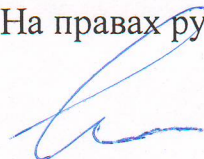


Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



МИХАЙЛОВА ЕЛЕНА ЮРЬЕВНА

**УДАР СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПО УПРУГОМУ
ПОЛУПРОСТРАНСТВУ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент Федотенков Г.В.

Москва 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ТИПА ТИМОШЕНКО И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА	6
§ 1.1. Современное состояние исследований	6
§ 1.2. Уравнения движения упругой среды	21
§ 1.3. Уравнения движения оболочки	24
§ 1.4. Постановка контактной задачи для сферической оболочки и упругого полупространства	26
§ 1.5. Функции влияния для полупространства	31
Глава 2. СВЕРХЗВУКОВОЙ ЭТАП КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА	37
§ 2.1. Система разрешающих уравнений	38
§ 2.2. Метод решения задачи на сверхзвуковом этапе взаимодействия	42
§ 2.3. Алгоритм решения задачи на сверхзвуковом этапе взаимодействия	47
§ 2.4. Примеры расчетов	55
Глава 3. КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ВРЕМЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ	67
§ 3.1. Функция влияния для оболочки	68
§ 3.2. Система разрешающих уравнений	73
§ 3.3. Алгоритм и метод решения задачи на произвольном этапе контактного взаимодействия	77
§ 3.4. Примеры расчетов	89
Заключение	105
Список литературы	107

Введение

Задачи механики контактных взаимодействий являются одними из основных проблем, подлежащих решению на этапах проектирования и создания самых различных объектов современной техники. Эти проблемы являются особенно актуальными и важными для авиационной, космической, судостроительной области, а также других отраслей промышленности, где широко применяются тонкостенные оболочечные элементы конструкций, которые работают в условиях нестационарных контактных взаимодействий. В аэро-космической отрасли остро стоят проблемы обеспечения минимума массы конструкции при достаточном запасе прочности. Это приводит к необходимости широкого использования оболочечных элементов. Они непременно используются в конструкциях обшивок корпусов, оперений, килей, т.е. как раз тех элементов, которые испытывают динамические и нестационарные внешние воздействия. Поэтому решение задач о нестационарном контактном взаимодействии оболочечных элементов конструкций ЛА приобретают особенную актуальность и практическую значимость. Например, подобные проблемы возникают в задачах расчета нестационарного напряженно-деформированного состояния спускаемых космических аппаратов или самолетов в условиях жесткой или аварийной посадки на твердую поверхность, также в задачах о возможных контактных взаимодействиях конструкций ЛА при их транспортировке, космической стыковки орбитальных аппаратов и др.

Можно привести множество работ, посвященных исследованию контактных взаимодействий. Как показывает аналитический обзор, приведенный в § 1.1, в настоящее время наименее изученными являются нестационарные контактные задачи с подвижной границей области взаимодействия. Это связано, прежде всего, с тем, что построение решений проблем данного класса значительно усложняется смешанным и нелинейным

характером граничных условий, необходимостью учета начальных условий и неизвестностью заранее области контакта, которая изменяется в процессе взаимодействия. Поэтому развитие аналитических и численных подходов к их решению представляет большой научный и практический интерес.

Данная работа посвящена исследованию нестационарной контактной задачи с подвижной областью взаимодействия об ударе сферической оболочки типа Тимошенко по упругому полупространству. Такие задачи возникают при определении напряженно-деформированного состояния в процессе удара оболочечной конструкции о воду, грунт, другие тела. Методы решения и обширная теоретическая база исследований, используемые для задач с фиксированной областью контакта, в этих случаях не применимы.

В первой главе приведен обзор работ, в которых исследуются нестационарные задачи об ударе деформируемых тонких оболочек по деформируемому полупространству, а также о воду, грунт, другие оболочки или тела. Приводятся уравнения движения упругого полупространства и сферической оболочки типа Тимошенко. Дается общая постановка задачи об ударе деформируемой оболочки по упругому полупространству. Подробно описываются функции влияния для полупространства.

Во второй главе исследуется сверхзвуковой этап ударного взаимодействия сферической оболочки и упругого полупространства. Он характеризуется тем, что скорость границы области контакта превышает скорость волн растяжения - сжатия в упругой среде. Поэтому возмущения не выходят за пределы области взаимодействия. Для этого случая построена система разрешающих уравнений, включающая в себя уравнения движения оболочки, содержащие в правой части интегральное представление для контактного давления; уравнение движения оболочки как абсолютно твердого тела; соотношения, связывающее радиус границы области контакта с глубиной погружения ударника, и начальные условия. Для построения решения системы уравнений используется метод Фурье разделения переменных, с помощью которого система разрешающих уравнений сводится

к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов рядов, зависящих от времени. Приведен численно - аналитический алгоритм решения этой системы. Представлены результаты расчетов взаимодействия оболочки и полупространства при одинаковых и различных параметрах материалов оболочки и полупространства.

В третьей главе рассматривается контактное взаимодействие оболочки и полупространства на произвольном временном интервале. Система разрешающих уравнений включает в себя уравнение движения оболочки как абсолютно твердого тела; соотношения, связывающее радиус границы области контакта с глубиной погружения ударника и основное уравнение, вытекающее из граничного условия и базирующееся на принципе суперпозиции, который связывает нормальные перемещения оболочки и полупространства с контактным давлением с помощью интегральных соотношений. Для решения построен и реализован на ЭВМ численно-аналитический алгоритм, основанный на методе механических квадратур. Приводятся примеры расчетов, в которых помимо результатов взаимодействия оболочки полупространства на произвольном временном интервале сравниваются результаты, полученные с помощью методов и алгоритмов второй и третьей глав. А также приводится сравнение с результатами других авторов.

Глава 1. ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ТИПА ТИМОШЕНКО И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

§ 1.1. Современное состояние исследований

Эксплуатации современных машин, механизмов, аппаратуры вызывает необходимость исследования ударных процессов, возникающих в результате взаимодействия твердых тел. Экспериментальные исследования ударных взаимодействий твердых тел связаны с большими материальными затратами. Теоретические решения позволяют сократить объем материальных вложений и определить рациональные границы экспериментальных исследований. В точной постановке задачи об упругом соударении деформируемых тел приводят к нестационарным контактным задачам. При решении таких задач используются как аналитические, так и численные методы.

Остановимся здесь на нестационарных задачах об ударе деформируемых тонких оболочек по деформируемому полупространству, о воду, грунт, по другие оболочки или тела.

Одной из простейших моделей учета деформируемости ударника является абсолютно жесткая оболочка, заполненная упругой средой. Она позволяет использовать многие результаты, полученные для абсолютно жестких тел. В работах А.Г. Горшкова и Д.В. Тарлаковского [1], Д.В. Тарлаковского [2, 3] рассмотрены осесимметричная и плоская задачи о вертикальном ударе абсолютно жестких сферы и кругового цилиндра с упругим наполнителем по упругому полупространству. Найдено выражение для реакции наполнителя на поступательное движение ударника.

Следующим этап усложнения контактной задачи является модель ударника в виде тонкой оболочки. В работах А.Г. Горшкова и Д.В. Тарлаковского [4, 5], Д.В. Тарлаковского [6] рассмотрена плоская задача об ударе по упругой полуплоскости тонкой упругой круговой цилиндрической

оболочки. Для последней использованы уравнения типа С.П. Тимошенко. С помощью функций влияния для полупространства и оболочки из граничных условий построено интегральное уравнение относительно контактного давления. Указан алгоритм его численного решения.

Эта же задача рассмотрена Д.В. Тарлаковским и Г.В. Федотенковым [7], А.Г. Горшковым, Д.В. Тарлаковским и Г.В. Федотенковым [8]. В первой из этих работ исследован начальный сверхзвуковой этап взаимодействия с использованием интегральной связи контактного давления и вертикального перемещения, полученного в монографии А.Г. Горшкова и Д.В. Тарлаковского [9]. Во второй с использованием граничного интегрального уравнения дано решение для произвольных моментов взаимодействия. Также основные аспекты этой проблемы можно найти в работах А.Г. Горшкова, Д.В. Тарлаковского и Г.В. Федотенкова [10], А.В. Вестяка, Д.В. Тарлаковского и Г.В. Федотенкова [11, 12], А.Г. Горшкова, А.Л. Медведского, Д.В. Тарлаковского и Г.В. Федотенкова [13], Д.В. Тарлаковского и Г.В. Федотенкова [14, 15], Г.В. Федотенкова [16].

Подобная задача рассмотрена С.Н. Поповым и В.Р. Богдановым для цилиндрической [17] и аналогичная для сферической оболочки [18]. В работах В.Д. Кубенко и В.Р. Богданова исследуется напряженно-деформированное состояние цилиндрической [19], сферической оболочки [20] и упругого полупространства в результате их соударения. Исходные уравнения динамики системы оболочка-полупространство сводятся к бесконечной системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Здесь предлагаемая методика позволяет рассчитать контактное давление только в лобовой точке. В работах Д.В. Тарлаковского [21 – 23] дополнительно рассмотрено влияние акустического заполнителя в круговой цилиндрической оболочке. Е.Ю. Михайловой, Г.В. Федотенковым, Д.В. Тарлаковским, В.Д. Кубенко и Э.И. Старовойтовым рассмотрен удар сферической оболочки типа Тимошенко по упругому полупространству [24 – 30], [31 – 42]. В первых исследуется начальный этап взаимодействия. Задача сводится к бесконечной

системе интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов рядов по полиномам Лежандра и их производным. Во вторых для решения задачи используются функции влияния для полупространства и сферической оболочки. Получена система разрешающих уравнений, основное уравнение которой вытекает из граничных условий и интегральных представлений нормальных перемещений оболочки и полупространства, базирующихся на принципе суперпозиции.

В работе П.З. Луговий, В.Ф. Мейш, К.Г. Головки [43] изучено динамическое поведение армированных оболочек вращения на упругом основании с использованием модели Пастернака. Для решения волновой задачи теории упругости при взаимодействии оболочки с фундаментом и основанием (полуплоскость) В.К. Мусаевым [44] применен метод конечных элементов в перемещениях. Задача решена с использованием метода сквозного счета, без выделения разрывов.

Помимо контактного взаимодействия оболочек с упругим полупространством рассмотрены задачи, связанные с ударом оболочек друг о друга и по другим телам. В работе Д.В. Тарлаковского, Г.В. Федотенкова [45] рассмотрены нестационарные контактные задачи с подвижными границами для двух упругих цилиндрических или сферических оболочек типа С.П. Тимошенко. С помощью принципа суперпозиции получена система разрешающих уравнений. Найдены функции влияния для оболочек в виде разложений в ряды Фурье. Построен и реализован численно-аналитический алгоритм решения.

А.А. Локтевым, Д.А. Локтевым [46] решена задача поперечного удара твердого тела по шарнирно опертой по контуру упругой сферической оболочке. Решение внутри области контакта находится в виде стандартных уравнений, описывающих взаимодействие ударника и мишени. Решение вне контактной области строится при помощи лучевых рядов. Ю.А. Россихиным, М.В. Шитиковой, В. Шамариным [47] рассмотрено контактное взаимодействие упругой сферы или стержня со сферическим затуплением на

конце со сферической оболочкой. Решение получено с использованием нелинейной теории Герца, с учетом теории разрывов и лучевых разложений.

В работе Р.И. Непершина [48] исследуется удар штампа с криволинейным профилем по тонкостенной трубе с использованием мембранной теории жесткопластических оболочек. А С.В. Зефировым, А.В. Кочетковым, И.В. Молевым [49] рассмотрено решение плоской задачи динамического взаимодействия ударника с трубопроводом, содержащим и не содержащим жидкость. Показаны особенности волновых процессов для безопорного участка трубопровода и для трубопровода, опирающегося на неподвижную плоскую поверхность. Решение в работах [48] и [49] представлено в численном виде.

Также исследованы процессы соударения оболочек с жестким основанием В.А. Ивановым, А.И. Кибец, Ю.И. Кибец, Д.В. Шошиным. [50]; А.И. Садыриным, С.В. Крыловым, А.Б. Батариним, С.А. Пироговым [51, 52]; С.В. Кобенко, А.В. Радченко [53]; Е.В. Игоничевой, А.И. Кибец, Ю.И. Кибец, А.Н. Самыгиным [54].

Задачам о погружении оболочек вращения в жидкость посвящено значительное количество публикаций. Однако, эти проблемы в настоящее время исследованы не достаточно. В последнее время прогресс в этой области связан с применением численных методов для решения конкретных задач.

Методика численного исследования процесса вертикального входа тонкостенных упругих сферических и конических оболочек, связанных с жестким телом в полупространство, занятое идеальной сжимаемой жидкостью разработана А.Г. Горшковым и Н.И. Дробышевским [55] (см. также книгу А.Г. Горшкова и Д.В. Тарлаковского [56]). Для описания поведения жидкости используются переменные Лагранжа, которые позволяют непосредственно в процессе решения определять перемещения свободной поверхности жидкости и точно поставить граничное условие на смоченной поверхности оболочки. Решение задачи гидроупругого

взаимодействия проводится конечно-разностным методом. Расчетная область жидкости покрывается сеткой, ячейки которой представляют собой четырехугольные лагранжевы элементы, движущиеся вместе с жидкостью. На основании этого подхода изучены характеристики реакции при внедрении в сжимаемую жидкость сферических, конических, а также цилиндрических (наклонный вход) оболочек (А.Г. Горшков и Н.И. Дробышевский [55, 57]).

Применение метода конечных элементов для решения задач удара и проникания деформируемых (жестких) тел в жидкость дано в монографии Н.Ф. Ершова и Г.Г. Шахверди [58]. В рамках данного подхода Г.Г. Шахверди [59] решена задача удара о свободную поверхность жидкости упругих и упругопластических сферических оболочек. Эти вопросы рассматривались также Г.Г. Шахверди [60], Е.А. Максимовой, В.И. Петуховой и Г.Г. Шахверди [61].

В работах В.И. Гнитько, У.Е. Огородник, Е.А. Стрельникова [62] и В.И. Гнитько, У.Е. Марченко, В.В. Науменко [63] предложен метод расчета динамических характеристик оболочек вращения с жидкостью, подверженных действию кратковременных импульсных нагрузок. Метод основан на сведении задачи об определении давления жидкости на оболочку к системе сингулярных интегральных уравнений. Связанная задача теории упругости решена с помощью сочетания методов конечных и граничных элементов. Данные численные методы также использованы Н.А. Тарануха, С.Д. Чижиумовым [64] при решении задачи динамического гидроупругого взаимодействия судового корпуса с окружающей жидкостью.

При скоростях удара порядка сотен метров в секунду процесс взаимодействия тонкостенных конструкций с жидкостью сопровождается возникновением волн сильного разрыва и зон кавитации в жидкости, появлением и развитием упругопластических деформаций в материале конструкции, существенным формоизменением контактных и свободных поверхностей. Исследованию указанных нелинейных эффектов посвящены работы А.В. Кочеткова и С.В. Крылова [65], В.Г. Баженова, А.В. Кочеткова,

С.В. Крылова и А.Г. Угодчикова [66], В.Г. Баженова, А.В. Кочеткова и С.В. Крылова [67, 68], в которых развита численная методика решения осесимметричных задач удара деформируемых тел о поверхность сжимаемой жидкости. В качестве примера рассмотрены задачи о внедрении жестких тел и сферических оболочек с присоединенными массами в идеальную сжимаемую среду. Предлагаемая методика основана на синтезе двух явных схем: сквозного счета С.К. Годунова на подвижной сетке для жидкости и типа «крест» для интегрирования нелинейных уравнений движения тонких оболочек. Анализ кавитационных явлений при проникании в рамках простейшей модели показал, что они носят локальный характер по времени и пространству и приводят к заметному увеличению прогибов лишь для очень тонких оболочке ($R/h \geq 200$).

Ранний этап процесса проникания тонких упругих сферических оболочек в сжимаемую жидкость исследован также в работах В.В. Гавриленко [69, 70], В.Д. Кубенко [71], В.Д. Кубенко и В.В. Гавриленко [72], В.В. Гавриленко, В.Н. Гавриленко и В.Д. Кубенко [73] и А.Я. Сагомояна [74, 75], А.Н. Гостева [76]. При небольших скоростях погружения деформируемых тел (оболочек) в жидкость через ее свободную поверхность влияние сжимаемости жидкости сказывается только в самый начальный момент времени (пока волна сжатия не вышла за пределы тела). Для тел вращения, которые не имеют плоских границ, этот период очень мал. В этом случае движение жидкости будет описываться уравнением Лапласа, и для гидродинамических нагрузок, действующих на тело (оболочку), можно получить аналитические выражения. Подставляя их в уравнения движения оболочек и интегрируя последние каким-либо методом, определяют характеристики реакции. Полученные таким образом результаты в случае погружения в жидкость сферических и цилиндрических оболочек достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными и численными решениями для сжимаемой жидкости (А.Г. Горшков и Н.И. Дробышевский [55], Э.И. Григолюк и А.Г. Горшков [77], А.Г. Горшков и Д.В. Тарлаковский

[56], В.Г. Баженов, А.В. Кочетков и С.В. Крылов [68], А.И. Лобода [78], В.Р. Богданов и В.Д. Кубенко [20], В.Д. Кубенко и В.В. Гавриленко [72], М.Ф. Ионина [79], А.Н. Гуз, В.Д. Кубенко, А.Е. Бабаев [80], В.В. Гавриленко [81], А.В. Нетребко, Ю.А. Созоненко [82].

Теоретические результаты для несжимаемой жидкости в большинстве получены с использованием теории погружения Г. Вагнера, в основу которой положены следующие допущения: относительное движение жидкости при очень быстром погружении тела совпадает с ее движением при обтекании непрерывно расширяющегося плоского диска (пластины); скорость расширения диска (пластины) равна скорости увеличения смоченной поверхности тела; скорость обтекания равна скорости погружения. Эти гипотезы, справедливые для тел тупой формы, позволяют определить как силу удара, так и распределение давления по смоченной поверхности тела. Теория Г. Вагнера позволяет учитывать эффект встречного движения вытесняемой погружающимся телом жидкости, которое увеличивает смоченную поверхность и влияет на скорость изменения поверхности удара.

В случае быстрого вертикального погружения упругих цилиндрических, конических и сферических оболочек в жидкость, гидродинамические нагрузки достигают своего максимального значения при небольших глубинах погружения. Поэтому можно, воспользоваться теми же вагнеровскими соображениями, что и для жестких тел (Э.И. Григолюк и А.Г. Горшков [77]). При таком подходе после определения гидродинамического давления $p = p_1 + p_2$ (p_1 соответствует давлению на жесткой оболочке, а p_2 учитывает давление, обусловленное деформацией оболочки) используется комбинированный метод. Он основан на преобразовании с помощью процедуры Бубнова или метода прямых систем уравнений в частных производных, описывающих поведение оболочек, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и последующем их решении методом Рунге-Кутты (или каким-либо другим численным методом).

На основании данного подхода решен большой класс задач о вертикальном входе в жидкость оболочек: двухслойных сферических и конических (Г.Н. Вакалов и А.Г. Горшков [83]), двухслойных цилиндрических (А.Г. Горшков и В.Г. Богомолов [84]), ортотропных и слоистых цилиндрических (Ю.В. Кочеулов и А.И. Шуршалов [85], М.И. Мартиросов и А.И. Шуршалов [86], А.И. Шуршалов [87]), трехслойных сферических (М.И. Мартиросов и А.И. Шуршалов [88, 89]).

Описанный выше прием определения гидродинамических нагрузок используется и в случае несимметричного входа упругих цилиндрических оболочек в несжимаемую жидкость (В.Г. Богомолов [90, 91]). В первой из этих работ в случае плоской задачи давление представляется в виде суперпозиций давлений от вертикального проникания и горизонтального движения меняющейся во времени погруженной части. Во второй же образующая оболочки составляет малый угол со свободной поверхностью, и смоченная поверхность аппроксимируется частью эллипса, полуоси которого есть функции времени, а ширина смоченной поверхности зависит от продольной координаты.

В работах А.Г. Горшкова и М.И. Мартиросова [92], М.И. Мартиросова [93-95] проведен численный анализ динамического поведения упругих сферических оболочек, связанных с твердым телом, при несимметричном входе в полупространство, занятое идеальной несжимаемой жидкостью. Гидродинамические нагрузки, действующие на оболочку со стороны жидкости, определяются как суперпозиция нагрузок от вертикального проникания оболочки и горизонтального движения изменяющейся во времени ее погруженной части. Для исследования напряженно-деформированного состояния тонкой упругой оболочки используется один из вариантов геометрически нелинейных уравнений движения, учитывающих инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига. К ним добавляются уравнения движения всей конструкции как твердого тела. Задача решается методом конечных разностей с применением явной схемы типа «крест».

Анализируется влияние на динамическое поведение конструкции начальной скорости и угла входа, начальной угловой скорости вращения, сжимаемости жидкости, подъема ее свободной поверхности (эффект Г. Вагнера), толщины оболочки, массы твердого тела и ряда других факторов. Исследуется также влияние гидроупругого взаимодействия между оболочкой и жидкостью на динамику входа. Показано, что при углах тангажа $\vartheta \geq 60^\circ$ задачу о наклонном входе конструкции в жидкость можно заменить задачей о вертикальном входе с начальной скоростью V_0 , равной вертикальной составляющей при несимметричном погружении. Кроме того, установлено, что до скоростей $V_0 \leq 100$ м/с сжимаемость жидкости (воды) практически не влияет на напряженно-деформированное состояние сферической оболочки.

Поведение сферических оболочек и оболочек с присоединенными жесткими массами при ударе о жидкость рассматривались также М.И. Мартиросовым и А.И. Шуршаловым [86], М.И. Мартиросовым и Л.Н. Рабинским [96]. Задача о выходе оболочек вращения из жидкости в приближенной постановке решена А.Г. Горшковым, А.В. Коровайцевым и М.И. Мартиросовым [97].

В работе Т.И. Хабахпашевой [98] рассмотрена осесимметричная задача об ударе упругой сферической оболочкой по тонкому слою идеальной несжимаемой жидкости. Показано, что при ударе по поверхности жидкости в нижней части оболочки возникают колебания, соответствующие высоким модам, что согласуется с экспериментами и доказывает несостоятельность моделей, в которых учитывается небольшое количество мод. Чем тоньше слой жидкости, тем выше гидродинамические нагрузки и амплитуда упругих колебаний оболочки при ударе.

Л.И. Могилевичем, В.С. Поповым [99] проведено исследование динамики системы упругий цилиндр-слой вязкой несжимаемой жидкости на основе постановки и решения задачи гидроупругости, а также в рамках одномассовой модели. Найдены резонансные частоты колебаний системы

упругая оболочка-слой жидкости, и резонансные частоты колебаний одномассовой системы для двух вариантов торцевого истечения жидкости.

Взаимодействие тонкой сферической оболочки с окружающей ее акустической жидкостью с учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига исследовано В.Г. Богомоловым, А.А. Федотовым [100] и В.Г. Богомоловым [101]. Предложен метод получения аналитического решения задачи, основанный на применении преобразования Лапласа.

Описание экспериментальных установок различного типа для исследования процесса удара и входа тел в жидкость, а также результаты модельных экспериментов приводятся в работах Ю.К. Бивина, Ю.М. Глухова и Ю.В. Пермякова [102], В.А. Ерошина, Г. А. Константинова, Н.И. Романенко и Ю.Л. Якимова [103], А.И. Лободы и А.И. Шуршалова [104], Э.В. Парышева, В.В. Воронина и А.Ю. Тормахова [105], В.А. Смелянского [106], S. Hirano, S. Yoshikawa и Y. Nimeru [107] (см. также обзоры А.Г. Горшкова [108], Э.И. Григолюка и А.Г. Горшкова [109], А.В. Вестяка, А.Г. Горшкова и Д.В. Тарлаковского [110]).

В работе А.Н. Ломакина и А.В. Любомудрова [111] приводится описание прибора, предназначенного для регистрации параметров ударного взаимодействия конструкций с жидкостью. Он измеряет одновременно по девяти каналам деформации, перемещения, скорости перемещений, ускорения и давления в диапазоне частот от 0,1 до 200 кГц. Работа измерительного комплекса проверялась при исследовании удара цилиндрической оболочки о воду (приводятся данные об ускорении центра масс системы).

Экспериментальные данные по определению давления на расширяющейся во времени смоченной поверхности сферического сегмента при его вертикальном погружении в сжимаемую жидкость представлены в работе В.А. Ерошина, Г.А. Константинова, Н.И. Романенкова и Ю.Л. Якимова [112]. В экспериментах бак с жидкостью диаметром 0,4 м, к днищу которого для устойчивости прикреплен тяжелый груз, свободно

подвешивался на стальных струнах. Модель с датчиками давления и ускорения под действием силы тяжести разгонялась по направляющим струнам и погружалась в жидкость, находящуюся в баке. Скорость модели изменялась в пределах от 2 м/с до 6 м/с и определялась двумя способами: вычислялась по высоте свободного падения и измерялась контактным способом на базе 0,1 м с выходом на электронный осциллограф (радиус кривизны сферической поверхности $R = 0,11$ м). На поверхности модели было расположено три пьезоэлектрических датчика давления. Регистрация сигналов давления и ускорения модели производилась двухлучевым электронным осциллографом.

В работе Ю.К. Бивина, Ю.М. Глухова и Ю.В. Пермякова [102] приведены результаты экспериментального изучения с помощью скоростной киносъемки вертикального входа в воду стальных и дюралевых сфер диаметром 0,01 м, массой соответственно $4 \cdot 10^{-3}$ и $1,45 \cdot 10^{-3}$ кг. Исследовался диапазон скоростей погружения от 60 до 700 м/с. Экспериментальная установка состояла из пневматического разгонного устройства калибром 10 мм, бака прямоугольной формы (глубиной 0,5 м, шириной 0,46 м, длиной 0,76 м, изготовленного из пластин оргстекла толщиной 0,03 м и заполненного дистиллированной водой), скоростной кинокамеры ЖЛВ-2М, импульсного источника света на лампе ИФК-120, системы автоматики, согласующей работу пневмоустановки, кинокамеры и лампы-вспышки для получения кинограмм в нужный период времени. Скорость входа тела в воду определялась с помощью фотодиодов. Дана оценка значений присоединенной массы и коэффициента сопротивления, проанализировано развитие всплеска, образование и рост каверны, поведение тела в каверне.

S. Hirano, S. Yoshikawa и Y. Himero [107] экспериментальным путем нашли распределение давления по днищу плоскокилеватого тела, составленного из двух пластин, при ударе о жидкость (задача слемминга). Ими также найдены компоненты результирующей гидродинамической силы и исследовано брызгообразование и струйные явления.

Г.А. Щегловым и А.В. Ермаковым [113] была изучена модельная задача аэроупругости, в которой рассматриваются упругие конструкции, обтекаемые пространственным потоком несжимаемой среды. Упругие конструкции представляют собой две тонкостенные консольно закрепленные оболочки вращения, связанные системой упругих связей, установленные рядом на непроницаемом экране так, что оси вращения перпендикулярны экрану. Дискретизация упругой системы проводится в препроцессоре коммерческого пакета Patran путем разбиения геометрической модели на четырехугольные оболочечные конечные элементы. Для расчета параметров течения и нестационарного аэродинамического нагружения конструкций применяется метод вихревых элементов, основанный на модели потока завихренности Лайтхилла-Чорина. Уравнение динамики упругой системы решаются методом разложения по собственным формам колебаний. Сравнение спектров нагрузок для упругой и абсолютно жесткой конструкции показало, что спектры изменяются незначительно.

В работе В.Д. Кубенко, П.С. Ковальчук, Н.П. Подчасовым [114] предложен метод анализа нестационарных колебаний цилиндрических оболочек, взаимодействующих с потоком жидкости и подверженных внешнему периодическому давлению с медленно изменяющейся частотой.

Ю.Ф. Орловым и А.С. Суворовым [115] проведено исследование трехмерной нестационарной задачи о колебаниях гибкой оболочки, движущейся по поверхности идеальной тяжелой жидкости. Силы, обусловленные поверхностным натяжением, не учитываются. Задача формулируется в пространстве потенциала ускорений. Потенциал пульсирующего источника находится из решения уравнения Эйлера и уравнения неразрывности с учетом условий на свободной поверхности (линейная теория малых волн) и условий на бесконечности. Функция плотности распределения слоя диполей определяется из граничных условий на поверхности оболочки. Получены формулы для определения формы

гравитационных волн на поверхности жидкости и собственных частот колебаний оболочки.

Вопросы нестационарного взаимодействия тонкостенных конструкций, в частности, оболочек с грунтами изучены недостаточно. В имеющихся решениях по удару сферических оболочек, связанных с жестким телом заданной массы, о поверхность грунта (А.В. Бобров [116], И.П. Власова [117]) реакция грунта заменяется распределенным по пятну контакта давлением, величина которого в каждой точке определяется на основе приближенной одноосной модели грунта (Л.Я. Любин и А.С. Повицкий [118]). В этом случае контактное давление однозначно определяется вертикальной составляющей скорости движения точки оболочки, находящейся в зоне пятна. Найдены характеристики реакции.

Аналогичная задача рассмотрена В.Г. Баженовым, А.В. Кочетковым, С.В. Крыловым и В.Р. Фельдгуном [119]. При этом грунт рассматривался как идеальная сплошная пластически сжимаемая среда. Задача решается конечноразностным методом.

А.Я. Сагомоян и М.Н. Моргунов [120] исследовали задачу о высокоскоростном ударном входе упругой цилиндрической оболочки с жестким передним срезом в пластически сжимаемую среду (удар торцом). Здесь взаимодействие с грунтом осуществляется через жесткий диск.

Существенное значение для решения проблемы ударного взаимодействия тел и элементов конструкций с грунтом имеют экспериментальные исследования. В работе Ю.К. Бивина, В.В. Викторова и Б.Я. Коваленко [121] с помощью пенетрации при проникании с постоянной скоростью цилиндрического тела с коническим наконечником определены физико-механические характеристики глинистого грунта (опыты проводились на пневмоустановке в диапазоне скоростей входа от 1 до 20 м/с). Результаты эксперимента по косоугольному входу группы тел в упругопластическое полупространство приведены Ю.К. Бивиним [122].

Обширные экспериментальные данные о внедрении жесткого шара в ледяной и снежный покров представлены В.П. Епифановым [123], В.П. Епифановым и В.П. Кузьменко [124].

Различные методики экспериментов по взаимодействию твердых ударников с грунтом и их результаты привели в своих работах В.В. Баландин и А.М. Брагов [125], Ю.Н. Бухарев, А.Е. Кораблев и М.И. Хаймова [126], А.Б. Филяков, В.В. Коган и В.Н. Выходцев [127], V.I. Bateman, T.G. Came, D.M. McCau [128], S. Hirano, S. Yoshikawa, Y. Himeno [129].

В.Н. Бакулин, П.Н. Овчаров и В.А. Потопахин [130, 131] на экспериментальной установке, состоящей из пневмопушки с пультом управления подачей сжатого газа, мишени и измерительно-регистрирующей аппаратуры с блоком автоматического управления, провели серию опытов по исследованию деформирования тонких конических оболочек с жесткими наконечниками при их вертикальном проникании в грунт. Метание моделей осуществлялось при скоростях от 60 до 120 м/с. Короб мишени заполнялся глиной. Измерения относительных деформаций проводились тензорезисторами с базой 5 мм.

Экспериментальные исследования о поведении оболочек при их ударе боковой поверхностью о песок описаны в работах А.Г. Горшкова и А.И. Лободы [132] (цилиндрические оболочки) и А.Г. Горшкова, А.И. Лободы и С.В. Смелянского [133], А.Г. Горшкова и В.А. Колодяжного [134] (конические оболочки). Испытания проводились на специальном экспериментальном комплексе, в состав которого входит стенд для воспроизведения ударного нагружения, измерительный комплекс и емкости для жидких и сыпучих сред. Описание данного комплекса и его возможности изложены в обзоре А.В. Вестяка, А.Г. Горшкова и Д.В. Тарлаковского [135]. Построены эпюры деформаций и напряжений по характерным сечениям оболочек в зависимости от определяющих физических и геометрических параметров и времени.

Результаты этих исследований могут служить основой для построения и обоснования различных приближенных моделей грунтов.

Таким образом, рассматриваемая в работе нестационарная контактная задача об ударе тонкостенной сферической оболочки по упругой полупространству исследована недостаточно, и поэтому ее решение актуально.

§ 1.2. Уравнения движения упругой среды

В работе исследуется процесс контактного взаимодействия сферической оболочки и упругого однородного изотропного полупространства. Движение полупространства рассматривается относительно цилиндрической системы координат $O_1 r \vartheta z$, где r – радиус, ϑ – угол, $O_1 z$ – ось системы координат; $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_z$ – ее ортонормированный базис.

Начало системы координат O_1 принадлежит недеформированной граничной поверхности $z = 0$ полупространства и совпадает с точкой первоначального контакта, а ось $O_1 z$ направлена вглубь полупространства.

Предполагаем, что напряженно-деформированное состояние среды не зависит от угловой координаты ϑ , следовательно, в векторе перемещений $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + u_z \mathbf{e}_z$ угловая компонента u_ϑ тождественно равна нулю.

Для описания движения упругой среды, заполняющей полупространство, используются дифференциальные уравнения Ламе в перемещениях [136 – 139]:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \mu_1 \left[\Delta u_r - \frac{1}{r^2} u_r \right], \\ \rho_1 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu_1 \Delta u_z, \quad \theta = \operatorname{div} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь λ_1, μ_1 и ρ_1 – упругие постоянные Ламе и плотность материала полупространства, t – время, Δ – дифференциальный оператор Лапласа.

Оператор Лапласа и дивергенция вектора перемещений в заданной системе координат имеют вид:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Векторное поле перемещений \mathbf{u} на основании теоремы Гельмгольца представим в виде суммы потенциальной и соленоидальной составляющих:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}, \quad (1.2)$$

где φ , $\boldsymbol{\psi}$ - скалярный и векторный потенциалы упругих смещений.

Операторы градиента и ротора определяются так:

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \mathbf{e}_z, \quad \boldsymbol{\psi} = \psi \mathbf{e}_\vartheta. \quad (1.3)$$

С учетом (1.3) выражение (1.2) в координатной форме записи принимает вид:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r}. \quad (1.4)$$

Подстановка (1.4) в (1.1) приводит к двум независимым волновым уравнениям относительно потенциалов φ и ψ :

$$c_1^2 \Delta \varphi = \ddot{\varphi}, \quad c_2^2 \left(\Delta \psi - \frac{\psi}{r^2} \right) = \ddot{\psi},$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1.5)$$

$$c_1^2 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}, \quad c_2^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1}, \quad c_1 > c_2.$$

Здесь c_1, c_2 - скорости волн растяжения-сжатия и сдвига соответственно.

Ненулевые компоненты $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{rz}$ тензора деформаций связаны с перемещениями соотношениями Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Связи ненулевых компонент $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}$ тензора напряжений с деформациями описываются законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_{rr} + \lambda_1(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}), \\ \sigma_{\theta\theta} &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_1(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}), \\ \sigma_{zz} &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\varepsilon_{zz} + \lambda_1(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}), \quad \sigma_{rz} = 2\mu_1\varepsilon_{rz}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

§ 1.3. Уравнения движения оболочки

Для тонкой линейно упругой изотропной сферической оболочки используется ортогональная система координат, связанная с линиями главных кривизн. При этом координатная поверхность Π совпадает со срединной поверхностью оболочки и определяется так:

$$\Pi: x = R \sin \theta \cos \vartheta, y = R \sin \theta \sin \vartheta, z = R \cos \theta, \theta \in [0, \pi], \vartheta \in [0, 2\pi],$$

где x, y, z – прямоугольные декартовы координаты, R – радиус оболочки, θ и ϑ – меридиональная и окружная криволинейные координаты.

Предполагаем, что напряженно-деформированное состояние оболочки не зависит от окружной координаты ϑ .

Для описания движения оболочки используем уравнения движения модели С.П. Тимошенко, учитывающие сдвиг и инерцию вращения сечений нормальных к срединной поверхности [140]:

$$\begin{aligned} \rho_0 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta (T_{\theta\theta} - T_{\vartheta\vartheta}) + Q \right], \\ \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \left[-T_{\theta\theta} - T_{\vartheta\vartheta} + \frac{\partial Q}{\partial \theta} + Q \operatorname{ctg} \theta \right] + p, \\ \rho_0 I \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta (M_{\vartheta\vartheta} - M_{\theta\theta}) \right] - Q. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь u, w, χ – тангенциальные, нормальные перемещения и угол отклонения ортогонального к срединной поверхности до деформации материального волокна за счёт сдвиговых деформаций; h – толщина оболочки, ρ_0 – плотность материала оболочки, $T_{\theta\theta}, T_{\vartheta\vartheta}$ – компоненты тензора тангенциальных усилий; $M_{\theta\theta}, M_{\vartheta\vartheta}$ – компоненты тензора изгибающих

моментов; Q – перерезывающая сила, p – нормальное давление на оболочку, $I = \frac{h^3}{12}$ – коэффициент цилиндрической жесткости.

Физические соотношения определяются так:

$$T_{\theta\theta} = \tilde{T}_{\theta\theta} - \frac{1}{R}M_{\theta\theta}, \quad T_{\varphi\varphi} = \tilde{T}_{\varphi\varphi} - \frac{1}{R}M_{\varphi\varphi}, \quad Q = \mu_0 h k^2 \beta,$$

$$\tilde{T}_{\varphi\varphi} = h[(\lambda_0 + 2\mu_0)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda_0\varepsilon_{\theta\theta}], \quad \tilde{T}_{\theta\theta} = h[(\lambda_0 + 2\mu_0)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_0\varepsilon_{\varphi\varphi}], \quad (1.9)$$

$$M_{\theta\theta} = I[(\lambda_0 + 2\mu_0)\kappa_{\theta\theta} + \lambda_0\kappa_{\varphi\varphi}], \quad M_{\varphi\varphi} = I[(\lambda_0 + 2\mu_0)\kappa_{\varphi\varphi} + \lambda_0\kappa_{\theta\theta}],$$

где $k^2 = 5/6$ – поправочный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных усилий по толщине; λ_0 , μ_0 – упругие постоянные Ламе материала оболочки; $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ – компоненты тензора деформаций; $\kappa_{\theta\theta}$, $\kappa_{\varphi\varphi}$ – компоненты тензора изменения кривизны.

Кинематические соотношения имеют вид:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} (u \operatorname{ctg} \theta + w), \quad \beta = \chi - \nu, \quad -\nu = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right),$$

$$\kappa_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{R} w \right), \quad \kappa_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} \left[\operatorname{ctg} \theta \left(\chi - \frac{1}{R} u \right) - \frac{1}{R} w \right]. \quad (1.10)$$

§ 1.4. Постановка контактной задачи для сферической оболочки и упругого полупространства

Рассмотрим процесс вертикального удара сферической оболочки по упругому полупространству [24, 25]. В начальный момент оболочка, двигаясь с начальной скоростью V_0 , входит в контакт с упругим полупространством. Векторы начальной скорости и внешней силы направлены нормально к невозмущенной поверхности полупространства. Первоначально оболочка и полупространство находятся в недеформированном состоянии (рис. 1.1).

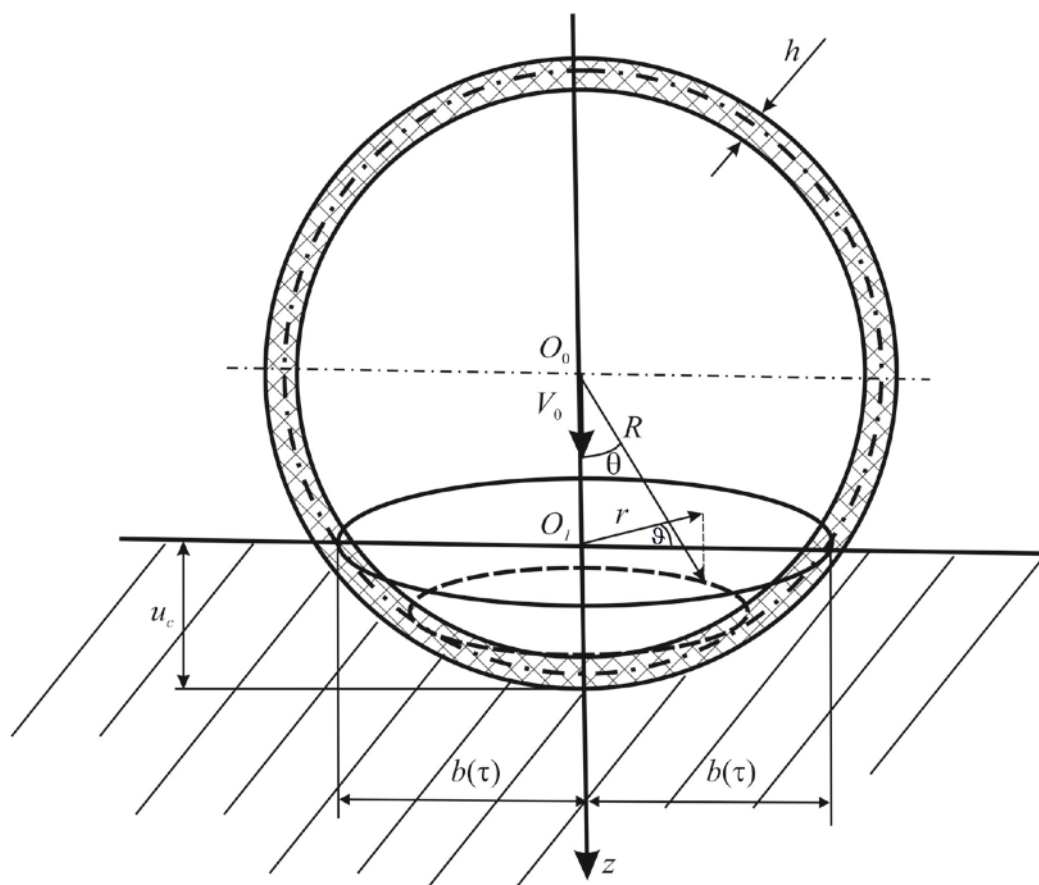


Рис. 1.1

Все переменные и параметры приводятся к безразмерному виду (штрих соответствует безразмерным величинам; параметры с индексом $k=1$ относятся к полупространству, а с $k=0$ - к оболочке):

$$\begin{aligned}
\varphi' &= \frac{\Phi}{R^2}, \quad \psi' = \frac{\Psi}{R^2}, \quad \eta_i = \frac{c_{11}}{c_{i1}} \quad (i=1,2), \quad z' = \frac{z}{R}, \quad \tau = \frac{c_{11}t}{R}, \quad u'_r = \frac{u_r}{R}, \quad u'_z = \frac{u_z}{R}, \\
u' &= \frac{u}{R}, \quad w' = \frac{w}{R}, \quad \sigma'_{\xi\zeta} = \frac{\sigma_{\xi\zeta}}{\lambda_1 + 2\mu_1} \quad (\xi, \zeta = r, \vartheta, z), \quad \alpha_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + 2\mu_k}, \quad u'_c = \frac{u_c}{R}, \\
\beta_k &= \frac{\mu_k}{\lambda_k + 2\mu_k}, \quad r' = \frac{r}{R}, \quad h' = \frac{h}{R}, \quad V'_0 = \frac{V_0}{C_{11}}, \quad b' = \frac{b}{R}, \\
p' &= \frac{Rp}{h(\lambda_0 + 2\mu_0)}, \quad \gamma^2 = \frac{c_{11}^2}{c_{10}^2}, \quad c_{1k}^2 = \frac{\lambda_k + 2\mu_k}{\rho_k}, \quad c_{2k}^2 = \frac{\mu_k}{\rho_k}, \quad a' = \frac{h^2}{12R^2}, \quad (1.11) \\
m'_0 &= \frac{m_0}{\rho_1 R^3}, \quad R'_a = \frac{R_a}{\rho_1 c_{11}^2 R^2}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{h}{R} \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\lambda_1 + 2\mu_1} = \frac{h}{\gamma^2 R}, \\
M'_{\alpha\alpha} &= \frac{M_{\alpha\alpha}}{Rh(\lambda_0 + 2\mu_0)}, \quad \tilde{T}'_{\alpha\alpha} = \frac{\tilde{T}_{\alpha\alpha}}{h(\lambda_0 + 2\mu_0)}, \quad T'_{\alpha\alpha} = \frac{T_{\alpha\alpha}}{h(\lambda_0 + 2\mu_0)}, \quad Q' = \frac{Q}{h(\lambda_0 + 2\mu_0)}, \\
\kappa'_{\alpha\alpha} &= \kappa_{\alpha\alpha} R \quad (\alpha = \theta, \vartheta).
\end{aligned}$$

Здесь c_{1k} и c_{2k} – скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига, τ – безразмерное время, u_c – глубина проникания оболочки как абсолютно твердого тела, $b = b(\tau)$ – радиус области контакта, m_0 – масса оболочки, R_a – результирующая контактная сила. Далее везде штрихи опущены.

В безразмерной форме система уравнений, описывающих движение полупространства, включает в себя (точками здесь и далее обозначены производные по безразмерному времени τ)

– уравнения движения (1.5)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \ddot{\phi}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} = \eta_2^2 \ddot{\psi}; \quad (1.12)$$

– связь перемещений с потенциалами (1.6)

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\psi + r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right); \quad (1.13)$$

– связь компонентов тензора напряжений с перемещениями, вытекающая из (1.6), (1.7)

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= \beta_1 \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \sigma_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \alpha_1 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \alpha_1 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \alpha_1 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

В безразмерном виде уравнения движения оболочки (1.8) запишутся так:

$$\begin{aligned} \gamma^2 \ddot{u} &= \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + (T_{\theta\theta} - T_{\theta\theta}) \operatorname{ctg} \theta + Q, \\ \gamma^2 \ddot{w}_0 &= -T_{\theta\theta} - T_{\theta\theta} + \frac{\partial Q}{\partial \theta} + Q \operatorname{ctg} \theta + p, \\ \gamma^2 \ddot{\chi} &= \frac{1}{a} \cdot \left[\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta (M_{\theta\theta} - M_{\theta\theta}) - Q \right]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Безразмерные аналоги геометрических и физических соотношений для оболочки (1.9), (1.10) имеют вид:

– геометрические соотношения

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\partial u}{\partial \theta} + w, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = u \operatorname{ctg} \theta + w, \quad \beta = \chi - \xi, \quad -\xi = \frac{\partial w}{\partial \theta} - u, \\ \kappa_{\theta\theta} &= \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta} - w, \quad \kappa_{\vartheta\vartheta} = \operatorname{ctg} \theta (\chi - u) - w.\end{aligned}\tag{1.16}$$

– физические соотношения

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\vartheta\vartheta} &= \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \alpha_0 \varepsilon_{\theta\theta}, \quad \tilde{T}_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta} + \alpha_0 \varepsilon_{\vartheta\vartheta}, \\ M_{\theta\theta} &= a(\kappa_{\theta\theta} + \alpha_0 \kappa_{\vartheta\vartheta}), \quad M_{\vartheta\vartheta} = a(\kappa_{\vartheta\vartheta} + \alpha_0 \kappa_{\theta\theta}), \\ T_{\theta\theta} &= \tilde{T}_{\theta\theta} - M_{\theta\theta}, \quad T_{\vartheta\vartheta} = \tilde{T}_{\vartheta\vartheta} - M_{\vartheta\vartheta}, \quad Q = \beta_0 k^2 \beta.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Начальные условия имеют следующий вид:

$$u_c|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{u}_c|_{\tau=0} = V_0, \quad u|_{\tau=0} = 0, \quad w|_{\tau=0} = 0, \quad \chi|_{\tau=0} = 0,\tag{1.18}$$

$$\dot{\chi}|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{u}|_{\tau=0} = -V_0 \sin \theta, \quad \dot{w}|_{\tau=0} = V_0 \cos \theta;$$

$$\phi|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{\phi}|_{\tau=0} = 0, \quad \psi|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0.\tag{1.19}$$

В бесконечно удаленной точке полупространства возмущения отсутствуют

$$\varphi = O(1), \quad \psi = O(1), \quad r \rightarrow \infty.\tag{1.20}$$

Заметим, что при учете деформируемости граничных поверхностей оболочки и полупространства в области контакта задача является нелинейной. Для перехода к линейной задаче необходима линеаризация граничных условий, которая заключается в снесении их на недеформированную граничную поверхность полупространства.

Полагая, что контакт происходит в условиях свободного проскальзывания, а также учитывая, что вне зоны взаимодействия поверхности полупространства и оболочки свободны от напряжений, приходим к следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=0} &= \tilde{\gamma}p \quad [|r| \leq b(\tau)], \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0 \quad [|r| > b(\tau)], \\ \sigma_{z\theta}|_{z=0} &= 0 \quad [r \in (-\infty, \infty)], \quad u_z = w \cos \theta \approx w \quad [|r| \leq b(\tau)]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

При этом область контакта представляет собой круг, принадлежащий недеформированной поверхности полупространства с радиусом $b(\tau)$, зависящим от времени. Последнее условие в (1.21) записано с учетом предположения о малости углового размера области контакта по отношению к радиусу оболочки.

Радиус области контакта связан с глубиной проникания $u_c(\tau)$ условием пересечения недеформированных поверхностей оболочки и полупространства:

$$b(\tau) = \sqrt{u_c(2 - u_c)}. \quad (1.22)$$

Для определения глубины проникания привлекается уравнение движения оболочки как абсолютно твердого тела

$$m_0 \ddot{u}_c = R_a, \quad R_a(\tau) = 2\pi\tilde{\gamma} \int_0^{b(\tau)} p(r, \tau) r dr. \quad (1.23)$$

Соотношения (1.12) – (1.23) образуют замкнутую начально-краевую задачу об ударе сферической оболочки по упругому полупространству.

§ 1.5. Функции влияния для полупространства

При исследовании линейных динамических задач имеют большое значение так называемые функции влияния, соответствующие сосредоточенным силовым и кинематическим воздействиям. Они являются результатом решения начально-краевых задач для деформируемой среды при задании на границе одной из компонент перемещения или напряжения в виде произведения дельта-функций Дирака по пространственным координатам и времени.

С помощью функций влияния можно представить в интегральном виде решение задач с заданными граничными условиями несмешанного характера или построить интегральные уравнения для условий смешанного типа и контактных задач.

Для получения замкнутых систем уравнений нестационарных контактных задач с подвижными границами, рассматриваемых в данной работе, используются поверхностные функции влияния упругого изотропного полупространства $\Gamma(r, \tau)$ и $G(r, \tau)$, которые представляют собой нормальные напряжения и нормальные перемещения поверхности полупространства

$$\Gamma(r, \tau) = \sigma_{zz}|_{z=0}, \quad G(r, \tau) = u_z|_{z=0}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Они являются решениями осесимметричных задач (1.12) – (1.14), (1.20) в цилиндрической системе координат при нулевых начальных условиях. На границе $z = 0$ в этих задачах имеют место следующие граничные условия (рис. 1.2):

– для $\Gamma(r, \tau)$:

$$\sigma_{rz}|_{z=0} = 0, \quad u_z|_{z=0} = \delta(\tau)\delta(x, y); \quad (1.24)$$

– для $G(r, \tau)$:

$$\sigma_{rz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \delta(\tau)\delta(x, y). \quad (1.25)$$

Дельта-функции Дирака $\delta(x, y)$ и $\delta(r)$ связаны следующим соотношением [141, 142]:

$$\delta(x, y) = (\pi r)^{-1} \delta(r).$$

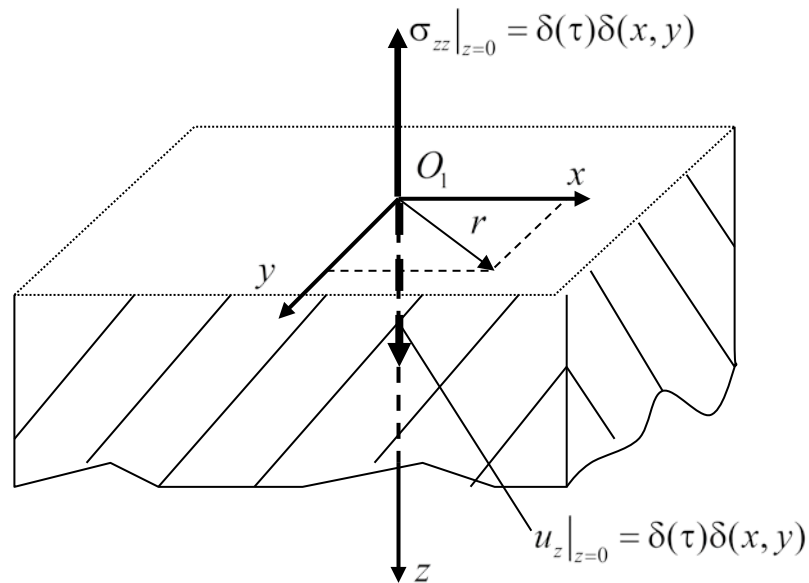


Рис. 1.2

Для решения задачи (1.12) – (1.14), (1.20), (1.24) применяются интегральные преобразования Лапласа по времени τ и Ханкеля по радиусу r

[142 – 144] (значки L и H_ν указывает на изображения Лапласа и Ханкеля соответственно, s и q – параметры преобразований):

$$f_1^L(s) = \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad f^{H_\nu}(q) = \int_0^\infty f(r) r J_\nu(rq) dr, \quad (1.26)$$

где $J_\nu(x)$ – функция Бесселя индекса ν .

При этом для функции φ используется преобразование H_0 , а для ψ – преобразование H_1 . В дальнейшем, там, где это не вызывает разночтений, индекс ν опустим и будем обозначать преобразование Ханкеля просто значком H .

Тогда в пространстве изображений уравнения (1.12) при однородных начальных условиях принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{HL}}{\partial z^2} - k_1^2(q^2, s^2) \varphi^{HL} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi^{HL}}{\partial z^2} - k_2^2(q^2, s^2) \psi^{HL} = 0, \\ k_1(q, s) = \sqrt{s+q}, \quad k_2(q, s) = \sqrt{\eta^2 s + q}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

а изображения перемещений и напряжений (1.13), (1.14) связаны между собой так:

$$\begin{aligned} u_r^H = -q\varphi^H - \frac{\partial \psi^H}{\partial z}, \quad u_z^H = \frac{\partial \varphi^H}{\partial z} + q\psi^H, \\ \sigma_{zz}^H = \frac{\partial u_z^H}{\partial z} + \alpha_1 q u_r^H, \quad \sigma_{rz}^H = \beta_1 \left(\frac{\partial u_r^H}{\partial z} - q u_z^H \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

С учетом (1.20) решения уравнений (1.27) принимают вид:

$$\varphi^{HL} = C_0(q, s) e^{-k_1 z}, \quad \psi^{HL} = C_1(q, s) e^{-k_2 z}. \quad (1.29)$$

Учитывая связь преобразование Фурье по двум переменным с преобразованием Ханкеля [143, 144] (p_1, p_2 – параметры преобразования Фурье по переменным x и y)

$$\begin{aligned} [f(r)]^F &= \iint_{R^2} f(\sqrt{x^2 + y^2}) e^{i(p_1 x + p_2 y)} dx dy = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r f(r) J_0(r\sqrt{p_1^2 + p_2^2}) dr = 2\pi [f(r)]^H, \end{aligned}$$

изображение дельта-функции $\delta(x, y)$ имеет вид:

$$[\delta(x, y)]^H = \frac{1}{2\pi} [\delta(x, y)]^F = \frac{1}{2\pi}. \quad (1.30)$$

Подставляя (1.29) в формулы (1.28), затем в изображения граничных условий (1.24) и принимая во внимание (1.30), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно C_0 и C_1 . Из (1.28) и (1.29) с учетом найденных констант C_0 и C_1 определим изображение функции влияния $\Gamma(r, \tau)$:

$$\Gamma^{HL}(q, s) = \sigma_{zz}^{HL} \Big|_{z=0} = s^2 \Gamma_a^{HL}(q, s), \quad (1.31)$$

где

$$\Gamma_a^{HL}(q, s) = \Gamma_{01}^{HL}(q, s) + \Gamma_{02}^{HL}(q, s),$$

$$\Gamma_{01}^{HL}(q, s) = -\frac{(\eta^2 s^2 + 2q^2)^2}{2\pi \eta^4 s^4 \sqrt{s^2 + q^2}}, \Gamma_{02}^{HL}(q, s) = \frac{2q^2}{\pi \eta^4 s^4} \sqrt{\eta^2 s^2 + q^2}.$$

Применяя обратное преобразование Ханкеля и Лапласа к (1.31), найдем оригинал $\Gamma(r, \tau)$ [143, 145]:

$\Gamma(r, \tau) = \ddot{\Gamma}_a(r, \tau)$, где

$$\Gamma_a(r, \tau) = \Gamma_{a0}(r, \tau)\delta(\tau - r) + \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ak}(r, \tau)H(\tau - \eta_k r), \quad (1.32)$$

$$\Gamma_{a0}(r, \tau) = -\frac{(\eta^2 - 2)^2}{2\pi\eta^4 r}, \Gamma_{a1}(r, \tau) = -\frac{\tau}{\pi\eta^4 r^5} [3\tau^2 - (2\eta^2 - 1)r^2],$$

$$\Gamma_{a2}(r, \tau) = \frac{\tau}{\pi\eta^4 r^5} [3\tau^2 - \eta^2 r^2].$$

Для получения изображения функции $G(r, \tau)$ константы C_0 и C_1 в (1.29) определяются из граничных условий (1.25). Выполняя аналогичные описанным выше действия, находим изображение функции влияния $G(r, \tau)$:

$$G^{HL} = \frac{2\pi\eta^4 s^2 k_1(q^2, s^2)}{4k_1(q^2, s^2)k_2(q^2, s^2)q^2 - (\eta^2 s^2 + 2q^2)^2}. \quad (1.33)$$

Оригинал функции $G(r, \tau)$ строится с использованием связи пространственной и плоской задач и имеет вид [9]:

$$G(r, \tau) = \sum_{k=1}^2 G_k(r, \tau)H(\tau - \eta_k r), \quad (1.34)$$

$$G_k(r, \tau) = \frac{\tau}{2\pi\eta^4} \left[a_k \sqrt{1 - c_R^2 \eta_k^2} (r^2 - c_R^2 \tau^2)^{-3/2} H(r - c_R \tau) + \chi_k(r^2, \tau^2) \right],$$

$$\chi_k(r, \tau) = \frac{1}{P_2^{3/2}(r, \tau)} \left[(b_k r + c_k \tau) S_k(r, \tau) + (\tau - \eta_k^2 r) \frac{Q_{1k}(r, \tau)}{2S_k(r, \tau)} \right],$$

$$Q_{1k}(r, \tau) = (b_k \alpha^2 + c_k) r - (b_k \beta^2 + c_k \alpha^2) \tau,$$

$$S_k^2(r, \tau) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{P_2(r, \tau) P_2(1, \eta_k^2)} + P_{1k}(r, \tau) \right],$$

$$P_{1k}(r^2, \tau^2) = (1 - \alpha^2 \eta_k^2) r^2 + (\beta^2 \eta_k^2 - \alpha^2) \tau^2,$$

$$b_1 = \eta^4 - a_1, \quad a_1 = \frac{(2 - \eta^2 c_R^2)^2}{P_2(c_R^2, 1)}, \quad a_2 = -b_2 = 4 \frac{1 - c_R^2}{P_2(c_R^2, 1)},$$

$$P_2(x, y) = x^2 - 2\alpha^2 yx + \beta^2 y^2, \quad \alpha^2 = \frac{4}{\eta^2} - \frac{c_R^2}{2}, \quad \beta^2 = \frac{8(1+k)}{\eta^6 c_R^2}, \quad c_k = \frac{\beta^2 a_k - 4}{c_R^2},$$

где c_R – безразмерная скорость волны Рэлея, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = \eta$, $H(x)$ - функция Хевисайда.

Из (1.34) видно, что функция влияния $G(r, \tau)$ обладает сингулярной особенностью порядка $-3/2$, носитель которой расположен за фронтом волны Рэлея.

На основании принципа суперпозиции выражения для перемещений u_z и напряжения σ_{zz} на границе полупространства $z=0$ принимают вид [9, 140]:

$$\begin{aligned} u_z|_{z=0} &= u_z(r, \tau) = G(r, \tau) ** \sigma_{zz}(r, \tau), \\ \sigma_{zz}|_{z=0} &= \sigma_{zz}(r, \tau) = \ddot{\Gamma}_a(r, \tau) ** u_z(r, \tau). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Здесь производная $\ddot{\Gamma}_a(r, \tau) = \frac{\partial^2 \Gamma_a(r, \tau)}{\partial \tau^2}$ понимается в обобщенном смысле, значком «**» обозначена операция свертки по двум переменным r и τ .

Глава 2. СВЕРХЗВУКОВОЙ ЭТАП КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Известно [9], что при исследовании процессов нестационарного контактного взаимодействия ударников, ограниченных гладкими выпуклыми поверхностями, с упругим полупространством характерно наличие двух скоростных режимов движения границ области контакта: сверхзвукового и дозвукового. На сверхзвуковом (начальном) режиме скорость расширения области контакта превышает максимально возможную скорость распространения возмущений равную скорости волн растяжения-сжатия. Это приводит к невозможности выхода возмущений за границы области контакта. В дальнейшем скорость расширения снижается и в определенный момент становится равной максимальной скорости возмущений в полупространстве. С этого момента времени возмущения начинают выходить за границы контактной области, а режим взаимодействия, следуя терминологии в [9], называется дозвуковым. При этом вне области контакта перемещения неизвестны. На сверхзвуковом режиме расширяющийся носитель нормальных перемещений границы полупространства совпадает с областью контакта, а нормальные перемещения границ ударника и полупространства совпадают. Поэтому для сверхзвукового режима движения границ (в задачах удара как раз он наиболее опасный с точки зрения интенсивности возникающих возмущений) можно построить сравнительно более простой по отношению к случаю произвольного режима метод решения соответствующих контактных задач.

§ 2.1. Система разрешающих уравнений

Рассмотрим начальный сверхзвуковой этап взаимодействия, при котором скорость расширения области контакта превышает скорость звука в упругой среде, т.е. $\dot{b} \geq 1$, поэтому перемещения граничных поверхностей ударника и полупространства не выходят за границу области взаимодействия.

Контактные напряжения $\sigma_{zz}|_{z=0} = \sigma_{zz}(r, \tau)$ связаны с нормальными перемещениями $u_z|_{z=0} = u_z(r, \tau)$ второй из формул (1.35)

$$\sigma_{zz}(r, \tau) = \ddot{\Gamma}_a(r, \tau) * u_z(r, \tau) = \dot{\Gamma}_a(r, \tau) * \dot{u}_z(r, \tau). \quad (2.1)$$

С использованием свойств однородности функции $\Gamma_a(r, \tau)$ и того, что носитель нормальных перемещений совпадает с областью контакта, интегральное представление (2.1) приводится к виду [9]:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(r, \tau) = & -\dot{u}_z(r, \tau)H(\tau)H[b(\tau) - r] + \\ & + \int_0^\tau dt \int_0^{b(t)} \frac{\partial \dot{u}_z(\rho, t)}{\partial \rho} \upsilon(r, \rho, \tau - t) d\rho - \int_0^\tau \dot{u}_z[b(t), t] \upsilon[r, b(t), \tau - t] dt, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\upsilon(r, \rho, \tau) = \sum_{q=1}^2 \upsilon_{rq}(r, \rho, \tau) + \frac{1}{\tau} \upsilon_s(r, \rho, \tau). \quad (2.3)$$

При $r > 0$ функции υ_{rq} и υ_s таковы:

$$v_{rq}(r, \rho, \tau) = \frac{1}{r - \rho} v_{rq1}(r, \rho, \tau) + \frac{1}{(r - \rho)^3} v_{rq2}(r, \rho, \tau) + \frac{1}{\tau} \frac{1}{r - \rho} v_{rq3}(r, \rho, \tau), \quad (2.4)$$

$$v_{rq1}(r, \rho, \tau) = \frac{d_q}{\pi \eta^4} \left\{ F(\delta_q, m) H[\varphi_{1q}(r, \rho, \tau)] + K(m) H[\varphi_{2q}(r, \rho, \tau)] \right\} H[\varphi_q(r, \rho, \tau)],$$

$$v_{rq2}(r, \rho, \tau) = \frac{b_q}{\pi \eta^4} \left\{ E(\delta_q, m) H[\varphi_{1q}(r, \rho, \tau)] + E(m) H[\varphi_{2q}(r, \rho, \tau)] \right\} H[\varphi_q(r, \rho, \tau)],$$

$$v_{rq3}(r, \rho, \tau) = \frac{1}{\pi \eta^4} c_q H[\varphi_{1q}(r, \rho, \tau)] H[\varphi_q(r, \rho, \tau)],$$

$$v_s(r, \rho, \tau) = v_{s0}(r, \rho, \tau) H[\varphi_{s1}(r, \rho, \tau)] H[\varphi_{s2}(r, \rho, \tau)],$$

$$v_{s0}(r, \rho, \tau) = -\frac{(\eta^2 - 2)^2}{\pi \eta^4} \frac{c_0}{\sqrt{r + \rho - \tau} \sqrt{\tau^2 - (r - \rho)^2}},$$

$$c_0 = \frac{r^2 - \rho^2 - \tau^2}{\sqrt{r + \rho + \tau}}, \quad m = \frac{4r\rho}{(r + \rho)^2}, \quad \sin^2 \delta_q = \frac{(r + \rho)^2 \left[(\tau/\eta_q)^2 - (r - \rho)^2 \right]}{4r\rho (\tau/\eta_q)^2},$$

$$\sin^2 \delta_q = \frac{(r + \rho)^2 \left[(\tau/\eta_q)^2 - (r - \rho)^2 \right]}{4r\rho (\tau/\eta_q)^2},$$

$$\varphi_q(r, \rho, \tau) = \tau - \eta_q |r - \rho|, \quad \varphi_{1q}(r, \rho, \tau) = \eta_q (r + \rho) - \tau, \quad \varphi_{2q}(r, \rho, \tau) = \tau - \eta_q (r + \rho),$$

$$\varphi_{s1}(r, \rho, \tau) = r + \rho - \tau, \quad \varphi_{s2}(r, \rho, \tau) = \tau - |r - \rho|,$$

$$d_1 = \frac{2}{r + \rho} \left[\frac{\tau^2}{r + \rho} - (r - \rho)(2\eta^2 - 1) \right], \quad d_2 = \frac{2}{r + \rho} \left[(r - \rho)\eta^2 - \frac{\tau^2}{r + \rho} \right],$$

$$c_1 = -2 \frac{\sqrt{(r + \rho)^2 - \tau^2} \sqrt{\tau^2 - (r - \rho)^2}}{r + \rho},$$

$$c_2 = -2\eta \frac{\sqrt{\eta^2 (r + \rho)^2 - \tau^2} \sqrt{\tau^2 - \eta^2 (r - \rho)^2}}{r + \rho},$$

$$b_1 = 2 \left\{ \tau^2 \left[\frac{3(r - \rho)}{r + \rho} - \frac{2(r - \rho)^2}{(r + \rho)^2} - 2 \right] + (2\eta^2 - 1)(r - \rho)^2 \right\},$$

$$b_2 = 2 \left\{ \tau^2 \left[-\frac{3(r - \rho)}{r + \rho} + \frac{2(r - \rho)^2}{(r + \rho)^2} + 2 \right] - \eta^2 (r - \rho)^2 \right\},$$

а при $r = 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} v_{r_1}(0, \rho, \tau) &= \frac{2}{\eta^4 \rho^3} [3\tau^2 - (2\eta^2 - 1)\rho^2], \\ v_{r_2}(0, \rho, \tau) &= -\frac{2}{\eta^4 \rho^3} [3\tau^2 - \eta^2 \rho^2], \\ v_s(0, \rho, \tau) &= \frac{(\eta^2 - 2)^2}{\eta^4} \delta(\tau - \rho). \end{aligned} \quad (2.5)$$

В (2.4) $F(\delta_q, m)$, $E(\delta_q, m)$, $K(m)$, $E(m)$ – неполные, полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Исходя из первого и последнего граничных условий в (1.21) и учитывая (2.2), получаем следующее выражение для контактного давления p [25 – 28, 35]:

$$\begin{aligned} p(r, \tau) &= \frac{1}{\tilde{\gamma}} [p_1(r, \tau) + p_2(r, \tau) + p_3(r, \tau)], \\ p_1(r, \tau) &= -\dot{w}H(\tau)H[b(\tau) - r], \\ p_2(r, \tau) &= \int_0^\tau \dot{w}[b(t), t] v[r, b(t), \tau - t] dt, \\ p_3(r, \tau) &= -\int_0^\tau dt \int_0^{b(\tau)} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} v(r, \rho, \tau - t) d\rho. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) совместно с уравнениями движения оболочки (1.15), соотношениями (1.16), (1.17), уравнениями (1.22), (1.23) и начальными условиями (1.18) образуют замкнутую систему разрешающих уравнений сверхзвукового этапа контактного взаимодействия сферической оболочки и упругого полупространства.

Как видно, с помощью принципа суперпозиции и функции влияния для упругого полупространства задачу удалось свести к решению системы уравнений движения оболочки совместно с дополнительными уравнениями для определения зоны контакта. При этом вся информация о воздействии со стороны полупространства содержится в интегральном представлении (2.6) для контактного давления p . Граничными условиями при этом выступают условия ограниченности перемещений оболочки в полюсах. Условие периодичности по окружной координате выполняется автоматически в силу осевой симметрии задачи [24 – 30].

§ 2.2. Метод решения задачи на сверхзвуковом этапе взаимодействия

Для решения системы разрешающих уравнений используем метод Фурье разделения переменных. Все заданные и искомые функции, зависящие от радиальной τ и временной переменной θ , представим в виде разложений в ряды по полиномам Лежандра $P_n(\cos\theta)$ и их производным $\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}$, которые являются собственными функциями системы уравнений движения сферической оболочки [146, 27, 28, 35].

Принимая во внимание малость угла θ , полагаем, что

$$r = \sin\theta \approx \theta, \quad \rho = \sin\theta_* \approx \theta_*, \quad \theta_* \in [0, \theta]. \quad (2.7)$$

Указанные разложения имеют вид

$$\left\| \begin{array}{l} w(\theta, \tau) \\ p(\theta, \tau) \end{array} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \begin{array}{l} w_n(\tau) \\ p_n(\tau) \end{array} \right\| P_n(\cos\theta), \quad (2.8)$$

$$\left\| \begin{array}{l} u(\theta, \tau) \\ \chi(\theta, \tau) \end{array} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \begin{array}{l} u_n(\tau) \\ \chi_n(\tau) \end{array} \right\| \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}.$$

Полиномы Лежандра $P_n(x)$ являются решением дифференциального уравнения (штрих обозначает производную по x) [56, 146]:

$$\left[(1-x^2)P_n'(x) \right]' + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Следовательно, функция $P_n(\cos \theta)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right] = -n(n+1)P_n(\cos \theta). \quad (2.9)$$

После раскрытия скобок в (2.9) и некоторых преобразований придем к связи $\frac{d^2 P_n(\cos \theta)}{d\theta^2}$, $P_n(\cos \theta)$ и $\frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}$:

$$\frac{d^2 P_n(\cos \theta)}{d\theta^2} = - \left(\operatorname{ctg} \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} + n(n+1)P_n(\cos \theta) \right) \quad (2.10)$$

Принимая во внимание формулу (2.10), подставляем (2.8) в (1.16), (1.17), а затем в (1.15) и получаем бесконечную систему интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов, зависящих от времени:

$$\gamma^2 \ddot{\mathbf{U}}_n = \mathbf{L}_n \mathbf{U}_n + \mathbf{P}_n, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{L}_n = \left\| L_{ijn} \right\|_{3 \times 3}, \mathbf{U}_n = \left\| u_n(\tau), w_n(\tau), \chi_n(\tau) \right\|^T, \mathbf{P}_n = \frac{1}{h\tilde{\gamma}} \left\| 0, \sum_{i=1}^3 p_{in}(\tau), 0 \right\|^T,$$

где коэффициенты L_{ijn} определяются так:

$$\begin{aligned} L_{11n} &= (1+a) \left[(1-\alpha_0) - n(n+1) \right] - \beta_0 k^2, \\ L_{12} &= (1+\alpha_0)(1+a) + \beta_0 k^2, \\ L_{13n} &= a \left[\alpha_0 - 1 + n(n+1) \right] + \beta_0 k^2, \\ L_{21n} &= n(n+1) \left[(1+a)(1+\alpha_0) + \beta_0 k^2 \right], \end{aligned}$$

$$L_{22n} = -\left[2(1 + \alpha_0)(1 + a) + \beta_0 k^2 n(n + 1)\right] \quad (2.12)$$

$$L_{23n} = -n(n + 1)\left[(\alpha_0 + 1)a + \beta_0 k^2\right],$$

$$L_{31n} = n(n + 1) - 1 + \alpha_0 + \frac{\beta_0 k^2}{a}, L_{32} = -\left(2 + \frac{\beta_0 k^2}{a}\right),$$

$$L_{33n} = -\left[\alpha_0 + n(n + 1) + \frac{\beta_0 k^2}{a} - 1\right].$$

С учетом свойства ортогональности и нормы полиномов Лежандра коэффициенты разложения в ряд составляющих контактного давления p_{in} ($i = 1, 2, 3$) принимают вид [146]:

$$p_{in} = \frac{2n + 1}{2} \int_{-1}^1 p_i P_n(x) dx \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.13)$$

Проводя замену переменной $x = \cos \theta$ в интеграле (2.13) и используя представление (2.6), получаем следующие выражения для $p_{in}(\tau)$:

$$p_{1n}(\tau) = -\frac{2n + 1}{2} H(\tau) \sum_{k=0}^{\infty} \dot{w}_k(\tau) I_{nk} [b(\tau)],$$

$$p_{2n}(\tau) = \frac{2n + 1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tau} \dot{w}_k(t) P_k [\cos b(t)] dt \int_0^{\pi} \nu[\theta, b(t), \tau - t] P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.14)$$

$$p_{3n}(\tau) = -\frac{2n + 1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tau} \dot{w}_k(t) dt \int_0^{\arcsin[b(\tau)]} \frac{dP_k(\cos \theta_*)}{d\theta_*} d\theta_* \int_0^{\pi} \nu(\theta, \theta_*, \tau - t) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

где $I_{nk}(x) = \int_0^{\arcsin(x)} P_k(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$

С использованием разложения (2.8) для $p(\theta, \tau)$, выражений (2.14) и подстановки $r = \sin \theta$ в уравнение движения оболочки как абсолютно твердого тела (1.23) запишется так:

$$m_0 \ddot{u}_c = \pi \sum_{i=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} p_{in}(\tau) I_n(b(\tau)) \quad (2.15)$$

здесь $I_n(x) = \int_0^{\arcsin x} P_n(\cos \theta) \sin(2\theta) d\theta$.

Разрешающая система уравнений в коэффициентах рядов включает в себя систему уравнений (2.11) с учетом (2.14), уравнение (2.15) и геометрическое соотношение (1.22) для определения радиуса области контакта. При этом неизвестными являются коэффициенты $u_n(\tau)$, $w_n(\tau)$, $\chi_n(\tau)$ рядов (2.8) для перемещений оболочки и угла поворота нормальных до деформации к срединной поверхности сечений за счет сдвига, глубина проникания оболочки в полупространство $u_c(\tau)$ и радиус границы области контакта $b(\tau)$.

Начальные условия для разрешающей системы уравнений (2.11), (2.15), (1.22) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} b|_{\tau=0} = u_c|_{\tau=0} = u_n|_{\tau=0} = w_n|_{\tau=0} = \chi_n|_{\tau=0} = \dot{\chi}_n|_{\tau=0} = 0, \\ \dot{u}_n|_{\tau=0} = \dot{w}_n|_{\tau=0} = 0 \quad (n \neq 1), \\ \dot{u}_c|_{\tau=0} = \dot{u}_1|_{\tau=0} = \dot{w}_1|_{\tau=0} = V_0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

Учитывая явное представление для полиномов Лежандра [147]:

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \quad (2.17)$$

функции $I_{nk}(x)$ в (2.14) и $I_n(x)$ в (2.15) находятся так:

$$I_{nk}(x) = 2^{-n-k} \sum_{m_3=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \sum_{m_2=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{m_2+m_3} \frac{(2k-2m_3)!(2n-2m_2)!}{m_3!(k-m_3)!(k-2m_3)!m_2!(n-m_2)!} \times$$

$$\times \frac{1 - (1-x^2)^{\frac{k+n-2(m_2+m_3)+1}{2}}}{(n-2m_2)!(k+n-2(m_2+m_3)+1)}, \quad (2.18)$$

$$I_n(x) = 2^{-n+1} \sum_{m_1=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{m_1} \frac{(2n-2m_1)!}{m_1!(n-m_1)!(n-2m_1)!} \left(1 - (1-x^2)^{\frac{n-2m_1+2}{2}} \right). \quad (2.19)$$

Здесь и далее символ $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает целую часть числа.

Структура формул (2.3) – (2.5) с учетом (2.7) показывает, что $p_{2n}(\tau)$ и $p_{3n}(\tau)$ содержат интегралы с сингулярными особенностями порядка (-1) и (-3) при $\tau = 0$, $\sin\theta = \sin\theta_*$ ($m = 1$), а также с интегрируемыми особенностями порядка $(-1/2)$ при $\tau = \sin\theta + \sin\theta_*$, $\tau = |\sin\theta - \sin\theta_*|$. Поэтому для вычисления их конечных значений используются квадратурные формулы, при этом к интегралам с сингулярными особенностями применяется каноническая регуляризация [148].

§ 2.3. Алгоритм решения задачи на сверхзвуковом этапе взаимодействия

В основе алгоритма решения разрешающей системы уравнений (2.11), (2.15), (1.22) лежит модифицированный метод Рунге-Кутты четвертого порядка и принцип редукции.

Согласно принципу редукции заменяем ряды (2.8) конечными суммами, ограничиваясь в разложениях первыми членами с номерами $n = 0, 1, \dots, N$:

$$\left\| \begin{matrix} w(\theta, \tau) \\ p(\theta, \tau) \end{matrix} \right\| = \sum_{n=0}^N \left\| \begin{matrix} w_n(\tau) \\ p_n(\tau) \end{matrix} \right\| P_n(\cos \theta), \quad (2.20)$$

$$\left\| \begin{matrix} u(\theta, \tau) \\ \chi(\theta, \tau) \end{matrix} \right\| = \sum_{n=0}^N \left\| \begin{matrix} u_n(\tau) \\ \chi_n(\tau) \end{matrix} \right\| \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}.$$

Приведем систему уравнений (2.11), (2.15) к нормальной форме Коши, т.е. приведем к системе первого порядка. Затем, используя представления (2.20), получаем систему, содержащую $6(N+1)+2$ обыкновенных дифференциальных уравнений, которая дополняется алгебраическим уравнением (1.22). Первые $6(N+1)$ уравнений можно представить в матричной форме, имеющей блочную структуру:

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{M}\mathbf{W} + \mathbf{Q}, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \|\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_N\|^T, \quad \mathbf{W}_n = \|u_n, w_n, \chi_n, \tilde{u}_n, \tilde{w}_n, \tilde{\chi}_n\|^T, \\ &\tilde{u}_n = \dot{u}_n, \quad \tilde{w}_n = \dot{w}_n, \quad \tilde{\chi}_n = \dot{\chi}_n, \\ \mathbf{Q} &= \|\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_N\|^T, \quad \mathbf{Q}_n = \frac{1}{h\tilde{\gamma}\gamma^2} \left\| 0, 0, 0, 0, \sum_{i=1}^3 p_{in}, 0 \right\|^T, \end{aligned}$$

$$\mathbf{M} = \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{M}_0 & & \\ & \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & \mathbf{0} & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \mathbf{M}_N \end{array} \right\|, \quad \mathbf{M}_n = \left\| M_{ijn} \right\|_{6 \times 6} = \frac{1}{\gamma^2} \left\| \begin{array}{ccc|ccc} & & & \gamma^2 & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & \gamma^2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & \gamma^2 \\ - & - & - & - & - & - \\ L_{11n} & L_{12n} & L_{13n} & & & \\ L_{21n} & L_{22n} & L_{23n} & & \mathbf{0} & \\ L_{31n} & L_{32n} & L_{33n} & & & \end{array} \right\|$$

К ним добавляется система уравнений движения оболочки как абсолютно твердого тела:

$$\begin{aligned} \dot{u}_c &= \tilde{u}_c, \\ \dot{\tilde{u}}_c &= \frac{\pi}{m_0} \sum_{i=1}^3 \sum_{n=0}^N p_{in}(\tau) I_n(b(\tau)), \end{aligned} \quad (2.22)$$

уравнение для определения радиуса области контакта (1.22) и начальные условия:

$$\mathbf{W}_n(0) = \begin{cases} \|0, 0, 0, 0, 0, 0\|^T, & n \neq 1 \\ \|0, 0, 0, V_0, V_0, 0\|^T, & n = 1 \end{cases}, \quad u_c(0) = 0, \quad \tilde{u}_c(0) = V_0, \quad b(0) = 0. \quad (2.23)$$

Пятое уравнение системы (2.21) в каждом блоке с номером n является интегро-дифференциальным, т.к. его правая часть содержит слагаемые $\sum_{i=1}^3 p_{in}$, представленные в виде интегралов от неизвестных функций $\tilde{w}_n(\tau) = \dot{w}_n(\tau)$:

$$\begin{aligned} p_{1n}(\tau) &= -\frac{2n+1}{2} H(\tau) \sum_{k=0}^N \tilde{w}_k(\tau) I_{nk}(b(\tau)) \\ p_{2n}(\tau) &= \frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^N \int_0^\tau \tilde{w}_k(t) P_k[\cos b(t)] dt \int_0^\pi \nu[\theta, b(t), \tau-t] P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$p_{3n}(\tau) = -\frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^N \int_0^{\tau} \tilde{w}_k(t) dt \int_0^{\arcsin[b(\tau)]} \frac{dP_k(\cos \theta_*)}{d\theta_*} d\theta_* \int_0^{\pi} \upsilon(\theta, \theta_*, \tau-t) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

При этом в правую часть входят все $N+1$ функции $\tilde{w}_{0n}(\tau)$, $n = \overline{0, N}$, поэтому система решается совместно для всех $6(N+1)+3$ уравнений.

Отличие модифицированного метода Рунге-Кутты от классического заключается в том, что наряду с применением классической схемы [149] необходимо построение и использование квадратурных формул для вычисления интегралов в интегро-дифференциальных уравнениях системы (2.21).

Построим дискретный аналог системы (2.21), (2.22), (1.22) с учетом (2.23), (2.24). Численное решение задачи ищется в узлах равномерной сетки с шагом δ_m по временной координате $\tau_m = \delta_m m$. Искомые коэффициенты рядов перемещений и их скоростей, контактного давления, радиус границы области взаимодействия, глубина погружения ударника как абсолютно твердого тела и ее скорость заменяются их значениями в дискретные моменты времени:

$$u_{nm} = u_n(\tau_m), w_{nm} = w_n(\tau_m), \chi_{nm} = \chi_n(\tau_m), \tilde{u}_{nm} = \tilde{u}_{0n}(\tau_m), \tilde{w}_{nm} = \tilde{w}_n(\tau_m),$$

$$\tilde{\chi}_{nm} = \tilde{\chi}_n(\tau_m), p_{nm} = \sum_{i=1}^3 p_{in}(\tau_m), b_m = b(\tau_m), u_{cm} = u_c(\tau_m), \tilde{u}_{cm} = \tilde{u}_c(\tau_m).$$

Основанная на методе Кунге-Кутта разностная схема для системы (2.21), (2.22), (1.22) имеет следующий вид:

$$\mathbf{W}_{m+1} = \mathbf{W}_m + \frac{\delta_m}{6} (\mathbf{R} + 2\mathbf{K} + 2\mathbf{Z} + \mathbf{S}), \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_{m+1} &= \left\| \mathbf{W}_{0,m+1}, \mathbf{W}_{1,m+1}, \dots, \mathbf{W}_{N,m+1} \right\|^T, \\
\mathbf{W}_{n,m+1} &= \left\| u_{n,m+1}, w_{n,m+1}, \chi_{n,m+1}, \tilde{u}_{n,m+1}, \tilde{w}_{n,m+1}, \tilde{\chi}_{n,m+1} \right\|^T, \\
\mathbf{W}_m &= \left\| \mathbf{W}_{0m}, \mathbf{W}_{1m}, \dots, \mathbf{W}_{Nm} \right\|^T, \\
\mathbf{W}_{nm} &= \left\| u_{nm}, w_{nm}, \chi_{nm}, \tilde{u}_{nm}, \tilde{w}_{nm}, \tilde{\chi}_{nm} \right\|^T, \\
\mathbf{R} &= \left\| \mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N \right\|^T, \quad \mathbf{R}_n = \left\| r_{1n}, r_{2n}, r_{3n}, r_{4n}, r_{5n}, r_{6n} \right\|^T, \\
\mathbf{K} &= \left\| \mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_N \right\|^T, \quad \mathbf{K}_n = \left\| k_{1n}, k_{2n}, k_{3n}, k_{4n}, k_{5n}, k_{6n} \right\|^T, \\
\mathbf{Z} &= \left\| \mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_N \right\|^T, \quad \mathbf{Z}_n = \left\| z_{1n}, z_{2n}, z_{3n}, z_{4n}, z_{5n}, z_{6n} \right\|^T, \\
\mathbf{S} &= \left\| \mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_N \right\|^T, \quad \mathbf{S}_n = \left\| s_{1n}, s_{2n}, s_{3n}, s_{4n}, s_{5n}, s_{6n} \right\|^T,
\end{aligned}$$

ГДЕ

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \mathbf{M}\mathbf{W}_m + \mathbf{Q}^{(\mathbf{R})}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{M} \left(\mathbf{W}_m + \frac{1}{2} \mathbf{R} \right) + \mathbf{Q}^{(\mathbf{K})}, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{M} \left(\mathbf{W}_m + \frac{1}{2} \mathbf{K} \right) + \mathbf{Q}^{(\mathbf{Z})}, \\
\mathbf{S} &= \mathbf{M}(\mathbf{W}_m + \mathbf{Z}) + \mathbf{Q}^{(\mathbf{S})}, \quad \mathbf{Q}^{(\mathbf{R})} = \left\| \mathbf{Q}_0^{(\mathbf{R})}, \mathbf{Q}_1^{(\mathbf{R})}, \dots, \mathbf{Q}_N^{(\mathbf{R})} \right\|^T, \quad \mathbf{Q}^{(\mathbf{K})} = \left\| \mathbf{Q}_0^{(\mathbf{K})}, \mathbf{Q}_1^{(\mathbf{K})}, \dots, \mathbf{Q}_N^{(\mathbf{K})} \right\|^T, \\
\mathbf{Q}^{(\mathbf{Z})} &= \left\| \mathbf{Q}_0^{(\mathbf{Z})}, \mathbf{Q}_1^{(\mathbf{Z})}, \dots, \mathbf{Q}_N^{(\mathbf{Z})} \right\|^T, \quad \mathbf{Q}^{(\mathbf{S})} = \left\| \mathbf{Q}_0^{(\mathbf{S})}, \mathbf{Q}_1^{(\mathbf{S})}, \dots, \mathbf{Q}_N^{(\mathbf{S})} \right\|^T, \\
\mathbf{Q}_n^{(\mathbf{R})} &= \frac{1}{h\tilde{\gamma}\gamma^2} \left\| 0, 0, 0, 0, \sum_{i=1}^3 p_{inm}(\tilde{\mathbf{w}}_0^{(\mathbf{R})}), 0 \right\|^T, \quad \mathbf{Q}_n^{(\mathbf{K})} = \frac{1}{h\tilde{\gamma}\gamma^2} \left\| 0, 0, 0, 0, \sum_{i=1}^3 p_{inm}(\tilde{\mathbf{w}}_0^{(\mathbf{K})}), 0 \right\|^T, \\
\mathbf{Q}_n^{(\mathbf{Z})} &= \frac{1}{h\tilde{\gamma}\gamma^2} \left\| 0, 0, 0, 0, \sum_{i=1}^3 p_{inm}(\tilde{\mathbf{w}}_0^{(\mathbf{Z})}), 0 \right\|^T, \\
\mathbf{Q}_n^{(\mathbf{S})} &= \frac{1}{h\tilde{\gamma}\gamma^2} \left\| 0, 0, 0, 0, \sum_{i=1}^3 p_{inm}(\tilde{\mathbf{w}}_0^{(\mathbf{S})}), 0 \right\|^T, \\
\mathbf{U}_{c,m+1} &= \mathbf{U}_{cm} + \frac{\delta_m}{6} (\mathbf{R}^* + 2\mathbf{K}^* + 2\mathbf{Z}^* + \mathbf{S}^*), \tag{2.26} \\
\mathbf{U}_{c,m+1} &= \left\| u_{c,m+1}, \tilde{u}_{c,m+1} \right\|^T, \quad \mathbf{U}_{cm} = \left\| u_{c,m}, \tilde{u}_{c,m} \right\|^T, \\
\mathbf{R}^* &= \left\| r_1^*, r_2^* \right\|^T, \quad r_1^* = \tilde{u}_{cm}, \quad r_2^* = \frac{1}{m_0} \left(\mathbf{R}_e + \pi \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^3 p_{inm}(\tilde{\mathbf{w}}^{(\mathbf{R})}) I_{nm} \right), \\
\mathbf{K}^* &= \left\| k_1^*, k_2^* \right\|^T, \quad k_1^* = \tilde{u}_{cm} + \frac{r_2^*}{2}, \quad k_2^* = \frac{1}{m_0} \left(\mathbf{R}_e + \pi \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^3 p_{inm}(\tilde{\mathbf{w}}^{(\mathbf{K})}) I_{nm} \right),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Z}^* = \left\| z_1^*, z_2^* \right\|^T, \quad z_1^* = \tilde{u}_{cm} + \frac{k_2^*}{2}, \quad z_2^* = \frac{\pi}{m_0} \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^3 p_{inm}(\tilde{\mathbf{w}}^{(Z)}) I_{nm},$$

$$\mathbf{S}^* = \left\| s_1^*, s_2^* \right\|^T, \quad s_1^* = \tilde{u}_{cm} + z_2^*, \quad s_2^* = \frac{\pi}{m_0} \sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^3 p_{inm}(\tilde{\mathbf{w}}^{(S)}) I_{nm},$$

$$I_{nm} = I_n(b_m) \text{ (см.(2.19))};$$

$$b_{m+1} = \sqrt{u_{c,m+1}(2 - u_{c,m+1})}. \quad (2.27)$$

$$\text{Здесь } \tilde{\mathbf{w}}^{(R)} = (\tilde{w}_{ij})_{N \times m}, \quad \tilde{\mathbf{w}}^{(K)} = \left(\tilde{w}_{ij} + \frac{r_{5i}}{2} \right)_{N \times m}, \quad \tilde{\mathbf{w}}^{(Z)} = \left(\tilde{w}_{ij} + \frac{k_{5i}}{2} \right)_{N \times m},$$

$$\tilde{\mathbf{w}}^{(S)} = (\tilde{w}_{ij} + z_{5i})_{N \times m}.$$

Заметим, что на сверхзвуковом этапе взаимодействия справедливо условие

$$\dot{b}_{m+1} = \frac{(1 - u_{c,m+1})\tilde{u}_{c,m+1}}{\sqrt{u_{c,m+1}(2 - u_{c,m+1})}} \geq 1.$$

Квадратурные формулы для интегралов, входящих в выражения для определения $p_{1n}(\tau)$, $p_{2n}(\tau)$, $p_{3n}(\tau)$ (см.(2.24)), строятся с использованием метода весовых коэффициентов и канонической регуляризации [148] для получения конечных значений сингулярных интегралов.

Сеточные функции p_{1nm} , p_{2nm} , p_{3nm} с учетом (2.24) запишутся так:

$$p_{1nm} \approx -\frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^N \tilde{w}_{km} I_{nkm}, \quad I_{nkm} = I_{nk}(b_m) \text{ (см.(2.18))},$$

$$\begin{aligned}
p_{2nm} \approx & \frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{w}_{ki} P_k(\cos b_i) \sum_{j=1}^l P_n(\cos \theta_j) \sin \theta_j \times \\
& \times \left[\delta_m \left\{ \omega_{1j}(b_i) f_1(\theta_j, b_i, \tau_m - t_i) + \omega_{3j}(b_i) f_2(\theta_j, b_i, \tau_m - t_i) \right\} + \right. \\
& \left. + \tilde{\omega}_i \left\{ \omega_{1j}(b_i) f_3(\theta_j, b_i, \tau_m - t_i) + \delta_l f_4(\theta_j, b_i, \tau_m - t_i) \right\} \right], \quad (2.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{3nm} \approx & -\frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{w}_{ki} \sum_{il=1}^{m1} [P_k(\cos \theta_{*il}) - P_k(\cos \theta_{*il-1})] \sum_{j=1}^l P_n(\cos \theta_j) \sin \theta_j \times \\
& \times \left[\delta_m \left\{ \omega_{1j}(\theta_{*il}) f_1(\theta_j, \theta_{*il}, \tau_m - t_i) + \omega_{3j}(\theta_{*il}) f_2(\theta_j, \theta_{*il}, \tau_m - t_i) \right\} + \right. \\
& \left. + \tilde{\omega}_i \left\{ \omega_{1j}(\theta_{*il}) f_3(\theta_j, \theta_{*il}, \tau_m - t_i) + \delta_l f_4(\theta_j, \theta_{*il}, \tau_m - t_i) \right\} \right],
\end{aligned}$$

где $\delta_l = \frac{\pi}{l}$, $\delta_{m1} = \frac{b_i}{m1}$, $\theta_j = j\delta_l$, $t_i = i\delta_m$, $\theta_{*il} = il\delta_{m1}$;

$$f_1(\theta_j, x, \tau_m - t_i) = \sum_{q=1}^2 \mathfrak{G}_{rq1}(\theta_j, x, \tau_m - t_i),$$

$$f_2(\theta_j, x, \tau_m - t_i) = \sum_{q=1}^2 \mathfrak{G}_{rq2}(\theta_j, x, \tau_m - t_i),$$

$$f_3(\theta_j, x, \tau_m - t_i) = \sum_{q=1}^2 \mathfrak{G}_{rq3}(\theta_j, x, \tau_m - t_i),$$

$$f_4(\theta_j, x, \tau_m - t_i) = \mathfrak{G}_s(\theta_j, x, \tau_m - t_i).$$

Весовые коэффициенты имеют вид:

$$\tilde{\omega}_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{dt}{\tau_m - t} = \begin{cases} \ln \left| \frac{\tau_m - t_i}{\tau_m - t_{i+1}} \right|, & t_{i+1} \neq \tau_m \\ \ln |\tau_m - t_{m-1}|, & t_{i+1} = \tau_m \end{cases}$$

$$\omega_{lj}(x) = \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \frac{d\theta}{(\sin \theta - x)^l} = \begin{cases} F(x, \theta_j) - F(x, \theta_{j-1}), & x \neq \sin \theta_j, x \neq \sin \theta_{j-1} \\ F(x, \theta_j), & x = \sin \theta_{j-1} \\ -F(x, \theta_{j-1}), & x = \sin \theta_j \end{cases} \quad (l=1,3),$$

где $F(x, z)$ - первообразная подынтегральной функции.

Значения полных эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода вычисляются с помощью аппроксимации многочленами [150]:

$$K(\tilde{m}(x)) = \left[a_0 + a_1 \tilde{m}_1(x) + \dots + a_4 \tilde{m}_1^4(x) \right] + \\ + \left[b_0 + b_1 \tilde{m}_1(x) + \dots + b_4 \tilde{m}_1^4(x) \right] \ln(1/\tilde{m}_1(x)) + \varepsilon(\tilde{m}(x)), \\ |\varepsilon(\tilde{m}(x))| \leq 2 \cdot 10^{-8},$$

$$a_0 = 1.38629436112, a_1 = 0.09666344259, a_2 = 0.03590092383, \\ a_3 = 0.03742563713, a_4 = 0.01451196212, \\ b_0 = 0.5, b_1 = 0.12498593597, b_2 = 0.06880248576, \\ b_3 = 0.03328355346, b_4 = 0.00441787012;$$

$$E(\tilde{m}(x)) = \left[1 + a_1 \tilde{m}_1(x) + \dots + a_4 \tilde{m}_1^4(x) \right] + \\ + \left[b_1 \tilde{m}_1(x) + \dots + b_4 \tilde{m}_1^4(x) \right] \ln(1/\tilde{m}_1(x)) + \varepsilon(\tilde{m}(x)), \\ |\varepsilon(\tilde{m}(x))| \leq 2 \cdot 10^{-8},$$

$$a_1 = 0.44325141463, a_2 = 0.06260601220, \\ a_3 = 0.04757383546, a_4 = 0.01736506451, \\ b_1 = 0.24998368310, b_2 = 0.09200180037, \\ b_3 = 0.04069697526, b_4 = 0.00526449639,$$

$$\text{где } \tilde{m}(x) = \frac{4\theta_j x}{(\theta_j + x)^2} \quad 0 \leq \tilde{m}(x) < 1, \tilde{m}_1(x) = 1 - \tilde{m}(x).$$

Неполные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода вычисляются с помощью метода Симпсона [149] ($\delta_{\text{эл.}}$, \tilde{n} – шаг в эллиптическом интеграле и число шагов соответственно):

$$I = \begin{cases} F[\tilde{\delta}_q(x), \tilde{m}(x)], \text{ где } y(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{m}(x) \sin^2 \alpha}}, \\ E[\tilde{\delta}_q(x), \tilde{m}(x)], \text{ где } y(\alpha) = \sqrt{1 - \tilde{m}(x) \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$I \approx \frac{\delta_{\text{эл.}}}{3} \left(y_0 + y_n + 4 \sum_{i=1}^n y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} \right),$$

$$\delta_{\text{эл.}} = \frac{\tilde{\delta}_q(x)}{2\tilde{n}}, y_0 = y(0), y_n = y[\delta_q(x)], y_{2i-1} = y[(2i-1)\delta_{\text{эл.}}],$$

$$y_{2i} = y(2i\delta_{\text{эл.}}), \tilde{\delta}_q(x) = \arcsin \left(\frac{(\theta_j + x)\eta_q}{2(\tau_m - t_i)} \sqrt{\frac{\tau_k^2 - (\theta_j - x)^2}{\theta_j x}} \right), q=1,2.$$

К системе уравнений (2.25) – (2.28) добавляются начальные условия:

$$\mathbf{W}_{n0} = \begin{cases} \|0,0,0,0,0,0\|^T, & n \neq 1 \\ \|0,0,0,V_0,V_0,0\|^T, & n = 1 \end{cases}, u_{c,0} = 0, \tilde{u}_{c,0} = V_0, b_0 = 0. \quad (2.29)$$

Предложенный алгоритм расчета реализован в среде Delphi [151].

§ 2.4. Примеры расчетов

В качестве первого примера рассмотрим вертикальный удар стальной сферической оболочки по полупространству, заполненному сталью. Соответствующие безразмерные параметры имеют следующие значения:

$$R = 1, h = 0.05, \gamma = 1, V = 0.1.$$

На рис. 2.1. и 2.2. представлены зависимости положения границы области контакта и ее скорости расширения в зависимости от времени.

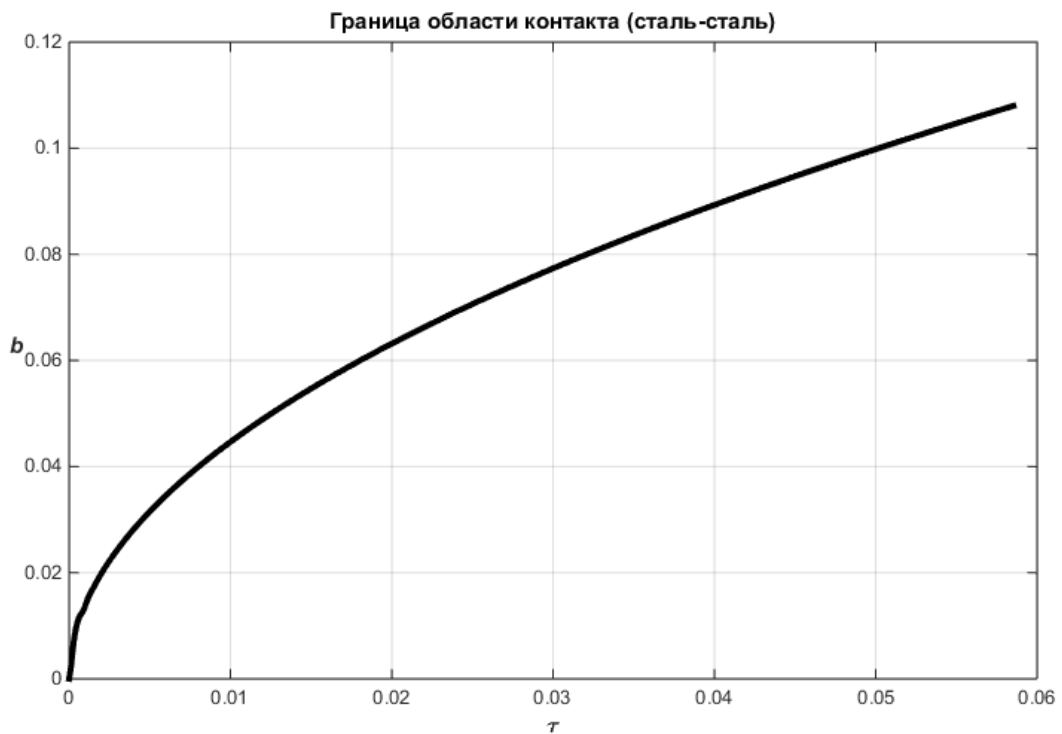


Рис. 2.1.

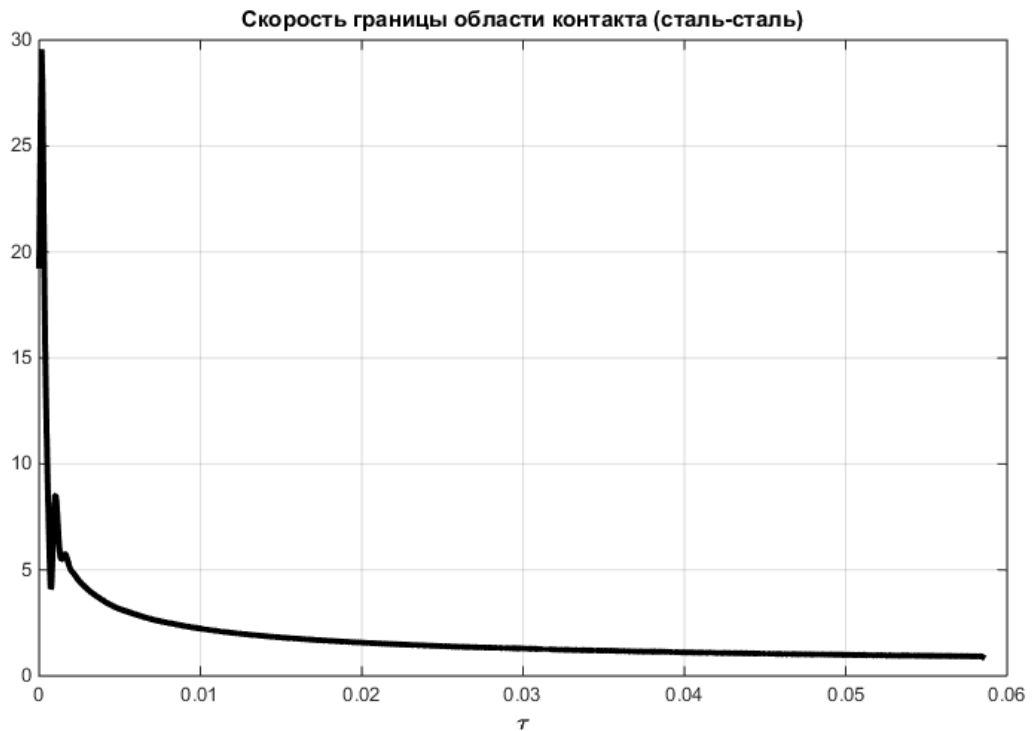


Рис. 2.2.

Зависимости контактного давления от времени в разных точках области контакта представлены на рис. 2.3. Сплошная кривая соответствует лобовой точке оболочки, штриховая – точке с координатой $\theta = 0.04$, штриховая пунктирная – $\theta = 0.08$. Положения скачков на графиках соответствуют моментам времени, при которых радиус расширяющейся области контакта $b(\tau)$ достигает соответствующей точки.

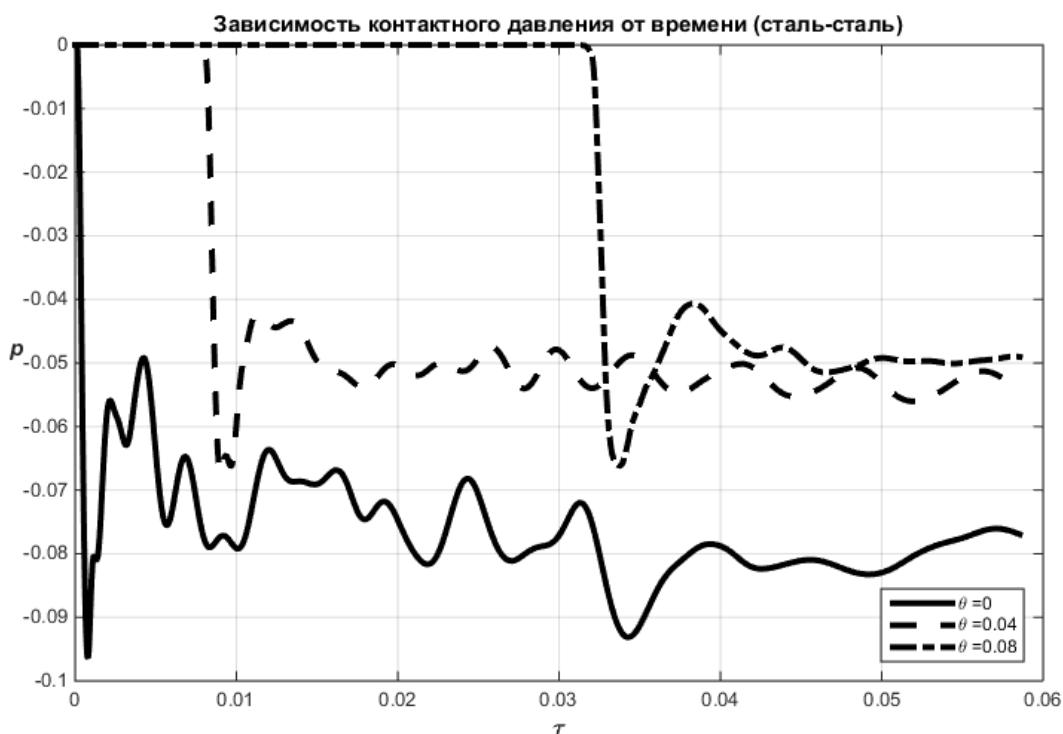


Рис. 2.3.

На рис. 2.4. представлены распределения контактного давления по угловой координате θ в различные моменты времени. Сплошная кривая соответствует моменту времени $\tau = 0.01$, штриховая – $\tau = 0.03$, штриховая пунктирная – $\tau = 0.06$. Скачки на графиках соответствуют положению границы области контакта в соответствующий момент времени. Как видно, на подвижной границе области взаимодействия контактное давление имеет разрыв первого рода. Этот результат согласуется с соответствующим аналитическим исследованием поведения контактного давления в нестационарных контактных задачах на сверхзвуковом этапе расширения области контакта, проведенным в работе [9].

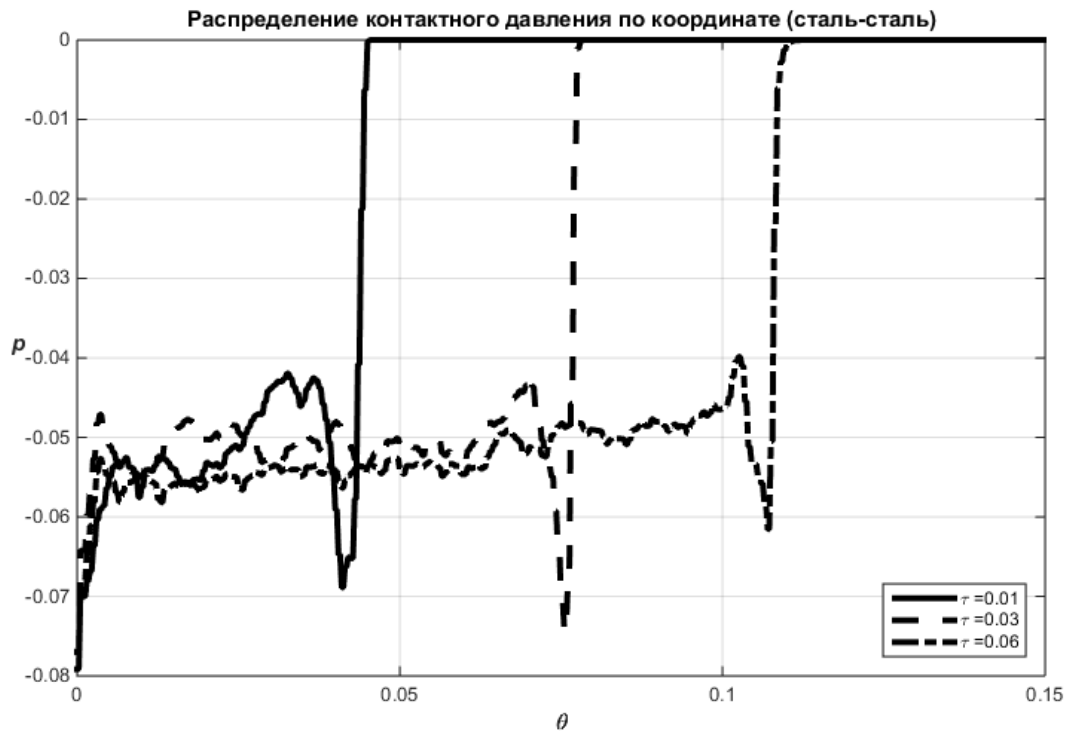


Рис. 2.4.

Зависимости нормальных перемещений оболочки от времени в точках с разными угловыми координатами представлены на рис. 2.5. Сплошная кривая соответствует лобовой точке оболочки, штриховая – точке с координатой $\theta = 0.04$, штриховая пунктирная – $\theta = 0.08$. Здесь заметно, что характер этих зависимостей близок к линейному. Момент времени появления ненулевых перемещений соответствует моменту достижения радиусом расширяющейся области контакта $b(\tau)$ соответствующей точки.

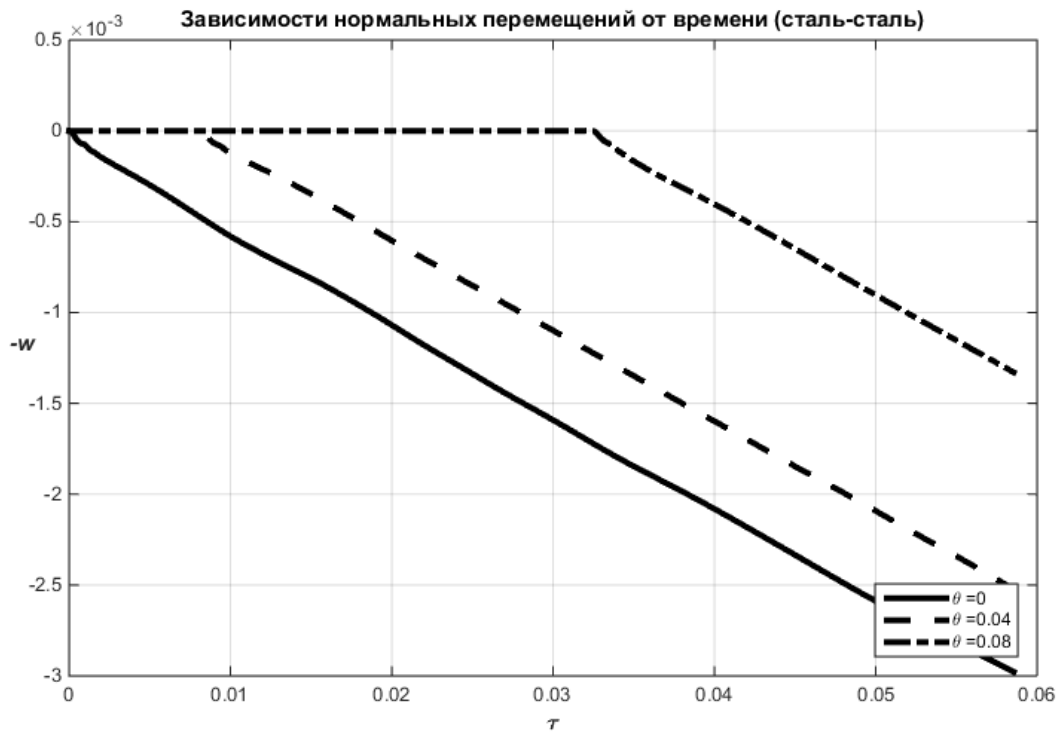


Рис. 2.5.

Распределения нормальных перемещений оболочки по угловой координате θ в различные моменты времени представлено на рис. 2.6. Сплошная кривая соответствует моменту времени $\tau = 0.01$, штриховая – $\tau = 0.03$, штриховая пунктирная – $\tau = 0.06$. Точки на графике, в которых нормальные перемещения обращаются в нуль, соответствуют положению границы области контакта в соответствующий момент времени.

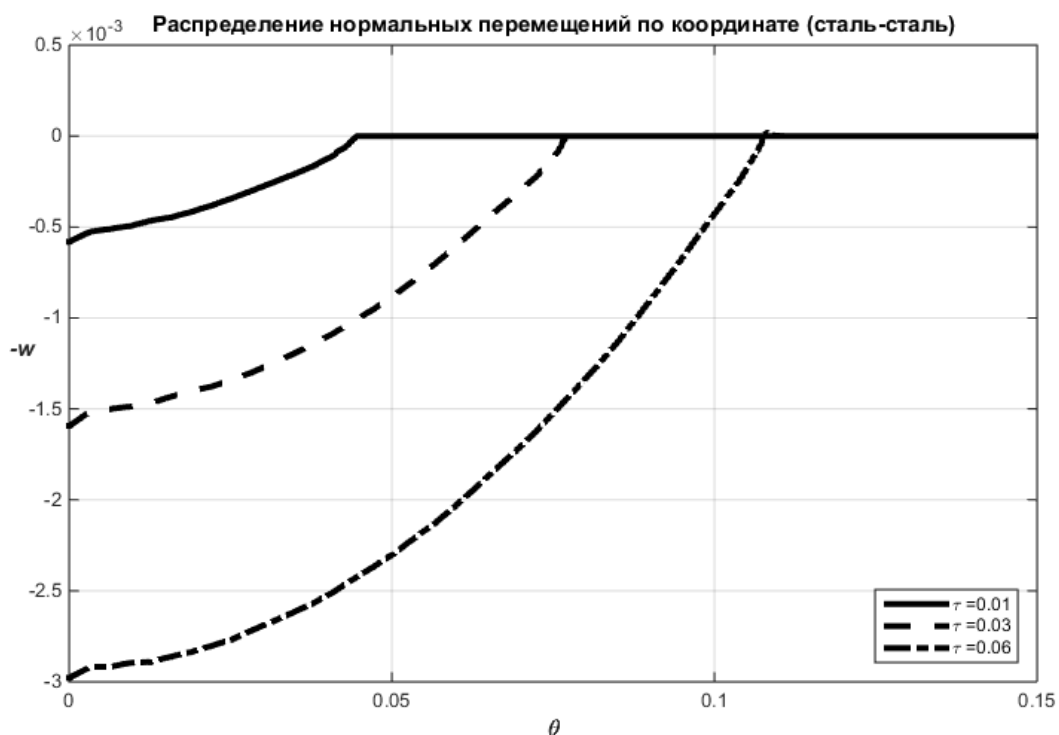


Рис. 2.6.

На рис. 2.7. показано сравнение распределений нормальных перемещений оболочки (сплошные кривые) и оболочки как абсолютно твердого тела u_c (штриховые кривые) в различные моменты времени.

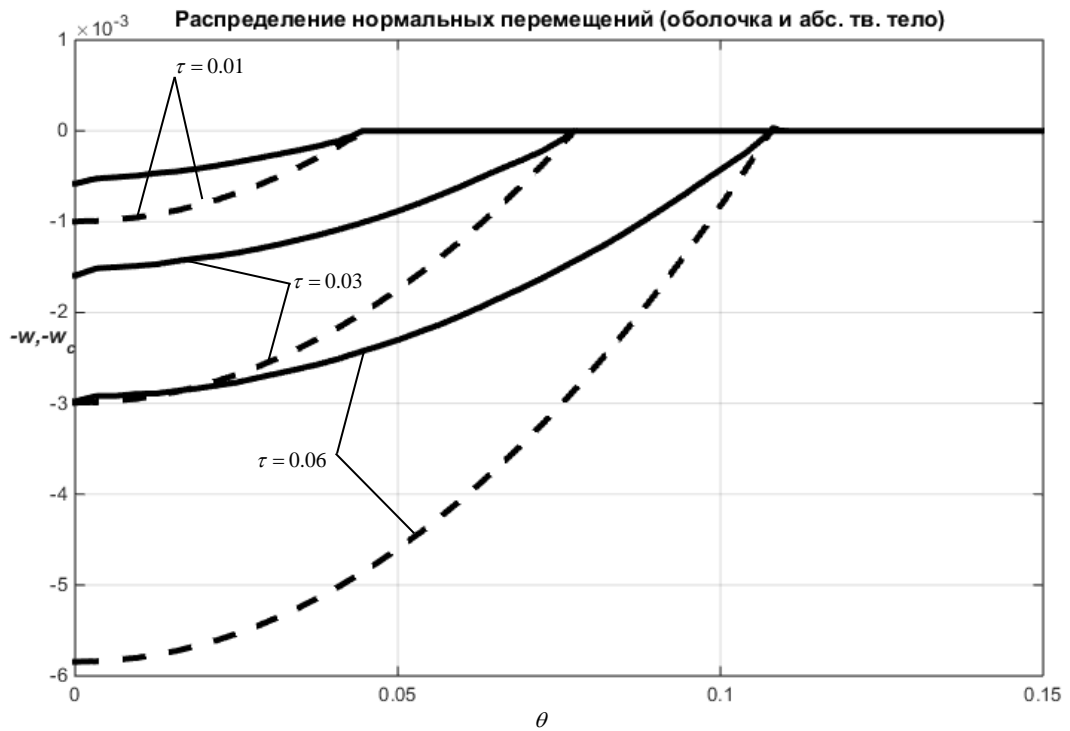


Рис. 2.7.

Для оценки сходимости по числу удерживаемых при расчете членов рядов используется норма

$$\|w(\theta, \tau)\| = \sup_{\theta, \tau \geq 0} |w(\theta, \tau)|. \quad (2.30)$$

Дискретный аналог этой нормы имеет вид (верхний индекс указывает на число учитываемых членов ряда):

$$\|w^{(N)}\| = \|w_{ij}^{(N)}\| = \sup_{i, j \in N} |w_{ij}|, \quad N = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (2.31)$$

Относительная погрешность представленных выше результатов в процентном отношении по норме (2.31) составляет

$$\varepsilon = \frac{\|w^{(4)} - w^{(5)}\|}{\|w^{(4)}\|} 100\% = 2.7\%.$$

В расчетах удерживалось четыре члена рядов в разложениях по полиномам Лежандра и их производным, так как учет большего числа членов дает незначительное уточнение результатов.

Второй пример иллюстрирует сравнение результатов при варьировании параметров материала оболочки и полупространства. Соответствующие безразмерные параметры имеют следующие значения:

$$R = 1, h = 0.05, V = 0.1;$$

$\gamma = 1$ - оболочка и полупространство - сталь (случай 1);

$\gamma = 0.95$ - оболочка - алюминий, полупространство - сталь (случай 2);

$\gamma = 0.77$ - оболочка - сталь, полупространство - медь (случай 3).

В расчетах удерживались первые четыре члена рядов (2.8).

Для проведения корректного сравнительного анализа результатов, значения контактного давления на графиках представлены по отношению к одной и той же размерной величине $\frac{h(\lambda_* + 2\mu_*)}{R}$, где λ_* , μ_* – упругие постоянные Ламе для стали.

На рис. 2.8. представлены зависимости контактного давления от времени в лобовой точке оболочки. Здесь и далее сплошные кривые соответствуют случаю 1, штриховые – случаю 2, штриховые пунктирные – случаю 3.

Аналогичные зависимости представлены на рис. 2.9. для точки оболочки с угловой координатой $\theta = 0.05$.

Распределения контактного давления по угловой координате в момент времени $\tau = 0.05$ иллюстрирует рис. 2.10.

Отметим для всех трех случаев похожий качественный характер этих результатов. Однако, заметны значительные количественные отличия, анализ которых позволяет сделать следующий вывод.

Наиболее интенсивные по величине контактные напряжения соответствуют случаям «более податливая оболочка – менее податливое полупространство», а наименее интенсивные – случаям «более податливое полупространство – менее податливая оболочка».

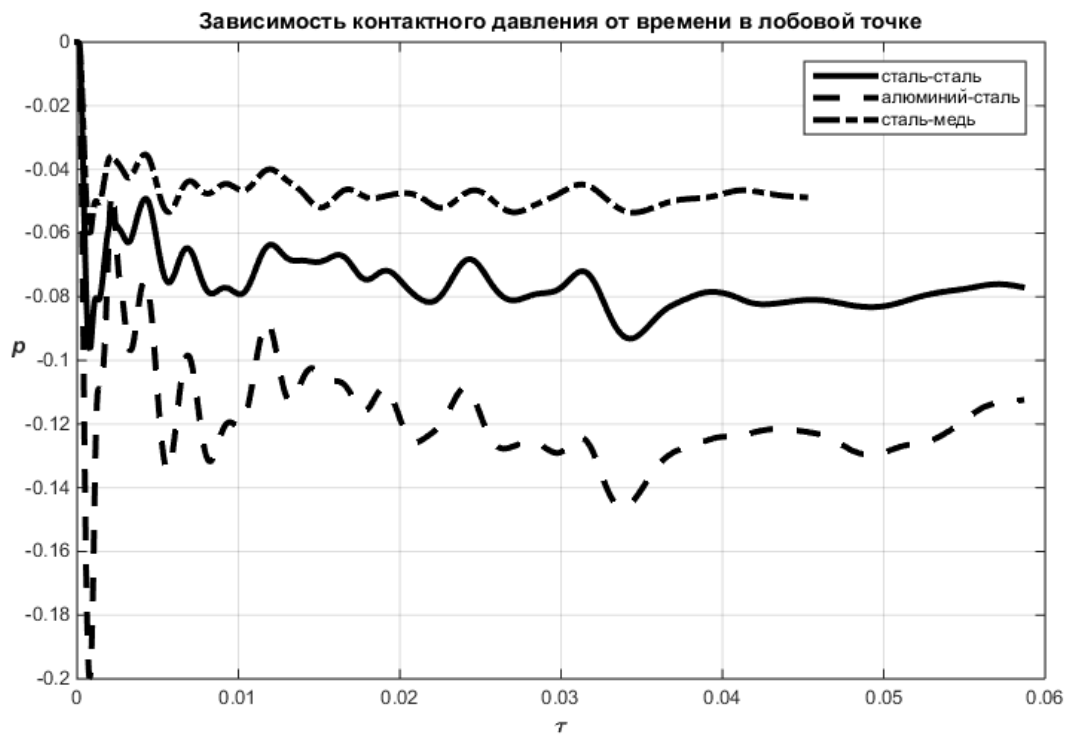


Рис. 2.8.

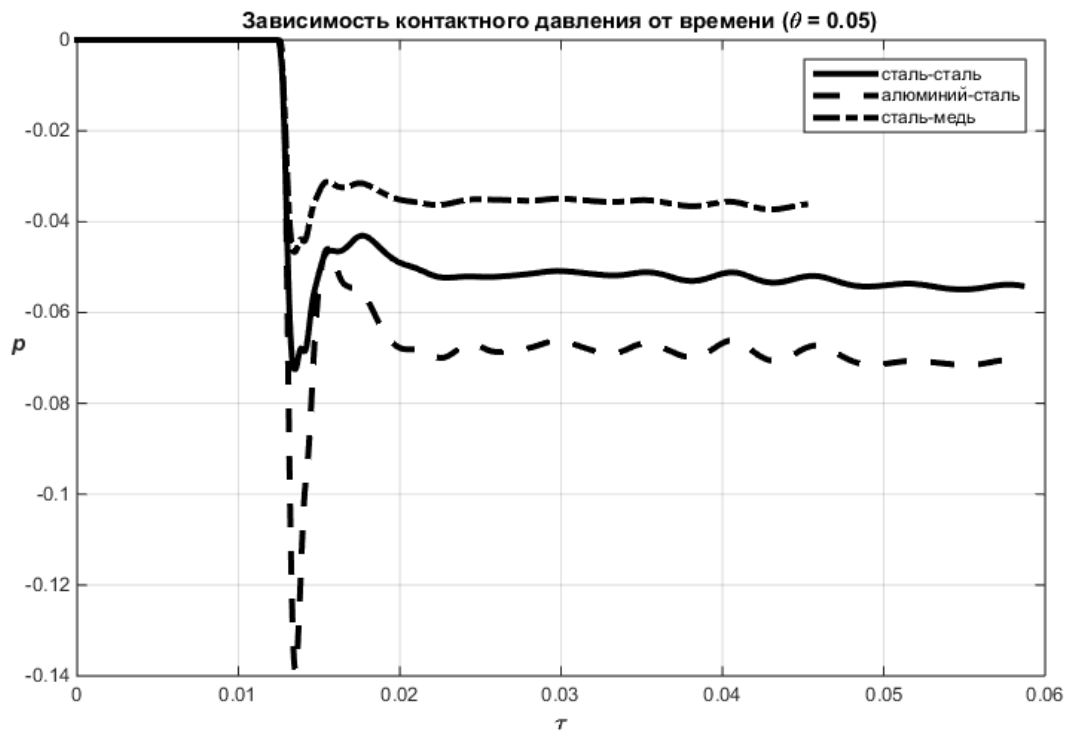


Рис. 2.9.

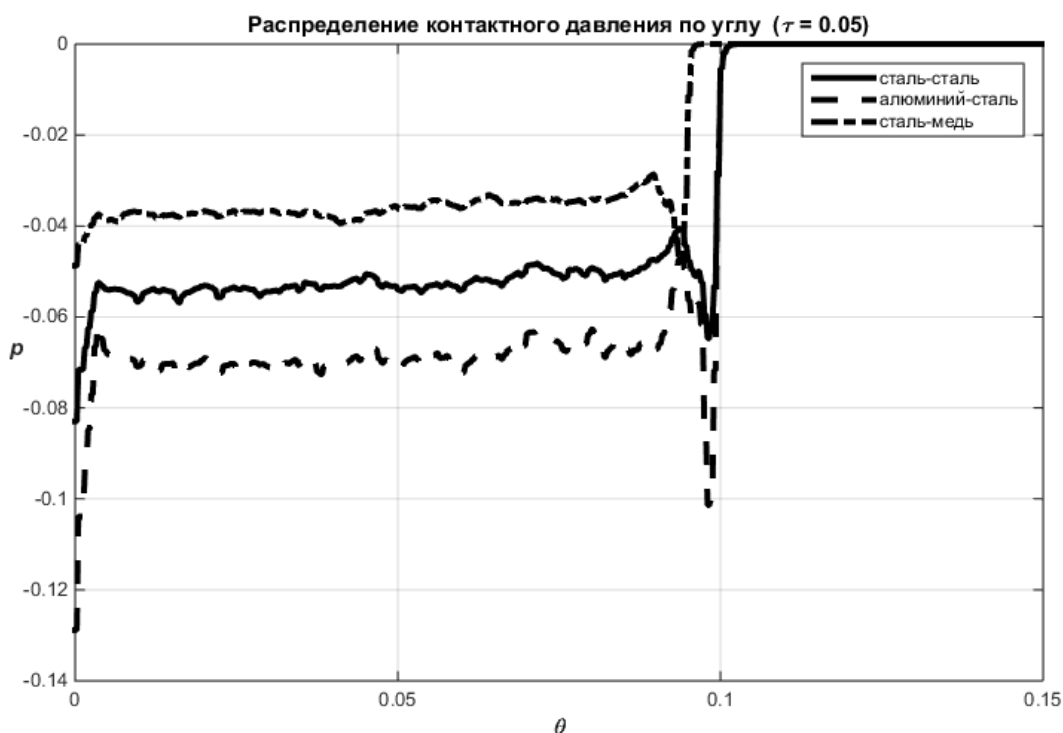


Рис. 2.10.

На рис. 2.11. представлены зависимости нормальных перемещений в лобовой точке от времени. Видно, что наибольшая глубина погружения оболочки в полупространство соответствует случаю оболочка – сталь, полупространство – медь. А наименьшая глубина погружения соответствует случаю оболочка – алюминий, а полупространство – сталь.

Вывод очевиден: с повышением жесткости и оболочки и податливости и полупространства глубина погружения увеличивается и, наоборот, с понижением жесткости и оболочки и податливости и полупространства глубина погружения уменьшается.

На рис. 2.12. представлено распределение нормальных перемещений по угловой координате в момент времени $\tau = 0.05$. Сплошные кривые соответствуют случаю 1, штриховые – случаю 2, штриховые пунктирные – случаю 3.

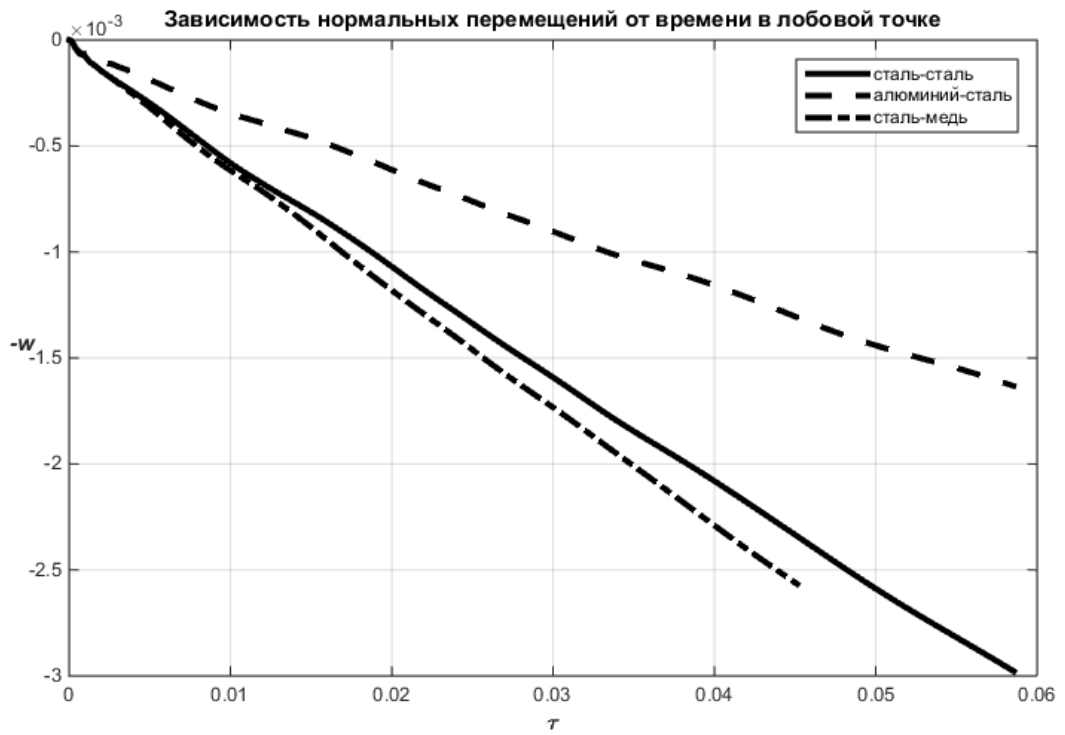


Рис. 2.11.

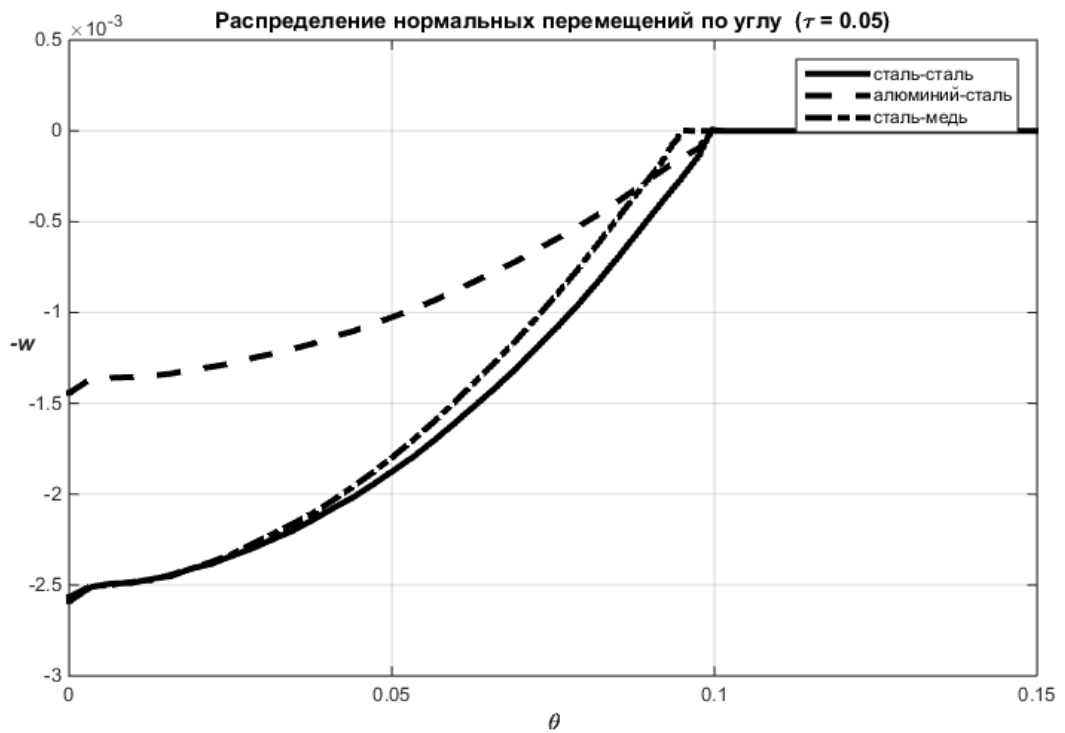


Рис. 2.12.

Глава 3. КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ВРЕМЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ

Разработанный в предыдущей главе алгоритм решения нестационарной контактной задачи для сферической оболочки и упругого полупространства не применим в случае дозвукового этапа контактного взаимодействия. Это объясняется тем, что носитель нормальных перемещений оболочки на дозвуковом этапе не совпадает с областью контакта. Следовательно, в этом случае соотношение (2.2) не справедливо и необходимо использовать другой подход к решению задачи. Он также основан на интегральных соотношениях между нормальными перемещениями и контактными давлениями. При этом, как и в случае сверхзвукового этапа взаимодействия, процесс построения решения осложняет неизвестное заранее положение границы области контакта. Однако, если использовать линеаризованное соотношение (1.22), которое позволяет определить положение границы в нулевом приближении, становится возможным построить разрешающее задачу интегральное уравнение, которое вытекает из граничных условий. При этом необходимо знать две функции влияния: поверхностную функцию влияния для полупространства (1.34), которая построена в работе [9] и неизвестную функцию влияния для оболочки, построению которой посвящен следующий параграф.

§ 3.1. Функция влияния для оболочки

Для решения задачи о контактном взаимодействии сферической оболочки и упругого полупространства на произвольном временном интервале используются функции влияния для полупространства и оболочки.

Поверхностная функция влияния (1.34) для полупространства известна. Материал этого параграфа посвящен решению нестационарной задачи о построении функции влияния для упругой сферической оболочки.

Функции влияния для оболочки представляют собой перемещения и угол поворота как решения задачи (1.15) – (1.17) с однородными начальными условиями при воздействии сосредоточенного мгновенного нормального давления [30 – 34]:

$$p = \delta(\tau)\delta(\theta - \xi) \quad (3.1)$$

где $\delta(\tau)$, $\delta(\theta - \xi)$ - дельта-функции Дирака.

Сведем неоднородные начальные условия (1.18) к однородным. Для этого представим тангенциальные и нормальные перемещения оболочки так

$$u = \tilde{u} - V_0\tau \sin \theta, \quad w = \tilde{w} + V_0\tau \cos \theta \quad (3.2)$$

При этом новые функции \tilde{u} и \tilde{w} удовлетворяют нулевым начальным условиям. Подстановка (3.2) в (1.15) – (1.17) не изменяет последние и приводит к системе уравнений относительно неизвестных \tilde{u} , \tilde{w} , χ , которые с учетом (3.1) и являются функциями влияния для оболочки. Для них введем специальные обозначения:

$$G_{01}(\theta, \xi, \tau) = \tilde{u}, \quad G_{02}(\theta, \xi, \tau) = \tilde{w}, \quad G_{03}(\theta, \xi, \tau) = \tilde{\chi} \quad (3.3)$$

Граничные условия в задаче об определении функций влияния состоят в требовании ограниченности решения в полюсах оболочки $\theta = 0$ и $\theta = \pi$.

Для решения поставленной задачи используем разложения функций G_{01} , G_{02} , G_{03} и $\delta(\theta - \xi)$ в ряды по полиномам Лежандра $P_n(\cos \theta)$ и их производным:

$$\begin{pmatrix} G_{01}(\theta, \xi, \tau) \\ G_{03}(\theta, \xi, \tau) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_{01n}(\tau, \xi) \\ G_{03n}(\tau, \xi) \end{pmatrix} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \quad (3.4)$$

$$\begin{pmatrix} G_{02}(\theta, \xi, \tau) \\ \delta(\theta - \xi) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} G_{02n}(\tau, \xi) \\ \delta_n(\xi) \end{pmatrix} P_n(\cos \theta)$$

Коэффициенты $\delta_n(\xi)$ находятся так:

$$\delta_n(\xi) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \delta(\theta - \xi) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \xi) \sin \xi \quad (3.5)$$

Подставляя (3.4) с учетом (3.3) в (1.16), (1.17), а затем в (1.15), используя соотношения для полиномов Лежандра

$$\frac{d^2 P_n(\cos \theta)}{d\theta^2} = - \left(\operatorname{ctg} \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} + n(n+1) P_n(\cos \theta) \right),$$

и учитывая малость параметра a по сравнению с единицей ($a \ll 1$), получаем систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений (3.4), зависящих от времени τ и угловой координаты ξ :

$$\begin{aligned}\gamma^2 \frac{\partial^2 G_{01n}(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} &= L_{11n} G_{01n}(\xi, \tau) + L_{12n} G_{02n}(\xi, \tau) + L_{13n} G_{03n}(\xi, \tau) \\ \gamma^2 \frac{\partial^2 G_{02n}(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} &= L_{21n} G_{01n}(\xi, \tau) + L_{22n} G_{02n}(\xi, \tau) + L_{23n} G_{03n}(\xi, \tau) + \frac{\delta(\tau)\delta_n(\xi)}{h} \quad (3.6) \\ \gamma^2 \frac{\partial^2 G_{03n}(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} &= L_{31n} G_{01n}(\xi, \tau) + L_{32n} G_{02n}(\xi, \tau) + L_{33n} G_{03n}(\xi, \tau),\end{aligned}$$

Здесь

$$L_m = \begin{pmatrix} d - \tilde{b} - m & c + \tilde{b} & \tilde{b} \\ m(\tilde{b} + c) & -2c - m\tilde{b} & -m\tilde{b} \\ \frac{\tilde{b}}{a} & -\frac{\tilde{b}}{a} & -\frac{\tilde{b}}{a} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

где $d = 1 - \alpha_0$, $\tilde{b} = \beta_0 k$, $c = 1 + \alpha_0$, $m = n(n + 1)$.

В пространстве преобразований Лапласа уравнения (3.6) с учетом нулевых начальных условий запишутся следующим образом (значок "L" означает трансформанту):

$$\begin{aligned}\gamma^2 s^2 G_{01n}^L(\xi, s) &= L_{11m} G_{01n}^L(\xi, s) + L_{12m} G_{02n}^L(\xi, s) + L_{13m} G_{03n}^L(\xi, s) \\ \gamma^2 s^2 G_{02n}^L(\xi, s) &= L_{21m} G_{01n}^L(\xi, s) + L_{22m} G_{02n}^L(\xi, s) + L_{23m} G_{03n}^L(\xi, s) + \zeta_n(\xi) \quad (3.8) \\ \gamma^2 s^2 G_{03n}^L(\xi, s) &= L_{31m} G_{01n}^L(\xi, s) + L_{32m} G_{02n}^L(\xi, s) + L_{33m} G_{03n}^L(\xi, s),\end{aligned}$$

где $\zeta_n(\xi) = \frac{P_n(\cos \xi) \sin(\xi)}{h} \frac{(2n+1)}{2}$, s - параметр преобразования.

Отметим, что для решения исходной задачи достаточно определить только одну функцию влияния – G_{02} .

Решая систему уравнений (3.8), находим изображение коэффициентов разложения функции влияния $G_{02n}^L(\xi, \tau)$:

$$G_{02n}^L(\xi, \tau) = \frac{P(s^2, m)}{R(s^2, m)} \zeta_n(\xi),$$

$$P(s, m) = \sum_{k=0}^2 P_k(s, m), \quad P_k(s, m) = \sum_{l=0}^k \tilde{a}_{l, k-l} s^l m^{k-l}; \quad (3.9)$$

$$R(s, m) = \sum_{k=0}^3 R_k(s, m), \quad R_k(s, m) = \sum_{l=0}^k a_{*l, k-l} s^l m^{k-l}.$$

Коэффициенты в формулах (3.9) определяются так:

$$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \tilde{b}d & -\tilde{b} & 0 \\ \gamma^2(ad - a\tilde{b} - \tilde{b}) & -\gamma^2 a & 0 \\ -\gamma^4 a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$A_* = (a_{*ij})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 2\tilde{b}cd & \tilde{b}c(c-2) & 0 & 0 \\ -2\gamma^2 \left(c(\tilde{b} - ad + a\tilde{b}) - \frac{\tilde{b}d}{2} \right) & \gamma^2(a(c(-2 + 2\tilde{b} + c) + \tilde{b}d) - \tilde{b}) & \gamma^2 ab & 0 \\ -\gamma^4(a(\tilde{b} - d + 2c) + \tilde{b}) & -a\gamma^4(\tilde{b} + 1) & 0 & 0 \\ -a\gamma^6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку изображение G_{02n}^L представляет собой правильную рациональную дробь относительно параметра s , то соответствующий оригинал при каждом n определяем аналитически с помощью второй теоремы разложения для преобразования Лапласа [143, 152, 41]

$$G_{02n}(\xi, \tau) = \sum_k \operatorname{res}_{s_{nk}} G_{02n}^L(\xi, s) e^{s\tau}, \quad R(z_{nk}, n) = 0, \quad z_{nk} = s_{nk}^2. \quad (3.11)$$

Подставляя найденные коэффициенты $G_{02n}(\xi, \tau)$ в соответствующее разложение (3.4), получаем функцию влияния для оболочки $G_{02}(\theta, \xi, \tau)$ в

виде ряда, который является расходящимся, но, следует отметить, что в смысле обобщенных функций он сходится.

§ 3.2. Система разрешающих уравнений

При исследовании контактного взаимодействия оболочки и полупространства на произвольном этапе основное уравнение системы разрешающих уравнений вытекает из последнего граничного условия в группе (1.21), которое при учете (3.2) преобразуется к виду

$$u_z = (\tilde{w} + V_0 \tau \cos \theta) \cos \theta, \quad |r| \leq b(\tau). \quad (3.12)$$

Нормальные перемещения оболочки и полупространства связаны с контактным давлением интегральными соотношениями, базирующимися на принципе суперпозиции [9, 34, 36 – 41]:

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= J_0(\theta, \tau), \quad u_z = J_1(\theta, \tau), \\ J_0(\theta, \tau) &= \int_0^\tau dt \int_0^{b(t)} G_{02}(\theta, \xi, \tau - t) p(\xi, t) d\xi, \\ J_1(\theta, \tau) &= \tilde{\gamma} \int_0^\tau dt \int_0^{b(t)} \Lambda(\theta, \xi, \tau - t) p(\xi, t) d\xi, \\ \Lambda(\theta, \xi, \tau) &= \xi \bar{\Lambda}(\theta, \xi, \tau), \quad \bar{\Lambda}(\theta, \xi, \tau) = \int_0^{2\pi} G_1(\sqrt{\theta^2 + \xi^2 - 2\theta\xi \cos \alpha}, \tau) d\alpha. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В (3.13) принято допущение о малых относительных размерах пятна контакта ($r \approx \theta$).

Из (3.12) и (3.13) вытекает основное разрешающее уравнение

$$J_1(\theta, \tau) - J_0(\theta, \tau) \cos \theta = V_0 \tau \cos^2 \theta. \quad (3.14)$$

До замкнутой системы разрешающих уравнений оно дополняется кинематическим соотношением (1.22), уравнением движения оболочки как абсолютно твердого тела, записанным в интегральной форме

$$u_c = V_0 \tau + \frac{1}{m_0} J_c(\tau), \quad (3.15)$$

$$J_c(\tau) = \pi \int_0^\tau \int_0^{b(t)} p(\xi, \tau)(\tau - t) \sin(2\xi) d\xi dt,$$

а также начальным условием

$$b(0) = 0. \quad (3.16)$$

Ядро $\Lambda(\theta, \xi, \tau)$ интегрального оператора $J_1(\theta, \tau)$ в (3.13) найдено в явном виде в работе [9]:

$$\Lambda(\theta, \xi, \tau) = \sum_{k=1}^2 \left\{ \Lambda_{kr}(\theta, \xi, \tau) + \Lambda_{ks}(\theta, \xi, \tau) H((\theta + \xi) - c_R \tau) \right\} H(\tau - \eta_k |\theta - \xi|), \quad (3.17)$$

$$\Lambda_{ks}(\theta, \xi, \tau) = \frac{a_k}{\eta^4} \begin{cases} \frac{\tau}{\pi} \sqrt{1 - \eta_k^2 c_R^2} \Lambda_s(\theta, \xi, \tau) & (\theta \neq \xi, \theta \xi \neq 0), \\ -\frac{1}{\pi c_R^2 \tau} & (\theta = \xi, \theta \xi \neq 0), \\ \tau \xi \sqrt{1 - \eta_k^2 c_R^2} (\theta^2 + \xi^2 - c_R^2 \tau^2)^{-3/2} & (\theta \xi = 0), \end{cases}$$

$$\Lambda_s(\theta, \xi, \tau) = -\sqrt{\frac{\xi}{\theta}} \frac{1}{c_R^2 \tau^2 - (\theta - \xi)^2} - \frac{1}{16\theta \sqrt{\theta \xi}} \ln |c_R^2 \tau^2 - (\theta - \xi)^2|,$$

$$\Lambda_{kr}(\theta, \xi, \tau) = \frac{\tau}{\pi \eta^4} \left[\xi \Lambda_{k2}(\theta, \xi, \tau) + a_k \sqrt{1 - \eta_k^2 c_R^2} g_k(\theta, \xi, \tau) H(m) \right],$$

$$g_k(\theta, \xi, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{4\theta \sqrt{\theta \xi}} \left[\tilde{\Lambda}_{k1}(\theta, \xi, \tau) + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{4} \ln |m_1| + \frac{1}{4} \ln(4\theta \xi) \right] & (\theta \xi \neq 0), \\ 0 & (\theta \xi = 0). \end{cases}$$

$$\tilde{\Lambda}_{k1}(\theta, \xi, \tau) = 4(\theta \xi)^{3/2} \Lambda_{k1}(\theta, \xi, \tau), \quad a_1 = \frac{(2 - \eta^2 c_R^2)^2}{P_2(c_R^2, 1)}, \quad a_2 = 4 \frac{1 - c_R^2}{P_2(c_R^2, 1)},$$

$$P_2(x, \tau) = x^2 - 2\alpha^2 \tau x + \beta^2 \tau^2, \quad \alpha^2 = 4/\eta^2 - c_R^2/2, \quad \beta^2 = 16(\eta^2 - 1)/(\eta^8 c_R^2).$$

Здесь c_R – скорость волны Рэлея, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = \eta$, $\Lambda_{kr}(\theta, \xi, \tau)$ – регулярные составляющие, являющиеся непрерывными функциями; $\Lambda_{ks}(\theta, \xi, \tau)$ – сингулярные составляющие ядра Λ , $H(x)$ – функция Хевисайда.

Функция Λ_{k2} не имеет особенностей и при $\theta\xi \neq 0$ определяется так:

$$\begin{aligned}\Lambda_{k2}(\theta, \xi, \tau) &= H(n_{k1})[H(-n_k)L_{k2}(-1) + H(n_k)L_{k2}(z_{k1})], \\ L_{k2}(y) &= \int_y^1 \frac{\chi_k(R_1^2, \tau^2)}{\sqrt{1-z^2}} dz, \quad R_1^2 = \theta^2 + \xi^2 - 2\theta\xi z, \quad n_k = \frac{1}{4\theta\xi} [(\theta + \xi)^2 - \tau_k^2], \\ n_{k1} = 1 - n_k &= \frac{1}{4\theta\xi} [\tau_k^2 - (\theta - \xi)^2], \quad z_{k1} = \frac{\theta^2 + \xi^2 - \tau_k^2}{2\theta\xi}, \quad \tau_k = \tau/\eta_k.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Функция χ_k введена ранее (см. (1.34)).

При $\theta\xi = 0$ имеем

$$\Lambda_{k2}(\theta, \xi, \tau) = \pi\chi_k(\theta^2 + \xi^2, \tau^2)H(\tau - \eta_k\sqrt{\theta^2 + \xi^2}) \quad (3.19)$$

В формуле (3.18) интегралы L_{k2} сводятся к гиперэллиптическим интегралам и могут быть вычислены с помощью квадратурных формул, учитывающих особенность подынтегральной функции в точках $z = \pm 1$.

Функция Λ_{k1} при $\theta\xi \neq 0$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\Lambda_{k1}(\theta, \xi, \tau) &= \frac{1}{4(\theta\xi)^{3/2}} H(n_{k1})H(m)[H(-m_1)\Lambda_{k11}(\theta, \xi, \tau) + H(m_1)\Lambda_{k12}(\theta, \xi, \tau)], \\ \Lambda_{k11}(\theta, \xi, \tau) &= -\frac{1}{m_1\sqrt{m}} \left[H(n_k)E\left(\varphi_k, \frac{1}{m}\right) + H(-n_k)E\left(\frac{1}{m}\right) \right], \\ \Lambda_{k12}(\theta, \xi, \tau) &= \frac{1}{m} \left\{ G(m) - H(n_k) \left[G(\theta_k, m) + \frac{1}{m} \sqrt{\frac{n_k n_{k1}}{m - n_k}} \right] \right\},\end{aligned}\quad (3.20)$$

$$G(m) = K(m) - \frac{1}{m_1} E(m), \quad G(\theta_k, m) = F(\theta_k, m) - \frac{1}{m_1} E(\theta_k, m),$$

$$m = \frac{1}{4\theta\xi} [(\theta + \xi)^2 - c_R^2 \tau^2], \quad m_1 = 1 - m = \frac{1}{4\theta\xi} [c_R^2 \tau^2 - (\theta - \xi)^2],$$

$$\sin \theta_k = \sqrt{\frac{n_k}{m}}, \quad \sin \varphi_k = \sqrt{\frac{mn_{k1}}{m - n_k}}$$

Здесь $K(m)$, $F(\varphi, m)$ – полный и неполный эллиптические интегралы первого рода, $E(m)$, $E(\varphi, m)$ – полный и неполный эллиптические интегралы второго рода, m - параметр, φ - амплитуда.

Из (3.17) видно, что особенности ядра $\Lambda(\theta, \xi, \tau - t)$ сосредоточены на прямых $c_R(\tau - t) = |\theta - \xi|$.

§ 3.3. Алгоритм и метод решения задачи на произвольном этапе контактного взаимодействия

Для решения системы (1.22), (3.14) и (3.15) с начальными условиями (3.16) используется численно-аналитический алгоритм, основанный на методе квадратур. С учетом гиперболического типа уравнений движения оболочки и полупространства используется явная схема интегрирования.

На пространственно-временную область $R_{t\xi}^2$ наносится сетка с постоянным шагом δ_t по времени t и δ_ξ по координате ξ (Рис. 3.1):

$$\begin{aligned} t_i = i\delta_t, \quad \tau = t_m = m\delta_t, \quad \xi_j = j\delta_\xi, \quad \theta = \xi_n = n\delta_\xi, \quad \delta_t < c_R \delta_\xi, \\ R_{t\xi}^2 = \bigcup_i \bigcup_j K_{ij}, \quad K_{ij} = \left\{ (t, \xi) \mid t \in [t_{i-1}, t_i], \xi \in [\xi_j, \xi_{j+1}] \right\}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где K_{ij} - элементарные прямоугольники.

Искомым функциям $b(t)$, $u_c(t)$, $p(t, \xi)$ ставятся в соответствие сеточные функции b_i , u_{ci} , p_{ij}

$$b_i = b(t_i), \quad u_{ci} = u_c(t_i), \quad p_{ij} = p(t_i, \xi_j) \quad (3.22)$$

Тогда с учетом (3.13) получим следующие представления для интегралов $J_0(\theta, \tau)$, $J_1(\theta, \tau)$:

$$\begin{aligned} J_0 = J_{0mn} &= \iint_D G_{02}(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi, \\ J_1 = J_{1mn} &= \tilde{\gamma} \iint_{D_{mn}} \Lambda(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi \quad (m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots), \\ D &= \left\{ (t, \xi) \mid t \geq 0, \xi \in [0, b(t)] \right\}, \quad D_{mn} = D \cap S(\xi_n, t_m), \\ S(\xi_n, t_m) &= \left\{ (t, \xi) \mid -t + \xi_n + t_m \geq \xi \geq t + \xi_n - t_m \right\}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $S(\xi_n, t_m)$ - носитель интегрального оператора J_{1m} , представляющий собой характеристический конус.

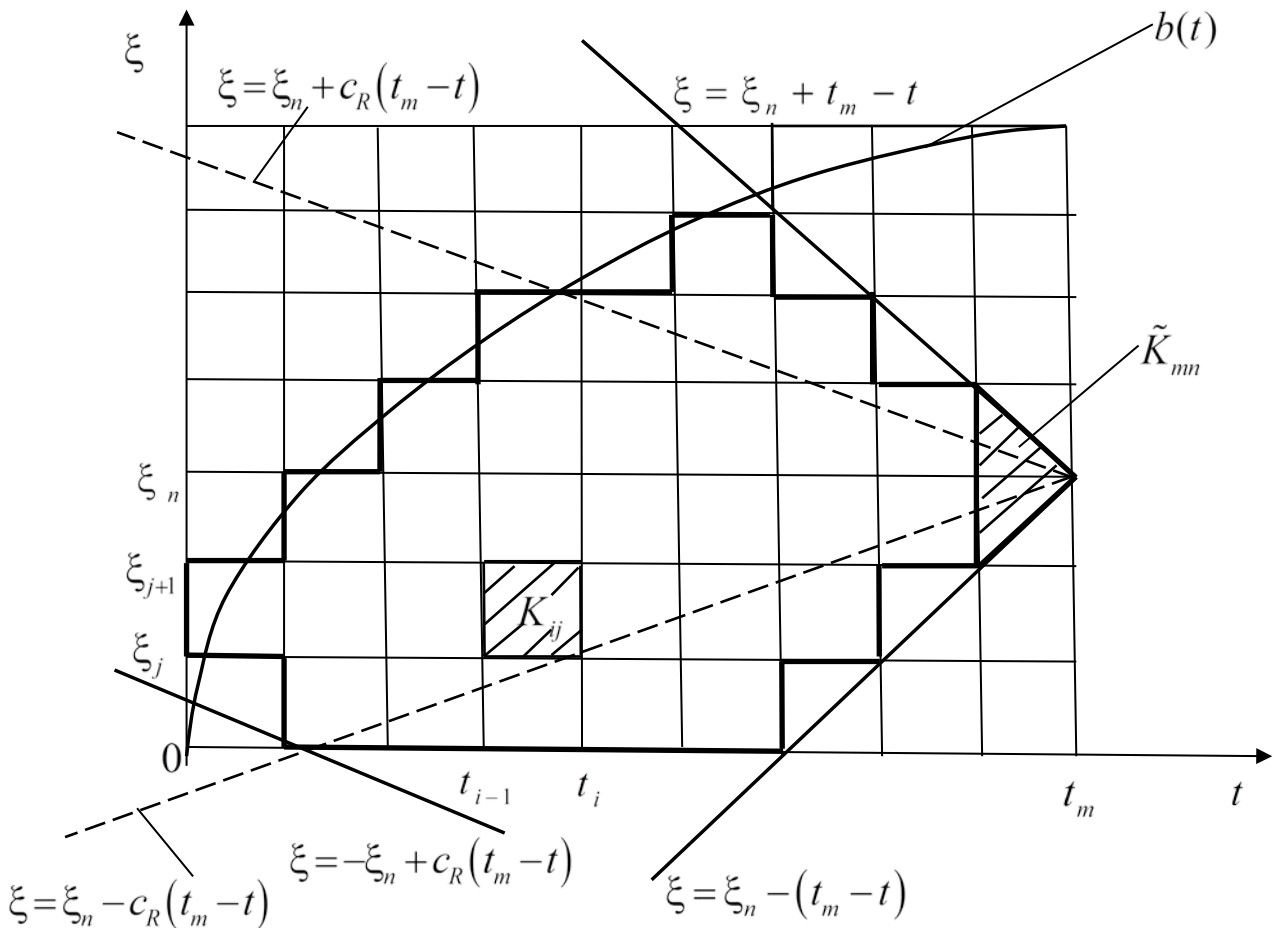


Рис. 3.1

Как показано в формулах (3.17), ядро $\Lambda(\theta, \xi, \tau - t)$ интегрального оператора $J_1(\theta, \tau)$ представлено регулярной $\Lambda_{kr}(\theta, \xi, \tau - t)$ и сингулярной $\Lambda_{ks}(\theta, \xi, \tau - t)$ составляющими. Функция $\Lambda(\theta, \xi, \tau - t)$ имеет неинтегрируемую особенность при $c_R(\tau - t) = |\theta - \xi|$ и непрерывна на конусе $S(\theta, \tau)$, исключая вершину $\xi = \theta, t = \tau$, где она имеет интегрируемую особенность. Поэтому при аппроксимации должен быть выделен треугольник \tilde{K}_{mn} :

$$\tilde{K}_{mn} = \{(t, \xi) \mid t \in [t_{m-1}, t_m], -t + \xi_n + t_m \geq \xi \geq t + \xi_n - t_m\} \quad (3.24)$$

Таким образом, интеграл J_{1mn} в (3.23) запишем в виде суммы:

$$\begin{aligned} J_{1mn} &= \tilde{\gamma} \{ J_{1m-1,n} + \varsigma_{mn} \tilde{J}_{1mn} \}, \quad J_{1m-1,n} = J_{1m-1,n}^{(r)} + J_{1m-1,n}^{(s)}, \\ J_{1m-1,n}^{(r)} &= \sum_{k=1}^2 \iint_{D_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}} \Lambda_{kr}(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi, \\ J_{1m-1,n}^{(s)} &= \sum_{k=1}^2 \iint_{\tilde{D}_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}} \Lambda_{ks}(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi, \\ \tilde{J}_{1mn} &= \iint_{\tilde{K}_{mn}} \Lambda(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi, \\ \varsigma_{mn} &= 1 \quad (m < k_m), \quad \varsigma_{mn} = 0 \quad (m > k_m), \quad k_m = \lceil b_m / \delta_\xi \rceil, \\ \tilde{D}_{mn} &= D_{mn} \cap \tilde{S}(\xi_n, t_m), \quad \tilde{S}(\xi_n, t_m) = \{(t, \xi) \mid \xi \geq c_R(m\delta_t - t) - n\delta_\xi\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь $[x]$ – обозначает целую часть числа x .

Используя аппроксимации (3.21), (3.22), представим интеграл \tilde{J}_{1mn} в виде:

$$\tilde{J}_{1mn} = p_{mn} d_{mn}, \quad d_{mn} = \iint_{\tilde{K}_{mn}} \Lambda(\xi_n, \xi, t_m - t) dt d\xi \quad (3.26)$$

Для вычисления d_{mn} сделаем замену переменных

$$z = t - (m-1)\delta_t$$

и с учетом носителя ядра получим:

$$\begin{aligned}
d_{mn} &= \iint_{\tilde{K}_{mn}} \Lambda(n\delta_\xi, \xi, m\delta_t - t) d\xi dt = \int_0^{\delta_t} dz \int_{n\delta_\xi - (\delta_t - z)}^{n\delta_\xi + (\delta_t - z)} \xi \bar{\Lambda}(n\delta_\xi, \xi, \delta_t - z) d\xi = \\
&= \int_0^{\delta_t} dz \int_0^\infty \xi \bar{\Lambda}(n\delta_\xi, \xi, \delta_t - z) J_0(0) d\xi = \int_0^{\delta_t} \bar{\Lambda}^{H_0}(n\delta_\xi, q, \delta_t - z) \Big|_{q=0} dz.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Здесь $\bar{\Lambda}(n\delta_\xi, \xi, \delta_t - z) = \int_0^{2\pi} G_1(\sqrt{(n\delta_\xi)^2 + \xi^2 - 2n\delta_\xi \xi \cos \tilde{\alpha}}, \delta_t - z) d\tilde{\alpha}$, $J_0(x)$ – функция Бесселя первого порядка, значок H_0 указывает на преобразование Ханкеля по переменной ξ , q – параметр этого преобразования.

Применяя к (3.26) преобразование Лапласа по δ_t , получаем:

$$\left[\iint_{\tilde{K}_{mn}} \Lambda(n\delta_\xi, \xi, m\delta_t - t) d\xi dt \right]^L = \frac{1}{s} \bar{\Lambda}^{H_0L}(n\delta_\xi, q, s) \Big|_{q=0}. \tag{3.28}$$

Используя связь преобразования Фурье по двум переменным с преобразованием Ханкеля [143, 144], имеем:

$$\bar{\Lambda}^{H_0L}(n\delta_\xi, q, s) \Big|_{p_1=p_2=0} = G^{FL}(p_1, p_2, s) \Big|_{p_1=p_2=0} = -\frac{1}{s}. \tag{3.29}$$

Здесь значком F обозначено преобразование Фурье по двум переменным, p_1, p_2 – параметры преобразования Фурье, $G(x_1, x_2, \tau)$ – функция влияния пространственной задачи, выражение изображения $G^{FL}(p_1, p_2, s)$ которой получено в работе [9].

Подставляя (3.29) в (3.28) и выполняя обратное преобразование Лапласа, находим значение искомого интеграла:

$$\tilde{J}_{1mn} = p_{mn} d_{mn} = -p_{mn} \delta_t \tag{3.30}$$

Для построения квадратурных формул для J_{0mn} , $J_{1m-1,n}^{(r)}$, $J_{1m-1,n}^{(s)}$ заменим область D многоугольником B_m :

$$B_m = \bigcup_{i=1}^m H_{i,0}^{k_i}, \quad k_i = \lceil b_i / \delta_\xi \rceil, \quad (3.31)$$

Области D_{mn} и \tilde{D}_{mn} приближенно представим в виде многоугольников B_{mn} и \tilde{B}_{mn} соответственно:

$$\begin{aligned} D_{mn} &\approx B_{mn} = \bigcup_{i=1}^{m-1} H_{i,q_{1i}}^{p_i} \cup \tilde{K}_{mn}, \quad p_i = \min(k_i, l_{i1}), \quad q_{1i} = \max(l_{i2}, 0), \\ \tilde{D}_{mn} &\approx \tilde{B}_{mn} = \bigcup_{i=1}^{m-1} H_{i,q_{2i}}^{p_i} \cup \tilde{K}_{mn}, \quad p_i = \min(k_i, l_{i1}), \quad q_{2i} = \max(l_{i2}, l_{i3}, 0), \\ l_{i1} &= -i + n + m, \quad l_{i2} = i + n - m, \quad l_{i3} = \lceil c_R(m-i) - n \rceil + 1, \quad H_{i,k}^l = \bigcup_{j=k}^{l-1} K_{ij}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Здесь $H_{i,k}^l$ – полоса, ограниченная вертикальными $t = t_{i-1}$, $t = t_i$ и горизонтальными $\xi = l\delta_\xi$, $\xi = k\delta_\xi$ прямыми.

Интегралы J_{0mn} , $J_{1m-1,n}^{(r)}$, $J_{1m-1,n}^{(s)}$ в (3.23), (3.25) приближенно представим следующем виде:

$$\begin{aligned} J_{0mn} &\approx \tilde{I}_{0mn} = \iint_{B_m} G_{02}(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi = I_{0m-1,n} + I_{0mn}, \\ J_{1m-1,n} &\approx I_{1m-1,n} = I_{1m-1,n}^{(r)} + I_{1m-1,n}^{(s)} \\ J_{1m-1,n}^{(r)} &\approx I_{1m-1,n}^{(r)} = \sum_{k=1}^2 \iint_{B_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}} \Lambda_{kr}(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi, \\ J_{1m-1,n}^{(s)} &\approx I_{1m-1,n}^{(s)} = \sum_{k=1}^2 \iint_{\tilde{B}_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}} \Lambda_{ks}(\xi_n, \xi, t_m - t) p(\xi, t) dt d\xi, \end{aligned} \quad (3.33)$$

Значение интеграла $I_{0m-1,n}$ и I_{0mn} определяются так

$$I_{0m-1,n} \approx \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k_i-1} p_{ij} a_{ij}, \quad I_{0m,n} \approx p_{mn} a_{mn}, \quad a_{ij} = \iint_{K_{ij}} G_{02}(\xi_n, \xi, t_m - t) dt d\xi,$$

$$a_{mn} = \int_{(m-1)\delta_t}^{m\delta_t} \int_{n\delta_\xi}^{(n+1)\delta_\xi} G_{02}(\xi_n, \xi, t_m - t) dt d\xi + \tilde{\varepsilon} \int_{(m-1)\delta_t}^{m\delta_t} \int_{(n-1)\delta_\xi}^{n\delta_\xi} G_{02}(\xi_n, \xi, t_m - t) dt d\xi, \quad (3.34)$$

$$\tilde{\varepsilon} = 1 \quad (n \neq 0), \quad \tilde{\varepsilon} = 0 \quad (n = 0).$$

где коэффициенты a_{ij} и a_{mn} находятся аналитически, в результате вычисления двойного интеграла по элементарному прямоугольнику K_{ij} с помощью первообразной для функции $G_{02}(\theta, \xi, \tau)$.

Теперь рассмотрим интеграл $I_{1m-1,n}$ (см. (3.33)). Он представляет собой сумму регулярных $I_{1m-1,n}^{(r)}$ и сингулярных $I_{1m-1,n}^{(s)}$ интегралов. Первые вычисляются с помощью квадратурных формул Гаусса по четырем точкам ($n_* = 4$) [149].

$$I_{1m-1,n}^{(r)} = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=q_{1i}}^{p_i-1} p_{ij} \tilde{a}_{ij}, \quad \tilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^2 \int_{(i-1)\delta_t}^{i\delta_t} \int_{j\delta_\xi}^{(j+1)\delta_\xi} \Lambda_{kr}(\xi_n, \xi, t_m - t) dt d\xi,$$

при $n_* = 4$

$$\int_{(i-1)\delta_t}^{i\delta_t} \int_{j\delta_\xi}^{(j+1)\delta_\xi} \Lambda_{kr}(\xi_n, \xi, t_m - t) dt d\xi = \frac{\delta_t}{2} \frac{\delta_\xi}{2} \sum_{l_1=1}^4 \sum_{l_2=1}^4 \omega_{l_1} \omega_{l_2} \Lambda_{kr}(\xi_n, \xi_{l_2}, t_m - t_{l_1}), \quad (3.35)$$

$$t_{l_1} = \frac{\delta_t}{2} \zeta_{l_1} + \frac{(2i-1)\delta_t}{2}, \quad \xi_{l_2} = \frac{\delta_\xi}{2} \zeta_{l_2} + \frac{(2j+1)\delta_\xi}{2},$$

здесь n_* значений аргумента ζ_l являются корнями многочлена Лежандра

$$P_{n_*}(\zeta), \quad \text{а веса } \omega_l = \frac{2}{(1-\zeta_l^2)[P'_{n_*}(\zeta_l)]^2}, \quad \text{где } P'_{n_*} - \text{ первая производная полинома}$$

Лежандра.

Подынтегральная функция Λ_{kr} содержит полные эллиптические интегралы первого $K(\tilde{m})$ и второго $E(\tilde{m})$ рода, значения которых вычисляются с применением аппроксимации многочленами [150]:

$$K(\tilde{m}) = [a_0 + a_1\tilde{m}_1 + \dots + a_4\tilde{m}_1^4] + [b_0 + b_1\tilde{m}_1 + \dots + b_4\tilde{m}_1^4] \ln(1/\tilde{m}_1) + \varepsilon(\tilde{m}),$$

$$|\varepsilon(\tilde{m})| \leq 2 \cdot 10^{-8},$$

$$a_0 = 1.38629436112, \quad a_1 = 0.09666344259, \quad a_2 = 0.03590092383,$$

$$a_3 = 0.03742563713, \quad a_4 = 0.01451196212,$$

$$b_0 = 0.5, \quad b_1 = 0.12498593597, \quad b_2 = 0.06880248576,$$

$$b_3 = 0.03328355346, \quad b_4 = 0.00441787012;$$

$$E(\tilde{m}) = [1 + a_1\tilde{m}_1 + \dots + a_4\tilde{m}_1^4] + [b_1\tilde{m}_1 + \dots + b_4\tilde{m}_1^4] \ln(1/\tilde{m}_1) + \varepsilon(\tilde{m}),$$

$$|\varepsilon(\tilde{m})| \leq 2 \cdot 10^{-8},$$

$$a_1 = 0.44325141463, \quad a_2 = 0.06260601220,$$

$$a_3 = 0.04757383546, \quad a_4 = 0.01736506451,$$

$$b_1 = 0.24998368310, \quad b_2 = 0.09200180037,$$

$$b_3 = 0.04069697526, \quad b_4 = 0.00526449639,$$

где $\tilde{m}_1 = 1 - \tilde{m}$.

Неполные эллиптические интегралы первого $F(\tilde{\delta}, \tilde{m})$ и второго рода $E(\tilde{\delta}, \tilde{m})$ вычисляются с помощью метода Симпсона [149] ($\delta_{эл.}, \tilde{n}$ - шаг в эллиптическом интеграле и число разбиений соответственно):

$$I \approx \frac{\delta_{эл.}}{3} \left(y_0 + y_n + 4 \sum_{i=1}^n y_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} \right), \quad I = \begin{cases} F(\tilde{\delta}, \tilde{m}), & \text{где } y(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{m} \sin^2 \alpha}} \\ E(\tilde{\delta}, \tilde{m}), & \text{где } y(\alpha) = \sqrt{1 - \tilde{m} \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\delta_{эл.} = \frac{\tilde{\delta}}{2\tilde{n}}, \quad y_0 = y(0), \quad y_n = y(\delta), \quad y_{2i-1} = y[(2i-1)\delta_{эл.}],$$

$$y_{2i} = y(2i\delta_{эл.}).$$

Построим аппроксимацию интегрального оператора $I_{1m-1,n}^{(s)}$ на области $\tilde{B}_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}$.

$$\begin{aligned}
I_{1m-1,n}^{(s)} &= \sum_{k=1}^2 \frac{a_k}{\eta^4} \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\eta_k^2 c_R^2}}{\pi} (I_{11m-1,n}^{(s)} + I_{12m-1,n}^{(s)}) & (\xi_n \neq \xi, \xi_n \xi \neq 0), \\ \sqrt{1-\eta_k^2 c_R^2} I_{13m-1,n}^{(s)} & (\xi_n \xi = 0), \end{cases} \\
I_{11m-1,n}^{(s)} &= \frac{1}{\sqrt{\xi_n}} \iint_{\tilde{B}_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}} \frac{p(\xi, t)(t-t_m)\sqrt{\xi}}{c_R^2 (t_m-t)^2 - (\xi_n - \xi)^2} dt d\xi, \\
I_{12m-1,n}^{(s)} &= \frac{1}{16(\xi_n)^{3/2}} \iint_{\tilde{B}_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}} \frac{p(\xi, t)(t-t_m)}{\sqrt{\xi}} \ln \left| c_R^2 (t_m-t)^2 - (\xi_n - \xi)^2 \right| dt d\xi, \\
I_{13m-1,n}^{(s)} &= \iint_{\tilde{B}_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}} (t_m-t)\xi \left(\xi_n^2 + \xi^2 - c_R^2 (t_m-t)^2 \right)^{-3/2} dt d\xi
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Интегралы $I_{11m-1,n}^{(s)}$, $I_{12m-1,n}^{(s)}$ вычисляются с помощью метода весовых коэффициентов с применением канонической регуляризации [149], [148]:

$$\begin{aligned}
I_{11m-1,n}^{(s)} &= \frac{1}{\sqrt{\xi_n}} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=q_{2i}}^{p_i-1} p_{ij} \sqrt{j\delta_\xi} a_{1ij}, \quad a_{1ij} = \int_{(i-1)\delta_t}^{i\delta_t} (t-t_m) dt \int_{j\delta_\xi}^{(j+1)\delta_\xi} \frac{d\xi}{c_R^2 (t_m-t)^2 - (\xi_n - \xi)^2}, \\
I_{12m-1,n}^{(s)} &= \frac{1}{16(\xi_n)^{3/2}} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=q_{2i}}^{p_i-1} \frac{p_{ij}}{\sqrt{j\delta_\xi}} a_{2ij}, \\
a_{2ij} &= \int_{(i-1)\delta_t}^{i\delta_t} (t-t_m) dt \int_{j\delta_\xi}^{(j+1)\delta_\xi} \ln \left| c_R^2 (t_m-t)^2 - (\xi_n - \xi)^2 \right| d\xi
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Как видно из формул (3.37), особенность первого порядка в a_{1ij} , a_{2ij} сосредоточена на прямых $|\xi_n - \xi| = c_R(t_m - t)$. Сингулярные коэффициенты a_{1ij} , a_{2ij} в (3.37) определяются аналитически элементарными методами интегрирования [153]:

$$\begin{aligned}
a_{1ij} &= \frac{1}{2c_R^2} \sum_{l=0}^1 (-1)^l \sum_{q=0}^1 \sum_{v=0}^{v+1} (-1)^v \mathfrak{v}_{ij}^{lqv}{}_{(1)} \ln \left| \mathfrak{v}_{ij}^{lqv}{}_{(1)} \right|, \\
\mathfrak{v}_{ij}^{lqv}{}_{(1)} &= c_R \delta_t (m-i+v) + (-1)^{q+l} \delta_\xi \left((j+q) - n \right); \\
a_{2ij} &= I_{ij}^{(1)} + I_{ij}^{(2)} + 2\delta_\xi \delta_t^2 \left(m - i + \frac{1}{2} \right), \\
I_{ij}^{(1)} &= c_R \sum_{l=0}^1 \sum_{q=0}^1 (-1)^{l+1} \left\{ -\delta_t d_{j(1)}^{lq} + \sum_{v=0}^1 (-1)^v \left((i-v) \delta_t^3 \left(\frac{(i-v)^2}{3} + m(m-i+v) \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + d_{j(2)}^{lq} \right) \ln \left| \mathfrak{v}_{ij}^{lqv}{}_{(2)} \right| - (i-v) \delta_t \left(\frac{((i-v)\delta_t)^2}{9} + \frac{(i-v)\delta_t}{6} d_{j(3)}^{lq} \right) \right\}, \\
d_{j(1)}^{lq} &= \frac{1}{3} \frac{(a_j^{lq})^2}{c_R^2} + \frac{m\delta_t}{3} \left(-\frac{a_j^{lq}}{c_R} + m\delta_t \right), \\
d_{j(2)}^{lq} &= -\frac{1}{3} \frac{1}{c_R^3} \left((c_R m \delta_t)^3 + (a_j^{lq})^3 \right), \\
d_{j(3)}^{lq} &= \frac{a_j^{lq} - 2c_R m \delta_t}{c_R}, \\
a_j^{lq} &= (n-j-q) (-1)^{q+l} \delta_\xi, \\
\mathfrak{v}_{ij}^{lqv}{}_{(2)} &= c_R \delta_t (m-i+v) + a_j^{lq}, \\
I_{ij}^{(2)} &= \sum_{l=0}^1 (-1)^l (n-j-l) \delta_\xi \sum_{q=0}^1 \sum_{v=0}^1 (-1)^v \left((i-v) \delta_t^2 \left(\frac{i-v}{2} - m \right) + d_{j(4)}^{lq} \right) \times \\
&\quad \times \ln \left| \mathfrak{v}_{ij}^{lqv}{}_{(3)} \right| + \frac{\delta_t}{2} \left(\delta_t \left(\frac{1}{2} - i \right) + d_{j(5)}^{lq} \right), \\
d_{j(4)}^{lq} &= -\frac{(\tilde{a}_j^{lq})^2 - c_R^2 (m\delta_t)^2}{2c_R^2}, \\
d_{j(5)}^{lq} &= -\frac{\tilde{a}_j^{lq} - c_R m \delta_t}{c_R}, \\
\tilde{a}_j^{lq} &= (n-j-l) (-1)^q \delta_\xi, \\
\mathfrak{v}_{ij}^{lqv}{}_{(3)} &= c_R \delta_t (m-i+v) + \tilde{a}_j^{lq}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

В формуле (3.38) в силу свойств функции $f(x) = x \ln|x|$, $g(x) = \ln|x|$ при $\mathfrak{U}_{ij}^{lqv(1)} = \mathfrak{U}_{ij}^{lqv(2)} = \mathfrak{U}_{ij}^{lqv(3)} = 0$ соответствующее слагаемое становится в пределе равно нулю.

Если ядро оператора $I_{13m-1,n}^{(s)}$ содержит $\xi = 0$, то $I_{13m-1,n}^{(s)} = 0$ (см. (3.36)), поэтому рассмотрим $I_{13m-1,n}^{(s)}$ при $\xi_n = 0$, $\xi \neq 0$:

$$\begin{aligned} I_{13m-1,n}^{(s)} &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=q_{2i}}^{p_i-1} p_{ij} \int_{(i-1)\delta_t}^{i\delta_t} (t_m - t) dt \int_{j\delta_\xi}^{(j+1)\delta_\xi} \xi \left(\xi^2 - c_R^2 (t_m - t)^2 \right)^{-3/2} d\xi = \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=q_{2i}}^{p_i-1} p_{ij} \int_{(i-1)\delta_t}^{i\delta_t} \int_{j\delta_\xi}^{(j+1)\delta_\xi} F_r(\xi, t_m - t) d\xi dt + \int_{(i-1)\delta_t}^{i\delta_t} \int_{j\delta_\xi}^{(j+1)\delta_\xi} F_s(\xi, t_m - t) d\xi dt, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$F_r(\xi, t_m - t) = (t_m - t) \xi \left(\xi^2 - c_R^2 (t_m - t)^2 \right)^{-3/2} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{c_R}} \sqrt{t_m - t} \left(\xi - c_R (t_m - t) \right)^{-3/2},$$

$$F_s(\xi, t_m - t) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{c_R}} \sqrt{t_m - t} \left(\xi - c_R (t_m - t) \right)^{-3/2}.$$

Регулярная составляющая $F_r(\xi, t_m - t)$ является ограниченной функцией в $\tilde{B}_{mn} \setminus \tilde{K}_{mn}$, двойной интеграл от которой вычисляется с помощью формулы Гаусса (см.(3.35)). Особенность порядка $(-3/2)$ в сингулярной части $F_s(\xi, t_m - t)$ сосредоточена на прямой $\xi = c_R(t_m - t)$, интеграл от $F_s(\xi, t_m - t)$ вычисляется так:

$$\begin{aligned} \int_{(i-1)\delta_t}^{i\delta_t} \int_{j\delta_\xi}^{(j+1)\delta_\xi} F_s(\xi, t_m - t) d\xi dt &= \frac{\sqrt{2}}{2c_R^{3/2}} \sum_{l=0}^1 \sum_{k=0}^1 (-1)^{l+k} \tilde{\mathfrak{U}}_{lk}, \\ \tilde{\mathfrak{U}}_{lk} &= \sqrt{(m-i+k)\delta_t \left((j+l)\delta_\xi - c_R(m-i+k)\delta_t \right)} - \\ &- \arcsin \left(\sqrt{\frac{c_R(m-i+k)\delta_t}{(j+l)\delta_\xi}} \right) \frac{(j+l)\delta_\xi}{\sqrt{c_R}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Дискретный аналог разрешающей системы (3.14), (3.15), (1.22) с начальными условиями (3.16) состоит из следующих уравнений:

$$u_{cm} = \frac{\pi}{m_0} \pi \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k_i-1} p_{ij} b_{ij} + V_0 m \delta_t,$$

$$b_{ij} = \iint_{K_{ij}} (t_m - t) \sin(2\xi) d\xi dt = \int_{(i-1)\delta_t}^{i\delta_t} \int_{j\delta_\xi}^{(j+1)\delta_\xi} (t_m - t) \sin(2\xi) d\xi dt = \quad (3.41)$$

$$= \frac{1}{2} \sin((2j+1)\delta_\xi) \sin(\delta_\xi) (2(m-i)+1) \delta_t^2,$$

$$b_m = \sqrt{u_{cm} (2 - u_{cm})}, \quad (3.42)$$

$$\left[\tilde{\gamma} I_{1m-1,n} - \cos(n\delta) I_{0m-1,n} \right] - p_{mn} \left[\tilde{\gamma} \delta_t + \cos(n\delta_\xi) a_{mn} \right] = V_0 m \delta_t \cos^2(n\delta_\xi). \quad (3.43)$$

Начальные условия для данной системы имеют вид:

$$u_{c0} = 0, \quad b_0 = 0. \quad (3.44)$$

На каждом временном шаге с номером m из формулы (3.41) определяется значение глубины проникания оболочки в полупространство u_{cm} . Подставляя u_{cm} в (3.42), находим радиус области контакта b_m .

После этого определяется решение p_{mn} уравнения (3.43)

$$p_{mn} = \frac{(\tilde{\gamma} I_{1m-1,n} - \cos(n\delta_\xi) I_{0m-1,n}) - V_0 m \delta_t \cos^2(n\delta_\xi)}{\tilde{\gamma} \delta_t + \cos(n\delta_\xi) a_{mn}}. \quad (3.45)$$

В (3.43), (3.45) интеграл $I_{1m-1,n}$ вычисляется с помощью квадратурных формул (3.33), (3.35) – (3.40), $I_{0m-1,n}$ и a_{mn} находятся по формулам (3.34).

Нормальные перемещения оболочки и полупространства согласно (3.2), (3.13), (3.23), (3.25), (3.30), (3.33) – (3.40) вычисляются так

$$\begin{aligned}
 w_{nm} &= \tilde{w}_{nm} + V_0 n \delta_t \cos m \delta_\xi, \quad \tilde{w}_{nm} = p_{mn} a_{mn} + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{k_i-1} p_{ij} a_{ij}, \\
 u_{znm} &= -p_{mn} \delta_t + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=q_{1i}}^{p_i-1} p_{ij} \tilde{a}_{ij} + \\
 &+ \sum_{k=1}^2 \frac{a_k}{\eta^4} \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\eta_k^2 c_R^2}}{\pi} (I_{11m-1,n}^{(s)} + I_{12m-1,n}^{(s)}) & (\xi_n \neq \xi, \xi_n \xi \neq 0), \\ \sqrt{1-\eta_k^2 c_R^2} I_{13m-1,n}^{(s)} & (\xi_n \xi = 0). \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Предложенный алгоритм расчета реализован в среде Си++ [154].

§ 3.4. Примеры расчетов

В качестве первого примера рассмотрим вертикальный удар стальной сферической оболочки по полупространству, заполненному сталью. Для проведения сравнения результатов, полученных с помощью двух разработанных в диссертации методов, параметры задачи выберем соответствующими примеру 1 § 2.4:

$$R = 1, h = 0.05, \gamma = 1, V = 0.1.$$

На рис. 3.1. и 3.2. показаны зависимости от времени положения границы области контакта и скорости ее расширения соответственно.

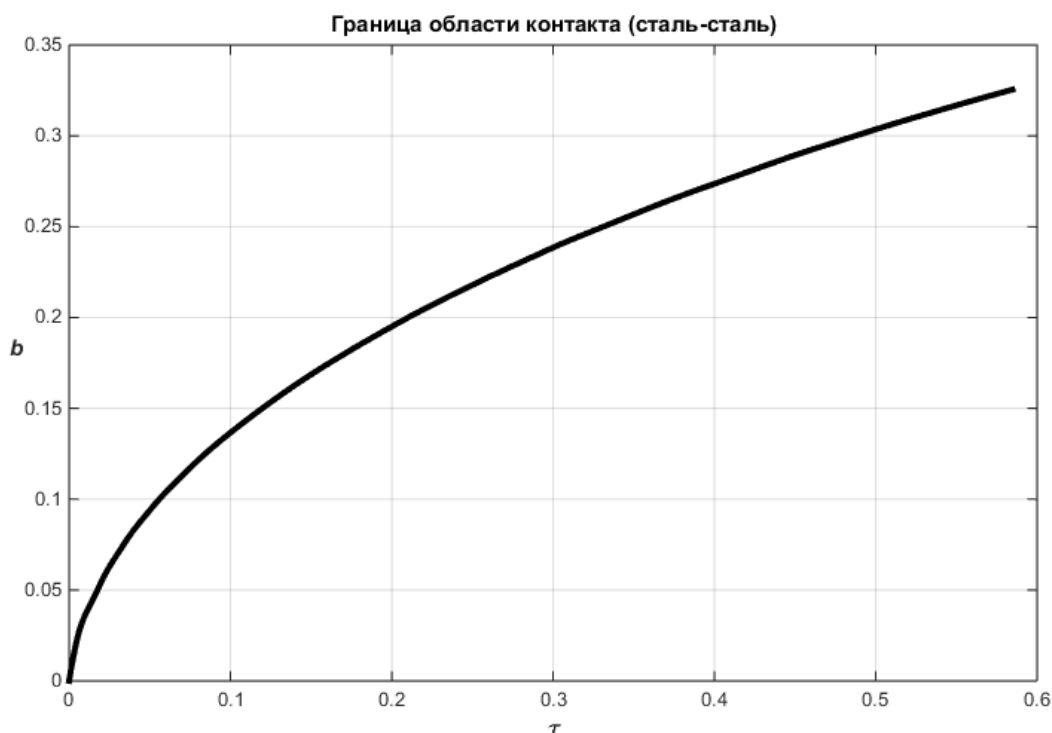


Рис. 3.1.

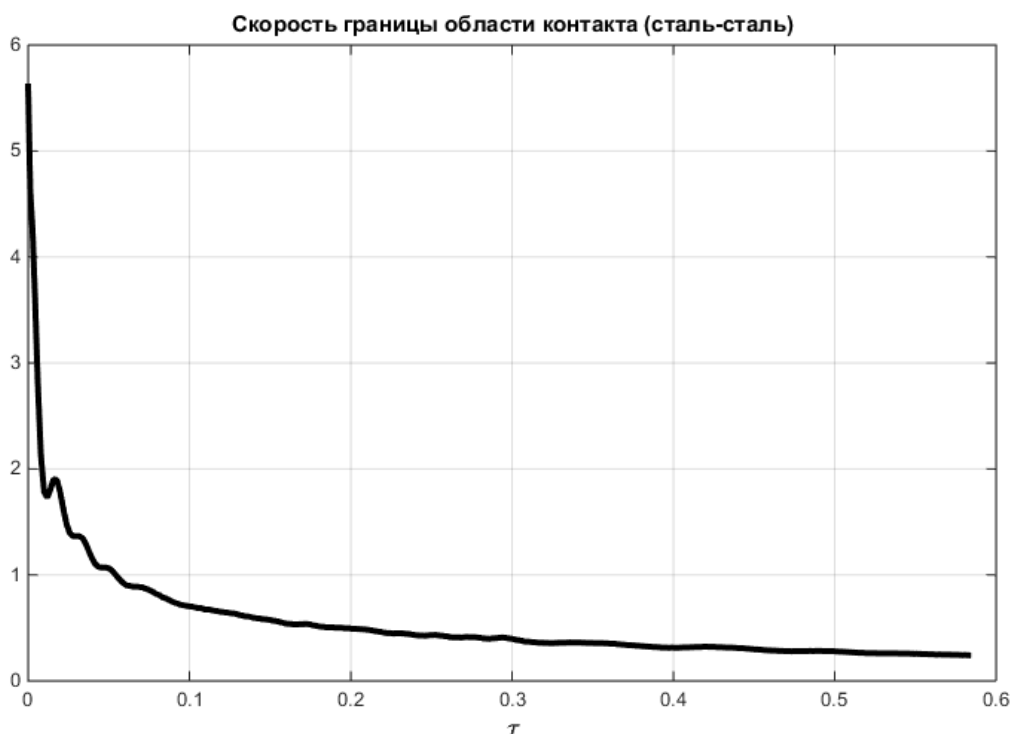


Рис. 3.2.

Зависимости от времени контактного давления и нормальных перемещений в разных точках границы полупространства представлены на рис. 3.3. и 3.4. Сплошная кривая соответствует лобовой точке, штриховая – точкам с координатой $r = 0.1$, штриховая пунктирная – точкам с координатой $r = 0.2$. Отметим, что возникновение ненулевых значений контактного давления соответствуют моментам времени, при которых граница области контакта достигает соответствующих точек поверхности полупространства. Что же касается нормальных перемещений на рис. 3.4, то здесь при $r = 0.2$ ненулевые перемещения возникают в момент времени $\tau = 0.152$. Однако в это время радиус области контакта еще не достиг значения $b = 0.2$. Это объясняется тем, что нормальные перемещения начинают выходить за область контакта. При этом смещения поверхности полупространства достигают точек с координатой $r = 0.2$ быстрее, нежели туда приходит граница области контакта.

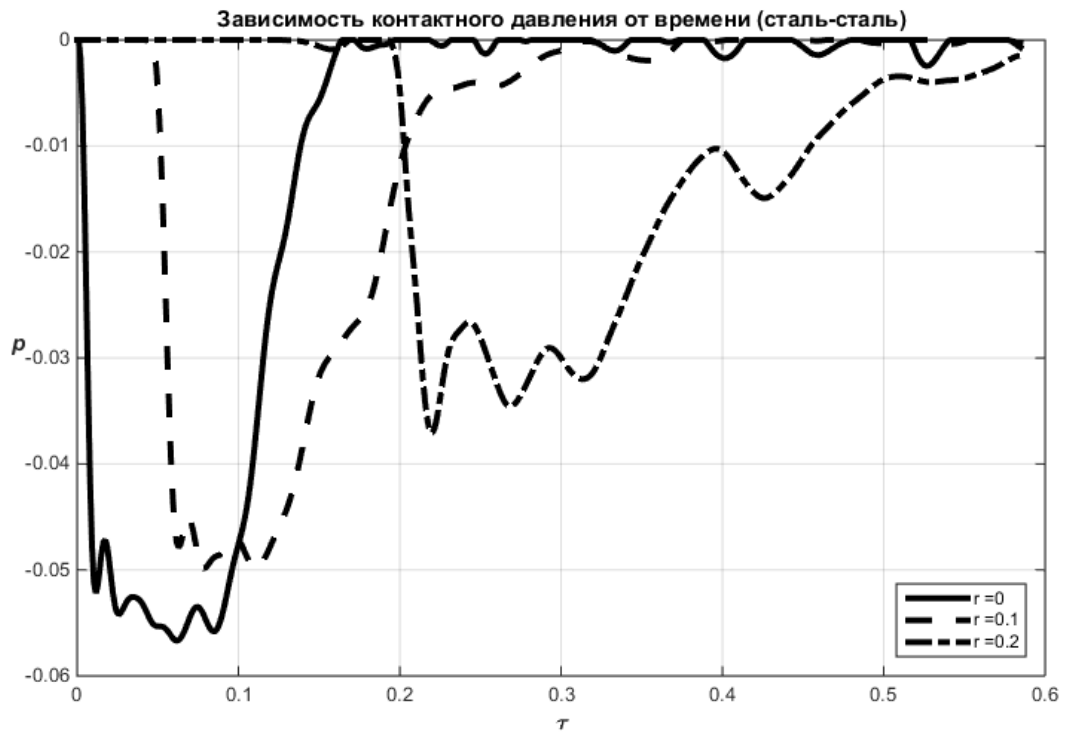


Рис. 3.3.

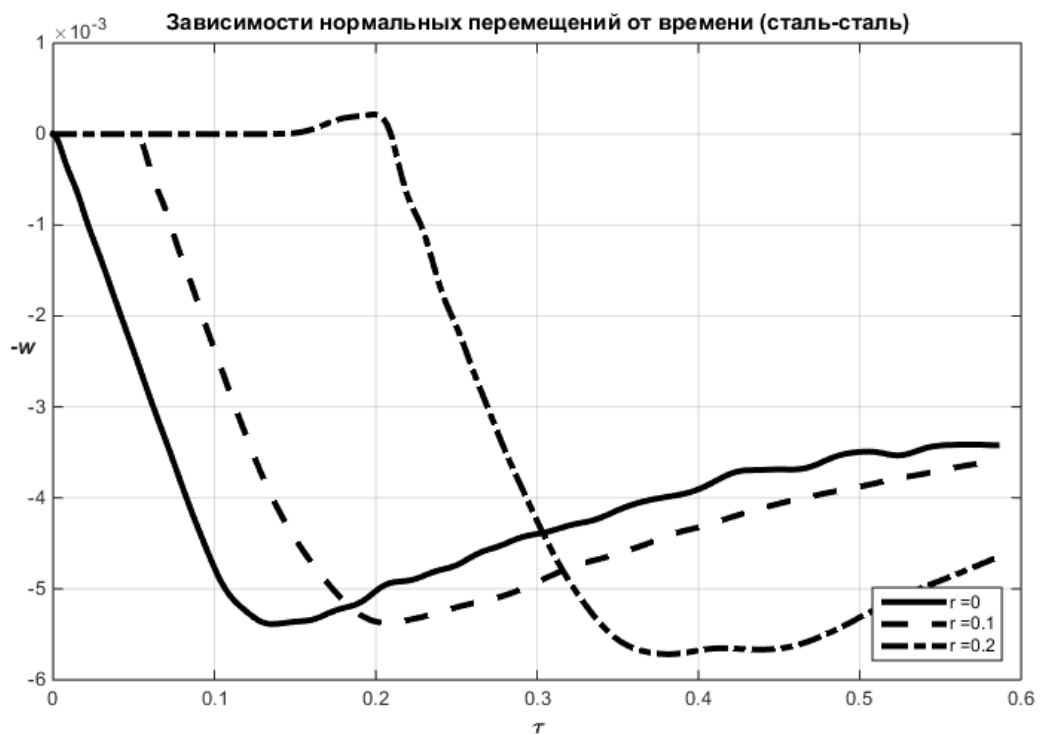


Рис. 3.4.

Распределение контактного давления в различные моменты времени представлено на рис. 3.5. Сплошная кривая соответствует значению $\tau = 0.1$, штриховая – $\tau = 0.3$, штриховая пунктирная – $\tau = 0.6$. Как видно из приведенных результатов, с течением времени в лобовой области давление понижается, и, наоборот, в области близкой к границе наблюдается значительный рост контактного давления. Это объясняется податливостью оболочки – в лобовой области с течением времени начинает возникать частичное отслоение граничных поверхностей, в то время как вся «контактная нагрузка» начинает перераспределяться в область, близкую к границе контакта.

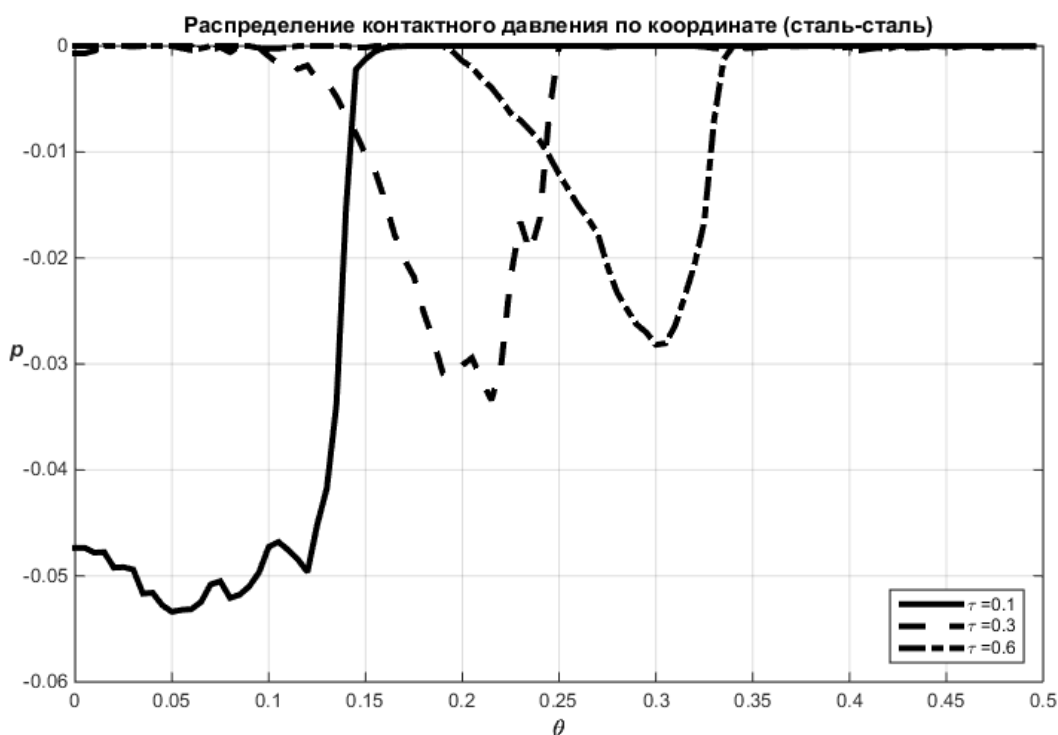


Рис. 3.5.

На рис. 3.6. изображены кривые, иллюстрирующие распределение нормальных перемещений поверхности полупространства в различные моменты времени. Сплошная кривая соответствует значению $\tau = 0.1$, штриховая – $\tau = 0.3$, штриховая пунктирная – $\tau = 0.6$. Здесь хорошо заметен, особенно на кривых для $\tau = 0.3$ и $\tau = 0.6$, выход перемещений за границу

области контакта. Аналогичные графики для нормальных перемещений оболочки (в относительно большем масштабе) представлены на рис. 3.7.

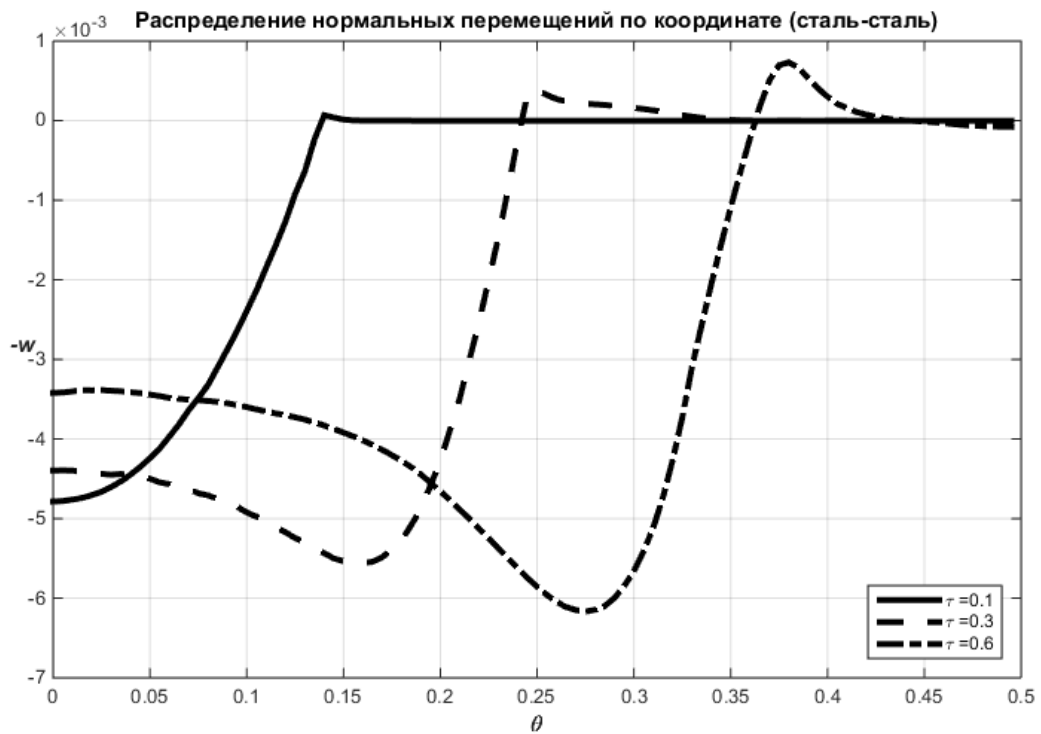


Рис. 3.6.

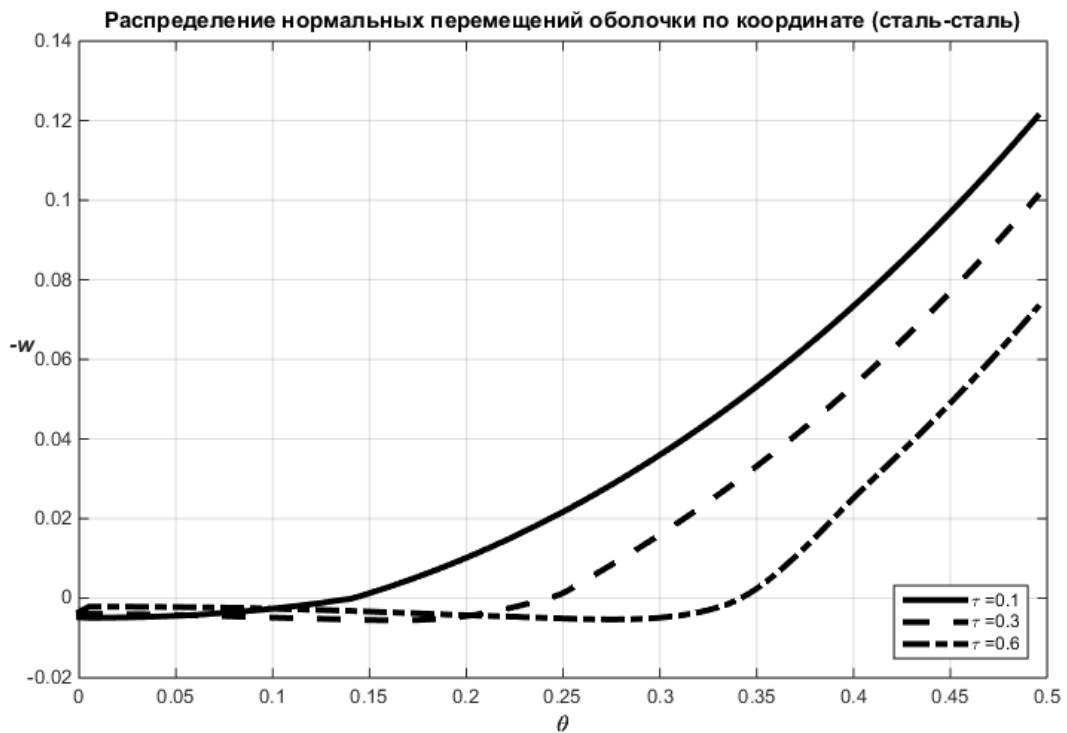


Рис. 3.7.

На рис. 3.8. представлены распределения нормальных перемещений поверхности полупространства (сплошная кривая), оболочки как деформируемого тела (штриховая кривая) и оболочки как абсолютно твердого тела (штриховая пунктирная кривая) в момент времени $\tau = 0.585$. Этот рисунок дает хорошее графическое подтверждение относительно точности определения границы области контакта из условия пересечения недеформированный границ полупространства и оболочки. Здесь вертикальная штриховая прямая соответствует положению границы, определенному из условия пересечения недеформированный поверхностей (1.22) $b = 0.331$, а вертикальная штриховая пунктирная прямая – положению границы, определенному после расчетов из условия

$$b_{уст} = \max_r [w(r) - u_z(r)] = 0 \Rightarrow b_{уст} = 0.334.$$

При этом относительная погрешность составляет менее одного процента: $\frac{|b_{уст} - b|}{b_{уст}} 100\% = 0.898\%$.

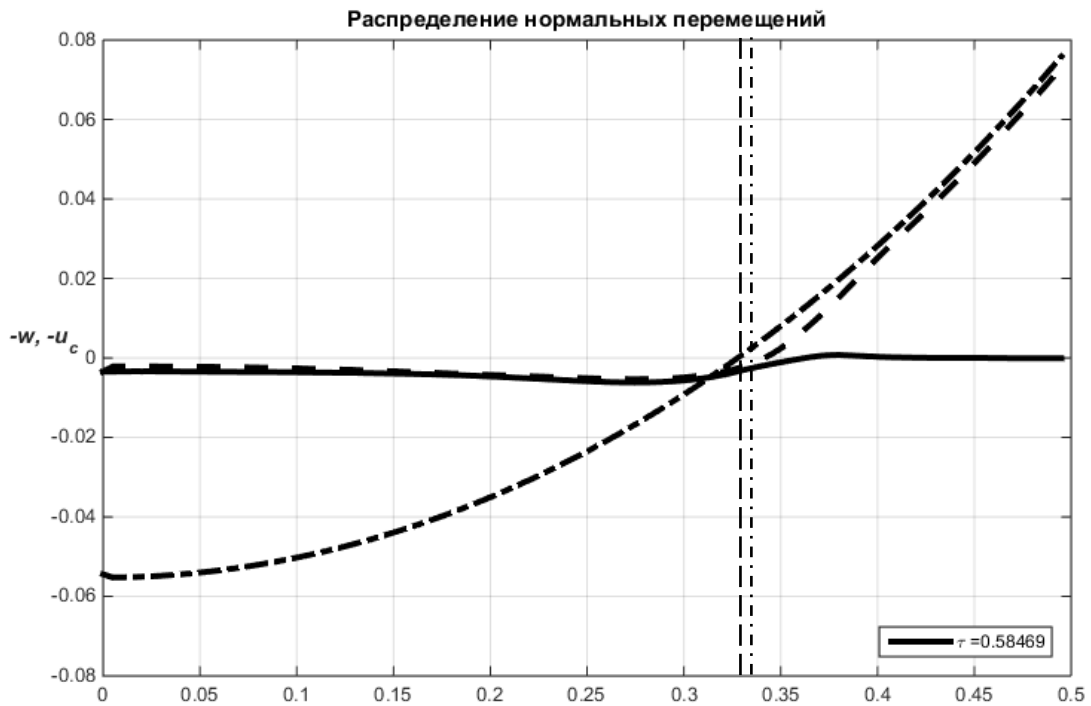


Рис. 3.8.

Сравнение результатов, полученных с помощью методов второй и третьей глав в первой и третьей главах.

Рисунки 3.9. – 3.11. иллюстрируют сравнение результатов, полученных при расчетах по методам второй и третьей главы. Сплошные кривые соответствуют результатам, полученным для произвольного этапа взаимодействия (глава 3), а штриховые – для сверхзвукового этапа. На рис. 3.9., 3.10. представлены зависимости нормальных перемещений от времени в лобовой точке (рис. 3.9.) и точки с координатой $r = \theta = 0.05$ (рис. 3.10.). При этом обрыв штриховых линий на графиках соответствует моменту времени окончания сверхзвукового этапа взаимодействия. На рис. 3.11. изображены распределения нормальных перемещений при $\tau = 0.05$. Видно, что отличие в результатах незначительное.

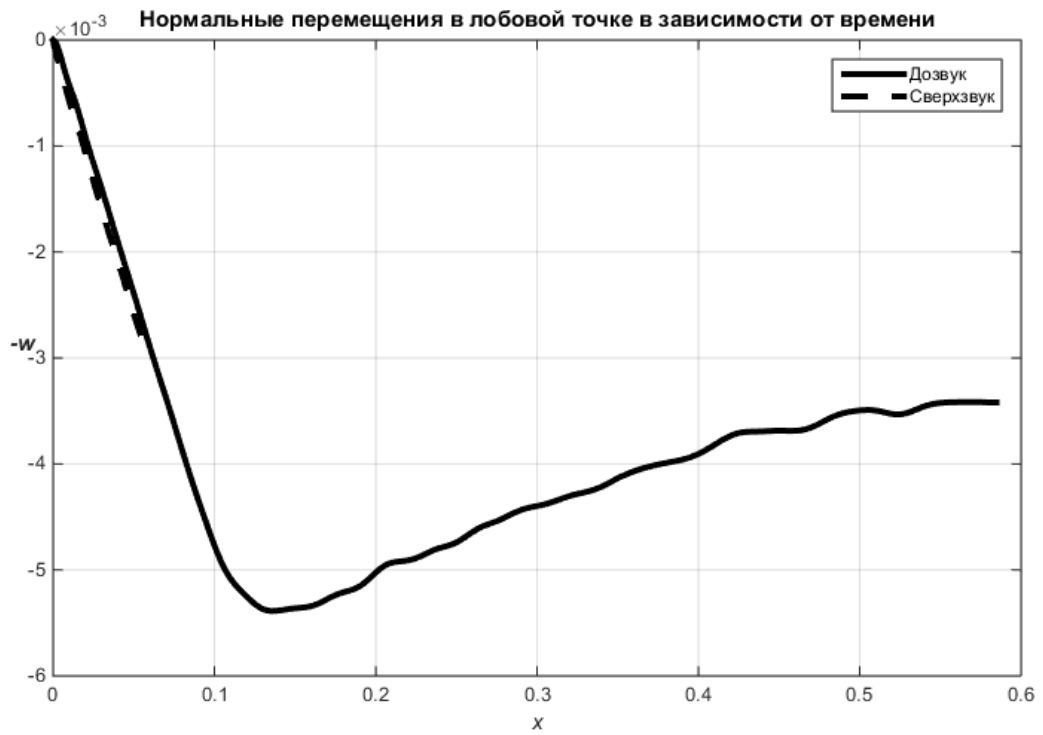


Рис. 3.9.

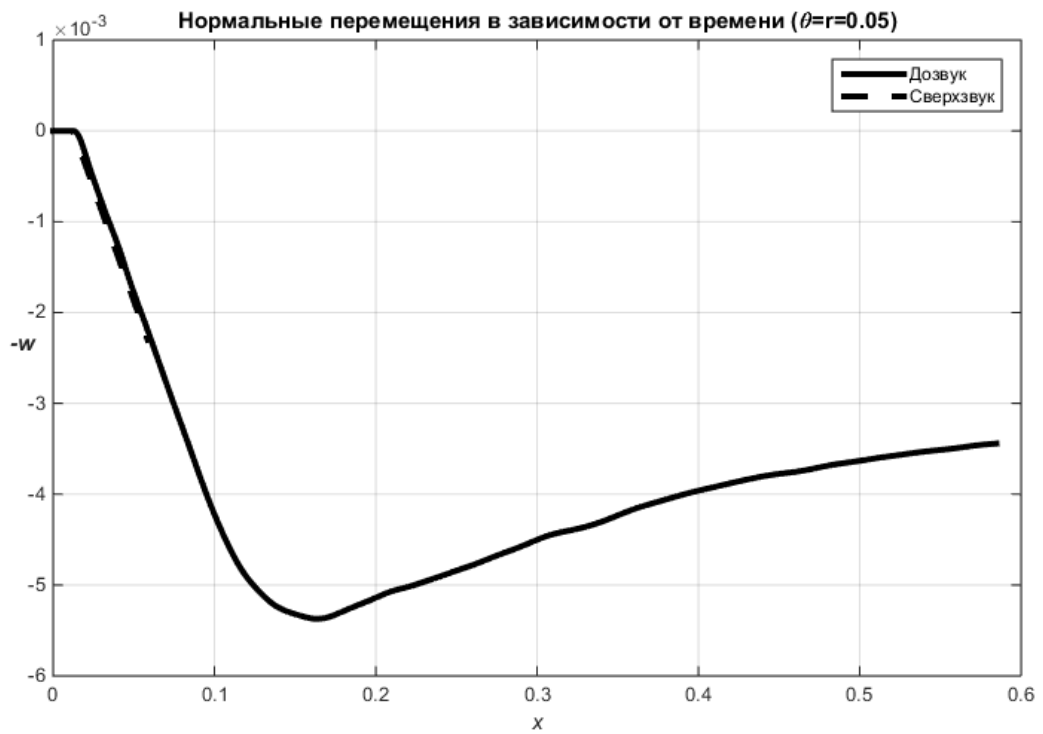


Рис. 3.10.

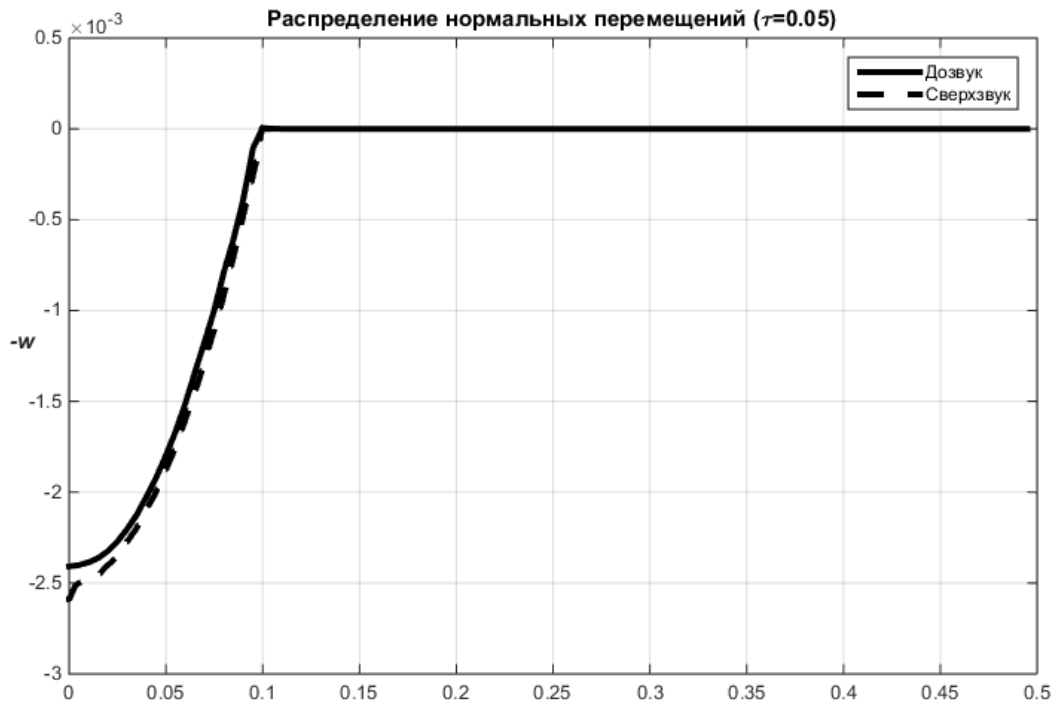


Рис. 3.11.

Отметим, что методы главы 2 и 3 можно рассматривать как дополнения друг друга. Алгоритм решения задачи на произвольном этапе взаимодействия по методу главы 3 требует значительно больших затрат вычислительных ресурсов и машинного времени по сравнению с алгоритмом для сверхзвукового этапа взаимодействия. Поэтому, если требуется быстро оценить интенсивность развития процесса нестационарного контакта, то можно рекомендовать использование алгоритма главы 2. Если затем появится необходимость детального исследования дальнейшего развития процесса, то можно перейти к расчету по алгоритму главы 3.

Во втором примере исследуем влияние начальной скорости движения оболочки на процесс контактного взаимодействия. На рис. 3.12. – 3.20. показано сравнение результатов, полученных для трех различных значений начальной скорости $V_0 = 0.1$ (сплошные кривые), $V_0 = 0.05$ (штриховые кривые), $V_0 = 0.025$ (штриховые пунктирные кривые). Из представленных графиков видно значительное влияние (причем, нелинейное) начальной скорости на количественные значения полученных результатов. При этом качественные отличия небольшие.

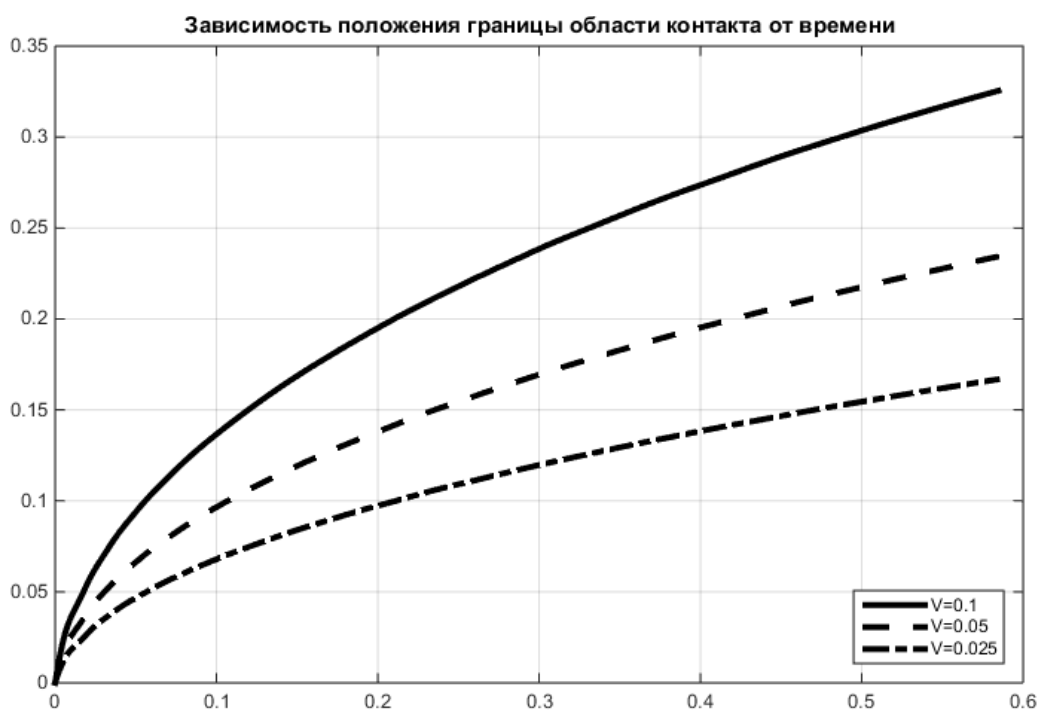


Рис. 3.12.

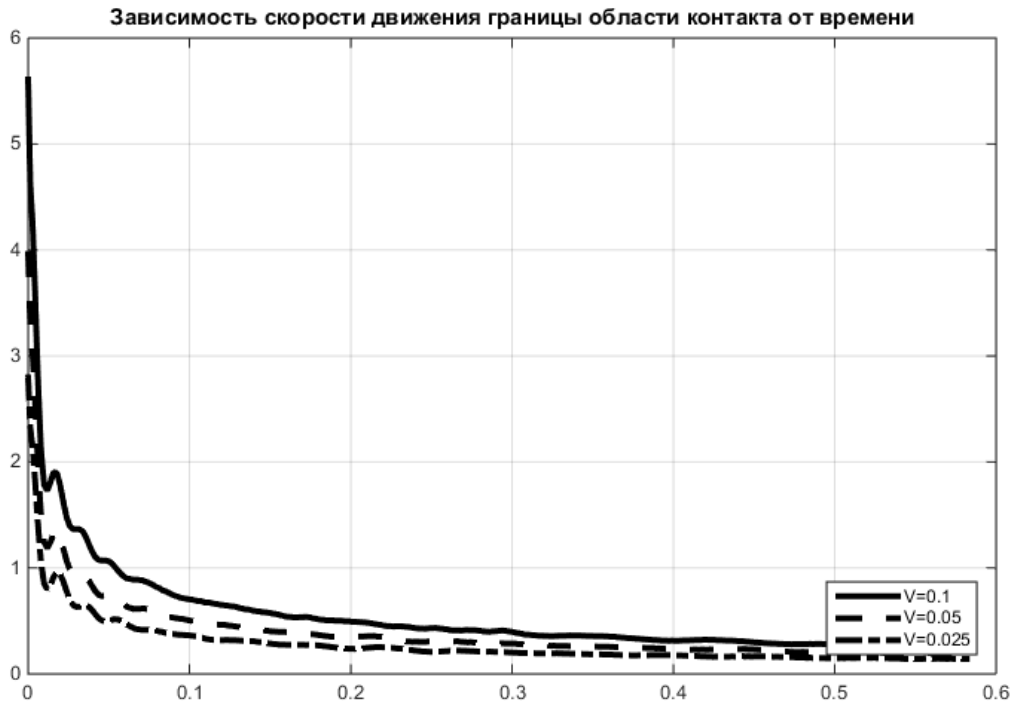


Рис. 3.13.

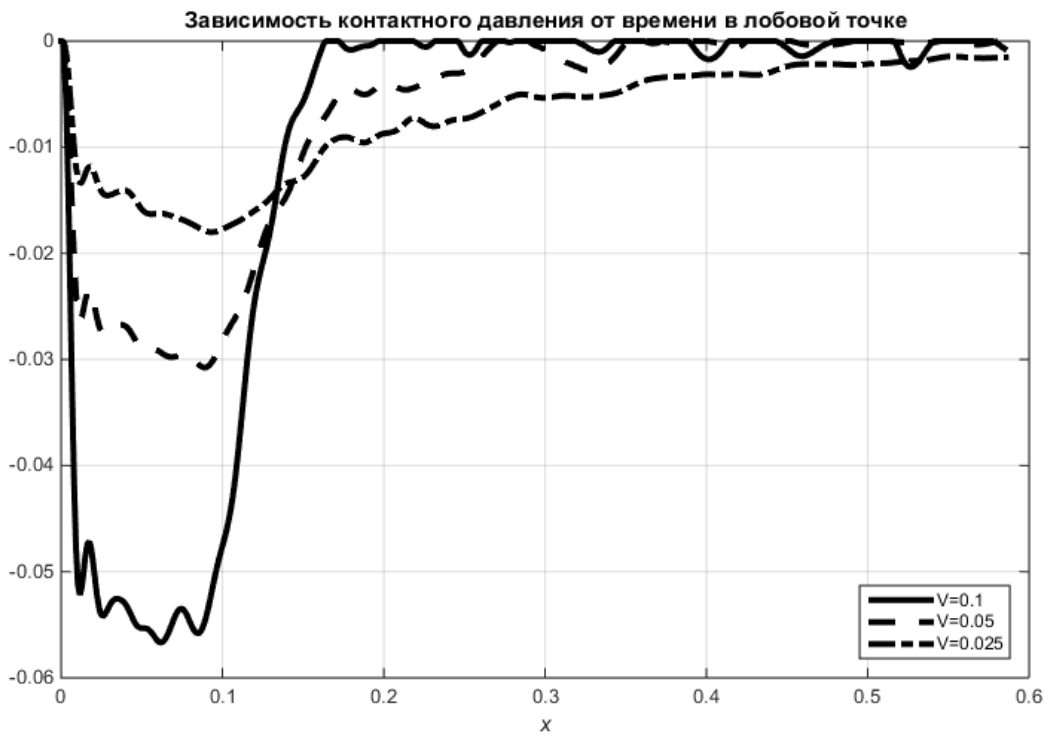


Рис. 3.14.

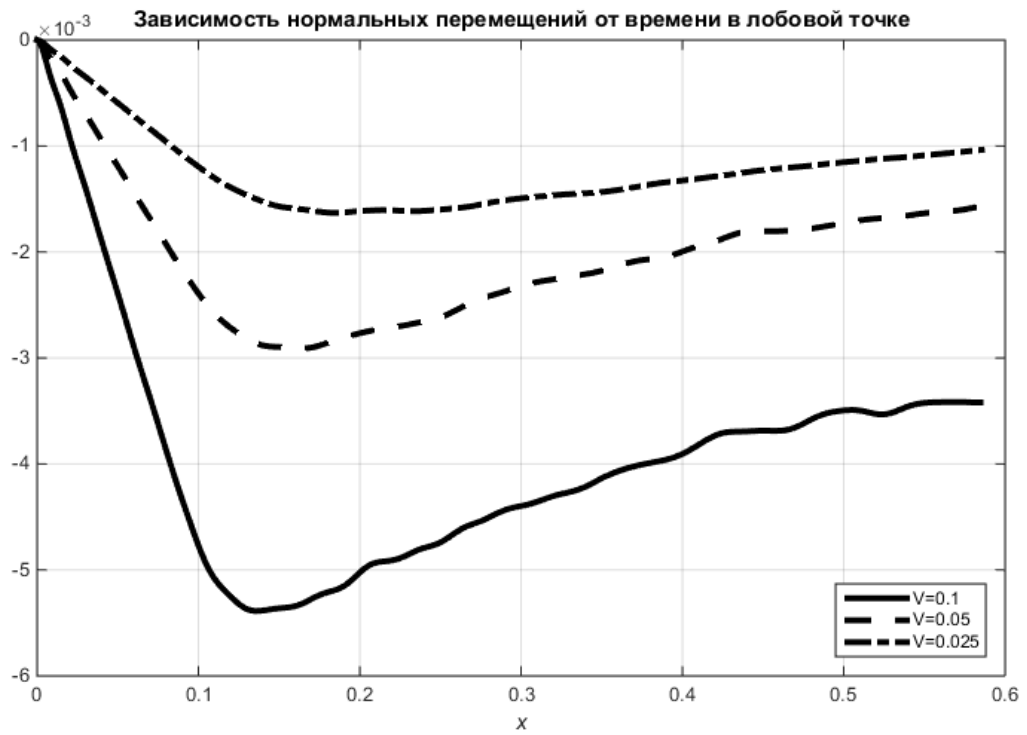


Рис. 3.15.

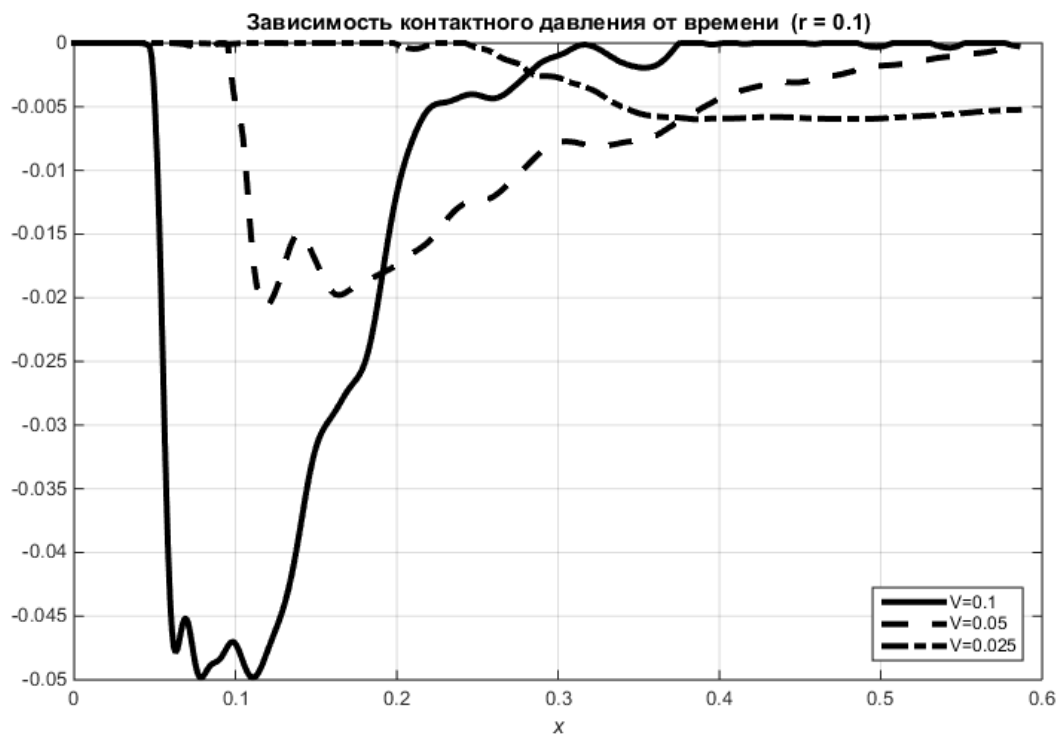


Рис. 3.16.



Рис. 3.17.

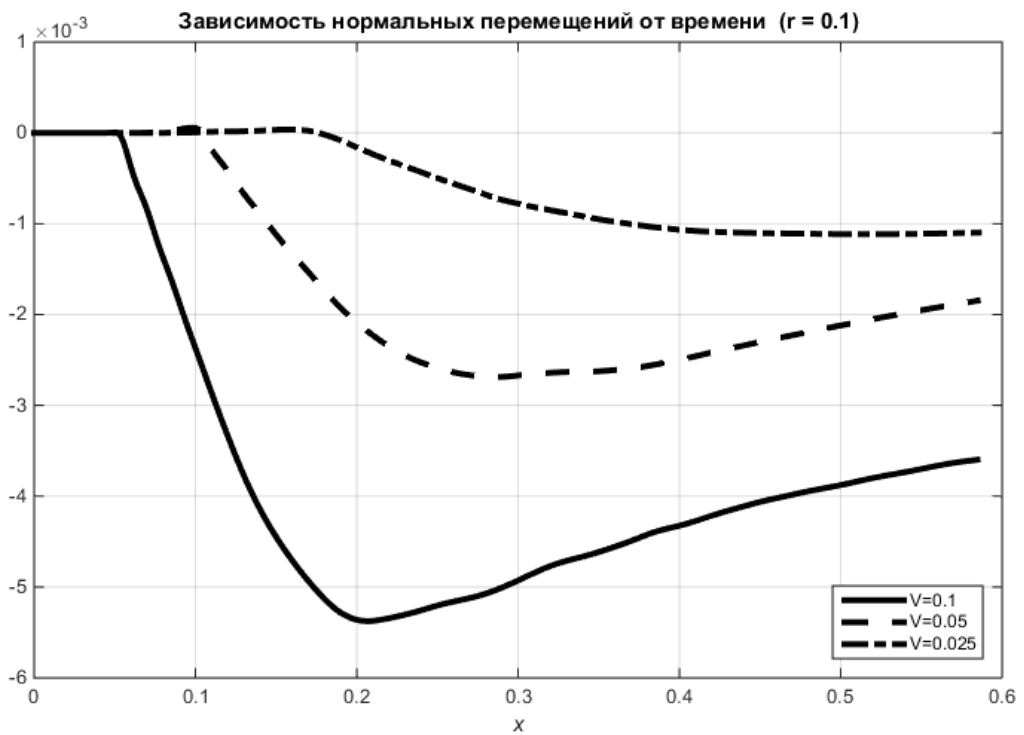


Рис. 3.18.

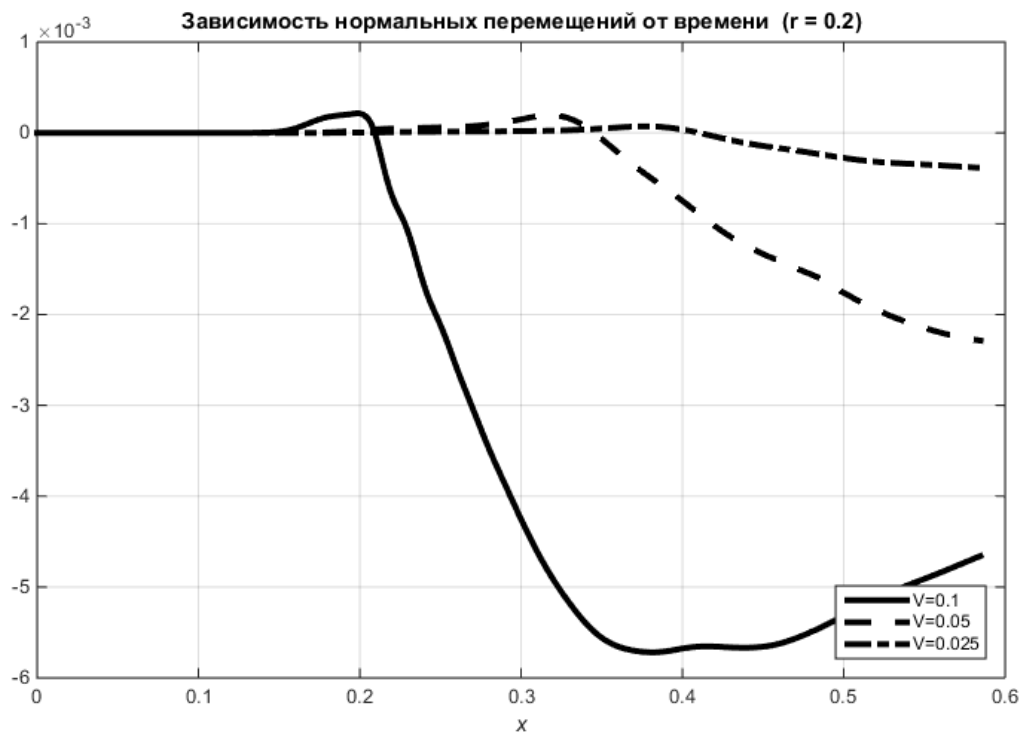


Рис. 3.19.

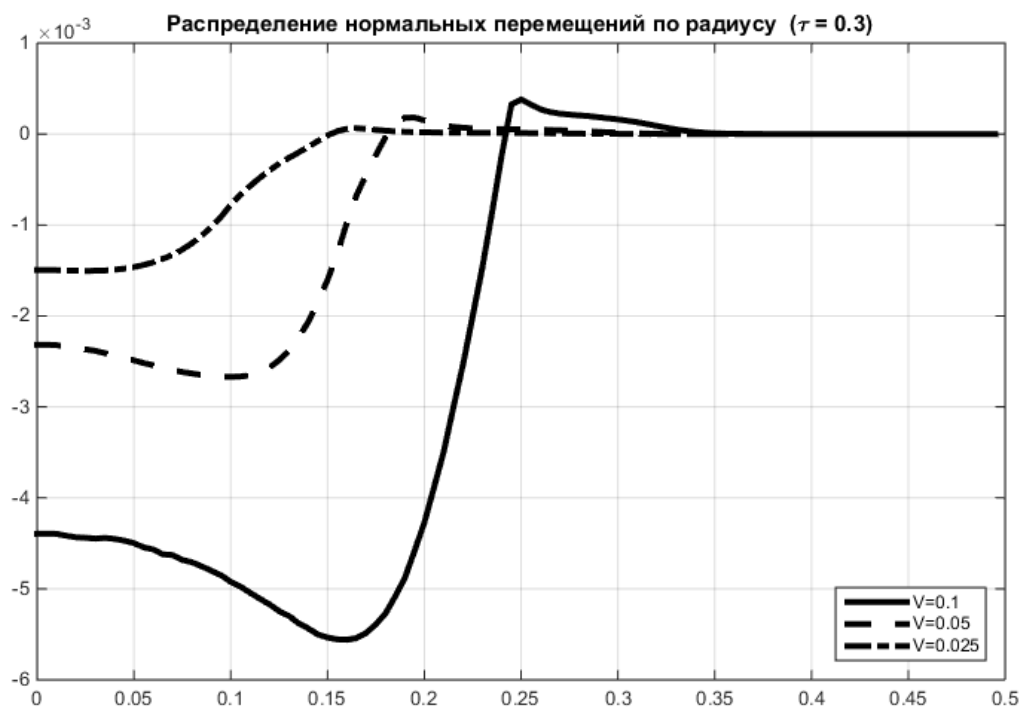


Рис. 3.20.

Сравнение с результатами других авторов. Отметим, что рассмотренной в диссертации проблеме наиболее близка лишь одна публикация других авторов, а именно работа [20]. В ней рассмотрена подобная задача, но в несколько иной постановке. Для описания движения оболочки использованы уравнения Кирхгофа-Лява, начальные и граничные условия аналогичны. Главное отличие заключается в методах решения. В работе [20] авторы не используют принцип суперпозиции. Решение основано на сведении исходной постановки задачи к задаче об ударе оболочки по полубесконечному цилиндру достаточно большого радиуса, который выбирается так, чтобы возмущения в течение всего процесса взаимодействия не успевали достичь боковой границы упругого цилиндра. При этом появляется возможность сразу использовать разложения заданных и искомых функций в ряды Фурье по соответствующим системам собственных функций сферической оболочки (полиномы Лежандра и их производные) и полубесконечного упругого цилиндра (функции Бесселя нулевого и первого порядка). При этом, конечно, появляются дополнительные граничные условия на боковой поверхности цилиндра, которые, впрочем, можно выбирать произвольными. С использованием интегрального преобразования Лапласа по времени и теоремы о свертке, задача сведена к бесконечной системе интегральных уравнений Вольтера II рода, которая решена численно с применением методов механических квадратур и редукции.

На рис. 3.21. представлено сравнение результатов, полученных с использованием метода и алгоритма главы 3 настоящей диссертации с результатами из работы [20]. Здесь изображены зависимости нормальных перемещений в лобовой точке оболочки от времени. Все безразмерные величины и параметры приведены в соответствие с аналогами, используемыми в работе [20]. Материал оболочки – сталь, а полупространства – алюминий. Кривые с номером 1 соответствуют варианту $V_0 = 0.001$, $h = 0.01$, а с номером 2 – $V_0 = 0.005$, $h = 0.02$.

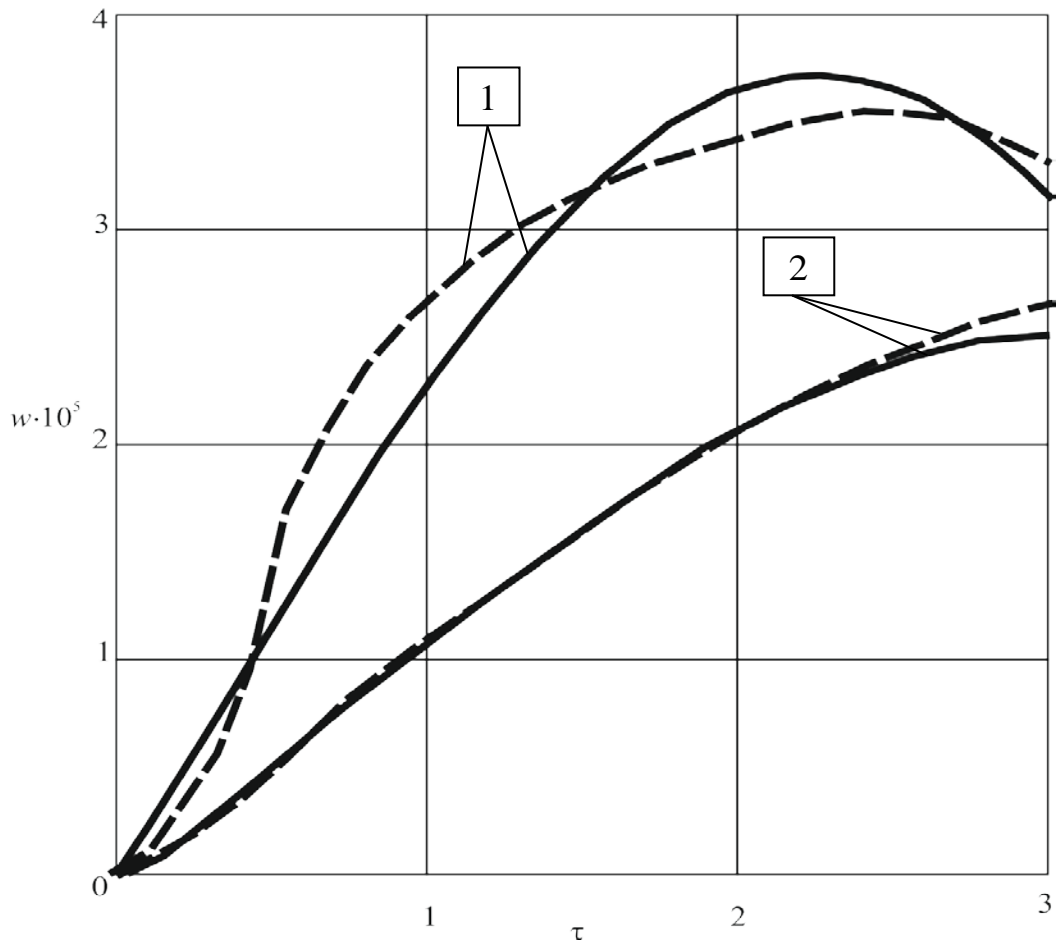


Рис. 3.21.

Сплошные кривые соответствуют решению, полученному по методу главы 3, а штриховые – результатам работы [20]. Видно, что существенное количественное отличие (порядка 10% по норме разности

$$\Delta = \max_{\tau} \frac{|w_1(\tau) - w_2(\tau)|}{|w_1(\tau)|} 100\% = 13.04\%, \quad w_1, \quad w_2 \quad - \quad \text{перемещения,}$$

соответствующие кривым 1 и 2) проявляется в случае относительно более тонкой оболочки (кривые 1). В случае 2 отличия в перемещениях незначительны.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы.

1. Дана постановка и получено решение новой осесимметричной нестационарной контактной задачи с подвижными границами о вертикальном ударе тонкой сферической оболочки по упругому полупространству.

2. Для начального сверхзвукового этапа взаимодействия предложен и реализован алгоритм решения, основанный на принципе суперпозиции. В результате задача сведена к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения компонентов напряженно-деформированного состояния в ряды Фурье по полиномам Лежандра и их производным. Эта система интегрируется численно с использованием метода редукции. Проведено численное исследование сходимости.

3. Построена и исследована функция влияния для сферической оболочки с использованием аппарата разложений в ряды Фурье по системе собственных функций и интегрального преобразования Лапласа по времени.

4. Разработана численно-аналитическая методика решения задачи на произвольном временном интервале, основанная на двумерном интегральном уравнении типа Вольтерра с ядрами в виде функций влияния для взаимодействующих тел. Построен и реализован пошаговый по времени численный алгоритм решения системы, основанный на методе квадратур. Для вычисления интегралов с сингулярными особенностями разработаны оригинальные квадратурные формулы, основанные на методе весовых коэффициентов и канонической регуляризации. Выполнено численное исследование сходимости алгоритма.

5. Проведено параметрическое исследование задачи, сравнение результатов, полученных с помощью двух предложенных методов, а также сравнение с известными результатами других авторов.

Список литературы

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамика абсолютно твердой сферической оболочки с заполнителем при ударе по упругому полупространству // Тезисы докл. II Всес. конф. по мех. неоднор. структур / Львовск. гос. ун-т. – Львов, 1987. – Т. I. – С. 74 – 75.
2. Тарлаковский Д.В. Вертикальный удар абсолютно твердой сферы с заполнителем по упругому полупространству // Расчет на прочн. и оптим. проектир. элементов авиац. конструкций: Сб. науч. тр. – М., 1988. – С. 41 – 46.
3. Тарлаковский Д.В. Удар абсолютно жесткой оболочки с заполнителем по упругому полупространству // Деформируемые и разрушающиеся элементы конструкций летат. аппаратов: Сб. науч. тр. – М., 1989. С. – 129 – 138.
4. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамическая контактная задача для круговой цилиндрической оболочки и упругого полупространства // Прочность пластин и оболочек при комбинированных воздействиях: Сб. науч. тр. – М., 1987. – С. 16 – 25.
5. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Удар цилиндрической оболочкой по упругому полупространству // Тр. XVI Гагаринских научн. чтений по космонавтике и авиации – М., 1986. – С. 165.
6. Тарлаковский Д.В. Плоская задача об ударе цилиндрической оболочки по упругому полупространству // Тр. 14 Всес. конф. по теории пластин и оболочек – Тбилиси, 1987. – Т. 2. – С. 471 – 476.
7. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарное контактное взаимодействие деформируемой цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Тезисы докладов III научн. школы – Николаев, 1999. – С. 66 – 68.
8. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Вертикальный удар цилиндрической оболочкой по упругой полуплоскости // Актуальные проблемы разв.

- трансп. систем: Тезисы докладов междунар. научн.-тех. конф. – Гомель, 1998. – С. 194 – 195.
9. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 352. с.
 10. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Плоская задача о вертикальном ударе цилиндрической оболочки по упругому полупространству // Изв. РАН. МТТ. – 2000. – № 5. – С. 151 – 158.
 11. Вестяк А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарное контактное взаимодействие цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы V междунар. симп. – М., 1999. – С. 10.
 12. Вестяк А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарная контактная задача об ударе деформируемой цилиндрической оболочкой по упругому полупространству. // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы VI междунар. симп. – М., 2000. – С. 10 – 11.
 13. Нестационарные контактные задачи с подвижными границами для деформируемого тела и полупространства / Горшков А.Г., Медведский А.Л. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. // Известия высших научных заведений. Северо-Кавказский регион. – 2000. – №3. – С. 41 – 46.
 14. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Удар цилиндрической оболочки по упругому полупространству // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы IV междунар. симп. – М., 1998. – С. 130 – 134.
 15. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Контактное взаимодействие цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости // I Всерос. конк. курсовых и дипломных проектов студ. по спец. «Технология и качество авиац. техники». – М, 1999. – С. 40 – 43.

16. Федотенков Г.В. Ударное взаимодействие тонкого цилиндра с упругим полупространством // Проблемы перспективной авиационной техники: Сб. статей науч.-исслед. работ студ., аспирантов и молодых ученых. – М., 1999. – С. 97 – 103.
17. Попов С.Н., Богданов В.Р. Вертикальный удар цилиндрической оболочки об упругое полупространство // Тр. 16 научн. конф. молодых ученых / Ин-т мех. АН Украины. – Киев, 1991. – Ч. 2. – С. 332 – 337.
18. Богданов В.Р., Попов С.Н. Вертикальный удар сферической оболочки об упругое полупространство // Тр. 17 научн. конф. молодых ученых / Ин-т мех. АН Украины. – Киев, 1992.
19. Кубенко В.Д., Богданов В.Р. Плоская задача удара оболочки об упругое полупространство // Прикл. мех. – 1995. – Т. 31, № 6. – С. 78 – 85.
20. Кубенко В.Д., Богданов В.Р. Осесимметричная задача удара оболочки об упругое полупространство // Прикл. мех. – 1995. – Т. 31, № 10. – С. 56 – 63.
21. Тарлаковский Д.В. Вертикальный удар абсолютно твердой сферы с заполнителем по упругому полупространству // Расчет на прочн. и оптим. проектир. элементов авиац. конструкций: Сб. науч. тр. – М., 1988. С. 41-46.
22. Тарлаковский Д.В. Удар абсолютно жесткой оболочки с заполнителем по упругому полупространству // Деформир. и разруш. элементов конструкций летат. аппаратов: Сб. науч. тр. – М., 1989. – С. 129 – 138.
23. Тарлаковский Д.В. Удар цилиндрической оболочки с акустическим заполнителем по упругому полупространству // Совр. пробл. строит. мех. и прочн. летат. аппаратов: Тез. докл. III Всес. конф. – Казань, 1988. – С. 142.
24. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В. Удар сферической оболочки по упругому полупространству // Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред: Матер. XIII междунар. симп. – М., 2007. – С. 193 – 194.
25. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Старовойтов Э.И. Начальный этап контактного взаимодействия тонкой сферической оболочки с упругим полупространством // Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош.

- сред: Матер. XIV междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. – М., 2008. – Т. 1. – С. 152.
26. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В. Сверхзвуковой этап контактного взаимодействия сферической оболочки и упругого полупространства // Современные проблемы механики и математики: Тезисы докл. междунар. науч. конф. – Львов, 2008. – Т. 1 – С. 91 – 93.
27. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В. Решение нестационарной контактной задачи для тонкой сферической оболочки и упругого полупространства на сверхзвуковом этапе взаимодействия // Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред: Матер. XV Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. – М., 2009. – Т. 2. – С. 31 – 32.
28. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Сверхзвуковой этап взаимодействия оболочки и упругого полупространства // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць / Дніпропетр. націон. ун-т. – Дніпропетровськ, 2009. – Вип. 13. – С. 156 – 162.
29. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Удар сферической оболочки по упругому полупространству // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. Междунар. научн. конф. – Николаев, 2009. – С. 88 – 90.
30. Нестационарное контактное взаимодействие тонкой сферической оболочки и упругого полупространства / Михайлова Е.Ю., Кубенко В.Д., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. // Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред: Матер. XVI междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. – М., 2009. – Т. 2. – С. 64 – 65.
31. Произвольный этап взаимодействия сферической и упругого полупространства / Афанасьева О.А., Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. – Дніпропетровськ, 2010. – Вип. 11. – С. 24 – 31.

32. Афанасьева О.А., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Нестационарное контактное взаимодействие сферической оболочки и упругого полупространства // Сб. науч. тр. Межд. науч. конф. «Математические проблемы механики неоднородных структур» / Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины. – Львов, 2010. – С. 348 – 349.
33. Алгоритм решения нестационарной осесимметричной контактной задачи для сферической оболочки и упругого полупространства на произвольном этапе взаимодействия / Луговой П.З., Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. // Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред: Матер. XVII Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. – М., 2011. – Т. 2. – С. 33-35.
34. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарная осесимметричная задача удара оболочки по упругому полупространству // XV Int. conf. «Dynamical system modeling and stability investigation»: Abstracts of conference reports. – Kiev, 2011 – P. 307.
35. Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Нестационарная осесимметричная задача об ударе сферической оболочки по упругому полупространству (начальный этап взаимодействия) // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 2. – С. 98-108. [Mikhailova E.Yu., Fedotenko G.V. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, No. 2. P. 239 – 247.]
36. Кубенко В.Д., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Решение осесимметричной нестационарной контактной задачи для тонкой сферической оболочки и упругого полупространства // Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред: Матер. XVIII междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. – М., 2012. – Т. 2. – С. 130 –136.
37. Афанасьева О.А., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Произвольный этап нестационарного контактного взаимодействия сферической оболочки и

- упругого полупространства // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ, 2012. – Вип. 20. – С. 19 – 26.
38. Кубенко В.Д., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Удар сферической оболочки по упругому полупространству на произвольном этапе взаимодействия // Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур: Материалы междунар. науч. конф. – Минск, 2013. – С. 78 – 80.
39. Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В., Старовойтов Э.И. Параметрическое исследование процесса нестационарного контактного взаимодействия тонкой сферической оболочки и упругого полупространства // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XX междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. – М., 2014. – Т. 2. – С. 31 – 32.
40. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Ударное взаимодействие тонкой упругой сферической оболочки и упругого полупространства с различными механическими характеристиками материалов // Научная конференция "Ломоносовские чтения", секция механики: Тезисы докладов. – М., 2014. – С. 131 – 132.
41. Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В., Тарлаковский Д.В. Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства // Труды МАИ: электронный журнал. – 2014. – Вып. 78 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=53499> (дата обращения: 16. 12. 2015).
42. Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Ударное взаимодействие сферической оболочки с упругим полупространством // Тезисы докладов междунар. науч. семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» / МАИ. – М., 2014. – С. 50 – 51.

43. Lugovi P.Z., Meish V.F., Golovko K.G. Solving axisymmetric dynamic problems for reinforced shells of revolution on an elastic foundation // *International Applied Mechanics*. – 2009. – Vol. 45, № 2. – P. 193 – 199.
44. Мусаев В.К. Моделирование упругих напряжений в защитной оболочке реакторного отделения атомной станции с фундаментом и основанием (полуплоскость) при нестационарном ударном воздействии // *Успехи современного естествознания*. – 2014. – № 12. – С. 587 – 591.
45. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Двумерный нестационарный контакт упругих цилиндрических или сферических оболочек // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. – 2014. – № 2. – С. 69 – 76.
[Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – Vol. 43, № 2. – P. 145 – 152.]
46. Локтев А.А., Локтев Д.А. Поперечный удар шара по сфере с учетом волны в мишени // *Письма в журнал технической физики*. – 2008. – Т. 34, № 22. – С. 21 – 29. [Loktev A.A., Loktev D.A. Transverse impact of a ball on a sphere with allowance for waves in the target // *Technical Physics Letters*. – 2008. – Vol. 34, № 11. – P. 960 – 963.]
47. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V., Shamarin V. Dynamic response of spherical shells impacted by falling objects // *International Journal of Mechanics*. – 2011. – Vol. 5, № 3. – P. 166 – 181.
48. Nepershin R.I. Thin-walled pipe expansion by a punch with a curvilinear profile // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2010. – Vol. 39, № 1. – P. 66 – 72.
49. Зефирова С.В., Кочетков А.В., Молев И.В. Численное моделирование деформирования трубопровода с жидкостью при ударном нагружении // *Приволжский научный журнал*. – 2012. – № 1. – С. 22 – 30.
50. Иванов В.А., Кибец А.И., Кибец Ю.И., Шошин Д.В. Численное моделирование продольного удара о жесткую преграду цилиндра из пористого металла // *Динамические и технологические проблемы*

- механики конструкций и сплошных сред: Материалы XX междунар. симп. им. А.Г. Горшкова. – М., 2014. – С. 87 – 89.
51. Садырин А.И., Крылов С.В., Батарин А.Б., Пирогов С.А. Динамическое внедрение жестких ударников в бетонные преграды // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2008. – № 4. – С. 112 – 116.
52. Садырин А.И., Крылов С.В., Пирогов С.А. Моделирование ударного проникания жестких ударников в бетонные преграды // Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук. – 2009. – № 59. – С. 10 – 14.
53. Кобенко С.В., Радченко А.В. Численное моделирование деформирования и разрушения оболочечных конструкций при ударных нагрузках // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т. 5, № 1. – С. 3 – 15.
54. Численное решение трехмерной задачи соударения трубопровода с плитой / Игоничева Е.В., Кибец А.И., Кибец Ю.И., Самыгин А.Н. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: механика. – 2000. – № 2. – С. 87 – 97.
55. Горшков А.Г., Дробышевский Н.И. Численное исследование процесса входа оболочек вращения в жидкость // Прикладная механика. – 1988. – Т. 24, № 12. – С. 39 – 44.
56. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. – М.: Наука, 1990. – 264 с.
57. Горшков А.Г., Дробышевский Н.И. Наклонный вход цилиндрических оболочек в жидкость // Изв. АН. МТТ. – 1987. – № 2. – С. 164 – 170.
58. Ершов Н.Ф., Шахверди Г.Г. Метод конечных элементов в задачах гидродинамики и гидроупругости. – Л.: Судостроение, 1984. – 240 с.
59. Шахверди Г.Г. Исследование проникания деформируемых тел в жидкость методом конечных элементов // Пробл. динам. взаимодей. деформ. сред: Тез. докл. всес. конф. – Ереван, 1984. – С. 312 – 314.

60. Шахверди Г.Г. Исследование по МКЭ проникания твердых и деформируемых тел в сжимаемую жидкость // Соверш. и оптимиз. констр., изготавл. с примен. мягк. оболочек: Тез. докл. Дальневост. конф. по мягк. Оболочкам. – Владивосток, 1983. – С. 89 – 91.
61. Максимова Е.А., Петухова В.И., Шахверди Г.Г. Численное моделирование погружения тел и конструкций в жидкость // X Дальневосточ. научно-техн. конф.: Тез. докл. – Владивосток, 1987. – С. 89 – 90.
62. Гнитько В.И., Огородник У.Е., Стрельникова Е.А. Математическое моделирование динамики элементов конструкций энергетических машин при взаимодействии с жидкостью // Проблемы машиностроения. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 34 – 42.
63. Гнитько В.И., Марченко У.Е., Науменко В.В. Моделирование динамического поведения оболочки с жидкостью при сейсмическом воздействии // Вестник херсонского национального технического университета. – 2011. – № 3. – С. 141 – 144.
64. Тарануха Н.А., Чижумов С.Д. Гидроупругое взаимодействие судового корпуса с окружающей жидкостью // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19, № 11. – С. 51 – 58.
65. Кочетков А.В., Крылов С.В. О влиянии нелинейных эффектов в задаче удара сферической оболочки о поверхность жидкости // Колебания упруг. конструкций с жидкостью: Сб. науч. докл. 5 всес. симп. – Новосибирск, 1992. – С. 150 – 155.
66. Высокоскоростной удар упругопластических тонкостенных конструкций о поверхность сжимаемой жидкости / Баженов В.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В., Угодчиков А.Г. // Изв. АН. МТТ. – 1984. – № 5. – С. 161 – 169.
67. Баженов В.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В. Анализ нелинейных эффектов при высокоскоростном проникновении тел в сжимаемую жидкость // Прикладная механика. – 1986. – Т. 22, № 2. – С. 125 – 127.

68. Баженов В.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В. Исследование нелинейных эффектов при взаимодействии оболочечных конструкций с жидкостью и газом // Взаимодействие тел с границами раздела сплошной среды. – Чебоксары, 1985. – С. 11 – 15.
69. Гавриленко В.В. Определение напряженно-деформированного состояния проникающих в сжимаемую жидкость тонких упругих сферических оболочек // Прикладная механика. – 1988. – Т. 24, № 9. – С. 30 – 37.
70. Гавриленко В.В. Удар тонкой упругой цилиндрической оболочки о поверхность жидкости // Гидромеханика. – 1990. – № 62. – С. 34 – 39.
71. Кубенко В.Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость. – Киев: Наукова думка, 1981. – 160 с.
72. Кубенко В.Д., Гавриленко В.В. Осесимметричная задача проникания тонких упругих сферических оболочек в сжимаемую жидкость // Прикладная механика. – 1988. – Т. 24, № 4. – С. 63 – 74.
73. Гавриленко В.В., Гавриленко В.Н., Кубенко В.Д. Численная реализация решения линейной задачи проникания тонких упругих оболочек в сжимаемую жидкость // Эффект. числ. методы реш. краев. задач мех. тверд. деформ. тела: Тез. докл. респ. научн.-техн. конф. – Харьков, 1989. – Ч. 1. – С. 62 – 64.
74. Сагомоян А.Я. Проникание (проникание твердых тел в сжимаемые сплошные среды). – М.: МГУ, 1974. – 299 с.
75. Сагомоян А.Я. Удар и проникание тел в жидкость. – М.: МГУ, 1986. – 172 с.
76. Гостев А.Н. Исследование ударного взаимодействия эллиптических оболочек с идеальной жидкостью // Научный вестник московского государственного технического университета гражданской авиации. – 2008. – № 130. – С. 123 – 130.
77. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Погружение упругих оболочек вращения в жидкость // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Мех. деформир. тверд. тела. – 1977. – Т. 10. – С. 63 – 113.

78. Лобода А.И. Проникание в жидкость оболочек вращения // Динам. упруг. и тверд. тел, взаимодейств. с жидкостью: Тр. V семинара. – Томск, 1984. – С. 83 – 87.
79. Ионина М.Ф. Численное исследование задачи об ударе упругих цилиндрических оболочек о воду // Вычислительные технологии. – 1999. – Т. 4, № 3. – С. 84 – 94.
80. Guz A.N., Kubenko V.D., Babaev A.E. Dynamics of shell systems interacting with a liquid // International applied mechanics. – 2002. – Vol. 38, N 3 – P. 260 – 301.
81. Гавриленко В.В. Плоская симметричная задача удара тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки о поверхность жидкости с учетом отрыва // Акустичний вісник. – 1998. – Т. 1, N 2. – С. 34 – 40.
82. Нетребко А.В., Созоненко Ю.А. Удар торца цилиндрической оболочечной конструкции о поверхность сжимаемой жидкости. // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1998. – №4. – С.44 – 50.
83. Вакалов Г.Н., Горшков А.Г. Проникание двухслойных оболочек вращения в несжимаемую жидкость // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом: Сб. науч. тр. – М., 1984. – С. 73 – 82.
84. Горшков А.Г., Богомолов В.Г. Взаимодействие двухслойных цилиндрических оболочек с жидкостью // Задачи мех. тверд. деформир. тела: Сб. науч. тр. – М., 1985. – С. 55 – 63.
85. Кочеулов Ю.В., Шуршалов А.И. Удар цилиндрических оболочек о жидкость // Расчет на прочн. и оптим. проектир. элем. авиац. констр.: Сб. науч. тр. – М., 1988. – С. 46 – 51.
86. Мартиросов М.И., Шуршалов А.И. Поведение сферических оболочек при ударе о жидкость // Эксплуатац. и конструктивная прочн. судовых констр. VIII Бубновские чтения: Тез. докл. науч. техн. конф. – Горький, 1988. – С. 71.

87. Шуршалов А.И. Поведение ортотропных цилиндрических оболочек при нестационарном нагружении // Взаимод. пластин и оболочек с жидк. и газом: Сб. науч. тр. – М., 1984. – С. 60 – 72.
88. Мартиросов М.И., Шуршалов А.И. Погружение в жидкость цилиндрических оболочек из композиционных материалов // Деформир. и разруш. элем. констр. летат. аппаратов: Сб. науч. тр. – М., 1989. – С. 81 – 88.
89. Мартиросов М.И., Шуршалов А.И. Ударное взаимодействие трехслойной сферической оболочки с жидкостью // Вопр. прочн. тонкостен. констр.: Сб. науч. тр. – М., 1989. – С. 16 – 20.
90. Богомолов В.Г. Наклонный вход цилиндрической оболочки в жидкость // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом: Сб. науч. тр. – М., 1984. – С. 83 – 91.
91. Богомолов В.Г. Об одном случае несимметричного погружения цилиндрической оболочки в несжимаемую жидкость // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23, № 4. – С. 99 – 103.
92. Горшков А.Г., Мартиросов М.И. Динамика и прочность элементов тонкостенных конструкций при нестационарном взаимодействии с жидкостью // Современ. пробл. строит. мех. и прочности ЛА: Тр. 11 всес. конф. – Куйбышев, 1986. – С. 37.
93. Мартиросов М.И. Динамика деформируемых систем при несимметричном входе в жидкость // Прочн. пластин и оболочек при комбинир. воздействиях: Сб. науч. тр. – М., 1987. – С. 41 – 49.
94. Мартиросов М.И. Динамическое поведение оболочечных конструкций при нестационарном взаимодействии с границей раздела двух сред // II Всес. конф. по механике неоднород. структур: Тез. докл. – Львов, 1987. – Т. 1. – С. 168.
95. Мартиросов М.И. Численное исследование динамического поведения сферической оболочки, связанной с твердым телом, при наклонном

- погружении в жидкость // Тр. науч. конф. «XVI Гагаринских научн. чтений по космон. и авиации» / МАТИ. – М., 1987. – С. 175.
96. Мартиросов М.И., Рабинский Л.Н. Численное исследование нелинейных эффектов при проникании в жидкость тонкостенных оболочечных конструкций с внутренними массами // Температур. задачи и устойчив. пластин и оболочек: Сб. науч. тр. – Саратов, 1988. – С. 66 – 67.
97. Горшков А.Г., Коровайцев А.В., Мартиросов М.И. Расчет оболочек вращения при нестационарном взаимодействии с жидкостью // Динам. и прочн. элементов машин: Сб. науч. тр. – М., 1987. – С. 57 – 64.
98. Хабахпашева Т.И. Удар упругой сферической оболочки по тонкому слою жидкости. // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2015. – №2. – С.81 – 94.
99. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2004. – № 5. – С. 179 – 190.
100. Богомоллов В.Г., Федотов А.А. Задача взаимодействия упругой сферической оболочки с жидкостью // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – № 2. – URL: <http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/605.html>. Дата обращения: 01.12.2015.
101. Богомоллов В.Г. Динамика взаимодействия оболочечной конструкции с жидкостью // Наука и образование в XXI веке: Сб. науч. тр. – Тамбов, 2013. – С. 16 – 17.
102. Бивин Ю.К., Глухов Ю.М., Пермяков Ю.В. Вертикальный вход твердых тел в воду // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 1985. – № 6. – С. 3 – 9.
103. Распределение давления по поверхности сферического сегмента при погружении в сжимаемую жидкость / В.А. Ерошин, Г.А. Константинов, Н.И. Романенков, Ю.Л. Якимов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 1986. – № 2. – С. 9 – 14.

104. Лобода А.И., Шуршалов А.И. Экспериментально-теоретическое исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при погружении в жидкость // Тр. 14 Всес. конф. по теории пластин и оболочек. – Тбилиси, 1987. – Т. 2. – С. 145 – 150.
105. А. с. 1242765 СССР Устройство для исследования процесса удара о поверхность жидкости / Э.В. Парышев, В.В. Воронин, А.Ю. Тормахов // Бюл. – 1986. – № 13/00.
106. Смелянский В.А. Методика и экспериментальное исследование взаимодействия оболочечных конструкций с различными средами и полями // VI Всес. съезд по теор. и прикл. мех.: Аннот. докл. – Ташкент, 1986. – С. 572 – 573.
107. Hirano S., Yoshikawa S., Himeno Y. Pressure measurement on the bottom of a wedge-form planing plate // J. Kansai Soc. Nav. Archit. Jap. – 1988. – N 208. – P. 45 – 52.
108. Горшков А.Г. Нестационарное взаимодействие пластин и оболочек со сплошными средами // Изв. АН МТТ. – 1981. – № 4. – С. 177 – 189.
109. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Удар и погружение. – Л.: Судостроение, 1976. – 200 с.
110. Вестяк А.В., Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Мех. деформ. тверд. тела. – 1983. – Т. 15. – С. 69 – 148.
111. Ломакин А.Н., Любомудров А.В. Измерение параметров ударного взаимодействия конструкций с жидкостью // Динам. упруг. и тверд. тел, взаимодейств. с жидкостью: Тр. V семинара. – Томск, 1984. – С. 88 – 90.
112. Распределение давления по поверхности сферического сегмента при погружении в сжимаемую жидкость / В.А. Ерошин, Г.А. Константинов, Н.И. Романенков, Ю.Л. Якимов // Изв. АН МЖГ. – 1986. – № 2. – С. 9 – 14.
113. Щеглов Г.А., Ермаков А.В. Моделирование аэроупругой динамики двух связанных упругих оболочек, установленных на экране // Наука и

- образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2015. – № 1. – С. 87 – 100.
114. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S., Podchasov N.P. Analysis of nonstationary processes in cylindrical shells interacting with a fluid flow // *International Applied Mechanics*. – 2011. – Vol. 46, № 10. – P. 1119 – 1131.
115. Orlov Yu.F., Suvorov A.S. Nonstationary motion of a shell on the surface of a heavy fluid // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2009. – Vol. 50, № 4. – P. 599 – 606.
116. Бобров А.В. Удар сферической оболочки о грунт // *Взаимод. пластин и оболочек с жидкостью и газом: Сб. науч. тр.* – М., 1984. – С. 122 – 127.
117. Власова И.П. Взаимодействие пологой сферической оболочки с преградами // *Прочн., устойч. и колеб. элементов констр. летат. аппаратов: Сб. науч. тр.* – М., 1986. – С. 4 – 10.
118. Любин Л.Я., Повицкий А.С. Косой удар твердого тела о грунт // *Ж. прикл. мех. и техн. физ.* – 1966. – № 1. – С. 83 – 92.
119. Численное решение двумерных нестационарных задач взаимодействия тонкостенных конструкций с грунтовыми средами / В.Г. Баженов, А.В. Кочетков, С.В. Крылов, В.Р. Фельдгун // *Прикл. пробл. прочн и пластич. Методы реш. задач упруг. и пластич.:* Сб. науч. тр. – Горький, 1984. – С. 52 – 59.
120. Сагомоян А.Я., Моргунов М.Н. Проникание упругой цилиндрической оболочки с жестким срезом в грунт // *Газ. и волнов. динам.:* Сб. науч. тр. – М., 1979. – № 3. – С. 138 – 141.
121. Бивин Ю.К., Викторов В.В., Коваленко Б.Я. Определение динамических характеристик грунтов методом пенетрации // *Изв. АН МТТ.* – 1980. – № 3. – С. 105 – 110.
122. Бивин Ю.К. Косой вход группы тел в упругопластическую среду // *Изв АН МТТ.* – 1993. – № 4. – С. 172 – 173.
123. Елифанов В.П. Разрушение льда при контактных взаимодействиях // *Изв. АН МТТ.* – 1986. – № 6. – С. 177 – 185.

124. Епифанов В.П., Кузьменко В. П. Механика разрушения снега // Изв. АН МТТ. – 1986. – № 4. – С. 190 – 197.
125. Баландин В.В., Брагов А.М. Экспериментальная методика измерения сил сопротивления при взаимодействии ударника с грунтовой средой // Прикл. пробл. прочн. и пластич.: методы реш.: Сб. науч. тр. – Н.-Новгород, 1991. – С. 101 – 104.
126. Бухарев Ю.Н., Кораблев А.Е., Хаймова М.И. Экспериментальное определение касательных напряжений на поверхности ударника при динамическом внедрении в грунт // Изв. АН. МТТ. – 1995. – № 2. – С. 186 – 188.
127. Филяков А.Б., Коган В.В., Выходцев В.Н. Распределение давлений на поверхностях деформатора при его внедрении в сыпучую среду // Горн., строит, дор. машины: Сб. науч. тр. – 1991. – № 44. – С. 13 – 24.
128. Bateman V.I., Came T.G., McCau D.M. Force reconstruction for impact tests of an energyabsorbing nose // Int. J. Anal. and Exp. Modal Anal. – 1992. – Vol. 7. – N 1. – P. 41 – 50.
129. Hirano S., Yoshikawa S., Himeno Y. Pressure measurement on the bottom of a wedge-form planing plate // J. Kansai Soc. Nav. Archit. Jap. – 1988. – N 208. – P. 45 – 52.
130. Бакулин В.Н., Овчаров П.Н., Потопахин В.А. Экспериментальное исследование деформаций тонких конических оболочек в процессе проникания в грунт // Тр. 14 Всес. конф. по теории пластин и оболочек. – Тбилиси, 1987. – Т. 1. – С. 164 – 169.
131. Бакулин В.Н., Овчаров П.Н., Потопахин В.А. Экспериментальное исследование деформаций тонких конических оболочек в процессе проникания в грунт // Изв. АН МТТ. – 1988. – № 4. – С. 188 – 191.
132. Горшков А.Г., Лобода А.И. Вертикальный удар цилиндрической оболочки о грунт // Взаимод. пластин и оболочек с жидк. и газом: Сб. науч. тр. – М., 1984. – С. 128 – 135.

133. Горшков А.Г., Лобода А.И., Смелянский С.В. Динамическое поведение оболочек вращения при взаимодействии со сплошной средой // Колеб. упруг. констр. с жидк.: Сб. науч. докл. 5 Всес. симп. – Новосибирск, 1982. – С. 90 – 94.
134. Горшков А.Г., Колодяжный В.А. Нормальный удар конических оболочек о грунт // Тр. 16 междунар. конф. по теории пластин и оболочек. – Н-Новгород, 1994. – Т. 1. – С. 72 – 76.
135. Вестяк А.В., Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Мех. деформ. тверд. тела: Сб. науч. тр. – 1983. – Т. 15. – С. 69 – 148.
136. Амензаде Ю.А. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.
137. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2-х т. – М.: Наука, 1970. – 568 с.
138. Новожилов С.М. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
139. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 287 с.
140. Волны в сплошных средах: Учебное пособие для вузов / А.Г. Горшков, А.Л. Медведский, Л.Н. Рабинский, Д.В. Тарлаковский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 632 с.
141. Ван дер Поль Б., Бреммер Х. Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа.- М.: ИЛ, 1952.- 506 с.
142. Сагомоян А.Я. Волны напряжения в сплошных средах. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 416 с.
143. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.
144. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: ИЛ, 1955. – 688 с.
145. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

146. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
147. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для (научных работников и инженеров). Определения, теоремы, формулы. – СПб.: Издательство «Лань», 2003. – 823 с.
148. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции. Вып. 1: Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1959. – 470 с.
149. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. – 624 с.
150. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами/ Под ред. М. Абрамовича, И.Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
151. Свид. 2012661354 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Расчет сверхзвукового этапа контактного взаимодействия обтекателя летательного аппарата сферической формы при ударе о скальный грунт. / Е.Ю. Михайлова, Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков; заявитель и правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (RU). – № 2012619071; заявл. 25.10.12; опубл. 13.12.12.
152. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. – Л.: Судостроение, 1972. – 351 с.
153. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 2. – 7 – е изд. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 464 с.
154. Свид. 2014611055 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Расчет нестационарного напряженно-деформированного состояния сферического обтекателя спускаемого космического аппарата при ударе о грунт. / Е.Ю. Михайлова, Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков; заявитель и

правообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (RU). – № 2013619305; заявл. 16.10.13; опубл. 23.01.14.