

УДК 539.3.

# Тепловой удар и динамическая термоупругость на основе уравнений гиперболического типа

**Э. М. Карташов<sup>1</sup>, Е. В. Ненахов<sup>2</sup>**<sup>1</sup> *Московский технологический университет (институт тонких химических технологий им. М. В. Ломоносова), Москва;*<sup>2</sup> *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва; e-mail: kartashov@mitht.ru*

Поступила в редакцию 07.05.2018

Развита теория динамической термоупругости в проблеме теплового удара на основе феноменологии Максвелла–Каттанео–Лыкова–Вернотта о конечной скорости распространения теплоты в твердых телах. Предложено уравнение совместности в напряжениях, обобщающее соотношение Бельтрами–Митчелла на динамические задачи и как частный случай исследована термическая реакция массивного твердого тела на тепловой удар. Изучены различные режимы внезапного нагрева границы тела: температурный, тепловой, средой. Выявлен наиболее опасный режим теплового воздействия; рассчитаны скачки напряжений на фронте термоупругой волны – соотношения, имеющие большое практическое значение при оценке термической прочности твердых тел в условиях теплового удара.

Ключевые слова: тепловой удар, конечная скорость распространения теплоты, динамические термоупругие напряжения, скачки напряжений.

## Введение

Исследование процессов теплового разрушения твердых тел в результате их взаимодействия с интенсивными потоками связано с решением проблемы термической прочности материалов, актуальность которой возросла в последнее десятилетие в связи с созданием мощных излучателей энергии и их использованием в технологических процессах. Плазмохимическая обработка материалов, а также обработка материалов в инфракрасных печах и гелиоустановках сопровождается их быстрым нагревом. Новые технологические приемы, применяемые в машиностроении и близких к нему областях, основаны на интенсивном нагреве материалов плазменными потоками, лазерными или электронными лучами. Мощные радиационные излучатели используются для термической закалки и упрочнения поверхности изделий. Интенсивному тепловому воздействию подвергаются поверхности авиационно-космических аппаратов и пусковых установок.

Накоплено значительное количество публикаций, описывающих проблему теплового удара при резком нагреве материалов. Изучены физичес-

кие закономерности термонапряженного состояния в изотропных и анизотропных упругих телах на основе классической феноменологии Фурье и в меньшей степени с учетом конечной скорости распространения теплоты в твердых телах; развита обобщенная теория сопряжения термомеханических полей с полями различной физической природы (электрическими, магнитными); сформулированы определяющие соотношения линеаризованной теории с учетом тепловой памяти; установлена связь макроскопического поведения сплошной среды с внутренними параметрами состояния среды и скоростью их изменения во времени. Систематизация результатов, накопленных в этой области термомеханики, дана в [1–4].

Настоящая публикация продолжает исследования в этой области. Изучается термическая реакция твердого тела на тепловой удар на основе уравнения теплопроводности гиперболического типа, вытекающего из обобщенного закона теплопроводности Максвелла–Каттанео–Лыкова–Вернотта (подробности в [5]), учитывающего инерцию теплового потока. Принимаются во внимание два обстоятельства.

При высокоинтенсивном нагреве твердых тел, создающем тепловой удар, тепловые потоки  $\vec{q}(M, t)$  в области  $\Omega = \{M(x, y, z) \in D, t > 0\}$ , описывающей реальное твердое тело, отстают от градиента температуры  $T(M, t)$  на величину, пропорциональную времени релаксации  $\tau_r$ , связанную со скоростью распространения  $v_T$  теплоты соотношением  $v_T = \sqrt{a/\tau_r}$  ( $a$  – температуропроводность):

$$\vec{q}(M, t) = -\lambda_T \text{grad} T(M, t) - \tau_r \frac{\partial^2 \vec{q}(M, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $\lambda_T$  – теплопроводность.

Уравнение энергии для изотропных твердых тел  $\text{sr} \partial T(M, t) / \partial t = \text{div} \vec{q}(M, t)$  приводит к уравнению переноса гиперболического типа:

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2}, \quad (2)$$

содержащего не только первую, но и вторую производную от температуры по времени. Вследствие чего уравнение (2) описывает волновые процессы, в данном случае волновой теплоперенос.

Второе обстоятельство состоит в том, что вопросы корректной постановки краевых задач для уравнения (2) рассмотрены сравнительно недавно [1, 5], и ряд вопросов, связанных с тепловыми задачами для уравнения (2), до конца не изучен.

### Уравнение совместности в напряжениях для динамических задач

Пусть  $D$  – конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства  $M(x, y, z)$ , находящаяся в условиях термонапряженного состояния;  $S$  – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область  $D$ ;  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к  $S$ ;  $T(M, t)$  – распределение температуры в области  $D$  при  $t > 0$ ;  $T_0$  – начальная температура, при которой область  $D$  находится в недеформируемом состоянии.

Пусть  $\sigma_{ij}(M, t)$ ,  $\varepsilon_{ij}(M, t)$ ,  $U_i(M, t)$  ( $i, j = x, y, z$ ) – соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям (несвязанной) термоупругости [1]: уравнениям движения (с учетом объемных сил  $F_i(M, t)$ ), геометрическим соотношениям и физическим уравнениям (в индексных обозначениях):

$$\sigma_{ij}(M, t) + F_i(M, t) = \rho \dot{U}_i(M, t); \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = \left(\frac{1}{2}\right) [U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)]; \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}(M, t) = 2\mu\varepsilon_{ij}(M, t) + [\lambda\varepsilon_{ii}(M, t) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T(M, t) - T_0)]\delta_{ij}; \quad (5)$$

$M \in D, t > 0,$

где  $\rho$  – плотность;  $\mu = G$ ,  $\lambda = 2G\nu / (1 - 2\nu)$  – изотермические коэффициенты Ламе;  $\nu$  – коэффициент Пуассона, при этом  $2G(1 + \nu) = E$ ;  $E$  – модуль Юнга;  $G$  – модуль сдвига;  $\alpha_T$  – коэффициент линейного теплового расширения;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\bar{e}(M, t) = U_{i,j}(M, t) = \varepsilon_{ij}(M, t)$  – объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений  $\bar{\sigma}(M, t) = \sigma_{nn}(M, t)$  ( $n = x, y, z$ ) соотношением

$$\bar{e}(M, t) = \frac{1 - 2\nu}{E} \bar{\sigma}(M, t) + 3\alpha_T [T(M, t) - T_0]. \quad (6)$$

Исключая в (4) компоненты вектора перемещения, приходим к известному уравнению совместности деформаций в виде  $\gamma_{pmj}\gamma_{qni}\varepsilon_{ij,nn}(M, t) = 0$ , где  $\gamma_{ijk}$  – альтернативный (антисимметричный) тензор ( $p, q, m, n = x, y, z$ ). Это уравнение можно расписать подробнее:

$$\varepsilon_{ij,nn} - \varepsilon_{in,jn} - \varepsilon_{nj,ni} + \varepsilon_{nn,ji} = 0. \quad (7)$$

Выразим из (5) деформации через напряжения

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij}(M, t) - \frac{\nu}{E} \sigma_{nn}(M, t) \delta_{ij} + \alpha_T [T(M, t) - T_0] \delta_{ij}. \quad (8)$$

Свернем в (7) в тензоры по индексам  $m = n$   $\varepsilon_{ij,nn} - \varepsilon_{in,jn} - \varepsilon_{nj,ni} + \varepsilon_{nn,ji} = 0$  и подставим правые части соотношения (8). Произведя преобразования с использованием (3), (4) и свойств тензорной алгебры, найдем следующее основное уравнение динамической термоупругости в напряжениях

$$\begin{aligned} & (1 + \nu) \sigma_{ij,nn}(M, t) + \sigma_{nn,ji}(M, t) + \frac{\nu(1 + \nu)}{(1 - \nu)} F_{n,n}(M, t) \delta_{ij} + \\ & + (1 + \nu) [F_{i,j}(M, t) + F_{j,i}(M, t)] + \\ & + E\alpha_T \left[ \frac{1 + \nu}{1 - \nu} (T(M, t) - T_0)_{nn} \sigma_{ij} + (T(M, t) - T_0)_{ij} \right] = \\ & = \frac{(1 + \nu)}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ 2\sigma_{ij}(M, t) - \frac{\nu}{1 - \nu^2} \sigma_{nn}(M, t) \delta_{ij} + \right. \\ & \left. + \frac{2G(2 + \nu)}{1 - \nu} \alpha_T (T(M, t) - T_0) \delta_{ij} \right], \quad (9) \\ & M \in D, t > 0. \end{aligned}$$

В координатной форме  $(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} & (1+\nu)\Delta\sigma_{ij}(M, t) + \sigma_{ij}(M, t) + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)} \operatorname{div}\vec{F}(M, t)\delta_{ij} \\ & + (1+\nu)[F_{i,j}(M, t) + F_{j,i}(M, t)] + \\ & + E\alpha_T \left[ \frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta T(M, t) \delta_{ij} + (T(M, t) - T_0)_{,ij} \right] = \\ & = \frac{\rho(1+\nu)}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ 2\sigma_{ij}(M, t) - \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma(M, t) \delta_{ij} + \right. \\ & \left. + \frac{2G(2+\nu)}{1-\nu} \alpha_T (T(M, t) - T_0) \delta_{ij} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$M \in D, t > 0,$

где

$$\begin{aligned} & i, j = x, y, z; \quad M = M(x, y, z); \quad \sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}; \\ & \vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}; \quad \operatorname{div}\vec{F} = F_{n,n} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Выражение (10) является обобщением уравнений Бельтрами–Митчелла на динамические задачи. Этот случай впервые рассмотрел В. Новацкий [6], используя уравнения эластокинетики в напряжениях, однако конечный результат в [6] имеет форму, отличную от (10) и менее удобную для практических приложений. В этом смысле уравнение (10) представляет самостоятельный интерес для термомеханики. Частный случай уравнения (10) для квазистатических задач (в (3) следует считать  $\rho = 0$ ) указан в [1], а при отсутствии объемных сил ( $F_i = 0$ , квазистатика) в [6]. В конкретных случаях теплового удара (характер нагрева; область термонапряженного состояния; случай симметрии) соотношение (10) приводит к известным соотношениям динамической термоупругости, описанным в [1].

Представляет интерес получить аналогичное соотношение и для плоской задачи термоупругости. Для этого случая в (3), (4) индексы  $i, j = x, y$ , а соотношение (8) следует записать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(M, t) = & \frac{1+\nu_1}{\nu_1} \sigma_{ij}(M, t) - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{nn}(M, t) \delta_{ij} + \\ & + \alpha_{T_1} [T(M, t) - T_0] \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $M = M(x, y)$ , а параметры в (11) есть:

- для плоской деформации:

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}; \quad E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad \alpha_{T_1} = \alpha_T (1+\nu);$$

- для плосконапряженного состояния:

$$\nu_1 = \nu; \quad E_1 = E; \quad \alpha_{T_1} = \alpha_T.$$

Уравнение совместности в деформациях (7) вырождается и теперь имеет вид  $\varepsilon_{ij,nn}(M, t) = \varepsilon_{in,in}(M, t)$ .

Повторяя предыдущие рассуждения, приходим к конечному результату в виде:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij}(M, t) + (1+\nu_1)F_{n,n}(M, t) + E_1\alpha_{T_1}[T(M, t) - T_0]_{,nn} = \\ = \frac{\rho(1+\nu_1)}{E_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [(1-\nu_1)\sigma(M, t) + 2\alpha_{T_1}(T(M, t) - T_0)]. \end{aligned} \quad (12)$$

### Динамическая реакция твердого тела на тепловой удар

В качестве применения соотношения (10) рассмотрим случай, имеющий большое значение для многих практических приложений [7]. Упругое полупространство  $z \geq 0$ , первоначально находящееся при температуре  $T_0$ , подвергается на границе различным режимам теплового воздействия, создающим тепловой удар, а именно: температурному нагреву температурой  $T_c$  (температурная функция  $T_1(z, t)$ ), либо тепловому нагреву тепловым потоком  $q_0$  (температурная функция  $T_2(z, t)$ ), либо нагреву средой температуры  $T_c$  (температурная функция  $T_3(z, t)$ ). В этих условиях при одномерном движении величины  $U_x = U_y = 0$ ;  $U_z = U_z(z, t)$ ;  $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0$ ;  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(z, t)$ ; напряжения  $\sigma_{ij} = 0$  для  $i \neq j$  и  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z, t)$  для  $i = j$ . Уравнение (10) при отсутствии объемных сил и для свободной от напряжений границы тела приводит к следующей динамической задаче термоупругости:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T_i(z, t)}{\partial t^2}, \quad (13)$$

$$z > 0, t > 0, (i=1, 2, 3);$$

$$\sigma_{zz}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad z \geq 0; \quad (14)$$

$$\sigma_{zz}(z, t)|_{z=0} = \sigma_{zz}(z, t)|_{z=\infty} = 0, \quad t > 0, \quad (15)$$

где

$$v_p = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho} \quad (16)$$

– скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука.

Остальные компоненты тензора напряжения, отличные от нуля, согласно (3)–(5), имеют вид:

$$\sigma_{xx}(z,t) = \sigma_{yy}(z,t) = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz}(z,t) - \frac{E\alpha_T [T_i(z,t) - T_0]}{1-\nu}, \quad (17)$$

при этом

$$\varepsilon_{zz}(z,t) = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \sigma_{zz}(z,t) + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T [T_i(z,t) - T_0]. \quad (18)$$

Уравнение (8) впервые получила Даниловская непосредственно из соотношений (3)–(5), и независимо от нее Т. Мура (ссылки в [1]), который, по-видимому, не знал о ранней и более общей работе Даниловской.

Температурная функция  $T_i(z,t)$ , входящая в (13)–(18), есть решение задачи:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2}, \quad z > 0, t > 0, \quad (19)$$

$$T_i(z,t) \Big|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T_i(z,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad z \geq 0, \quad (20)$$

$$T_1(z,t) \Big|_{z=0} = T_c, \quad t > 0, \quad (21)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_2(z,\tau)}{\partial z} \Big|_{z=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = -\left(\frac{1}{\lambda_T}\right) q_0, \quad t > 0, \quad (22)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_3(z,\tau)}{\partial z} \Big|_{z=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h [T_3(z,t) \Big|_{z=0} - T_c], \quad t > 0, \quad (23)$$

$$|T_i(z,t)| < \infty, \quad z \geq 0, t \geq 0. \quad (24)$$

В безразмерных переменных

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{a\tau_r}}, \quad \tau = \frac{t}{\tau_r}, \quad \text{Bi}^* = h\sqrt{a\tau_r}, \quad \beta = \frac{\nu_p}{\nu_T};$$

$$W_i(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{T_i(z,t) - T_0}{T_c - T_0}, & i=1; 3, \\ \frac{T_i(z,t) - T_0}{q_0 \sqrt{a\tau_r} / \lambda_T}, & i=2, \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_{zz}(z,t)}{S(T_c - T_0)} & \text{(1-я и 3-я краевые задачи; } i=1;3) \\ \frac{\sigma_{zz}(z,t)}{Sq_0 \sqrt{a\tau_r} / \lambda_T} & \text{(2-я краевая задача; } i=2), \end{cases}$$

где  $S = \alpha_T (3\lambda + 2\mu) = \alpha_T \frac{E}{(1-2\nu)}$ , задача (13)–(15), (19)–(24) будет иметь вид:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \quad \xi > 0, \tau > 0, \quad (i=1,2,3); \quad (25)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 0, \quad (26)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = 0, \tau > 0; \quad |\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq 0, \tau \geq 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \quad \xi > 0, \tau > 0 \quad (i=1, 2, 3); \quad (28)$$

$$W_i(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 0, \quad (29)$$

$$W_1(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = 1, \tau > 0, \quad (30)$$

$$\int_0^{\tau} \frac{\partial W_2(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp[-(\tau-\tau')] d\tau' = -1, \tau > 0, \quad (31)$$

$$\int_0^{\tau} \frac{\partial W_3(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp[-(\tau-\tau')] d\tau' = \text{Bi}^* [W_3(\xi, \tau') \Big|_{\xi=0} - 1], \tau > 0, \quad (32)$$

$$|W_i(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq 0, \tau \geq 0. \quad (33)$$

В пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \int_0^{\infty} \exp(-p\tau) W_i(\xi, \tau) d\tau,$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \int_0^{\infty} \exp(-p\tau) \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) d\tau$$

решение тепловой задачи (28)–(33) имеет вид:

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \bar{f}_i^*(p) \exp[-\xi \sqrt{p(p+1)}], \quad (34)$$

$$\bar{f}_i^*(p) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & i=1, \\ \sqrt{p+1} / p^{\frac{3}{2}}, & i=2, \\ \frac{\text{Bi}^* \sqrt{p+1}}{p(\sqrt{p} + \text{Bi}^* \sqrt{p+1})}, & i=3. \end{cases} \quad (35)$$

Напряжение  $\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)$  при найденном соотношении (34) записывается в виде:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \bar{f}_i^*(p) \left\{ \exp[-\xi \sqrt{p(p+1)}] - \exp\left[-\left(\frac{\xi}{\beta}\right)p\right] \right\}, \quad (36)$$

$$\bar{f}_i(p) = \begin{cases} \frac{\gamma_1}{p + \gamma_2}, & i = 1 \\ \frac{\gamma_1 \sqrt{p+1}}{\sqrt{p}(p + \gamma_2)}, & i = 2 \\ \frac{\gamma_1 \text{Bi}^* \sqrt{p+1}}{(\sqrt{p} + \text{Bi}^* \sqrt{p+1})(p + \gamma_2)}, & i = 3, \end{cases} \quad (37)$$

где  $\gamma_1 = \frac{1}{(\beta^2 - 1)}$ ,  $\gamma_2 = \frac{\beta^2}{(\beta^2 - 1)}$ .

При нахождении оригиналов в (36), (37) следует обратить внимание на величину параметра  $\beta = \nu_p / \nu_T$ . Так, для органического стекла  $\beta = 0.4$ , для кварца и кремния  $\beta = 0.7$ , т. е.  $\beta < 1$ ; для стали  $\beta = 3.4$ , для кристалла и алюминия  $\beta = 1.8$ , т. е.  $\beta > 1$ . Величина параметра  $\beta$  играет определяющую роль в записи интервалов изменения напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  и в выборе основных соотношений операционного исчисления при переходе к оригиналам в (36), (37). Предварительно приведем полезные соотношения, отсутствовавшие в известных справочниках по операционному исчислению:

$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p}(p+b)} \leftarrow \int_0^\tau \left[ \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}} + \sqrt{1-b} \exp(-b\tau') \Phi(\sqrt{(1-b)\tau'}) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}} \quad b < 1; \quad (38)$$

$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p}(p-b)} \leftarrow \int_0^\tau \left[ \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}} + \sqrt{b+1} \exp(b\tau') \Phi(\sqrt{(b+1)\tau'}) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}} \quad b > 0; \quad (39)$$

$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p}(p+b)} \leftarrow \int_0^\tau \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau'}} - \frac{2\sqrt{b-1}}{\sqrt{\pi}} F(\tau') \right] \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}} d\tau', \quad b > 1. \quad (40)$$

Здесь  $F(\tau) = \exp(-\tau^2) \int_0^\tau \exp(y^2) dy$  – вещественная функция, которая остается ограниченной при любых вещественных  $\tau$ . При этом  $F(\tau) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n 2^n \tau^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ , ( $|\tau| < \infty$ );  $\Phi(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z \exp(-y^2) dy$  – функция Лапласа. Заметим, что оригиналы изображений (37) (для  $i=2, 3$ ) сводятся к (38)–(40).

Находим из (36), (37) для напряжений:

– при  $\beta < 1$ :

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau < \xi, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau), & \xi < \tau < \xi/\beta, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) - \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > \xi/\beta, \end{cases} \quad (41)$$

где

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = f_i(\tau - \xi) \exp(-\xi/2) + \xi/2 \int_\xi^\tau f_i(\tau - \tau') \exp(-\tau'/2) \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}} d\tau', \quad (42)$$

$$f_1(\tau) = \gamma_1 \exp(-\gamma_2 \tau), \quad (43)$$

$$f_2(\tau) = \frac{\gamma_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \left[ \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}} + \sqrt{\gamma_1^*} \exp(\gamma_2^* \tau') \Phi(\sqrt{\gamma_1^* \tau'}) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}}, \quad (44)$$

$$f_3(\tau) = \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\text{Bi}^* \pi} \int_0^\tau \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\tau'(\tau - \tau')}} d\tau' + \frac{\sqrt{\gamma_3^*} \gamma_1 \gamma_3^2}{\text{Bi}^* \sqrt{\pi} (\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^\tau \frac{\exp(\gamma_3^* \tau') \Phi(\sqrt{\gamma_3^* \tau'})}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau' + \frac{\sqrt{\gamma_1^*} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}{\text{Bi}^* \sqrt{\pi} (\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^\tau \frac{\exp(\gamma_2^* \tau')}{\sqrt{\tau - \tau'}} \Phi(\sqrt{\gamma_1^* \tau'}) d\tau' - \left[ \frac{\gamma_1 \gamma_3 \gamma_3^*}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(\gamma_3 \tau) + \frac{\gamma_3 \gamma_1^2}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(-\gamma_2 \tau) \right], \quad (45)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = f_i(\tau - \xi/\beta) (i=1,2,3), \quad (46)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\beta^2 - 1}, \gamma_1^* = -\gamma_1, \gamma_2 = 1 + \gamma_1, \gamma_2^* = -\gamma_2, \gamma_3 = \frac{\text{Bi}^{*2}}{1 - \text{Bi}^{*2}}, \gamma_3^* = 1 + \gamma_3;$$

– при  $\beta > 1$ :

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau < \xi/\beta, \\ -\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \xi/\beta < \tau < \xi, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) - \sigma_{\xi\xi}^{(2)}, & \tau > \xi, \end{cases} \quad (47)$$

где

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = f_i(\tau - \xi) \exp(-\xi/2) + (\xi/2) \int_{\xi}^{\tau} f_i(\tau - \tau') \exp(-\tau'/2) \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau' - \xi^2}} d\tau', \quad (48)$$

$$f_1(\tau) = \gamma_1 \exp(-\gamma_2 \tau), \quad (49)$$

$$f_2(\tau) = \frac{\gamma_1}{\pi} \int_0^{\tau} \left[ \frac{1}{\sqrt{\tau'}} - 2\sqrt{\gamma_1} F(\tau') \right] \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau', \quad (50)$$

$$f_3(\tau) = \frac{\gamma_1 \gamma_3}{\text{Bi}^* \pi} \int_0^{\tau} \frac{\exp(-\tau') d\tau'}{\sqrt{\tau'(\tau - \tau')}} + \frac{\sqrt{\gamma_3^*} \gamma_1 \gamma_3^2}{\text{Bi}^* \sqrt{\pi}(\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^{\tau} \frac{\exp(\gamma_3 \tau') \Phi(\sqrt{\gamma_3^* \tau'}) d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} - \frac{2\sqrt{\gamma_1} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}{\pi \text{Bi}^* (\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^{\tau} \frac{\exp(-\tau') F(\tau') d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} - \left[ \frac{\gamma_1 \gamma_3 \gamma_3^*}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(\gamma_3 \tau) + \frac{\gamma_3 \gamma_1^2}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(-\gamma_2 \tau) \right], \quad (51)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\beta^2 - 1}, \gamma_1^* = -\gamma_1, \gamma_2 = 1 + \gamma_1, \gamma_2^* = -\gamma_2, \gamma_3 = \frac{\text{Bi}^{*2}}{1 - \text{Bi}^{*2}}, \gamma_3^* = 1 + \gamma_3,$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = f_i(\tau - \xi/\beta), (i=1,2,3). \quad (52)$$

Приведем для сравнения соответствующие модельные представления в рамках классической феноменологии Фурье (в (19)  $\tau_r = 0$ , в (25)  $\beta^2 = 1$ ) в условиях температурного нагрева:  $T_1(z, t)|_{z=0} = T_c$ , теплового нагрева:  $\lambda \frac{\partial T_2}{\partial z}|_{z=0} = -q_0$ , нагрева средой:  $[\partial T_3 / \partial z]|_{z=0} = h [T_3(z, t)|_{z=0} - T_c]$ ,  $t > 0$ . В безразмерных переменных

$$\xi = \frac{v_p z}{a}, \tau = \frac{v_p^2 t}{a}, \text{Bi} = \frac{ha}{v_p}, W_i(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{T(z, t) - T_0}{T_c - T_0}, & i = 1, 3 \\ \frac{T(z, t) - T_0}{(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, & i = 2; \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S(T_c - T_0)}, & i = 1, 3 \\ \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, & i = 2. \end{cases}$$

Находим для напряжения в пространстве изображений:

$$\overline{\sigma_{\xi\xi}}(\xi, p) = -\overline{\varphi_i}(p) \left[ \exp(-\xi\sqrt{p}) - \exp(-\xi p) \right],$$

$$\overline{\varphi_i}(p) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & i=1, \\ \frac{1}{\sqrt{p(p-1)}}, & i=2, \\ \frac{\text{Bi}}{(p-1)(\text{Bi} + \sqrt{p})}, & i=3, \end{cases}$$

в пространстве оригиналов:

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \begin{cases} 0, & \tau < \xi \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > \xi. \end{cases} \quad (53)$$

Здесь компоненты  $\sigma_{\xi\xi}^{(1)}$  и  $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}$  имеют значения:

– в случае температурного нагрева ( $i=1$ )

$$\begin{cases} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right], \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \exp(\tau - \xi); \end{cases} \quad (54)$$

– в случае теплового нагрева ( $i=2$ )

$$\begin{cases} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) - \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right], \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \exp(\tau - \xi) \Phi(\sqrt{\tau - \xi}); \end{cases} \quad (55)$$

– в случае нагрева средой ( $i=3$ )

$$\begin{cases} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\text{Bi}}{\text{Bi} + 1} \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \frac{\text{Bi}}{\text{Bi} - 1} \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right] \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \frac{\text{Bi}^2}{\text{Bi}^2 - 1} \left\{ \exp(\tau - \xi) \left[ 1 - \frac{1}{\text{Bi}} \Phi(\sqrt{\tau - \xi}) \right] - \exp[\text{Bi}^2(\tau - \xi)] \Phi^*(\text{Bi}\sqrt{\tau - \xi}) \right\}. \end{cases} \quad (56)$$

Здесь  $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$ .

### Физический анализ решений

Как следует из (41), (47) напряжение  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  в фиксированной точке области  $\xi > 0$  возникает спустя время  $\tau = \xi$ , если  $\beta < 1$  ( $v_p < v_\tau$ ) после воздействия источника теплоты на границу полупространства. Но в отличие от классической феноменологии Фурье (53) соотношения (41), (47) показывают наличие двух скачков напряжения: один – на фронте тепловой, другой – на фронте упругой волны, идущих соответственно со скоростями  $v_\tau$  и  $v_p$ . На рис. 1–3 приведены графики зависимости напряжения от безразмерного времени в сечении  $\xi' = 2$ . Расчеты выполнены по формулам (41)–(52). На рис. 4 представлены соответствующие кривые динамических термоупругих на-

пряжений, рассчитанные по формулам (53)–(56) на основе уравнения параболического типа. Расчеты выполнены для значений  $\beta = 0.4$  (органическое стекло),  $\beta = 0.7$  (кварц, кремний),  $\beta = 1.8$  (кристаллы, алюминий),  $\beta = 3.4$  (сталь).

Из графиков видно, что учет конечной скорости распространения теплоты приводит к существенному изменению картины динамических температурных напряжений по сравнению с данными на рис. 4. Рассмотрим фиксированное сечение внутри полупространства  $\xi > 0$ . При  $\beta > 1$  напряжения в сечении равны нулю. В момент времени  $\tau = \xi / \beta$  к этому сечению подходит продольная упругая волна напряжения, фронт которой движется со скоростью  $v_p$ ; возникает скачком сжимающее напряжение, которое дальше умень-

шается. В момент времени  $\tau = \xi$  к этому сечению подходит тепловая волна, фронт которой движется со скоростью  $v_T$ : напряжение, изменяясь скачком, уменьшается и далее асимптотически стремится к нулю. При  $\beta < 1$  в рассматриваемое сечение в момент времени  $\tau = \xi$  приходит тепловая волна, фронт которой движется со скоростью  $v_T$ : возникает скачком сжимающее напряжение, которое дальше возрастает. В момент времени  $\tau = \xi / \beta$  к сечению подходит продольная упругая волна, что вызывает скачкообразное изменение напряжения и его дальнейшее уменьшение до нуля.

На рис. 5 представлены кривые изменения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  в сечении  $\xi = 2$  при  $\beta = 0.7$ ,  $Bi^* = 0.3$ , позволяющие провести сравнительный анализ различных режимов напряжения: температурного (30), теплового (31) и средой (32). Первый режим по сравнению со вторым и третьим связан с появлением сжимающих и растягивающих напряжений, и в этом смысле он может быть наиболее опасным, хотя во втором режиме сжимающее напряжение (хотя и незначительное) превосходит первое. Интересно отметить (см. рис. 4), что в классическом случае (53) при тепловом ударе наиболее опасным является именно режим внезапного температурного нагрева.

Представляет интерес получить расчетные инженерные формулы скачка напряжений  $\sigma_{\xi\xi}$  на фронте термоупругой волны. Для этого воспользуемся теоремой запаздывания [3]

$$\bar{f}(p)\exp(pt_0) \Leftrightarrow \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ f(t - t_0), & t > t_0, \end{cases}$$

откуда видно, что в точке  $t_0$  происходит скачок функции  $f(t)$ . Величина скачка рассчитывается по формуле

$$|\Delta| = \lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t - t_0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{f}(p).$$

Находим, используя (36), (37):

$$|\Delta_i| = \begin{cases} \frac{1}{|\beta^2 - 1|}, & i=1,2, \\ \frac{Bi^*}{(1+Bi^*)|\beta^2 - 1|}, & i=3. \end{cases} \quad (57)$$

Выражения (57) дают возможность качественно и количественно оценить степень опасности теплового воздействия на упругий материал,

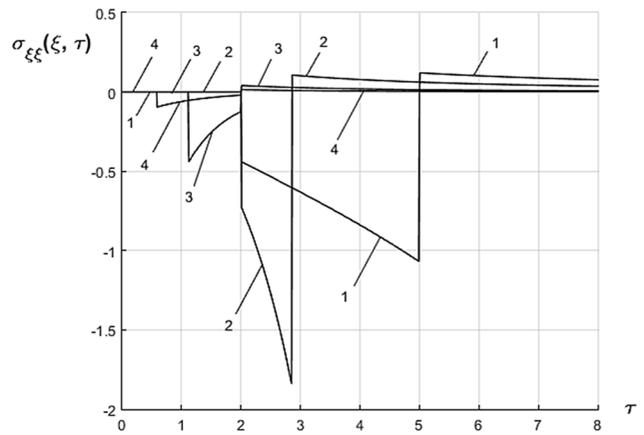


Рис. 1. Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$  от времени в сечении  $\xi = 2$  при температурном нагреве: 1 –  $\beta=0.4$ ; 2 – 0.7; 3 – 1.8; 4 – 3.4

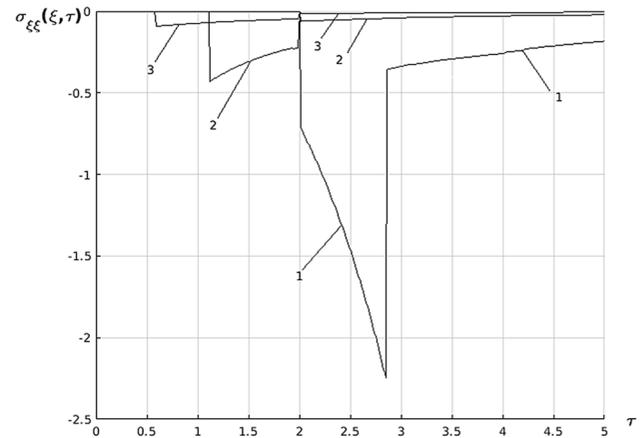


Рис. 2. Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$  от времени в сечении  $\xi = 2$  при тепловом нагреве: 1 –  $\beta=0.4$ ; 2 – 0.7; 3 – 1.8; 4 – 3.4

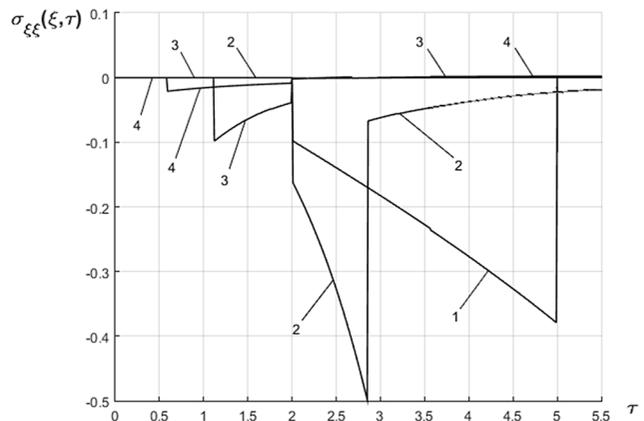


Рис. 3. Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$  от времени в сечении  $\xi = 2$  при нагреве средой:  $Bi^* = 0.3$ ; 1 –  $\beta=0.4$ ; 2 – 0.7; 3 – 1.8; 4 – 3.4

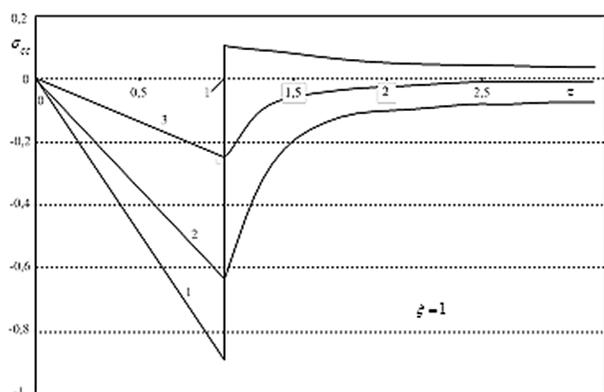


Рис. 4. Зависимость напряжения  $\sigma_{xx}$  от времени в сечении  $\xi = 1$ : 1 – температурный нагрев; 2 – тепловой нагрев; 3 – нагрев средой ( $Bi = 0.3$ ).

так как соотношения (57) можно считать верхней оценкой максимума  $|\sigma_{xx}|$ , величина которого определяется условиями внешнего нагрева, тепловыми и упругими свойствами материала. В то же время в (57) наглядно проявляется роль параметра  $\beta$ : при уменьшении разности скоростей распространения звука и теплоты в среде величина скачка напряжений возрастает, что создает реальную опасность разрушения материала.

### Выводы

Исследована термическая реакция твердого тела на тепловой удар в терминах динамической термоупругости с учетом конечной скорости распространения теплоты. Дана корректная постановка тепловых задач для уравнений гиперболического типа; предложены различные модели при резких тепловых нагружениях границы тела: температурном, тепловом, средой. Выявлен наиболее опасный режим нагружения; предложены прак-

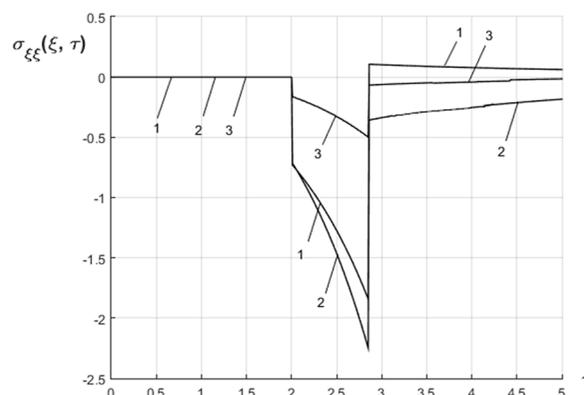


Рис. 5. Зависимость напряжения  $\sigma_{xx}$  от времени в сечении  $\xi = 2$ : 1 – температурный нагрев; 2 – тепловой нагрев; 3 – нагрев средой ( $Bi^* = 0.3$ ).

тические соотношения для скачков напряжений на фронте термоупругой волны, дающие верхнюю оценку максимума соответствующих температурных напряжений при тепловом ударе.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Карташов Э. М., Кудинов В. А.** Аналитическая теория теплопроводности и термоупругости. М.: URSS, 2012. 670 с.
2. **Карташов Э. М., Кудинов В. В.** Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. М.: URSS, 2017. 1080 с.
3. **Карташов Э. М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш.школа, 2001. 540 с.
4. **Формалев В. Ф.** Теплоперенос в анизотропных твердых телах. М.: Физматлит, 2015. 245 с.
5. **Kartashov E. M.** Analytical solutions of hyperbolic heat-conduction models // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2014. V. 87. N 5. P. 1116–1125.
6. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. **Kartashov E. M.** Mathematical models of heat conduction with a two-phase laq // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2016. V. 89. N 2. P. 346–356.

## Thermal shock and dynamic thermoelasticity on the basis of the hyperbolic type equations

E. M. Kartashov<sup>1</sup>, E. V. Nenakhov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Moscow Technological University (Institute of Fine Chemical Technologies named after M. V. Lomonosov), Moscow

<sup>2</sup> Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow  
e-mail: kartashov@mihtr.ru

The theory of dynamic thermoelasticity in the problem of thermal shock is developed on the basis of Maxwell–Cattaneo–Lykov–Vernot phenomenology on the finite velocity of heat propagation in solids. A compatibility equation in stresses is proposed that generalizes the Beltrami–Mitchell relation to dynamic problems and as a special case of the investigational thermal

reaction of a massive solid body to a non-thermal shock. Different modes of sudden training of the body spray were studied: temperature, thermal, environment. The most dangerous mode of thermal influence is revealed; stress jumps at the front of a thermoelastic wave are calculated, as ratios that have great practical importance in the evaluation of thermal strength of solid body under thermal shock conditions.

Keywords: heat stroke, the final velocity of heat propagation, dynamic thermoelastic stresses, stress jumps.

## REFERENCES

1. **Kartashov E. M., Kudinov V. A.** *Analiticheskaya teoriya teploprovodnosti i prikladnoj termouprugosti* [Analytical theory of heat conduction and thermoelasticity]. Moscow: URRS, 2013. 656 p. In Russ.
2. **Kartashov E. M., Kudinov V. V.** *Analiticheskie metody teorii teploprovodnost i ieyo prilozhenij* [Analytical methods of the theory of heat conductivity and its applications]. Moscow: URRS, 2017. 1080 p. In Russ.
3. **Kartashov E. M.** *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids]. Moscow: Vyssh.shkola, 2001. 550 p. In Russ.
4. **Formalev V. F.** *Teploperenos v anizotropnykh tverdykh telakh* [Heat transfer in anisotropic solids]. Moscow: Fizmatlit. 2015. 280 p. In Russ.
5. **Kartashov E. M.** Analytical solutions of hyperbolic heat-conduction models. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2014, vol. 87, no. 5, pp. 1116–1125.
6. **Novatsky V.** *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow: Mir, 1975. 872 p. In Russ.
7. **Kartashov E. M.** Mathematical models of heat conduction with a two-phase laq. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2016, vol. 89, no. 2, pp. 346–356.

## ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ ЧИТАТЕЛЕЙ

### 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика»

С 19 по 23 ноября 2018 г. в рамках V Международной недели авиакосмических технологий «Aerospace Science Week» Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) проводит 17-ю Международную конференцию «Авиация и космонавтика» с целью расширения способов и инструментов научного взаимодействия, выявления новых научно-технических результатов в области авиации и космонавтики, определения новых «точек роста» и прорывных цифровых технологий развития промышленности.

Направления работы конференции:

- авиационные системы;
- авиационные, ракетные двигатели и энергетические установки;
- системы управления, информатика и электроэнергетика;
- информационно-телекоммуникационные технологии авиационных, ракетных и космических систем;
- ракетные и космические системы;
- робототехника, интеллектуальные системы и авиационное вооружение;
- математические методы в аэрокосмической науке и технике;
- новые материалы и производственные технологии в области авиационной и ракетно-космической техники;
- экономика и менеджмент предприятий аэрокосмического комплекса.

Конференция проводится с целью обмена опытом между профильными научными, производственными предприятиями, вузами авиакосмического комплекса России, ближнего и дальнего зарубежья с привлечением к участию ученых, специалистов, научных сотрудников, аспирантов, студентов и различных представителей научного сообщества.

По итогам работы конференции издается сборник тезисов докладов на английском и русском языках (включая присвоение кодов ISBN, УДК и ББК, рассылку по библиотекам, регистрацию в Российской книжной палате), также сборник размещается в системе РИНЦ.

Лучшие доклады будут опубликованы в изданиях, включенных Высшей аттестационной комиссией Министерства образования и науки Российской Федерации в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий».

Ознакомиться с условиями участия, а также подать заявку на участие можно на официальном сайте конференции.

E-mail: [aviacosmos@gmail.com](mailto:aviacosmos@gmail.com)

URL: <http://aik.mai.ru/>