



МОСКОВСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
(МГУ)

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ

Ленинские горы, Москва, ГСП-1, 119991  
Телефон: 939-12-44, Факс: 939-20-90

№ \_\_\_\_\_  
На № \_\_\_\_\_

### ОТЗЫВ

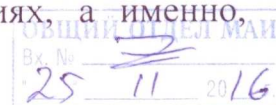
официального оппонента о диссертационной работе  
**ЯКОВЛЕВА ДМИТРИЯ ОЛЕГОВИЧА**  
“Моделирование процессов деформирования многослойных  
тонких термоупругих пластин на основе метода  
асимптотической гомогенизации”,  
представленной на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.02.04 –  
механика деформируемого твёрдого тела.

Диссертационная работа Яковлева Д.О. посвящена разработке методики расчёта напряжённо-деформированного состояния периодически неоднородной по толщине пластины теплоизолированной и закреплённой по боковой поверхности. На лицевых поверхностях пластины заданы нормальные нагрузки и тепловые потоки по нормали к лицевым поверхностям. Многослойные пластины имеют широчайшее применение в различных областях: в машиностроении, в промышленном и гражданском строительстве и во многих других областях, поэтому **тема исследования является актуальной.**

В диссертационной работе 97 страниц. Она состоит из введения, четырёх глав, выводов, заключения и списка литературы из 172 работ.

**Во введении** проводится достаточно полный обзор литературы по теме диссертации. Определяется её место среди похожих по теме изысканий.

**В первой главе** даётся постановка исходной несвязанной задачи термоупругости. Выписывается система статических уравнений теории упругости и динамических уравнений нестационарной теплопроводности для анизотропной пластины. Коэффициенты во всех уравнениях, а именно,



модули упругости, коэффициенты теплового расширения, коэффициенты теплопроводности, и массовая теплоёмкость являются периодическими функциями безразмерной локальной координаты  $\xi = x_3/l = \bar{x}_3/\kappa$ ,  $\bar{x}_3 = x_3/h$ ,  $\kappa = l/h \ll 1$  по толщине с периодом 1. Все искомые величины: перемещения, деформации, тепловой поток, перепад температуры отыскиваются в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра  $\kappa$ . Коэффициенты при степенях  $\kappa$  больших единицы предполагаются функциями глобальных безразмерных координат  $\bar{x}_i = x_i/h$  и локальной переменной  $\xi$ . Подстановка этих рядов в нестационарное уравнение теплопроводности и учёта правила дифференцирования функций локальной переменной  $\xi$  по глобальной координате  $x_3$ , приводит к рекуррентным зависимостям между коэффициентами рядов. Такая процедура носит название “метод асимптотической гомогенизации”, или же метод усреднения Бахвалова-Победри. Интересным является то, что в варианте метода усреднения, предложенном в диссертационной работе, нулевое и последующие приближения представляют собой параболические уравнения одномерные по координате  $x_3$ , с переменным коэффициентом. Решать такие уравнения тоже не просто.

После того как разобрались с уравнением теплопроводности, осуществляется процедура усреднения уравнений равновесия. Из усреднённых уравнений следуют классические уравнения равновесия для внутренних силовых факторов – продольных сил  $T_{ij}$ , поперечных сил  $Q_i$  и изгибающих моментов  $M_{ij}$ , которые представляют собой уравнения равновесия элемента площади срединной плоскости. *Уравнения равновесия теории пластин не зависят от вида определяющих соотношений, а также от кинематических и статических гипотез.* Далее выписываются определяющие соотношения теории пластин, позволяющие выразить внутренние силовые факторы через деформации и кривизны срединной плоскости в нулевом приближении. Сами деформации и кривизны нулевого приближения выражаются через производные от перемещений точек срединной плоскости. В итоге, после подстановки определяющих соотношений в уравнения равновесия внутренних силовых факторов, получаются уравнения для перемещений точек срединной плоскости. Автор отмечает, что уравнения для продольных перемещений в срединной плоскости являются дифференциальными уравнениями третьего порядка, а уравнения для прогиба --- четвёртого порядка. В случае симметричного расположения слоёв плоские уравнения становятся уравнениями второго порядка. Далее в первой главе обсуждается вопрос о том, как найти поперечные напряжения, удовлетворяющие граничным условиям на лицевых поверхностях.

**Во второй главе** рассмотрена модельная задача об изгибе равномерным давлением прямоугольной слоистой пластины симметричного по толщине строения. Пластина в одном направлении существенно длиннее, чем в другом, так что можно считать её бесконечной. По длинным сторонам



пластина закреплена. Вычислены напряжения в первом и втором приближениях для случая, когда пластина состоит всего лишь из одного пакета периодичности. Проведено сравнение с точным решением по трёхмерной теории упругости. Точное решение вычислялось численно, методом конечных элементов. В параграфе 2.3. изучалась практически важная задача об изгибе пластины переменным по толщине полем температуры. Проведено также сравнение инженерного решения с численным. В обоих случаях показано удовлетворительная точность инженерного решения даже в случае одного периода структуры. Разумеется, точность инженерного решения будет повышаться с дроблением структуры.

**Третья глава.** В третьей главе рассмотрена общая теория установившихся колебаний пластины периодически неоднородной по толщине, переменной во времени нагрузкой, изменяющейся по гармоническому закону. Получены уравнения теории нулевого и первого приближений.

**В четвёртой главе** рассматривается прямоугольная пластина, рассмотренная во второй главе, при шарнирном опирании по длинным сторонам, под действием нормальной нагрузки, изменяющейся во времени по гармоническому закону. Рассмотрены собственные и вынужденные колебания.

**В заключении** подведён итог проделанной работе. Перечислены основные результаты.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается корректностью разработанных математических моделей, основанных на проверенных временем подходах, а также тщательным анализом полученных результатов и сопоставлением с решением известных задач.

**Теоретическая и практическая значимость** заключается в разработке адекватной математической модели, описывающей процесс деформирования неоднородной по толщине пластины. Метод асимптотической гомогенизации, развитый в работе, с успехом может применяться в задачах, возникающих при проектировании и эксплуатации различных изделий в авиации и космонавтике, в энергетике, в приборостроении и во многих других отраслях промышленности.

#### **Замечания по работе**

1. Замечание по названию диссертационной работы. Пластина это, прежде всего геометрический объект, который может быть сделан из однородного или неоднородного, изотропного или анизотропного, упругого, пластичного или вязкоупругого материала. Поэтому она может быть упругой, пластичной, и т.п., но уж никак не термоупругой.
2. В рядах (1.3) для перемещений первыми членами являются функции, зависящие от координат  $x_1$  и  $x_2$  срединной плоскости пластины, а в температуре первым членом ряда является функция локальной переменной, которая изменяется в пределах периода структуры. Локальная переменная совпадает с безразмерной

3. Во второй главе на стр. 35 в 6-й снизу строке есть ссылка на рисунок 4г. Я не нашёл этого рисунка. Нет также рисунка 2.4в. Рисунок 2.5б вообще не понятно к чему относится. Хотя подпись под рисунком указывает на то, что это распределение касательных напряжений по толщине пластины. На рисунке 2.10 и 2.11 указано, что это график поперечного напряжения  $\sigma_{22}$ , хотя оно в данной задаче отсутствует (равно нулю).

В целом диссертационная работа производит хорошее впечатление. Диссертант владеет современными математическими методами исследования сложных процессов, протекающих в многофазных средах. Он показал умение не только давать грамотные постановки задач, но и пользоваться стандартными комплексами программ для их численного решения.

Сделанные в отзыве замечания не умаляют значимости проведённого исследования, направленного на решение важной научной и прикладной проблемы. Автореферат диссертации достаточно полно отражает содержание работы. Диссертация Яковлева Д.О. соответствуют всем требованиям, предъявляемым ВАК России к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Механика деформируемого твёрдого тела».

Автор диссертационной работы ЯКОВЛЕВ ДМИТРИЙ ОЛЕГОВИЧ за разработку метода асимптотической гомогенизации применительно к неоднородным по толщине пластинам заслуживает присуждения ему искомой степени.

Официальный оппонент:  
доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры механики композитов  
мех-мата МГУ имени М.В. Ломоносова

В.И. Горбачев

119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, д.1, Главное здание,  
механико-математический факультет  
МГУ им. М.В. Ломоносова;  
тел./факс +7 (495) 939-4343  
e-mail: vigorby@mail.ru

Подпись В.И. Горбачева заверяю:  
Исполняющий обязанности декана  
Механико-математического ф-та,  
профессор



В.Н. Чубариков