

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

ОКОНЕЧНИКОВ АНАТОЛИЙ СЕРГЕЕВИЧ

**НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ  
НАГРУЗКИ ПО ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент Федотенков Г.В.

Москва 2015

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
<b>ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ ПО ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ .....</b>	<b>6</b>
§1.1. Современное состояние исследований .....	6
§1.2. Уравнения плоского движения однородной изотропной упругой среды.....	15
§1.2. Постановка нестационарной задачи о движении сосредоточенной нормальной нагрузки по границе упругой полуплоскости.....	20
§1.3. Функции влияния упругой однородной изотропной полуплоскости .....	23
§ 1.4. Интегральное представление решения .....	25
<b>ГЛАВА 2. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКИ .....</b>	<b>27</b>
§2.1 Разрешающее интегральное представление решения .....	27
§2.2 Свойств интегралов, входящих в представление решения .....	33
§2.3 Сверхзвуковой режим движения.....	39
§2.4 Трансзвуковой режим движения.....	47
§2.5 Дозвуковой режим движения .....	51
§2.5 Критические режимы движения .....	55
§2.6 Примеры расчетов.....	64
<b>ГЛАВА 3. ДВИЖЕНИЕ НАГРУЗКИ ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ ЗАКОНУ .....</b>	<b>71</b>
§3.1 Метод и алгоритм решения .....	71
§3.2 Примеры расчетов.....	82
Заключение .....	86
Список использованных источников .....	87

## Введение

С развитием технологий усложняются условия эксплуатации различных объектов, требующих оценки их механических и прочностных характеристик. Все большую теоретическую и практическую важность приобретают нестационарные задачи механики деформируемого твердого тела. Этому разделу механики посвящено множество публикаций как отечественных, так и зарубежных. Тем не менее, большинство из них направленно на решение статических и квазистатических задач. Такая ситуация связана с рядом математических сложностей, возникающих при исследовании проблем механики деформируемого твердого тела в нестационарной постановке.

Развитие ЭВМ также повлияло на направление развития методов исследований в рассматриваемой области – многие исследователи предпочитают использовать различные численные подходы к решению как динамических, так и статических задач. Среди них большой популярностью пользуются методы конечных и граничных элементов, методы конечных разностей и др. Конечно, такой подход оправдывает себя в случаях промышленного производства и наличия дефицита времени. При этом возникают вопросы связанные с достоверностью полученных результатов. Также встают проблемы точности, сходимости и устойчивости используемых методов. Зачастую строго доказать сходимость численного алгоритма расчета сложной конструкции очень сложно. На практике, как правило, используется исследование практической сходимости, основанное на итерационном методе, либо проводится сравнение с известными аналитическими решениями. Поэтому получение аналитических решений нестационарных задач механики деформируемого твердого тела имеет кроме теоретического, еще и важное практическое значение.

Аналитические решения позволяют выявить характерные особенности исследуемого нестационарного процесса, что говорит о их важности с теоретической точки зрения.

В настоящее время нестационарные волновые процессы наиболее полно исследованы для канонических областей: цилиндр, сфера, полупространство. Среди них важное значение имеют задачи, посвященные построению функции влияния - реакции рассматриваемого упругого тела на мгновенно приложенную сосредоточенную нагрузку. Знание функций влияния позволяет с помощью интеграла по времени и пространственным координатам определить решение задачи с произвольно заданными граничными условиями.

Целью данной работы является построение решения нестационарных задач для изотропной однородной упругой полуплоскости под действием подвижной, сосредоточенной нагрузки, движущейся по произвольному закону.

Как следует из обзора, представленного в §1.1., этот вопрос пользовался большим вниманием. Подобные задачи исследовали в различных постановках - стационарные и нестационарные, плоские и трехмерные, с различными свойствами материалов. Тем не менее, ни в одной работе не был представлен полный анализ, а именно – решение в различных скоростных диапазонах нагрузки (дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой) и не показан характер особенностей решений при произвольном значении времени. В данной работе подробно показано поведение решений в зависимости от скорости движения нагрузки, в том числе и для случаев движения с критическими скоростями.

Практическая значимость работы заключается в построении точных решений задач о воздействии подвижной нагрузки на упругую полуплоскость. Они могут быть использованы для оценки численных и приближенных алгоритмов, а также в различных областях новой техники, в

том числе при проектировании ракетно-космических объектов в части прогнозирования процесса их посадки на грунт, взаимодействия корпусов космических аппаратов с орбитальным мусором, метеорами и метеоридами, а также в области развития скоростного наземного транспорта.

В Главе I дана математическая постановка задачи о подвижной нагрузке, действующей на изотропную упругую полуплоскость. Нагрузка движется по произвольному закону в зависимости от времени. Приведен метод решения, основанный на использовании функции влияния

Глава II посвящена исследованию процесса равномерного движения нагрузки вдоль границы упругой полуплоскости. Получено аналитическое решение задачи для всех скоростных режимов движения нагрузки. Проведен анализ построенного решения в зависимости от скорости движения нагрузки. Отдельно исследованы случаи движения нагрузки с критическими скоростями (когда скорость нагрузки совпадает со скоростями распространения упругих волн растяжения-сжатия, сдвига и поверхностных волн Рэлея). Представлены примеры расчетов и графические результаты.

В Главе III предлагается метод решения задачи для произвольного закона движения. В качестве примера проводится анализ движения нагрузки с ускорением. Представлены примеры расчетов.

# ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ ПО ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

## §1.1. Современное состояние исследований

В настоящее время, в связи с развитием высокоскоростного наземного транспорта, а также развитием авиации и космической отрасли, задачи о воздействии подвижной нагрузки на упругие конструкции становятся все более актуальными. О необходимости развития высокоскоростного железнодорожного транспорта в России подробно изложено в работе А. И. Весницкого [1]. Показано что в конструкциях с движущимися источниками возмущения важно определить критические скорости движения. При движении нагрузки с критической скоростью характерно образование упругих волн. Движение нагрузки со скоростями, превышающими критические скорости недопустимо в силу следующих причин: на волнообразование затрачивается большие затраты энергии, возникающие волны создают заметные тормозные усилия, энергия волн способна вызвать разрушение конструкций, волны, запитываясь в грунт, способны нанести повреждения окружающей среде.

Началом исследованиям в этой области послужило разрушение Честерского моста в 1847 году. Эта катастрофа унесла множество жизней, что привело инженеров к необходимости оценить разницу между динамическими эффектами, возникающими под действием подвижной нагрузки, и статически приложенной нагрузкой. В 1848 г. Х. Кокс [2] занимался вопросами воздействия подвижной нагрузки на мост, моделируемый балкой. Автор показал, что динамический прогиб в балке в два раза больше статического. Модель Кокса предполагала балку невесомой, что далеко не всегда справедливо, а также он допустил ошибку, на которую в

дальнейшем указал Стокс – в работе нет учета продольной силы, что приводило к неправильному уравнению баланса энергии. В 1849 г. Ф. Виллис составил дифференциальное уравнение для прогиба балки, под действием инертного груза. Это уравнение позже было решено Д. Н. Стоксом [3] как в квадратурах, так и аналитически. Он показал, что коэффициент динамичности пропорционален квадрату скорости нагрузки. Однако, этот результат справедлив, если вес балки пренебрежимо мал по сравнению с весом груза.

С тех пор было опубликовано множество работ, связанных в первую очередь с движением грузов по мосту. Позже появилось еще одно приложение для теории – действие протекающей жидкости на гибкий трубопровод.

В 1868 году Э. Винклер и О. Мор независимо друг от друга предложили анализ балок основанный на линиях влияния - построение графиков внутренних усилий или перемещений в балке в зависимости от точки приложения нагрузки.

В 1905 г. А. Н. Крылов получил полное решение задачи о движении неинертного груза по балке с равномерно распределенной массой [3]. Аналогичный результат получил и С.П. Тимошенко [4] в 1912 году.

В дальнейшем различные исследователи проводили приближенный анализ проблемы для более сложных проблем, учитывающих трение в материале балки. В 1921 г. Н. Заллер в своей работе учел силу инерции груза и балки. Данной задачей занимались С.Е. Инглис [5] и А. Шаленкамп. При анализе авторы пользовались разложением перемещений в ряд по собственным формам. В дальнейшем в 1950-1961 г.г. В.В. Болотин с помощью алгоритма Бубнова-Галеркина описал колебание балки с помощью бесконечной системы дифференциальных уравнений.

Начиная с середины прошлого века в связи с развитием авиации, большой актуальностью пользовались вопросы о воздействии подвижных

нагрузок на тонкостенные конструкции – корпуса летательных, а в последствии и космических аппаратов. В качестве подвижной нагрузки рассматривалась волна давления, распространяющаяся по тонкостенной конструкции.

Большинство задач из этой области были рассмотрены в линейной постановке [6]. При решении задачи для случая цилиндрической оболочки [7], определяются критические скорости нагрузки, соответствующие скоростям волн растяжения-сжатия и волн сдвига. В работе [8] определена критическая скорость в случае оболочки, предварительно нагруженной продольными усилиями. Проведено сравнение критических скоростей при наличии и отсутствии продольных усилий в оболочке. Данные вопросы были изучены в линейной постановке задачи с использованием преобразования Фурье как, например, в работе [9] для замкнутой круговой цилиндрической оболочки. Для тонких оболочек с большими прогибами важно учитывать нелинейные эффекты. Критические скорости, полученные в линейной постановке отличаются от нелинейной. В работах [9-10] рассмотрена задача о набегании волны давления на цилиндрическую оболочку в нелинейной постановке. При решении использовался метод Бубнова-Галеркина. Также данная задача была проанализирована с помощью метода конечных разностей авторами А.С. Вольмиром, Л.И. Долгих, Э.Д. Скурлатовым и В.Р. Солоненко [11]. Григолюк Э.И. и Горшков А.Г. [12] провели анализ шарнирно-опертой цилиндрической панели под действием акустической волны, распространяющейся в продольном направлении. Авторы варьировали параметры задачи (скорость движения фронта волны, давление во фронте, закон спада давления за фронтом и коэффициент демпфирования) и оценивали их влияние на динамические прогибы пластин различных значениях толщин и кривизн.

В середине прошлого века началось изучение динамики полупространства, подверженного движущейся нагрузке. Эти задачи



являются обобщением задачи Lamb'a о точечной нагрузке [13] и впервые были рассмотрены Sneddon'ом [14-15] в 1951-1952 годах. Для плоского случая, исходя из общих решений волновых уравнений, получены в замкнутой форме выражения для перемещений при малых скоростях. Также в работе [16] рассмотрено обобщение на трехмерный случай.

В работах Cole и Huth [17], Bleich и Heer [18] а также в [19] рассматривается аналогичная задача в плоской постановке. Здесь исследуются частные случаи скорости движения нагрузки, а для построения решений используется преобразование Лапласа. В работе [18] анализируется поведение сыпучей среды.

Miles в своей работе [20] изучал движение радиально-симметричной взрывной волны по поверхности полупространства. Автор использовал интегральные преобразования Фурье-Бесселя. Обратное обращение вычислялись асимптотическим методом. Воздействию касательной точечной подвижной нагрузки на упругое полупространство посвящена работа Chao [21] в 1960 г. В этой работе были получены только нестационарные решения для поверхности полупространства. Флитман Л.М. [22] рассматривал движение без трения жесткой массивной полосы конечной ширины и бесконечной длины по поверхности полупространства. Подобную задачу исследовали также Keer и Sve [23], в этой работе по поверхности слоя движется бесконечный ряд штампов с постоянной скоростью. Процесс решения этой проблемы сводится к уравнению Фредгольма второго рода. В 1963 г. Sur [24] исследовал схожую с [21] проблему для трансверсально изотропного полупространства.

В дальнейшем в работах авторов П.Ф. Сабодаша и И.Г. Филлипова [25] а также Mukherjee [26] были обобщены результаты работы Sur с помощью метода суперпозиции плоских волн. С помощью методов трехмерной теории упругости авторами Mandel и Avramesco [27], Papadopoulos [28] было рассмотрено установившееся состояние полупространства под действием

подвижных сосредоточенных сил. В другой задаче Papadopoulos [29] изучал неосесимметричные задачи для полупространства под действием движущейся касательной силы и пары сил, действующих внутри полупространства.

В статье Eason'a [32] изучена квазистатическая задача для полупространства под действием нормальной и касательной силы, приложенных в точке, а также распределенных на круговой и прямоугольной областях и движущихся с постоянной скоростью, меньшей скорости Рэлея. Позже Fryba [33] уточнил результаты Eason'a при скорости движения нагрузки большей скорости волны Рэлея. Singh и Куо [34] обобщили результаты Eason'a из работы [32] для случая нагрузки, распределенной по круговой области. Norwood [35] изучал движение распределенной по отрезку нагрузки, движущейся в перпендикулярном к этому отрезку направлении.

Интересные результаты получены D. C. Gakenheimer и I. Miklowits [36] в работе о динамике полупространства под действующей движущейся с постоянной скоростью силой, приложенной в начальный момент времени. В работе используется преобразование Фурье по пространственной координате и преобразование Лапласа по времени. Рассмотрены три случая обратного преобразования с использованием метода Каньяра [37] для различных скоростных режимов нагрузки – дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой. Гекенхеймер [38] показал, что в случае отсутствия скорости, решение совпадает с решением задачи Лэмба. В работе [39] рассматривается движение системы грузов, движущихся вдоль слоя по произвольным законам. В этой работе учитывается инертность слоя, грузов и основания а также рассеивание энергии в материале слоя.

Равнозамедленное движение нагрузки вдоль упругого полупространства изучал Veitin [40]. В работе принималось, что скорость нагрузки уменьшается, приближаясь к скорости волн Рэлея.

Дальнейшее развитие эти задачи получили в части усложнения модели среды заполняющей полупространство. Ряд работ посвященных слоистым полупространствам, подверженным движущимся нагрузкам: Майлз [41], П.Ф. Сабодаш [42,43], Л.И. Слепьян [44], П.Ф. Сабодаш и И.Г. Филлипов [45], Avramesco [46-48], Sve и Whittier [49]. Динамика n-слойного полупространства под действием подвижной нагрузки рассмотрена в работе Dunkin и Gorbin [50]. Здесь задавалось условие непрерывности перемещения и компонентов тензора напряжений на границе слоев. Задача сводилась к интегрированию системы из n волновых уравнений.

В целом, динамика упругого полупространства под действием движущейся нагрузки изучалась либо в стационарной постановке, без учета начальных условий, либо рассматривался некий квазистационарный случай нагружения. N.Higuchi и K.I. Hirashima [51], D. D. Ang [52], M. Mitra [53] исследовали данный вопрос в нестационарной постановке. При этом использовался практически тот же аппарат, что и в случае неподвижной нагрузки. Авторы отмечали существенную зависимость решения от скорости движения нагрузки, а также о наличии разрывов при движении нагрузки со скоростью распространения волн Рэлея.

О влиянии скоростного режима также говорил Р. В. Гольдштейн в работе, посвященной расширяющейся области поверхностных напряжений [54]. Rayton, в своей статье [30], посвященной плоской задаче о движении сосредоточенных нагрузок, получил нестационарные перемещения поверхности с использованием обратной теоремы эластодинамики. К результатам Rayton'a пришел и Lansing [31], использовав интеграл Дюамеля.

Ю.Д. Каплунов [55] в квадратурах построил общее решение задачи о действии вертикальной сосредоточенной нагрузки, перемещающейся по поверхности полупространства по произвольному закону. Асимптотически исследовал случай движения нагрузки с постоянной скоростью и при большом значении времени. Изучена возможность существования

стационарных режимов и выявлены случаи бесконечных разрывов вертикальных перемещений, соответствующих движению нагрузки с постоянной скоростью. Рассмотрен случай движения нагрузки со скоростью волн Рэлея. Также был изучен случай равноускоренного движения нагрузки в случае малых значений ускорений и при большом значении времени.

А.Н. Мартиросян [56] исследовал задачу о движении изотропного упругого тела, занимающего полупространство, на границе которого вдоль движущейся полуплоскости заданы перемещения, а вне ее – граница свободна от напряжений. Для построения решений использовались преобразование Фурье по пространственной координате и преобразования Лапласа по времени. Полученная система уравнений Винера-Хопфа решалась методом циркулянтов. Решение приведено к форме Смирнова-Соболева. Вычислен коэффициент интенсивности напряжения в окрестности границы полуплоскости.

Для решения задач с распределенными подвижными силами эффективно используется принцип суперпозиции [57]. При этом решение задачи есть свертка нагрузки с функцией влияния. С использованием этого подхода, на границе полупространства можно задавать различные комбинации перемещений и напряжений, отвечающих теоремам существования и единственности. Флитман показал в работе [58], что существуют некоторые комбинации перемещений и напряжений, при которых начально-краевая задача для полупространства может распасться на две независимые задачи.

В некоторых случаях возможно получить решение задач с подвижной распределенной нагрузкой минуя функции влияния. А.Г. Багдоев [59], М. А. Белецкий и В. М. Сеймов [60] решили задачу о действии на граничную полуплоскость нормальных напряжений, сосредоточенных на отрезке. Ю.С. Яковлев и В. Л. Лобысев [61] нашли оригиналы преобразования Лапласа с помощью асимптотически эквивалентных функций для случая задания

смещения точек свободной поверхности. О. Жарий [62] исследовал случай периодического изменения перемещений и напряжений в граничных условиях.

В осесимметричных задачах для упругого полупространства в большинстве работ рассматривается нормальная поверхностная нагрузка. Решения подобных задач с использованием интегральных преобразований получены Л. Н. Сретенским [62], М. Mitra [64], К. Wang и Y. Wang [65]. В работах К. И. Огурцова и Г. И. Петрашеня [66], В.С. Никифоровского [67] в качестве функции влияния использовались члены дельта - последовательности. А. В. Галабурдин [68] решил плоскую задачу для тел с круговым отверстием под действием подвижной нагрузки. В работе применен метод граничных интегральных уравнений к соответствующей краевой задаче плоской динамической теории упругости в пространстве преобразований Фурье по времени. В работах Облаковой Т.В., Приказчикова Д.А. [69], Демченко А.Т., Каплунова Ю.Д., Приказчикова Д.А., Алейникова И.А. [70], и Приказчикова Д.А. [72] используется асимптотическая модель волны Рэлея, а в работе Мицкевича В. Г., Приказчикова Д.А. [71] – асимптотическая модель волны Стоунли.

В работе [69] рассмотрена нестационарная задача о движении сосредоточенной нагрузки вдоль поверхности упругого полупространства с постоянной скоростью, равной скорости волны Рэлея. Решение строится в ближнем поле, с использованием асимптотической модели для волны Рэлея. На первом этапе из анализа гиперболического уравнения решение находится на поверхности, затем из задачи Дирихле для эллиптического уравнения определяется решение внутри области. В работе [72] рассмотрен случай трансверсально-изотропной среды. В работах [73-86] исследовано воздействие сосредоточенной подвижной нагрузки на границу упругой изотропной полуплоскости в нестационарной постановке. С помощью принципа суперпозиции и решения задачи Лэмба найдено аналитическое

решение. Рассматривались различные скоростные режимы нагрузки, в том числе и произвольный закон движения а также критические скорости. Показан характер особенностей решения.

Как видно из представленного обзора, в задачах о нестационарном воздействии подвижной нагрузки на упругую полуплоскость достаточно полно исследован процесс при больших значениях временной координаты, когда переходные процессы затухают. Исследованы случаи стационарных режимов. Показано, что при стремлении скорости движения нагрузки к скорости волн Рэлея наблюдается стремление перемещений к бесконечности пропорционально времени. Также был рассмотрен случай равноускоренного закона движения в предположении, что ускорение мало. Был изучен процесс «перехода» скорости нагрузки через скорость фронта волны Рэлея.

В рассматриваемой работе приведено аналитическое решение нестационарного процесса воздействия сосредоточенной нагрузки на упругую полуплоскость в случае движения с постоянной скоростью. Полученное решение справедливо во всем диапазоне изменения временной координаты. Проведен анализ построенных решений в зависимости от скорости движения нагрузки, рассмотрены все возможные диапазоны изменения скорости нагрузки. Предложен численно-аналитический метод решения задачи о воздействии сосредоточенной нагрузки на упругую полуплоскость, движущуюся по произвольному закону.

## §1.2. Уравнения плоского движения однородной изотропной упругой среды

В рамках плоской постановки задачи рассмотрим движение однородной изотропной упругой среды относительно неподвижной декартовой системы координат  $Oxz$ . При этом вектор упругих перемещений  $\mathbf{u}$  имеет две отличные от нуля компоненты  $u$  – по оси  $Ox$  и  $w$  – по оси  $Oz$ , зависящие от двух пространственных координат  $x, z$  и времени  $t$  ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$  -орты системы координат):

$$\mathbf{u}(x, z, t) = u(x, z, t)\mathbf{e}_1 + w(x, z, t)\mathbf{e}_3. \quad (1.1)$$

Пусть  $D \in \mathbf{R}^2 = \{(x, z)\}$  – некоторая плоская область, ограниченная кривой  $\Gamma = \partial D$ .

Общая постановка плоской нестационарной задачи линейной теории упругости в перемещениях для области  $D$  включает в себя [57]

– уравнения Ламе

$$(\lambda + \mu)\text{grad div } \mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\rho$  – упругие постоянные Ламе и плотность среды;

– начальные условия

$$\begin{aligned} u(x, z, 0) = g_1(x, z), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= h_1(x, z), \\ w(x, z, 0) = g_3(x, z), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} &= h_3(x, z), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$g_k(x, z), h_k(x, z)$  ( $k = 1, 3$ ),  $(x, z) \in D$  – заданные функции координат;

– граничные условия одного из следующих трех типов:

а) кинематические граничные условия

$$\begin{aligned} u(x, z, t)|_{\Gamma} &= U(x, z, t), \quad w(x, z, t)|_{\Gamma} = W(x, z, t), \\ (x, z) &\in \Gamma \end{aligned} \quad (1.4)$$

$U(x, z, t), W(x, z, t)$  – компоненты заданного вектора перемещений на границе  $\Gamma$ ;

б) силовые граничные условия

$$\sigma_{ij} \nu_j |_{\Gamma} = p_i(x, z, t), \quad (i, j = 1, 3), \quad (x, z) \in \Gamma, \quad (1.5)$$

$\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $p_i$  – компоненты заданного вектора внешней нагрузки;

в) граничные условия смешанного типа

$$\begin{aligned} u(x, z, t)|_{\Gamma_u} &= U(x, z, t), \quad w(x, z, t)|_{\Gamma_u} = W(x, z, t), \quad (x, z) \in \Gamma_u, \\ \sigma_{ij} \nu_j |_{\Gamma_\sigma} &= p_i(x, z, t), \quad (i, j = 1, 3), \quad (x, z) \in \Gamma_\sigma, \end{aligned} \quad (1.6)$$



где  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_\sigma$  – части границы  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ , на которых заданы перемещения и внешняя нагрузка соответственно,  $v_j$  – компоненты вектора  $\mathbf{v}$  внешней нормали к кривой  $\Gamma$ ;

– соотношения Коши

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}, \quad (1.7)$$

$\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 3$ ) – компоненты тензора деформаций;

– закон Гука

$$\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\theta, \quad \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{33} = 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda\theta. \quad (1.8)$$

Для перехода от уравнений Ламе (1.2) к двум независимым волновым уравнениям вектор перемещений представляется в виде суммы потенциальной и соленоидальной составляющих:

$$\mathbf{u} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\boldsymbol{\psi} \quad (1.9)$$

где  $\varphi(x, z, t)$  – скалярный, а  $\boldsymbol{\psi}(x, z, t)$  – векторный потенциалы упругих смещений.

В случае плоской задачи отлична от нуля только одна компонента  $\psi_2 = \psi(x, z, t)$  векторного потенциала:

$$\boldsymbol{\psi}(x, z, t) = \psi(x, z, t)\mathbf{e}_2 \quad (1.10)$$

При этом операторы в (1.9) принимают вид:

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_3, \quad \text{rot}\boldsymbol{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_1 - \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{e}_3. \quad (1.11)$$

Подстановка (1.9) в (1.2) приводит к двум независимым волновым уравнениям относительно потенциалов:

$$c_1^2\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad c_2^2\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad (1.12)$$

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho},$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига;  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Далее будем пользоваться безразмерной системой величин (штрихи обозначают размерные величины)

$$x = \frac{x'}{L}, \quad z = \frac{z'}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u = \frac{u'}{L}, \quad w = \frac{w'}{L}, \quad \varphi = \frac{\varphi'}{L^2}, \quad \psi = \frac{\psi'}{L^2}, \quad (1.13)$$

$$\eta = \frac{c_1}{c_2}, \quad c_R = \frac{c'_R}{c_1}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{\lambda + 2\mu}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2}{\eta^2}.$$

Здесь  $\tau$  – безразмерное время,  $c_R$  – скорость поверхностных волн Рэлея,  $L$  – некоторый линейный размер.

Из соотношений (1.7), (1.8), (1.11) с учетом (1.13) вытекают следующие связи компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений с упругими потенциалами:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1.14)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \varepsilon_{33} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (\kappa - 1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \kappa \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \\ \sigma_{13} &= \frac{1}{\eta^2} \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + (1 - \kappa) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \kappa \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

В безразмерных величинах уравнения (1.12) принимают вид:

$$\ddot{\varphi} = \Delta \varphi, \quad \eta^2 \ddot{\psi} = \Delta \psi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.17)$$

Здесь и далее точкой обозначается производная по безразмерному времени  $\tau$ .

## §1.2. Постановка нестационарной задачи о движении сосредоточенной нормальной нагрузки по границе упругой полуплоскости

В начальный момент времени  $\tau = 0$  по нормали к свободной границе  $z = 0$  невозмущенной однородной, изотропной, упругой полуплоскости  $z \geq 0$  прикладывается нормальная сосредоточенная нагрузка  $q$  и начинает перемещаться в положительном направлении оси  $Ox$  по заданному закону  $x = f(\tau)$  (рис. 1).

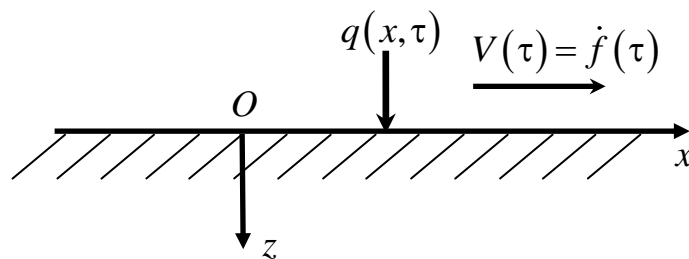


Рис.1.

Для строгого математического описания нестационарных сосредоточенных воздействий воспользуемся аппаратом обобщенных функций [87]. С его помощью сосредоточенная подвижная нагрузка представляется так

$$q(x, \tau) = H(\tau) \delta[x - f(\tau)]. \quad (1.18)$$

Здесь и далее  $H(\bullet)$  – функция Хевисайда,  $\delta(\bullet)$  – дельта-функция Дирака.

Постановка задачи включает в себя уравнения движения (1.17), соотношения (1.14) - (1.16), нулевые начальные условия

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = 0, \quad \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0 \quad (1.19)$$

и граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{33}|_{z=0} = -H(\tau)\delta[x - f(\tau)], \\ u = O(1), \quad w = O(1), \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Запись  $\alpha = O(\beta)$  означает, что  $\alpha$  и  $\beta$  - величины одного порядка.

Отметим, что подвижной точке приложения нагрузки  $x^* = f(\tau)$  в пространственном отношении соответствует прямая линия  $l(\tau): x = f(\tau), z = 0$  (рис. 2), движущаяся вдоль поверхности полупространства по закону  $x = f(\tau)$ . Эту линию (в плоской постановке – подвижную точку) будем называть фронтом движения нагрузки.

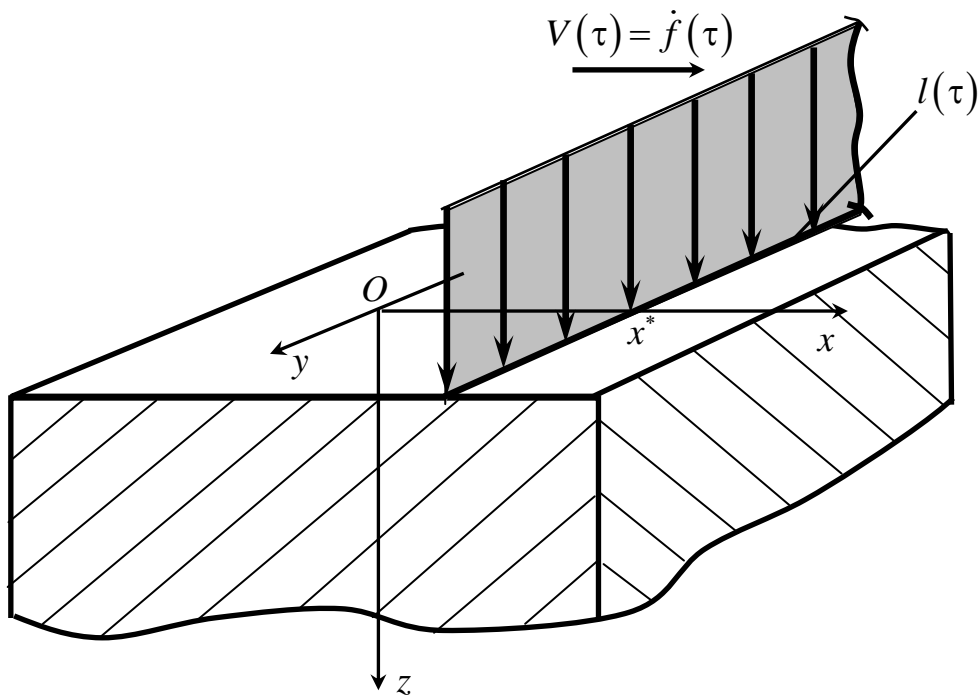


Рис. 2.

Назовем произвольную точку  $A(x, \tau)$  с координатами  $(x, \tau)$ , принадлежащую границе полуплоскости, точкой наблюдения в момент времени  $\tau$ . В дальнейшем будем называть такие точки просто точками наблюдения.

### §1.3. Функции влияния упругой однородной изотропной полуплоскости

Решения неоднородных начально-краевых или краевых задач зависят от правых частей операторов, порождающих уравнения движения, а также от начальных и граничных условий. Поэтому при заданных операторах желательно иметь некие специальные функции (фундаментальные решения) [89], с помощью которых могут быть найдены решения неоднородных задач с произвольными правыми частями.

В задачах с неоднородными граничными условиями в качестве таких функций выступают поверхностные фундаментальные решения (поверхностные функции влияния, поверхностные функции Грина). Поверхностные функции влияния для упругой полуплоскости это перемещения  $\mathbf{G}_\Gamma^i = G_{1\Gamma}^i(x, z, \tau)\mathbf{e}_1 + G_{3\Gamma}^i(x, z, \tau)\mathbf{e}_3$  ( $i=1,3$ ), являющиеся решениями задачи (1.14) - (1.17) с нулевыми начальными условиями и граничными условиями

$$\sigma_{3k}|_{z=0} = \delta(x)\delta(\tau)\delta_{ki} \quad (k=1,3), \quad (1.21)$$

где  $\delta_{ki}$  - символ Кронекера.

С использованием этих функций решение задачи о распространении граничных возмущений при заданной внешней нагрузке  $\mathbf{p} = p_1(x, \tau)\mathbf{e}_1 + p_3(x, \tau)\mathbf{e}_3$  можно представить в интегральном виде [89]

$$\begin{aligned}
u(x, z, \tau) &= G_{1\Gamma}^1 ** p_1 + G_{1\Gamma}^3 ** p_1 = \int_0^\tau dt \int_{-\infty}^\infty \left[ G_{1\Gamma}^1(x - \xi, z, \tau - t) p_1(\xi, t) + \right. \\
&\quad \left. + G_{1\Gamma}^3(x - \xi, z, \tau - t) p_3(\xi, t) \right] d\xi, \\
w(x, z, \tau) &= G_{3\Gamma}^1 ** p_1 + G_{3\Gamma}^3 ** p_1 = \int_0^\tau dt \int_{-\infty}^\infty \left[ G_{3\Gamma}^1(x - \xi, z, \tau - t) p_1(\xi, t) + \right. \\
&\quad \left. + G_{3\Gamma}^3(x - \xi, z, \tau - t) p_3(\xi, t) \right] d\xi.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Здесь и далее  $f ** g$  означает свёртку функций  $f$  и  $g$  по пространственной координате  $x$  и времени  $\tau$ .

Отметим, что при решении некоторых нестационарных задач, когда основной интерес представляет определение распределений искомым функций на границе полуплоскости, достаточно определить функции влияния на границе  $z = 0$ . При этом остаются справедливыми представления (1.22), в которых следует положить  $z = 0$ .



## §1.4 Интегральное представление решения

Как следует из интегрального представления (1.22) и граничных условий (1.20), нормальные перемещения на границе полуплоскости  $w_0(x, \tau) = w(x, 0, \tau)$  определяются следующим соотношением

$$\begin{aligned} w_0(x, \tau) &= - \int_0^{\tau} dt \int_{-\infty}^{\infty} G_{3\Gamma}^3(x - \xi, 0, \tau - t) \delta[\xi - f(t)] d\xi = \\ &= - G_f(x, \tau) ** H(\tau) \delta[x - f(\tau)], \end{aligned} \quad (1.23)$$

где введено обозначение  $G_f(x, \tau) = G_{3\Gamma}^3(x - \xi, 0, \tau - t)$ .

Ядро интегрального представления  $G_f(x, \tau)$  (функция влияния) найдено в работе [57] и имеет вид

$$\begin{aligned} G_f(x, \tau) &= \sum_{j=1}^2 G_j(x, \tau) H(\tau - \eta_j |x|) \quad (1.24) \\ G_j(x, \tau) &= \frac{g_j(x^2, \tau^2) k_j(x^2, \tau^2)}{\pi \eta^4 P_3(x^2, \tau^2)}, \\ g_1(x, \tau) &= (\eta^2 x - 2\tau)^2, \quad g_2(x, \tau) = 4\tau(\tau - x), \\ k_1(x, \tau) &= \sqrt{\tau - x}, \quad k_2(x, \tau) = \sqrt{\tau - \eta^2 x}, \\ P_3(x, \tau) &= P_1(x, \tau) P_2(x, \tau), \\ P_1(x, \tau) &= x - c_R^2 \tau, \quad P_2(x, \tau) = x^2 - 2\alpha^2 x \tau + \beta^2 \tau^2, \\ \alpha^2 &= \frac{4}{\eta^2} - \frac{c_R^2}{2}, \quad \beta^2 = \frac{16(\eta^2 - 1)}{\eta^8 c_R^2}, \quad \eta_1 = 1, \quad \eta_2 = \eta. \end{aligned}$$

Функция влияния (1.24) обладает следующими свойствами.

1. Однородность степени -1 по переменным  $x$  и  $\tau$ :

$$G_f(\alpha x, \alpha \tau) = \alpha^{-1} G_f(x, \tau).$$

2. На фронтах волн Рэлея  $x = \pm c_R \tau$   $G_f(x, \tau)$  имеет неинтегрируемые степенные особенности порядка -1.

3. Многочлен  $P_2(x, \tau)$  вещественных корней не имеет.

4.  $G_f(x, \tau)$  - обобщенная функция с ограниченным носителем, определяемым аргументами функций Хевисайда.

С учетом свойств дельта-функции [84] и функции влияния ,представление (1.23) принимает вид:

$$\begin{aligned} w_0(x, \tau) &= -\int_0^\tau G_f(x - f(t), \tau - t) dt = -\sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \\ w_j(x, \tau) &= \int_0^\tau G_j(x - f(t), \tau - t) H(\tau - t - \eta_j |x - f(t)|) dt = \\ &= \int_{\tau_{j1}}^{\tau_{j1}} G_j(x - f(t), \tau - t) dt. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Пределы интегрирования  $\tau_{j1}$ ,  $\tau_{j2}$  в представлении (1.25) зависят от носителей подынтегральных функций, которые в свою очередь зависят от закона движения нагрузки. Они определяются из решения системы неравенств

$$\begin{aligned} 0 < t < \tau, \\ \tau - t - \eta_j |x - f(t)| > 0 \Rightarrow -\frac{\tau - t}{\eta_j} < x - f(t) < \frac{\tau - t}{\eta_j}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

## ГЛАВА 2. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКИ

### §2.1 Разрешающее интегральное представление решения

Рассмотрим движение поверхностной нагрузки с постоянной скоростью:

$$f(\tau) = V\tau, \quad V = \text{const.} \quad (2.1)$$

При этом, как следует из (1.25)

$$w_0(x, \tau) = -\sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad (2.2)$$

$$w_j(x, \tau) = \int_{\tau_{j1}}^{\tau_{j2}} G_j(x - Vt, \tau - t) dt,$$

где  $\tau_{j1}, \tau_{j2}$  являются границами области решений системы неравенств

$$0 < t < \tau, \quad -\frac{\tau - t}{\eta_j} < x - Vt < \frac{\tau - t}{\eta_j}. \quad (2.3)$$

Решения неравенств (2.3) удобно получить графоаналитическим способом. Имеется три характерных режима движения нагрузки: сверхзвуковой  $V > 1$ , трансзвуковой  $1/\eta < V < 1$  и дозвуковой  $V < 1/\eta$ .

Графоаналитический способ решения продемонстрируем на примере сверхзвукового режима движения с помощью рис. 3. Сплошные линии соответствуют прямым  $\xi = \pm \frac{\tau - t}{\eta}$ , штриховые –  $\xi = \pm(\tau - t)$ , а

штрихпунктирная –  $\xi = x - Vt$ . Пределы  $\tau_{k1}, \tau_{k2}$  являются абсциссами точек пересечения прямой  $\xi = x - Vt$  с границами областей

$$D_j = \left\{ (t, \xi) : 0 < t < \tau, -\frac{\tau - t}{\eta_j} < \xi < \frac{\tau - t}{\eta_j} \right\}, j = 1, 2. \quad (2.4)$$

Как видно из рис. 3, эти области геометрически представляют собой треугольники с вершинами  $(\tau, 0), (0, \pm\tau/\eta_j)$ . Фиксируя определенное значение  $V > 1$  и перемещая прямую  $L: \xi = x - Vt$  в вертикальном направлении параллельно самой себе, получаем 6 характерных случаев относительного расположения областей  $D_j$  и прямой  $L$ . На рис. 3 круглыми и квадратными маркерами обозначены точки пересечения прямой  $L$  с границами областей  $D_1$  и  $D_2$  соответственно. Абсциссы точек пересечения в случае не равенства их нулю определяются из решений уравнений

$$\begin{aligned} x - Vt = \pm \frac{\tau - t}{\eta_j} &\Rightarrow t = t_{j1}, t_{j2}, \\ \tau > t_{j2} = \frac{\tau + \eta_j x}{V\eta_j + 1} > t_{j1} = \frac{\eta_j x - \tau}{V\eta_j - 1} > 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

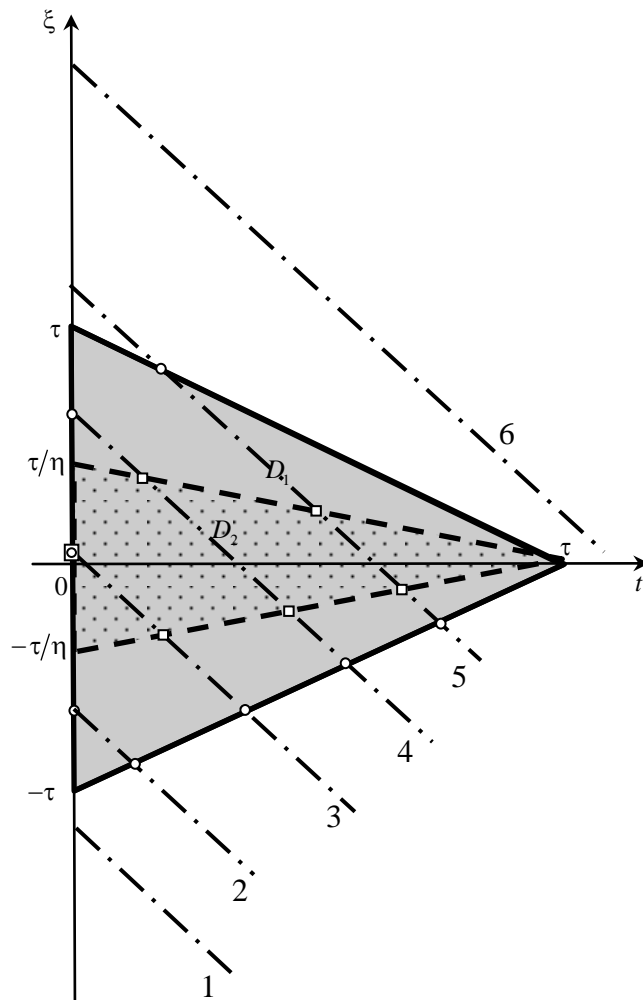


Рис. 3

Аналогично определяются все возможные случаи значения пределов в (2.2) при двух других характерных режимах движения нагрузки. В таблице 1. приведены значения  $\tau_{j1}$  и  $\tau_{j2}$  при всех возможных значениях параметров  $\tau$ ,  $x$ ,  $\eta_j$ ,  $V$  (знак  $\emptyset$  означает пустое множество).

Таблица 1.

$V$	$x$	$\tau_{11}$	$\tau_{12}$	$\tau_{21}$	$\tau_{22}$
$V > 1$	$x > V\tau$ или $x < -\tau$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\tau < x < V\tau$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{21}$	$t_{22}$
	$\tau/\eta < x < \tau$	0	$t_{12}$	$t_{21}$	$t_{22}$
	$ x  < \tau/\eta$	0	$t_{12}$	0	$t_{22}$
	$-\tau < x < -\tau/\eta$	0	$t_{12}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$1/\eta < V < 1$	$ x  > \tau$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$V\tau < x < \tau$	0	$t_{11}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\tau/\eta < x < V\tau$	0	$t_{12}$	$t_{21}$	$t_{22}$
	$ x  < \tau/\eta$	0	$t_{12}$	0	$t_{22}$
	$-\tau < x < -\tau/\eta$	0	$t_{12}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$V < 1/\eta$	$ x  > \tau$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\tau/\eta < x < \tau$	0	$t_{11}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$V\tau < x < \tau/\eta$	0	$t_{11}$	0	$t_{21}$
	$-\tau/\eta < x < V\tau$	0	$t_{12}$	0	$t_{22}$
	$-\tau < x < -\tau/\eta$	0	$t_{12}$	$\emptyset$	$\emptyset$

Сделаем замену переменной

$$y = \frac{x - Vt}{\tau - t}. \quad (2.6)$$

Тогда выражения для  $w_j(x, \tau)$  из (2.2) с учетом (2.6) преобразуются к виду

$$w_j(x, \tau) = \int_{y_{j1}}^{y_{j2}} \tilde{G}_j(y) \sqrt{1 - \eta_j^2 y^2} dy,$$

$$\tilde{G}_j(y) = \frac{G_j(y, 1)}{(y - V) \sqrt{1 - \eta_j^2 y^2}} = \frac{1}{\pi \eta^4} \frac{1}{y - V} \frac{g_j(y^2, 1)}{(y^2 - c_R^2) Q_2(y) Q_2(-y)}, \quad (2.7)$$

$$Q_2(y) = y^2 + \gamma y + \beta = (y + c)(y + \bar{c}), \quad Q_2(-y) = (y - c)(y - \bar{c}),$$

$$\gamma = \sqrt{2(\alpha^2 + \beta)}, \quad c = \frac{\gamma + i\sqrt{2(\beta - \alpha^2)}}{2}.$$

Разложим функцию  $\tilde{G}_j(y)$  в сумму простых дробей [86]:

$$\tilde{G}_j(y) = \sum_{l=1}^7 \frac{a_{jl}}{y - b_l},$$

$$b_1 = V, \quad b_2 = c_R, \quad b_3 = -c_R, \quad b_4 = c, \quad b_5 = \bar{c}, \quad b_6 = -c, \quad b_7 = -\bar{c}, \quad (2.8)$$

$$a_{jl} = \frac{1}{\pi \eta^4} \frac{g_j(b_l^2, 1)}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^7 (b_l - b_r)}.$$

Тогда с учетом замены переменной  $z = \eta_j y$ , получаем

$$w_j(x, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{jl} I_{jl}(x, \tau; c_{jl}),$$

$$I_{jl}(x, \tau; c_{jl}) = \int_{z_{j1}}^{z_{j2}} \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z - c_{jl}} dz, \quad c_{jl} = \eta_j b_l. \quad (2.9)$$

Пределы интегрирования в (2.9) определяются с учетом (2.6) и таблицы

1. Значения пределов для всех скоростных режимов приведены в таблице 2.

Таблица 2.

$V$	$x$	$z_{11}$	$z_{12}$	$z_{21}$	$z_{22}$
$V > 1$	$x > V\tau$ или $x < -\tau$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\tau < x < V\tau$	1	-1	1	-1
	$\tau/\eta < x < \tau$	$x/\tau$	-1	1	-1
	$ x  < \tau/\eta$	$x/\tau$	-1	$\eta x/\tau$	-1
	$-\tau < x < -\tau/\eta$	$x/\tau$	-1	$\emptyset$	$\emptyset$
$1/\eta < V < 1$	$ x  > \tau$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$V\tau < x < \tau$	$x/\tau$	1	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\tau/\eta < x < V\tau$	$x/\tau$	-1	1	-1
	$ x  < \tau/\eta$	$x/\tau$	-1	$\eta x/\tau$	-1
	$-\tau < x < -\tau/\eta$	$x/\tau$	-1	$\emptyset$	$\emptyset$
$V < 1/\eta$	$ x  > \tau$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\tau/\eta < x < \tau$	$x/\tau$	1	$\emptyset$	$\emptyset$
	$V\tau < x < \tau/\eta$	$x/\tau$	1	$\eta x/\tau$	1
	$-\tau/\eta < x < V\tau$	$x/\tau$	-1	$\eta x/\tau$	-1
	$-\tau < x < -\tau/\eta$	$x/\tau$	-1	$\emptyset$	$\emptyset$



## §2.2 Свойств интегралов, входящих в представление решения

Как видно из представления (2.9), для проведения расчетов и выделения характерных особенностей решения, нам необходимо исследовать свойства интеграла вида

$$I(a) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-a} dz, \quad z_1, z_2 \in [-1, 1]. \quad (2.10)$$

При этом параметр  $a$  может быть как действительным  $a \in R$ , так и комплексным  $a \in C$ . В случае  $a \in R$  возможны случаи:  $a \notin [z_1, z_2]$ ,  $a \in [z_1, z_2]$ . В последнем случае интеграл (2.10) – сингулярный и понимается в смысле главного значения по Коши.

При  $a \in R$ ,  $a \notin [z_1, z_2]$  подынтегральная является непрерывной действительной, следовательно, для (2.10) применима формула Ньютона-Лейбница:

$$I(a) = J(z_2; a) - J(z_1; a), \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} J(z; a) &= \sqrt{1-z^2} + a \arcsin z + \sqrt{1-a^2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-a}\sqrt{1+z} - \sqrt{1+a}\sqrt{1-z}}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+z} + \sqrt{1+a}\sqrt{1-z}} \right| && \text{при } a < 1; \\ &= \sqrt{1-z^2} + a \arcsin z + 2\sqrt{a^2-1} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a-1}\sqrt{1+z}}{\sqrt{a+1}\sqrt{1-z}} && \text{при } a > 1; \\ &= \frac{\sqrt{1+z}}{\sqrt{1-z}} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+z}}{\sqrt{1-z}} && \text{при } a = 1. \end{aligned}$$

При  $a \in C$ ,  $a \notin [z_1, z_2]$

$$I(a) = J_c(z_2, a) - J_c(z_1, a), \quad (2.12)$$

$$J_c(z; a) = \sqrt{1-z^2} + a \arcsin z + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \ln \left( \frac{\sqrt{1-a}\sqrt{1+z} - \sqrt{1+a}\sqrt{1-z}}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+z} + \sqrt{1+a}\sqrt{1-z}} \right),$$

где под  $\ln z$  понимается главная ветвь комплексного логарифма.

При  $a \in R$ ,  $a \in (z_1, z_2)$  интеграл (2.10) сингулярный. Для вычисления его конечного значения докажем следующее

**Утверждение 1.** Главное значение интеграла (2.10) определяется формулой (2.11).

**Доказательство.** Доказательство утверждения проведем с позиции теории обобщенных функций [88]. Рассмотрим обобщенную функцию

$$\left( \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-a}, \varphi(z) \right) = \int_R \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-a} \varphi(z) dz, \quad (2.13)$$

где основную функцию  $\varphi(z)$  выберем так, чтобы  $\varphi(z) \equiv 1$  при  $z \in [z_1, z_2]$  и продолжим ее произвольным образом в область  $D = R \setminus [z_1, z_2]$ . При этом

$\varphi^{(i)}(z) = \frac{d^i \varphi(z)}{dz^i} \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$  при  $z \in [z_1, z_2]$ . Тогда учитывая, что

$\frac{\sqrt{1-z^2}}{z-a} = J'(z; a) = \frac{d}{dz} J(z; a)$  и дважды выполняя интегрирование по частям,

получим

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\sqrt{1-y^2}}{y-a}, \varphi(y) \right) &= \int_R \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-a} \varphi(z) dz = \int_R J'(z; a) \varphi(z) dz = \\
&= (-1) \int_R J(z; a) \varphi'(z) dz = (-1) \int_D J(z; a) \varphi'(z) dz = \\
&= \int_D J'(z; a) \varphi(z) dz - J(z; a) \varphi(z) \Big|_{-\infty}^{z_1} - J(z; a) \varphi(z) \Big|_{z_2}^{\infty} = \\
&= \int_D J'(z; a) \varphi(z) dz + J(z; a) \Big|_{z_1}^{z_2} = \int_D \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-a} \varphi(z) dz + J(z; a) \Big|_{z_1}^{z_2}.
\end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}
\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-a} dz &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-a} \varphi(z) dz = \\
&= \int_R \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-a} \varphi(z) dz - \int_D \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-a} \varphi(z) dz = J(z; a) \Big|_{z_1}^{z_2}.
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ■

**Следствие.** Утверждение 1 дает основание для вычисления регулярных и сингулярных интегралов, входящих в интегральное представление решения с помощью одних и тех же формул (2.11).

**Утверждение 2.** В случае  $a \in R$ ,  $a \rightarrow z_2 \pm 0$  значение интеграла (2.10) стремится к  $+\infty$  по логарифмическому закону. В случае  $a \in R$ ,  $a \rightarrow z_1 \pm 0$  значение интеграла (2.10) стремится к  $-\infty$  по логарифмическому закону.

**Доказательство.** Пусть  $a = z_2 \pm \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  - малый параметр, тогда учитывая утверждение 1 и используя формулы (2.11) получаем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [J(z_2; z_2 \pm \varepsilon) - J(z_1; z_2 \pm \varepsilon)] = C_{21} + \frac{1}{\sqrt{1-z_2^2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln [C_{22} f(\varepsilon, z_2)], \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} C_{21} &= \sqrt{1-z_2^2} - \sqrt{1-z_1^2} + z_2 (\arcsin z_2 - \arcsin z_1), \\ C_{22} &= \frac{1}{2\sqrt{1-z_2^2}} \left| \frac{\sqrt{1-z_2}\sqrt{1+z_1} + \sqrt{1+z_2}\sqrt{1-z_1}}{\sqrt{1-z_2}\sqrt{1+z_1} - \sqrt{1+z_2}\sqrt{1-z_1}} \right|, \\ f(\varepsilon, z_2) &= \left| \sqrt{1-(z_2 \pm \varepsilon)}\sqrt{1+z_2} - \sqrt{1+(z_2 \pm \varepsilon)}\sqrt{1-z_2} \right|. \end{aligned}$$

Определяя асимптотически эквивалентную функцию для  $f(\varepsilon, z_2)$

$$f(\varepsilon, z_2) \sim \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-z_2^2}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (2.15)$$

получаем асимптотическое выражение для интеграла  $I(a) \sim I_{\varepsilon 2}$  при  $a \rightarrow z_2 \pm 0$ :

$$I_{\varepsilon 2} = C_{21} + \frac{1}{\sqrt{1-z_2^2}} \ln \left( \frac{C_{22}}{\sqrt{1-z_2^2}} \varepsilon \right) \sim \frac{1}{\sqrt{1-z_2^2}} \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (2.16)$$

Аналогично получаем асимптотическое выражение для интеграла  $I(a) \sim I_{\varepsilon 1}$  при  $a \rightarrow z_1 \pm 0$ :

$$I_{\varepsilon 1} = C_{11} - \frac{1}{\sqrt{1-z_1^2}} \ln \left( \frac{C_{12}}{\sqrt{1-z_1^2}} \varepsilon \right) \sim -\frac{1}{\sqrt{1-z_1^2}} \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (2.17)$$

где

$$C_{11} = \sqrt{1-z_2^2} - \sqrt{1-z_1^2} + z_1 (\arcsin z_2 - \arcsin z_1),$$

$$C_{12} = \frac{1}{2\sqrt{1-z_1^2}} \left| \frac{\sqrt{1-z_1}\sqrt{1+z_2} + \sqrt{1+z_1}\sqrt{1-z_2}}{\sqrt{1-z_1}\sqrt{1+z_2} - \sqrt{1+z_1}\sqrt{1-z_2}} \right|. \blacksquare$$

Докажем еще следующее

**Утверждение 3.** В случае  $a \in R$ ,  $z_2 \rightarrow a \pm 0$  значение интеграла (2.10) стремится к  $+\infty$  по логарифмическому закону. В случае  $a \in R$ ,  $z_1 \rightarrow a \pm 0$  значение интеграла (2.10) стремится к  $-\infty$  по логарифмическому закону.

**Доказательство.** Пусть  $z_2 = a \pm \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  - малый параметр, тогда учитывая утверждения 1, 2 и используя формулы (2.11) получаем:

$$I(a) \sim I_{\varepsilon 3} \text{ при } z_2 = a \pm \varepsilon:$$

$$I_{\varepsilon 3} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (2.18)$$

Аналогично  $I(a) \sim I_{\varepsilon 4}$  при  $z_1 = a \pm \varepsilon$ :

$$I_{\varepsilon 4} = -\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \blacksquare \quad (2.19)$$

Формулы (2.2), (2.9) и доказанные утверждения 1 – 3 позволяют провести исследование нормальных перемещений границы полуплоскости при равномерном движении нормальной нагрузки аналитическими методами.

Поведение решения существенно зависит от скоростного режима движения нагрузки. Возможны три характерных варианта скоростного режима:

- сверхзвуковой –  $V > 1$ ;
- трансзвуковой –  $1/\eta < V < 1$ ;
- дозвуковой –  $0 < V < 1/\eta$ .

Также представляет интерес исследование решения при критических режимах движения:

- движение нагрузки со скоростью волн расширения-сжатия  $V = 1$ ;
- движение нагрузки со скоростью волн сдвига  $V = 1/\eta$ ;
- движение нагрузки со скоростью волн Рэлея  $V = c_R$ .

При этом интегралы  $I_{jl}$  при  $l = 1, 2, 3$ , входящие в представление (2.9), в зависимости от скоростного режима движения и положения точки наблюдения могут быть сингулярными. Их значения определяются на основании доказанных утверждений.

### §2.3 Сверхзвуковой режим движения

Исследуем характерные особенности нормальных перемещений границы полуплоскости при движении нагрузки со сверхзвуковой скоростью:  $V > 1$ . Зафиксируем произвольный момент времени  $\tau$  и проведем анализ решения во всех точках границы полуплоскости.

1. Поведение решения в точках наблюдения, расположенных перед фронтом движения нагрузки ( $x > V\tau$ ).

Как следует из представления (2.9) и таблицы 2 нормальные перемещения перед фронтом движения нагрузки равны нулю, так как пределы интегрирования  $z_{j1}, z_{j2}$  во всех интегралах  $I_{jl}(x, \tau; c_{jl})$  нулевые (или, что тоже, носители подынтегральных функций – пустые множества). Это согласуется с механическим смыслом исследуемого нестационарного процесса: *при движении нагрузки со сверхзвуковой скоростью в точках наблюдения, расположенных перед фронтом нагрузки все возмущения отсутствуют, т.к. скорость распространения возмущений в полуплоскости не может превышать скорость волн растяжения-сжатия.*

$$w_0(x, \tau) = 0 \quad \text{при } x > V\tau. \quad (2.20)$$

2. Поведение решения в точках наблюдения, расположенных в диапазоне  $\tau < x < V\tau$ .

В этом случае все интегралы, входящие в (2.9) имеют постоянные пределы, не зависящие от  $x$  и  $\tau$  ( $z_{j1} = 1, z_{j2} = -1$ ):

$$I_{jl}(x, \tau; c_{jl}) = - \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{jl}} dz = \text{const.}$$

При этом все интегралы  $I_{jl}$  имеют конечные значения т.к. имеют место неравенства

$$\begin{aligned} V > 1 > 1/\eta &\Rightarrow c_{j1} > 1, \\ c_R < 1/\eta < 1 &\Rightarrow -1 < c_{j2,3} < 1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Следовательно, в этом случае интегралы  $I_{j2}, I_{j3}$  – сингулярные, понимаются в смысле главного значения и вычисляются согласно утверждению 1 по формуле (2.11) (имеют конечные значения). Остальные интегралы регулярные. Их значения определяются по формулам (2.11) (для  $I_{j1}$ ) и (2.12) (для  $I_{jl}, l = \overline{4,7}$ ):

$$\begin{aligned} w_0(x, \tau) = \sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau) = \text{const}, \quad w_j(x, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{jl} I_{jl}(x, \tau; c_{jl}), \\ I_{jl}(x, \tau; c_{jl}) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{jl}} dz. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Таким образом,  $w_0(x, \tau) = \text{const}$  при  $\tau < x < V\tau$ . Это говорит о том, что динамические эффекты в точке границы полуплоскости, по которой в момент времени  $\tau$  «прошла» сосредоточенная сила, перемещающаяся со сверхзвуковой скоростью, начинают проявляться не сразу, а после прохождения периода времени  $\Delta\tau = V - 1$ , что соответствует времени прохождения волной растяжения-сжатия расстояния между ее фронтом и фронтом движения нагрузки.

В точке расположения фронта нагрузки (при  $x = V\tau$ ) значение перемещений не определено. Здесь они претерпевают конечный скачок



$$w_0(x, \tau) \Big|_{x=V\tau-\varepsilon} - w_0(x, \tau) \Big|_{x=V\tau+\varepsilon} = \text{const},$$

где  $\varepsilon$  – малый положительный параметр.

Это следует из того, что при  $x=V\tau-\varepsilon$  перемещения определяются по формуле (2.22) *не зависимо от значения  $\varepsilon$* , а при  $x=V\tau+\varepsilon$ , как показано в предыдущем случае,  $w_0(x, \tau) = 0$ .

3. Поведение решения в точках наблюдения, находящихся в трансзвуковом диапазоне  $\tau/\eta < x < \tau$ .

В этом случае, как следует из (2.2), (2.9) и таблицы 2

$$w_0(x, \tau) = \sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad w_j(x, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{jl} I_{jl}(x, \tau; c_{jl}), \quad (2.23)$$

$$I_{1l}(x, \tau; c_{1l}) = \int_{-1}^{x/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-c_{1l}} dz, \quad I_{2l}(x, \tau; c_{2l}) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-c_{2l}} dz = \text{const}.$$

Как видно из представления (2.23), все интегралы  $I_{2l}$  ( $l = \overline{1,7}$ ) имеют постоянные, независимо от  $x$  и  $\tau$ , значения. С учетом (2.21) все интегралы, входящие в (2.23), имеют конечные значения при  $\tau/\eta < x < \tau$ . При этом интегралы  $I_{j2,3}$  – сингулярные и понимаются в смысле главного значения по Коши. С учетом утверждения 1 решение непрерывно зависит от верхнего предела интегрирования в  $I_{1l}$ , следовательно  $w_0(x, \tau)$  – непрерывна при  $\tau/\eta < x < \tau$ .

4. Поведение решения в точках наблюдения, находящихся в диапазоне  $|x| < \tau/\eta$ .

При этом

$$\begin{aligned}
 w_0(x, \tau) &= \sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad w_j(x, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{jl} I_{jl}(x, \tau; c_{jl}), \\
 I_{1l}(x, \tau; c_{1l}) &= \int_{-1}^{x/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-c_{1l}} dz, \quad I_{2l}(x, \tau; c_{2l}) = \int_{-1}^{\eta x/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-c_{2l}} dz.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Все интегралы в представлении (2.24) являются функциями своих верхних пределов. Покажем, что в точках наблюдения, совпадающих с фронтами волн Релея, нормальные перемещения имеют логарифмические особенности.

Пусть  $\varepsilon > 0$  – малый параметр. Исследуем поведение решения при  $x \rightarrow \pm c_R \tau$ . Пусть  $x = c_R \tau \pm \varepsilon$ , тогда

$$I_{j2}(x, \tau; \eta_j c_R) = \int_{-1}^{\eta_j(c_R \pm \varepsilon/\tau)} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - \eta_j c_R} dz = \int_{-1}^{\eta_j c_R \pm \varepsilon_1} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - \eta_j c_R} dz, \quad \varepsilon_1 = \eta_j \varepsilon/\tau.$$

Используя утверждение 3, имеем

$$I_{j2}(x, \tau; \eta_j c_R) \sim \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_j^2 c_R^2}} \ln \varepsilon_1 \quad (\varepsilon_1 \rightarrow 0).$$

Аналогично при  $x \rightarrow -c_R \tau \pm \varepsilon$

$$I_{j3}(x, \tau; -\eta_j c_R) \sim -\frac{1}{\sqrt{1 - \eta_j^2 c_R^2}} \ln \varepsilon_1 \quad (\varepsilon_1 \rightarrow 0).$$

Все остальные интегралы не доставляют особенностей в решение.

Вывод: в окрестности фронтов волн Рэлея на сверхзвуковом режиме нормальные перемещения имеют логарифмические особенности:

$$w_0(c_R \tau \pm \varepsilon, \tau) \sim \sum_{j=1}^2 \frac{a_{j2}}{\sqrt{1 - \eta_j^2 c_R^2}} \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

$$w_0(-c_R \tau \pm \varepsilon, \tau) \sim \sum_{j=1}^2 \frac{a_{j3}}{\sqrt{1 - \eta_j^2 c_R^2}} \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Исследуем еще поведение решения в окрестности фронта волн сдвига  $x \rightarrow \tau/\eta$ . Пусть  $x = \tau/\eta + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$  – малый параметр), тогда (см. предыдущий случай)

$$w_0(\tau/\eta + \varepsilon, \tau) = \sum_{j=1}^2 w_j(\tau/\eta + \varepsilon, \tau), \tag{2.25}$$

$$w_j(\tau/\eta + \varepsilon, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{jl} I_{jl}(\tau/\eta + \varepsilon, \tau; c_{jl}),$$

$$I_{1l}(\tau/\eta + \varepsilon, \tau; c_{1l}) = \int_{-1}^{1/\eta + \varepsilon/\tau} \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z - c_{1l}} dz,$$

$$I_{2l}(\tau/\eta + \varepsilon, \tau; c_{2l}) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z - c_{2l}} dz = \text{const.}$$

Пусть  $x = \tau/\eta - \varepsilon$ , тогда

$$w_0(\tau/\eta - \varepsilon, \tau) = \sum_{j=1}^2 w_j(\tau/\eta - \varepsilon, \tau), \tag{2.26}$$

$$w_j(\tau/\eta - \varepsilon, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{jl} I_{jl}(\tau/\eta - \varepsilon, \tau; c_{jl}),$$

$$I_{1l}(\tau/\eta - \varepsilon, \tau; c_{1l}) = \int_{-1}^{1/\eta - \varepsilon/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{1l}} dz,$$

$$I_{2l}(\tau/\eta - \varepsilon, \tau; c_{2l}) = \int_{-1}^{1 - \varepsilon/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{2l}} dz.$$

Из (2.25), (2.26) и принимая во внимание, что перемещения  $w_0(x, \tau)$  непрерывны при  $x \rightarrow \tau/\eta$  слева и справа, получаем

$$w_0(x, \tau) \Big|_{x=\tau/\eta-\varepsilon} - w_0(x, \tau) \Big|_{x=\tau/\eta+\varepsilon} \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.27)$$

Вывод: в окрестности фронта волн сдвига  $x = \tau/\eta$  на сверхзвуковом режиме нормальные перемещения непрерывны.

5. Поведение решения в точках наблюдения, находящихся в диапазоне  $-\tau < x < -\tau/\eta$ .

Здесь справедливо выражение

$$w_0(x, \tau) = w_1(x, \tau), \quad w_1(x, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{1l} I_{1l}(x, \tau; c_{1l}), \quad (2.28)$$

$$I_{1l}(x, \tau; c_{1l}) = \int_{-1}^{x/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{1l}} dz,$$

где все интегралы  $I_{1l}$  – непрерывные функции своих верхних пределов. Следовательно  $w_0(x, \tau)$  – непрерывна при  $-\tau < x < -\tau/\eta$ .

Исследуем поведение решения в окрестности фронта волн сдвига при  $x \rightarrow -\tau/\eta$ . Положим  $x = -\tau/\eta - \varepsilon$ , тогда

$$\begin{aligned}
w_0(-\tau/\eta - \varepsilon, \tau) &= w_1(-\tau/\eta - \varepsilon, \tau), \\
w_1(-\tau/\eta - \varepsilon, \tau) &= \sum_{l=1}^7 a_{1l} I_{1l}(-\tau/\eta - \varepsilon, \tau; c_{1l}), \\
I_{1l}(-\tau/\eta - \varepsilon, \tau; c_{1l}) &= \int_{-1}^{-1/\eta - \varepsilon/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{1l}} dz.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

При  $x = -\tau/\eta + \varepsilon$  как следует из предыдущего пункта

$$\begin{aligned}
w_0(-\tau/\eta - \varepsilon, \tau) &= \sum_{j=1}^2 w_j(-\tau/\eta - \varepsilon, \tau), \\
w_j(-\tau/\eta - \varepsilon, \tau) &= \sum_{l=1}^7 a_{jl} I_{jl}(-\tau/\eta - \varepsilon, \tau; c_{jl}), \\
I_{1l}(\tau/\eta - \varepsilon, \tau; c_{1l}) &= \int_{-1}^{-1/\eta - \varepsilon/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{1l}} dz, \\
I_{2l}(\tau/\eta - \varepsilon, \tau; c_{2l}) &= \int_{-1}^{-1/\eta - \varepsilon/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{2l}} dz.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Из (2.29), (2.30) и принимая во внимание, что перемещения  $w_0(x, \tau)$  остаются непрерывными при  $x \rightarrow -\tau/\eta$  слева и справа, получаем

$$w_0(x, \tau) \Big|_{x=-\tau/\eta-\varepsilon} - w_0(x, \tau) \Big|_{x=-\tau/\eta+\varepsilon} \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0. \tag{2.31}$$

*Вывод: в окрестности фронта волн сдвига  $x = -\tau/\eta$  на сверхзвуковом режиме нормальные перемещения непрерывны.*

6. Поведение решения в точках наблюдения при  $x < -\tau$ .

В этом случае, также, как и в случае 1, носители всех подынтегральных функций в выражении (2.9) – пустые множества, следовательно

$$w_0(x, \tau) = 0 \quad \text{при } x < \tau. \quad (2.32)$$

Кроме того, учитывая непрерывность  $w_0(x, \tau)$  при  $x < -\tau + 0$ , получаем

$$w_0(x, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } x < -\tau + 0. \quad (2.33)$$

## §2.4 Трансзвуковой режим движения

Аналогично предыдущему параграфу исследуем характерные особенности нормальных перемещений границы полуплоскости при движении нагрузки с трансзвуковой скоростью:  $1/\eta < V < 1$ . Зафиксируем произвольный момент времени  $\tau$  и проведем анализ решения во всех точках границы полуплоскости.

1. При  $|x| > \tau$  носители всех подынтегральных функций в выражении (2.9) – пустые множества, следовательно

$$w_0(x, \tau) = 0 \quad \text{при} \quad |x| > \tau. \quad (2.34)$$

Механический смысл полученного результата состоит в следующем: *при движении нагрузки с трансзвуковой скоростью в точках наблюдения, расположенных перед передним и за задним фронтом волн растяжения-сжатия возмущения отсутствуют, т.к. скорость распространения возмущений в полуплоскости не превышает скорость этих волн.*

2. При  $V\tau < x < \tau$ , имеем

$$w_0(x, \tau) = -w_1(x, \tau), \quad w_1(x, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{1l} I_{1l}(x, \tau; c_{1l}), \quad (2.35)$$
$$I_{1l}(x, \tau; c_{1l}) = \int_{x/\tau}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{1l}} dz,$$

где все интегралы регулярные.

Из (2.35) следует, что

$$w_0(x, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \tau - 0. \quad (2.36)$$

3. При  $\tau/\eta < x < V\tau$  получаем

$$w_0(x, \tau) = \sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad w_j(x, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{jl} I_{jl}(x, \tau; c_{jl}), \quad (2.37)$$

$$I_{1l}(x, \tau; c_{1l}) = \int_{-1}^{x/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{1l}} dz, \quad I_{2l}(x, \tau; c_{2l}) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{2l}} dz.$$

В представлении (2.37) все интегралы регулярные.

Исследуем поведение решения в окрестности фронта движения нагрузки  $x = V\tau$ . Положим  $x = V\tau - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$  – малый параметр) с учетом (2.37) и утверждения 3 находим

$$I_{j1}(V\tau - \varepsilon, \tau; V) = \int_{-1}^{\eta_j V - \varepsilon/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - \eta_j V} dz \sim \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_j^2 V^2}} \ln \frac{\eta_j \varepsilon}{\tau} \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (2.38)$$

При  $x = V\tau + \varepsilon$  из (2.35) и утверждения 3 имеем

$$I_{j1}(V\tau + \varepsilon, \tau; V) = \int_{\eta_j(V + \varepsilon/\tau)}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - \eta_j V} dz \sim -\frac{1}{\sqrt{1 - \eta_j^2 V^2}} \ln \frac{\eta_j \varepsilon}{\tau} \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (2.39)$$

Из (2.35) – (2.39) следует

$$w_0(V\tau \pm \varepsilon, \tau) \sim \sum_{j=1}^2 \frac{a_{j1}}{\sqrt{1 - \eta_j^2 V^2}} \ln \frac{\eta_j \varepsilon}{\tau} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.40)$$



Таким образом, на фронте движения нагрузки при трансзвуковой скорости имеется логарифмическая особенность.

4. При  $|x| < \tau/\eta$  находим

$$w_0(x, \tau) = \sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad w_j(x, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{jl} I_{jl}(x, \tau; c_{jl}),$$

$$I_{1l}(x, \tau; c_{1l}) = \int_{-1}^{x/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-c_{1l}} dz, \quad I_{2l}(x, \tau; c_{2l}) = \int_{-1}^{\eta x/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-c_{2l}} dz. \quad (2.41)$$

Заметим, что формулы (2.35) и (2.41) совпадают с (2.23) и (2.24), поэтому решение будет обладать теми же особенностями, что и при сверхзвуковом режиме движения.

Аналогично анализу, проведенному в предыдущем параграфе, можно показать, что в окрестности фронтов волн Рэлея при трансзвуковом режиме нормальные перемещения имеют логарифмические особенности:

$$w_0(c_R \tau \pm \varepsilon, \tau) \sim \sum_{j=1}^2 \frac{a_{j2}}{\sqrt{1-\eta_j^2 c_R^2}} \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

$$w_0(-c_R \tau \pm \varepsilon, \tau) \sim \sum_{j=1}^2 \frac{a_{j3}}{\sqrt{1-\eta_j^2 c_R^2}} \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

А также, что в окрестности фронта волн сдвига нормальные перемещения непрерывны:

$$w_0(x, \tau) \Big|_{x=-\tau/\eta-\varepsilon} - w_0(x, \tau) \Big|_{x=-\tau/\eta+\varepsilon} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

5. При  $-\tau < x < -\tau/\eta$  аналогично (2.28), получаем

$$w_0(x, \tau) = w_1(x, \tau), \quad w_1(x, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{1l} I_{1l}(x, \tau; c_{1l}), \quad (2.42)$$

$$I_{1l}(x, \tau; c_{1l}) = \int_{-1}^{x/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{1l}} dz.$$

Из (2.34) и (2.42) следует, что

$$w_0(-\tau \pm \varepsilon, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.43)$$

## §2.5 Дозвуковой режим движения

Аналогично §2.3 и §2.4 при дозвуковом режиме движения нагрузки получаем следующие представления решения.

1. При  $|x| > \tau$  носители всех подынтегральных функций в выражении (2.9) – пустые множества, следовательно

$$w_0(x, \tau) = 0 \quad \text{при} \quad |x| > \tau. \quad (2.44)$$

Механический смысл полученного результата состоит в следующем: *при движении нагрузки с дозвуковой скоростью в точках наблюдения, расположенных перед передним и за задним фронтом волн растяжения-сжатия возмущения отсутствуют, т.к. скорость распространения возмущений в полуплоскости не превышает скорость этих волн.*

2. При  $\tau/\eta < x < \tau$

$$w_0(x, \tau) = -w_1(x, \tau), \quad w_1(x, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{1l} I_{1l}(x, \tau; c_{1l}), \quad (2.45)$$
$$I_{1l}(x, \tau; c_{1l}) = \int_{x/\tau}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{1l}} dz,$$

где все интегралы регулярные.

Аналогично предыдущему параграфу из (2.45) следует, что

$$w_0(x, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \tau - 0. \quad (2.46)$$

3. При  $V\tau < x < \tau/\eta$

$$w_0(x, \tau) = -\sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad w_j(x, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{jl} I_{jl}(x, \tau; c_{jl}),$$

$$I_{1l}(x, \tau; c_{1l}) = \int_{x/\tau}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-c_{1l}} dz, \quad I_{2l}(x, \tau; c_{2l}) = \int_{\eta x/\tau}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-c_{2l}} dz. \quad (2.47)$$

При этом, в случае превышения значения скорости движения нагрузки скорости волн Рэлея  $V > c_R$  все интегралы в (2.47) регулярные. В противном случае  $I_{j2,3}$  – сингулярные и понимаются в смысле главного значения.

4. При  $-\tau/\eta < x < V\tau$  находим

$$w_0(x, \tau) = \sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad w_j(x, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{jl} I_{jl}(x, \tau; c_{jl}),$$

$$I_{1l}(x, \tau; c_{1l}) = \int_{-1}^{x/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-c_{1l}} dz, \quad I_{2l}(x, \tau; c_{2l}) = \int_{-1}^{\eta x/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-c_{2l}} dz. \quad (2.48)$$

Исследуем поведение решения в окрестности фронта движения нагрузки  $x = V\tau$ . Положим  $x = V\tau - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$  – малый параметр) с учетом (2.48) и утверждения 3 находим

$$I_{j1}(V\tau - \varepsilon, \tau; V) = \int_{-1}^{\eta_j(V-\varepsilon/\tau)} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-\eta_j V} dz \sim \frac{1}{\sqrt{1-\eta_j^2 V^2}} \ln \frac{\eta_j \varepsilon}{\tau} \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (2.49)$$

При  $x = V\tau + \varepsilon$  из (2.47) и утверждения 3 имеем

$$I_{j1}(V\tau + \varepsilon, \tau; V) = \int_{\eta_j(V+\varepsilon/\tau)}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - \eta_j V} dz \sim -\frac{1}{\sqrt{1-\eta_j^2 V^2}} \ln \frac{\eta_j \varepsilon}{\tau} \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (2.50)$$

Из (2.47) – (2.50) следует

$$w_0(V\tau \pm \varepsilon, \tau) \sim \pm \sum_{j=1}^2 \frac{a_{j1}}{\sqrt{1-\eta_j^2 V^2}} \ln \frac{\eta_j \varepsilon}{\tau} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.51)$$

Таким образом, на фронте движения нагрузки при дозвуковом режиме движения имеется логарифмическая особенность.

Аналогично анализу, проведенному в §2.3 и §2.4, можно показать, что в окрестности фронтов волн Рэлея при дозвуковом режиме нормальные перемещения имеют логарифмические особенности:

$$w_0(\pm c_R \tau \pm \varepsilon, \tau) \sim \pm \frac{1}{\sqrt{1-\eta_j^2 c_R^2}} \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

А также, что в окрестности фронта волн сдвига нормальные перемещения непрерывны:

$$w_0(x, \tau) \Big|_{x=-\tau/\eta-\varepsilon} - w_0(x, \tau) \Big|_{x=-\tau/\eta+\varepsilon} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

5. При  $-\tau < x < -\tau/\eta$  аналогично (2.28) и (2.42), получаем

$$w_0(x, \tau) = w_1(x, \tau), \quad w_1(x, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{1l} I_{1l}(x, \tau; c_{1l}), \quad (2.52)$$

$$I_{1l}(x, \tau; c_{1l}) = \int_{-1}^{x/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{1l}} dz.$$

Из (2.44) и (2.52) следует, что

$$w_0(-\tau \pm \varepsilon, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.53)$$

## §2.5 Критические режимы движения

Здесь проведем исследование нормальных перемещений границы полуплоскости при движении нагрузки со скоростями волн растяжения-сжатия, сдвига и Рэлея.

1. Движение нагрузки со скоростью волн растяжения-сжатия  $V = 1$ .

Положим  $V = 1 + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$  – малый параметр). При этом для нормальных перемещений справедливы формулы (2.20) – (2.33). При  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение дается представлениями (2.20), (2.23), (2.24), (2.28) и (2.32).

В случае  $V = 1 - \varepsilon$  справедливы формулы трансзвукового режима (2.34) – (2.43). При  $\varepsilon \rightarrow 0$  остаются справедливыми представления (2.34), (2.37), (2.41), (2.42) и (2.43), которые, очевидно, совпадают с формулами (2.20), (2.23), (2.24), (2.28) и (2.32).

Таким образом, при  $V = 1$  решение описывается представлениями (2.34), (2.37), (2.41), (2.42), (2.43), справедливыми при трансзвуковом движении, или (2.20), (2.23), (2.24), (2.28), (2.32), справедливыми при сверхзвуковом движении.

Особенности решения в окрестности фронтов волн Рэлея наследуют особенности сверхзвукового и трансзвукового режима движения: *на фронтах волн Рэлея имеется логарифмическая особенность.*

Исследуем поведение решения в окрестности фронта движения нагрузки. Ясно, что в случае  $V = 1$  при  $x > V\tau = \tau$   $w_0(x, \tau) = 0$  вследствие того, что носители подынтегральных функций в (1.25) пустые множества. Положим  $V = 1$ ,  $x = \tau - \varepsilon$ , тогда справедливо представление

$$w_0(x, \tau) = \sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad w_j(x, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{jl} I_{jl}(x, \tau; c_{jl}), \quad (2.54)$$

$$I_{1l}(x, \tau; c_{1l}) = \int_{-1}^{x/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-c_{1l}} dz, \quad I_{2l}(x, \tau; c_{2l}) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-c_{2l}} dz = \text{const},$$

в котором все интегралы регулярные, кроме  $I_{1l}$ , который при  $\varepsilon \rightarrow 0$  переходит в несобственный интеграл имеющий конечное предельное значение:

$$I_{11}(\tau - \varepsilon, \tau; c_{11}) = \int_{-1}^{1-\varepsilon/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z-1} dz = - \int_{-\pi/2}^{\arcsin(1-\varepsilon/\tau)} (1 + \sin u) du = \quad (2.55)$$

$$= \pi/2 + \arcsin(1 - \varepsilon/\tau) + \sqrt{1 - (1 - \varepsilon/\tau)^2} \rightarrow \pi \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Следовательно, на фронте движения нагрузки при  $V = 1$  имеется конечный скачок.

2. Движение нагрузки со скоростью волн сдвига  $V = 1/\eta$ .

Здесь аналогично предыдущему случаю на фронтах волн Рэлея имеется логарифмическая особенность:

$$w_0(c_R \tau \pm \varepsilon, \tau) \sim \sum_{j=1}^2 \frac{a_{j2}}{\sqrt{1 - \eta_j^2 c_R^2}} \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

$$w_0(-c_R \tau \pm \varepsilon, \tau) \sim \sum_{j=1}^2 \frac{a_{j3}}{\sqrt{1 - \eta_j^2 c_R^2}} \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$



Положим  $V = 1/\eta$  и исследуем поведение решения в окрестности положения фронта волны сдвига  $x = V\tau = \tau/\eta$ . Перед фронтом движения нагрузки при  $x = \tau/\eta + \varepsilon$  имеем

$$w_0(\tau/\eta + \varepsilon, \tau) = -w_1(\varepsilon, \tau), \quad w_1(\varepsilon, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{jl} I_{jl}(\varepsilon, \tau; c_{jl}),$$

$$I_{1l}(\varepsilon, \tau; c_{1l}) = \int_{1/\eta + \varepsilon/\tau}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{1l}} dz,$$

где все интегралы регулярные, кроме

$$I_{11}(\varepsilon, \tau; c_{11}) = \int_{1/\eta + \varepsilon/\tau}^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - 1/\eta} dz \sim -\frac{1}{\sqrt{1-\eta^{-2}}} \ln \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

Следовательно,

$$w_0(\tau/\eta + \varepsilon, \tau) \sim \frac{1}{\sqrt{1-\eta^{-2}}} \ln \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.56)$$

За фронтом движения нагрузки при  $x = \tau/\eta - \varepsilon$ , получаем

$$w_0(\tau/\eta - \varepsilon, \tau) = \sum_{j=1}^2 w_j(\varepsilon, \tau), \quad w_j(\varepsilon, \tau) = \sum_{l=1}^7 a_{jl} I_{jl}(\varepsilon, \tau; c_{jl}),$$

$$I_{1l}(\varepsilon, \tau; c_{1l}) = \int_{-1}^{1/\eta - \varepsilon/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{1l}} dz, \quad I_{2l}(\varepsilon, \tau; c_{2l}) = \int_{-1}^{1-\eta\varepsilon/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{2l}} dz. \quad (2.57)$$

Здесь все интегралы регулярные, кроме

$$I_{11}(\varepsilon, \tau; c_{11}) = \int_{-1}^{1/\eta - \varepsilon/\tau} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - 1/\eta} dz \sim \frac{1}{\sqrt{1-\eta^{-2}}} \ln \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$w_0(\tau/\eta - \varepsilon, \tau) \sim \frac{1}{\sqrt{1-\eta^{-2}}} \ln \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.58)$$

Из (2.56) и (2.58) имеем

$$w_0(\tau/\eta \pm \varepsilon, \tau) \sim \frac{a_{11}}{\sqrt{1-\eta^{-2}}} \ln \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.59)$$

3. Движение нагрузки со скоростью волн Рэлея  $V = c_R$ .

В этом случае разложение (2.8) не справедливо, поскольку подынтегральная функция в (2.7) при  $y = c_R$  имеет полюс второго порядка.

Для получения расчетных формул применим метод, изложенный в §2.1.

Положим в (2.2)  $V = c_R$ , тогда

$$w_0(x, \tau) = -\sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad (2.60)$$

$$w_j(x, \tau) = \int_{\tau_{j1}}^{\tau_{j2}} G_j(x - c_R t, \tau - t) dt.$$

Пределы интегрирования  $\tau_{j1}$  и  $\tau_{j2}$  определим графоаналитическим способом (рис. 4).

Заметим, что при  $|x| > \tau$  перемещения отсутствуют:

$$w_0(x, \tau) = 0 \quad \text{при } |x| > \tau. \quad (2.61)$$

При  $|x| < \tau$  нижние пределы  $\tau_{j1}$  в (2.60) во всех случаях равны нулю:

$$\tau_{j1} = 0 \quad \text{при} \quad |x| < \tau. \quad (2.62)$$

Верхние пределы  $\tau_{j2}$  определяются из условия пересечения прямой  $\xi = x - c_R t$  и прямыми  $\xi = \pm(\tau - t)$  при  $j = 1$  и  $\xi = \pm(\tau - t)/\eta$  при  $j = 2$ :

$$\tau_{12} = \frac{\pm\tau - x}{\pm 1 - c_R}, \quad \tau_{22} = \frac{\pm\tau - \eta x}{\pm 1 - \eta c_R} \quad (2.63)$$

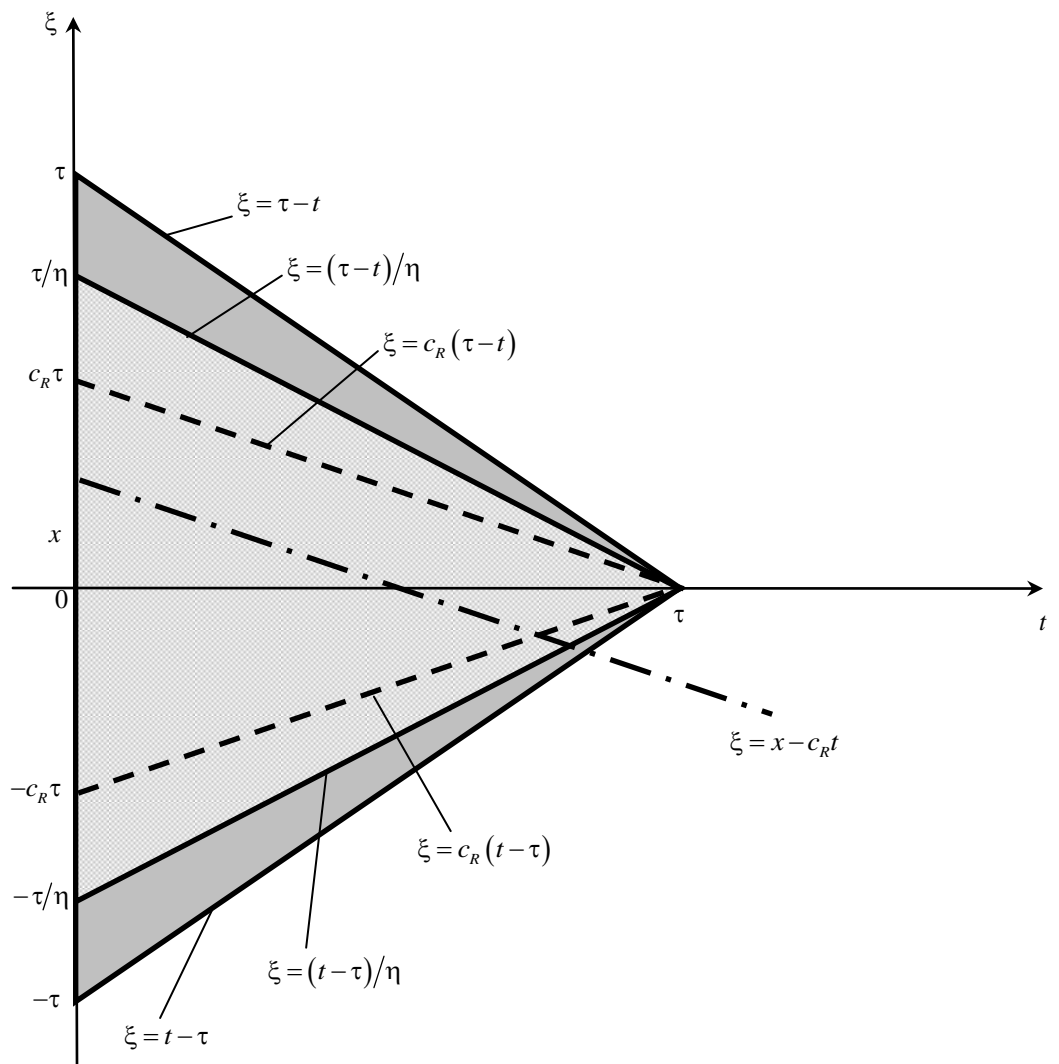


Рис. 4.

Сделаем замену переменной

$$y = \frac{x - c_R t}{\tau - t}. \quad (2.64)$$

Тогда выражения для  $w_j(x, \tau)$  из (2.60) с учетом (2.64) преобразуются к виду

$$w_j(x, \tau) = \int_{y_{j1}}^{y_{j2}} \hat{G}_j(y) \sqrt{1 - \eta_j^2 y^2} dy,$$

$$\hat{G}_j(y) = \frac{G_j(y, 1)}{(y - c_R) \sqrt{1 - \eta_j^2 y^2}} = \frac{1}{\pi \eta^4} \frac{g_j(y^2, 1)}{(y - c_R)^2 (y + c_R) Q_2(y) Q_2(-y)}, \quad (2.65)$$

$$Q_2(y) = y^2 + \gamma y + \beta = (y + c)(y + \bar{c}), \quad Q_2(-y) = (y - c)(y - \bar{c}),$$

$$\gamma = \sqrt{2(\alpha^2 + \beta)}, \quad c = \frac{\gamma + i\sqrt{2(\beta - \alpha^2)}}{2}.$$

Разложим функцию  $\hat{G}_j(y)$  в сумму простых дробей:

$$\hat{G}_j(y) = \frac{\hat{a}_{j1}}{(y - c_R)^2} + \frac{\hat{a}_{j2}}{y - c_R} + \sum_{l=3}^7 \frac{\hat{a}_{jl}}{y - b_l},$$

$$b_3 = -c_R, \quad b_4 = c, \quad b_5 = \bar{c}, \quad b_6 = -c, \quad b_7 = -\bar{c},$$

$$\hat{a}_{j1} = \frac{1}{\pi \eta^4} \frac{g_j(c_R^2, 1)}{\prod_{\substack{r=3 \\ r \neq l}}^7 (b_l - b_r)}, \quad \hat{a}_{j2} = \frac{1}{\pi \eta^4} \frac{d}{dz} \frac{g_j(y^2, 1)}{(y + c_R) Q_2(y) Q_2(-y)} \Big|_{y=c_R}, \quad (2.66)$$

$$\hat{a}_{jl} = \frac{1}{\pi \eta^4} \frac{g_j(b_l^2, 1)}{(b_l - c_R)^2 \prod_{\substack{r=3 \\ r \neq l}}^7 (b_l - b_r)}, \quad l = \overline{3, 7}.$$

Тогда с учетом замены переменной  $z = \eta_j y$ , получаем

$$w_j(x, \tau) = \eta_j \hat{a}_{j1} \hat{I}_{j1}(x, \tau; c_R) + \sum_{l=2}^7 \hat{a}_{jl} \hat{I}_{jl}(x, \tau; c_{jl}),$$

$$\hat{I}_{j1}(x, \tau; c_R) = \int_{z_{j1}}^{z_{j2}} \frac{\sqrt{1-z^2}}{(z - \eta_j c_R)^2} dz, \quad (2.67)$$

$$\hat{I}_{jl}(x, \tau; c_{jl}) = \int_{z_{j1}}^{z_{j2}} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z - c_{jl}} dz, \quad c_{j2} = \eta_j c_R, \quad c_{jl} = \eta_j b_l \quad (l = 2, 7).$$

Как видно, представление (2.67) отличается от (2.9) тем, что интеграл  $\hat{I}_{j1}$  обладает сильной сингулярной особенностью, порядка  $-2$  и не существует даже в смысле главного значения по Коши. Строгое обоснование действий с расходящимися интегралами дано в теории обобщенных функций [87, 88]. Дадим интерпретацию интеграла  $\hat{I}_{j1}$  с точки зрения обобщенных функций и тем самым определим его регуляризацию.

Рассмотрим интегралы

$$I_1(a, b, c) = \int_a^b \frac{1}{z - c} dz, \quad I_2(a, b, c) = \int_a^b \frac{1}{(z - c)^2} dz, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad c \in (a, b). \quad (2.68)$$

Выберем в качестве основной функции бесконечно дифференцируемую на  $\mathbb{R}$  функцию  $\varphi(z)$ , тождественно равную единице при  $z \in [a, b]$  и продолженную произвольным образом в область  $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ . Заметим, что функции  $f_1(z) = (z - c)^{-1}$ ,  $f_2(z) = (z - c)^{-2}$  можно представить в виде  $f_1(z) = \frac{d}{dz} \ln|z - c|$ ,  $f_2(z) = -\frac{d^2}{dz^2} \ln|z - c|$ . Рассмотрим скалярные произведения

$$(f_1, \varphi) = \int_R f(z) \varphi(z) dz = \int_R \frac{d}{dz} \ln|z-c| \varphi(z) dz.$$

$$(f_2, \varphi) = \int_R f(z) \varphi(z) dz = - \int_R \frac{d^2}{dz^2} \ln|z-c| \varphi(z) dz.$$

Интегрируя их по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_R \frac{d}{dz} \ln|z-c| \varphi(z) dz &= - \int_R \ln|z-c| \varphi'(z) dz = - \int_{R \setminus [a,b]} \ln|z-c| \varphi'(z) dz, \\ - \int_R \frac{d^2}{dz^2} \ln|z-c| \varphi(z) dz &= \int_R \ln|z-c| \varphi''(z) dz = \int_{R \setminus [a,b]} \ln|z-c| \varphi''(z) dz, \end{aligned} \quad (2.69)$$

поскольку  $\varphi''(z) = \varphi'(z) \equiv 0$  при  $z \in [a, b]$ . Возьмем последние интегралы справа и выполним интегрирование по частям в обратном порядке:

$$\begin{aligned} - \int_{R \setminus [a,b]} \ln|z-c| \varphi'(z) dz &= \int_{R \setminus [a,b]} \frac{\varphi(z)}{z-c} dz - \ln|z-c| \Big|_a^b, \\ \int_{R \setminus [a,b]} \ln|z-c| \varphi''(z) dz &= - \int_{R \setminus [a,b]} \frac{d^2}{dz^2} \ln|z-c| \varphi(z) dz - \frac{1}{z-c} \Big|_a^b. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Поскольку

$$\int_a^b f_k(z) \varphi(z) dz = \int_a^b f_k(z) dz = \int_R f_k(z) \varphi(z) dz - \int_{R \setminus [a,b]} f_k(z) \varphi(z) dz, \quad (k=1,2),$$

из (2.69) и (2.70) получаем

$$\int_a^b f_1(z) dz = I_1(a, b, c) = \ln|z - c| \Big|_a^b = \ln \frac{b-c}{c-a},$$

$$\int_a^b f_2(z) dz = I_2(a, b, c) = -\frac{1}{z-c} \Big|_a^b = \frac{1}{a-c} - \frac{1}{b-c}.$$
(2.71)

Представим  $\sqrt{1-z^2}$  рядом Тейлора в окрестности точки  $z_0 = \eta_j c_R$ :

$$\sqrt{1-z^2} = g_{js}(z) + O\left[(z - \eta_j c_R)^2\right],$$

$$g_{js}(z) = a_{sj,1} - a_{sj,2}(z - \eta_j c_R),$$

$$a_{sj,1} = (1 - \eta_j^2 c_R^2)^{1/2}, \quad a_{sj,2} = \eta_j c_R (1 - \eta_j^2 c_R^2)^{-1/2}.$$

С целью получения регуляризованных значений интегралов  $\hat{I}_{j1}$  представим их в виде суммы регулярного  $\hat{I}_{j1,r}$  и сингулярного  $\hat{I}_{j1,s}$  слагаемых:

$$\hat{I}_{j1}(x, \tau; c_R) = \hat{I}_{j1,r}(x, \tau; c_R) + \hat{I}_{j1,s}(x, \tau; c_R),$$

$$\hat{I}_{j1,r}(x, \tau; c_R) = \int_{z_{j1}}^{z_{j2}} \frac{\sqrt{1-z^2} - g_{js}(z)}{(z - \eta_j c_R)^2} dz,$$
(2.72)

$$\hat{I}_{j1,s}(x, \tau; c_R) = a_{js,1} I_2(z_{j1}, z_{j2}, \eta_j c_R) - a_{js,2} I_1(z_{j1}, z_{j2}, \eta_j c_R).$$

При этом регулярные интегралы существуют в обычном смысле, а сингулярные понимаются в смысле регуляризованных значений (2.71).

Теперь проведем анализ решения при  $V = c_R$ .

При  $|x| > \tau$ , как отмечено выше,  $w_0(x, \tau) = 0$ .

При  $|x| \leq \tau$  решение дается формулой (2.67) с учетом (2.72). При этом в случае  $|x| > c_R \tau$  все интегралы в (2.67) регулярные, вследствие чего перемещения  $w_0(x, \tau)$  непрерывны.

При  $x = -c_R \tau \pm \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$  – малый параметр) особенность в решение доставляется интегралами  $\hat{I}_{j3}$  и на основании утверждения 3 имеет логарифмический характер:

$$w_0(-c_R \tau \pm \varepsilon, \tau) \sim \sum_{j=1}^2 \frac{\hat{a}_{j3}}{\sqrt{1 - \eta_j^2 c_R^2}} \ln \varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (2.73)$$

При  $x = c_R \tau \pm \varepsilon$  особенности доставляются интегралами  $\hat{I}_{j1}$  и  $\hat{I}_{j2}$ . При этом в решении имеются как логарифмическая, так и степенная особенности:

$$w_0(c_R \tau \pm \varepsilon, \tau) \sim \sum_{j=1}^2 \frac{\hat{a}_{j2} - a_{js,2}}{\sqrt{1 - \eta_j^2 c_R^2}} \ln \varepsilon \mp \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^2 \frac{\hat{a}_{j1}}{\sqrt{1 - \eta_j^2 c_R^2}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

## §2.6 Примеры расчетов

На рис. 5 – 8 изображены распределения нормальных перемещений границы полупространства при различных скоростных режимах движения нагрузки. В качестве материала полупространства принята сталь с безразмерными параметром:  $\eta = 1.87$ . При этом скорость волны Рэлея равна  $c_R = 0.496$  [57], а скорость волны сдвига  $1/\eta = 0.535$ .



Рис. 5 иллюстрирует распределения нормальных перемещений  $w_0(x, \tau)$  при сверхскоростном режиме движения нагрузки в момент времени  $\tau = 1$ . Сплошная кривая соответствует значению скорости  $V = 1.5$ , штриховая –  $V = 2$ , штриховая пунктирная –  $V = 3$ . Штриховые асимптоты соответствуют положению фронта движения нагрузки (длинный штрих) и фронтам волны Рэлея (короткий штрих). Штриховые пунктирные асимптоты соответствуют положению фронтов волны сдвига. На фронте движения нагрузки имеется разрыв первого рода, а на фронтах волны Рэлея – логарифмические особенности.

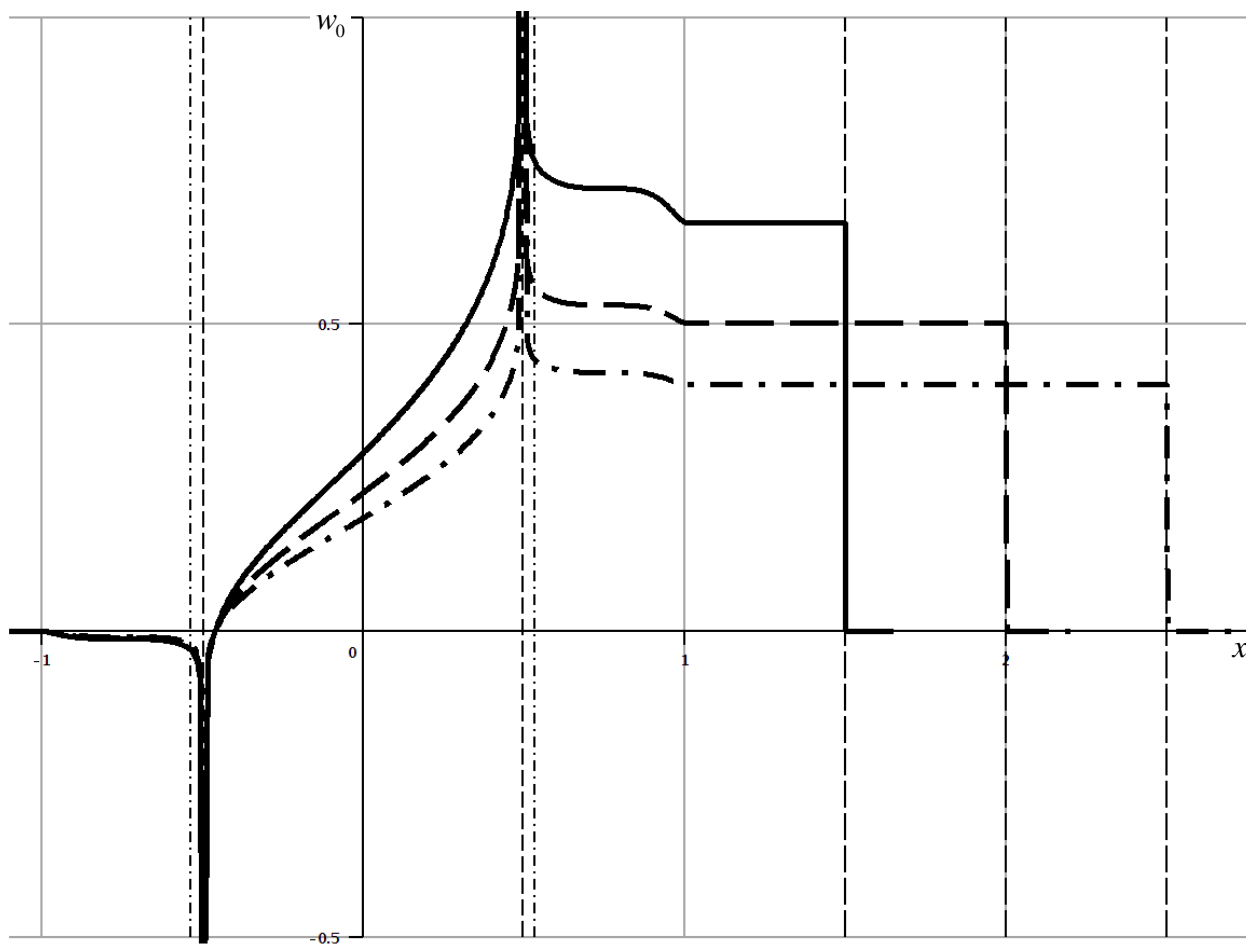


Рис. 5. Распределение нормальных перемещений при  $V > 1$

На рис. 6 представлены распределения нормальных перемещений  $w_0(x,1)$  при трансзвуковом режиме движения. Сплошная кривая соответствует значению скорости  $V = 1/\eta + 0.3(\eta - 1)/\eta$ , штриховая –  $V = 1/\eta + 0.6(\eta - 1)/\eta$ , штриховая пунктирная –  $V = 1/\eta + 0.8(\eta - 1)/\eta$ . Здесь, как и ранее, штриховые асимптоты соответствуют положению фронта движения нагрузки (длинный штрих) и фронтам волны Рэлея (короткий штрих). Штриховые пунктирные асимптоты соответствуют положению фронтов волны сдвига. На фронте движения нагрузки и на фронтах волны Рэлея имеются логарифмические особенности.

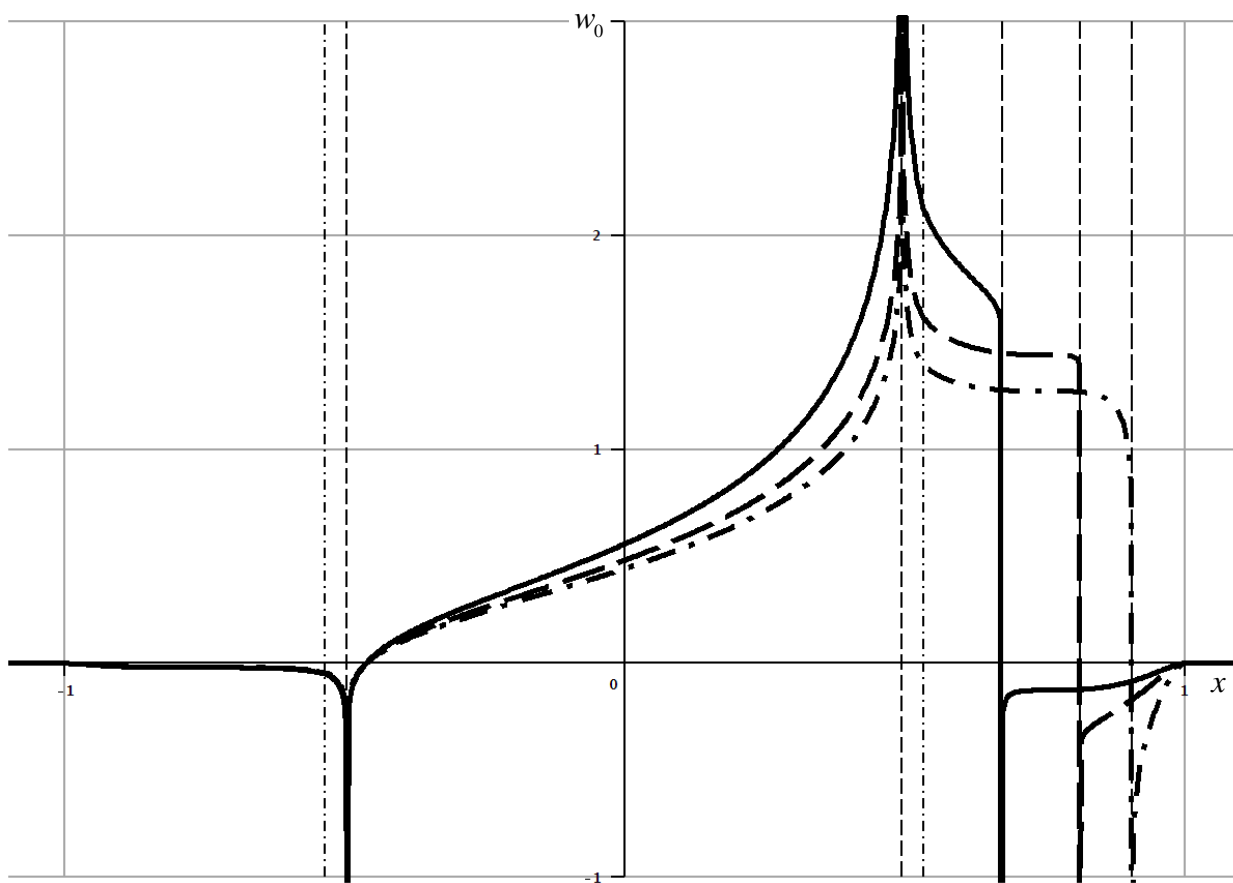


Рис. 6. Распределение нормальных перемещений при  $1/\eta < V < 1$

На рис. 7 представлены распределения нормальных перемещений  $w_0(x, \tau)$  при  $\tau = 1$ , соответствующие дозвуковому режиму движения. Сплошная кривая соответствует значению скорости  $V = 0.3/\eta$ , штриховая –  $V = 0.6/\eta$ , штриховая пунктирная –  $V = 0.8/\eta$ . Здесь, как и ранее, штриховые асимптоты соответствуют положению фронта движения нагрузки (длинный штрих) и фронтам волны Рэлея (короткий штрих). Штриховые пунктирные асимптоты соответствуют положению фронтов волны сдвига. На фронте движения нагрузки и на фронтах волны Рэлея имеются логарифмические особенности. На фронтах волн растяжения-сжатия перемещения непрерывны.

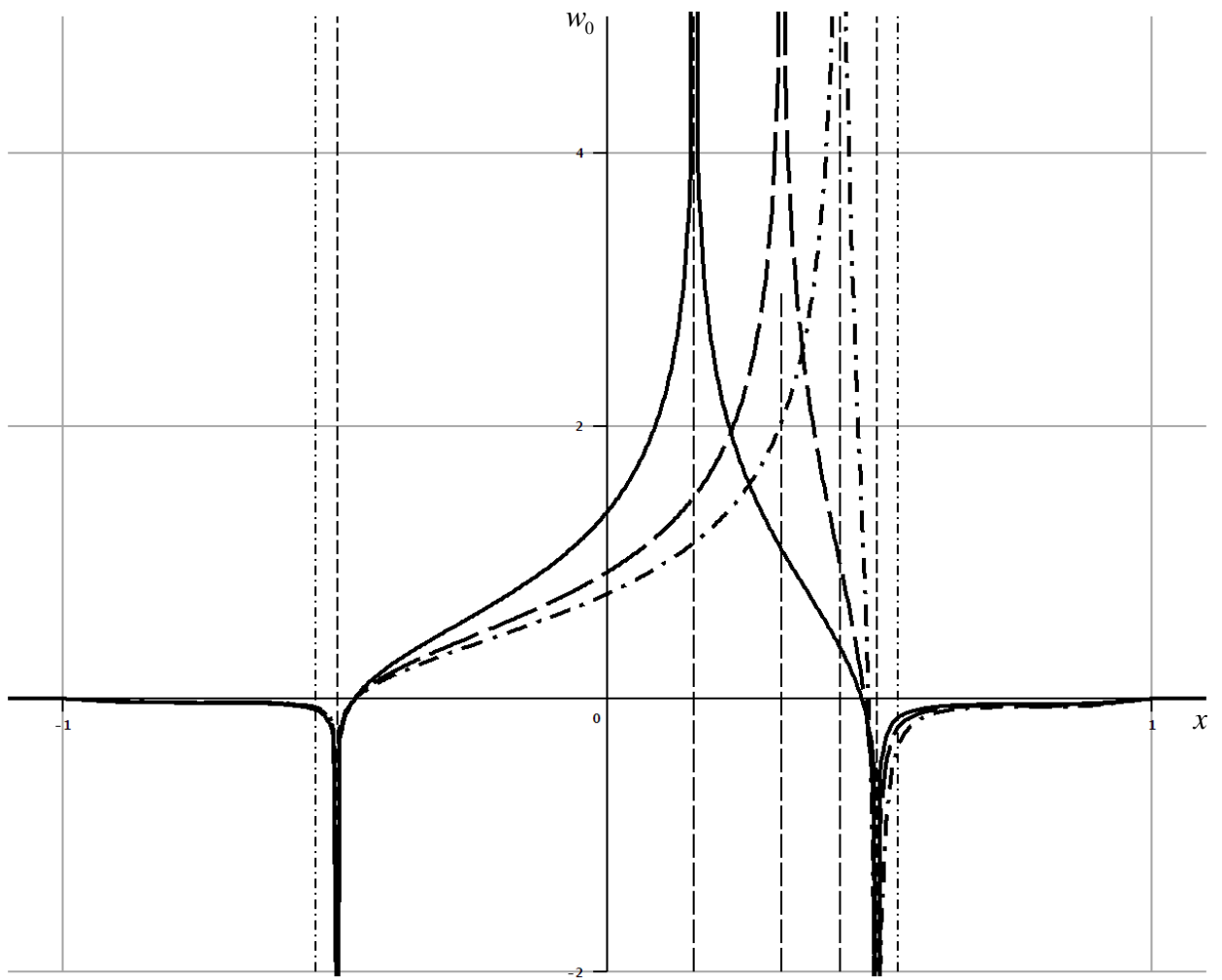


Рис. 7. Распределение нормальных перемещений при  $V < 1/\eta$

## ГЛАВА 3. ДВИЖЕНИЕ НАГРУЗКИ ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ ЗАКОНУ

### §3.1 Метод и алгоритм решения

Рассмотрим движение нагрузки по произвольному закону  $f(\tau)$ . На функцию  $f(\tau)$  наложим лишь требование непрерывности по переменной  $\tau$ .

Закон движения  $f(\tau)$  приближенно представим интерполяцией линейными функциями на временном интервале  $t \in [t_{k-1}, t_k]$  следующим образом:

$$\begin{aligned} f(t) &\approx f_{k-1} + V_k(t - t_{k-1}), \quad t \in [t_{k-1}, t_k]; \\ f_{k-1} &= f(t_{k-1}), \quad V_k = \frac{\Delta f_k}{t_k - t_{k-1}}, \\ \Delta f_k &= f_k - f_{k-1}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

А на всем временном промежутке  $t \in [0, \tau]$  (рис. 8):

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^n (f_{k-1} + V_k(t - t_{k-1})) H(t - t_{k-1}) H(t_k - t) \tag{3.2}$$

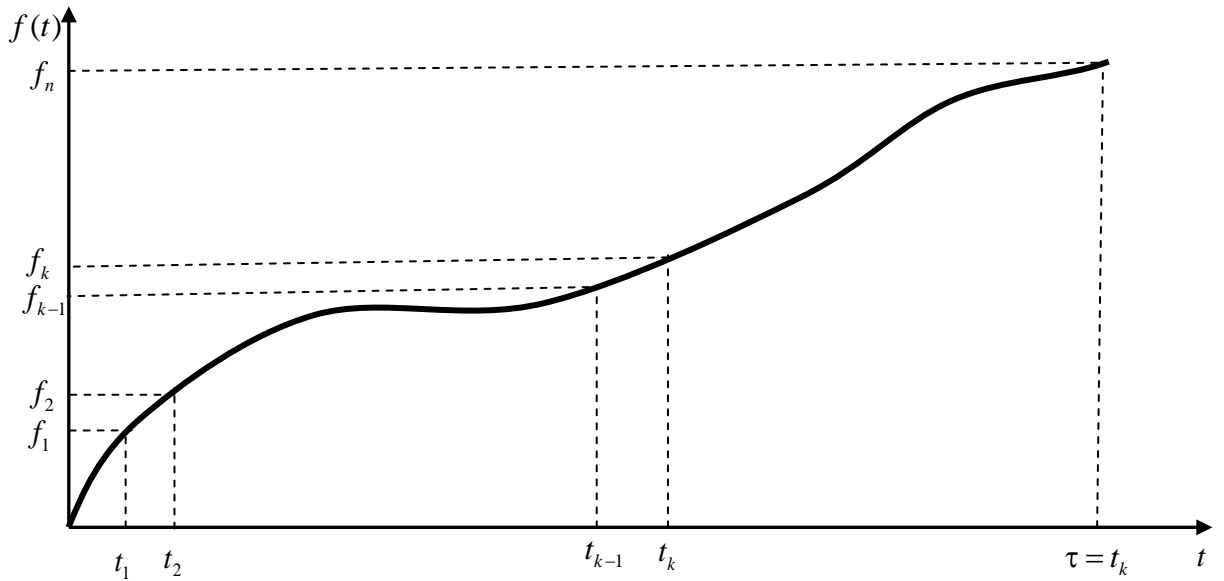


Рис. 8

Введем обозначения

$$x_k = x - f_{k-1} + V_k t_{k-1}, p_k(x, t) = x_k - V_k t. \quad (3.3)$$

Тогда представление для перемещений (2.2) принимает вид:

$$w_0(x, \tau) = - \sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad w_j(x, \tau) = \sum_{k=1}^n w_{jk}(x, t_k), \quad (3.4)$$

$$w_{jk}(x, t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} G_j[p_k(x, t), \Delta t] H(\Delta t - \eta_j |p_k(x, t)|) dt.$$

Обозначим  $t = \tilde{a}_{jk}$  и  $t = \tilde{b}_{jk}$  – корни выражения  $\Delta t - \eta_j |p_k(x, t)| = 0$ ,  
 причем  $t_{k-1} \leq \tilde{a}_{jk} \leq \tilde{b}_{jk} \leq t_k$ .

Значения нижних и верхних пределов интегрирования в (3.4) зависят от взаимного расположения  $\tilde{a}_{jk}, \tilde{b}_{jk}, t_{k-1}, t_k$ .



Обозначим искомые пределы интегрирования  $\tau_{j1}^k$  и  $\tau_{j2}^k$ , что приводит  $w_{jk}(x, t_k)$  к виду:

$$w_{jk}(x, t_k) = \int_{\tau_{j1}^k}^{\tau_{j2}^k} G_j[p_k(x, t), \Delta t] dt. \quad (3.5)$$

Пределы интегрирования в (3.5) определим графоаналитическим методом.

Носитель подынтегральной функции в (3.5) не равен нулю при условии  $-\Delta t / \eta_j \leq p_k(x, t) \leq \Delta t / \eta_j$ .

Изобразим графики функций  $\xi_{j1}(t) = \Delta t / \eta_j$ ,  $\xi_{j2}(t) = -\Delta t / \eta_j$  (рис. 9).

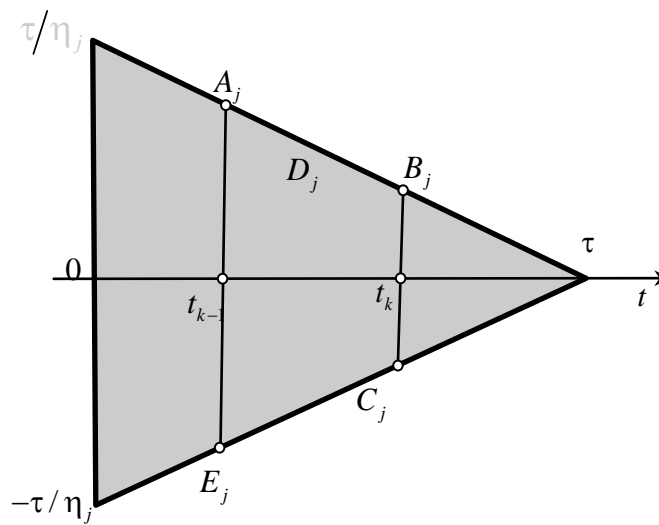


Рис. 9

На рис. 9  $A_j = \frac{\Delta t_{k-1}}{\eta_j}$ ,  $B_j = \frac{\Delta t_k}{\eta_j}$ ,  $C_j = -B_j$ ,  $E_j = -A_j$ ,  $\Delta t_k = \tau - t_k$ . Носитель

функции  $w_{jk}(x, t_k)$  ограничен трапецией с вершинами  $A_j, B_j, C_j, E_j$ .

Для определения пределов интегрирования в (3.5) необходимо рассмотреть все возможные случаи пересечения кривых  $\xi_{P_k}(x, t) = p_k(x, t)$ ,  $\xi_{jm}(t)$   $m=1,2$  с основаниями трапеции  $A_jE_j$  и  $B_jC_j$  на участке  $[t_{k-1}, t_k]$ . На схемах, изображенных ниже пунктирной линией изображены кривые  $\xi_{P_k}(x, t) = p_k(x, t)$ , обладающие характерными для каждого случая свойствами, а сплошной линией – ее интерполяция на участке  $[t_{k-1}, t_k]$ .

1. Кривые не пересекаются:

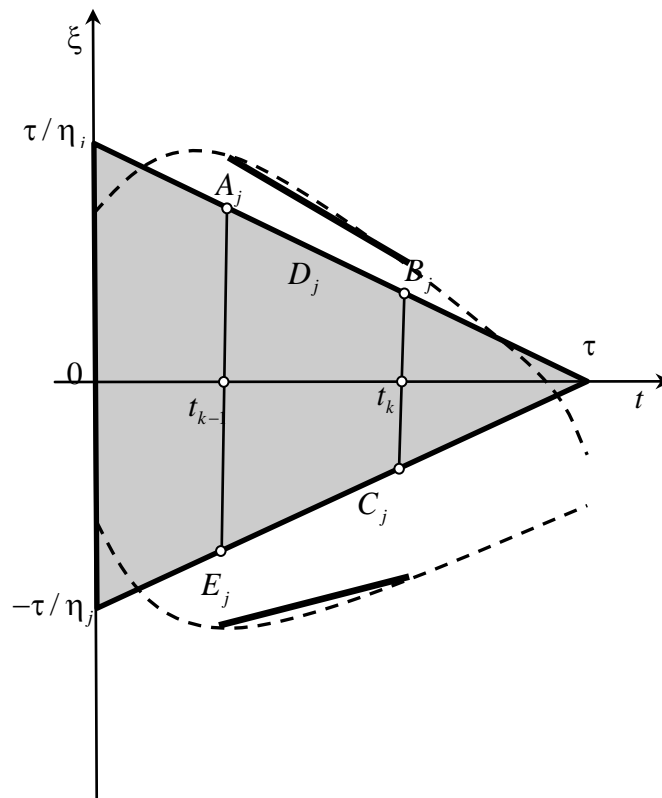


Рис. 10

На рис. 10 изображены случаи, когда  $\xi_{P_k}(x, t)$ , изображенная пунктирной линией, не имеет пересечений с  $\xi_{jm}(t)$ ,  $m = (1, 2)$  на заданном интервале  $t \in [t_{k-1}, t_k]$ . Такому случаю соответствуют следующие условия:

а).  $\xi_{P_k}(x, t)$  находится над трапецией  $A_l B_l C_l E_l$

$$\begin{cases} \Delta t_{k-1} / \eta_j \leq \xi_{P_k}(x, t_{k-1}); \\ \Delta t_k / \eta_j \leq \xi_{P_k}(x, t_k). \end{cases}$$

б).  $\xi_{P_k}(x, t)$  находится под трапецией  $A_j B_j C_j E_j$

$$\begin{cases} \Delta t_{k-1} / \eta_j < -\xi_{P_k}(x, t_{k-1}); \\ \Delta t_k / \eta_j < -\xi_{P_k}(x, t_k). \end{cases}$$

При этом перемещения равны нулю:

$$w_{jk}(x, t_k) = 0.$$

2. Кривая  $\xi_{P_k}(x, t)$  пересекает основания трапеции  $A_j E_j$  и  $B_j C_j$  (рис. 11).

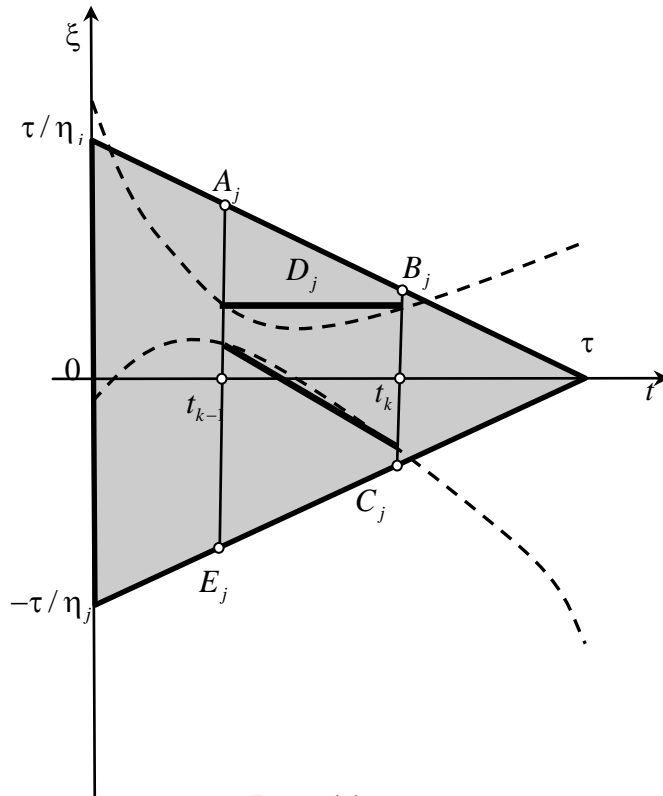


Рис. 11

Здесь выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} -\Delta t_{k-1} / \eta_j < \xi_{P_k}(x, t_{k-1}) < \Delta t_{k-1} / \eta_j; \\ -\Delta t_k / \eta_j < \xi_{P_k}(x, t_k) < \Delta t_k / \eta_j. \end{cases}$$

Пределы интегрирования:

$$\tau_{j1}^k = t_{k-1}, \tau_{j2}^k = t_k.$$

3. Кривая  $\xi_{P_k}(x, t)$  пересекает одно из оснований трапеции и боковую сторону:

а). Пересечение основания  $A_j E_j$  (рис. 12).

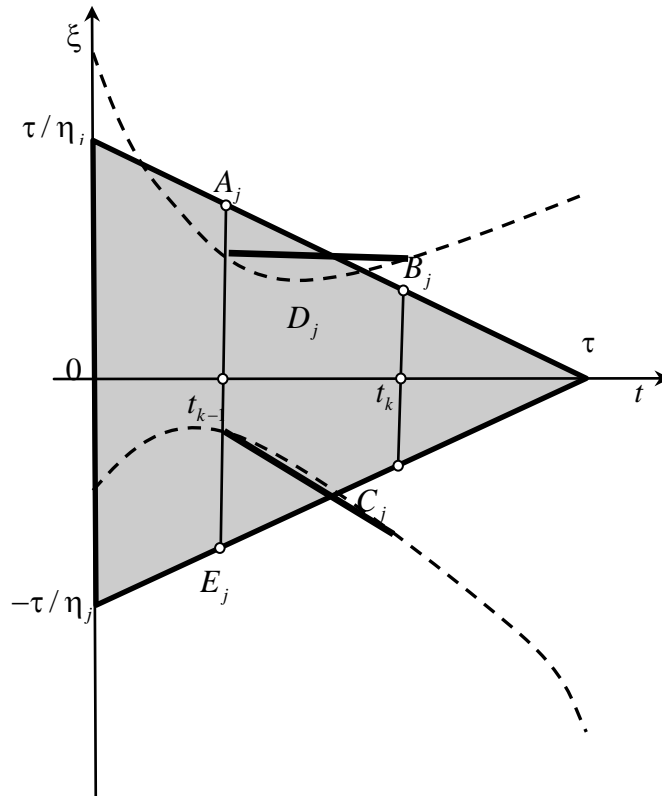


Рис. 12

В этом случае справедливы следующие неравенства:

$$\begin{cases} -\Delta t_{k-1} / \eta_j < \xi_{P_k}(x, t_{k-1}) < \Delta t_{k-1} / \eta_j; \\ \left( \Delta t_k / \eta_j < \xi_{P_k}(x, t_k) \right) \vee \left( \xi_{P_k}(x, t_k) < -\Delta t_k / \eta_j \right). \end{cases}$$

А пределы интегрирования определяются так:

$$\tau_{j1}^k = t_{k-1}, \quad \tau_{j2}^k = \tilde{a}_{jk}.$$

б). Пересечение основания  $B_j C_j$  (рис. 13):

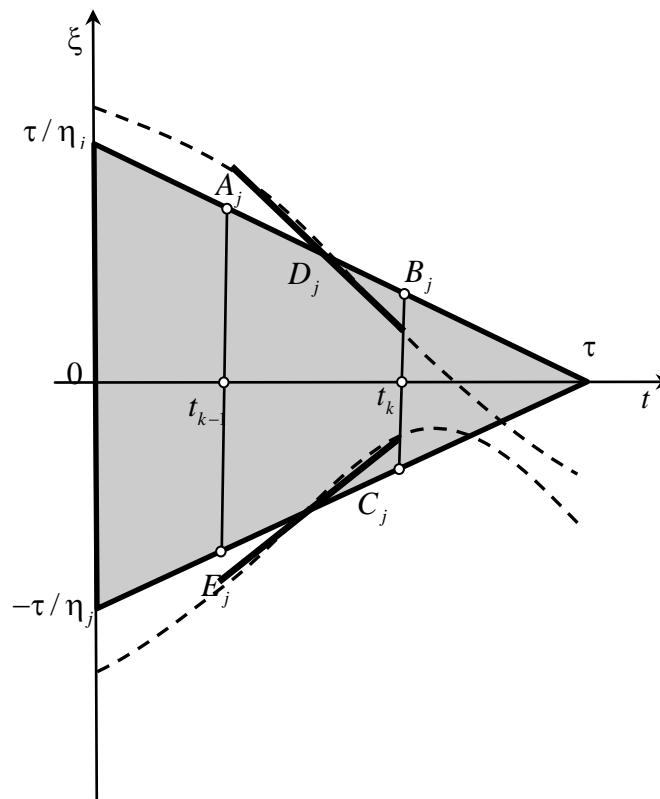


Рис. 13

Здесь справедливо:

$$\begin{cases} (\Delta t_{k-1} / \eta_j < \xi_{P_{k-1}}(x, t_{k-1})) \vee (\xi_{P_{k-1}}(x, t_{k-1}) < -\Delta t_{k-1} / \eta_j); \\ -\Delta t_k / \eta_j < \xi_{P_{k-1}}(x, t_k) < \Delta t_k / \eta_j. \end{cases}$$

Пределы интегрирования равны:

$$\tau_{j1}^k = \tilde{a}_{jk}, \quad \tau_{j2}^k = t_k.$$

5. Кривая  $\xi_{P_k}(x,t)$  пересекает обе боковые стороны (рис. 14).

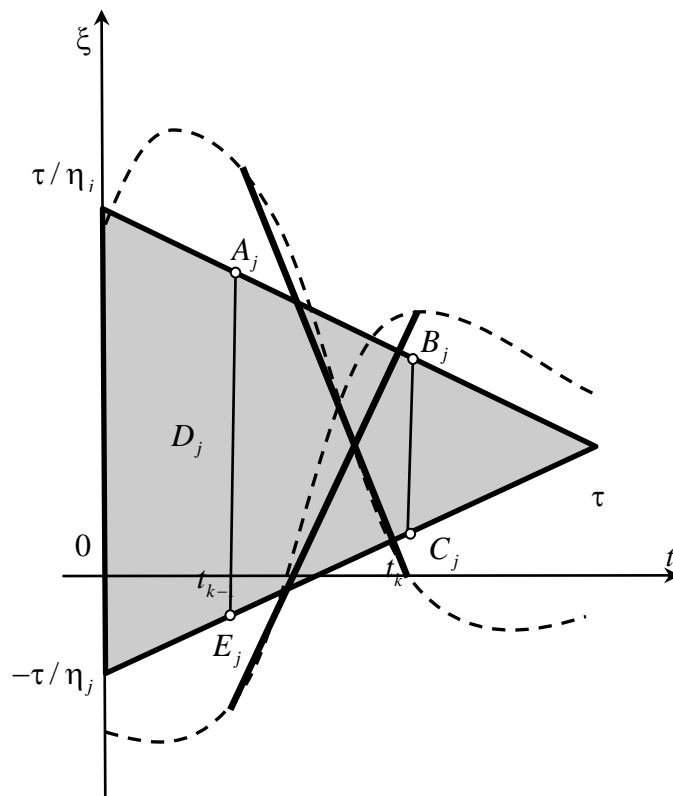


Рис. 14

В этом случае пределы интегрирования находятся из условий

$$\text{sign} \left[ \xi_{P_k}(x, t_{k-1}) \cdot \xi_{P_k}(x, t_k) \right] = -1$$

и равны:

$$\tau_{j1}^k = \tilde{a}_{jk}, \quad \tau_{j2}^k = \tilde{b}_{jk}.$$

Резюмируя все вышеописанные случаи, аналитические выражения, определяющие пределы интегрирования в (3.5) имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_{j1}^k &= t_{k-1} H(\Delta t_{k-1} / \eta_j - |p_k(x, t_{k-1})|) + \\ &+ \tilde{a}_{jk} \left\{ H(|p_k(x, t_{k-1})| - \Delta t_{k-1} / \eta_j) \left[ H(-\text{sign}(p_k(x, t_{k-1}) \cdot p_k(x, t_k))) \right] + \right. \\ &\left. + H(\text{sign}(p_k(x, t_{k-1}) \cdot p_k(x, t_k))) H(\Delta t_k / \eta_j - |p_k(x, t_k)|) \right\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \tau_{j2}^k &= t_k H(\Delta t_k / \eta_j - |p_k(x, t_k)|) + \\ &+ \left\{ H(|p_k(x, t_k)| - \Delta t_k / \eta_j) \left[ \tilde{b}_{jk} H(-\text{sign}(p_k(x, t_{k-1}) \cdot p_k(x, t_k))) \right] + \right. \\ &\left. + \tilde{b}_{jk} H(\text{sign}(p_k(x, t_{k-1}) \cdot p_k(x, t_k))) H(\Delta t_{k-1} / \eta_j - |p_k(x, t_{k-1})|) \right\}. \end{aligned}$$

Проведем замену переменной  $y = [x - f(t)] / (\tau - t)$  в (3.4):

$$\begin{aligned} w_0(x, \tau) &= -\sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \quad w_j(x, \tau) = \sum_{k=1}^n w_{jk}(x, t_k), \\ w_{jk}(x, t_k) &= \int_{y_{j1}^k}^{y_{j2}^k} \frac{G_j(y, 1)}{y - V_k} dy, \end{aligned} \quad (3.7)$$

при учете обозначений (3.3):

$$y = \frac{p_k(x, t)}{\tau - t}. \quad (3.8)$$

Пределы интегрирования  $y_{j1}^k$ ,  $y_{j2}^k$  в (3.7) определяются путем подстановки (3.6) в (3.8).

Следуя методике, изложенной в главе 2, представим функции  $G_j(y, 1) / [(y - V_k)k_j(y^2, 1)]$  в виде суммы элементарных дробей:



$$\frac{G_j(y,1)}{(y-V_k)k_j(y^2,1)} = \sum_{l=1}^7 \frac{a_{jkl}}{y-b_{kl}}, \quad (j=1,2). \quad (3.9)$$

Коэффициенты  $a_{jkl}$  определяются как вычеты функции  $G_j(y,1)/[(y-V_k)k_j(y^2,1)]$  в полюсе  $b_l^k$ :

$$a_{jkl} = \frac{g_j \left[ (b_{kl})^2, 1 \right]}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq l}}^7 (b_{kl} - b_{kr})}, \quad (3.10)$$

$$b_{k1} = V_k, \quad b_{k2} = c_R, \quad b_{k3} = -c_R, \quad b_{k4} = c, \quad b_{k5} = \bar{c}, \quad b_{k6} = -c, \quad b_{k7} = -\bar{c},$$

$$c = \frac{\gamma + i\sqrt{2(\beta - \alpha^2)}}{2}.$$

В итоге, используя замену переменной  $z = \eta_j y$ , получим следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned} w_0(x, \tau) &= -\sum_{j=1}^2 w_j(x, \tau), \\ w_j(x, \tau) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^7 I_{jkl}, \\ I_{jkl} &= a_{jkl} \int_{z_{j1}^k}^{z_{j2}^k} \frac{k_j(z^2, 1)}{z - \eta_j b_{kl}} dz. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Как видно из (3.11), в случае произвольного закона движения нагрузки задача сводится к анализу  $n$  задач с нагрузкой, движущейся с постоянной скоростью. По этой причине все выводы об особенностях, содержащихся в решении задачи, полученные в предыдущей главе, справедливы и для произвольного закона движения нагрузки.

### §3.2 Примеры расчетов

В качестве примера рассмотрим случай равноускоренного движения нагрузки по закону:

$$f(t) = Vt + at^2. \quad (3.12)$$

Для интерполяции закона движения будем использовать три слагаемых:

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^3 [f_{k-1} + V_k(t - t_{k-1})] H(t - t_{k-1}) H(t_k - t). \quad (3.13)$$

Примем следующие значения параметров:

$$V = 0.1/\eta, \quad a = 1.3. \quad (3.14)$$

На рис. 15 представлена интерполяция  $f(t)$  при  $n = 3$ .

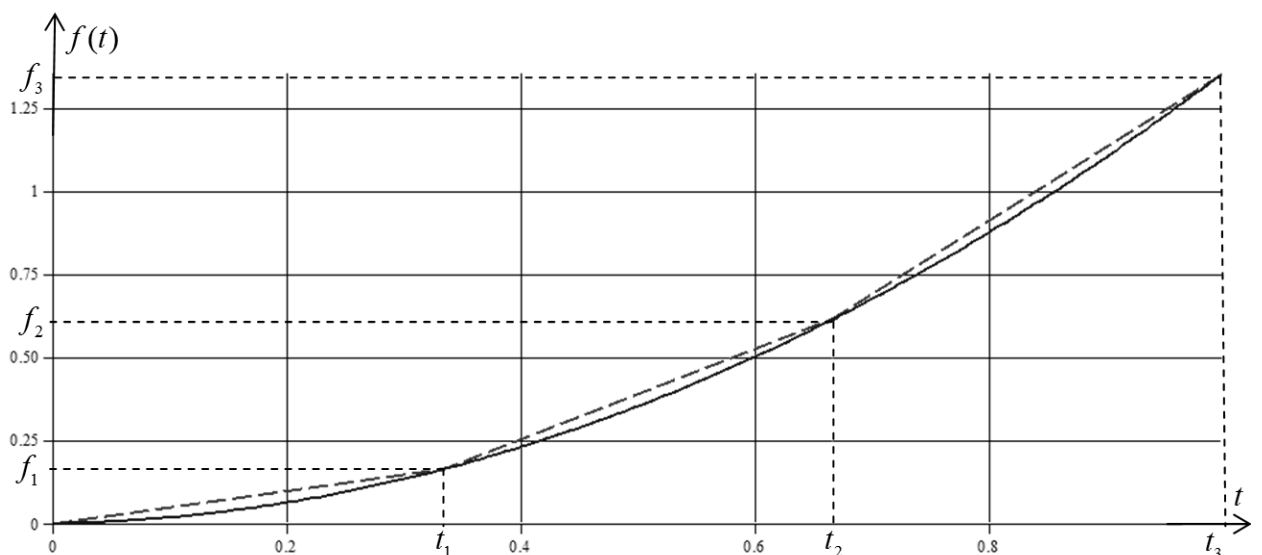


Рис. 15.

Как видно из рис. 15, при  $n=3$  интерполяция, обозначенная пунктирной линией, достаточно точно описывает закон движения  $f(t)$  (сплошная линия).

Для определения пределов интегрирования по формуле (3.6) определим следующие величины:

Таблица 3.

$k$	0	1	2	3
Величины				
$x_k$	-	$x$	$x - 2f_1 + f_2$	$x - 3f_2 + 2f_3$
$V_k$	-	$\frac{3(f_1 - f_0)}{\tau}$	$\frac{3(f_2 - f_1)}{\tau}$	$\frac{3(f_3 - f_2)}{\tau}$
$t_k$	0	$\frac{\tau}{3}$	$\frac{2\tau}{3}$	$\tau$
$p_k(x, t_{k-1})$	-	$x$	$x - f_1$	$x - f_2$
$p_k(x, t_k)$	-	$x - f_1$	$x - f_2$	$x - f_3$

Пределы интегрирования  $\tau_{j1}^k, \tau_{j2}^k$  определяются согласно Таблице 4 :

Таблица 4.

$k$	$\tau_{j1}^k$		$\tau_{j2}^k$	
$k=1$	0	$1/\eta_j >  x $	$\tau/3$	$2\tau/3\eta_j >  x-f_1 $
	$\tilde{a}_{j1}$	$1/\eta_j <  x $	$\tilde{b}_{j1}$	$ x-f_1  > 2\tau/3\eta_j \cup (x/(x-f_1) < 0)$
				$ x  < 1/\eta_j \cup (x/(x-f_1) > 0)$
$k=2$	$\tau/3$	$2\tau/3\eta_j >  x-f_1 $	$\frac{2\tau}{3}$	$\tau/3\eta_j >  x-f_2 $
	$\tilde{a}_{j2}$	$2\tau/3\eta_j <  x-f_1 $	$\tilde{b}_{j2}$	$ x-f_2  > \tau/3\eta_j \cup (x-f_1)/(x-f_2) < 0$
				$ x-f_1  < \frac{2\tau}{3\eta_j} \cup (x-f_1)/(x-f_2) > 0$
$k=3$	$\frac{2\tau}{3}$	$\frac{\tau}{3\eta_j} >  x-f_2 $	$\tau$	$0 > \eta_j  x-f_3 $
	$\tilde{a}_{j3}$	$\frac{\tau}{3\eta_j} <  x-f_2 $	$\tilde{b}_{j3}$	$ x-f_3  > 0 \cup (x-f_2)/(x-f_3) < 0$
				$ x-f_2  < \frac{\tau}{3} \cup (x-f_2)/(x-f_3) > 0$

Итоговые выражения для перемещений следуют из (3.11), где пределы интегрирования  $z_{j1}^k, z_{j2}^k$  определяются путем подстановки  $t = \tau_{j1}^k, \tau_{j2}^k$ , представленных из таблицы 4 в выражение  $z = \eta_j \frac{p_k(x,t)}{\tau-t}$ .

На Рис. 16. Изображено распределение нормальных перемещений границы полуплоскости под действием сосредоточенной нагрузки, движущейся по закону  $f(t) = \frac{0.1}{\eta}t + 1.3t^2$ . в момент времени  $\tau = 0.2$ . Здесь, как и ранее, штриховые асимптоты соответствуют положению фронта движения нагрузки (длинный штрих) и фронтам волны Рэлея (короткий

штрих). Штриховые пунктирные асимптоты соответствуют положению фронтов волны сдвига.

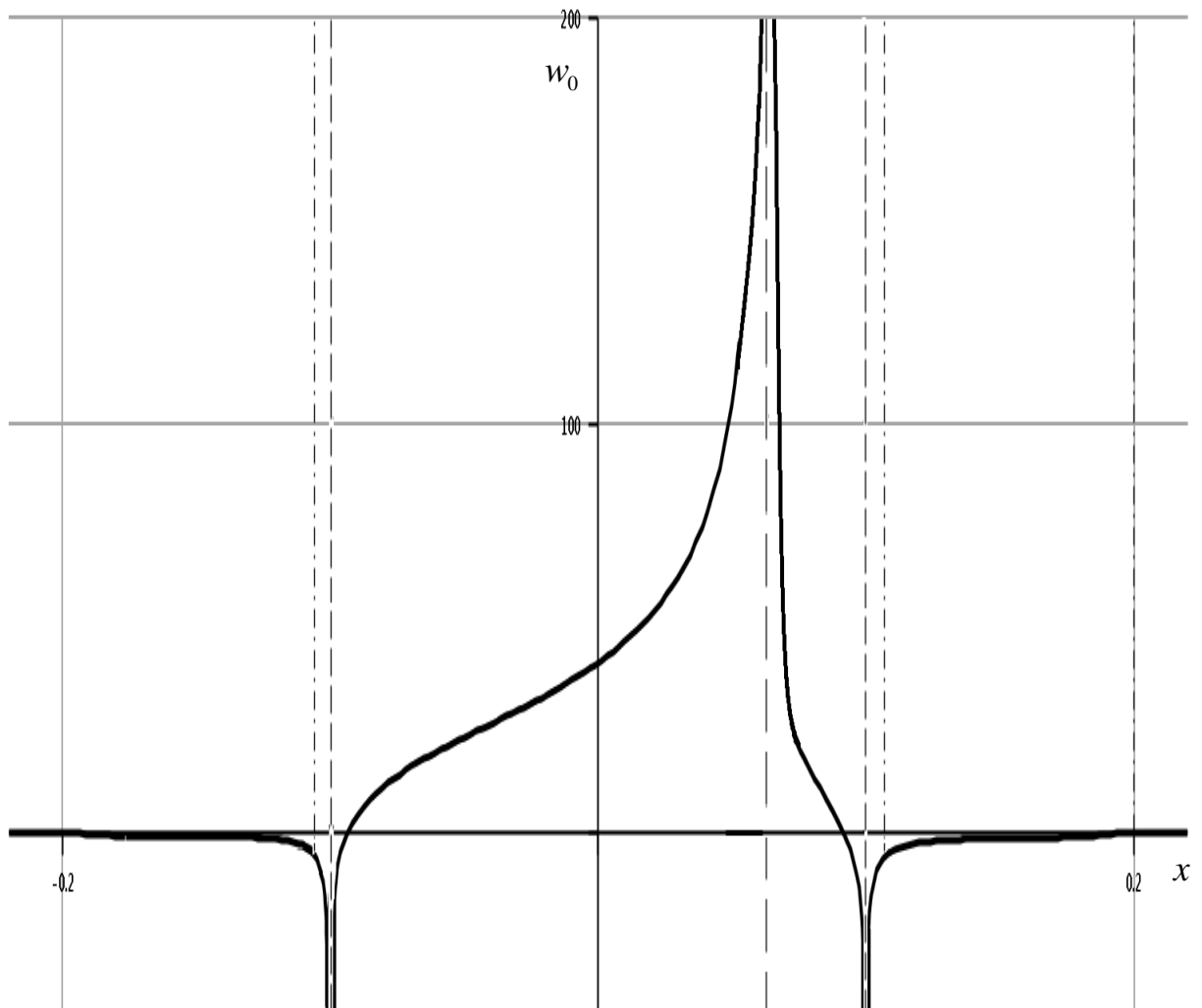


Рис. 16. Распределение нормальных перемещений при  
 $V = 0.1/\eta$ ,  $a = 1.3$ ,  $\tau = 0.3$

## **Заключение**

Основные результаты диссертационной работы следующие:

1. Построено аналитическое решение задачи о воздействии подвижной сосредоточенной нагрузки на упругую полуплоскость в случае равномерного режима движения.
2. Полученное решение полностью исследовано во всем диапазоне изменения параметров процесса.
3. Аналитически выделены и исследованы особенности решения.
4. Предложен метод, построен и реализован алгоритм решения задачи о движении нагрузки по произвольному временному закону.

## Список использованных источников

1. **Весницкий А.И.** Избранные труды по механике // отв. Ред. В.И. Ерофеев, Е.Е. Лисенкова; Нижегород. Фил. Ин-т машиноведения им. А.А. Благодярова РАН. - Нижний Новгород: ИД «Наш дом», 2010. – 248 С.
2. **Пановко Я.Г., Губанова И.И.** Устойчивость и колебания упругих систем: современные концепции, парадоксы и ошибки // 4-е издание перераб., – М. Наука Гл. ред. Физ.-мат. Лит. , 1987 - 352 С.
3. **Крылов А.Н.** Движение постоянной силы по массивной балке. // Математический сборник – СПб, 1905, № 61.
4. **Тимошенко С.П.** Соппротивление материалов // ГТИ, 1946 – т.2. 163 С.
5. **Inglis C.E.** // Proc. Inst. Civil Engrs.– London, 1924 – t. 218.
6. **Herrmann G., Baker E.H.**, Response of cylindrical sandwich shells to moving loads// J. Appl. Mech., –1964 - 34, № 1, pp. 81–86.
7. **Bhuta P.G.** Transient response of thin elastic cylindrical shell to a moving shock wave // J. Acoustical Soc. Amer. – 1963, 35, №1, pp. 25–30.
8. **Огибалов П.М., Колтунов М.А.**, Оболочки и пластины// Изд-во Моск. Гос. Ун-та – М., 1969.–636 С.
9. **Скурлатов Э.Д.**, О поведении цилиндрических панелей и оболочек, находящихся под воздействием набегающей волны давления // Теория пластин и оболочек, «Наука»– Москва, 1971 – С. 256–261.
10. **Мнев Е.Н., Пернев А.К.** Гидроупругость оболочек // «Судостроение»– Ленинград, 1970.
11. **Вольмир А.С., Долгих Л.И., Скурлатов Э.Д., Солоненко В.Р.** Поведение цилиндрических оболочек под действием подвижных нагрузок // Тр. VII Всес. конф. по теор. оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1970. – С. 153-155.

12. **Григолюк Э.И., Горшков А.Г.** Поведение оболочек при действии боковой акустической волны давления // Научные труды Института механики Мос. Гос. ун-та №2, 1970.

13. **Lamb H.** On the propagation of tremors over the surface on an elastic solid. // Phil Roy. Soc. London. Ser. A – 1904– 203 - pp. 1–42.

14. **Sneddon I.N.** Fourier transforms // N-Y, 1951 – pp. 444–449.

15. **Sneddon I.N.** The stress produced by a pulse of pressure moving along the surface of a semi-infinite solid “Rendiconti del circolo Matematico di Palermo” // serii II, nomo 1, 1952 – pp. 57–62.

16. **Fulton J., Sneddon I.N.** The dynamical stresses produced in a thick plate by a surface forces // Proceed of the Glasgon Mathematical association – 1958 – vol. 3 part IV, pp.153–163.

17. **Cole I., Huth I.** Stresses produced in a half plane by moving loads.// Journal Appl. Mech.– 1958 – Vol. 25., N4.

18. **Bleich H.H., Heer E.** Moving step-Load on Half-space of granular material. // Journ. Of the engineering mechanics devision. Proceed of the ASCE – 1963 – vol. 89, pp. 97–129.

19. **Dang Dinh Ang.** Transient motion of a line load on the surface of an elastic half-space. // Quaretly Appl, Math.,– 1960 – vol. 18, N 3, pp. 251–256.

20. **Miles I.W.** On the Response of an Elastic Half-space to a moving Blast Wave// Journ. Appl. Mech., –1960 – vol. 27, N 4. pp. 710–716.

21. **Chao C.C.** Dynamic Response of an Elastic Half Space to Tangential surface Loadings// Journal of applied Mechanics – 1960 - vol. 27,N 3, pp.559–569.

22. **Флитман Л.М.** О движении под действием сейсмической волны жесткой массивной полосы, лежащей на упругом полупространстве. // Прикладная математика и механика – 1962.– т. 26, вып. 6.



23. **Keer L.M., Sve C.** Indentation of on elastic layer by an array on punches moving with steady velocity. // Pap. Amer. Soc. Mech. Eng., – 1970 – № WA/APM–30, p.7.

24. **Sur S.P.** Note on stresses produced by a shearing force moving over the bounding of a semi-infinite transversely isotropic solid // Geofs. Pura appl., – 1963 – 55, N 2, pp. 72–76.

25. **Сабодаш П.Ф., Филипов И.Г.** О напряжениях, возбуждаемых в анизотропном слое движущейся нагрузкой. // Прикладная механика – Киев, 1969 – т.5, вып. 11.

26. **Mukherjee S.** Stresses produced by load moving over the rough boundary of semi-infinite Transversely isotropic solid. // Pure and Applied Geophysics – 1969 – vol. 72, N 1.

27. **Mandel I., Avramesco A.** Deplacements produits sur un semi-espace Elastique par une charge en mouvement rectiligne uniforme.// Annales des Ponts et chaussres–1963 – a 133, N 2 , pp.147–155 .

28. **Papadopoulos M.** The Elastodynamics of moving loads. Part 1: The field of simi infinite loads moving on the surface of an elastic solid with constant supersonic velocity. – I. Australian Math. Society, 1963 –vol. 3, N1.

29. **Papadopoulos M.** The use of singular Integrals in wave Propagation Problems with Application to the Point Source in semi-infinite Elastic Medium. // Proceedings of the Royal society of London – 1963 – series A, vol. 276, pp. 204–237.

30. **Payton R.G.** An application of the Dynamic Betti-Rayleigh Reciprocal theorem to moving – point loads in Elastic Media. // Quarterly L Of Applied Mathematics, – 1964 – vol. 21, N 4.

31. **Lansing D.L.** The displacements in an elastic half space due to a moving concentrated normal load // NASA, Technical Report, NASATR R,1966 – p.238.

32. **Eason G.** The stresses produced in semi-infinite solid by a moving surface force. // *Internat. Journal of Engineering science*– 1965 - vol. 2, N 6, p. 581–609.

33. **Fryba L.** Napjatost pruzneho prostredi vyvolana pohybujici se silow-  
Strojnický casopis. –1970 – 21 N 3, pp. 239–250.

34. **Singh S.K., Kuo J.T.** Response of an elastic half space to uniformly moving circular Surface load. // *Pap. Amer. Soc. Mech. Eng.*, – 1970 – N APM-Q, p.7.

35. **Norwood F.R.** Interior motion of an elastic half-space due to a normal finite moving line load an its surface. // *International Journal of solids and structures* – 1970 – vol. 6, N 12, pp. 1483–1498.

36. **Gakenheimer D.C., Miklowits I.** Transient Excitation of Elastic Half space by a point Load traveling of the surface. // *Journal Appl. Mech.*–1969 - Vol. 36, N3. pp. 505–515.

37. **Roberts A.M.** Moving loads on elastic and thermoelastic solids. // *Bull. Austral. Math. Soc.* – 1970 – 2, N 3, 432.

38. **Gakenheimer D.C.** Numerical results for Lamb’s point load problem // *Trans. ASME: J. Appl. Mech.* –1970– v.37, N2 –pp. 552-554.

39. **Рязанова М.Я., Филоненко Г.Г.** О колебаниях бесконечной балки на упругом основании при подвижной нагрузке с учетом рассеивания энергии. // *Прикладная механика* – 1965 – №8.

41. **Miles I.W.** On the Response of an Elastic Half-space to a moving Blast Wave. // *Journ. Appl. Mech.*, –1960 – vol.27 №4, pp. 710–716.

42. **Сабодаш П.Ф.** О поведении слоистого упругого полупространства при воздействии на него подвижной нагрузки. // *Сб. Проблемы механики горных пород*, Наука – Алма-Ата, 1966 – С. 373–380.

43. **Сабодаш П.Ф.** Поведение двухслойной упругой полосы при воздействии на нее подвижной нагрузки. // Сб. Распространение упругих и упруго-пластических волн. - ФАН, Ташкент, 1969 – С. 131–140.

44. **Слепян Л.И.** Резонансные волновые явления в упругих средах// Сб. III всесоюз. Съезд. По теорет. и прикл. механике. аннот. док-во.– Москва, Наука, 1968 – С. 277–278.

45. **Сабодаш П.Ф., Филиппов И.Г.** О напряжениях, возбуждаемых в анизотропном слое движущейся нагрузкой. // Прикладная механика- Киев, 1969 – т.5, вып. 11.

46. **Avramesco A.** Charge mobile sur on semi-espace elastique stratifie. // Compter Redes. Akad. –Sc. Paris serie A.– 1969 – v. 268, №5, pp. 289–291.

47. **Avramesco A.** Charge mobile a l'interface plane de deux milieu elastiques. // Comptes Rendes Acad. Sci Paris – 1969 – 268, №19, A1121– A1124.

48. **Avramesco A.** Regimes transitory et permanent sur une structure stratifie // Comptes Rendes, Akad. Sc. Paris – 1969 – v. 268, №20, A1206–A1209.

49. **Sve C., Whittier J.S.** One-dimensional pulse propagation in an obliquely laminated half space // Trans ASME, –1970 – E30, №3, pp. 778–782.

50. **Dunkin I.W., Gorbin D.G.** Deformation of a layered, elastic, half-space by uniformly moving line loads // Bulletin seismological Society of America,– 1970 – 60, №1- pp.167–191.

51. **Higuchi N., Hirashima D.-I.** Unsteady stress produced in an elastic half-plane by moving loads. // Theor. and Appl. Mech. V. 27 Proc 27<sup>th</sup> Jap. Nat. Congr. Appl. Mech., – Tokyo, 1977 – pp. 353–370.

52. **Ang D.D.** Transient motion of a line load on the surface of an elastic half-space. // Quart. Appl. Math., –1960 – 18, №3, pp. 251–256.

53. **Mitra M.** Note on the disturbance produced in an elastic half-space by transient pressure applied over a portion of the boundary. // Proc. Nat. Inst. Sci. India, –1962 – A28, №1 – pp. 199–205.

54. **Гольдштейн Р.В.** Волны Рэлея и резонансные явления в упругих телах. // Прикл. мат. и мех. – 1965 – 29 , №3 С. 516–525.

55. **Каплунов Ю.Д.** Нестационарная динамика упругой полуплоскости при действии подвижной нагрузки. // Препр. Ин-т. Пробл. Мех. АН СССР– 1986 – № 277, С 54.

56. **Мартиросян А.Н.** Решение смешанной динамической граничной задачи для упругого полупространства // Докл. АН СССР. – 1984 – Т. 276, №3, С. 66 – 81.

57. **Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.** Динамические контактные задачи с подвижными границами.// М., Наука. Физматлит, – 1995–352 с.

58. **Флитман Л.М.** Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости // Прикл. матем. и мех., – 1959 – Т. 23, №4 , С. 697 - 705

59. **Багдоев А.Г.** Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. // Ереван, Изд-во АН АрмССР – 1961 – 276 С.

60. **Белецкий М.А., Сеймов В.М.** Динамические поля напряжений в упругой полуплоскости при нагружении на части границы. // Прикл. мех. – 1985 – 21, С. 112-115.

61. **Яковлев Ю.С., Лобышев В.Л.** Взаимодействие сейсмической волны с сооружением. // Тр. Всес. Проектно-изыск. И НИИ гидропроект – 1970 – № 20, С. 87–93.

62. **Жарий О.** Закономерности формирования волн Рэлея при нестационарных колебаниях полуплоскости. // Акуст. Ж.– 1988 – №4, С. 633–637.

63. **Сретенский Л.Н.** Распространение упругих волн от круглого диска, обладающего данным вращением // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. –1985 – №4., С. 63–67.

64. **Mitra M.** Disturbance produced in an elastic half space by impulsive normal pressure // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1964 – V.60, №3, pp. 683-696.

65. **Wang K., Wang Y.** Displacement of the surface of an elastic half-space due non-uniformly distributed circular dynamic load // Acta mech. Solida Sun., – 1984 – №4, pp. 619 – 627.

66. **Огурцов К.И., Петрашень Г.И.** Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии // Уч. Зап. ЛГУ– 1951 - № 149, С. 3-117.

67. **Никифоровский В.С.** Исследование динамического поля напряжений в окрестности точки приложения нагрузки // Ж. прикл. мех. И техн. физ.– 1962 – №2., С. 85–94.

68. **Галабурдин А.В.** Применение метода граничных интегральных уравнений к решению плоских задач теории упругости с подвижной нагрузкой // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2010. – N 5., С. 38–40.

69. **Облакова Т.В., Приказчиков Д.А.** О резонансном режиме в нестационарной задаче о подвижной нагрузке для упругого полупространства / /Инженерный журнал: наука и инновации – М.,2013–№9, С.2.

70. **Демченко А.Т., Каплунов Ю.Д., Приказчиков Д.А. Алейникова И.А.** Применение асимптотической модели для волны релая к задаче о подвижной нагрузке на упругой полуплоскости // Наука и техника транспорта– М.,2005–№3,С. 82–87.

71. **Мицкевич В.Г., Приказчиков Д.А.** Применение асимптотической модели для волны Стоунли к задаче о подвижной нагрузке // Наука и техника транспорта – М.,2008 – №3, С. 94–98.

72. **Приказчиков Д.А.** Околорезонансные режимы в стационарной задаче о подвижной нагрузке в случае трансверсально-изотропной упругой

полуплоскости // Известия саратовского университета. новая серия. серия: математика. механика. информатика – Саратов, 2015 – №2, С.215–221.

73. **Оконечников А.С., Федотенков Г.В.** Нестационарные задачи о движении нагрузки вдоль поверхности упругой полуплоскости // Матер. XVIII междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2012., – том 2, С. 56–58.

74. **Оконечников А.С., Федотенков Г.В.** Нестационарная задача о движении сосредоточенной нагрузки вдоль упругой полуплоскости // Сборник тезисов докладов конференции «Инновации в авиации и космонавтике – 2012» – М., 2012. – С. 279–280.

75. **Оконечников А.С., Федотенков Г.В.** Плоская нестационарная задача о движении поверхностной нагрузки по упругому полупространству // Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленные воздействием полей различной физической природы. – Львов: ИППММ им. Я.С. Подстригача, 2012. – С. 131 – 135.

76. **Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.** Плоская нестационарная задача о равноускоренном движении сосредоточенной поверхностной силы по упругому полупространству // Матер. XIX междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2013 – том 2 , С. 32 –35.

77. **Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.** Нестационарная задача о равноускоренном движении сосредоточенной нагрузки вдоль границы упругой полуплоскости // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. 15–23 апреля 2013 г., Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова. – М.: Издательство Московского университета, 2013. - С. 130.

78. **Бугаев Н., Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.** Плоская нестационарная задача о равноускоренном движении сосредоточенной силы вдоль границы упругого полупространства //

Сучасні проблеми механіки та математики – Львів, ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 1., С. 78 – 80.

79. **Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.** Плоская нестационарная задача о движении сосредоточенной нагрузки вдоль поверхности упругого полупространства по произвольному временному закону // Матер. X Междунар. научн. конф. «Импульсные процессы в механике сплошных сред» – Николаев: КП «Миколаївська областна друкарня», 2013. – С. 36–39.

80. **Оконечников А.С., Федотенков Г.В.** Нестационарная задача о движении сосредоточенной нагрузки вдоль границы упругой полуплоскости // Матер. XX междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2014. – том 2, С. 34–35.

81. **Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.** Нестационарное воздействие подвижной сосредоточенной нагрузки на границу упругой полуплоскости // Междунар. Научн. Конф. «Совр. Пробл. Метем. Механ. Инф.» – Тула. 2014 – С.332–333.

82. **Кузнецова Е.Л., Окочечников А.С., Онджелик О.** Нестационарное воздействие подвижной сосредоточенной нагрузки на упругую полуплоскость // II межд. научн. семинар. «динамич. деформир. и конт. взаим. тонкостен. констр. при возд. полей различной физич. природы» –М.,2015 – С.69.

83. **Оконечников А.С., Федотенков Г.В.** Исследование воздействия подвижной сосредоточенной нагрузки на упругую полуплоскость // Матер. XXI междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2015.– том 2 , С. 55–56.

84. **Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.** Нестационарное движение нормальной сосредоточенной нагрузки вдоль границы упругой полуплоскости // Электронный журнал Труды МАИ – 2015 – №82, <https://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=58453>

85. **Оконечников А.С., Федотенков Г.В.** Нестационарная реакция упругой полуплоскости на воздействие нормальной подвижной сосредоточенной нагрузки // XI Всероссийский съезд по фундамент. пробл. теоретич. и прикл. механ. – Казань, 2015, Аннотации докладов – С. 210.

86. **Игумнов Л.А., Оконеchnikov А.С., Тарлаковский Д.В., Белов А.А.** Плоская нестационарная задача о движении поверхностной нагрузки по упругому полупространству // Математические методы и физико-механические поля - 2013.- Т.56, № 2. – С. 157 -163. Перевод: **L.A. Igumnov, A.S. Okonechnikov, D.V. Tarlakovskii, and G.V. Fedotenzkov** Plane nonstationary problem of motion of the surface load over an elastic half-space // Journal of Mathematical Sciences. – Vol. 174. No. 2. February. 2014. – P. 193-201. DOI 10.1007/s10958-014-2100-z.

87. **Кёч В., Теодореску П.** Введение в теорию обобщённых функций с приложениями в технике // М.: Изд.-во «Мир», 1975. – 520 С.

88. **Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е.** Обобщенные функции и действия над ними // Государственное издательство физико-математической литературы – Москва, 1959. – 243 С.

89. **Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.** Волны в сплошных средах // Учеб. Пособ.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004 – 472 С.