обозначения внешних нагрузок на продольных кромках:

$$\begin{cases} \left[\int_{-h/2}^{+h/2} P_x^V z dz + (P_x^F z) \Big|_{y=-h/2}^{y=+h/2} \right] = p \\ \left[\int_{-h/2}^{+h/2} P_z^V dz + P_z^F \Big|_{y=-h/2}^{y=+h/2} \right] = q \end{cases} \quad (2.41)$$

Здесь P - распределенная продольная внешняя сила, Q - распределенная поперечная внешняя сила.

Введем обозначения внешних нагрузок на поперечных кромках:

$$\begin{cases} \int_{-h/2}^{+h/2} P_x^F dz = M \\ \int_{-h/2}^{+h/2} P_z^F dz = Q \end{cases} \quad (2.42)$$

Здесь M - внешний изгибающий момент, Q - внешняя перерезывающая сила Сен-Венана.

Тогда работа внешних сил приобретет вид:

$$\delta A = \int_0^l (-p\delta w' + q\delta w)dx + (-M\delta w' + Q\delta w)|_{x=0}^{x=l} \quad (2.43)$$

Вариация потенциальной энергии в (2.39) после подстановки (2.7.2) и внутреннего интегрирования по поперечной координате принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta U = & (-C^{11}w''' + C^{12}\varphi')\left(\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz\right)\delta w''|_{x=0}^{x=l} + \\ & + \int_0^l \{[-(2\mu + \lambda)w'' + K^{12}\varphi + C^{11}w''' - C^{12}\varphi']\left(\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz\right)\delta w'' - \\ & - (-K^{12}w'' + K^{22}\varphi)\left(\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz\right)\delta\varphi - (-C^{12}w''' + C^{22}\varphi')\left(\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz\right)\delta\varphi'\}dx \end{aligned} \quad (2.44)$$

Введем определение момента инерции прямоугольного сечения единичной ширины:

$$J = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12}$$

И перепишем (2.39) с учетом (2.43) и (2.44) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\delta L = & \int_0^l \{[-(2\mu + \lambda)w'''' + C^{11}w''''' + K^{12}\varphi'' - C^{12}\varphi''']J + (q + p')\}\delta w dx + \\
& + \int_0^l (K^{12}w'' - C^{12}w''' - K^{22}\varphi + C^{22}\varphi'')J\delta\varphi dx + \\
& + \{Q - p - [-(2\mu + \lambda)w''' + C^{11}w'''' + K^{12}\varphi' - C^{12}\varphi'']J\}\delta w|_{x=0}^{x=l} - \\
& - \{M - [-(2\mu + \lambda)w'' + C^{11}w''' + K^{12}\varphi - C^{12}\varphi']J\}\delta w'|_{x=0}^{x=l} + \\
& + (C^{11}w''' - C^{12}\varphi')J\delta w''|_{x=0}^{x=l} + \\
& + (C^{12}w''' - C^{22}\varphi')J\delta\varphi|_{x=0}^{x=l} = 0
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} (2\mu + \lambda)w'''' - C^{11}w''''' - K^{12}\varphi'' + C^{12}\varphi''' = (q + p')/J \\ K^{12}w'' - C^{12}w''' - K^{22}\varphi + C^{22}\varphi'' = 0 \end{cases} \tag{2.46}$$

Спектр граничных условий определяется четырьмя парами альтернативных граничных условий на торцевых кромках:

$$\begin{aligned}
& \{Q - p - [-(2\mu + \lambda)w''' + C^{11}w'''' + K^{12}\varphi' - C^{12}\varphi'']J\}\delta w|_{x=0}^{x=l} = 0 \\
& \{M - [-(2\mu + \lambda)w'' + C^{11}w''' + K^{12}\varphi - C^{12}\varphi']J\}\delta w'|_{x=0}^{x=l} = 0 \\
& (-C^{11}w''' + C^{12}\varphi')\delta w''|_{x=0}^{x=l} = 0 \\
& (-C^{12}w''' + C^{22}\varphi')\delta\varphi|_{x=0}^{x=l} = 0
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Исключим из первого уравнения системы (2.46) φ''' с помощью второго уравнения системы:

$$[(2\mu + \lambda) - K^{12}\frac{C^{12}}{C^{22}}]w'''' - (C^{11} - \frac{C^{12}C^{12}}{C^{22}})w''''' - (K^{12} - K^{22}\frac{C^{12}}{C^{22}})\varphi'' = (q + p')/J \tag{2.48}$$

С помощью этого соотношения исключим из уравнения пористости φ'' и получим выражение пористости через дифференциальный оператор шестого порядка от прогиба:

$$\begin{aligned}
\varphi = & \frac{K^{12}}{K^{22}}w'' + \frac{[(2\mu + \lambda) - 2K^{12}\frac{C^{12}}{C^{22}} + K^{22}\frac{C^{12}}{C^{22}}\frac{C^{12}}{C^{22}}]\frac{C^{22}}{K^{22}}}{(K^{12} - K^{22}\frac{C^{12}}{C^{22}})}w'''' - \frac{(C^{11} - \frac{C^{12}C^{12}}{C^{22}})\frac{C^{22}}{K^{22}}}{(K^{12} - K^{22}\frac{C^{12}}{C^{22}})}w''''' - \\
& - \frac{\frac{C^{22}}{K^{22}}}{(K^{12} - K^{22}\frac{C^{12}}{C^{22}})}(q + p')/J
\end{aligned} \tag{2.49}$$

С помощью (2.49) исключим φ'' из (2.48) и получим дифференциальное уравнение восьмого порядка на прогиб:

$$\begin{aligned}
 & (2\mu + \lambda - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}})w'''' - \\
 & - [C^{11} - 2\frac{K^{12}}{K^{22}}C^{12} + (2\mu + \lambda)\frac{C^{22}}{K^{22}}]w'''' + \\
 & + (C^{11} - \frac{C^{12}C^{12}}{C^{22}})\frac{C^{22}}{K^{22}}w'''' = \\
 & = (q + p') / J - \frac{C^{22}}{K^{22}}(q + p')'' / J \\
 & C^{11} = K^{11}l_{\theta\theta}^2 \\
 & C^{12} = K^{12}l_{\theta\varphi}^2 \\
 & C^{22} = K^{22}l_{\varphi\varphi}^2
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Оператор разрешающего уравнения (2.7.19с) можно представить как произведение операторов второго порядка. Для этого определим новые физические параметры $l_1^2; l_2^2$ через исходные:

$$\begin{cases}
 (2\mu + \lambda - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}}) = E_{dam} \\
 [C^{11} - 2\frac{K^{12}}{K^{22}}C^{12} + (2\mu + \lambda)\frac{C^{22}}{K^{22}}] = E_{dam}(\bar{l}_1^2 + \bar{l}_2^2) \\
 (C^{11} - \frac{C^{12}C^{12}}{C^{22}})\frac{C^{22}}{K^{22}} = E_{dam}\bar{l}_1^2\bar{l}_2^2
 \end{cases} \tag{2.51}$$

Тогда (2.7.19с) можно переписать в искомом виде:

$$(...)^{''''}[(...) - \bar{l}_1^2(...)][(...) - \bar{l}_2^2(...)]w = (q + p') / J - \frac{C^{22}}{K^{22}}(q + p')'' / J \tag{2.52}$$

Таким образом мы видим, что пористость действует как дефекты и приводит к деградации модуля упругости через комбинацию модулей пористости $\frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}}$. Если перекрестный модуль отсутствует $K^{12} = 0$, то деградации модуля упругости нет, но остается эффект деградации градиентных модулей (2.51) через перекрестный модуль C^{12}

Решение (2.7.19с) можно представить в виде линейной комбинации собственных функций операторов второго порядка и частного решения неоднородного уравнения:

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x) + w_2(x) + w_*(x)$$

$$\begin{cases} w_0''' = 0 \\ w_1 - l_1^2 w_1'' = 0 \\ w_2 - l_2^2 w_2'' = 0 \\ w_*''' - (l_1^2 + l_2^2) w_*'''' + l_1^2 l_2^2 w_*''''' = (q + p') / AJ \end{cases} \quad (2.53)$$

Соответственно, решение (2.49) для пористости можно представить в виде:

$$\varphi(x) = \frac{K^{12}}{K^{22}} w_0''(x) + \varphi_1 w_1(x) + \varphi_2 w_2(x) + \varphi_*(x)$$

Здесь введены обозначения для коэффициентов:

$$\varphi_1 = \left[\frac{K^{12}}{K^{22}} + \frac{[(2\mu + \lambda) - 2K^{12} \frac{C^{12}}{C^{22}} + K^{22} \frac{C^{12}}{C^{22}} \frac{C^{12}}{C^{22}}] \frac{C^{22}}{K^{22}}}{(K^{12} - K^{22} \frac{C^{12}}{C^{22}})} l_1^{-2} - \frac{(C^{11} - \frac{C^{12} C^{12}}{C^{22}}) \frac{C^{22}}{K^{22}}}{(K^{12} - K^{22} \frac{C^{12}}{C^{22}})} l_1^{-4} \right] l_1^{-2}$$

$$\varphi_2 = \left[\frac{K^{12}}{K^{22}} + \frac{[(2\mu + \lambda) - 2K^{12} \frac{C^{12}}{C^{22}} + K^{22} \frac{C^{12}}{C^{22}} \frac{C^{12}}{C^{22}}] \frac{C^{22}}{K^{22}}}{(K^{12} - K^{22} \frac{C^{12}}{C^{22}})} l_2^{-2} - \frac{(C^{11} - \frac{C^{12} C^{12}}{C^{22}}) \frac{C^{22}}{K^{22}}}{(K^{12} - K^{22} \frac{C^{12}}{C^{22}})} l_2^{-4} \right] l_2^{-2}$$

И для частного решения:

$$\varphi_*(x) = \frac{K^{12}}{K^{22}} w_*''(x) + \frac{[(2\mu + \lambda) - 2K^{12} \frac{C^{12}}{C^{22}} + K^{22} \frac{C^{12}}{C^{22}} \frac{C^{12}}{C^{22}}] \frac{C^{22}}{K^{22}}}{(K^{12} - K^{22} \frac{C^{12}}{C^{22}})} w_*'''(x) -$$

$$- \frac{(C^{11} - \frac{C^{12} C^{12}}{C^{22}}) \frac{C^{22}}{K^{22}}}{(K^{12} - K^{22} \frac{C^{12}}{C^{22}})} w_*''''(x) - \frac{\frac{C^{22}}{K^{22}}}{(K^{12} - K^{22} \frac{C^{12}}{C^{22}})} [q(x) + p'(x)] / J$$

Запишем пары альтернативных граничных условий (2.7.20) в терминах $w_0; w_1; w_2; w_*$.

$$\begin{cases} w(x) = w_0 + w_1 + w_2 + w_* \\ \varphi(x) = \frac{K^{12}}{K^{22}} w_0'' + \varphi_1 w_1 + \varphi_2 w_2 + \varphi_* \end{cases}$$

1. Первая пара альтернативных граничных условий.

Кинематическое условие – задан прогиб w :

$$w_0 + w_1 + w_2 = w - w_* \quad (2.54)$$

Силовое условие – задана перерезывающая сила Q :

$$\begin{aligned} & -(2\mu + \lambda - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}})w_0''' + \\ & + [K^{12}\varphi_1 - (2\mu + \lambda + C^{12}\varphi_1)l_1^{-2} + C^{11}l_1^{-4}]w_1' - \\ & + [K^{12}\varphi_2 - (2\mu + \lambda + C^{12}\varphi_2)l_2^{-2} + C^{11}l_2^{-4}]w_2' = \\ & = (Q - p) / J - [K^{12}\varphi_*' - (2\mu + \lambda)w_*''' + C^{11}w_*'''' - C^{12}\varphi_*'''] \end{aligned} \quad (2.55)$$

2. Вторая пара альтернативных граничных условий.

Кинематическое условие – задан угол поворота w' :

$$w_0' + w_1' + w_2' = w' - w_*' \quad (2.56)$$

Силовое условие – задан изгибающий момент M :

$$\begin{aligned} & -(2\mu + \lambda - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}})w_0'' - \\ & + [K^{12} - (2\mu + \lambda + C^{12}\varphi_1)l_1^{-2} + C^{11}l_1^{-4}]w_1 - \\ & + [K^{12}\varphi_2 - (2\mu + \lambda + C^{12}\varphi_2)l_2^{-2} + C^{11}l_2^{-4}]w_2 = \\ & = M / J - [K^{12}\varphi_* - (2\mu + \lambda)w_*'' + C^{11}w_*''' - C^{12}\varphi_*''] \end{aligned} \quad (2.57)$$

3. Третья пара альтернативных граничных условий.

Кинематическое условие – задана кривизна:

$$w_0'' + l_1^{-2}w_1 + l_2^{-2}w_2 = w'' - w_*'' \quad (2.58)$$

Силовое условие – задана продольная компонента вектора моментных напряжений $m_x^\theta = 0$:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{C^{12}}{C^{11}} \frac{K^{12}}{K^{22}} - 1 \right) w_0''' + \left(\frac{C^{12}}{C^{11}} \varphi_1 - l_1^{-2} \right) w_1' + \left(\frac{C^{12}}{C^{11}} \varphi_2 - l_2^{-2} \right) w_2' = \\
& = w_*''' - \frac{C^{12}}{C^{11}} \varphi_*'
\end{aligned} \tag{2.59}$$

4. Четвертая пара альтернативных граничных условий.

Кинематическое условие – задана пористость φ :

$$\frac{K^{12}}{K^{22}} w_0'' + \varphi_1 w_1 + \varphi_2 w_2 = \varphi - \varphi_* \tag{2.60}$$

Силовое условие – задана продольная компонента вектора моментных напряжений $m_x^\varphi = 0$:

$$\left(\frac{K^{12}}{K^{22}} - \frac{C^{12}}{C^{22}} \right) w_0''' + \left(\varphi_1 - \frac{C^{12}}{C^{22}} l_1^{-2} \right) w_1' + \left(\varphi_2 - \frac{C^{12}}{C^{22}} l_2^{-2} \right) w_2' = \frac{C^{12}}{C^{22}} w_*''' - \varphi_*' \tag{2.61}$$

2.3. Решение задачи изгиба стержня без привлечения гипотез

В данном разделе рассматривается альтернативный подход к построению теории изгиба тонкостенных элементов, который не опирается на априорные кинематические гипотезы типа гипотез Бернулли или Кирхгоффа. Вместо этого используется обобщенная гипотеза Аэро-Кувшинского, позволяющая получить замкнутое аналитическое решение задачи чистого изгиба стержня в рамках градиентной теории упругости, выведенной из более общей теории пористых сред. Такой подход представляет значительный интерес, поскольку он позволяет ответить на принципиальный вопрос: приводит ли учет градиентных (масштабных) эффектов к изменению классических изгибных жесткостей в сверхтонких стержнях, когда толщина стержня становится соизмеримой с характерными масштабами внутренней структуры материала.

Отправной точкой для построения модели служит основное вариационное равенство теории пористых сред, которое было детально рассмотрено в предыдущих разделах. Напомним, что это равенство представляет собой

математическую запись принципа возможных перемещений для сплошной среды с внутренней структурой, характеризуемой скалярным полем пористости.

В общем виде вариационное равенство содержит как слагаемые, описывающие классические упругие свойства, так и члены, учитывающие градиентные эффекты и эволюцию дефектной структуры:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint \{ [\mu^{11} \Delta R_i + (\mu^{11} + \lambda^{11}) \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{3} (2\mu^{12} + 3\lambda^{12}) \frac{\partial \theta^\Xi}{\partial x_i} + P_i^V] \delta R_i + \\ & + \frac{1}{3} [\frac{4}{3} \chi^{33} \Delta \theta^\Xi - (2\mu^{22} + 3\lambda^{22}) \theta^\Xi + (2\mu^{12} + 3\lambda^{12}) \theta^0] \delta \theta^\Xi \} dV + \\ & + \oint \{ P_i^F - [\mu^{11} \dot{R}_i + \mu^{11} \frac{\partial R_j}{\partial x_i} n_j + \lambda^{11} \frac{\partial R_k}{\partial x_k} n_i - \frac{1}{3} (2\mu^{12} + 3\lambda^{12}) \theta^\Xi n_i] \} \delta R_i dF - \\ & - \frac{4}{9} \oint \{ \chi^{33} \dot{\theta}^\Xi + (\mu^F + \lambda^F) \theta^\Xi \} \delta \theta^\Xi dF = 0 \end{aligned}$$

Ключевое упрощение, позволяющее перейти к конструктивной модели, связано с анализом уравнения баланса пористости, которое в вариационном равенстве выделено подчеркиванием. Это уравнение, известное в литературе как уравнение эволюции пор, в общем случае представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка относительно поля пористости. Однако для тонкостенных конструкций, где характерный поперечный размер мал по сравнению с продольными размерами, можно ввести дополнительное упрощающее предположение. Суть этого предположения заключается в том, что вторые производные поля пористости по пространственным координатам считаются малыми по сравнению с самой величиной пористости.

Иными словами, пористость предполагается слабо меняющейся функцией координат, так что ее градиенты изменяются существенно медленнее, чем она сама. Это соотношение устанавливает прямую связь между двумя типами пористости — стесненной (связанной с деформацией матрицы) и свободной (связанной с изменением объема пустот).

Фактически, это есть не что иное, как вариант обобщенной гипотезы Аэро-Кувшинского, адаптированный для случая пористых дефектных сред:

$$\theta^{\Xi} = \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})}{(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})} \theta^0, \quad \theta^{\Xi} = \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})}{(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})} \theta^0 = a\theta^0 = aR_{j,j}, \quad a = \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})}{(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})} \quad (2.62)$$

Таким образом, пористость перестает быть независимой кинематической переменной и выражается через деформации твердой матрицы. Это существенно упрощает модель, сводя ее к градиентной теории упругости с эффективными материальными параметрами, которые аккумулируют в себе как свойства самой матрицы, так и характеристики пористой структуры.

После применения обобщенной гипотезы Аэро-Кувшинского и исключения поля пористости как независимой переменной, рассматриваемая модель полностью описывается функционалом Лагранжа специального вида:

$$\begin{aligned} L &= A - \frac{1}{2} \iiint \{2\mu \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{1}{3}(2\bar{\mu} + 3\bar{\lambda})\theta\theta + (\lambda + 2\mu)l^2\theta_{,k} \theta_{,k}\} dV - \frac{1}{2} \oint \{(\mu^F + \lambda^F)\theta\theta\} dF \\ &= A - \frac{1}{2} \iiint \{2\mu \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \bar{K}\theta\theta + (\lambda + 2\mu)l^2\theta_{,k} \theta_{,k}\} dV - \frac{1}{2} \oint \{(\mu^F + \lambda^F)\theta\theta\} dF \\ \bar{K} &= (2\bar{\mu} + 3\bar{\lambda})/3 = \frac{(2\mu + 3\lambda)}{3} \left(1 - \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})(2\mu + 3\lambda)}\right) = K \left(1 - \frac{(K^{12})^2}{K^{22}K}\right), \quad K = (2\mu + 3\lambda)/3 \\ (4/9)\chi^{33} &= (\lambda + 2\mu)l^2 \end{aligned}$$

Важно отметить, что в рамках принятых предположений модуль сдвига μ материала сохраняет свое классическое значение. В то же время объемный модуль упругости оказывается модифицированным за счет поврежденности среды. Эта модификация проявляется в уменьшении эффективного объемного модуля по сравнению со значением, соответствующим полностью бездефектной среде.

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint \{2\mu \gamma_{ij} \gamma_{ij} + K\theta\theta + (\lambda + 2\mu)l^2\theta_{,k} \theta_{,k}\} dV - \frac{1}{2} \oint \{(\mu^F + \lambda^F)\theta\theta\} dF$$

Тогда имеем в виду, что $K = (2\mu + 3\bar{\lambda})/3 = \frac{(2\mu + 3\lambda)}{3} \left(1 - \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})(2\mu + 3\lambda)}\right)$, т.е.

объемный модуль упругости уменьшается из-за поврежденности, если в качестве начальных свойств среды рассматривать свойства полностью бездефектной среды.

Следовательно, любая градиентная среда уже рассматривается как поврежденная среда с "алгебраической" поврежденностью.

В дальнейшем, для упрощения анализа и более четкого выделения именно градиентных масштабных эффектов, мы отвлекаемся от этих алгебраических эффектов поврежденности. Предполагается, что при определенных условиях ($l^2 \rightarrow 0$) среда может рассматриваться как бездефектная. Наша основная цель состоит в том, чтобы количественно оценить влияние градиентных эффектов на напряженно-деформированное состояние, отделив их от влияния самой пористости. Кроме того, эффекты, связанные с особыми свойствами поверхности (поверхностное натяжение, приповерхностные слои- $(\mu^F + \lambda^F) = 0$), также исключаются из рассмотрения, чтобы сосредоточиться исключительно на объемных градиентных эффектах.

В рамках построенной градиентной теории упругости определяющие соотношения, связывающие напряжения и деформации, имеют нетрадиционный вид. Наряду с классическими напряжениями Коши, которые являются мерой силового взаимодействия в материале, вводятся моментные напряжения (или высшие напряжения), сопряженные градиентам деформаций. Эти моментные напряжения возникают как следствие учета в потенциальной энергии слагаемых, содержащих производные от деформаций по координатам. Формально определяющие соотношения выводятся из функционала Лагранжа с помощью формул Грина. При этом классические напряжения выражаются через деформации по закону Гука, а моментные напряжения — через градиенты деформаций с коэффициентами пропорциональности, представляющими собой градиентные модули упругости. Имеют место следующие соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(R_{i,j} + R_{j,i})$$

и определяющие соотношения:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad m_i = (\lambda + 2\mu) l^2 \theta_{,i} = (\lambda + 2\mu) l^2 \varepsilon_{kk,i} \quad (2.63)$$

Уравнения равновесия (уравнения Эйлера) выводятся из условия стационарности функционала Лагранжа $\delta L = 0$ после интегрирования по частям. В результате получаются дифференциальные уравнения высокого порядка, которые описывают баланс сил и моментов в каждой точке среды:

$$\sigma_{ij,j} - m_{j,ji} + P_i^V = 0,$$

В отличие от классической теории упругости, где уравнения равновесия представляют собой систему трех уравнений второго порядка, в градиентной теории порядок уравнений повышается, что отражает более сложный характер взаимодействия между элементами среды.

Одним из принципиальных отличий градиентных теорий упругости от классической является необходимость формулировки дополнительных краевых условий. Классическая теория требует задания на границе тела двух типов условий: кинематических (заданных перемещений) и статических (заданных напряжений). В градиентной теории к этим двум добавляются еще одна пара условий, связанных с моментными напряжениями. В частности, на поверхности тела, помимо классических напряжений, необходимо задавать также моментные напряжения или, в кинематической постановке, нормальные производные от перемещений. Последнее краевое условие, касающееся моментных напряжений, является неклассическим и записывается в виде:

$$m_j n_j = 0$$

Статическое краевое условие для классических напряжений в общем случае записывается как сумма классического напряжения $(\sigma_{ij} - m_{j,i})n_j$ и касательной производной от вектора моментных напряжений $(m_p n_p)_{,q} \delta_{qi}^*$, $\delta_{qi}^* = \delta_{qi}^* - n_q n_i$. Однако, если ограничиться рассмотрением плоских границ с постоянной нормалью и принять во внимание неклассическое граничное условие для моментных напряжений, то классическое граничное условие может быть записано только через

классические напряжения. Это существенно упрощает постановку задачи, поскольку позволяет разделить классические и неклассические краевые условия

$$\sigma_{ij}n_j - m_{j,i}n_j = P_i^F, \quad m_{j,n_j} = 0$$

В результате краевая задача для градиентной теории упругости может быть сформулирована в перемещениях с учетом определяющих соотношений:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad m_i = (\lambda + 2\mu) l^2 \theta_{,i} = (\lambda + 2\mu) l^2 \varepsilon_{kk,i}$$

$$(\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} - (2\mu + \lambda) l^2 u_{k,kji} + P_i^V = 0$$

$$\mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \lambda u_{k,k} n_i - ((2\mu + \lambda) l^2 u_{k,kji}) n_i = P_i^F$$

$$(2\mu + \lambda) l^2 u_{k,kj} n_j = 0$$

Это приводит к системе дифференциальных уравнений высокого порядка относительно перемещений, дополненной соответствующими краевыми условиями на поверхности тел.

Рассмотрим теперь конкретную задачу чистого изгиба тонкого призматического стержня, нагруженного по торцам изгибающими моментами. В общем случае изучается изгиб трехмерной балки прямоугольного поперечного сечения с размерами $L \times 2h \times 2b$. Балка изгибается под действием чистых моментов M , приложенных на ее торцевых поверхностях. Ось балки совпадает с координатной осью Z , а прогибы происходят в направлении оси X . Для решения задачи применяется полуобратный метод, который заключается в том, что заранее задается структура решения, содержащая неизвестные функции координат $R_1 \equiv u(x, y, z)$, $R_2 \equiv v(x, y, z)$, $R_3 \equiv w(x, y, z)$. Эти функции затем определяются из удовлетворения уравнений равновесия и граничных условий. В данном случае полагается, что перемещения имеют специальный вид, соответствующий чистому изгибу: продольные перемещения линейно зависят от поперечной координаты, а поперечные перемещения являются функциями только продольной координаты.

Схема нагружения стержня показана на рисунке 2.1

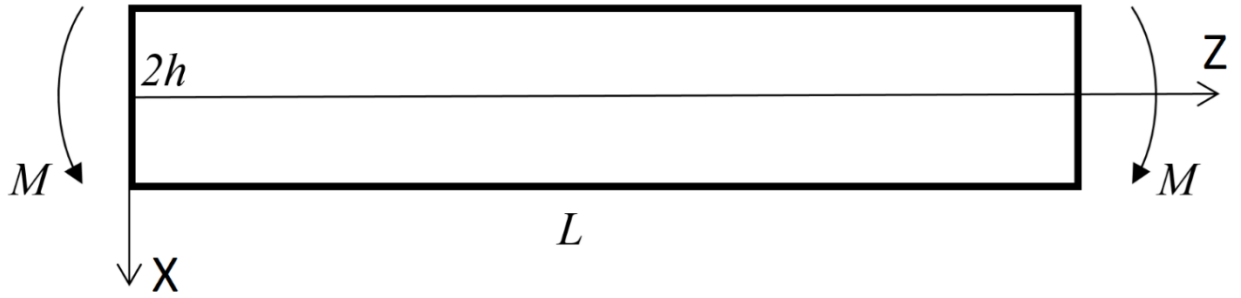


Рисунок 2.1 Схема нагружения стержня

Граничные условия задачи формулируются следующим образом: все боковые поверхности балки (за исключением торцов) свободны от внешней нагрузки, что означает равенство нулю как классических напряжений, так и моментных напряжений на этих поверхностях; на торцах балки действуют изгибающие моменты:

$$z = 0, L: 2b \int_{-h}^h x \sigma_z dx = -M \quad (2.64)$$

боковые поверхности балки являются плоскими, и на них отсутствуют моментные воздействия:

$$y = \pm b: \int_{-h}^h x \sigma_y dx = 0 \quad (2.65)$$

Для построения решения полуобратным методом задаются функции перемещений в виде, учитывающем симметрию задачи и характер нагружения:

$$R_1(x, y, z) = -\frac{1}{2} C_1 z^2 - \frac{1}{2} C_2 y^2 + R(x), R_2 = C_2 x y, R_3 = C_1 x z. \quad (2.66)$$

На основе принятого вида перемещений вычисляются компоненты тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u'(x), \quad \varepsilon_{yy} = C_2 x, \quad \varepsilon_{zz} = C_1 x, \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \\ \theta &= \varepsilon_{kk} = u'(x) + C_2 x + C_1 x. \end{aligned}$$

Поскольку деформации малы, используется линейная теория, и компоненты деформаций выражаются через производные от перемещений по координатам. Далее, с использованием определяющих соотношений градиентной теории упругости, вычисляются моментные напряжения:

$$m_x = (\lambda + 2\mu)l^2 (u''(x) + C_2 + C_1),$$

$$m_y = m_z = 0.$$

Полные напряжения, подчиняющиеся классическому закону Гука, также выражаются через деформации:

$$\sigma_x = (2\mu + \lambda)u'(x) + \lambda(C_1 + C_2)x,$$

$$\sigma_y = (2\mu + \lambda)C_2x + \lambda(u'(x) + C_1x),$$

$$\sigma_z = (2\mu + \lambda)C_1x + \lambda(u'(x) + C_2x).$$

После подстановки выражений для перемещений (2.66) в уравнение равновесия в направлении толщины балки:

$$l^2 (\lambda + 2\mu)u'''' - (\lambda + 2\mu)u'' - \lambda(C_2 + C_1) = 0$$

Получается обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции прогибов. Это уравнение решается с учетом требований симметрии: прогибы должны быть четными функциями поперечной координаты, а напряжения должны быть антисимметричными относительно срединной плоскости. Общее решение полученного дифференциального уравнения имеет вид:

$$u = A_1x + A_2 \operatorname{ch}(x/l) - \frac{\lambda}{2(\lambda + 2\mu)}(C_1 + C_2)x^2$$

Оно содержит произвольные константы интегрирования, которые определяются из граничных условий на верхней и нижней поверхностях балки. Эти условия требуют обращения в ноль напряжений на свободных поверхностях (при $x = \pm h$: $\sigma_x - m'_x = 0$, $m_x = 0$), что позволяет найти значения констант A_1, A_2 :

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{l}{\operatorname{ch}(h/l)}(C_1 + C_2)$$

Оставшиеся константы C_1, C_2 определяются из граничных условий на торцах (2.64) и боковых поверхностях (2.65) балки:

$$C_{1,2} = \frac{3M}{16bh^3} \frac{1}{\mu} \left(\mp 1 - \frac{\lambda + 2\mu}{S} \right),$$

$$S = (3\lambda + 2\mu) + 6(l/h)^3 \lambda (\operatorname{th}(h/l) - h/l).$$

В результате решения задачи получается замкнутое аналитическое выражение для полных напряжений, действующих в направлении оси балки:

$$\sigma_z = -\frac{M}{I} \left(\frac{x}{2} \left(1 + \frac{3\lambda + 2\mu}{S} \right) - l \frac{\lambda}{S} \frac{\operatorname{sh}(x/l)}{\operatorname{ch}(h/l)} \right) \quad (2.67)$$

где $I = 4bh^3/3$ – момент инерции поперечного сечения балки размером $2h \times 2b$ относительно поперечной оси Y . Важно отметить, что в полученном решении момент инерции поперечного сечения входит в выражение для напряжений классическим образом. Это означает, что интегральная характеристика жесткости балки определяется тем же моментом инерции, что и в классической теории. Рассмотрим теперь поведение решения в двух предельных случаях.

В случае малых значений масштабного параметра l когда характерный масштаб материала мал по сравнению с толщиной балки, получаем классическое выражение для напряжений: $\sigma_z = -\frac{M}{I} x$. Это означает, что для достаточно толстых балок (по сравнению с внутренним масштабом материала) градиентные эффекты не проявляются, и решение совпадает с классическим.

В противоположном предельном случае, когда толщина балки становится малой по сравнению с внутренним масштабом материала $h \rightarrow 0$, гиперболические функции могут быть разложены в ряды по малому параметру, обратному толщине. Используя разложения в степенные ряды для выражения $(\operatorname{th}(h/l) - h/l)$, получим

$$S = (\lambda + 2\mu) + O(h/l)$$

Рассмотрим выражение для напряжений (2.67) при $x = \pm h$. Используя ту же процедуру разложения, найдем:

$$\sigma_z = -\frac{M}{I}(h + O(h/l))$$

Анализ показывает, что и в этом пределе выражение для напряжений сводится к классическому линейному распределению. При этом изгибная жесткость остается неизменной и определяется тем же моментом инерции.

Таким образом, полученное точное решение задачи чистого изгиба по градиентной теории упругости приводит к важному выводу: учет градиентных масштабных эффектов не приводит к изменению изгибной жесткости стержня по сравнению с классическим решением теории упругости. Изгибная жесткость во всех случаях определяется величиной момента инерции поперечного сечения. Этот результат имеет фундаментальное значение, поскольку он показывает, что для задачи чистого изгиба градиентные эффекты проявляются только в перераспределении напряжений по толщине, но не влияют на интегральную жесткость конструкции. Данный вывод справедлив для рассмотренного варианта градиентной теории, полученного из теории пористых сред с использованием обобщенной гипотезы Аэро-Кувшинского, и не зависит от конкретных значений масштабного параметра. Физически это означает, что хотя локальное напряженное состояние в тонких стержнях может существенно отличаться от классического (например, напряжения на поверхности могут быть выше или ниже), интегральные характеристики (изгибная жесткость, момент) остаются неизменными. Это важное обстоятельство необходимо учитывать при интерпретации экспериментальных данных и при проектировании тонкостенных конструкций из градиентных пористых материалов.

Выводы по главе 2

Настоящая глава представляет собой систематическое исследование, посвященное построению и анализу математических моделей цилиндрического изгиба пластин и стержней в рамках механики градиентных пористых сред. Проведенная работа позволяет сформулировать следующие итоги.

Разработана обобщенная модель сплошной среды, которая последовательно учитывает как классические упругие свойства, так и два принципиально важных дополнительных фактора: структурную пористость и градиентные эффекты. Модель унифицирует и обобщает частные случаи, известные в литературе как среда Тупина (градиентная бездефектная) и среда Миндлина (градиентная с дислокациями).

Сформулированы и строго обоснованы две альтернативные прикладные теории цилиндрического изгиба: так называемые «некорректная» и «корректная» модели. Проведенный сравнительный анализ выявил принципиальные различия в их физической и математической непротиворечивости.

Некорректная модель, несмотря на свою математическую простоту и привлекательность, приводит к физически недостоверному результату: аномальному росту эффективной изгибной жесткости при стремлении толщины пластины к нулю. Этот недостаток делает модель неприменимой для анализа тонкостенных конструкций и элементов микро- и наномасштаба, где градиентные эффекты выражены наиболее сильно. Модель служит наглядным примером того, физически необоснованные упрощения могут привести к качественно неверным результатам.

Корректная модель лишена указанных недостатков. На основе обобщения гипотез Кирхгоффа и использования гипотезы Ландау построена последовательная теория, которая:

Корректно описывает предельный переход к классической теории упругости.

Учитывает внутренние характерные длины материала, что позволяет адекватно моделировать масштабные эффекты.

Требует постановки краевой задачи восьмого порядка, что обусловлено учетом высших градиентов и необходимости формулировки дополнительных граничных условий, связанных с пористостью.

Показана необходимость постановки нетривиальных граничных условий. В отличие от классической теории, где на торце задаются две пары условий, в корректной модели их четыре. Это требует развития новых экспериментальных методик для определения соответствующих силовых факторов или кинематических параметров на границе.

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В МЕХАНИКЕ ПОРИСТЫХ СРЕД

Пористые материалы широко распространены в природе и технике: от биологических тканей (кость, древесина) и геологических пород до инженерных пен, металлокерамики, композитов с контролируемой пористостью и акустических покрытий. В последние десятилетия активно развиваются также градиентно-пористые среды, в которых пористость и её пространственные производные влияют на эффективные упругие и инерционные свойства. Такие материалы позволяют создавать конструкции с анизотропией, локально изменяемой жёсткостью и заданными волновыми характеристиками.

Большинство работ по механике пористых сред сосредоточено на статических или квазистатических задачах, где пористость рассматривается либо как внутренняя переменная с алгебраическим уравнением состояния, либо как диффузионное поле. Однако для многих приложений – ударное нагружение, виброзащита, распространение ультразвука, акустическая диагностика, сейсмостойкость – динамические эффекты становятся определяющими.

Классическая теория упругости, а также стандартные модели пористости (типа Био–Френкеля или теории с одной внутренней переменной) не могут описать все эти эффекты одновременно, поскольку в них отсутствуют либо градиентные члены, либо динамическая связь между полями.

Цель данной главы построить непротиворечивую вариационную динамическую теорию градиентной пористой среды, которая включает:

- полную квадратичную форму потенциальной энергии с алгебраическими и градиентными вкладами как для упругой матрицы, так и для поля пористости, а также с перекрёстными членами взаимодействия;
- кинетическую энергию, содержащую не только стандартные инерционные члены, но и члены, связанные со скоростью пористости и их градиентами;

• возможность учёта трёх независимых каналов взаимодействия между деформацией и пористостью (через алгебраическую часть, градиентную часть и кинетическую энергию).

Такой подход обобщает известные модели: классическую упругость, теорию пористости с одной переменной, градиентные среды по Тупину и Миндлину, а также позволяет получить их как частные случаи.

3.1. Общая постановка динамических задач в пористых средах

Лагранжиан L , работа внешних сил A , потенциальная энергия U и плотность потенциальной энергии U_v пористой градиентной среды:

$$\begin{aligned} L &= A - U \\ A &= \int_V P_i^V R_i dV + \int_F P_i^F R_i dF \\ U &= \int_V U_v dV \\ U_v &= \frac{1}{2} [2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + (K^{11}\theta\theta + 2K^{12}\theta\varphi + K^{22}\varphi\varphi) + (C^{11}\theta_{,k}\theta_{,k} + 2C^{12}\theta_{,k}\varphi_{,k} + C^{22}\varphi_{,k}\varphi_{,k})] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Преобразование квадратичной формы в (3.1) к каноническому виду:

$$\begin{aligned} (K^{11}\theta\theta + 2K^{12}\theta\varphi + K^{22}\varphi\varphi) &= (K^{11} - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}})\theta\theta + K^{22}(\varphi + \frac{K^{12}}{K^{22}}\theta)(\varphi + \frac{K^{12}}{K^{22}}\theta) \\ (C^{11}\theta_{,k}\theta_{,k} + 2C^{12}\theta_{,k}\varphi_{,k} + C^{22}\varphi_{,k}\varphi_{,k}) &= (C^{11} - \frac{C^{12}C^{12}}{C^{22}})\theta_{,k}\theta_{,k} + C^{22}(\varphi_{,k} + \frac{C^{12}}{C^{22}}\theta_{,k})(\varphi_{,k} + \frac{C^{12}}{C^{22}}\theta_{,k}) \end{aligned}$$

Силовые факторы, как следствие формул Грина:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \frac{\partial U_v}{\partial \gamma_{ij}} = 2\mu\gamma_{ij} \\ \left\{ \begin{aligned} \sigma^\theta &= \frac{\partial U_v}{\partial \theta} = K^{11}\theta + K^{12}\varphi \\ \sigma^\varphi &= \frac{\partial U_v}{\partial \varphi} = K^{12}\theta + K^{22}\varphi \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} m_k^\theta &= \frac{\partial U_v}{\partial \theta_{,k}} = C^{11}\theta_{,k} + C^{12}\varphi_{,k} \\ m_k^\varphi &= \frac{\partial U_v}{\partial \varphi_{,k}} = C^{12}\theta_{,k} + C^{22}\varphi_{,k} \end{aligned} \right\} \quad (3.2) \end{aligned}$$

Полные напряжения σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda\theta + K^{12}\varphi)\delta_{ij} \quad (3.3)$$

Классические напряжения s_{ij} :

$$s_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial U_V}{\partial R_{i,jk}} \right) = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda\theta + K^{12}\varphi - C^{11}\Delta\theta - C^{12}\Delta\varphi)\delta_{ij} \quad (3.4)$$

Вариационное уравнение:

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_V \{ [\mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda\theta + K^{12}\varphi - C^{11}\Delta\theta - C^{12}\Delta\varphi)\delta_{ij}]_{,j} + P_i^V \} \delta R_i dV + \\ & - \int_V (K^{12}\theta + K^{22}\varphi - C^{12}\Delta\theta - C^{22}\Delta\varphi) \delta\varphi dV + \\ & + \int_F \{ [P_i^F - [\mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda\theta + K^{12}\varphi - C^{11}\Delta\theta - C^{12}\Delta\varphi)\delta_{ij}] n_j] \delta R_i - \\ & - (C^{11}\theta_{,k} + C^{12}\varphi_{,k}) n_k \delta\theta - (C^{12}\theta_{,k} + C^{22}\varphi_{,k}) n_k \delta\varphi \} dF = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

При решении динамических задач необходимо учитывать кинетическую энергию:

$$K = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_V (\rho \dot{R}_i \dot{R}_i + \rho_{\theta\theta} \dot{\theta} \dot{\theta} + 2\rho_{\theta\varphi} \dot{\theta} \dot{\varphi} + \rho_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} \dot{\varphi}) dV dt \quad (3.6)$$

Тогда Лагранжиан будем записывать в виде:

$$\begin{aligned} \delta L = & \delta A + \delta K - \delta U = \\ = & \int_{t_0}^{t_1} \int_V \{ [\mu\Delta R_i + (\mu + \lambda)\theta_{,i} + K^{12}\varphi_{,i} - C^{11}\Delta\theta_{,i} - C^{12}\Delta\varphi_{,i} - (\rho\ddot{R}_i + \rho_{\theta\theta}\ddot{\theta}_{,i} + \rho_{\theta\varphi}\ddot{\varphi}_{,i}) + P_i^V] \delta R_i - \\ & - (K^{12}\theta + K^{22}\varphi - C^{12}\Delta\theta - C^{22}\Delta\varphi + \rho_{\theta\varphi}\ddot{\theta} + \rho_{\varphi\varphi}\ddot{\varphi}) \delta\varphi dV dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_F \{ [P_i^F - [\mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + (\lambda\theta + K^{12}\varphi - C^{11}\Delta\theta - C^{12}\Delta\varphi + \rho_{\theta\theta}\ddot{\theta} + \rho_{\theta\varphi}\ddot{\varphi})\delta_{ij}] n_j] \delta R_i - \\ & - (C^{11}\theta_{,k} + C^{12}\varphi_{,k}) n_k \delta\theta - (C^{12}\theta_{,k} + C^{22}\varphi_{,k}) n_k \delta\varphi \} dF dt + \\ & + \int_V (\rho \dot{R}_i \delta \dot{R}_i + (\rho_{\theta\theta} \dot{\theta} + \rho_{\theta\varphi} \dot{\varphi}) \delta \dot{\theta} + (\rho_{\theta\varphi} \dot{\theta} + \rho_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}) \delta \dot{\varphi}) dV \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Уравнения движения приобретут вид:

$$\mu\Delta R_i + (\mu + \lambda)\theta_{,i} + K^{12}\varphi_{,i} - C^{11}\Delta\theta_{,i} - C^{12}\Delta\varphi_{,i} - (\rho\ddot{R}_i + \rho_{\theta\theta}\ddot{\theta}_{,i} + \rho_{\theta\varphi}\ddot{\varphi}_{,i}) + P_i^V = 0 \quad (3.8)$$

Уравнение пористости приобретет вид:

$$K^{12}\theta + K^{22}\varphi - C^{12}\Delta\theta - C^{22}\Delta\varphi + \rho_{\theta\varphi}\ddot{\theta} + \rho_{\varphi\varphi}\ddot{\varphi} = 0 \quad (3.9)$$

Таким образом, в рамках предложенного подхода сформулирована динамическая теория пористых сред, которая включает в себя одиннадцать независимых материальных параметров. Эти параметры можно разделить на две основные группы в зависимости от того, в каких физических процессах они участвуют — в стационарных (равновесных) или в динамических (инерционных) явлениях.

Первая группа, состоящая из семи физических постоянных, описывает свойства среды в стационарных состояниях, то есть, когда инерционными эффектами можно пренебречь. В эту группу входят следующие величины: классические упругие модули $\mu; K^{11}$, которые характеризуют сопротивление материала деформациям в рамках традиционной теории упругости; градиентные модули C^{11} , отражающие влияние пространственной неоднородности деформационного поля на напряженное состояние; «алгебраические» модули пористой среды K^{22} , которые описывают реакцию самой пористой структуры на изменение объемной доли пустот; градиентные модули пористой среды C^{22} , учитывающие пространственные изменения пористости; а также константы взаимодействия между непрерывной упругой матрицей и пористой структурой. Эти константы взаимодействия представлены двумя величинами: «алгебраической» константой K^{12} , которая описывает связь между деформациями матрицы и изменением пористости в локальной точке, и градиентной константой C^{12} , которая учитывает влияние градиентов деформации на градиенты пористости. Таким образом, семь стационарных постоянных полностью определяют потенциальную энергию системы и, следовательно, все равновесные конфигурации пористой среды.

Важно отметить, что предложенная классификация физических постоянных отражает фундаментальную структуру теории: стационарные параметры связаны с потенциальной энергией, а инерционные — с кинетической. При этом константы взаимодействия (как стационарные, так и инерционные) играют ключевую роль, поскольку именно они обеспечивают связанность двух подсистем — упругой

матрицы и пористой структуры. В отсутствие этих констант поля деформаций и пористости эволюционировали бы независимо друг от друга, что существенно обеднило бы физическую картину и не позволяло бы описывать многие эффекты, наблюдаемые в реальных пористых материалах.

В дальнейшем изложении, с целью упрощения анализа и выделения наиболее существенных эффектов, мы будем рассматривать случай, когда внешние объемные силы отсутствуют. Это допущение является стандартным для задач распространения упругих волн в неограниченных средах и позволяет сосредоточиться на собственных динамических свойствах материала, определяемых исключительно его внутренней структурой и материальными постоянными. При наличии внешних объемных сил (например, гравитационных или электромагнитных) их учет не представляет принципиальной сложности и сводится к добавлению соответствующих источников членов в правые части уравнений движения.

Далее будем рассматривать случай, когда внешние объёмные силы равны нулю.

3.1.1. Классическая теория упругости

Пусть все неклассические модули равны нулю. Уравнение пористости отсутствует, а уравнения движения имеют классический вид:

$$\mu \Delta R_i + (\mu + \lambda) \theta_{,i} - \rho \ddot{R}_i = 0 \quad (3.10)$$

Будем искать решение (3.10) в виде плоской волны:

$$R_i = R_i^0 e^{ik_r x_r + i\omega t} \quad k^2 = k_r k_r \quad (3.11)$$

Взяв ротор от векторного уравнения (3.10), с учетом (3.11) получим закон дисперсии для поперечных акустических волн:

$$[-\mu k^2 + \rho \omega^2] i(R_i^0 k_j - R_j^0 k_i) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \pm k \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.12)$$

Здесь $c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ - скорость поперечных акустических волн.

Взяв дивергенцию от векторного уравнения (3.10), с учетом (3.11) получим закон дисперсии для продольных акустических волн:

$$-(2\mu + \lambda)k^2 + \rho\omega^2 = 0 \rightarrow \omega^2 = \frac{(2\mu + \lambda)}{\rho}k^2 \rightarrow \omega = \pm k\sqrt{\frac{(2\mu + \lambda)}{\rho}} \quad (3.13)$$

Здесь $c_L = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}$ - скорость продольных акустических волн.

Обратим внимание на то, что в соответствии с (3.9) и (3.12) во всех моделях градиентной пористой среды скорость поперечных волн одна и та же, в то время как скорость продольных волн будет меняться от модели к модели.

3.1.2. «Алгебраически» пористая среда

Пусть градиентные модули $C^{11}; C^{12}; C^{22}$ равны нулю, а также равны нулю инерционные модули $\rho_{\theta\theta}; \rho_{\theta\varphi}$. Уравнения движения приобретает вид:

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda)\Delta\theta + K^{12}\Delta\varphi - \rho\ddot{\theta} &= 0 \\ K^{12}\theta + K^{22}\varphi + \rho_{\varphi\varphi}\ddot{\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

С учетом (3.11) получим:

$$\begin{cases} [-(2\mu + \lambda)k^2 + \rho\omega^2]\theta^0 - K^{12}k^2\varphi^0 = 0 \\ K^{12}\theta^0 + (K^{22} - \rho_{\varphi\varphi}\omega^2)\varphi^0 = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Нетривиальное решение для продольных волн существует, если определитель системы (3.15) равен нулю:

$$[-(2\mu + \lambda)k^2 + \rho\omega^2](K^{22} - \rho_{\varphi\varphi}\omega^2) + K^{12}K^{12}k^2 = 0 \quad (3.16)$$

Тогда закон дисперсии (3.16) приобретет вид:

$$\omega^4 - \left[\frac{(2\mu + \lambda)}{\rho}k^2 + \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \right] \omega^2 + \left(\frac{(2\mu + \lambda)}{\rho} \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} - \frac{K^{12}K^{12}}{\rho_{\varphi\varphi}\rho} \right) k^2 = 0 \quad (3.17)$$

Решением (3.4), является:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{(2\mu + \lambda)}{\rho} k^2 + \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \right] \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{(2\mu + \lambda)}{\rho} k^2 - \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \right]^2 + 4 \frac{K^{12} K^{12}}{\rho_{\varphi\varphi} \rho} k^2} \quad (3.18)$$

Обратим внимание на то, что корни (3.18) могут иметь разные знаки. Поэтому существование продольных волн для этой модели ограничено следующим множеством волновых чисел:

$$\left[\frac{(2\mu + \lambda)}{\rho} k^2 + \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \right] - \sqrt{\left[\frac{(2\mu + \lambda)}{\rho} k^2 - \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \right]^2 + 4 \frac{K^{12} K^{12}}{\rho_{\varphi\varphi} \rho} k^2} > 0 \quad (3.19)$$

3.1.3. Градиентная среда по Тупину.

Пусть модули, отражающие алгебраические свойства пористости $K^{12}; K^{22}$, градиентные модули $C^{12}; C^{22}$, отражающие градиентные свойства пористости равны нулю, а также равны нулю инерционные модули $\rho_{\varphi\varphi}; \rho_{\theta\theta}$. Уравнения движения приобретает вид:

$$(2\mu + \lambda)\Delta\theta - C^{11}\Delta\Delta\theta - \rho\ddot{\theta} - \rho_{\theta\theta}\Delta\ddot{\theta} = 0 \quad (3.20)$$

С учетом (3.11) получим:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{(2\mu + \lambda)}{(\rho - \rho_{\theta\theta} k^2)} k^2 + \frac{C^{11}}{(\rho - \rho_{\theta\theta} k^2)} k^4 \\ \omega^2 &= \frac{(2\mu + \lambda)}{\rho} k^2 \left[\frac{1}{(1 - \frac{\rho_{\theta\theta}}{\rho} k^2)} + k^2 \frac{C^{11}}{(1 - \frac{\rho_{\theta\theta}}{\rho} k^2)} \right] \\ \frac{\rho_{\theta\theta}}{\rho} &= 0.01, \quad \frac{\rho}{\rho_{\theta\theta}} < k^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Нетривиальное решение для продольных волн существует, если правая часть уравнения (3.21) больше нуля. Поэтому существование продольных волн для этой модели ограничено следующим множеством волновых чисел:

$$(\rho - \rho_{\theta\theta} k^2) > 0 \quad (3.22)$$

3.1.4. Градиентная среда по Миндлину.

Пусть модули $C^{11}; C^{12}$, отражающие градиентные свойства непрерывной среды равны нулю, а также равны нулю инерционные модули $\rho_{\theta\theta}; \rho_{\theta\varphi}$. Уравнения движения приобретает вид:

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda)\Delta\theta + K^{12}\Delta\varphi - \rho\ddot{\theta} &= 0 \\ K^{12}\theta + K^{22}\varphi - C^{22}\Delta\varphi + \rho_{\varphi\varphi}\ddot{\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

С учетом (3.11) получим:

$$\begin{cases} [-(2\mu + \lambda)k^2 + \rho\omega^2]\theta^0 - K^{12}k^2\varphi^0 = 0 \\ K^{12}\theta^0 + [K^{22} + C^{22}k^2 - \rho_{\varphi\varphi}\omega^2]\varphi^0 = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Нетривиальное решение для продольных волн существует, если определитель системы (3.24) равен нулю:

$$\begin{aligned} & [-(2\mu + \lambda)k^2 + \rho\omega^2][K^{22} + C^{22}k^2 - \rho_{\varphi\varphi}\omega^2] + K^{12}K^{12}k^2 = 0 \\ & \omega^4 - \left[\frac{(2\mu + \lambda)}{\rho}k^2 + \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} + \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}}k^2 \right]\omega^2 + \left\{ \frac{[(2\mu + \lambda)K^{22} - K^{12}K^{12}]}{\rho\rho_{\varphi\varphi}}k^2 + \frac{(2\mu + \lambda)C^{22}}{\rho\rho_{\varphi\varphi}}k^4 \right\} = 0 \\ & \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{(2\mu + \lambda)}{\rho}k^2 + \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} + \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}}k^2 \right] \pm \\ & \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{(2\mu + \lambda)}{\rho}k^2 + \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} + \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}}k^2 \right]^2 - 4 \left\{ \frac{[(2\mu + \lambda)K^{22} - K^{12}K^{12}]}{\rho\rho_{\varphi\varphi}}k^2 + \frac{(2\mu + \lambda)C^{22}}{\rho\rho_{\varphi\varphi}}k^4 \right\}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Нетривиальное решение для продольных волн этой модели существует, если дискриминант в (3.25) больше нуля. Поэтому существование продольных волн для этой модели ограничено следующим множеством волновых чисел:

$$\left[\frac{(2\mu + \lambda)}{\rho}k^2 + \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} + \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}}k^2 \right]^2 - 4 \left\{ \frac{[(2\mu + \lambda)K^{22} - K^{12}K^{12}]}{\rho\rho_{\varphi\varphi}}k^2 + \frac{(2\mu + \lambda)C^{22}}{\rho\rho_{\varphi\varphi}}k^4 \right\} > 0 \quad (3.26)$$

3.1.5. Классификация динамических взаимодействий

Динамическое взаимодействие между полем совместного и несовместного изменения объема осуществляется по трем различным каналам: в кинетической энергии, благодаря наличию билинейного слагаемого $\rho_{\theta\varphi}\dot{\theta}\dot{\varphi}$ с константой

взаимодействия $\rho_{\theta\varphi}$; в «алгебраической» части потенциальной энергии, благодаря наличию билинейного слагаемого $K^{12}\theta\varphi$ с константой взаимодействия K^{12} и, наконец, в градиентной части потенциальной энергии, благодаря наличию билинейного слагаемого $C^{12}\theta_{,k}\varphi_{,k}$ с константой взаимодействия C^{12} .

Случай отсутствия всех трех констант взаимодействия

В отсутствие всех трех констант взаимодействия, поле пористости в соответствии с (3.9) определяется уравнением:

$$K^{22}\varphi - C^{22}\Delta\varphi + \rho_{\varphi\varphi}\ddot{\varphi} = 0 \quad (3.27)$$

Из (3.27) вытекает факт существования волн пористости с характерной скоростью распространения:

$$c_{\varphi} = \sqrt{\frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}}} \quad (3.28)$$

Следует обратить внимание на то, что физические параметры $C^{22}; \rho_{\varphi\varphi}$ отличаются по размерности от классических параметров $(2\mu + \lambda); \rho$ на размерность квадрата длины, тем не менее, их отношение, как и отношение классических параметров, дает квадрат характерной скорости.

Кроме того, из (3.27) вытекает, что невозмущенные волны пористости имеют дисперсию:

$$\omega = c_{\varphi}k\sqrt{1 + \frac{K^{22}}{C^{22}k^2}} \quad (3.29)$$

Таким образом, (3.28) определяет невозмущенную скорость волны пористости, а соотношение (3.29) определяет характерный размер пор d :

$$d = \sqrt{\frac{C^{22}}{K^{22}}} \quad (3.30)$$

Случай отсутствия двух из трех констант взаимодействия

Если из трех констант взаимодействия хотя бы две не равны нулю, появляются ещё три частные модели.

Случай, когда $\rho_{\theta\varphi} = 0; C^{12} = 0$.

Система уравнений движения в этом случае принимает вид:

$$\begin{cases} (2\mu + \lambda)\Delta\theta - C^{11}\Delta\Delta\theta - \rho\ddot{\theta} - \rho_{\theta\theta}\Delta\ddot{\theta} + K^{12}\Delta\varphi = 0 \\ K^{12}\theta + K^{22}\varphi - C^{22}\Delta\varphi + \rho_{\varphi\varphi}\ddot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

Экспоненциальная постановка дает закон дисперсии:

$$[-k^2(2\mu + \lambda) - C^{11}k^4 + \rho\omega^2 + \rho_{\theta\theta}k^2\omega^2][K^{22} + C^{22}k^2 - \rho_{\varphi\varphi}\omega^2] + K^{12}K^{12}k^2 = 0 \quad (3.32)$$

Решая (6.2.2) относительно круговой частоты, получим:

$$\begin{aligned} &(\rho_{\varphi\varphi}\rho + \rho_{\varphi\varphi}\rho_{\theta\theta}k^2)\omega^4 + \\ &-[\rho K^{22} + (\rho C^{22} + \rho_{\varphi\varphi}(2\mu + \lambda) + \rho_{\theta\theta}K^{22})k^2 + (\rho_{\theta\theta}C^{22} + \rho_{\varphi\varphi}C^{11})k^4]\omega^2 + \\ &+((2\mu + \lambda)K^{22} - K^{12}K^{12})k^2 + (C^{11}K^{22} + C^{22}(2\mu + \lambda))k^4 + C^{11}C^{22}k^6 = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ведём обозначения:

$$\begin{cases} (\rho_{\varphi\varphi}\rho + \rho_{\varphi\varphi}\rho_{\theta\theta}k^2) = A \\ [\rho K^{22} + (\rho C^{22} + \rho_{\varphi\varphi}(2\mu + \lambda) + \rho_{\theta\theta}K^{22})k^2 + (\rho_{\theta\theta}C^{22} + \rho_{\varphi\varphi}C^{11})k^4] = A(\omega_1^2 + \omega_2^2) \\ ((2\mu + \lambda)K^{22} - K^{12}K^{12})k^2 + (C^{11}K^{22} + C^{22}(2\mu + \lambda))k^4 + C^{11}C^{22}k^6 = A\omega_1^2\omega_2^2 \end{cases} \quad (3.34)$$

Здесь $\omega_1^2; \omega_2^2$ - положительные корни биквадратного уравнения (3.33). Эти корни являются функциями квадрата волнового числа k^2 . В зависимости от величины k^2 , можно определить два характерных диапазона волновых чисел: длинноволновое, при $k^2 \ll d^{-2}$, и коротковолновое, при $k^2 \gg d^{-2}$.

Длинноволновое приближение дает:

$$\omega^2 = \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \quad (3.35)$$

Таким образом, длинноволновое приближение приводит к существованию асимптотики:

$$\lim_{kd \rightarrow 0} \omega^2 = \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \quad (3.36)$$

Коротковолновое приближение дает:

$$\omega^4 - \left(\frac{C^{11}}{\rho_{\theta\theta}} + \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \right) k^2 \omega^2 + \frac{C^{11}}{\rho_{\theta\theta}} \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} k^4 = 0 \quad (3.37)$$

Коротковолновое приближение приводит к существованию двух асимптотик:

$$\lim_{kd \rightarrow \infty} \omega^2 = \frac{C^{11}}{\rho_{\theta\theta}} k^2 \quad (3.38)$$

Соотношение (3.36) дает возможность определить

$$\lim_{kd \rightarrow \infty} \omega^2 = \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} k^2 \quad (3.39)$$

Соотношения (3.36) и (3.37) позволяют утверждать, что в коротковолновом пределе волны объёмного сжатия и пористости не возмущают друг друга и не имеют дисперсии.

В общем случае область определения корней (3.33) определяется соответствующим решением неравенства, для которого дискриминант уравнения (3.33), являющийся полиномом четвертой степени по k^2 имеет неотрицательное значение:

$$\begin{aligned} & [\rho K^{22} + (\rho C^{22} + \rho_{\varphi\varphi}(2\mu + \lambda) + \rho_{\theta\theta} K^{22})k^2 + (\rho_{\theta\theta} C^{22} + \rho_{\varphi\varphi} C^{11})k^4]^2 - \\ & - 4(\rho_{\varphi\varphi} \rho + \rho_{\varphi\varphi} \rho_{\theta\theta} k^2)[((2\mu + \lambda)K^{22} - K^{12}K^{12})k^2 + \\ & + (C^{11}K^{22} + C^{22}(2\mu + \lambda))k^4 + C^{11}C^{22}k^6] \geq 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

С учетом того, что коротковолновое приближение существует, можно утверждать, что на интервале $0 \leq (kd)^2 \leq (k_1 d)^2$ корни уравнения (3.33) существуют, на интервале $(k_1 d)^2 < (kd)^2 < (k_2 d)^2$ имеет место «запирание», т.е. пористая среда не прозрачна для этих длин волн, на интервале $(k_2 d)^2 \leq (kd)^2 \leq (k_3 d)^2$ решение корни уравнения (3.33) существуют, на интервале $(k_3 d)^2 < (kd)^2 < (k_4 d)^2$ имеет место

«запирание», и, наконец, на интервале $(k_4 d)^2 < (kd)^2 < \infty$ по-прежнему корни уравнения (3.33) существуют с соответствующей асимптотикой на бесконечности.

Случай, когда $\rho_{\theta\varphi} = 0; K^{12} = 0$.

Система уравнений движения в этом случае принимает вид:

$$\begin{cases} (2\mu + \lambda)\Delta\theta - C^{11}\Delta\Delta\theta - \rho\ddot{\theta} - \rho_{\theta\theta}\Delta\ddot{\theta} - C^{12}\Delta\Delta\varphi = 0 \\ -C^{12}\Delta\theta + K^{22}\varphi - C^{22}\Delta\varphi + \rho_{\varphi\varphi}\ddot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

Экспоненциальная постановка дает закон дисперсии:

$$[-(2\mu + \lambda)k^2 - C^{11}k^4 + \rho\omega^2 - \rho_{\theta\theta}k^2\omega^2][K^{22} + C^{22}k^2 - \rho_{\varphi\varphi}\omega^2] + C^{12}C^{12}k^6 = 0 \quad (3.42)$$

Решая (3.42) относительно круговой частоты, получим:

$$\begin{aligned} & (-\rho_{\varphi\varphi}\rho + \rho_{\varphi\varphi}\rho_{\theta\theta}k^2)\omega^4 - \\ & + [\rho K^{22} + (-\rho_{\theta\theta}K^{22} + \rho C^{22} + \rho_{\varphi\varphi}(2\mu + \lambda))k^2 + (\rho_{\varphi\varphi}C^{11} - \rho_{\theta\theta}C^{22})k^4]\omega^2 - \\ & - [(2\mu + \lambda)K^{22}k^2 + (C^{11}K^{22} + (2\mu + \lambda)C^{22})k^4 + (C^{11}C^{22} - C^{12}C^{12})k^6] = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Ведем обозначения:

$$\begin{cases} (-\rho_{\varphi\varphi}\rho + \rho_{\varphi\varphi}\rho_{\theta\theta}k^2) = A \\ [\rho K^{22} + (\rho C^{22} + \rho_{\varphi\varphi}(2\mu + \lambda) - \rho_{\theta\theta}K^{22})k^2 + (\rho_{\varphi\varphi}C^{11} - \rho_{\theta\theta}C^{22})k^4] = A(\omega_1^2 + \omega_2^2) \\ -[(2\mu + \lambda)K^{22}k^2 + (C^{11}K^{22} + C^{22}(2\mu + \lambda))k^4 + (C^{11}C^{22} - C^{12}C^{12})k^6] = A\omega_1^2\omega_2^2 \end{cases} \quad (3.44)$$

Здесь $\omega_1^2; \omega_2^2$ - положительные корни биквадратного уравнения (3.43). Эти корни являются функциями квадрата волнового числа k^2 . В зависимости от величины k^2 , можно определить два характерных диапазона волновых чисел: длинноволновое, при $(kd)^2 \ll 1$, и коротковолновое, при $(kd)^2 \gg 1$.

Длинноволновое приближение дает:

$$\omega^2 = \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \quad (3.45)$$

Таким образом, длинноволновое приближение совпадает с (3.35) и приводит к существованию асимптотики той же асимптотики (3.36):

$$\lim_{kd \rightarrow 0} \omega^2 = \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \quad (3.46)$$

Коротковолновое приближение дает:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k^2}{2} \left[-\left(\frac{C^{11}}{\rho_{\theta\theta}} - \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{C^{11}}{\rho_{\theta\theta}} + \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \right)^2 - 4 \frac{C^{12}C^{12}}{\rho_{\varphi\varphi}\rho_{\theta\theta}}} \right] \quad (3.47)$$

В отличие от Случая-6.2.1, даже асимптотически волны сжатия и пористости не разделяются, и комбинированная волна может иметь только одну скорость распространения:

$$\lim_{kd \rightarrow \infty} \omega^2 = k^2 \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{C^{11}}{\rho_{\theta\theta}} + \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \right)^2 - 4 \frac{C^{12}C^{12}}{\rho_{\varphi\varphi}\rho_{\theta\theta}}} - \left(\frac{C^{11}}{\rho_{\theta\theta}} - \frac{C^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \right) \right] \quad (3.48)$$

Следует отметить, что в асимптотическом приближении (3.48) комбинированная волна не имеет дисперсии. В общем случае дискриминант биквадратного уравнения (3.43), является полиномом четвертой степени по k^2 и должен иметь неотрицательное значение. Корни этого полинома определяют интервалы, на которых решение (3.43) существует, а на которых – нет. Эти интервалы определяются четырьмя положительными корнями полинома четвертой степени $k_1^2 < k_2^2 < k_3^2 < k_4^2$, определяющего дискриминант (3.43):

$$\begin{aligned} & [\rho K^{22} + (-\rho_{\theta\theta} K^{22} + \rho C^{22} + \rho_{\varphi\varphi} (2\mu + \lambda)) k^2 + (\rho_{\varphi\varphi} C^{11} - \rho_{\theta\theta} C^{22}) k^4]^2 + \\ & + 4(-\rho_{\varphi\varphi} \rho + \rho_{\varphi\varphi} \rho_{\theta\theta} k^2) [(2\mu + \lambda) K^{22} k^2 + (C^{11} K^{22} + (2\mu + \lambda) C^{22}) k^4 + \\ & + (C^{11} C^{22} - C^{12} C^{12}) k^6] = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

С учетом того, что коротковолновое приближение существует, можно утверждать, что на интервале $0 \leq (kd)^2 \leq (k_1 d)^2$ корни уравнения (3.43) существуют, на интервале $(k_1 d)^2 < (kd)^2 < (k_2 d)^2$ имеет место «запирание», т.е. пористая среда не прозрачна для этих длин волн, на интервале $(k_2 d)^2 \leq (kd)^2 \leq (k_3 d)^2$ корни уравнения (3.43) существуют, на интервале $(k_3 d)^2 < (kd)^2 < (k_4 d)^2$ имеет место «запирание», и, наконец, на интервале $(k_4 d)^2 < (kd)^2 < \infty$ по-прежнему корни уравнения (3.43) существуют с соответствующей асимптотикой на бесконечности.

Случай, когда $K^{12} = 0; C^{12} = 0$.

Система уравнений движения в этом случае принимает вид:

$$(2\mu + \lambda)\Delta\theta - C^{11}\Delta\Delta\theta - \rho\ddot{\theta} - \rho_{\theta\theta}\Delta\ddot{\theta} - \rho_{\theta\varphi}\Delta\ddot{\varphi} = 0 \quad (3.50)$$

$$\rho_{\theta\varphi}\ddot{\theta} + K^{22}\varphi - C^{22}\Delta\varphi + \rho_{\varphi\varphi}\ddot{\varphi} = 0 \quad (3.51)$$

Экспоненциальная постановка дает закон дисперсии:

$$[-(2\mu + \lambda)k^2 - C^{11}k^4 + \rho\omega^2 - \rho_{\theta\theta}k^2\omega^2][K^{22} + C^{22}k^2 - \rho_{\varphi\varphi}\omega^2] - \rho_{\theta\varphi}\rho_{\theta\varphi}k^2\omega^4 = 0 \quad (3.52)$$

Решая (3.52) относительно круговой частоты, получим:

$$\begin{aligned} &[(\rho_{\theta\theta}\rho_{\varphi\varphi} - \rho_{\theta\varphi}\rho_{\theta\varphi})k^2 - \rho_{\varphi\varphi}\rho]\omega^4 - \\ &+ [\rho K^{22} + (-\rho_{\theta\theta}K^{22} + \rho C^{22} + \rho_{\varphi\varphi}(2\mu + \lambda))k^2 + (\rho_{\varphi\varphi}C^{11} - \rho_{\theta\theta}C^{22})k^4]\omega^2 + \\ &+ [-(2\mu + \lambda)K^{22}k^2 - (C^{11}K^{22} + (2\mu + \lambda)C^{22})k^4 - C^{11}C^{22}k^6] = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ведём обозначения:

$$\begin{aligned} &[(\rho_{\theta\theta}\rho_{\varphi\varphi} - \rho_{\theta\varphi}\rho_{\theta\varphi})k^2 - \rho_{\varphi\varphi}\rho] = A \\ &[\rho K^{22} + (-\rho_{\theta\theta}K^{22} + \rho C^{22} + \rho_{\varphi\varphi}(2\mu + \lambda))k^2 + (\rho_{\varphi\varphi}C^{11} - \rho_{\theta\theta}C^{22})k^4] = A(\omega_1^2 + \omega_2^2) \\ &[-(2\mu + \lambda)K^{22}k^2 - (C^{11}K^{22} + (2\mu + \lambda)C^{22})k^4 - C^{11}C^{22}k^6] = A\omega_1^2\omega_2^2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Здесь $\omega_1^2; \omega_2^2$ - положительные корни биквадратного уравнения (3.53). Эти корни являются функциями квадрата волнового числа k^2 . В зависимости от величины k^2 , можно определить два характерных диапазона волновых чисел: длинноволновое, при $(kd)^2 \ll 1$, и коротковолновое, при $(kd)^2 \gg 1$.

Длинноволновое приближение дает:

$$\omega^2 = \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}} \quad (3.55)$$

Таким образом, длинноволновое приближение приводит к существованию асимптотики:

$$\lim_{kd \rightarrow 0} \omega^2 = \frac{K^{22}}{\rho_{\varphi\varphi}}$$

Она такая же, как и в двух предыдущих случаях.

Коротковолновое приближение дает:

$$\omega_{1,2}^2 = k^2 \frac{-(\rho_{\varphi\varphi} C^{11} - \rho_{\theta\theta} C^{22}) \pm \sqrt{(\rho_{\varphi\varphi} C^{11} + \rho_{\theta\theta} C^{22})^2 - 4\rho_{\theta\varphi} \rho_{\varphi\theta} C^{11} C^{22}}}{2(\rho_{\theta\theta} \rho_{\varphi\varphi} - \rho_{\theta\varphi} \rho_{\varphi\theta})} \quad (3.56)$$

Следует отметить, что в асимптотическом приближении комбинированная волна не имеет дисперсии. В общем случае дискриминант биквадратного уравнения (3.53), является полиномом четвертой степени по k^2 и должен иметь неотрицательное значение. Корни этого полинома определяют интервалы, на которых решение (3.56) существует, а на которых – нет. Эти интервалы определяются четырьмя положительными корнями полинома четвертой степени $k_1^2 < k_2^2 < k_3^2 < k_4^2$, определяющего дискриминант (3.43):

$$\begin{aligned} & [\rho K^{22} + (-\rho_{\theta\theta} K^{22} + \rho C^{22} + \rho_{\varphi\varphi} (2\mu + \lambda))k^2 + (\rho_{\varphi\varphi} C^{11} - \rho_{\theta\theta} C^{22})k^4]^2 - \\ & - 4[(\rho_{\theta\theta} \rho_{\varphi\varphi} - \rho_{\theta\varphi} \rho_{\varphi\theta})k^2 - \rho_{\varphi\varphi} \rho][-(2\mu + \lambda)K^{22}k^2 - \\ & - (C^{11} K^{22} + (2\mu + \lambda)C^{22})k^4 - C^{11} C^{22} k^6] \geq 0 \end{aligned}$$

С учетом того, что коротковолновое приближение существует, можно утверждать, что на интервале $0 \leq (kd)^2 \leq (k_1 d)^2$ корни уравнения (3.53) существуют, на интервале $(k_1 d)^2 < (kd)^2 < (k_2 d)^2$ имеет место «запирание», т.е. пористая среда не прозрачна для этих длин волн, на интервале $(k_2 d)^2 \leq (kd)^2 \leq (k_3 d)^2$ корни уравнения (3.53) существуют, на интервале $(k_3 d)^2 < (kd)^2 < (k_4 d)^2$ имеет место «запирание», и, наконец, на интервале $(k_4 d)^2 < (kd)^2 < \infty$ по-прежнему корни уравнения (3.53) существуют с соответствующей асимптотикой на бесконечности.

Случай отсутствия одной из трех констант взаимодействия

Если из трех констант взаимодействия хотя бы одна не равна нулю, появляются три частных модели

Случай, когда $\rho_{\theta\varphi} = 0$.

$$\begin{cases} (2\mu + \lambda)\Delta\theta - C^{11}\Delta\Delta\theta - \rho\ddot{\theta} - \rho_{\theta\theta}\Delta\ddot{\theta} + K^{12}\Delta\varphi - C^{12}\Delta\Delta\varphi = 0 \\ K^{12}\theta - C^{12}\Delta\theta + K^{22}\varphi - C^{22}\Delta\varphi + \rho_{\varphi\varphi}\ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Случай, когда $K^{12} = 0$.

$$\begin{cases} (2\mu + \lambda)\Delta\theta - C^{11}\Delta\Delta\theta - \rho\ddot{\theta} - \rho_{\theta\theta}\Delta\ddot{\theta} - C^{12}\Delta\Delta\varphi - \rho_{\theta\varphi}\Delta\ddot{\varphi} = 0 \\ -C^{12}\Delta\theta + \rho_{\theta\varphi}\ddot{\theta} + K^{22}\varphi - C^{22}\Delta\varphi + \rho_{\varphi\varphi}\ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Случай, когда $C^{12} = 0$.

$$\begin{cases} (2\mu + \lambda)\Delta\theta - C^{11}\Delta\Delta\theta - \rho\ddot{\theta} - \rho_{\theta\theta}\Delta\ddot{\theta} + K^{12}\Delta\varphi - \rho_{\theta\varphi}\Delta\ddot{\varphi} = 0 \\ K^{12}\theta + \rho_{\theta\varphi}\ddot{\theta} + K^{22}\varphi - C^{22}\Delta\varphi + \rho_{\varphi\varphi}\ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

В предыдущих разделах была сформулирована общая динамическая теория градиентных пористых сред, включающая одиннадцать физических постоянных, три канала взаимодействия между полем деформаций и полем пористости, а также волновые эффекты, такие как дисперсия и «запирание» на определённых волновых числах. Однако для практического применения в расчётах тонкостенных конструкций, работающих в режиме изгиба, трёхмерная постановка избыточна.

3.2. Динамическая задача чистого изгиба градиентного пористого стержня

Данная глава посвящена построению динамического продолжения статической вариационной модели градиентного пористого стержня. Принципиально важно, что динамическая постановка не получается простым добавлением одного инерционного члена к статическому уравнению. Динамика должна строиться последовательно: сначала фиксируется кинематика, затем из неё выводятся скорости, после чего формируется квадратичная форма кинетической энергии. Только на этой основе корректно записывается функционал Даламбера и выводятся уравнения движения.

В дальнейшем используются две независимые осевые функции: прогиб и пористость. Величины, зависящие от поперечной координаты, задаются через эти осевые функции и тем самым сохраняют связь с геометрией чистого изгиба.

3.2.1. Кинематика, скорости и пятичленная кинетическая энергия

Кинематическая гипотеза. В качестве исходной принимается кинематическая гипотеза чистого изгиба, согласованная со статической постановкой. Продольное перемещение, поперечный прогиб, поле кривизны и поле пористости задаются соотношениями

$$u(x, z, t) = -z w'(x, t), \quad (3.57)$$

$$w(x, z, t) = w(x, t), \quad (3.58)$$

$$\theta(x, z, t) = -z w''(x, t), \quad (3.59)$$

$$\varphi(x, z, t) = z \varphi(x, t). \quad (3.60)$$

Формулы (3.57)–(3.60) задают не только геометрию деформирования, но и набор динамически активных величин. Именно поэтому кинетическая энергия

далее не постулируется произвольно, а строится как квадратичная форма по скоростям, вытекающим из этой кинематики.

Скорости. Дифференцируя (3.57)-(3.60) по времени, получаем

$$\dot{u}(x, z, t) = -z \dot{w}'(x, t), \quad (3.61)$$

$$\dot{w}(x, z, t) = \dot{w}(x, t), \quad (3.62)$$

$$\dot{\theta}(x, z, t) = -z \dot{w}''(x, t), \quad (3.63)$$

$$\dot{\phi}(x, z, t) = z \dot{\phi}(x, t). \quad (3.64)$$

Из (3.61)-(3.64) видно, что динамика определяется не только скоростью прогиба $\dot{w}$, но также скоростями $\dot{w}'$, $\dot{w}''$ и $\dot{\phi}$. Следовательно, кинетическая энергия должна быть полной квадратичной формой по этим скоростям.

Кинетическая энергия. Плотность кинетической энергии принимается в виде

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \left[m_0 \dot{w}^2 + m_1 (\dot{w}')^2 + \rho_2 J (\dot{w}'')^2 + 2\rho_3 J \dot{w}'' \dot{\phi} + \rho_4 J \dot{\phi}^2 \right]. \quad (3.65)$$

Полная кинетическая энергия стержня равна

$$T = \int_0^l \mathcal{T} dx. \quad (3.66)$$

Геометрический смысл инерционных коэффициентов. Коэффициенты в 3.65 имеют не формальный, а геометрически определённый смысл. Классические инерционные коэффициенты задаются как

$$m_0 = \rho A, \quad (3.67)$$

$$m_1 = \rho J, \quad (3.68)$$

где ρ — плотность материала, A — площадь поперечного сечения, J — момент инерции поперечного сечения относительно его центра тяжести.

Член $m_0 \dot{w}^2$ в (3.65) описывает поперечную инерцию средней линии стержня и масштабируется площадью сечения A . Член $m_1 (\dot{w}')^2$ связан с продольной инерцией, возникающей из распределения продольных скоростей $\dot{u} = -z\dot{w}'$. Действительно, интегрирование квадрата продольной скорости по сечению приводит к множителю

$$\int_A z^2 dA = J, \quad (3.69)$$

что и объясняет появление коэффициента 3.68.

Остальные инерционные коэффициенты пропорциональны моменту инерции J , но имеют собственные неклассические плотности:

$$\rho_2 J = \rho_2 J, \quad \rho_3 J = \rho_3 J, \quad \rho_4 J = \rho_4 J. \quad (3.70)$$

Коэффициент $\rho_2 J$ задаёт инерцию кривизны, поскольку поле $\theta = -zw''$ является динамически активным. Коэффициент $\rho_3 J$ описывает связанную инерцию кривизны и пористости. Коэффициент $\rho_4 J$ задаёт собственную инерцию пористости.

Таким образом, кинетическая энергия (3.65) включают составляющие, соответствующие поперечной инерции средней линии, продольной инерции изгибаемого сечения, инерции кривизны, связанной инерции кривизны и пористости, а также собственной инерции пористости.

Вся геометрия поперечного сечения входит в динамическую модель через A и J . Поэтому удобно ввести радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}}. \quad (3.71)$$

Формула (3.71) показывает, что геометрическая часть динамической модели может быть сведена к одному характерному масштабу длины. Это будет важно при дальнейшем безразмерном анализе и интерпретации вкладов m_1 , $\rho_2 J$, $\rho_3 J$, $\rho_4 J$.

3.2.2. Потенциальная энергия и функционал Даламбера

Потенциальная энергия. Плотность потенциальной энергии наследуется из статической градиентно-пористой модели и имеет вид

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \left[EJ (w'')^2 + 2K_{12} J \phi w'' + K_{22} J \phi^2 + C_{11} J (w''')^2 + 2C_{12} J w''' \phi' + C_{22} J (\phi')^2 \right]. \quad (3.72)$$

Полная потенциальная энергия равна

$$U = \int_0^l \mathcal{U} dx. \quad (3.73)$$

Первые три слагаемых в (3.72) образуют локальную часть энергии. Последние три слагаемых образуют градиентную часть. Перекрёстные члены $2K_{12} J \phi w''$ и $2C_{12} J w''' \phi'$ отвечают за связь изгибной подсистемы и пористости.

Виртуальная работа внешних сил. Виртуальная работа внешних сил записывается в виде

$$\delta A = \int_0^l q(x, t) \delta w dx + \left[M \delta w' + Q \delta w + N_\phi^{\text{ext}} \delta \phi \right]_0^l. \quad (3.74)$$

Здесь $q(x, t)$ — распределённая поперечная нагрузка, M — внешний изгибающий момент, Q — внешняя поперечная сила, N_ϕ^{ext} — внешнее усилие, сопряжённое с вариацией пористости.

Функционал Даламбера. Динамический вариационный объект задачи задаётся как

$$\mathcal{D}[w, \phi] = U - T - A. \quad (3.75)$$

Стационарность функционала (3.75) эквивалентна условию

$$\delta \mathcal{D} = 0, \quad (3.76)$$

Равенство 3.7 может быть записано в виде

$$\delta A + \delta T - \delta U = 0. \quad (3.77)$$

Именно из (3.77) далее выводятся уравнения движения и естественные динамические граничные условия.

Вариация кинетической энергии

Вариация кинетической энергии 3.65, 3.66 имеет вид

$$\begin{aligned} \delta T = & \int_0^l [m_0 \dot{w} \delta \dot{w} + m_1 \dot{w}' \delta \dot{w}' + \rho_2 J \dot{w}'' \delta \dot{w}''] dx \\ & + \int_0^l [\rho_3 J \dot{\phi} \delta \dot{w}'' + \rho_3 J \dot{w}'' \delta \dot{\phi} + \rho_4 J \dot{\phi} \delta \dot{\phi}] dx. \end{aligned} \quad (3.78)$$

После интегрирования по частям по времени и затем по координате получаем

$$\begin{aligned} \delta T = & \int_0^l [-m_0 \ddot{w} + m_1 \ddot{w}'' - \rho_2 J \ddot{w}^{(4)} - \rho_3 J \ddot{\phi}'] \delta w dx \\ & + \int_0^l [-\rho_3 J \ddot{w}'' - \rho_4 J \ddot{\phi}] \delta \phi dx + \delta T_\partial. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Формула (3.79) показывает, что инерционная часть модели содержит не только обычный оператор $\ddot{w}$, но и пространственно-инерционные механизмы $\ddot{w}''$, $\ddot{w}^{(4)}$, $\ddot{\phi}''$ и также инерционную связь $\ddot{w}''$ с уравнением пористости.

$$\delta T_\partial^t = \left[\int_0^l (m_0 \dot{w} \delta w + m_1 \dot{w}' \delta w' + \rho_2 J \dot{w}'' \delta w'' + \rho_3 J \dot{\phi} \delta w'' + \rho_3 J \dot{w}'' \delta \phi + \rho_4 J \dot{\phi} \delta \phi) dx \right]_{t_0}^{t_1}$$

- $m_0 \dot{w} \delta w$ — стандартный инерционный член поперечного движения.
- $m_1 \dot{w}' \delta w'$ — появляется из-за наличия $\dot{w}'$ в кинетической энергии.
- $\rho_2 J \dot{w}'' \delta w''$ — инерция кривизны, порождает граничное условие высшего порядка.
- $\rho_3 J \dot{\phi} \delta w''$ и $\rho_3 J \dot{w}'' \delta \phi$ — взаимные инерционные члены, связывающие поле прогиба и поле пористости.
- $\rho_4 J \dot{\phi} \delta \phi$ — собственная инерция пористости.

Этот член обнуляется при стандартных начальных условиях, фиксирующих w и пористость ϕ в моменты t_0 и t_1 . Для задачи Коши (моделирование переходных процессов) задаются:

$$w(x, t_0) = w_0(x), \dot{w}(x, t_0) = v_0(x), \varphi(x, t_0) = \varphi_0(x), \dot{\varphi}(x, t_0) = \psi_0(x)$$

Граничные члены по координате δT_δ^x имеют вид:

$$\delta T_\delta^x = \left[m_1 \dot{w}' \delta w - \rho_2 J \dot{w}''' \delta w + \rho_2 J \dot{w}'' \delta w' - \rho_3 J \dot{\varphi}' \delta w + \rho_3 J \dot{\varphi}' \delta w' + \rho_3 J \dot{w}'' \delta \varphi \right]_0^l$$

Эти слагаемые порождают естественные динамические граничные условия:

Свободный конец: обнуляются коэффициенты при независимых вариациях

Это дополнит краевую задачу «начальными» условиями (временными) и позволит использовать полученную математическую постановку для моделирования переходных динамических процессов.

Вариация потенциальной энергии

Для потенциальной энергии 3.73 имеем

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_0^l [EJw'' \delta w'' + K_{12} J \varphi \delta w'' + K_{12} J w'' \delta \varphi + K_{22} J \varphi \delta \varphi] dx \\ & + \int_0^l [C_{11} J w''' \delta w''' + C_{12} J \varphi' \delta w''' + C_{12} J w''' \delta \varphi' + C_{22} J \varphi' \delta \varphi'] dx. \end{aligned} \quad (3.80)$$

После интегрирования по частям получаем систему разрешающих уравнений движения граничные условия

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_0^l [EJw^{(4)} + K_{12} J \varphi'' - C_{11} J w^{(6)} - C_{12} J \varphi^{(4)}] \delta w dx \\ & + \int_0^l [K_{22} J \varphi + K_{12} J w'' - C_{12} J w^{(4)} - C_{22} J \varphi''] \delta \varphi dx + \delta U_\delta. \end{aligned} \quad (3.81)$$

3.2.3. Уравнения Эйлера–Лагранжа динамической задачи

Подставляя 3.74, (3.79) и (3.25) в условие (3.21), а затем используя независимость вариаций δw и $\delta \varphi$, получаем систему уравнений движения:

$$EJw^{(4)} + K_{12} J \varphi'' - C_{11} J w^{(6)} - C_{12} J \varphi^{(4)} + m_0 \ddot{w} - m_1 \ddot{w}'' + \rho_2 J \ddot{w}^{(4)} + \rho_3 J \ddot{\varphi}'' = q. \quad (3.82)$$

$$K_{22} J \varphi + K_{12} J w'' - C_{12} J w^{(4)} - C_{22} J \varphi'' + \rho_3 J \ddot{w}'' + \rho_4 J \ddot{\varphi} = 0. \quad (3.83)$$

Система (3.82)-(3.83) является динамическим аналогом статической двухполевой модели. Первое уравнение описывает баланс изгибной подсистемы с учётом инерции, градиентности и связи с пористостью. Второе уравнение задаёт динамическое равновесие пористости.

3.2.4. Частные модели

Частные модели возникают не из новой кинематики, а из последовательного зануления отдельных модулей в энергиях 3.65 и 3.72. Поэтому все они являются вырожденными режимами одной вариационной схемы.

Дефектный стержень без моментно-градиентных модулей.

Пусть $C_{11} = 0$, $C_{12} = 0$, $\rho_2 J = 0$, $\rho_3 J = 0$.

Тогда система (3.82)-(3.83) принимает вид

$$EJw^{(4)} + K_{12}J\varphi'' + m_0\ddot{w} - m_1\ddot{w}'' = q,$$

$$K_{22}J\varphi + K_{12}Jw'' - C_{22}J\varphi'' + \rho_4J\ddot{\varphi} = 0.$$

Бездефектная градиентная среда.

Если занулить все коэффициенты при φ и его производных,

$$K_{12} = K_{22} = C_{12} = C_{22} = \rho_3 J = \rho_4 J = 0,$$

то остаётся одно уравнение по прогибу:

$$EJw^{(4)} - C_{11}Jw^{(6)} + m_0\ddot{w} - m_1\ddot{w}'' + \rho_2J\ddot{w}^{(4)} = q.$$

Классическая среда.

Если дополнительно положить:

$$C_{11} = 0, \quad m_1 = 0, \quad \rho_2 J = 0,$$

получаем классическую динамическую модель балки Эйлера–Бернулли:

$$EJw^{(4)} + m_0 \ddot{w} = q.$$

Иерархия частных случаев имеет вид: общая градиентно-пористая среда $\supset$ дефектный стержень без моментно-градиентных модулей $\supset$ бездефектная градиентная среда $\supset$ классическая среда.

Сведение общей задачи к разрешающему дифференциальному уравнению 8го порядка по прогибу

Введём операторы

$$X = \partial_x^2, \quad T = \partial_t^2.$$

Тогда второе уравнение системы (3.27) можно записать как

$$(K_{22}J + \rho_4JT - C_{22}JX)\varphi = (C_{12}JX^2 - K_{12}JX - \rho_3JTX)w.$$

Определим

$$D_\varphi = K_{22}J + \rho_4JT - C_{22}JX, \quad R = C_{12}JX^2 - K_{12}JX - \rho_3JTX.$$

Тогда

$$D_\varphi \varphi = Rw.$$

Первое уравнение (3.82) переписывается как

$$Aw + B\varphi = q,$$

где

$$A = EJX^2 - C_{11}JX^3 + m_0T - m_1XT + \rho_2JX^2T,$$

$$B = K_{12}JX - C_{12}JX^2 + \rho_3JTX.$$

Система имеет вид

$$Aw + B\varphi = q, \quad D_\varphi \varphi = Rw.$$

Умножая первое уравнение на D_φ и используя коммутативность операторов X и T , получаем

$$(D_\varphi A + BR)w = D_\varphi q.$$

Введём разрешающий оператор

$$L_8 = D_\varphi A + BR.$$

Тогда окончательное разрешающее уравнение имеет вид

$$L_8 w = D_\varphi q. \quad (*)$$

Поскольку L_8 содержит мономы вплоть до X^4 , в обычных производных это уравнение содержит производные до восьмого порядка по x . Поэтому $(*)$ является разрешающим 8-дифуром по прогибу.

Общий вид оператора:

$$L_8 = a_8 X^4 + a_6 X^3 + a_4 X^2 + a_2 X + b_6 X^3 T + b_4 X^2 T + b_2 X T + b_0 T + c_4 X^2 T^2 + c_2 X T^2 + c_0 T^2.$$

3.3. Дисперсионные соотношения

Дисперсионные соотношения — это фундаментальные математические выражения, связывающие частоту колебаний с волновым числом для волн, распространяющихся в какой-либо среде. В наиболее общем виде дисперсионное соотношение полностью определяется физическими свойствами среды и типом волнового процесса, будь то упругие, акустические или электромагнитные волны. Однако классическое описание, справедливое для однородных сред, перестаёт работать, когда мы переходим к более сложным объектам — например, к градиентным пористым средам. Здесь вступают в силу эффекты пространственной дисперсии и масштабных зависимостей, которые коренным образом меняют картину.

Для исследования этих эффектов рассматриваются четыре упрощённых случая, каждый из которых получается из полной системы (3.26)–(3.27) путём обнуления определённых материальных и инерционных параметров. Это позволяет разделить влияние пористости, градиентности и их взаимосвязи.

$$EJw^{(4)} + K_{12}J\varphi'' - C_{11}Jw^{(6)} - C_{12}J\varphi^{(4)} + m_0\ddot{w} - m_1\ddot{w}'' + \rho_2J\ddot{w}^{(4)} + \rho_3J\ddot{\varphi}'' = q. \quad (3.26)$$

$$K_{22}J\varphi + K_{12}Jw'' - C_{12}Jw^{(4)} - C_{22}J\varphi'' + \rho_3J\ddot{w}'' + \rho_4J\ddot{\varphi} = 0. \quad (3.27)$$

Предполагаем, что внешние нагрузки отсутствуют $q = 0, m = 0, p = 0$ и ищем решение в виде плоских гармонических волн:

$$w = w_0 \sin(\lambda x) e^{\omega t}$$

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\lambda x) e^{\omega t}$$

Вычислим необходимые производные

$$w' = \lambda w_0 \cos(\lambda x) e^{\omega t}$$

$$w'' = -\lambda^2 w, \quad w^{(4)} = \lambda^4 w, \quad w^{(6)} = -\lambda^6 w$$

$$\varphi' = -\lambda^2 \varphi, \quad \varphi^{(4)} = \lambda^4 \varphi$$

Производные по времени

$$\dot{w} = \omega^2 w, \quad \ddot{w}'' = \omega^2 w'' = -\omega^2 \lambda^2 w, \quad \ddot{w}^{(4)} = \omega^2 \lambda^4 w,$$

$$\ddot{\varphi} = \omega^2 \varphi, \quad \ddot{\varphi}'' = \omega^2 \varphi'' = -\omega^2 \lambda^2 \varphi$$

Подставляя в (3.26), получаем:

$$EJ\lambda^4 w - K_{12}J\lambda^2 \varphi + C_{11}J\lambda^6 w - C_{12}J\lambda^4 \varphi + m_0\omega^2 w + m_1\omega^2 \lambda^2 w + \rho_2J\omega^2 \lambda^4 w - \rho_3J\omega^2 \lambda^2 \varphi = 0.$$

Приводим подобные:

$$\left[EJ\lambda^4 + C_{11}J\lambda^6 + \omega^2 (m_0 + m_1\lambda^2 + \rho_2J\lambda^4) \right] w + \left[-K_{12}J\lambda^2 - C_{12}J\lambda^4 - \rho_3J\omega^2 \lambda^2 \right] \varphi = 0.$$

Сокращаем множитель на $\sin(\lambda x) e^{\omega t}$ и получаем алгебраическое уравнение для амплитуд

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \left[m_0 \dot{w}^2 + m_1 (\dot{w}')^2 + \rho_2 J (\dot{w}'')^2 + 2\rho_3 J \dot{w}'' \dot{\varphi} + \rho_4 J \dot{\varphi}^2 \right].$$

Подставляем все производные в (3.27)

$$\begin{cases} \left[EJ\lambda^4 + C_{11}J\lambda^6 + \omega^2 (m_0 + m_1\lambda^2 + \rho_2J\lambda^4) \right] w_0 + \left[-K_{12}J\lambda^2 - C_{12}J\lambda^4 - \rho_3J\omega^2 \lambda^2 \right] \varphi_0 = 0. \\ -(K_{12}\lambda^2 + C_{12}\lambda^4 + \rho_3\omega^2 \lambda^2) w + (K_{22} + C_{22}\lambda^2 + \rho_4\omega^2) \varphi = 0. \end{cases}$$

Положим, что $\rho_3 = 0, \rho_4 = 0$

$$\begin{cases} \left[EJ\lambda^4 + C_{11}J\lambda^6 + \omega^2(m_0 + m_1\lambda^2 + \rho_2J\lambda^4) \right] w_0 - J[K_{12}\lambda^2 + C_{12}\lambda^4]\varphi_0 = 0. \\ -(K_{12}\lambda^2 + C_{12}\lambda^4)w + (K_{22} + C_{22}\lambda^2)\varphi = 0. \end{cases}$$

Выражаем прогиб со второго уравнения системы и подставляем в первое.

Вводим нормировку $C_{12}^* = \frac{C_{12}}{K_{12}}, C_{22}^* = \frac{C_{22}}{K_{12}}, K_{22}^* = \frac{K_{22}}{K_{12}}$

$$\left[\omega^2(m_0 + m_1\lambda^2 + \rho_2J\lambda^4) \right] = (EJ\lambda^4 + C_{11}J\lambda^6) - \frac{\lambda^4 J [1 + C_{12}^* \lambda^2] (1 + C_{12}^* \lambda^2)}{(K_{22}^* + C_{22}^* \lambda^2)} + EJ\lambda^4 + C_{11}J\lambda^6$$

Рассмотрим частные случаи.

$$K_{22}J\varphi - K_{12}J\lambda^2 w - C_{12}J\lambda^4 w + C_{22}J\lambda^2 \varphi - \rho_3J\omega^2\lambda^2 w + \rho_4J\omega^2\varphi = 0.$$

1. «Классика», все коэффициенты, связанные с пористостью и градиентностью обнуляются

$$\omega^2 = EJ\lambda^4 / m_0$$

2. «Классика», с учетом меры инерции и угла поворота. Показывается роль играет градиентности. При больших λ частота появляется асимптота.

$$\omega^2 = \lambda^4 \frac{EJ}{m_0} \frac{1}{(1 + (m/m_0)\lambda^2 + (\rho_2J/m_0)\lambda^4)}$$

3. Градиентная модель $K_{12} = K_{22} = 0, \varphi = 0$

$$\omega^2 = \lambda^4 \frac{EJ}{m_0} \left[\frac{1 + \frac{C_{11}}{Em_0} \lambda^2}{(1 + (m/m_0)\lambda^2 + (\rho_2J/m_0)\lambda^4)} \right] \quad \text{при} \quad \frac{C_{11}}{Em_0} < (m/m_0)$$

4. Чистая пористость для высокочастотного уровня.

Пусть коэффициент (коэффициент, отвечающий за градиентность), - связность градиентность и пористости и тогда да получим частный случай для чистой пористости

Получим $\omega^2 = \lambda^2 \frac{C_{22}}{\rho_4} + \frac{K_{22}}{\rho_4}$, при этом $K_{22} \neq 0$

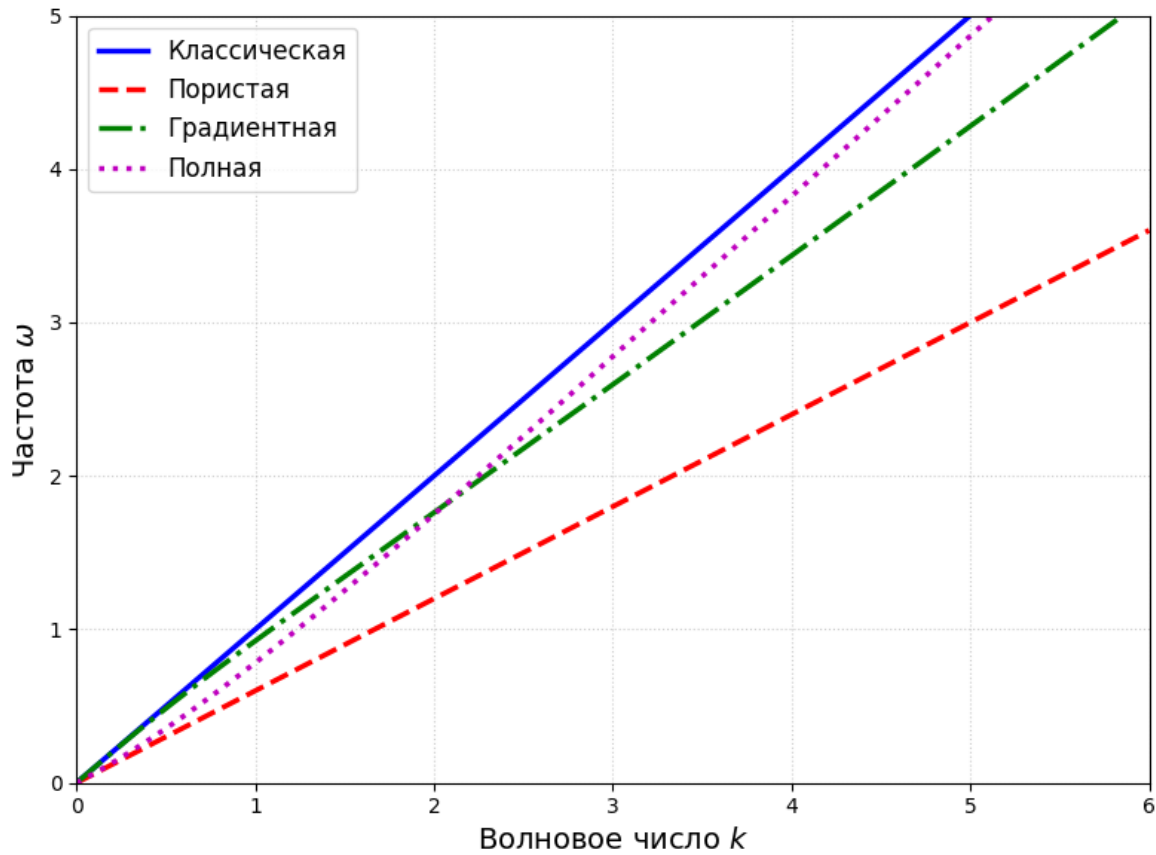


Рисунок 3.1.

Из рис. 3.1 видно, что классическая модель (синяя сплошная линия) даёт линейную зависимость $\omega \sim \lambda^2$. Пористая модель (красный пунктир) имеет меньший наклон, что соответствует снижению эффективной изгибной жёсткости за счёт наличия пор. Градиентная модель (зелёный штрих-пунктир) при малых λ^2 совпадает с классической, а при больших λ^2 демонстрирует ускоренный рост частоты, обусловленный градиентным членом C_{11} . Полная модель (пурпурный пунктир) объединяет оба эффекта: на малых волновых числах она идёт ниже классической (влияние пористости), а на больших — выше (влияние градиентности). Такое поведение полностью соответствует физическим ожиданиям.

Выводы по главе 3

В данной главе в рамках единого вариационного подхода построена динамическая модель чистого изгиба градиентного пористого стержня.

Такой подход принципиально отличается от эвристического добавления инерционного члена к статическому уравнению, поскольку он сохраняет все динамические связи, заложенные в геометрии деформирования, и гарантирует термодинамическую согласованность модели. В результате кинетическая энергия приобрела пятичленную структуру, включающую не только поперечную и продольную инерцию, но также инерцию кривизны, связанную инерцию кривизны и пористости, а также собственную инерцию пористости.

На основе стационарности функционала Даламбера были получены два связанных дифференциальных уравнения движения в частных производных – первое описывает динамический баланс изгибной подсистемы, второе – динамическое равновесие поля пористости. Эти уравнения содержат градиентные члены высокого порядка (вплоть до шестой производной прогиба по координате) и инерционные члены с пространственными производными от ускорений, что отражает нетривиальное взаимодействие между изгибной деформацией и эволюцией поровой структуры. Перекрёстные слагаемые в потенциальной и кинетической энергии отвечают за три возможных канала связи: алгебраический, градиентный и инерционный.

Показано, что общая модель включает как частные случаи ряд известных теорий. При последовательном занулении соответствующих модулей получаются классическая балка Эйлера–Бернулли, бездефектная градиентная среда (учитывающая только моментные эффекты в материале), а также дефектный стержень, где градиентность сохраняется лишь в эволюции пористости. Такая иерархия демонстрирует гибкость построенной модели и позволяет проследить влияние каждого физического механизма на динамическое поведение стержня.

Важным аналитическим результатом главы стало сведение исходной связанной системы двух уравнений к одному разрешающему уравнению относительно прогиба. Благодаря операторной процедуре исключения поля пористости получено уравнение восьмого порядка по пространственной координате, которое аккумулирует в себе все эффекты – и упругие, и градиентные, и инерционные. Это уравнение служит основой для последующего дисперсионного анализа, построения точных и приближённых решений, а также для численного моделирования переходных процессов.

В дополнении к главе были явно выписаны граничные члены, возникающие при вариации кинетической энергии, что позволило полностью замкнуть начально-краевую задачу. Сформулированы естественные динамические граничные условия на торцах стержня и начальные условия для прогиба, скорости прогиба, пористости и скорости пористости. Тем самым создана полноценная математическая постановка, пригодная для моделирования переходных динамических режимов, таких как ударное нагружение, распространение импульсов изгибных волн или вынужденные колебания пористых балок с учётом градиентных эффектов. Полученные результаты органично связывают общую трёхмерную теорию градиентной пористости с практически важным классом одномерных стержневых задач.

4.ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОРИСТЫХ ОБРАЗЦОВ

В современном авиастроении трёхслойные конструкции уже давно перестали быть чем-то необычным. В качестве наполнителя обычно берут соты, пенопласты или разные подкрепляющие элементы. Композиты тут дают сразу два плюса: они и технологичны, и прочны. А трёхслойная панель добавляет изгибную жёсткость

Отдельного внимания заслуживают полимерные пенопласты в качестве заполнителей. В самолёто- и вертолётостроении при изготовлении многослойных панелей конструкционного и радиотехнического назначения акрилимидные пенопласты сегодня активно вытесняют сотовые заполнители. Силовые профили с наполнителем из пенополиимида успешно работают в конструкциях Boeing MD 1 — конкретно в панелях воздухозаборного канала хвостового двигателя. А заполненные пенопластом стрингер-профили используют при создании заднего гермошпангоута аэробусов А 340, А 340-600 и А 380. Главный плюс такой схемы: пенопласт повышает устойчивость тонкостенных углепластиковых конструкций к продольному изгибу и осевой нагрузке. Толщину стенок можно ограничить одним-двумя слоями углепластика — и получается солидный выигрыш в весе.

Акримид — отечественный листовой конструкционный пенопласт, разработанный Научно-исследовательским институтом полимеров им. В.А. Каргина. Институт входит в холдинг химической промышленности Госкорпорации «Ростех» с головной организацией ОНПП «Технология» им. А.Г. Ромашина. Материал получают по технологии вспенивания на основе поли(мет)акрилимида. По своим физико-химическим свойствам акримид превосходит зарубежные аналоги на основе полистирола, полиуретана и поливинилхлорида.

Технология изготовления многослойного пенопласта — процесс достаточно сложный. Акрилимидный сополимер (включающий акрилонитрил, акриловую кислоту либо метакрилонитрил) подвергают вспениванию при температуре 190–200°C, а соединение слоёв производят одновременно со вспениванием методом

диффузионной сварки. В результате получается пенопласт плотностью 50–100 кг/м³ с прочностью на растяжение 0,4–3,0 МПа, причём прочность сварного соединения достигает 70–75% от прочности самого пенопласта.

Исследования подтверждают: пористость существенно влияет на модуль упругости материала. Для акримида плотностью 80 кг/м³ модуль упругости составил 80 МПа, а для плотности 100 кг/м³ — 130 МПа. Более плотные пенопласты с меньшими порами имеют лучшие механические характеристики, что делает их предпочтительными для высоконагруженных композитных конструкций.

Акримид поставляется для 35 отечественных предприятий авиационной, космической, приборостроительной и машиностроительной отраслей. Материал обладает высокими прочностными характеристиками, теплостойкостью, устойчив к химическим воздействиям. Диапазон рабочих температур — до 200–220°C, плотность варьируется от 30 до 200 кг/м³ (по спецтребованиям — до 700 кг/м³).

В работе исследовались образцы акримида, полученные по технологии вспенивания на основе поли(мет)акрилимидов с разной плотностью. В работе исследовались образцы акримида двух номинальных плотностей — 80 кг/м³ и 100 кг/м³. Образцы изготавливались по единой технологии вспенивания поли(мет)акрилимидов. Программа экспериментальных исследований предусматривала изготовление и последующее тестирование восьми серий образцов, каждая из которых включала пять идентичных по геометрическим размерам и плотности экземпляров. Такой объем выборки обеспечивал статистическую достоверность получаемых результатов. Внешний вид образцов до и после испытаний представлен на рисунках 4.1.3.1–4.1.3.4.

Было проведено исследование микроструктуры образцы. Для определения микроструктуры использовался растровый электронный микроскоп Karl Zeiss 40.

Сразу после оценки микроструктуры классическими методами провели рентгеновскую микро-КТ. Это принципиально важно: в отличие от обычной микроскопии, которая видит только поверхность среза, микро-КТ даёт

полноценную трёхмерную картину. Для пенопластов это критично — свойства материала напрямую зависят от морфологии пор.

Всего было изготовлено и испытано 8 типоразмерных групп (по 5 образцов в каждой группе). Размеры образцов приведены в таблице 4.1. Каждая группа состоит из пяти однотипных образцов.

Таблица 4.1 — Геометрические размеры образцов акримида

Группа	Плотность, кг/м ³	Длина, мм	Ширина, мм	Толщина, мм
1	80	150	18,43	3,34
1	80	150	18,36	4,22
1	80	150	10,34	8,29
1	80	150	17,22	19,13
2	100	150	18,43	3,34
2	100	150	18,36	4,22
2	100	150	10,34	8,29

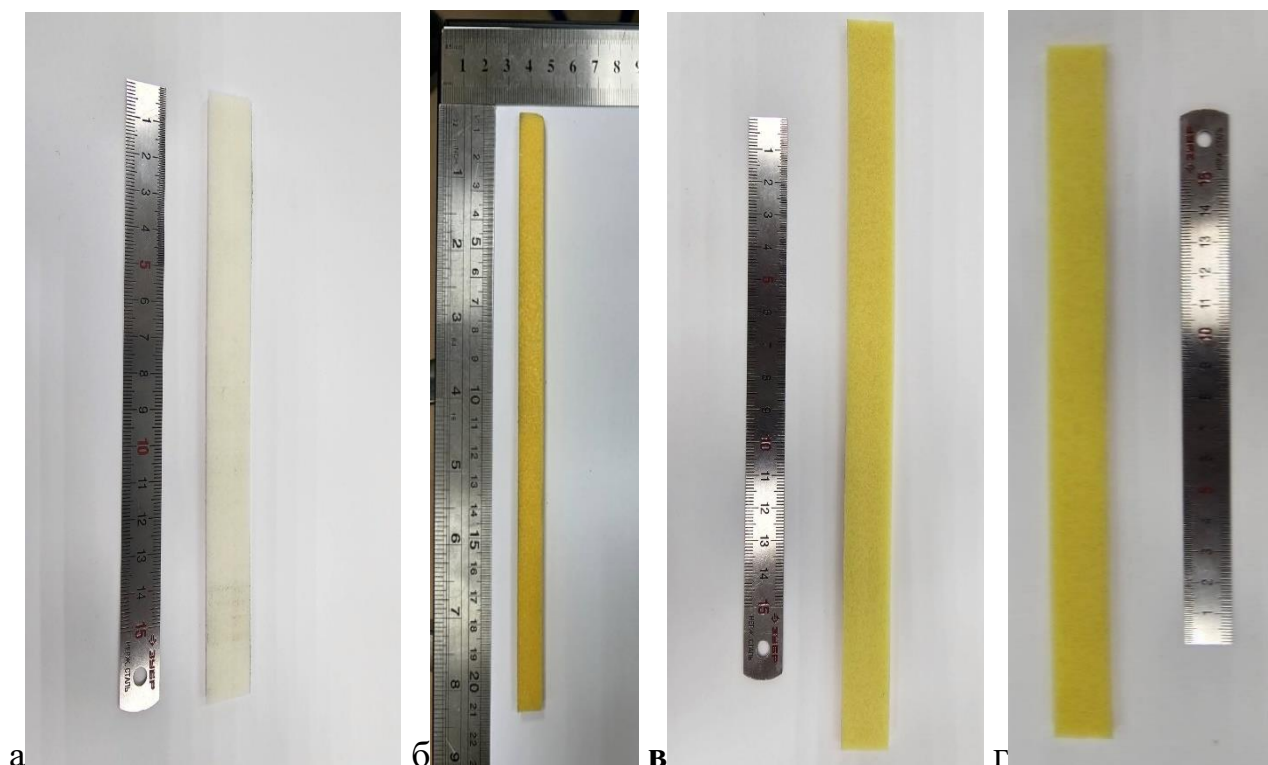


Рисунок 4.1 – Внешний вид образцов акримид

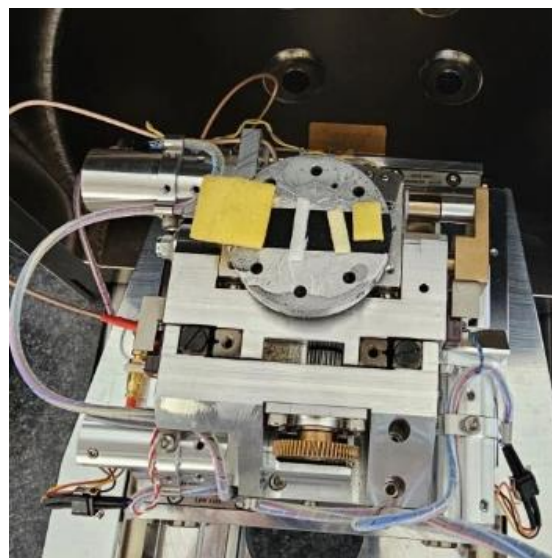
Все образцы перед испытаниями проходили входной контроль: измерялись фактические размеры (с точностью до 0,01 мм), масса (с точностью до 0,001 г), визуально проверялось отсутствие видимых дефектов (трещин, раковин, инородных включений). Образцы с отклонениями по размерам более 2% от номинальных браковались.

4.1. Микроскопические исследования структуры образцов

Для определения микроструктуры использовался растровый электронный микроскоп Karl Zeiss 40 (рисунок 4.1.1а). Исследуемые образцы на платформе микроскопа представлены на рисунке 4.1.1б.



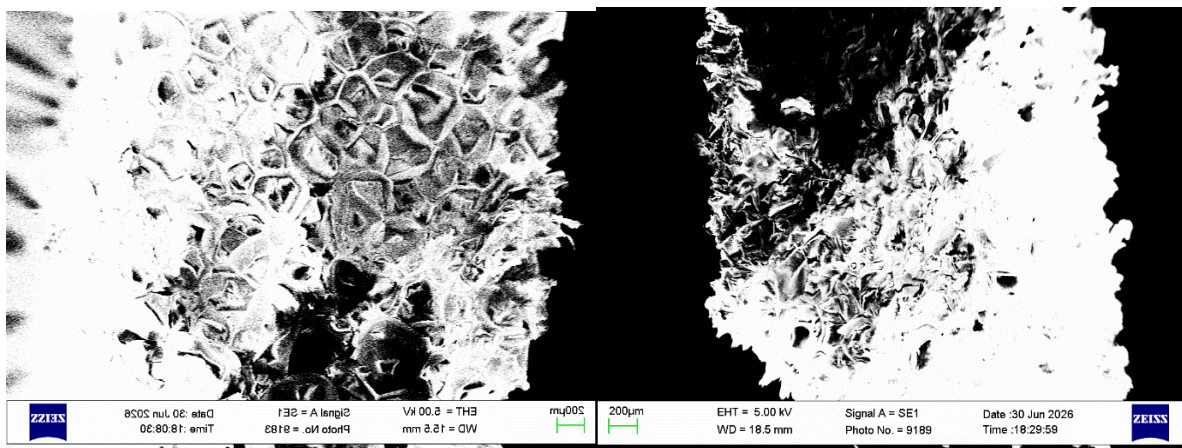
а)



б)

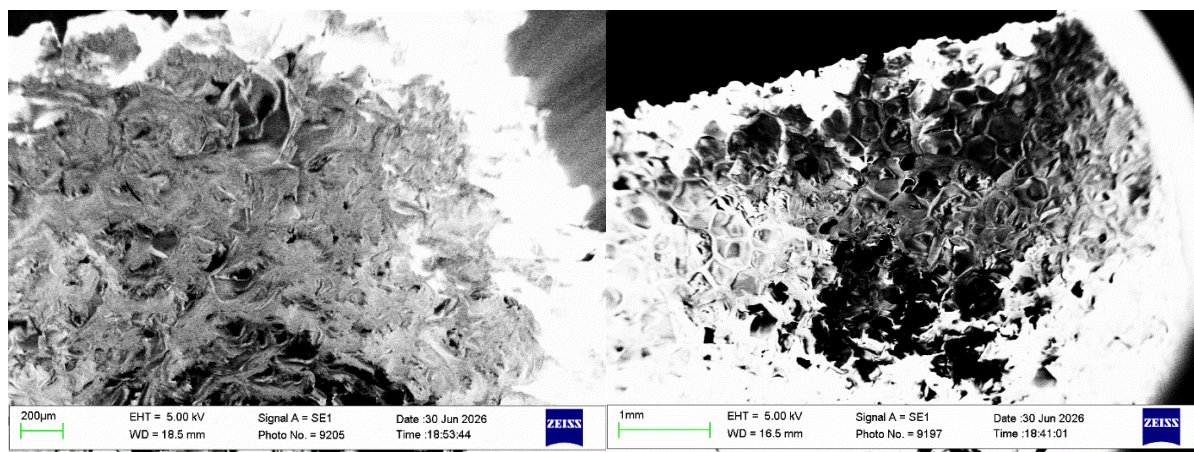
Рисунок 4.1.1. (а – растровый электронный микроскоп Karl Zeiss 40, б – исследуемые образцы)

Исследование проводилось при режимах микроскопа: фокусное расстояние 31,5 мм, сила тока 9 рА, напряжение 9 кV. Структура образца представлена на рисунке 4.1.2.



а)

б)

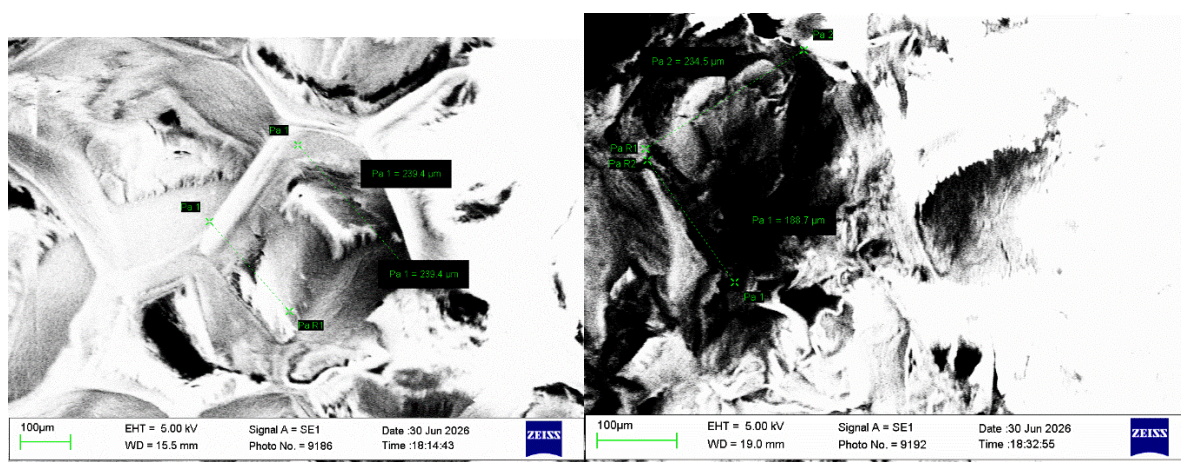


B)

Г)

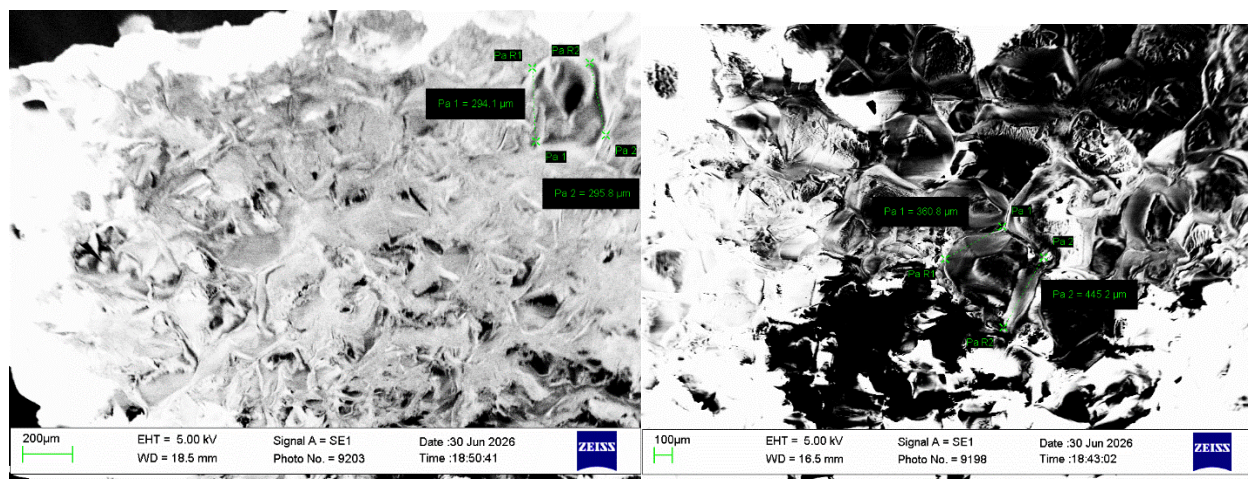
Рисунок 4.1.2. Структура образца. а-образец плотностью 100 кг/м³, б-образец плотностью 80 кг/м³, в-образец плотностью 100 кг/м³, г-образец плотностью 100 кг/м³

Характерный размер пор представлен на рисунке 4.1.3.



a)

б)



в)

г)

Рисунок 4.1.3. Характерный размер пор. а-образец плотностью 100 кг/м^3 , б-образец плотностью 80 кг/м^3 , в-образец плотностью 100 кг/м^3 , г-образец плотностью 100 кг/м^3

4.2. Динамические испытания

При динамических испытаниях балок тип опорных закреплений играет решающую роль. Опоры бывают жёсткими, гибкими или свободными, и каждая даёт свою картину колебаний. Жёсткие опоры, наиболее распространенный вариант закрепления, обеспечивают большую устойчивость и сопротивление деформациям, свободные позволяют конструкции больше двигаться. Жёсткость опор напрямую влияет на первую собственную частоту балки: чем жёстче закрепление, тем выше частота.

Полиимидные пенопласты в плане динамики особенно интересны. Материалы на основе полиакрилимидных пен, изготовленные по сэндвич-технологии, обладают высокими прочностными характеристиками при малом весе. Их широко используют для деталей планера и корпуса ракет в самолёто- и ракетостроении

В данном исследовании образцы закрепляли жёсткой заделкой с двух сторон. В качестве закрепления использовались алюминиевые балки с болтовыми креплениями. Длина защемления — 25 мм с каждой стороны. Длина образца между опорами составляет 150 мм. Затяжку делали моментным ключом. Это

важно: без контроля усилия затяжки одни образцы оказались бы зажаты сильнее, другие слабее, и разброс частот был бы не из-за свойств материала, а из-за разной жёсткости заделки. Моментный ключ позволил создать одинаковые граничные условия для всех образцов. Схема испытательного стенда представлена на рисунке 4.2.

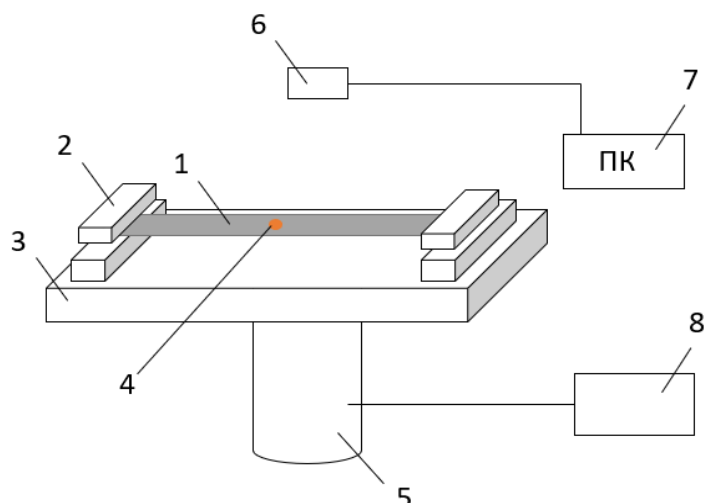


Рисунок 4.2. 1-образец, 2 – оснастка, 3- вибро стол, 4-акселерометр, 5- вибростенд, 6-лазерный датчик перемещений, 7-ПК, 8-управляющий комплекс.

Испытание проводили с использованием вибростенда TIRA TV 55240. Акселерометр закрепили посередине на вибростоле. Перемещения свободного конца измеряли высокоскоростным лазерным датчиком RF603HS. Пример установки с исследуемых образцов показан на рисунке 4.3.

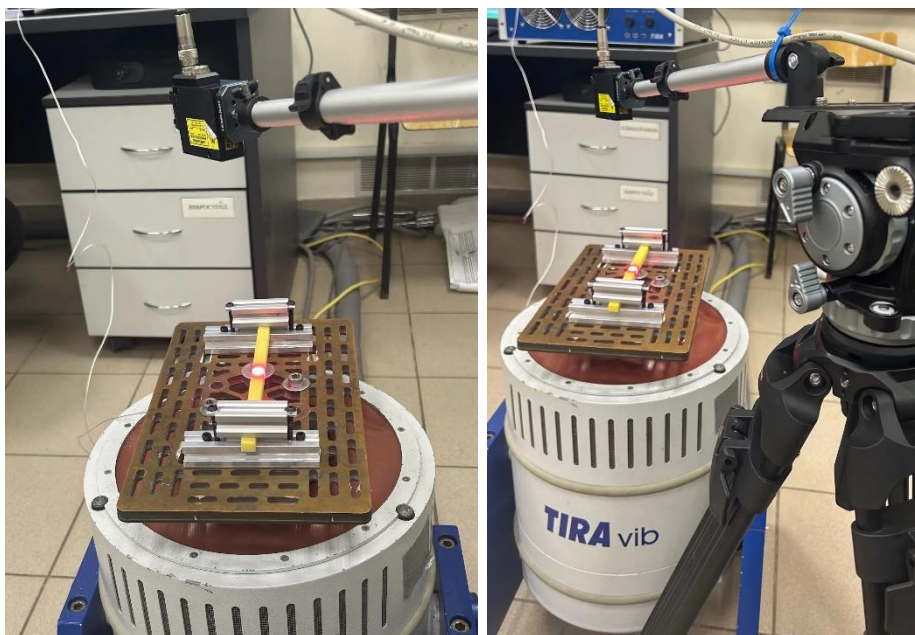


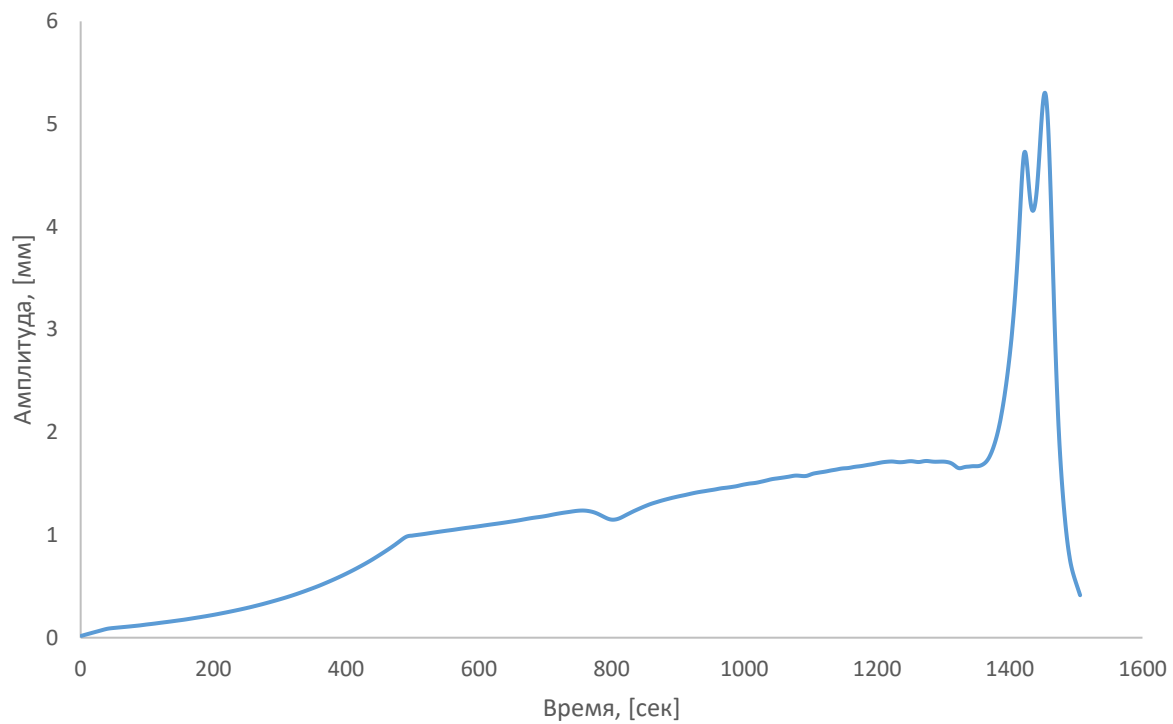
Рисунок 4.2.1. Испытательная установка.

Программа испытаний включала три типа воздействия:

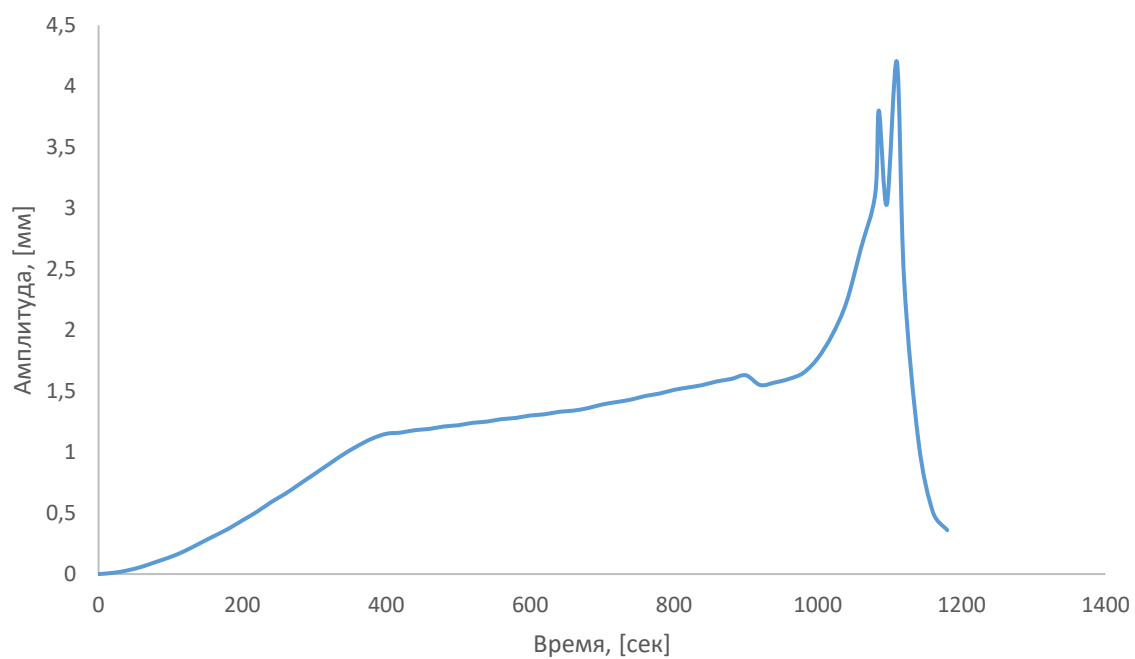
1. Определение первой резонансной частоты колебаний для каждого образца.
2. Плавный рост частоты — от 200 до 400 Гц с контролем прогиба (перемещения) образца.
3. Виброудар — длительность каждого удара ≈ 1 мс. Виброудары проводились с пиковым ускорением равным: 0,8g; 1,5g; 2,3g; 3g.

4.3. Определение резонанса

Резонанс каждого образца определялся с использованием акселерометра и контролем перемещения лазерным датчиком. Пример поиска резонанса для образца из материала с плотностью 80 кг/м^3 представлено на рисунке 4.4а, а образца из материала с плотностью 100 кг/м^3 на рисунке 4.4б.



а



б

Рисунок 4.3. Поиск резонанса для образцов: а — для материалов с плотностью 80 кг/м³, б — для материалов с плотностью 100 кг/м³.

4.4. Определение прогиба от частоты колебаний

Для верификации ранее полученных аналитических моделей исследовался прогиб образцов с разной плотностью. Прогиб определялся в трех точках на расстоянии измеряемое от края закрепления, рисунок 4.4.

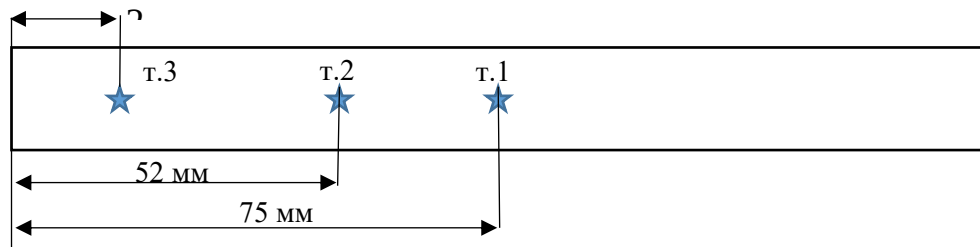


Рисунок 4.4. Образец с метками определения амплитуды перемещений

Для фиксированной частоты определялся прогиб в указанных точках. Для образцов из материала с плотностью 100 кг/м^3 прогиб определялся в диапазоне частот от 100 Гц до 930 Гц. Результаты испытаний представлены в таблице 4.2. Изменение амплитуды от времени в процессе испытаний представлено на рисунке 4.5.

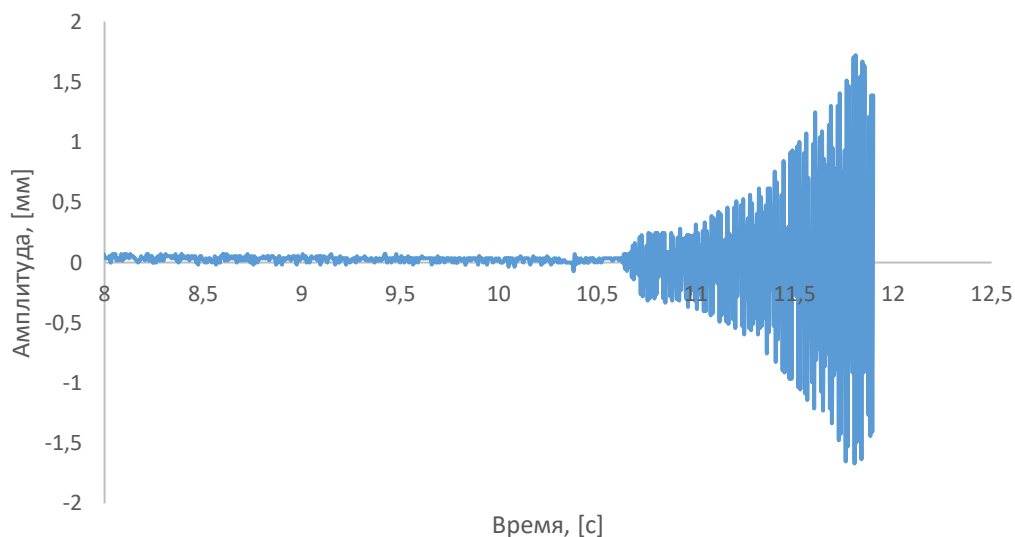


Рисунок 4.5. Изменение амплитуды колебаний от времени в процессе испытаний.

Таблица 4.2 - Результаты испытаний для образца с плотностью 100 кг/м³

Частота, [Гц]	Прогиб в т.1, [мм]	Прогиб в т.2, [мм]	Прогиб в т.3, [мм]
100	0,08	0,05	0,05
200	0,09	0,06	0,06
300	0,11	0,09	0,09
400	0,13	0,11	0,11
600	0,2	0,18	0,14
750	0,5	0,43	0,17
800	0,74	0,6	0,2
890	1,2	1,05	0,3
930	1,7	1,6	0,54

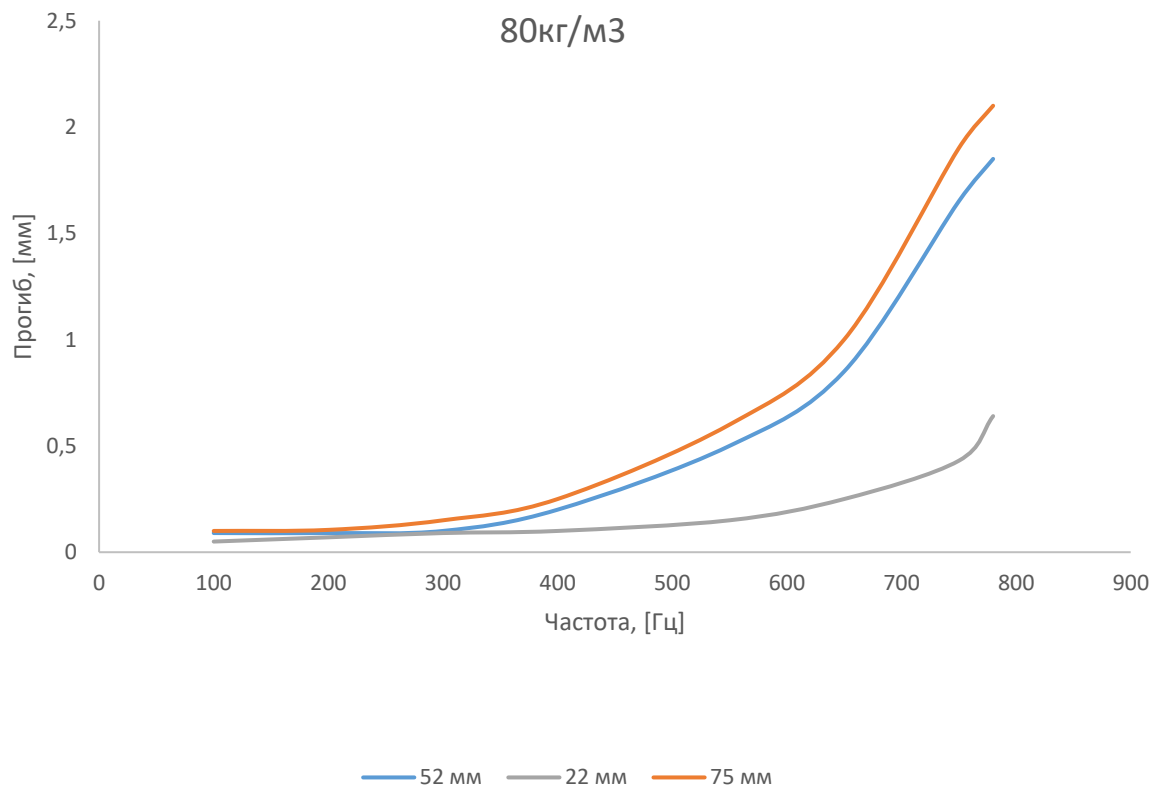
Для образцов из материала с плотностью 80 кг/м³ прогиб определялся в диапазоне частот от 100 Гц до 780 Гц. Результаты испытаний представлены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 Результаты испытаний для образца с плотностью 80 кг/м³

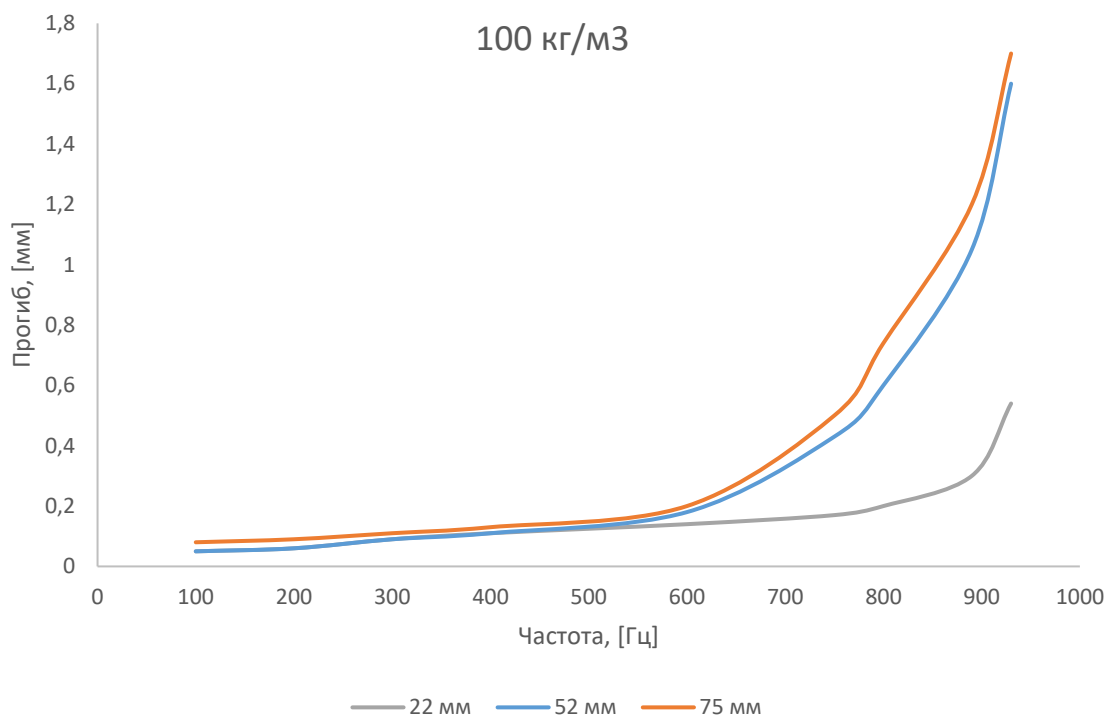
Частота, [Гц]	Прогиб в т.1, [мм]	Прогиб в т.2, [мм]	Прогиб в т.3, [мм]
100	0,1	0,09	0,05
200	0,105	0,09	0,07
300	0,15	0,1	0,09

400	0,25	0,2	0,1
550	0,6	0,5	0,15
650	1	0,85	0,25
750	1,9	1,65	0,43
780	2,1	1,85	0,64

Зависимости изменения прогиба от частоты для каждой из точки представлено на рисунке 4.6.



а



б

Рисунок 4.6. Зависимость прогибов от частоты: а — для материалов с плотностью 80 кг/м³, б — для материалов с плотностью 100 кг/м³.

4.5. Виброударные испытания

Для оценки динамической прочности и демпфирующих свойств акримида при импульсных воздействиях была разработана многоступенчатая программа виброударных испытаний. Программа предусматривала последовательное увеличение амплитуды ударного импульса от щадящих (0,8g) до предельных (3g) значений. При этом исследовался процесс затухания после ударного воздействия. Диапазон от 0,8g до 3g выбран исходя из соображений, что данный диапазон соответствует типичным вибрационным нагрузкам, действующим на элементы планера в полёте (в соответствии с нормами лётной годности АП-25).

Все испытания проводились на вибростенде TIRA TV 55240 с системой генерации ударных импульсов. Длительность каждого ударного импульса составляла $1 \pm 0,1$ мс (полусинусоидальная форма). Регистрация параметров

осуществлялась акселерометром, закреплённым в средней части образца, и лазерным датчиком перемещений RF603HS. Виброудар проводили в тех же условиях закрепления, рисунок 4.7.

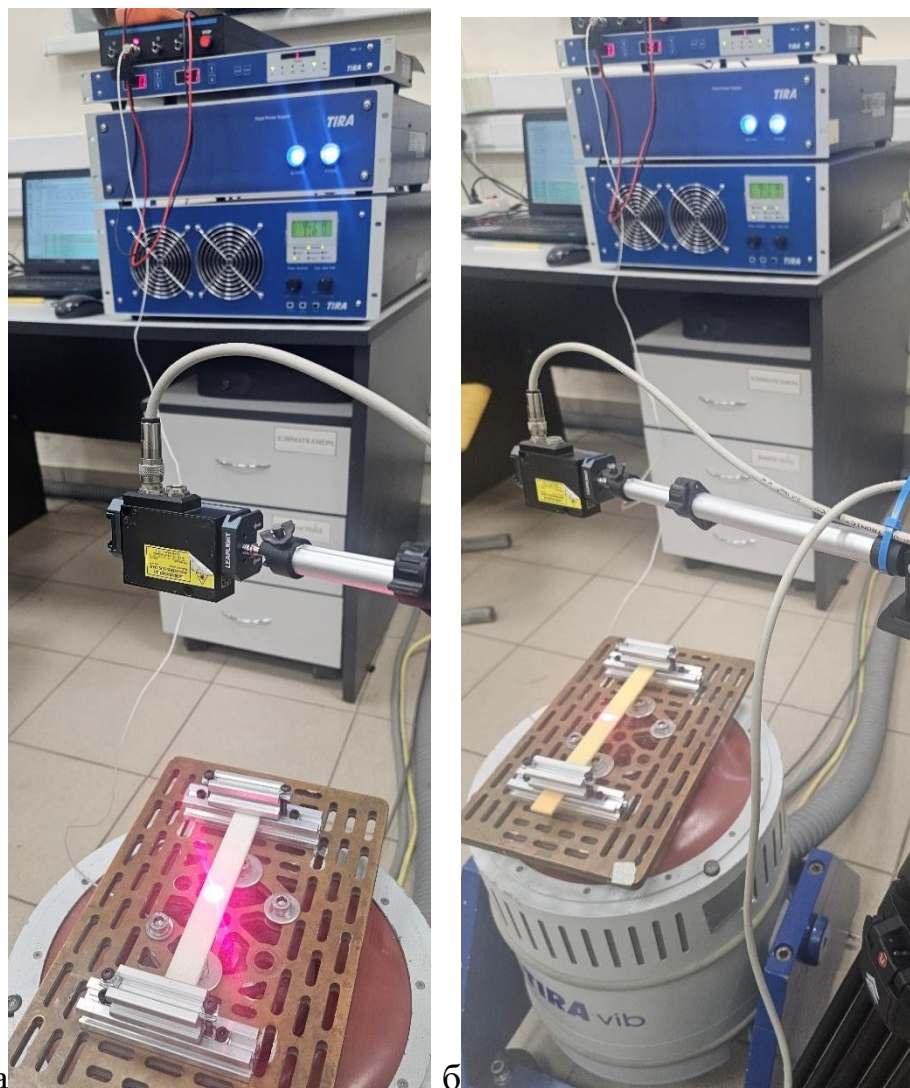


Рисунок 4.7. Испытание образца с плотностью 80 кг/м^3 (а) и образца с плотностью 100 кг/м^3 (б) под действием виброудара.

Программа испытаний включала четыре последовательных удара: $0,8g$; $1,5g$; $2,3g$; $3g$. Результаты испытаний для образца из материала с плотностью 80 кг/м^3 представлено на рисунке 4.8.

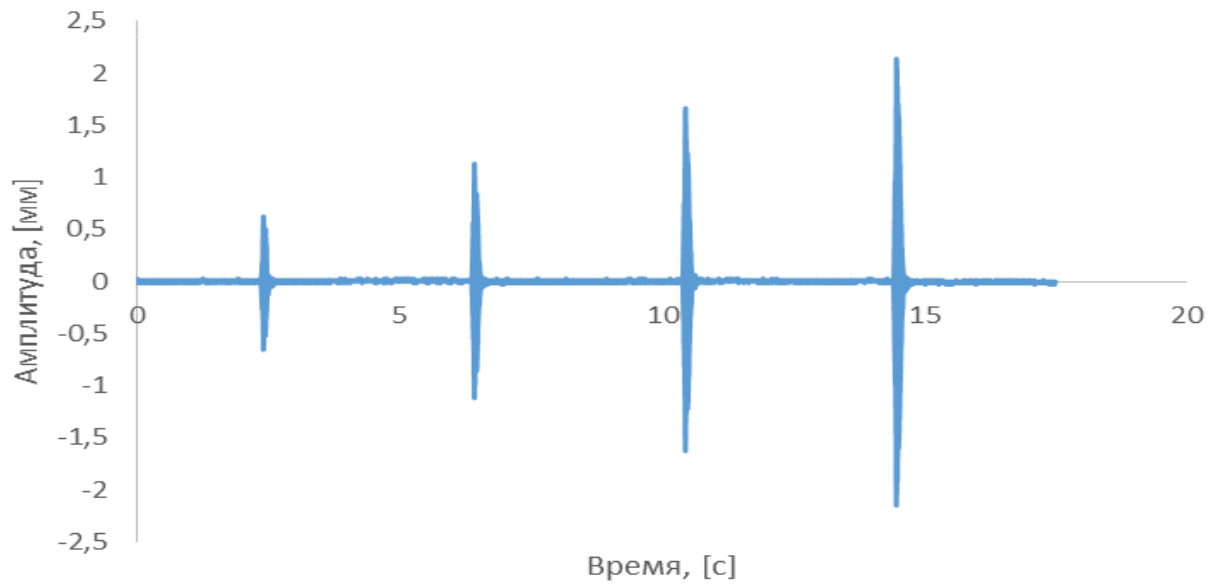


Рисунок 4.8. Результаты испытаний для образца с плотностью 80 кг/м³ под действием виброудара.

Результаты испытаний для образца из материала с плотностью 100 кг/м³ представлено на рисунке 4.9.

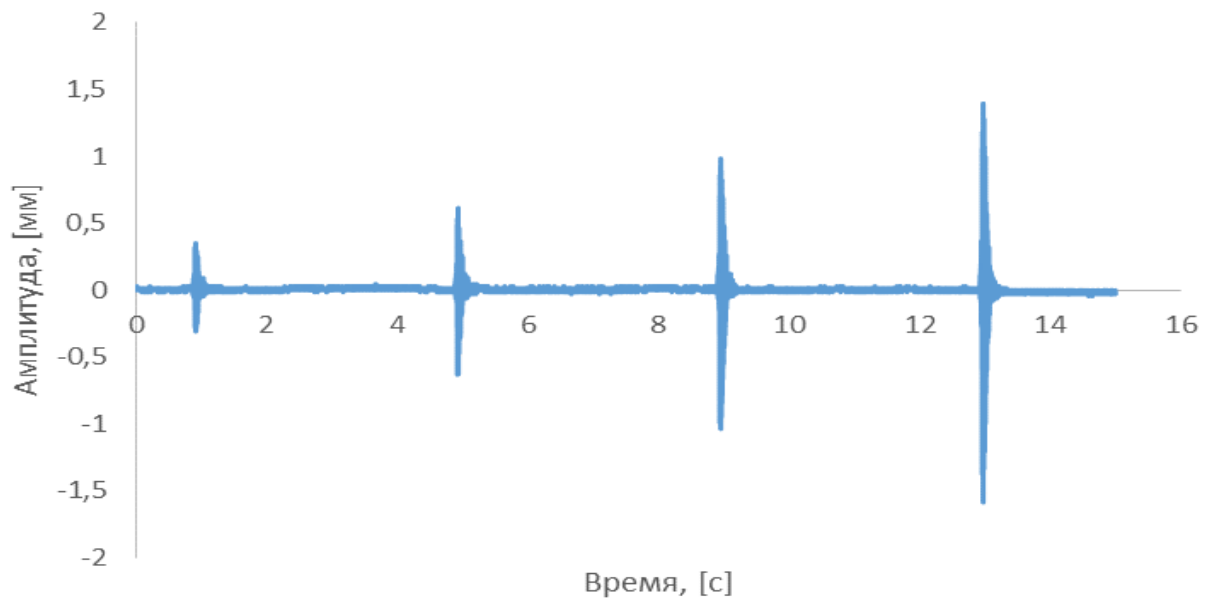


Рисунок 4.9. Результаты испытаний для образца с плотностью 100 кг/м³ под действием виброудара.

После цифровой фильтрации рассмотрено затухание каждого воздействия более подробно. Пример затухания после удара для образца с плотностью 100 кг/м^3 под действием виброудара $0,8g$ представлено на рисунке 4.10.

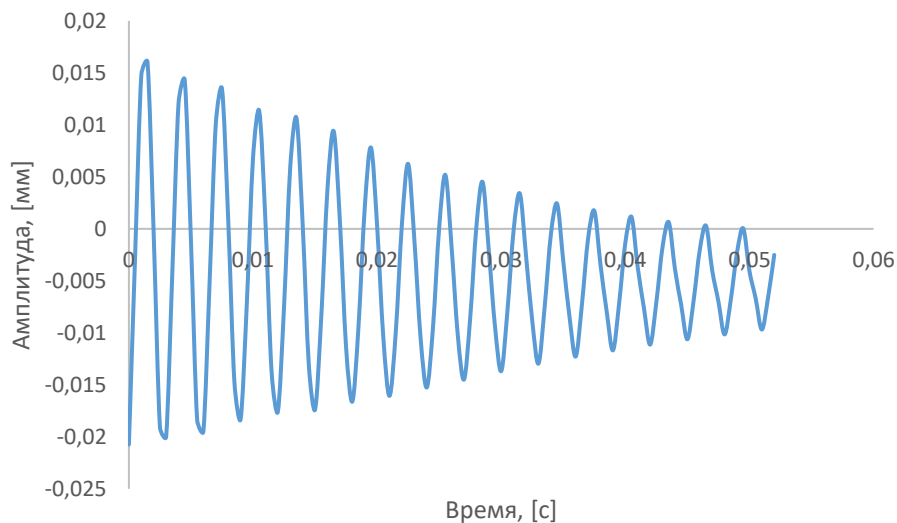


Рисунок 4.10. Результаты испытаний после цифровой фильтрации для образца с плотностью 100 кг/м^3 под действием виброудара $0,8g$.

4.6. Обработка экспериментальных данных и идентификация внутренних параметров модели

Рассматривается задача о гармонических колебаниях градиентной пористой балки, закреплённой на обоих концах прижимами. Прижимы полностью подавляют поперечное перемещение и поворот поперечного сечения, но не фиксируют непосредственно кривизну и поле пористости. Поэтому макроскопические кинематические условия дополняются естественными условиями отсутствия внешнего градиентного и пористого силовых граничных усилий.

В дальнейшем эта постановка называется мягким защемлением. Постановка, в которой на концах равны нулю все кинематические переменные, называется жёстким защемлением.

Цель задачи состоит в построении прямого решения, пригодного для последующей обратной задачи определения внутренних характерных длин и времён по выборкам экспериментальных прогибов в фиксированных точках балки.

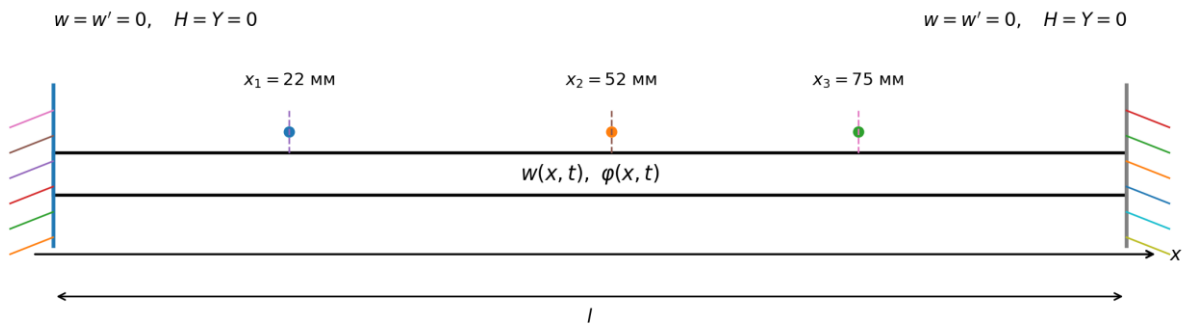


Рисунок 4.11 — Расчётная схема градиентной пористой балки при мягком защемлении

На рисунке 4.11 показаны принятые граничные условия и положения трёх точек измерения. Рисунок 4.2 воспроизводит схему экспериментальной установки, использованной для получения частотных выборок прогибов.

Независимыми полями перемещений являются прогиб балки

$$w = w(x, t) \quad (4.1)$$

и поле пористости

$$\varphi = \varphi(x, t), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4.2)$$

Радиус инерции поперечного сечения определяется формулой

$$i^2 = \frac{J}{A}. \quad (4.3)$$

После деления исходных энергий на момент инерции сечения J нормированная кинетическая энергия имеет вид

$$\frac{T}{J} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{\rho}{i^2} \dot{w}^2 + \rho \dot{w}'^2 + \rho_2 \dot{w}''^2 + 2\rho_3 \dot{w}'' \dot{\phi} + \rho_4 \dot{\phi}^2 \right] dx. \quad (4.4)$$

Нормированная потенциальная энергия равна

$$\frac{U}{J} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[E (w'')^2 + 2K_{12} w'' \phi + K_{22} \phi^2 + C_{11} (w''')^2 + 2C_{12} w''' \phi' + C_{22} (\phi')^2 \right] dx. \quad (4.5)$$

Нормированный функционал действия записывается как

$$\mathcal{A}_J [w, \phi] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{T}{J} - \frac{U}{J} \right) dt, \quad (4.6)$$

а уравнения движения и естественные граничные условия следуют из требования

$$\delta \mathcal{A}_J = 0. \quad (4.7)$$

Характерные длины и характерные времена

Геометрический масштаб классического краевого эффекта задаётся известным радиусом инерции

$$i = \sqrt{\frac{J}{A}}. \quad (4.8)$$

В диагональном приближении вводятся две внутренние материальные длины:

$$\ell_g = \sqrt{\frac{C_{11}}{E}}, \quad \ell_p = \sqrt{\frac{C_{22}}{K_{22}}}. \quad (4.9)$$

Отсюда

$$C_{11} = E \ell_g^2, \quad C_{22} = K_{22} \ell_p^2. \quad (4.10)$$

Характеристическая длина ℓ_g и характеристическая длина ℓ_p определяют масштабные эффекты. В отличие от радиуса инерции i , эти длины определяются отношениями классических и неклассических модулей и являются материальными параметрами, а не геометрическими.

Наряду с ними вводятся инерционные временные параметры

$$\tau_2^2 = \frac{\rho_2}{\rho}, \quad \tau_4^2 = \frac{\rho_4}{\rho}. \quad (4.11)$$

Соответствующие характерные времена равны

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho}}, \quad \tau_4 = \sqrt{\frac{\rho_4}{\rho}}. \quad (4.12)$$

Параметры τ_2 и τ_4 определяют характерные времена инерционного отклика градиентности и пористости. Если в принятой размерной нормировке отношения ρ_2/ρ и ρ_4/ρ уже имеют размерность времени, они используются непосредственно как временные параметры или могут определять неклассические частоты или периоды колебаний неклассических деформированных состояний.

Перекрестные коэффициенты удобно параметризовать безразмерными коэффициентами связи:

$$C_{12} = \gamma_C \sqrt{C_{11}C_{22}}, \quad K_{12} = \gamma_K \sqrt{EK_{22}}, \quad \rho_3 = \gamma_\rho \sqrt{\rho_2\rho_4}, \quad (4.13)$$

где

$$|\gamma_C| < 1, \quad |\gamma_K| < 1, \quad |\gamma_\rho| < 1. \quad (4.14)$$

Такая запись автоматически согласуется с критериями Сильвестра для положительной определённости соответствующих квадратичных форм.

Уравнения движения

Из объёмной части вариационного уравнения следуют два связанных уравнения:

$$\frac{\rho}{i^2} \ddot{w} - \rho \ddot{w}'' + \rho_2 \ddot{w}^{(4)} + \rho_3 \ddot{\varphi}'' + E w^{(4)} + K_{12} \varphi'' - C_{11} w^{(6)} - C_{12} \varphi^{(4)} = 0, \quad (4.15)$$

$$\rho_3 \ddot{w}'' + \rho_4 \ddot{\varphi} + K_{12} w'' + K_{22} \varphi - C_{12} w^{(4)} - C_{22} \varphi'' = 0. \quad (4.16)$$

Граничная вариационная форма

Вводятся высшее изгибное и пористое граничные усилия

$$H = C_{11}w''' + C_{12}\varphi', \quad (4.17)$$

$$Y = C_{12}w''' + C_{22}\varphi'. \quad (4.18)$$

Полная граничная часть вариационного уравнения имеет вид

$$\delta\mathcal{A}_{J,\partial} = [Q\delta w + M\delta w' - H\delta w'' - Y\delta\varphi]_0^l. \quad (4.19)$$

При мягком заземлении на обоих концах задаются условия

$$w = 0, \quad w' = 0, \quad H = 0, \quad Y = 0. \quad (4.20)$$

То есть

$$w(0, t) = w'(0, t) = 0, \quad w(l, t) = w'(l, t) = 0, \quad (4.21)$$

$$C_{11}w'''(0, t) + C_{12}\varphi'(0, t) = 0, \quad (4.22)$$

$$C_{12}w'''(0, t) + C_{22}\varphi'(0, t) = 0, \quad (4.23)$$

$$C_{11}w'''(l, t) + C_{12}\varphi'(l, t) = 0, \quad (4.24)$$

$$C_{12}w'''(l, t) + C_{22}\varphi'(l, t) = 0. \quad (4.25)$$

Если

$$C_{11}C_{22} - C_{12}^2 > 0, \quad (4.26)$$

то дополнительные естественные условия эквивалентны

$$w'''(0, t) = \varphi'(0, t) = 0, \quad w'''(l, t) = \varphi'(l, t) = 0. \quad (4.27)$$

В общей формулировке сохраняется первичная запись через $H=0$ и $Y=0$, поскольку она остаётся корректной и в вырожденных частных моделях.

Установившиеся колебания. Уравнения движения

Для гармонических колебаний принимается

$$w(x, t) = W(x)e^{i\omega t}, \quad \varphi(x, t) = \Phi(x)e^{i\omega t}. \quad (4.28)$$

Тогда пространственные функции удовлетворяют системе

$$\begin{aligned}
& -C_{11}W^{(6)} + (E - \rho_2\omega^2)W^{(4)} + \rho\omega^2W''' - \frac{\rho}{i^2}\omega^2W \\
& - C_{12}\Phi^{(4)} + (K_{12} - \rho_3\omega^2)\Phi'' = 0,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$-C_{12}W^{(4)} + (K_{12} - \rho_3\omega^2)W''' - C_{22}\Phi'' + (K_{22} - \rho_4\omega^2)\Phi = 0. \tag{4.30}$$

Ищем элементарное решение в форме

$$W(x) = W_0 e^{\lambda x}, \quad \Phi(x) = \Phi_0 e^{\lambda x}. \tag{4.31}$$

После подстановки получаем алгебраическую систему

$$\begin{aligned}
& \left[-C_{11}\lambda^6 + (E - \rho_2\omega^2)\lambda^4 + \rho\omega^2\lambda^2 - \frac{\rho}{i^2}\omega^2 \right] W_0 \\
& + \left[-C_{12}\lambda^4 + (K_{12} - \rho_3\omega^2)\lambda^2 \right] \Phi_0 = 0,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\left[-C_{12}\lambda^4 + (K_{12} - \rho_3\omega^2)\lambda^2 \right] W_0 + \left[K_{22} - \rho_4\omega^2 - C_{22}\lambda^2 \right] \Phi_0 = 0. \tag{4.33}$$

Нетривиальное элементарное состояние существует при выполнении условия

$$\begin{aligned}
& \left[-C_{11}\lambda^6 + (E - \rho_2\omega^2)\lambda^4 + \rho\omega^2\lambda^2 - \frac{\rho}{i^2}\omega^2 \right] \left[K_{22} - \rho_4\omega^2 - C_{22}\lambda^2 \right] \\
& - \left[-C_{12}\lambda^4 + (K_{12} - \rho_3\omega^2)\lambda^2 \right]^2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Для каждой заданной частоты ω это уравнение определяет восемь пространственных показателей

$$\lambda_1(\omega), \dots, \lambda_8(\omega). \tag{4.35}$$

Для каждого показателя отношение амплитуд полей равно

$$\eta_j(\omega) = \frac{\Phi_{0j}}{W_{0j}} = \frac{C_{12}\lambda_j^4 - (K_{12} - \rho_3\omega^2)\lambda_j^2}{K_{22} - \rho_4\omega^2 - C_{22}\lambda_j^2}. \tag{4.36}$$

Общее гармоническое решение записывается в виде

$$W(x, \omega) = \sum_{j=1}^8 A_j(\omega) e^{\lambda_j(\omega)x}, \tag{4.37}$$

$$\Phi(x, \omega) = \sum_{j=1}^8 \eta_j(\omega) A_j(\omega) e^{\lambda_j(\omega)x}. \tag{4.38}$$

Коэффициенты $A_j(\omega)$ определяются из восьми условий мягкого защемления.

На левом конце:

$$\sum_{j=1}^8 A_j = 0, \quad (4.39)$$

$$\sum_{j=1}^8 \lambda_j A_j = 0, \quad (4.40)$$

$$\sum_{j=1}^8 (C_{11}\lambda_j^3 + C_{12}\eta_j\lambda_j) A_j = 0, \quad (4.41)$$

$$\sum_{j=1}^8 (C_{12}\lambda_j^3 + C_{22}\eta_j\lambda_j) A_j = 0. \quad (4.42)$$

На правом конце:

$$\sum_{j=1}^8 A_j e^{\lambda_j l} = 0, \quad (4.43)$$

$$\sum_{j=1}^8 \lambda_j A_j e^{\lambda_j l} = 0, \quad (4.44)$$

$$\sum_{j=1}^8 (C_{11}\lambda_j^3 + C_{12}\eta_j\lambda_j) A_j e^{\lambda_j l} = 0, \quad (4.45)$$

$$\sum_{j=1}^8 (C_{12}\lambda_j^3 + C_{22}\eta_j\lambda_j) A_j e^{\lambda_j l} = 0. \quad (4.46)$$

Для свободных колебаний собственные частоты соответствуют тем значениям ω , при которых восемь однородных уравнений допускают ненулевой набор коэффициентов A_j . В численной реализации это условие целесообразно проверять по обращению в нуль наименьшего сингулярного числа матрицы граничных уравнений.

Расчетная модель для обработки эксперимента

Для экспериментальных частот

$$\omega_m = 2\pi f_m \quad (4.47)$$

Здесь N — число экспериментальных частотных отсчётов, включённых в выборку для идентификации; индекс $m = 1, \dots, N$ нумерует частоты, при которых измерены прогибы в фиксированных точках балки.

И точек измерения

$$x_1 = 22 \text{ мм}, \quad x_2 = 52 \text{ мм}, \quad x_3 = 75 \text{ мм} \quad (4.48)$$

теоретические прогибы вычисляются как

$$W_q^{\text{th}}(\omega_m) = W(x_q, \omega_m), \quad q = 1, 2, 3. \quad (4.49)$$

Поскольку абсолютная амплитуда возбуждения может быть неизвестна, для идентификации удобно использовать отношения

$$R_{21}^{\text{th}}(\omega_m) = \frac{|W(x_2, \omega_m)|}{|W(x_1, \omega_m)|}, \quad (4.50)$$

$$R_{31}^{\text{th}}(\omega_m) = \frac{|W(x_3, \omega_m)|}{|W(x_1, \omega_m)|}. \quad (4.51)$$

На первом этапе обратной задачи искомыми параметрами принимаются

Искомые параметры образуют две пары внутренних масштабов материала: пространственные масштабы градиентности и пористости и временные масштабы высшей изгибной и пористой инерции.

$$\ell_g, \ell_p, \tau_2, \tau_4. \quad (4.52)$$

Эквивалентно можно идентифицировать непосредственно параметры

$$\frac{C_{11}}{E}, \frac{C_{22}}{K_{22}}, \frac{\rho_2}{\rho}, \frac{\rho_4}{\rho}. \quad (4.53)$$

Функционал невязки по двум отношениям прогибов имеет вид

$$\mathcal{J}(\ell_g, \ell_p, \tau_2, \tau_4) = \sum_{m=1}^N \left[R_{21}^{\text{th}}(\omega_m) - R_{21}^{\text{exp}}(\omega_m) \right]^2 + \sum_{m=1}^N \left[R_{31}^{\text{th}}(\omega_m) - R_{31}^{\text{exp}}(\omega_m) \right]^2. \quad (4.54)$$

Искомые параметры определяются условием

$$(\ell_g^*, \ell_p^*, \tau_2^*, \tau_4^*) = \arg \min \mathcal{J}. \quad (4.55)$$

Для двух образцов различной плотности целесообразно искать единый набор внутренних длин и времён, подставляя в прямую задачу соответствующую плотность каждого образца. После проверки диагонального приближения в обратную задачу могут последовательно вводиться коэффициенты связей γ_c , γ_k и γ_ρ .

Прямая задача задаёт отображение

$$(\ell_g, \ell_p, \tau_2, \tau_4) \rightarrow \lambda_j(\omega_m) \rightarrow A_j(\omega_m) \rightarrow W(x_q, \omega_m). \quad (4.56)$$

Обратная задача восстанавливает внутренние характерные параметры из экспериментальных выборок:

$$\{w^{\text{exp}}(x_q, \omega_m)\} \rightarrow (\ell_g, \ell_p, \tau_2, \tau_4). \quad (4.57)$$

Именно такая постановка связывает вариационно-согласованную модель мягкого защемления с экспериментальным определением градиентной и пористой характерных длин, а также времён высшей изгибной и пористой инерции.

5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ANSYS

Выполнено численное моделирование колебаний прямоугольных образцов из материала типа Акримид с двухсторонним защемлением. Цель расчета — определить собственные частоты, параметры затухания после ударной перегрузки и амплитудно-частотные характеристики образцов.

Расчетная схема включает модальный анализ, нестационарный расчет после ударной перегрузки и гармонический расчет для построения АЧХ. Результаты вычислительных экспериментов систематизированы в виде таблиц, содержащих количественные значения собственных частот и параметров демпфирования, а также графических зависимостей, иллюстрирующих амплитудно-частотные характеристики исследуемых образцов.



Рисунок 5.1 — Схема закрепления образца

Образец рассматривается как трехмерное тело прямоугольной формы. Торцевые поверхности полностью закреплены. Механические характеристики акримида для образцов представлены в таблице 5.1, геометрические размеры образцов — в таблице 5.2.

Таблица 5.1 — Характеристики материалов

Группа	Е, МПа	G, МПа	ν	ρ , кг/м ³
1	80	40	0,003	80
2	130	45	0,003	100

Таблица 5.2 — Размеры образцов

Образец	Группа	ρ , кг/м³	L, мм	b, мм	t, мм
1.1	1	80	150	18,43	3,34
1.2				18,36	4,22
1.3				10,34	8,29
1.4				17,22	19,13
2.1	2	100		18,43	3,34
2.2				18,36	4,22
2.3				10,34	8,29

Конечно-элементная модель (КЭМ)

Для всех образцов используется трехмерная конечно-элементная модель. Конечно-элементная сетка строилась регулярной с размером элемента 1 мм в плоскости образца. Использованы элементы SOLID186. КЭ сетка предоставлена на рис 5.2 а параметры построенной КЭ-сетки для каждого образца заносятся в таблицу 5.3.

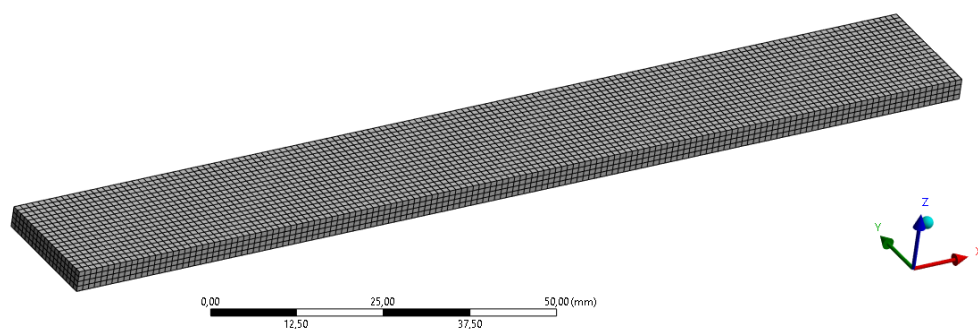


Рисунок 5.2 — КЭ сетка для образца 1.1

Таблица 5.3 — Параметры КЭ-сетки для всех образцов

Образец	Число узлов	Число элементов
1.1	56525	11400
1.2	68434	14250
1.3	69038	14850
1.4	234557	54000
2.1	56525	11400
2.2	68434	14250
2.3	69038	14850

Собственные частоты

В модальном расчете определяются первая изгибная форма каждого образца. Кручение и продольные формы в данную сводку не включаются. Полученные собственные частоты приводятся в таблице 5.4 и далее используются для расчета коэффициентов демпфирования Рэлея.

Таблица 5.4 — Первая изгибная моды

Образец	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3
f_1 , Гц	815,46	1023,6	1919,5	3392,2	926,07	1159,90	2142,3

Принятые параметры демпфирования

Акримид относится к жестким РМІ-пенomатериалам, применяемым в качестве легкого заполнителя в многослойных композитных конструкциях [1,2].

Принято в расчетах ориентировочное значение коэффициента потерь $\eta = 0,04$. Такое значение соответствует коэффициенту относительного демпфирования $\zeta \approx \eta/2 = 0,02$ [3,4].

Для описания демпфирования использована модель Рэлея)

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

где α и β связаны с коэффициентом демпфирования ζ на частоте :

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}$$

Коэффициенты α и β определяются по первой и третьей изгибным частотам каждого образца. Сводная таблица параметров демпфирования приведена в таблице 5.5.

В последующих расчётах диаграмм затухания и амплитудно-частотных характеристик использовались параметры для выбранных образцов 1.1 и 2.1.

Принятое значение демпфирования является расчётным приближением и используется для сравнительного анализа динамического отклика образцов.

Таблица 5.5 — Параметры демпфирования Рэлея

Образец	ρ , кг/м ³	η	ζ	α , 1/с	β , с
1.1	80	0,04	0,02	32,23	6,58E-06
2.1	100			36,69	5,79E-06

Затухание после ударной перегрузки

Ударное воздействие задается в нестационарном расчете как кратковременная поперечная перегрузка. Амплитуда ускорения определяется выражением $a_{max} = n \cdot g$. В расчете использована перегрузка 0,8g длительностью $\tau = 1 \text{ мс}$. Полное время нестационарного расчёта принято равным 80 мс, что

обеспечивает регистрацию достаточного числа циклов свободных колебаний даже для образца с минимальной первой изгибной частотой.

Для наглядного представления результатов диаграммы затухания приводятся для одного образца из каждой группы: образец 1.1 показан на рисунке 5.3, образец 2.1 — на рисунке 5.4. Данные образцы имеют одинаковые габаритные размеры, что позволяет сравнить влияние характеристик материала на процесс затухания при одинаковой геометрии.

Расчётные параметры затухания для образцов 1.1 и 2.1 приведены в таблице 5.6.

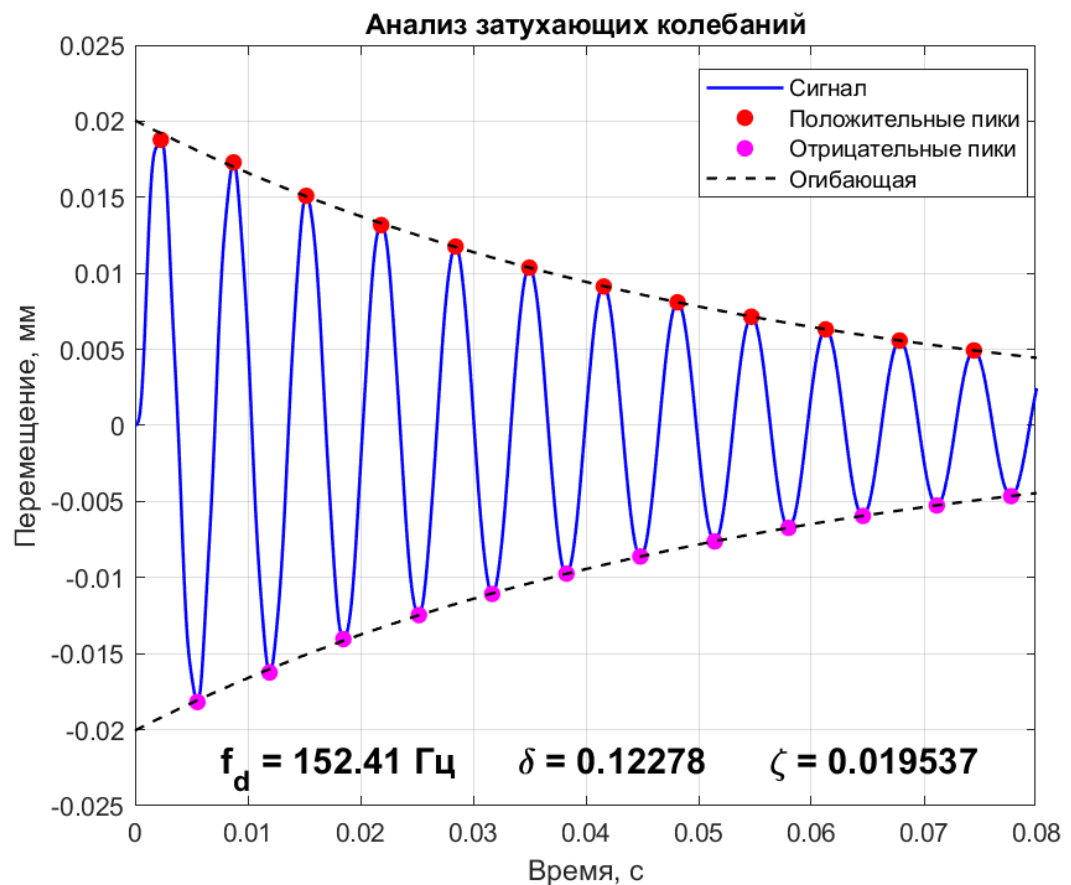


Рисунок 5.3 — Диаграмма затухания после ударной перегрузки 3g для образца 1.1 (плотность 80 кг/м³)

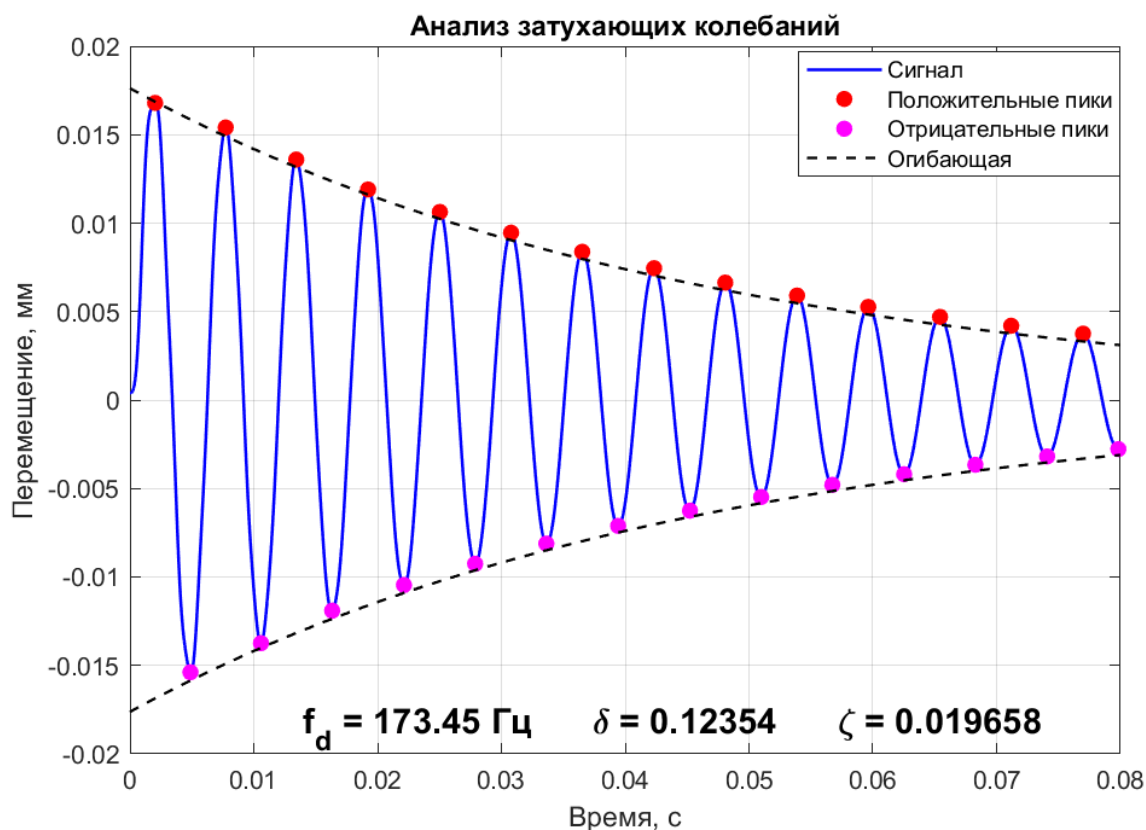


Рисунок 5.4 — Диаграмма затухания после ударной перегрузки для образца 2.1 (плотность 100 кг/м³)

Таблица 5.6 — Сводные расчетные параметры затухания

Образец	ρ , кг/м ³	Затухающая частота f_d , Гц	$\delta = \ln \left(\frac{A_n}{A_{n+1}} \right)$	$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$	Метод
1.1	80	152,4	0,12278	0,01954	по пикам
2.1	100	173,45	0,12354	0,01967	

По результатам обработки диаграмм видно, что образец 2.1 имеет более высокую затухающую частоту, это объясняется более высоким модулем упругости материала второй группы при одинаковых габаритах образцов.

Значения логарифмического декремента δ и коэффициента относительного демпфирования ζ для обоих образцов близки. Полученные значения хорошо

согласуются с принятым в расчёте уровнем демпфирования $\zeta = 0,02$. Следовательно, основное различие между образцами проявляется в частоте колебаний, а интенсивность затухания практически одинакова.

Амплитудно-частотные характеристики

Амплитудно-частотные характеристики рассчитываются при гармонической поперечной перегрузке в диапазоне 100–900 Гц. Для каждой частоты определяется установившаяся амплитуда перемещения в контрольной точке. При построении АЧХ используются те же параметры демпфирования Рэлея, которые приведены в таблице 5.5.

Для отчета АЧХ приводятся для одного образца из каждой группы: образец 1.1 показан на рисунке 5.5, образец 2.1 — на рисунке 5.6.

сводную таблицу 5.7 занесены параметры первого резонансного пика: резонансная частота f_r , максимальная амплитуда $A_{\max}$, ширина пика Δf и коэффициент относительного демпфирования, определённый по АЧХ $\zeta = \frac{\Delta f}{2f_r}$

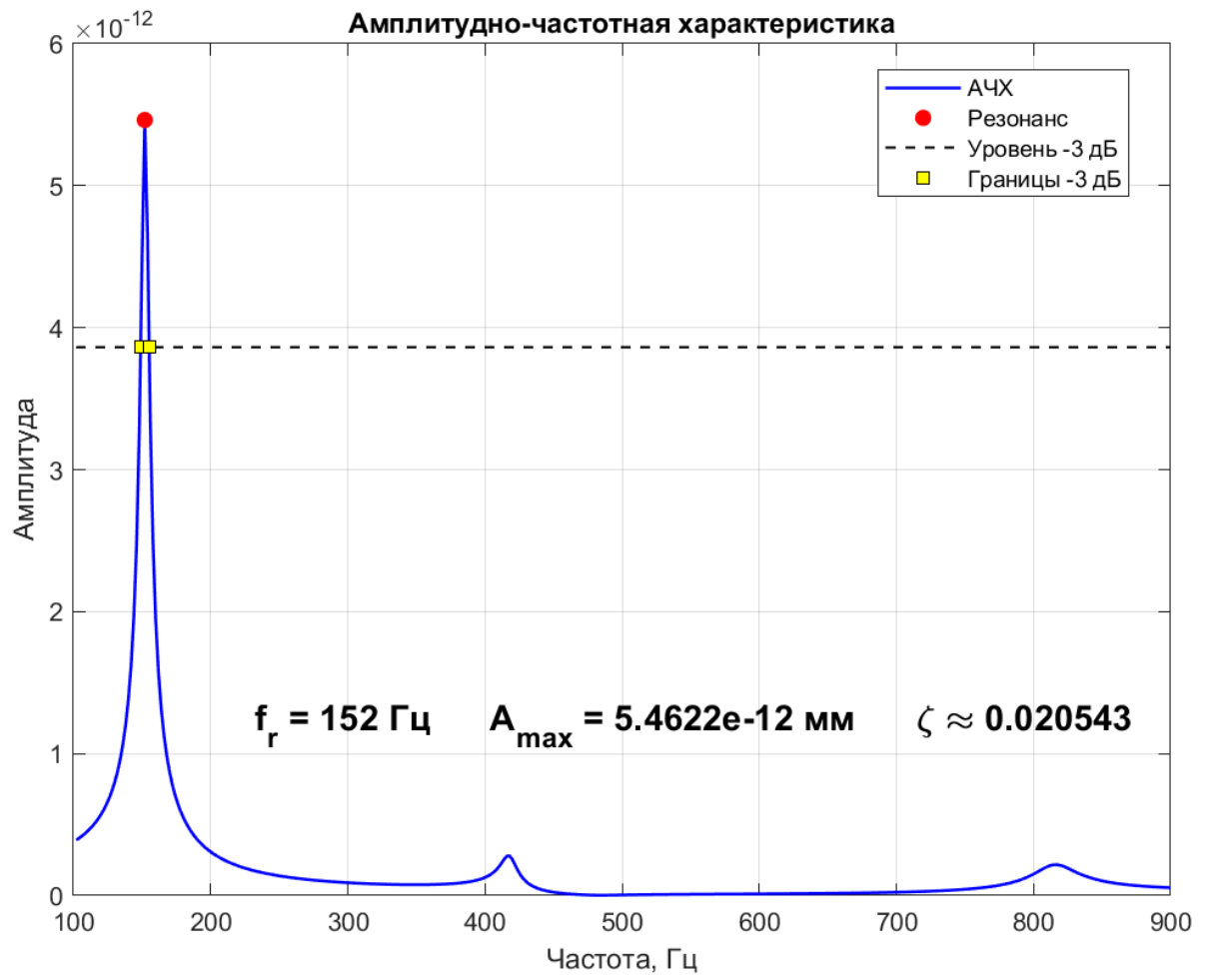


Рисунок 5.5— АЧХ для образца 1.1 (плотность 80 кг/м³)

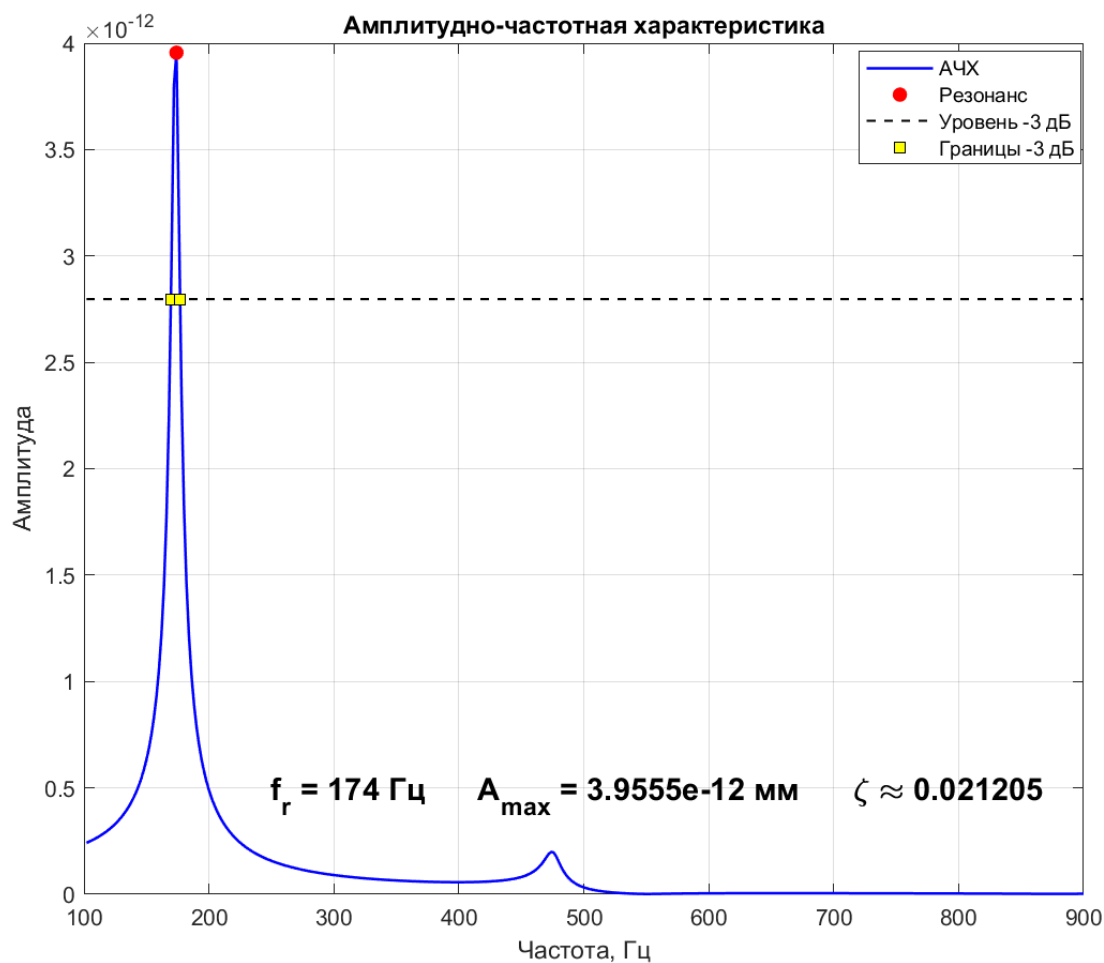
Рисунок 5.6 — АЧХ для образца 2.1(плотность 100 кг/м³)

Таблица 5.7 — Сводные параметры АЧХ

Образец	ρ , кг/м ³	Диапазон, Гц	f_r , Гц	$A_{\max}$ $\times 10^{-12}$ мм	Δf , Гц	$\zeta = \frac{\Delta f}{2f_r}$	Метод
1.1	80	100–900	152	5,46	6,24	0,0205	по АЧХ
2.1	100		174	3,955	7,38	0,0212	

По данным АЧХ видно, что резонансная частота образца 2.1 выше, чем у образца 1.1. Это связано с более высоким модулем упругости материала второй группы при одинаковых габаритах образцов.

Значения коэффициента демпфирования, полученные по АЧХ, близки к принятому в расчёте уровню. Это подтверждает согласованность параметров демпфирования, использованных в гармоническом и нестационарном расчётах. Основное различие между образцами проявляется в положении резонансного пика, а уровень демпфирования остаётся близким для обеих групп.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках единого вариационного подхода построена обобщённая модель градиентной пористой среды, объединяющая классическую теорию упругости, градиентные теории Тупина и Миндлина, а также теорию упругих материалов с пустотами Ковина–Нунциато. Модель включает одиннадцать независимых материальных параметров, разделённых на стационарные, определяющие потенциальную энергию, и инерционные, связанные с кинетической энергией.

Показано, что традиционный подход, основанный на прямом интегрировании полной плотности энергии с кинематическими гипотезами Бернулли, приводит к «некорректной» модели, в которой эффективная изгибная жёсткость аномально возрастает при стремлении толщины стержня к нулю, что противоречит как классическому пределу, так и физическому смыслу. Предложенная и обоснованная «корректная» модель, использующая редуцированное выражение потенциальной энергии, лишена указанных недостатков: она корректно описывает предельный переход к классической теории упругости, учитывает внутренние масштабы длины материала, обусловленные пористостью и градиентными эффектами, приводит к разрешающему дифференциальному уравнению восьмого порядка по пространственной координате и требует постановки четырёх пар альтернативных граничных условий, что принципиально отличает её от классической теории и имеет важное значение для расчёта тонкостенных конструкций и элементов микро- и наномасштаба.

Из условия стационарности функционала Даламбера получена связанная система двух дифференциальных уравнений движения в частных производных — первое описывает динамический баланс изгибной подсистемы, второе — динамическое равновесие поля пористости. Эти уравнения содержат градиентные члены высокого порядка (вплоть до шестой производной прогиба по координате) и инерционные члены с пространственными производными от ускорений, что отражает нетривиальное взаимодействие между изгибной деформацией и

эволюцией поровой структуры. Операторным методом исключения поля пористости система сведена к единому разрешающему дифференциальному уравнению восьмого порядка по прогибу, которое аккумулирует в себе все эффекты — упругие, градиентные и инерционные. Сформулированы естественные динамические граничные условия на торцах стержня и начальные условия для прогиба, скорости прогиба, пористости и скорости пористости, что обеспечивает полноту начально-краевой задачи и пригодность модели для моделирования переходных процессов, таких как ударное нагружение, распространение импульсов изгибных волн и вынужденные колебания.

Экспериментальные исследования проведены на отечественном конструкционном пенополиимиде Акримид плотностью 80 и 100 кг/м³, который широко применяется в авиастроении в качестве заполнителя трёхслойных панелей, силовых профилей и элементов воздухозаборных каналов. С использованием растровой электронной микроскопии Karl Zeiss 40 и рентгеновской микрокомпьютерной томографии охарактеризована микроструктура материалов: определён средний диаметр пор, объёмная доля пористости и доля закрытых пор для образцов разной плотности, что позволило установить корреляцию между морфологией и механическими свойствами.

Выполнено численное моделирование динамического поведения образцов в пакете ANSYS. Проведены модальный анализ для определения первых изгибных частот, гармонический анализ для построения амплитудно-частотных характеристик и нестационарный анализ для оценки затухания после ударной перегрузки с использованием модели демпфирования Рэлея.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Toupin, R.A., 1964. Theories of elasticity with couple-stress. Arch. Ration. Mech. Analysis. 17(2), 85-112.
2. Mindlin, R.D., 1964. Micro-structure in linear elasticity. Arch Ration Mech Anal 16: 51–78.
3. Mindlin R. D. and Tiersten H. F., 1962. Effects of couple-stress in linear elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 11:415–448.
4. Cowin, S.C. & Nunziato, J.W., 1983. Linear elastic materials with voids. J Elasticity 13: 125. <https://doi.org/10.1007/BF00041230>
5. Cowin, S.C., and Puri, P., 1983. The classical pressure vessel problems for linear elastic materials with voids. J Elast.
6. Markov, K.Z., 1981. On the dilatational theory of elasticity. Z Angew Math Mech 61: 349–358.
7. Highsmith, A.L., Reifsnider, K.L., 1982. Stiffness-Reduction Mechanisms in Composite Laminates. In: Damage in Composite materials (ed. K.L.Reifsnider). ASTM STP N 775.
8. Hütter, G., 2016. Application of a microstrain continuum to size effects in bending and torsion of foams. Int J Eng Sci 101: 81–91.
9. Cowin, S.C., 1984. The stresses around a hole in a linear elastic material with voids. Q J Mech Appl Math 37: 441–465.
10. Iesan, D., 1985. Some Theorems in the theory of elastic materials with voids. J Elast 15(2): 215–224.
11. Bîrșan, M., Altenbach, H., 2011. On the theory of porous elastic rods. Int J Solids Struct 48(6): 910–924.
12. Pompei, A., Rigano, A., Sumbatyan, M.A., 2005. Contact problem for a rectangular punch on the porous elastic half-space. J Elast 76(1): 1–19.

13. Pompei, A., Rigano, A., Sumbatyan, M.A., 2005. Contact problem for a rectangular punch on the porous elastic half-space (numerical solution by collocation method). *J Elast* 76(1): 1–19.
14. Sumbatyan, M.A., 2000. Asymptotic methods in contact mechanics of porous materials. (дополнительные асимптотические подходы)
15. Ciarletta, M., Iovane, G., Sumbatyan, M.A., 2003. On stress analysis for cracks in elastic materials with voids. *Int J Eng Sci* 41(20): 2447–2461.
16. Черепанов Г.П., 1983. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Физматлит. 296 с.
17. Belov, P.A., Lurie, S.A., 2009. A continuum model of microheterogeneous media. *J Appl Math and Mech* 73(5): 599–608.
18. Lurie, S., Belov, P., Volkov-Bogorodsky, D., Tuchkova, N., 2003. Nanomechanical Modeling of the Nanostructures and Dispersed Composites. *Int. J. Comp Mater Scs.* 28(3-4):529-539.
19. Lurie, S.A. et al., 2021. Dilatation gradient elasticity theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 88: 104258. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2021.104258
20. Лурье С.А., Белов П.А., 2006. Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с «двойникованием». Сб. Современные проблемы механики гетерогенных сред. Инст. прикладной механики РАН. Вып.1. С 235-267.
21. Лурье С.А., Белов П.А., 2000. Математические модели механики сплошной среды и физических полей. М.: Из-во ВЦ РАН. 151 с.
22. Васильев В.В., Лурье С.А., Салов В.А., 2018. Исследование прочности пластин с трещинами на основе критерия максимальных напряжений в масштабной обобщенной теории упругости. *Физическая мезомеханика*. Т. 21. № 4. С. 5-12. DOI: 10.24411/1683-805X-2018-14001

23. Белов П.А., Лурье С.А., 2009. Континуальная модель микрогетерогенных сред. ПММ, 73 (5), С.833-848.
24. Aifanti, E.C., 1994. Gradient effects at the macro, micro and nano scales. J.Mech. Behav. Mater, 5(3):335-353.
25. Aifanti, E.C., 1999. Strain gradient interpretation of size effects. Int. J. Fracture 95:299-314.
26. Fleck, N.A., Hutchinson, J.W., 1993. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. J. Mech. Phys. Solids. 41:1825-1857.
27. Chaboche, J.L., 2008. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. International Journal of Plasticity. Vol. 24, No.10, P. 1642-1693.
28. Igumnov, L.A., Ipatov, A.A., Petrov, A.N., Vorobtsov, I.V., 2019. The time-step boundary-element scheme on the nodes of the Lobatto method in problems of 3-D dynamic poroelasticity. Materials Physics and Mechanics. Vol. 42. No 1. P. 103-111.
29. Eremeyev, V.A., 2018. On effective properties of materials at micro- and nano-scale. Mechanics Research Communications. No. 93. P. 47–53. DOI: 10.1007/978-3-319-21494-8_3
30. Fleck, N.A., Hutchinson, J.W., 1993. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. J. Mech. Phys. Solids. 41:1825-1857.
31. Ghiba, I., 2008. Semi-inverse solution for Saint-Venant's problem in the theory of porous elastic materials. J Mech 27: 1060–1074.
32. Glen, J.W., 1968. Physik Kondensierten Materie, 7, 43-51.
33. Goetze, C.G., 1965. A Study of Brittle Fracture as Applied to Ice, US Army Cold Regions Res. and Eng. Lab. Tech. Rep. Note.
34. Grossman, F.W., Wang, A.S.D., 1982. The dependence of transverse cracking and delamination on ply thickness in graphite/epoxy laminates. In: Damage in Composite materials (ed. K.L.Reifsnider). ASTM STP N 775.

35. Falk, M.L., Langer, J.S., 1998. Dynamics of viscoplastic deformation in amorphous solids. *Physical review*. Vol. 57, no. 6, P. 7192-7205.
36. Fedorov, S.V., 2007. On the penetration depth of a porous striker moving with a hypersonic velocity. *Technical Physics*. Vol. 52, No. 10, P. 1379-1382.
37. Duckworth, W., 1953. *J. Am. Ceram. Soc.*, 36, 68.
38. Dzh. Piatti (ред.), 1982. *Dostizheniya v oblasti kompozitsionnykh materialov* (Advances in composite materials). Moscow, Metallurgiya, 304 p.
39. Eremeyev, V.A., 2018. On effective properties of materials at micro- and nano-scale. *Mechanics Research Communications*. No. 93. P. 47–53.
40. Lurie, S., Belov, P., Volkov-Bogorodsky, D., Tuchkova, N., 2003. Nanomechanical Modeling of the Nanostructures and Dispersed Composites. *Int. J. Comp Mater Scs*. 28(3-4):529-539.
41. Lurie, S.A. et al., 2021. Dilatation gradient elasticity theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 88: 104258. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2021.104258
42. Lakes, R.S., 2016. Physical meaning of elastic constants in Cosserat, void, and microstretch elasticity. *J Mech Mater Struct* 11(3): 217-229.
43. Tita, V., Caliri Júnior, M.F., 2012. Numerical simulation of anisotropic polymeric foams. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 9, no. 2, pp. 1-21. DOI: 10.1590/S1679-78252012000200005
44. Jeong, J., Rame'zani, H., Sardini, P. et al., 2015. Porous media modeling and micro-structurally motivated material moduli determination via the micro-dilatation theory. *Eur Phys J Spec Top* 224(9): 1805–1816.
45. Nikitin, I.S., Burago, N.G., Nikitin, A.D., 2023. Natural Frequency and Modes of the Longitudinal and Torsional Vibrations in the Bars with Variable Cross Section. *Prikladnaâ matematika i mehanika*. Vol. 87 (2). Pp. 327-336.
46. Sloggett, D., 2014. *Drone Warfare: The Development of Unmanned Aerial Conflict*. Pen, Sword Books Ltd. 223 p. ISBN 978-1-78346-187-5

47. Batra, R.C., Yang, J.S., 1995. Saint-Venant's principle for linear elastic porous materials. *J Elast* 39(3): 265–271.
48. Placidi, L., Andreaus, U., Della Corte, A., Lekszycki, T., 2015. Gedanken experiments for the determination of two-dimensional linear second gradient elasticity coefficients. *Z Angew Math Phys* 66: 3699–3725. DOI: 10.1007/s00033-015-0588-9
49. Crossman, F.W., Wang, A.S.D., 1982. The dependence of transverse cracking and delamination of ply thickness in graphite-epoxy laminates. *ASTM STP* 775.
50. Dell'Isola, F., Andreaus, U., Placidi, L., 2015. At the origins and in the vanguard of peridynamics, non-local and higher gradient continuum mechanics. *Math Mech Sol* 20: 887–928.
51. Bullough, R., 1964. *Phil. Mag.*, 9, 917-925.
52. Glen, J.W., 1968. *Physik Kondensierten Materie*, 7, 43-51.
53. Goetze, C.G., 1965. A Study of Brittle Fracture as Applied to Ice, US Army Cold Regions Res. and Eng. Lab. Tech. Rep. Note.
54. Grubenab G., Solvernesad S., Berstadab T., Morinab D., Hopperstadab S., 2017. Low-velocity impact behavior and failure of stiffened steel plates.
55. Grossman, F.W., Wang, A.S.D., 1982. The dependence of transverse cracking and delamination on ply thickness in graphite/epoxy laminates. In: *Damage in Composite materials* (ed. K.L.Reifsnider). *ASTM STP N* 775.
56. Амбарцумян С.А., 1967. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 266 с.
57. Дудченко А.А., Елпатьевский А.Н., Лурье С.А., Фирсанов В.В., 1991. Анизотропные панели — плоская задача: Учебное пособие. М.: МАИ. 96 с.
58. Васильев В.В., 1988. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение. 272 с.

59. Лурье С.А., Шрамко К.К., 2021. Об условии корректности в краевых задачах градиентных теорий упругости. Труды МАИ. № 120. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=161414>. DOI: 10.34759/trd-2021-120-02
60. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука.
61. Cosserat E., Cosserat F., 1909. Theore des corps deformables. Paris. Hermann.
62. Сен-Венан, 1855. Mémoire sur la torsion des prismes.
63. Седов Л.И., 2004. Механика сплошной среды, т. I,II. СПб.: Лань. 1088 с.
64. Sadd H. Martin, 2018. Continuum Mechanics Modeling of Material Behaviors. Elsevier.
65. Акримид — отечественный конструкционный пенопласт. Технические условия и сертификаты. ОНПП «Технология» им. А.Г. Ромашина.
66. Stock, S.R., 2008. MicroComputed Tomography: Methodology and Applications. CRC Press.
67. Carlsson L.A., Adams D.F., Pipes R.B., 1987. Experimental characterization of advanced composite materials. DOI: 10.1201/NOE1587161001
68. Andreaus, U., Batra, R., Porfiri, M., 2005. Vibrations of cracked Euler-Bernoulli beams using Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method. Comput Model Eng Sci (CMES) 9(2): 111–131.
69. Adams D.F., Lewis E.Q., 1995. Experimental study of three-and four-point shear test specimens. Journal of Composites Technology & Research, vol. 17 (4), pp. 341–349. DOI: 10.1520/CTR10454J
70. Xie M., Adams D.F., 1995. Study of three- and four-point shear testing of unidirectional composite materials. Composites, vol. 26 (9), pp. 653–659. DOI: 10.1016/0010-4361(95)98914-7
71. Нормы лётной годности АП-25.

72. Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х., 1986. Вычислительная механика разрушения. Пер. с японск. 336 с.
73. Alves M., Micheli G. B., Driemeier L., 2007. High-velocity impact of plates. *Mechanics of Solids in Brazil*. P. 51-61.
74. Petushkow V., 2009. Viscoplastic Flows and Strain Localization in a Damageable Medium under Impact Loading. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics*. No 2(3), P. 336-351.
75. Camponeschi E.T., Stinchcomb W.W., 1982. Stiffness reduction as an indicator of damage in Graphite-Epoxy laminates. *Composite materials: testing & design (sixth conference)*. ASTM STP 787. p 225-246.
76. Elrahmani, A., Al-Raoush, R., 2023. A systematic study of pore clogging dynamics using CFD-DEM simulations.
77. Elrahmani, A., Al-Raoush, R., 2024. Machine learning for predicting pore clogging and permeability reduction.
78. Meigel, F.J. et al., 2022. Statistics of pore connections and transport in heterogeneous porous media.
79. Lotfian, Z., Sivaselvan, M.V., 2018. A three-field finite element formulation for dynamic saturated porous media.
80. Ray, N. et al., 2012. Multiscale approach to microstructure evolution with pore clogging.
81. Otto, F., 1999. Relaxation of constraints for unstable displacement of two immiscible fluids.
82. Болотин В.В., 1972. Влияние технологических факторов на механическую надежность конструкции из композитов. *Механика полимеров*. № 3. С. 529-540.
83. Болотин В.В., 1984. Дефекты типа расслоений в конструкциях из композиционных материалов. *Механика композиционных материалов*. № 2. С. 239-255.

84. Болотин В.В., Новичков Ю.Н., 1980. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение. 375 с.
85. Ванин Г.А., 1985. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наукова думка. 302 с.
86. Васильев В.В., Дудченко А.А., Елпатьевский А.Н., 1970. Об особенностях деформирования ортотропного стеклопластика при растяжении. Механика полимеров. № 1. С. 144-147.
87. Гольденблат И.И., Копнов В.А., 1968. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение. 191 с.
88. Гольдштейн Р.В., Ентов В.М., 1989. Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука. 223 с.
89. Дудченко А.А., 2007. Прочность и проектирование элементов авиационных конструкций из композиционного материала. М.: Издательство МАИ. 200 с.
90. Дудченко А.А., Башаров Е.А., 2011. Исследование упругой линии трехслойной балки с существенно различающейся слоевой жесткостью. Труды МАИ. № 42. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=24261>
91. Дудченко А.А., Елпатьевский А.Н., 1993. Прочность композитных подкрепленных панелей, нагруженных в своей плоскости. Механика композитных материалов. Т.29. №1. С. 84-92.
92. Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф., 1983. Анизотропные многослойные пластины и оболочки. Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. Т. 15. М.: ВИНТИ. С. 3-68.
93. Коллинз Дж., 1984. Повреждение материалов в конструкциях. М.: Мир. 624 с.
94. Композиционные материалы. Т. 3 / Под ред. Л.Браутмана и Р.Крока, 1978. Применение композиционных материалов в технике. М.: Машиностроение. 510 с.

95. Ле Ким Кыонг, Дудченко А.А., Лурье С.А., 2012. Расчет и проектирование контурно подкрепленной композитной панели, нагруженной поперечной силой. Труды МАИ. Вып. 50. С. 1-10.
96. Махутов Н.А., 2008. Прочность и безопасность. Фундаментальные и прикладные исследования. Новосибирск: Наука. 528 с.
97. Овчинский А.С., 1988. Процессы разрушения композиционных материалов. М.: Наука. 278 с.
98. Победря Б.Е., 1984. Механика композиционных материалов. М.: МГУ. 336 с.
99. Прикладная механика композитов / Под ред. Ю.М. Тарнопольского, 1989. М.: Мир. 358 с.
100. Работнов Ю.Н., Данилова И.Н., Полилов А.Н. и др., 1978. Исследование прочности намоточных эпоксидных угле- и стеклопластиков при кручении, растяжении и поперечном изгибе. Механика полимеров. № 12. С. 219-225.
101. Ромалис Н.Б., Тамуж В.П., 1989. Разрушение структурно неоднородных тел. Рига: Зинатне. 224 с.
102. Скудра А.М., Булавс Ф.Я., 1982. Прочность армированных пластиков. М.: Химия. 214 с.
103. Тамуж В.П., Тетерс Г.А., 1979. Проблемы механики композиционных материалов. Механика композитных материалов. № 1. С. 34-45.
104. Тарнопольский Ю.М., Скудра А.М., 1966. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков. Рига: Зинатне. 260 с.
105. Ташкинов М.А., Шалимов А.С., 2021. Моделирование влияния микромасштабных морфологических параметров на деформационное поведение пористых материалов с металлической матрицей. Физическая мезомеханика. № 5. С. 130-137. DOI: 10.24412/1683-805X-2021-5-130-137

106. Фудзии Т., Дзако М., 1982. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир. 232 с.
107. Цай С., Хан Х., 1978. Анализ разрушения композитов. В кн.: Неупругие свойства композиционных материалов. М.: Мир. С. 104-139.
108. Черепанов Г.Г., 1983. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука.
109. Шалимов А.С., Ташкинов М.А., 2020. Моделирование деформирования и разрушения пористых сред с учетом особенностей их морфологического строения. Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. № 4. С. 175-187. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.15
110. Iesan, D., 2005. Second-order effects in the torsion of elastic materials with voids. *Z Angew Math Mech* 85(5): 351–365.
111. Iesan, D., 2010. Deformation of orthotropic porous elastic bars under lateral loading. *Arch Mech* 62(1): 3–20.
112. Iovane, G., Nasedkin, A.V., 2005. Finite element analysis of static problems for elastic media with voids. *Comput Struct* 84(1-2): 19–24.
113. Rameʼzani, H., Jeong, J., 2015. Non-linear elastic micro-dilatation theory: Matrix exponential function paradigm. *Int J Solids Struct* 67-68: 1–26.
114. Rueger, Z., Lakes, R.S., 2016. Experimental Cosserat elasticity in open-cell polymer foam. *Philos Mag* 96(2): 93–111.
115. Sladek, J., Sladek, V., Repka, M. et al., 2016. Static and dynamic behavior of porous elastic materials based on micro-dilatation theory: A numerical study using the MLPG method. *Int J Solids Struct* 0: 1–10.
116. Solyaev, Y., Volkov, A., Lurie, S., 2016. Surface effects in the pure bending problem in the theory of elastic materials with voids. In: *Proceedings of 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM 2016)*, Montreal, Canada.

117. Solyaev, Y.O., Lurie, S.A., 2014. Deformation of a thin layer that is bonded to a massive substrate in the theory of thermoelastic materials with voids. *Int J Nanomech Sci Technol* 5(1): 33–49.

118. Thurieau, N., Kouitat Njiwa, R., Taghite, M., 2014. The local point interpolation-boundary element method applied to the solution of mechanical 3D problem of a microdilatation medium. *Eur J Mech, A/Solids* 47: 391–399.

119. Prokudin, O.A., Solyaev, Yu.O., Babaitsev, A.V., Artem'ev, A.V., Korobkov, M.A., 2020. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*. No. 4, pp. 260-270. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.22

120. Vasiliev, V.V., Morozov, E.V., 2018. *Advanced mechanics of composite materials and structures*. Elsevier.

121. О.В. Тушавина, Пронина П.Ф., Егорова М.С., Математическое моделирование теплового излучения при высокоскоростном обтекании космических аппаратов, В книге: II-я Международная конференция «Композитные материалы и конструкции». Тезисы. Москва, 2021. С. 86-87.

122. Бабайцев А.В., Вятлев А.П., Егорова М.С., Пронина П.Ф. АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ЭЛЕМЕНТАХ ЭВТИ. XXVIII Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». Москва 2022г.- Том 2. - С.16

123. Кузнецова Е.Л., Егорова М.С., Царева У.С. НЕСТАЦИОНАРНОЕ КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ УДАРНИКОВ И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОЛОСТЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ. XXVIII Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». Москва 2022г. -Том 2.-С.67

124. Пронина П. Ф., Тушавина О. В., Шумская С. А., Егорова М.С. Аналитическое моделирование теплопереноса в элементах ЭВТИ, *Тепловые процессы в технике* Т.14, №8, 2022г.

125. Бабайцев А. В., Шумская С. А., Егорова М.С., Оценка влияния технологических параметров на напряженно-деформируемое состояние изделий, полученных по технологии селективного лазерного сплавления, XII Международной научно-практической конференции, посвящённый 160-летию белорусской железной дороги (Гомель, 24-25 ноября 2022г)

126. М.С. Егорова, П.Ф. Пронина, Mathematical modeling of heat transfer in the screen-vacuum thermal insulation of spacecrafts., 19th International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering, 2023г.

127. М.С. Егорова, О.В. Тушавина, Исследование тепловой защиты элементов высокоскоростных летательных аппаратов в условиях аэрогазодинамического нагрева, Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред — международный симпозиум имени А.Г.Горшкова, 2023г.

128. Тушавина О.В., Пронина П.Ф., Егорова М.С. , ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ И ТЕМПЕРАТУР ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПРИ ОБТЕКАНИИ ДИССОЦИИРУЮЩИМ ПОТОКОМ ГАЗА, СТИН. 2023. № 12. С. 37-40.

129. Егорова М.С. О.В. Тушавина, Математическая модель тепломассопереноса внутри экранно-вакуумной теплоизоляции с учетом скорости распространения тепла внутри слоев, «Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов», конф., посвященной 70-летию БИИЖТа-БелГУТа. (Гомель, 16-17 ноября 2023г.)

130. Егорова М.С. ,О.В. Тушавина, Задачи тепломассопереноса в химически реагирующих пограничных слоях на затупленных телах, Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2023;165(3):294-306. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.3.294-306>

131. Tushavina O.V., Pronina P.F., Egorova M.S., Heat fluxes and surface temperatures at components of high-speed aircraft in a dissociating air flow// Russian Engineering Research. 2024. T. 44. № 1. С. 116-119.

132. А.Д. Никитин, В.Ю.Павлов, М.С. Егорова, Методы и оборудование для испытаний металлических материалов в области сверхмногоциклового усталости // СТИН, №12 С 20-24, 2024г.

133. Тушавина О.В., Егорова М.С., Пронина П.Ф. Modeling of Heat Transfer in a Plate Made of Composite Material in the Presence of a Thermal Energy Sink// LOBACHEVSKII JOURNAL OF MATHEMATICS (2024) т. 45, №5 с. 2403-2409

134. Егорова М.С., Калягин М.Ю., Рабинский Л.Н., Анализ вариационных моделей градиентных и дилатационных моделей с полями дефектами (порами)// В книге: Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXXI Международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. Москва, 2025. С. 82-83.

135. Егорова М.С., Калягин М.Ю., Рабинский Л.Н., Теория стержней (пластин), построенная для неклассических моделей пористой среды механики деформируемого тела// Труды МАИ. 2025. № 142.

136. Егорова М. С., Тушавина О. В. Теория стержней и пластин для градиентных пористых сред: корректные вариационные постановки// МАТЕРИАЛЫ XIV МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ, ПОСВЯЩЕННОЙ ПЯТИЛЕТКЕ КАЧЕСТВА (Гомель, 20–21 ноября 2025 г.), с.88

137. Егорова М. С. Теория стержней (пластин), построенная для неклассических моделей пористой среды механики деформируемого тела / М. С. Егорова, М. Ю. Калягин, Л. Н. Рабинский // Труды МАИ. – 2025. – № 142. – EDN HUNGID

138. Egorova M.S. A Dynamic Model of a Porous Gradient Medium and Classification of Wave Processes/ Egorova M.S. // Technical Physics Letters, 2026, Vol. 52, No. 2, pp. 39–43. DOI: 10.1134/S1063785026700112

139. Егорова М.С., Тушавина О.В. Обобщенная динамическая модель пористой градиентной среды и классификация волновых процессов// Труды МАИ: электрон. журнал. № 148. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188264>