УДК 517.938.5+531.38

Интегрируемый случай М. Адлера и П. ван Мёрбеке. Механическая интерпретация.

Соколов С.В.

Московский физико-технический институт (государственный университет), Институтский переулок, 9. Долгопрудный, Московская область, 141701, Россия

e-mail: sokolovsv72@mail.ru

Аннотация

В работе рассмотрен интегрируемый случай Адлера–ван Мёрбеке. Указана наиболее удобная для анализа форма дополнительного интеграла. Приведена возможная механическая интерпретация рассматриваемого случая. Рассмотрена связь с несколькими классическими интегрируемыми задачами механики. Обсуждаются условия физической реализуемости механической модели.

Ключевые слова: интегрируемые гамильтоновы системы, механическая интерпретация, уравнения Эйлера

1.Введение

Случай интегрируемости, найденный М. Адлером и П. ван Мёрбеке [1], является одним из самых сложных и одновременно наименее изученных в динамике твердого тела. Его появлению мы обязаны прежде всего работам А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко [2], [3], посвященным интегрированию уравнений Эйлера на конечномерных группах Ли. В результате на $so(4)$ возникает новое семейство интегрируемых квадратичных гамильтонианов с дополнительным интегралом четвертой степени. Инвариантные соотношения третьей степени для одного интегрируемого случая на $so(4)$ получены в работе [4]. Существование дополнительного интеграла четвертой степени, найденного в [1], связано с особой симметрией $so(4)$, допускающей вещественное представление в виде прямой суммы $so(3) \oplus so(3)$.

В работах [5] и [6] начато исследование фазовой топологии интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке. В качестве первого шага приводится в явном виде спектральная кривая и дискриминантное множество. Предъявлены характеристические показатели для определения типа критических точек ранга 0 и 1 отображения момента. Показано, как с помощью невырожденных особенностей ранга 0 и 1 отображения момента можно выделить бифуркационную диаграмму отображения момента из вещественной части дискриминантного множества спектральной кривой, ассоциированной с L - A парой интегрируемого случая Адлера–ван Мёрбеке. Получены примеры бифуркационных диаграмм. В отличие от классического анализа орбитальной устойчивости (см. например [7],[8]), в работе [5] были применены методы анализа устойчивости свойственные для вполне интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем, развитые в [9].

Хотелось бы отметить, что интересной задачей является исследование механической интерпретации системы Адлера–ван Мёрбеке. Для этого необходимо исследовать возможность приведения уравнений системы Адлера-ван Мёрбеке при частном соотношении параметров к виду известных интегрируемых случаев динамики твердого тела. Данная задача актуальна не только для случая Адлера–ван Мёрбеке, но и для систем Соколова [10] и Борисова–Мамаева–Соколова [4].

2.Гамильтониан, интеграл и фазовое пространство

Уравнения движения в задаче Адлера–ван Мёрбеке имеют вид уравнений Эйлера на алгебре Ли $so(4) = so(3) \oplus so(3)$,

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{S}}. \qquad (2.1)$$

На ко-алгебре $\mathrm{g} = so(4)^* \ (so(4) = so(3) \bigoplus so(3))$ с координатными функциями $\mathrm{P}^6(\mathbf{M}, \mathbf{S})$ определены скобки Ли–Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, S_j\} = 0, \quad \{S_i, S_j\} = \frac{1}{3} \varepsilon_{ijk} S_k. \qquad (2.2)$$

Скобка (2.2) имеет две функции Казимира

$$\mathbf{F}_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \quad \mathbf{F}_2 = (\mathbf{S}, \mathbf{S}). \qquad (2.3)$$

Как известно, для заданной функции Гамильтона H от $\mathbf{M}, \mathbf{S}$ уравнения движения с помощью скобки Ли-Пуассона можно записать в гамильтоновой форме

$$\dot{x} = \{H, x\}. \qquad (2.4)$$

Здесь x любая из переменных M_i, S_j.

На совместном уровне функций Казимира

$$\Pi^4_{a,b} = \{\mathbf{F}_1 = a^2, \mathbf{F}_2 = b^2\} \cong \mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2, \qquad (2.5)$$

индуцированная скобка Пуассона невырождена и ограничение системы (2.4) дает гамильтонову систему с двумя степенями свободы.

Рассмотрим следующий гамильтониан

$$H = (\mathbf{M}, A\mathbf{M}) + 2(\mathbf{M}, B\mathbf{S}) + (\mathbf{S}, C\mathbf{S}), \tag{2.6}$$

где диагональные 3×3–матрицы A, B, C имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
&A = \mathrm{d}iag\,[\alpha_2^2\alpha_3^2, \alpha_1^2\alpha_3^2, \alpha_1^2\alpha_2^2];\\
&B = \mathrm{d}iag\,[(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3, (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\alpha_1\alpha_3,\\
&(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\alpha_1\alpha_2];\\
&C = \mathrm{d}iag\,[\alpha_2\alpha_3(\alpha_2\alpha_3-4\alpha_1^2), \alpha_1\alpha_3(\alpha_1\alpha_3-4\alpha_2^2), \alpha_1\alpha_2(\alpha_1\alpha_2-4\alpha_3^2)].
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Чтобы утверждать, что система является вполне интегрируемой по Лиувиллю, необходимо указать еще один независимый первый интеграл, находящийся в инволюции с гамильтонианом (2.6). Мы приводим дополнительный интеграл в следующей симметричной форме

$$\begin{aligned}
&K = 3\sum_{i,j}\alpha_i(\alpha_j-\alpha_i)M_jS_jS_i^2 + \sum_i(\alpha_i-\alpha_j)(\alpha_i-\alpha_k)M_iS_i^3 -\\
&-(\mathbf{M},\mathbf{M})\sum_i[\alpha_j\alpha_kM_iS_i + 2(\alpha_j^2+\alpha_k^2)S_i^2].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Во втором и третьем выражении использовано суммирование, введенное С. В. Ковалевской. Здесь индекс i пробегает значения от 1 до 3 и для заданного i индексы j,k принимают значения из множества $\{1,2,3\}$ не равные i.

Отметим, что выражение (2.8) отличается от форм дополнительного интеграла, использованных в оригинальных работах, посвященных доказательству алгебраической интегрируемости (см. [1]). Дополнительный интеграл (2.8) наиболее приближен по виду к интегралам, указанным в работе [11] и в книге [12].

Теорема 1 $\{H, K\} = 0$, *если* $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

3 Механическая интерпретация

Уравнения движения в задаче Адлера–ван Мёрбеке (2.1), как уже было отмечено выше, имеют вид уравнений Эйлера на алгебре Ли $so(4) = so(3) \oplus so(3)$, которые также описывают вращение твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение [13], [14], [15], [16]. Эти уравнения исследовал В. А. Стеклов [17] в качестве модели вращения Земли. Современный обзор интегрируемых семейств метрик определенного вида на $so(4)$ и их механическая интерпретация содержится в книгах [18], [19], [20], [21], [12], [22].

Рассматриваемый в настоящей работе случай Адлера–ван Мёрбеке является интегрируемой гамильтоновой системой на алгебре $so(4)$ с дополнительным интегралом четвертой степени. В работе нами используется одна из возможных систем переменных $(\mathbf{M},\mathbf{S})$, соответствующая известному разложения алгебры $(so(4) = so(3) \bigoplus so(3))$ со скобкой Ли-Пуассона (2.2), обладающей двумя центральными функциями (2.3). Здесь трехмерный вектор $\mathbf{M}$ имеет смысл кинетического момента системы <<тело + жидкость>>, а компоненты трехмерного вектора $\mathbf{S}$ пропорциональны компонентам вектора *завихренности жидкости*.

Очевидно, что информация об эволюции вектора кинетического момента и вектора завихренности имеет важное значение при анализе динамики таких объектов, как топливные баки летательных аппаратов. В частности, рассматриваемые условия интегрируемости гамильтоновой системы являются необходимыми требованиями при анализе динамики модельных систем, так как при их нарушении возникают хаотические режимы движения жидкости и всей системы в целом, что затрудняет решение задачи управления движением летательного аппарата.

Уравнения движения (2.1) в случае квадратичного гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, A\mathbf{M}) + (\mathbf{M}, B\mathbf{S}) + \frac{1}{2}(\mathbf{S}, C\mathbf{S}), \tag{3.1}$$

где матрицы A, C – симметричные, матрица B – произвольная, называются уравнениями Пуанкаре-Жуковского. Как указано выше они описывают движение вокруг неподвижной точки твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость, полностью заполненную однородной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей вихревое движение [14], [15]. Вывод этих уравнений можно найти в [12].

В работе [15] Пуанкаре указал явное сведение к квадратурам случая осевой симметрии. Это простейший случай интегрируемости уравнений (2.1), для которого в силу требований симметрии для каждой из матриц диагональных матриц A, B, C совпадает пара собственных значений

$$a_{11} = a_{22}, \quad b_{11} = b_{22}, \quad c_{11} = c_{22}. \tag{3.2}$$

Тогда гамильтониан (3.1) после исключения функций Казимира (2.3) принимает вид

$$H = \frac{1}{2}aM_3^2 + b_{11}(M_1S_1 + M_2S_2) + b_{33}M_3S_3 + \frac{1}{2}cS_3^2, \tag{3.3}$$

где $a = a_{33} - a_{11}, c = c_{33} - c_{11}$. Дополнительный интеграл имеет вид $K = M_3 + S_3$ и может быть отнесен к типу Лагранжа.

Возвращаясь к гамильтониану задачи Адлера–ван Мёрбеке (2.6), мы видим, что в частном случае $\alpha_1 = \alpha_2$ матрицы (2.7) удовлетворяют требованиям (3.2). Положив в гамильтониане (2.6)

$$
\begin{aligned}
&2(\alpha_3^2 - \alpha_1^2) = a,\\
&2(\alpha_3 - \alpha_1)^2 = b_{33}, \quad 0 = b_{11}\\
&2(5\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_3 - \alpha_1^2) = c,
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

получим его в виде (3.3).

Мы видим, что в частном случае равенства любых двух параметров α_i динамика системы Адлера–ван Мёрбеке совпадает с динамикой интегрируемого случая осевой симметрии, рассмотренного Пуанкаре. В случае произвольного соотношения параметров α_i система Адлера–ван Мёрбеке, с механической точки зрения, является обобщением интегрируемого случая Пуанкаре.

Непосредственному исследованию сложной динамики системы Адлера–ван Мёрбеке в случае произвольного соотношения параметров и дополнительного интеграла четвертой степени будет посвящена отдельная публикация.

4.Заключение

В работе рассматривается интегрируемый случай Адлера–ван Мёрбеке. Представлена одна из возможных механических интерпретаций уравнений этой задачи. Рассматриваются условия, которым должны удовлетворять параметры системы, чтобы данная механическая модель возникала. В качестве следующих актуальных проблем можно перечислить другие случаи интегрируемости на $so(4)$, такие как случай Соколова [10], Борисова–Мамаева–Соколова [4], в которых вопросы механической интерпретации и физической реализуемости на данный момент остаются открытыми.

Благодарности

Автор выражает благодарность А. В. Борисову, И. С. Мамаеву, П. Е. Рябову и А. А. Ошемкову за плодотворные обсуждения и ценные советы, касающиеся как содержания работы, так и методологии исследования.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-01-00170, 16-01-00809.

Библиографический список

1.M. Adler, P. van Moerbeke. A new geodesic flow on $SO(4)$ // Probability, statistical mechanics and number theory. Advances in mathematics supplementary studies. 1986. no.9. pp. 81–96.

2. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Известия АН СССР. Серия: Математика. 1978. Т. 42. № 2. С. 396–415.

3. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли // Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1979, Москва, Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова. С. 3–94.

4.Borisov A.V., Mamaev I.S., Sokolov V.V. A New Integrable Case on $so(4)$ // Doklady Physics. 2001.Vol. 46.no. 12, pp. 888–889.

5. Ryabov P.E., Oshemkov A.A., Sokolov S.V. The Integrable Case of Adler – van Moerbeke. Discriminant Set and Bifurcation Diagram. *Regular and Chaotic Dynamics,*

2016, vol. 21, no. 5, pp. 581–592.

6. Рябов П.Е., Бирючева Е.О. Дискриминантное множество и бифуркационная диаграмма интегрируемого случая М. Адлера и П. ван Мёрбеке // Нелинейная динамика, 2016, Т. 12. № 4. С. 633–650.

7. Bardin B.S., Savin A.A. On the orbital stability of pendulum-like oscillations and rotations of a symmetric rigid body with a fixed point // Regular and Chaotic Dynamics. 2012. Vol. 17. no. 3–4, pp. 243–257.

8. Бардин Б.С., Чекина Е.А. Об устойчивости резонансного вращения динамически симметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты // Труды МАИ. 2016. №89. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=72568

9. Болсинов А.В., Борисов А.В., Мамаев И.С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // Успехи математических наук. 2010. Т. 65. no. 2(392). С. 71–132.

10. Sokolov V.V. One Class of Quadratic $so(4)$ Hamiltonians // Doklady Mathematics. 2004. Vol. 69. no. 1, pp. 108–111.

11. Болсинов А.В., Борисов А.В. Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли // Математические заметки. 2002. Т. 72. no. 1. С. 11–34.

12. Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 576 с.

13. Greenhill A.G. Plane vortex motion. Quart // Journal of Pure and Applied Mathematics. 1877/78. vol. 15. no. 58. pp. 10-27.

14. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные

однородной капельной жидкостью // Журнал Русского физико-химического общества. 1885. Т. XVII. Отд. 1. №. 6. С. 81–113.

15. Poincare H. Sur la precession des corps deformables // Bulletin astronomique. 1910. Vol. XXVII, pp. 321-356.

16. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 440 с.

17. Steklov V.A. Sur la mouvement d’un corps solide ayant une cavite de forme ellipsoidale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes // Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse. 1909. 3^{e} serie. Tome 1, pp. 145-256.

18. Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 413 с.

19. Adler M., P. van Moerbeke, and P. Vanhaecke. Algebraic Integrability, Painlevé Geometry and Lie Algebras // Ergebnisse der Mathematik und ihrerGrenzgebiete. 2004. Vol. 47 (3), Berlin-Heidelberg: Springer, 484 p.

20. Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-воУдмуртского гос. ун-та, 1995. – 432 с.

21. Борисов А.В., Мамаев И.С. Современные методы теории интегрируемых систем.– Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 296 с.

22. Богоявленский О.И. Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. – М.: Наука, Гл. ред. физ. мат. лит., 1991. – 320 с.