МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

Халина Анастасия Сергеевна

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ НА НЕОГРАНИЧЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ, ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О СОСТОЯНИИ

Специальность 05.13.01 —
системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор М. М. Хрусталев

Москва, 2016 год

Оглавление

Список основных обозначений

R^n – n-мерное евклидово пространство;

$(\cdot)^{\mathrm{T}}$ – операция транспонирования;

$T = [0, t_1]$ – интервал времени функционирования динамической системы, момент времени t_1 задан;

$T_0 \subset T$ – множество нулевой меры Бореля из T;

$x \in R^n$ – вектор состояния;

$u \in R^{n_u}$ – вектор управления;

$w(t) \in R^{n_w}$ – стандартный винеровский процесс;

$\lambda \in \Lambda \subset R^{n_\lambda}$ – векторный параметр;

$P(t, x)$ – вероятностная мера, задающая распределение случайного состояния x в момент времени t;

$P_0(x) = P(0, x)$ – заданное начальное распределение вектора состояния x;

$p(t, x)$ – плотность вероятности состояния в момент времени t;

$p_0(x) = p(0, x)$ – заданная начальная плотность распределения вектора состояния x;

$U \subset R^{n_u}$ – множеств, задающее геометрические ограничения на управление u;

V – множество, задающее информационные ограничения на управление u;

M – специально сконструированное [44, 45] пространство вероятностных мер $P(t, x)$;

$\bar{M}$ – пополненное множество M, представляющее собой банахово пространство;

$M^* \subset M$ – множество абсолютно непрерывных относительно меры Лебега вероятностных мер $P(t, x)$ (имеет плотность);

$M_0^* \subset M^* \subset M$ – заданное множество начальных распределений вероятностной меры $P(t, x)$;

C^2 – пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций на R^n;

C_0^* – пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций на R^n, аннулирующихся вне некоторого шара в R^n;

$\mathcal{L}$ – множество допустимых матриц линейного регулятора $u = -Lx$, удовлетворяющего информационным ограничениям.

Введение

Важной задачей системного анализа является разработка математических моделей, учитывающих воздействие на объект управления случайных факторов [6]. Например, к числу факторов, действующих на движение летательного аппарата в атмосфере, можно отнести: внешние неточно известные силы, разброс аэродинамических характеристик и конструктивных параметров летательного аппарата, порывы ветра, вариации плотности атмосферы, магнитного и гравитационного поля Земли и др. Для математического описания подобных систем часто используется стохастическое описание.

В прикладных задачах линейные стохастические системы появляются как аппроксимация нелинейных в некоторой малой окрестности заданного движения. Но если, например, в нелинейном уравнении Ито линеаризовать коэффициенты сдвига и диффузии, то в общем случае мы получим квазилинейную систему, а не линейную. Квазилинейные динамические стохастические системы отличаются от линейных тем, что в описывающем их уравнении Ито не только коэффициенты сноса, но и коэффициенты диффузии (коэффициенты при дифференциале винеровского процесса) зависят линейно от переменных состояния и управлений.

Для задач стохастического оптимального управления традиционным является поиск минимума математического ожидания функционала [7, 18]. Однако, иногда рассматриваются и другие критерии [14, 36].

Если время $T > 0$ движения системы задано, то говорят о задачах управления на конечном интервале времени $[0, T]$. Также интересны задачи на бесконечном интервале времени. Примером является задача оптимальной стохастической стабилизации.

Рассматриваемые в диссертации системы функционируют на неограниченном интервале времени, что упрощает исследование, как и в теории А.М. Летова [13]. В связи с этим использование стандартного квадратичного критерия малосодержательно.

Если, например, критерий оптимальности представляет собой расход топлива или энергии на демпфирование отклонений от желаемого процесса, то на бесконечном интервале времени этот расход будет бесконечным вследствие постоянного действия случайных возмущений. Более содержателен критерий, представляющий собой расход величины, определяющей оптимальность процесса, в единицу времени. Такого рода критерий для систем с непрерывным временем, по-видимому, впервые был использован основателем кибернетики Н. Винером в задаче синтеза оптимальной передаточной функции из условия минимума среднеквадратичной ошибки [70].

Большое внимание уделяется методам решения задач оптимизации динамических систем, позволяющим определять непрерывное управление либо как функцию от начальных условий и времени (программное управление) [25], либо как функцию времени и текущих фазовых координат системы (синтез управления) [4].

Для детерминированных систем управления не имеет значения, какое управление – программное или с обратной связью – используется, так как знание управления и начального состояния позволяет однозначно определить состояние системы в любой момент времени. Наблюдение за текущим состоянием системы не дает новой информации. В стохастических системах управления, т.е. в системах подверженных случайным воздействиям, по известным управлению и начальному состоянию предсказать ход протекания процесса невозможно, так как он зависит еще от случайных воздействий. И возможности управления такими системами существенно зависят от той информации, которая может быть получена путем измерения и обработки выходной (наблюдаемой) переменной. Поэтому стохастические оптимальные системы управления должны быть замкнутыми, т.е. системами управления с обратной связью [7].

В линейных стохастических системах с квадратичным критерием качества оптимальная детерминированная стратегия управления, полученная при отсутствии случайных возмущений, при использовании полной обратной связи будет оптимальна и при действии случайных возмущений. Если же измерению и, соответственно, использованию при управлении доступна лишь часть компонент вектора состояния, ситуация изменяется. Каждому составу доступных использованию компонент вектора состояния будет соответствовать своя стабилизирующая стратегия, зависящая от характеристик возмущений. При некоторых сочетаниях доступных компонент задача может не иметь решения, так как даже детерминированная вполне управляемая по Калману система может быть нестабилизируемой при использовании неполной обратной связи.

Для описания динамической системы составляется ее математическая модель. В реальной ситуации зачастую невозможно точно описать функционирующий технический объект, получать полную информацию о его динамике, возмущениях, действующих на него и т.д. В результате возникает задача оптимизации с информационными ограничениями.

Существует обширный класс динамических систем, в которых информация о положении в фазовом пространстве является неполной и ограничена измерительным устройством, которым располагает система. Возможности управления такими системами существенно зависят от той информации, которая может быть получена путем измерения и обработки наблюдений. Также важным источником неполноты информации является запаздывание, вызванное временем, необходимого для проведения наблюдений и обработки их результатов. Поэтому в теории управления стали развиваться направления, связанные с решением задач оптимизации динамических систем в условиях неопределенности, например: управление пучками траекторий [16, 34]; управление стохастическими системами [19, 20, 26, 46, 47, 63–65, 67, 71, 72];

В диссертационной работе под управлением при неполной информации о состоянии системы понимается управление по части компонент вектора состояния. Такая постановка задачи включает в себя и случай, когда вектор состояния системы состоит из компонент объекта управления, измерительного устройства, идентификатора состояния системы и формирующего фильтра возмущений.

Управление по части компонент вектора состояния (выходу) является интересной и актуальной проблемой по следующим соображениям: может оказаться, что управление по части компонент вектора состояния дает значение критерия оптимальности, почти не отличающееся от значения при полной информации; управление с обратной связью может реализоваться не как внешнее воздействие, а как элемент конструкции объекта (регулятор Уатта); оценки состояния с помощью фильтра Калмана при малых шумах обладают известным недостатком – большой чувствительностью к ошибкам знания характеристик шума, так как система дифференциальных уравнений исходной системы плюс фильтр Калмана становится жесткой. При управлении по неполной обратной связи становится возможным использование фильтра пониженной размерности и совместная оптимизация регулятора и фильтра. Теорема разделения имеет место лишь для линейных систем.

Использования при управлении минимальной информации о состоянии системы важно при проектировании струйных управляющих устройств, предполагающих использование минимального количества струйных элементов. Такие системы могут быть применены в качестве резервных систем управления летательными аппаратами.

Актуальность разработки струйных систем управления вызвана тем, что существующие электронные системы управления, обрабатывая гигантские объемы информации для формирования управляющих сигналов, являются весьма уязвимыми относительно искусственных дестабилизирующих внешних воздействий в виде направленных электромагнитных, гамма, лазерных и других излучений [10]. Такие воздействия являются поражающими факторами для электротехнических компонентов, вызывают их многочисленные сбои и отказы. Однако, приведенные поражающие факторы физически не влияют на выполнение функциональных операций струйными элементами, так как принцип их работы базируется на газодинамических эффектах, таких как взаимодействия струйных течений между собой, со стенками рабочих каналов, вихревые течения и т.д. Эти физические процессы по своей природе механические, и на них не действуют электромагнитные поля.

Круг работ непосредственно примыкающих к тематике диссертации не очень велик. Имеется много работ по оптимизации линейных стохастических систем, функционирующих на конечном интервале времени. В диссертации кроме линейных рассматриваются задачи оптимального управления квазилинейными системами (термин "квазилинейная система"введен Параевым Ю.И. [20]). Квазилинейная система – это, по существу, нелинейная система, так как она содержит произведение переменных состояния и функции от управлений на дифференциал винеровского процесса (белый шум). Работ, в которых исследуются такие системы, не так много. В случае, когда измеряется весь вектор состояния, фундаментальные результаты по оптимальному управлению такими системами имеются в книге Параева Ю.И. [20], многие из конструкций которой используются в диссертации. Однако, для приложений важен и интересен случай неполной обратной связи, когда измерению доступны не все компоненты вектора состояния. Именно этот случай и изучается в диссертации. Кроме того, в диссертации рассматриваются системы, функционирующие на неограниченном интервале времени (как в теории АКОР Летова А.М.). Здесь предшественников совсем мало [67, 71]. Обобщения детерминированных задач H_∞- и H_2/H_∞-управления [24] на стохастические системы были даны в [62, 63] соответственно. В [63] системы рассматривались на конечном $[0, T]$, $T < +\infty$ и бесконечном $T = \infty$ интервалах времени, в [62] – преимущественно на бесконечном интервале. Кроме того в диссертации (глава 3) задача оптимального управления квазилинейной стохастической состемой (линейная – частный случай) погружается в более общую задачу – задачу оптимизации облика системы одновременной оптимизации стратегии управления и конструктивных параметров.

В работах У. Флеминга [66], Семёнова В.В. [33], Пантелеева А.В. [17], а также в настоящей диссертационной работе все компоненты вектора управления зависят от одного и того же набора компонент вектора состояния.

Однако, также интересен более общий случай информационных ограничений, когда каждая компонента вектора управления может зависеть от своего минимального назначаемого априори набора компонент вектора состояния [27–30, 44–46]. Указанный подход может служить направлением дальнейших исследований.

Важной задачей в теории управления стохастическими системами является задача получения численных методов синтеза оптимального управления. Этому вопросу посвящены работы [64, 65, 72]. Основной принцип, заложенный в этих методах, заключается в том, что, если имеется некоторая стратегия управления, то метод должен позволять найти такую стратегию, которая будет лучше относительно заданного функционала. Другим эффективным методом синтеза является спектральный [37], основанный на алгебраической форме связей между характеристиками системы, позволяющий получать количественные характеристики по матрично-операторным формулам. Для этого направления создано алгоритмическое и программное обеспечение [35], получены достаточные условия оптимальности для систем со случайной структурой при неполной информации [31].

Объектом исследования диссертационной работы являются линейные и квазилинейные диффузионные стохастические системы, функционирующие на неограниченном интервале времени, при неполной информации о состоянии с усредненным по времени квадратичным критерием качества.

Актуальность исследований в этом направлении обуславливается необходимостью наиболее точного описания объектов управления, реалистичным вариантом которого является стохастическое описание, учитывающее воздействие на объект управления случайных факторов. Квазилинейные системы, в частности, дают возможность учитывать шумы в матрицах управляемой системы и мультипликативные ошибки реализации управления. Из представленного обзора видно, что исследователи обращают особое внимание на задачи управления с информационными ограничениями, так как они встречаются во многих отраслях техники, экономики, биологии и т.д. Разработка методов, позволяющих решать задачи управления квазилинейными системами при неполной информации о состоянии системы, существенно расширяет класс прикладных задач применения теоретических исследований.

Целью работы является разработка методов синтеза оптимальных стратегий управления стохастическими линейными и квазилинейными системами диффузионного типа, функционирующими на неограниченном интервале времени, в случае измерения части компонент вектора состояния.

Для достижения выбранной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. получить условия оптимальности в задачах синтеза стратегий оптимального управления при неполной информации о векторе состояния:

- линейными стохастическими системами с аддитивным возмущениями;

- квазилинейными стохастическими системами, включающими возможность учета шумов в матрицах управляемой системы и мультипликативные ошибки реализации управления;

2. получить условия второго порядка в задаче оптимизации квазилинейных стохастических систем;

3. разработать численные методы решения задач п. 1 и 2;

4. провести решение нескольких прикладных задач, в том числе в области авиаци-

онной и ракетно-космической техники, с применением предложенных теоретических результатов.

Методы исследования. Для решения поставленных в диссертации задач используются современные методы системного анализа, математической теории управления, теории случайных процессов, вариационного исчисления, теории дифференциальных уравнений, теории оптимизации и численные методы.

Также для решения поставленных в диссертационной работе задач использовался метод функций Ляпунова-Лагранжа, обобщающий метод функций Кротова В.Ф. на стохастические системы. Этот метод наметился еще в ранних работах Хрусталева М.М. [48–51] при изучении проблемы оптимального управления частично наблюдаемым диффузионным процессом и получил дальнейшее развитие в его работах по стохастическим дифференциальным играм с неполной информацией [44, 45].

Метод функций Ляпунова-Лагранжа состоит в использовании совокупности функций, аналогичных вектор-функциям Ляпунова в теории устойчивости. Но в рассматриваемом круге проблем эти функции играют двоякую ролью. С одной стороны, они, как и функции Ляпунова, подменяют проблему изучения поведения траекторий динамической системы изучением их поведения на этих траекториях. С другой – они являются нелинейными нелокальными аналогами классических множителей Лагранжа, предназначенных для полного снятия ограничений [44, 45].

Важным результатом применения функций Ляпунова-Лагранжа является снятие всех нелокальных ограничений, в том числе и информационных, и полная локализация условий равновесия – доведение их до совокупности уравнений (или неравенств) для этих функций и семейства конечномерных задач, решаемых в фиксированный момент времени локально в каждой точке пространства состояний, аналогично тому, как это делается в условиях принципа максимума Понтрягина Л.С. или динамического программирования для классической задачи оптимального управления.

Фундаментом для метода Ляпунова-Лагранжа послужили работы Понтрягина Л.С. [25], Беллмана Р. [4], Кротова В.Ф. [11], Гурмана В.И. [8], в которых встречались те или иные фрагменты метода. Различные аспекты метода исследовались в [32, 48–51] и более поздних работах [23]. Близкий методу функций Ляпунова-Лагранжа подход предлагается в [15].

Всем специалистам в области управления хорошо известны работы Летова А.М. по аналитическому конструированию оптимальных регуляторов (АКОР). Диссертационная работа представляет собой часть комплекса научных исследований, проводимых под руководством Хрусталева М.М., по созданию ***теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов стохастических систем (АКОРСС)***, аналога теории АКОР для детерминированных систем.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических постановок и доказательств утверждений, корректным использованием методов системного анализа, подтверждением теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. В диссертационной работе получены новые результаты: необходимые условия оптимальности линейного регулятора в задаче стабилизации и оптимизации линейной стохастической системы, достаточные условия стабильности и необходимые условия оптимальности квазилинейной стохастической системы, функционирующих на неограниченном интервале времени при неполной информации о векторе состояния. Получены условия второго порядка в задаче оптимизации параметров квазилинейных стохастических систем. Введены новые понятия: вполне возмущаемости системы, с помощью которого исследуется вопрос единственности решения задачи стабилизации линейной стохастической системы; облик системы – понятие, позволяющее рассматривать общую постановку задачи, когда оптимизируемыми параметрами могут выступать параметры объекта управления, параметры среды, в которой объект функционирует, и параметры алгоритма управления. Решена задача оптимальной стабилизации движения малого беспилотного летательного аппарата в неспокойной атмосфере.

Практическая ценность работы состоит в том, что ее теоретические результаты могут служить основой для разработки программно-алгоритмического обеспечения решения прикладных задач в областях авиационной и ракетно-космической техники. Представленные условия оптимальности позволяют, в частности, решать следующие задачи оптимального управления:

- решать задачи оптимального управления при наличии мультипликативных возмущений и ошибок реализации управления;

- при синтезе оптимального управления учитывать шумы в матрице управляемой системы и ошибки измерений переменных состояния;

- оценивать проигрыш по критерию в результате отказа от измерения части компонент вектора состояния;

- решать задачи оптимального управления системами, в которых управление осуществляется не с помощью компьютера, а за счет реакции конструкции системы на изменение переменных состояния.

Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 20166114945 (12.05.2016 г.), позволяющей производить расчет оптимального управления малым беспилотным летательным аппаратом в неспокойной атмосфере.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности 05.13.01. В диссертации методы системного анализа применены для исследования сложных технических систем, проведена разработка методов и алгоритмов решения задач стабилизации и оптимального управления стохастическими динамическими системами.

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит введение, три главы, заключение и список используемой литературы. Работа изложена на 101 странице, включая 16 рисунков, 1 таблицу и список литературы, содержащий 72 наименования.

Содержание диссертации

Во введении дано обоснование актуальности выбранной автором темы диссертации, сформулированы цель и задачи работы, аргументирована научная новизна проводимых исследований. Приведен краткий обзор используемого метода функций Ляпунова-Лагранжа, обобщающего метод функций Кротова В.Ф. на стохастические системы. Перечислены полученные в диссертационной работе новые результаты, их практическая ценность, описана структура диссертации.

В первой главе для удобства изложения приводятся используемые в диссертации результаты работ Хрусталева М.М. [44–46], адаптированные для рассматриваемых в диссертации задач.

Во второй главе рассматривается линейная управляемая стохастическая система, функционирующая на неограниченном интервале времени. Обсуждается результат полученный Хрусталевым М.М. [46] для линейных стохастических систем – условия экстремальности стабилизирующей стратегии управления. Получены и доказаны строгие необходимые условия оптимальности линейного регулятора неполной обратной связи. Предлагается численный метод синтеза оптимального регулятора градиентного типа, работа которого продемонстрирована на модельном примере и задаче стабилизации орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ) с гибкой штангой.

В третьей главе рассматривается задача оптимизации квазилинейной стохастической системы, функционирующей на неограниченном интервале времени, матрицы которой зависят от векторного параметра, – задача оптимизации облика системы. Получены необходимые условия в поставленной задаче. Произведена их конкретизация для управляемой по выходу системы, включая частный случай – симметрической управляемой по выходу системы, а также для управляемой системы при полной информации о векторе состояния и системы с пропорциональ-интегрально-дифференциальным регулятором. На основе полученных необходимых условий разработан градиентный численный метод синтеза оптимальной системы, который был опробован на ряде модельных примеров. Рассмотрена прикладная задача стабилизации движения беспилотного летательного аппарата, относящаяся к авиационно-космическому комплексу.

В четвертой главе получены условия второго порядка в задаче оптимизации облика квазилинейных стохастических систем. Проверка достаточных условий продемонстрирована на модельном примере в случае полной информации о состоянии системы и случае информационных ограничений.

В заключении подведены основные итоги данной работы, сформулированы результаты, представляемые диссертантом к защите, а также предложены некоторые перспективные направления дальнейших исследований в области оптимизации квазилинейных стохастических систем.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: 4-я и 5-я Традиционные молодёжные школы «Управление, информация и оптимизация» (Россия, Звенигород, 2012 г.; Россия, Солнечногорск, 2013 г.), 11-я, 12-я и 14-я международные конференции «Авиация и космонавтика» (Россия, Москва, 2012, 2013, 2015 гг.), Московская молодежная научно-практическая конференция «Инновации в авиации и космонавтике-2013» (Россия, Москва, 2013 г.), XII

Всероссийское совещание по проблемам управления (Россия, Москва, 2014 г.), Международная конференция по математической теории управления и механике (Россия, Суздаль, 2015 г.), 42-я Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения-2016» (Россия, Москва, 2016 г.), XII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) (Россия, Москва, 2016 г.).

Материалы диссертации представлялись на конференциях: Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС-2013) (Украина, Алушта, 2013 г.), XX молодежной научно-практической конференции «Наукоёмкие информационные технологии» (Россия, с. Дивноморское, 2016 г.).

Работа поддержана грантами РФФИ (13-08-01120, 15-07-09091, 16-08-00472) и государственным финансированием Минобрнауки РФ (задание №1.1191.201К).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 научных статьях [43, 53, 54] в журналах, входящих в перечень ВАК, в 3 статьях [52, 55, 56] в различных журналах, сборниках и материалах конференций, в сборниках тезисов докладов конференций [39–41, 57–61] на русском и английском языках. Общее число публикаций — 14. Зарегистрирована программа для ЭВМ [42].

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность научному руководителю профессору М. М. Хрусталеву, заведующему кафедрой «Математическая кибернетика» МАИ профессору А. В. Пантелееву, доценту Е. А. Руденко и доценту С. В. Иванову за разностороннюю помощь, оказанную диссертанту в процессе исследований и написания диссертации.

Глава 1

Синтез оптимальных стохастических систем на неограниченном интервале времени

В первой главе для удобства изложения приводятся используемые в диссертации результаты работ Хрусталева М.М. [44–46].

В разделе 1.1 приводится диффузионная стохастическая система общего вида, функционирующая на неограниченном интервале времени и описываемая стационарным дифференциальным уравнением Ито.

В раздеме 1.2 обсуждается переход от описания управляемого процесса в виде системы дифференциальных уравнений Ито к форме описания эволюции вероятностной меры, характеризующей распределение состояния диффузионного процесса, в виде обыкновенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве (обобщенное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК)).

В разделе 1.3 приводятся достаточные условия стабильность стохастической системы, функционирующей на неограниченном интервале времени, из работы [46].

В разделе 1.4 комментируется адаптация для рассматриваемых в диссертации линейных и квазилинейных систем метода функций Ляпунова-Лагранжа и функцинала Лагранжа, который играет важную роль при доказательствах условий оптимальности, полученных в главах 2, 3.

1.1 Описание управляемой стохастической системы

Введем обозначения: R^r – r-мерное ($r \geq 1$) евклидово пространство векторов $y = (y_1, \ldots, y_r)^{\mathrm{T}}$; $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ – операция транспонирования.

Процесс управления описывается системой уравнений Ито [26]:

$$\begin{gathered} dx(t) = f(x(t), u(x(t)))dt + g(x(t), u(x(t)))dw(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $t \in [0, +\infty)$ – время функционирования системы; $x \in R^n$ – состояние системы; $w(t) \in R^{n_w}$ – стандартный винеровский процесс; $u \in R^{n_u}$ – вектор управления.

Компоненты функций $(x, u) \to f(x, u) : R^n \times U \to R^n$, $(x, u) \to g(x, u) : R^n \times U \to R^{n \times n_w}$, $x \to u(x) : R^n \to U$ заданы и измеримы по Борелю, $U \subset R^{n_u}$ – заданное множество. Множество стратегий $u^* = u(\cdot)$ управления обозначим через V.

1.2 Обобщенное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова

Хрусталевым М.М. исследовалась бескоалиционная неантагонистическая дифференциальная игра многих лиц, осуществляющих совместное управление стохастическим диффузионным процессом, и получены достаточные условия равновесия по Нэшу [44, 45].

Для одного игрока задача вырождается в задачу стохастического оптимального управления диффузионным процессом с информационными ограничениями (1.1).

Обычно предполагается, что для процесса (1.1) существует плотность вероятности состояния и эта плотность $(t, x) \to p(t, x) : T \times R^n \to R^1$ непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема, тогда она удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова. Здесь T – ограниченное время функционирования системы.

В работе [44] рассматривается более общий случай, когда распределение состояния x системы (1.1) в момент времени t задается борелевской вероятностной мерой $P^*(t)$ из специально сконструированного пространства мер M, пополнение $\bar{M}$ которого представляет собой банахово пространство. Через $M^* \subset M$ обозначим подмножество вероятностных мер. Введем обозначение

$$t \to P^*(t) = P(t, \cdot) : [0, +\infty) \to M^*.$$

Эволюция вероятностной меры $P(t,\cdot)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением в банаховом пространстве $\bar{M}$ (обобщенное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК)

$$\frac{dP^*(t)}{dt} = F(P^*(t), u^*) \tag{1.2}$$

с начальным условием

$$P^*(0) = P_0^*, \qquad P_0^*(\cdot) \in M_0^* \subset M^* \tag{1.3}$$

из заданного множества M_0^* начальных распределений. При фиксированных $q \in M^*$, $\omega \in V$ квазимера $\mu_F(\cdot) \in \bar{M}$, представляющая собой значение функции $(q,\omega) \to F(q,\omega) : M^* \times V \to \bar{M}$, определяется равенством

$$\int\limits_{R^n} \eta(x)\mu_F(dx) = \int\limits_{R^n} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_i} f_i(x,\omega(x)) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(x,\omega(x)) \right] q(dx), \tag{1.4}$$

которое должно выполняться для любых функций $x \to \eta(x) : R^n \to R^1$ из C_0^2. Здесь a_{ij} есть элемент матрицы $gg^{\mathrm{T}}/2$, C_0^2 – пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций на R^n, аннулирующихся вне некоторого шара в R^n.

Такое представление позволяет не использовать классическое уравнение ФПК, а следовательно охватывает случаи: когда распределение состояния системы в каждый момент времени задается вероятностной мерой произвольного вида; если же мера имеет плотность, нет необходимости предполагать ее непрерывность и дифференцируемость.

При заданной функции $u(x) \in V$ решением задачи Коши (1.2), (1.3) является абсолютно непрерывная функция $P^*(t)$, удовлетворяющая начальному условию (1.3) и почти всюду на $[0,+\infty)$ уранению (1.2).

Тождество (1.4) в каждой конкретной задаче может выполняться для более широкого класса функций $\eta(x)$, чем класс C_0^2. Обозначим через $W^* \supset C_0^2$ расширенный класс функций $\eta(x)$, для которых при любом $\omega(\cdot) \in V$ справедливо тождество (1.4).

Условие А. Всюду при использовании функций $\eta(x)$ достаточно выполнения следующего более слабого условия, чем $\eta(x) \in W^*$. Равенство (1.4) должно выполняться вдоль любого решения $P(t,\cdot)$ уравнения (1.2) с начальным условием (1.3), т. е. при

$$\mu_F(\cdot) = \frac{d}{dt}P(t,\cdot), \qquad q(\cdot) = P(t,\cdot),$$

для почти всех t на интервале $[0,+\infty)$.

1.3 Достаточные условия стабильности стохастической системы

Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет информационным ограничениям: каждая компонента функции $u(x)$ зависит от своего заданного заранее набора компонент вектора состояния. Функцию $u(x)$, удовлетворяющую указанным требованиям, будем называть допустимой стратегией управления.

Обозначим через D_∞ множество допустимых процессов управления $z = (P^*(\cdot), u^*)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $u^* = u(\cdot) \in V$ – допустимая стратегия управления;

2. начальная мера $P^*(t_0) = P_0^*$ выбирается из заданного множества M_0^*;

3. при заданной стратегии управления u^* и заданной начальной мере P_0^* функция $P^*(t)$ (траектория) есть решение уравнения (1.2) с начальным условием (1.3).

Пусть задана измеримая по Борелю функция $(t, u) \to f^c(x, u) : R^n \times U \to R^1$. Вводится в рассмотрение функционал

$$z \to J(z) = \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \int_{R_n} f^c(x, u(x)) P(t, dx) dt, \tag{1.5}$$

определенный на некоторых элементах множества D_∞ (множество таких элементов может быть и пусто). Учитывая последний факт, через $D_\infty^0 \subset D_\infty$ обозначим множество элементов из D_∞, для которых функционал (1.5) определен.

В работе [46] получены достаточные условия в задаче оптимального управления (оптимальной стабилизации системы (1.1)) на множестве D_∞^0 и задаче стабилизации (не обязательно оптимальной).

В диссертационной работе для формулировки результата требуются результаты по задаче стабилизации. Понадобится следующее условие регулярности [46]. Фиксируем стратегию $\bar{u}^* \in V$. Будем говорить, что для стратегии $\bar{u}^*$ выполнено условие регулярности относительно функции $q \to \phi^0(q) : M^* \to R^1$, если для любого процесса $z = (P^*(\cdot), \bar{u}^*) \in D_\infty$ функция $t \to \phi^0(P^*(t)) : [t_0, +\infty) \to R^1$ ограничена.

Определение 1.1. *Допустимая стратегия $\bar{u}^* = \bar{u}(\cdot) \in V$ называется стабилизирующей стратегией, если для любого процесса $\bar{z} = (P^*(\cdot), \bar{u}^*) \in D_\infty$, использующего стратегию $\bar{u}^*$, функционал* (1.5) *определен ($\bar{z} \in D_\infty^0$) и значение критерия* (1.5) *одно* *и то же для всех таких процессов*

$$J(\bar{z}) = \bar{\gamma}. \tag{1.6}$$

Величину $\bar{\gamma}$ в этом случае назовем стабильным значением критерия.

Нижеследующая теорема 1.1 дает достаточное условие стабилизации системы (1.1) по критерию (1.5).

Теорема 1.1. *[46]. Пусть функция $\psi^0(\cdot) \in C^2 \cap W^*$ (C^2 – пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций на R^n), допустимая стратегия $\bar{u}^* = \bar{u}(\cdot) \in V$ и число $\bar{\gamma}$ удовлетворяют условиям:*

1. для стратегии $\bar{u}^*$ выполнено условие регулярности относительно функции

$$\phi^0(q) = \int\limits_{R^n} \psi^0(x) q(dx) : M^* \to R^1;$$

2. $h(x.\bar{u}(x)) = \bar{\gamma}$, $x \in R^n$.

Тогда стратегия $\bar{u}(\cdot)$ является стабилизирующей стратегией, а число $\bar{\gamma}$ – стабильным значением критерия. Здесь

$$h(x,u) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x,u) \frac{\partial}{\partial x_i} \psi^0(x) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,u) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \psi^0(x) + f^c(x,u). \tag{1.7}$$

1.4 Метод функций Ляпунова-Лагранжа, функционал Лагранжа

Также понадобятся некоторые конструкции из [46] используемые в доказательствах. Важную роль для получения условий оптимальности процессов управления стохастическими системами на неограниченном интервале времени играет функционал Лагранжа, предложенный в работах Хрусталева М.М. [46]. Использование функционала Лагранжа дает возможность рассматривать вместо исходного критерия достаточное богатое многопараметрическое представление оптимизируемого функционала.

Введем в рассмотрение множество процессов D_T с элементами $z_T = (P_T^*(\cdot), u^*)$, получающимися из элементов множества D_∞ сужением функции $P^*(t)$ на интервал $T = [0, t_1]$, в результате которого получается функция $P_T^*(t) = P_T(t, \cdot)$.

Будем предполагать, что для всех элементов $z_T \in D_T$ определен функционал

$$z_T \to J_T(z) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{R_n} f^c(x, u(x)) P_T(t, dx) dt : D_T \to R^1. \tag{1.8}$$

В работах [44], [45] получены достаточные условия оптимальности в задаче о минимуме функционала (1.8) на элементах множества D_T с фиксированной начальной мерой P_0^*, аналогичные достаточным условиям В.Ф. Кротова для классической детерминированной задачи оптимального управления.

Для доказательства используется вектор функция Ляпунова-Лагранжа кротовского типа $\phi = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^l)$, $l \leq n$, с помощью которой строится функционал Лагранжа-Кротова, используемый для доказательства условий оптимальности. В диссертации используется лишь первая компонента ϕ^0 вектор-функции ϕ, а остальные считаются равными нулю, $\phi^k = 0$, $k = \overline{1, l}$. Поэтому используемые в диссертации конструкции из работ М.М. Хрусталева приведем для этого случая и вместо ϕ^0 будем использовать обозначение ϕ. Функция $(t, q) \to \phi(t, q) : T \times M_0^* \to R^1$ должна обладать следующими свойствами:

1. ϕ – локально липшицева на $T \times M_0^*$ и дифференцируема по Фреше по совокупности аргументов (t, q) всюду на $(T \setminus T_0) \times M^*$;

2. частная производная ϕ_q функции ϕ при всех $t \in T \setminus T_0$, $q \in M^*$ представима в виде
$$\phi_q q = \int\limits_{R^n} \xi(t, x, q(\cdot)) q(dx), \tag{1.9}$$
где функция $(t, x, q) \to \xi(t, x, q) : T \times R^n \times M^* \to R^1$ такова, что при каждых фиксированных $t \in T \setminus T_0$, $q \in M^*$ функция $\xi(t, \cdot, q) : R^n \to R^1$ есть функция из W^*.

Здесь $T_0 \subset T$ – множество нулевой меры на T, M_0^* – окрестность множества M^* в пространстве M (не $\bar{M}$)

Используемый в доказательствах функционал Лагранжа-Кротова имеет вид
$$L_T(z_t) = -\phi(t_1, P_T^*(t_1)) + \phi(0, P_0^*) + \\ + \int\limits_0^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, P_T^*(t)) + \int\limits_{R^n} K(t, x, u(x), P_T^*(t)) P_T(t, dx) \right] dt, \tag{1.10}$$
где
$$K(t, x, u, q) = \sum_{i=1}^n f_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} \xi(t, x, q) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, u) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \xi(t, x, q). \tag{1.11}$$

В [44] (лемма 2) доказано, что для любого элемента $z_T \in D_T$ функционал (1.10) определен и справедливо равенство
$$J_T(z_T) = L_T(z_T).$$

В работах [44–46] функционал (1.10) в более общей задаче используется для получения достаточных условий оптимальности. Несмотря на то, что функционалы J_T и L_T совпадают, функционал Лагранжа L_T обладает тем преимуществом, что он содержит свободную для выбора функцию $\phi(t,q)$ (аналог вектора множителей Лагранжа в конечномерных задачах), позволяющую получить достаточно конструктивные условия оптимальности.

В диссертации используется еще более конкретная форма функционала Лагранжа (1.10) с функцией $\phi(t,q)$ вида

$$\phi(t,q) = \bar{\gamma} t_1 + \int\limits_{R^n} \psi^0(x) q(dx),$$

где $\psi^0(x)$ – квадратичная или линейно-квадратичная функция вида

$$\psi^0(x) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} M_\psi x + \xi_\psi^{\mathrm{T}} x. \tag{1.12}$$

Здесь $\bar{\gamma}$ – постоянное число, M_ψ – постоянная матрица и ξ_ψ^{T} – постоянный вектор.

В этом случае функционал Лагранжа (1.10) принимает вид

$$L(z_T) = -\int\limits_{R^n} \psi^0(x) P_T(t_1, dx) + \int\limits_{R^n} \psi^0(x) P_0^*(dx) + \bar{\gamma} t_1 + \\ + \int\limits_0^{t_1} \left[-\bar{\gamma} + \int\limits_{R^n} h(x, u(x)) P_T(t, dx) \right] dt, \tag{1.13}$$

где функция $h(x,u)$ определяется равенством (1.7).

Для корректности равенства (1.2) и теоремы 1.1 с функцией $\psi^0(x)$ вида (1.12) требуется выполнение включения

$$\psi^0(\cdot) \in W^* \tag{1.14}$$

или более слабого условия A. В работах [44–46] изучались достаточные условия оптимальности и включение (1.14) можно было предполагать. Здесь же изучаются необходимые условия оптимальности, в связи с чем для рассматриваемого класса задач его нужно доказывать. Такое доказательство для квазилинейных систем (линейные – частный случай) дается леммой 3.1 в главе 3.

Всюду в диссертации предполагается, что вероятностная мера $P(t,\cdot)$ процесса является решением обобщенного уравнения ФПК (1.2) с начальным условием (1.3).

1.5 Выводы по главе 1

В первой главе для удобства изложения приводятся используемые в диссертации результаты работ Хрусталева М.М. [44–46]. Приводится обобщенное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, которое используется в разделе 3.6 при определении множества допустимых процессов в задаче оптимизации управляемой квазилинейной стохастической системы в случае полной информации о состоянии. Для стохастических систем с информационными ограничениями, функционирующих на неограниченном интервале времени, приведены известные достаточные условия стабильности [46]. При получении и доказательстве новых условий оптимальности (глава 2, 3) применяются функции Ляпунова-Лагранжа и функционал Лагранжа, конретизация вида которых для рассматриваемых квазилинейных систем была приведена в разделе 1.4.

Глава 2

Синтез оптимальных регуляторов линейных стохастических систем при неполной информации о состоянии

Рассматривается задача синтеза оптимального регулятора для линейной стохастической системы, функционирующей на неограниченном интервале времени, с квадратичным критерием, характеризующим средние затраты величины, определяющей оптимальность процесса, в единицу времени. Предполагается, что измерению и, соответственно, использованию при управлении доступны не все компоненты вектора состояния.

В пункте 2.2 обсуждается результат полученный Хрусталевым М.М. [46] для линейных стохастических систем – условия экстремальности стабилизирующей стратегии управления. В [46] показано, во-первых, что решением задачи АКОРСС является линейный регулятор, во-вторых, что для линейных систем, функционирующих на неограниченном интервале времени, с квадратичным критерием качества метод Лагранжа сводит проблему построения стратегии управления к решению системы матричных уравнений. Для удобства изложения эти матричные уравнения приводятся здесь.

Далее постулируется, что допустимый класс стратегий управления – это линейные регуляторы неполной обратной связи. И в этом классе получены и доказаны строгие необходимые условия оптимальности, приведенные в п. 2.3. Также показано, что условия работы [46], приведенные в п. 2.2, эквивалентны полученным необходимым условиям в случае невырожденности предельной (при $t \to \infty$) матрицы ковариаций.

В п. 2.4 определено свойство вполне возмущаемости системы, которое позволяет исследовать вопрос единственности оптимального регулятора, и предложен необходимый и достаточный критерий его наличия.

В п. 2.5 предлагаются два численных метода синтеза оптимального регулятора линейных стохастических систем: простой алгоритм итерационного типа, основанный на условиях оптимальности работы [46], и градиентный метод, основанный на полученных необходимых условиях оптимальности. Произведено сравнение численных методов на модельном примере, а также решена задача стабилизации орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ) с гибкой штангой.

2.1 Постановка задачи

Пусть поведение модели объекта управления описывается линейным дифференциальным уравнением Ито вида

$$dx = (Ax + Bu)dt + Cdw, \tag{2.1}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}} \in R^n$ – вектор состояния системы; $u = (u_1, ..., u_{n_u})^{\mathrm{T}} \in R^{n_u}$ – вектор управления; $w = (w_1, ..., w_{n_w})^{\mathrm{T}} \in R^{n_w}$ – стандартный винеровский процесс; $t \in [0, +\infty)$ – время функционирования системы; A, B, C – постоянные матрицы размера $(n \times n)$, $(n \times n_u)$, $(n \times n_w)$ соответственно.

Минимизируемый критерий оптимальности имеет вид

$$\begin{gathered} J_\infty = \frac{1}{2} \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{R^n} f^c(x,u) P(t,dx)dt, \\ f^c(x,u) = x^{\mathrm{T}}Qx + 2u^{\mathrm{T}}Sx + u^{\mathrm{T}}Du, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $f^c(x,u)$ – неотрицательная квадратичная форма; Q, S, D – матрицы размера $(n \times n)$, $(n_u \times n)$, $(n_u \times n_u)$ соответственно; D – симметрическая, положительно определенная матрица. Внутренний интеграл в (2.2) представляет собой математическое ожидание «мгновенных потерь». Вероятностная мера $P(t, \cdot)$ задает распределение состояния x системы (2.1) в момент времени t. Предполагается, что начальная плотность распределения $p_0(x) = p(t_0, x)$ вектора состояния x задана, гауссова и невырожденная.

Измерению и, соответственно, использованию при управлении доступны не все компоненты вектора состояния. Эти ограничения будем называть информационными. В общем случае каждая компонента вектора управления u может зависеть лишь от своего, назначаемого априори, набора компонент вектора состояния x.

2.2 Экстремальная стабилизирующая стратегия

Используя достаточные условия равновесия по Нэшу, Хрусталевым М.М. были получены локальные условия равновесия первого порядка, составляющие содержание метода Лагранжа [45]. В частном случае одного игрока это условия первого порядка в задаче оптимального управления. Однако, полученные условия не являются необходимыми условиями оптимальности. Они представляют собой необходимые условия выполнения предположений теоремы, которая дает достаточные условия оптимальности. ***Экстремальной стабилизирующей стратегией*** называется (согласно терминологии работ Хрусталева М.М.) стратегия, удовлетворяющая этой линеаризации достаточных условий оптимальности.

Хрусталевым М.М. было показано [46], что для линейных систем, функционирующих на неограниченном интервале времени, с квадратичным критерием метод Лагранжа сводит проблему построения стратегии управления к решению системы матричных уравнений. Хрусталевым М.М. была получена система уравнений для определения экстремальной стабилизирующей стратегии $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$, экстремального значения критерия $\bar{\gamma}$, вспомогательной матрицы M размеров $n \times n$, матрицы множителей Лагранжа K, отвечающей за информационные ограничения, размеров $n_u \times n$ и ковариационной матрицы $\Gamma^{\infty} = \bar{H}^{-1}$ предельной плотности распределения

$$\bar{p}(x) = \bar{G}exp(-x^{\mathrm{T}}\bar{H}x/2). \tag{2.3}$$

Это следующая система уравнений:

$$\bar{G} = 1/\sqrt{(2\pi)^n|\Gamma^{\infty}|}, \tag{2.4}$$

$$A_{\bar{u}}\Gamma^{\infty} + \Gamma^{\infty}A_{\bar{u}}^{\mathrm{T}} + CC^{\mathrm{T}} = 0, \tag{2.5}$$

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2}tr(CC^{\mathrm{T}}M), \tag{2.6}$$

$$MA_{\bar{u}} + A_{\bar{u}}^{\mathrm{T}}M + \bar{L}^{\mathrm{T}}D\bar{L} - S^{\mathrm{T}}\bar{L} - \bar{L}^{\mathrm{T}}S + Q = 0, \tag{2.7}$$

$$\bar{L} = D^{-1}(B^{\mathrm{T}}M + S - K(\Gamma^{\infty})^{-1}). \tag{2.8}$$

Здесь и далее $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$, M – симметрическая матрица. При этом в условиях (2.4) и (2.8) предполагается, что определитель $|\Gamma^{\infty}| \neq 0$. Равенство (2.4) – это условие нормировки предельной плотности (2.3).

Если все компоненты стратегии управления $\bar{u}(x)$ зависят от одних и тех же компонент вектора x, то матрица Лагранжа K находится по следующему алгоритму. Строится диагональная информационная матрица $\Omega = diag(\omega_1, ..., \omega_n)$, где $\omega_\alpha = 0$, если компонента x_α вектора x доступна измерению, и $\omega_\alpha = 1$, если x_α не может быть измерена. Матрица K задается равенством

$$K = (B^{\mathrm{T}}M + S)\Omega(\Omega(\Gamma^{\infty})^{-1}\Omega + I - \Omega)^{-1}, \tag{2.9}$$

где I – единичная матрица размеров $n \times n$. Если состав измерений различен для групп компонент стратегии $\bar{u}(x)$, то уравнения (2.8), (2.9) записываются для строк матриц $\bar{L}$ и K, соответствующих каждой группе, с использованием своей информационной матрицы Ω.

В [46] доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.1. *[Хрусталев М. М.] Стратегия* $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$, *где* $\bar{L}$ *удовлетворяет информационным ограничениям, является экстремальной стабилизирующей стратегией управления, а экстремальное значение критерия* (2.2) *равно числу* $\bar{\gamma} = tr(CC^{\mathrm{T}}M)/2$, *если величины* $\bar{G}, \bar{\gamma}$ *и матрицы* Γ^{∞}, $\bar{L}$, M, K, $|\Gamma^{\infty}| \neq 0$ *удовлетворяют системе уравнений* (2.3)–(2.9) *и матрица* $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$ *асимптотически устойчива.*

Замечание 2.1. *В случае, когда измеряются все компоненты вектора состояния,* $K = 0$ *и уравнение* (2.7) *решается независимо от других. В этом случае найденная по теореме 2.1 стратегия не зависит от* C *и* $\bar{\Omega}$. *Она совпадает с оптимальной стратегией в детерминированной задаче управления линейной системой* (2.1) *при* $C = 0$ *с квадратичным критерием*

$$J_{det} = \int_0^{\infty} (\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}Sx + \frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}Du)dt$$

(классической задаче АКОР). Эта стратегия будет оптимальна для любой линейной стохастической системы вида (2.1) *при* $C \neq 0$ *(даже если начальное распределение* $p_0(x)$ *не является гауссовым). В зависимости от* C *будет изменяться лишь оптимальное значение критерия* (2.6).

Теорема 2.2. *Если матрица $\bar{L} \in \mathcal{L}$ такова, что стратегия $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$ обеспечивает асимптотическую устойчивость матрицы $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$, то стратегия $\bar{u}(x)$ является стабилизирующей стратегией и стабильное значение критерия дается формулой* (2.6), *где матрица M находится из уравнения* (2.7).

Таким образом показано, что решением задачи АКОРСС является линейный регулятор. Однако, этот вывод сделан исходя из линеаризованных достаточных условий оптимальности регулятора (метод Лагранжа) и, строго говоря, приведенные условия (2.3)-(2.9) не являются необходимыми условиями его оптимальности.

2.3 Необходимые условия оптимальности линейного регулятора

В диссертационной работе постулируется, что допустимый класс стратегий управления – это линейные регуляторы $u(x)$ неполной обратной связи удовлетворяющие информационным ограничениям

$$x \to u(x) = -Lx : R^n \to R^{n_u}, \tag{2.10}$$

где L – постоянная матрица размеров $n_u \times n$. Формально наличие информационных ограничений состоит в том, что элементы L_{ij}, $i = \overline{1, n_u}$ матрицы $\{L_{ij}\}$ равны нулю, если компонента x_j вектора состояния x не может использоваться в управлении $u(x)$. Множество таких допустимых матриц L обозначим через $\mathcal{L}$.

И в классе линейных регуляторов вида (2.10) получены ***строгие необходимые условия оптимальности***, приведенные ниже.

Пусть $P_0 = P(t_0, \cdot)$ есть вероятностная мера, задающая распределение состояния x системы (2.1) в начальный момент времени. Следуя [46], для заданной начальной меры P_0 через $z_\infty = (P(t, \cdot), u(\cdot))$, $t \in [0, +\infty)$ обозначим произвольный линейный процесс, соответствующий произвольной линейной стратегии (2.10). Рассмотрим сужение этого процесса $z_T = (P_T(t, \cdot), u(\cdot))$ на интервал $[0, t_1]$, $t_1 < +\infty$. Тогда критерий

$$J^1(z_T) = \int_0^{t_1} \int_{R^n} f^c(x, u(x)) P(t, dx) dt$$

может быть точно вычислен по формуле (1.13), где $\bar{\gamma}$ определяется равенством (2.6),

$\psi^0(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Mx,$

$$h(x, L) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\Psi(L)x + \frac{1}{2}tr(CC^{\mathrm{T}}M), \tag{2.11}$$

$$\Psi(L) = MA_u + A_u^{\mathrm{T}}M + L^{\mathrm{T}}DL - S^{\mathrm{T}}L - L^{\mathrm{T}}S + Q, \quad A_u = A - BL. \tag{2.12}$$

Справедливость условия A для используемой здесь функции $\psi^0(x)$ определяется леммой 3.1 (раздел 1.4) для квазилинейных систем. Рассматриваемая здесь линейная стохастическая система (2.1) является частным случаем квазилинейной системы (3.1). Справедливость условия A, в свою очередь, устанавливает корректность использования формулы (1.2).

Если матрица A_u асимптотически устойчива, то по теореме 2.2 критерий (2.2) конечен и может быть записан в виде

$$J_\infty(z_\infty) = \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} J^1(z_T). \tag{2.13}$$

Учитывая (1.13), (2.13), получим

$$J_\infty(z_\infty) = \bar{\gamma} + \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \left[-\int_{R^n} \psi^0(x) P_T(t_1, dx) + \int_{R^n} \psi^0(x) P_0(dx) \right] + \\ + \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \left(-\bar{\gamma} + \int_{R^n} h(x, L) P_T(t, dx) \right) dt. \tag{2.14}$$

В [46] показано, что второе слагаемое в правой части (2.14) равно нулю, и с учетом (2.6), (2.11) получим

$$J_\infty(z_\infty) = \bar{\gamma} + \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \left(-\bar{\gamma} + \int_{R^n} h(x, L) P_T(t, dx) \right) dt = \\ = \bar{\gamma} + \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \int_{R^n} \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} \Psi(L) x P_T(t, dx).$$

Так как при всех $t \in [0, +\infty)$ мера $P(t, \cdot)$ гауссова, то

$$J_\infty(z_\infty) = \bar{\gamma} + \frac{1}{2} \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} tr(\Gamma_p(t)\Psi(L))dt,$$

где $\Gamma(t)$ – ковариационная матрица меры $P(t, \cdot)$.

В случае асимптотически устойчивой матрицы A_u функция $\Gamma(t)$ имеет предел $\Gamma^\infty(L) = \lim_{t\to+\infty}\Gamma(t)$. Предельная матрица ковариаций $\Gamma^\infty(L)$ удовлетворяет уравнению [22, с. 203]

$$A_u\Gamma^\infty(L) + \Gamma^\infty(L)A_u^{\mathrm{T}} + CC^{\mathrm{T}} = 0, \quad A_u = A - BL, \tag{2.15}$$

которое аналогично уравнению (2.5).

В результате критерий (2.2) рассматриваемой задачи определяется равенством

$$J_\infty(z_\infty) = \bar{\gamma} + \frac{1}{2}tr(\Gamma^\infty(L)\Psi(L)). \tag{2.16}$$

Так как L – набор конечного числа параметров, то критерий $J_\infty(z_\infty)$ есть функция конечного числа переменных.

Таким образом, сформулируем эквивалентную (2.1)-(2.2) детерминированную задачу.

Требуется минимизировать функцию

$$J_\infty(z_\infty) = F(L) = \bar{\gamma} + \frac{1}{2}tr(\Gamma^\infty(L)\Psi(L)) \to \min_{L\in\mathcal{L}}, \tag{2.17}$$

где $\Gamma^\infty(L)$ удовлетворяет (2.15), $\bar{\gamma}$ и $\Psi(L)$ определяются выражениями (2.6), (2.12) соответственно.

Эквивалентность задач (2.1)-(2.2) и (2.17) понимается в том смысле, что функция $F(L)$ и критерий (2.2) принимают одно и то же значение для всех $L \in \mathcal{L}$. И в результате их минимальные значения совпадают.

Функция $F(L)$ есть функция Лагранжа [45, 46], соответствующая исходному критерию (2.2) и ограничению (2.15), заменяющему уравнение (2.1). Функция Лагранжа $F(L)$ совпадает с исходным критерием (2.2) при любой постоянной матрице M, если выполнено ограничение (2.15) [45, 46]. Матрица M играет роль множителей Лагранжа и выбирается так, чтобы упростить условия оптимальности.

Уместно привести некоторые комментарии относительно используемой здесь технологии применения функции Лагранжа $F(L)$. Если для решения задачи (2.17) напрямую применять метод множителей Лагранжа, то необходимо приравнивать нулю производные по компонентам матриц L и Γ^∞. Здесь используется другой путь. Предполагается, что матрица Γ^∞ неявно выражена через L из уравнения (2.15) и подставлена в функцию Лагранжа F. Так как ограничение (2.15) – ограничение типа равенства, то функция Лагранжа F тождественно равна исходной оптимизируемой функции $F_0(L)$, получающейся, если положить $M=0$,

$$F_0(L)=\frac{1}{2}tr[\Gamma^{\infty}(L^{\mathrm{T}}DL-S^{\mathrm{T}}L-L^{\mathrm{T}}S+Q)].$$

Однако возникает вопрос, зачем же тогда использовать функцию Лагранжа? Дело в том, что при различных M имеется достаточно богатое многопараметрическое представление оптимизируемой функции, позволяющее далее упростить вычисление ее градиента. Более того, в представленном ниже градиентном методе это представление изменяется от шага к шагу, так как на каждом шаге используется своя матрица M.

Убедиться в том, что $F(L)=F_0(L)$ при любой матрице M, можно непосредственно. Действительно, умножая левую и правую части уравнения (2.15) справа на M и используя (2.6), получим

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}=\frac{1}{2}tr(CC^{\mathrm{T}}M)=-\frac{1}{2}tr(A_u\Gamma^{\infty}M+\Gamma^{\infty}A_u^{\mathrm{T}}M)=\\ =-tr(\Gamma^{\infty}MA_u+\Gamma^{\infty}A_u^{\mathrm{T}}M)=-tr[\Gamma^{\infty}(MA_u+A_u^{\mathrm{T}}M)].\end{aligned}$$

Учитывая полученное равенство, вид (2.17) функции $F(L)$ и равентсво (2.12) для функции $\Psi(L)$, нетрудно видеть, что $F(L)=F_0(L)$ при любой матрице M.

Сформулированная эквивалентная задача (2.17), к сожалению, в общем случае не является выпуклой, так как величина L входит в функцию $F(L)$ весьма сложно. Кроме того, имеются соображения, что полученные ниже необходимые условия оптимальности не являются достаточными.

Пусть $L=\bar{L}$, матрица $A_{\bar{u}}$ асимптотически устойчива и $\bar{u}(x)=-\bar{L}x$ – оптимальный регулятор. Тогда если $F(L)$ дифференцируема по L в точке $L=\bar{L}$, и необходимые условия минимума функции (2.17) очевидны.

Таким образом, для получения необходимых условий нужно доказать, что функция $F(L)$ дифференцируема в точке $L=\bar{L}$, и выписать в конструктивной форме ее градиент $\partial F/\partial L$ в точке $\bar{L}$. Градиент функции $F(L)$ по компонентам матрицы L будем записывать в виде матрицы (матричный градиент)

$$\frac{\partial F}{\partial L}=\left\{\frac{\partial F}{\partial L_{ij}}\right\},i=\overline{1,n_u},j=\overline{1,n}.$$

Теорема 2.3. *Пусть матрица $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$ асимптотически устойчива, тогда функция $F(L)$ дифференцируема в точке $L = \bar{L}$ и ее градиент имеет вид*

$$\left.\frac{\partial F}{\partial L}\right|_{L=\bar{L}} = \left(-B^{\mathrm{T}}M - S + D\bar{L}\right)\Gamma^{\infty}, \tag{2.18}$$

где матрицы Γ^{∞} и M удовлетворяют уравнениям (2.5), (2.7).

Доказательство. При фиксированной матрице M, как следует из (2.12), элементы матрицы $\Psi(L)$ дифференцируемы по элементам матрицы L. Матрица $\Gamma^{\infty}(L)$ является решением уравнения Ляпунова (2.15), которое, по существу, есть система линейных уравнений. В силу асимптотической устойчивости матрицы A_u решение уравнения (2.15) существует [2, с. 144], и элементы матрицы $\Gamma^{\infty}(L)$ дифференцируемы по элементам L в точке $L = \bar{L}$.

Тогда

$$\left.\frac{\partial F}{\partial L_{ij}}\right|_{L=\bar{L}} = \frac{1}{2}tr\left.\left(\frac{\partial\Gamma^{\infty}(L)}{\partial L_{ij}}\Psi(L) + \Gamma^{\infty}(L)\frac{\partial\Psi(L)}{\partial L_{ij}}\right)\right|_{L=\bar{L}}, i = \overline{1, n_u}, j = \overline{1, n}. \tag{2.19}$$

Как было указано выше, матрица M произвольная. В случае же выполнения условия (2.7), что требуется в теореме 2.3, равенство (2.19) упрощается, так как $\Gamma(\bar{L}) = 0$, и при вычислении компонент градиента $\partial F/\partial L_{ij}$ можно формально считать, что $\Gamma^{\infty}(L) = \Gamma^{\infty} = const$.

С учетом (2.12) и условия $\Gamma^{\infty}(L) = \Gamma^{\infty}$ выражение (2.16) запишется в виде

$$F(L) = \bar{\gamma} + \frac{1}{2}tr(\Gamma^{\infty}[M(A - BL) + (A - BL)^{\mathrm{T}}M + L^{\mathrm{T}}DL - S^{\mathrm{T}}L - L^{\mathrm{T}}S + Q]).$$

Отбрасывая слагаемые, не содержащие L (знак $\sim$), и принимая во внимание равенства $tr(MBL) = tr(L^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}M)$, $tr(S^{\mathrm{T}}L) = tr(L^{\mathrm{T}}S)$ [5], имеем

$$F(L) \sim -tr(\Gamma^{\infty}MBL) + \frac{1}{2}tr(\Gamma^{\infty}L^{\mathrm{T}}DL) - tr(\Gamma^{\infty}S^{\mathrm{T}}L).$$

Учитывая соотношения

$$\frac{\partial}{\partial L}(tr(MBL)) = (MB)^{\mathrm{T}}, \quad \frac{\partial}{\partial L}(tr(L^{\mathrm{T}}DL)) = D^{\mathrm{T}}L + DL,$$

получим выражение для градиента функции $F(L)$ в точке $\bar{L}$ при условии $\Gamma^{\infty}(L) = \Gamma^{\infty}$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial L}\right|_{L=\bar{L}} = (-B^{\mathrm{T}}M - S + D\bar{L})\Gamma^{\infty},$$

где Γ^{∞} и M находятся из выражений (2.5), (2.7).

□

Теорема 2.4. *Если матрица $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$, $\bar{L} \in \mathcal{L}$ асимптотически устойчива и $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$ – оптимальный линейный регулятор, минимизирующий критерий $J_{\infty}(z_{\infty})$ на $\mathcal{L}$, то выполнено условие*

$$\left.\frac{\partial F}{\partial L}(I - \Omega)\right|_{L=\bar{L}} = (-B^{\mathrm{T}}M - S + D\bar{L})\Gamma^{\infty}(I - \Omega) = 0, \tag{2.20}$$

где Γ^{∞} и M определяются выражениями (2.5) *и* (2.7) *соответственно, I – единичная матрица.*

Доказательство теоремы 2.4 вытекает из приведенных выше рассуждений.

Покажем теперь, что условия (2.3)-(2.9) эквивалентны условиям теоремы 2.4 в случае невырожденной предельной матрицы ковариаций Γ^∞.

Теорема 2.5. *Если матрица* $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$, $\bar{L} \in \mathcal{L}$ *асимптотически устойчива и* $|\Gamma^\infty| \neq 0$, *то условия* (2.3)-(2.9) *эквивалентны условию* (2.20) *и являются необходимыми условиями оптимальности линейного регулятора* $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$.

Доказательство. Не уменьшая общности, будем считать первые q компонент вектора состояния x доступными измерению, а остальные – нет. Тогда матрицы системы (2.1)-(2.2) и матрицы $\bar{L}$, Ω, Γ^∞ и $\bar{H}$ могут быть представлены в виде блоков, соответствующих измеряемым и неизмеряемым компонентам:

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} \bar{L}_1^{n_u\times q} & \bar{L}_2^{n_u\times(n-q)} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1^{q\times n_u} \\ B_2^{(n-q)\times n_u} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_1^{n_u\times q} & S_2^{n_u\times(n-q)} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D^{n_u\times n_u} \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0^{q\times q} & 0^{q\times(n-q)} \\ 0^{(n-q)\times q} & I^{(n-q)\times(n-q)} \end{bmatrix}, \quad \Gamma^\infty = \begin{bmatrix} (\Gamma^\infty)_{11}^{q\times q} & (\Gamma^\infty)_{12}^{q\times(n-q)} \\ (\Gamma^\infty)_{21}^{(n-q)\times q} & (\Gamma^\infty)_{22}^{(n-q)\times(n-q)} \end{bmatrix},$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{11}^{q\times q} & \bar{H}_{12}^{q\times(n-q)} \\ \bar{H}_{21}^{(n-q)\times q} & \bar{H}_{22}^{(n-q)\times(n-q)} \end{bmatrix}.$$

Обозначим $\Theta = B^{\mathrm{T}}M + S = \begin{bmatrix} \Theta_1^{m\times q} & \Theta_2^{m\times(n-q)} \end{bmatrix}$. Оперируя с блоками матриц, покажем, что $\bar{L}$, найденное из условий (2.3)-(2.9), совпадает с найденным из (2.20).

Умножив равенство (2.9) на $\bar{H}$ справа, имеем

$$K\bar{H} = \Theta\Omega(\Omega(\Gamma^\infty)^{-1}\Omega + I - \Omega)^{-1}\bar{H} = \begin{bmatrix} \Theta_2\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{21} & \Theta_2 \end{bmatrix},$$

где $\bar{H} = (\Gamma^\infty)^{-1}$. Из формулы (2.8) получим

$$\bar{L} = D^{-1}(\Theta - K\bar{H}) = D^{-1}(\begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Theta_2\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{21} & \Theta_2 \end{bmatrix}) = D^{-1}\begin{bmatrix} \Theta_1 - \Theta_2\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, используя равенство (2.18), имеем

$$\left.\frac{\partial F}{\partial L}\right|_{L=\bar{L}} = (-\Theta + D\bar{L})\Gamma^\infty = \begin{bmatrix} (-\Theta_1 + D\bar{L}_1)\Gamma_{11}^\infty - \Theta_2\Gamma_{21}^\infty & (-\Theta_1 + D\bar{L}_1)\Gamma_{12}^\infty - \Theta_2\Gamma_{22}^\infty \end{bmatrix}.$$

Первый блок матрицы $\partial F/\partial L$ в точке $\bar{L}$

$$(-\Theta_1 + D\bar{L}_1)\Gamma_{11}^\infty - \Theta_2\Gamma_{21}^\infty = 0,$$

так как градиент $\partial F(L)/\partial L$ для доступных измерению компонент равен нулю в точке экстремума $\bar{L}$.

Откуда с учетом $(\Gamma^\infty)_{21}(\Gamma^\infty)_{11}^{-1} = -\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{21}$ и симметричности матрицы $\bar{H}$ найдем блок $\bar{L}_1$. Блок $\bar{L}_2 = 0$, так как он соответствует недоступным измерению компонентам вектора x, и не может быть использован при управлении. Окончательно получим

$$\bar{L} = D^{-1}\begin{bmatrix} \Theta_1 - \Theta_2\bar{H}_{22}^{-1}\bar{H}_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, равенства (2.3)-(2.9) эквивалентны условиям теоремы 2.4 в случае, когда $|\Gamma^\infty| \neq 0$, и являются необходимыми условиями оптимальности регулятора $\bar{u}(x)$ при невырожденной предельной ковариационной матрице Γ^∞. $\square$

Таким образом, условия теоремы 2.4 являются более общими, чем условия работы [46].

2.4 Вполне возмущаемость системы. Вопрос о единственности оптимального регулятора

Если получена матрица $\bar{L}$, задающая экстремальную стабилизирующую стратегию $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$ и обеспечивающая асимптотическую устойчивость матрицы $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$, то интересен вопрос о ее единственности. Как отмечалось выше, если предельная ковариационная матрица Γ^∞ вырожденная, то предельные значения некоторого количества компонент вектора состояния x детерминированы, и часть коэффициентов регулятора $\bar{L}$ может быть задана произвольно. Однако, так как условия теоремы 2.4 лишь необходимые, нужно доказать, что выбор другого варианта матрицы $\bar{L}$ не изменит значение критерия оптимальности.

Введем новое понятие ***вполне возмущаемости системы***, аналогичное свойству вполне управляемости Калмана, которое позволит исследовать вопрос единственности оптимального регулятора.

Определение 2.1. *Замкнутую систему* (2.1) *с управлением* $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$, $\bar{L} \in \mathcal{L}$, *обеспечивающим асимптотическую устойчивость матрицы* $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$, *назовем вполне возмущаемой, если предельная ковариационная матрица* $\Gamma^\infty > 0$.

Теорема 2.6. *Для того, чтобы замкнутая система* (2.1) *с управлением* $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$, $\bar{L} \in \mathcal{L}$, *обеспечивающим асимптотическую устойчивость матрицы* $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$, *была вполне возмущаемой, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$rang(C, A_{\bar{u}}C, A_{\bar{u}}^2C, ..., A_{\bar{u}}^{n-1}C) = n. \tag{2.21}$$

Доказательство. Решение уравнения Ляпунова (2.5) имеет вид [2]

$$\Gamma^\infty = \int\limits_{t_0}^{\infty} X(t-\xi)CC^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}(t-\xi)d\xi, \tag{2.22}$$

где X – фундаментальная матрица системы (2.1) при $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$.

Хорошо известно, что система

$$\frac{dx}{dt} = A_{\bar{u}}x + Cv, \quad t \in [t_0, \infty),$$

где v – управление, является вполне управляемой тогда и только тогда, когда существует момент $t_1 > t_0$, такой что выполнено условие [1, 9]

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} X(t-\xi)CC^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}(t-\xi)d\xi > 0. \tag{2.23}$$

Так как матрица $X(t-\xi)CC^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}(t-\xi)$ в (2.22) неотрицательна при всех $t \geq t_0$, то условие (2.23) эквивалентно условию $\Gamma^{\infty} > 0$. В то же время необходимым и достаточным условием выполнения (2.23) является критерий [2, 9]

$$rang(C, A_{\bar{u}}C, A_{\bar{u}}^2C, ..., A_{\bar{u}}^{n-1}C) = n,$$

который, как видно, совпадает с (2.21) и, следовательно, является необходимым и достаточным условием выполнения неравенства $\Gamma^{\infty} > 0$. В силу определения 2.1 это означает справедливость теоремы 2.6. □

Замечание 2.2. *Как видно из доказательства, свойство вполне возмущаемости переходит в свойство вполне управляемости при замене возмущения dw на управление v. Поэтому все соотношения, справедливые для случая вполне управляемости, переносятся на свойство вполне возмущаемости.*

Если система является вполне возмущаемой, то уравнения (2.8), (2.9) имеют единственное решение. Эквивалентное им в силу теоремы 2.5 условие (2.20) в этом случае также имеет единственное решение $L = \bar{L}$.

Выясним, при каких условиях оптимальное управление будет не единственным. Система (2.1) с управлением $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$, обеспечивающим асимптотическую устойчивость матрицы $A_{\bar{u}} = A - B\bar{L}$, имеет вид

$$dx = A_{\bar{u}}xdt + Cdw. \tag{2.24}$$

Если система (2.24) не является вполне возмущаемой, т.е. $rang(C, A_{\bar{u}}C, A_{\bar{u}}^2C, ..., A_{\bar{u}}^{n-1}C) = n_2 < n$, то ортогональным преобразованием $x = \tilde{H}\tilde{x}$, где $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^{\mathrm{T}} & \tilde{x}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\tilde{x}_1 \in R^{n_1}$, $\tilde{x}_2 \in R^{n_2}$, $\tilde{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_1 & \tilde{H}_2 \end{bmatrix}$ – матрица преобразования, ее можно привести [1] к виду

$$\begin{cases} d\tilde{x}_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1dt, \\ d\tilde{x}_2 = (\tilde{A}_{21}\tilde{x}_1 + \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2)dt + \tilde{C}_2dw. \end{cases} \tag{2.25}$$

В этом случае в преобразованной системе координат матрица ковариаций равна

$$\Gamma^{\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22}^{\infty} \end{bmatrix},$$

где компонента Γ_{22}^{∞} имеет размеры $n_2 \times n_2$. И тогда, как видно из условия оптимальности (2.20), количество скалярных уравнений в (2.20) может быть меньше, чем количество компонент матрицы L, подлежащих определению. В результате может возникнуть континуальная неединственность значения матрицы L, удовлетворяющей условию оптимальности.

Для системы (2.25) экстремальное значение критерия определяется выражением

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{2} tr(\tilde{C}_2 \tilde{C}_2^{\mathrm{T}} M_{22}), \tag{2.26}$$

где M_{22} – блок матрицы

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (2.7) для блока M_{22} имеет вид

$$M_{22} \tilde{A}_{22} + \tilde{A}_{22}^{\mathrm{T}} M_{22} + V_{22} = 0,$$

где V_{22} – блок матрицы

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} = \tilde{H}^{\mathrm{T}} (\bar{L}^{\mathrm{T}} E \bar{L} - S^{\mathrm{T}} \bar{L} - \bar{L}^{\mathrm{T}} S + Q) \tilde{H},$$

и решается автономно.

Если матрице $\bar{L}$ дать возмущение ΔL так, что управление будет иметь вид $u(x) = -\bar{L}x - \Delta L x$, и наложить условия

$$\begin{aligned} &\tilde{H}^{\mathrm{T}} B \Delta L \tilde{H}_2 = 0, \\ &\Delta V_{22} = 0, \end{aligned} \tag{2.27}$$

где

$$\Delta V = \begin{bmatrix} \Delta V_{11} & \Delta V_{12} \\ \Delta V_{21} & \Delta V_{22} \end{bmatrix} = \tilde{H}^{\mathrm{T}} (\Delta L^{\mathrm{T}} E \bar{L} + \bar{L}^{\mathrm{T}} E \Delta L + \Delta L^{\mathrm{T}} E \Delta L - S^{\mathrm{T}} \Delta L - \Delta L^{\mathrm{T}} S) \tilde{H},$$

то при преобразовании $x = \tilde{H}\tilde{x}$ в канонической форме (2.25) получат возмущение только матрицы $\tilde{A}_{11}$ и $\tilde{A}_{21}$, а матрица $\tilde{A}_{22}$ и значение критерия (2.26) не изменятся.

Из этого следует, что решение рассматриваемой экстремальной задачи не единственно, если система уравнений (2.27) имеет решение, удовлетворяющее условию $\Delta L(I - \Lambda) \neq 0$.

2.4.1 Пример

Пусть система управления описывается уравнениями Ито

$$\begin{aligned} dx_1 &= (x_1 + u)dt, \\ dx_2 &= (-x_1 - 2x_2 + u)dt + dw, \end{aligned} \tag{2.28}$$

и измерению доступна лишь компонента x_1 вектора состояния, следовательно, матрица коэффициентов стратегии управления $L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \end{bmatrix}$.

Система (2.28) не является вполне возмущаемой, так как ранг матрицы (2.21) равен 1.

Подынтегральная функция критерия оптимальности (2.2) имеет вид

$$f^c = \frac{1}{2}(x_2^2 + u^2).$$

Используя выражения (2.5), (2.7) для матриц Γ^∞ и M, получим значения компонент матрицы ковариаций $\Gamma_{11}^\infty = \Gamma_{12}^\infty = \Gamma_{21}^\infty = 0$, $\Gamma_{22}^\infty = 1/4$ и компонент $M_{11} = -M_{12} = 1/4$,

$$M_{11} = -\frac{1}{4}\frac{1 + L_1}{1 - L_1} - \frac{1}{2}\frac{L_1^2}{1 - L_1}$$

матрицы M.

Условие оптимальности (2.20) выполняется тривиально, а оптимальное значение критерия, определяемое равенством (2.6), равно $\bar{\gamma} = 1/8$ и не зависит от компоненты L_1. Компонента L_1 выбирается исключительно из условия асимптотической устойчивости матрицы $A_{\bar{u}}$.

Независимость значения критерия от компоненты L_1 регулятора объясняется тем, что при $L_1 > 1$ (условие устойчивости) компонента $x_1 \to 0$ и $u = -L_1 x_1 \to 0$, когда $t \to +\infty$. В результате в пределе остается подсистема $dx_2 = -2x_2 dt + dw$ и критерий с функцией $f^c = \frac{1}{2}x_2^2$, так что величина коэффициента L_1 регулятора не оказывает никакого влияния.

2.5 Численные методы и моделирование

На основе полученных необходимых условий (теорема 2.4) разработан ***градиентный численный метод*** синтеза оптимального регулятора. Было проведено сравнение качества его работы с ***простым алгоритмом синтеза*** оптимального регулятора, в основу которого положены условия (2.3)-(2.9), также являющиеся необходимыми условиями оптимальности в случае невырожденности предельной ковариационной матрицы.

Работа алгоритмов продемонстрирована на модельном примере при различных информационных ограничениях. А также решена задача стабилизации орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ) с гибкой штангой [53].

2.5.1 Простой алгоритм синтеза оптимальных регуляторов линейных стохастических систем

Стратегия метода состоит в построении последовательности $\{L_i\}$, $i = 0, 1, ...$, сходящейся к матрице $\bar{L}$, задающей экстремальное управление $\bar{u}(x) = -\bar{L}x$. Напомню, что термины экстремальное управление и экстремальный регулятор здесь используются в связи с тем, что условия (2.3)-(2.9) не позволяют гарантировать оптимальность полученного с их помощью решения.

Для найденного приближения L_i с помощью выражений (2.5), (2.7) вычисляются матрицы Ω и M. Зная матрицу M и используя (2.6), можно вычислить значение критерия γ на данном шаге алгоритма. Если $|\Gamma^\infty| \neq 0$, то по формуле (2.9) вычисляется матрица информационных ограничений K, зная которую можно подсчитать следующее приближение L_{i+1} по формуле (2.8). Начальное значение $L = L_0$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость матрицы A_u, задается произвольно. Критерием успешного окончания процесса является достаточно точное выполнение равенств (2.3)-(2.9) или, что то же самое в силу теоремы 2.5, достаточно точное выполнение условия (2.20).

Замечание 2.3. *Начальная матрица $A_u^0 = A - BL_0$ должна быть асимптотически устойчива. Если матрица A асимптотически устойчива, то начальное значение L_0 можно положить равным нулю, в противном случае можно применить метод продолжения по параметру. Если матрица A_u^0 не является асимптотически устойчивой, то вместо нее для решения уравнений (2.5), (2.7) следует взять матрицу $A_u^0 - \mu I$, где I – единичная матрица, $\mu > 0$ – заданное число. При достаточно большом μ матрица $A_u^0 - \mu I$ будет асимптотически устойчива. С этим значением μ выполняется процедура алгоритма. Полученное значение L используется как начальное приближение на следующем шаге метода продолжения по параметру, на котором величина μ уменьшается, но так, чтобы матрица $A_u - \mu I$ оставалась асимптотически устойчивой. Если удастся достигнуть ситуации, когда $\mu = 0$, то будет получено решение исходной задачи синтеза.*

Этот алгоритм прост, но нет гарантии его сходимости. В п. 1.5.3 будет приведен пример, когда экстремальное значение критерия не достигается. Однако в случае сходимости он позволяет определить экстремальную стабилизирующую стратегию и экстремальное значение критерия за малое число итераций.

2.5.2 Градиентный численный метод синтеза оптимальных регуляторов линейных стохастических систем

Так как для оптимизируемого критерия $J_\infty(z_\infty) = F(L)$ получено выражение градиента (2.18), то нетрудно по хорошо известной схеме записать алгоритм градиентного спуска для поставленной задачи.

Стратегия поиска экстремального регулятора $\bar{u}(x)$ состоит в построении точек $\{L_i\}$, $i = 0, 1, ...$, таких, что $F(L_{i+1}) < F(L_i)$, $i = 0, 1, ...$. Точки последовательности $\{L_i\}$ вычисляются по правилу

$$L_{i+1} = L_i - \tau_i \, \frac{\partial F}{\partial L}(\Omega - I)\bigg|_{L=L_i},$$

где произвольное начальное приближение L_0 таково, что матрица $A_u^0 = A - BL_0$ асимптотически устойчива, градиент $\partial F/\partial L$ вычисляется в точке L_i, величина шага $\tau_i > 0$ задается пользователем и остается постоянной до тех пор, пока функционал $F(L)$ убывает в точках последовательности, что контролируется путем проверки выполнения условия $F(L_{i+1}) - F(L_i) < 0$.

В методе градиентного спуска целесообразно увеличивать величину шага τ_i, если предыдущие шаги были удачными, и уменьшать – если неудачными.

В рассматриваемом здесь случае имеется некоторая специфика. Неудачными нужно считать ситуации, когда

1. значение критерия $F(L_{i+1})$ не уменьшилось;

2. матрица $A_{u_{i+1}}$ не асимптотически устойчива.

Так как критерий (2.2), очевидно, ограничен снизу, то метод гарантирует монотонную сходимость последовательности $\{F(L_i)\}$. Сходимость последовательности $\{L_i\}$ не гарантируется, однако любой элемент $\bar{L} = L_i$, $i = 0, 1, ...$ этой последовательности в силу теоремы 2.2 определяет стабилизирующую стратегию, а градиентный метод позволяет улучшить значение критерия.

2.5.3 Модельный пример. Сравнение численных методов

В качестве модельного примера рассмотрена система (2.1)-(2.2) с асимптотически устойчивой матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} -0,15 & 0,91 & -0,87 & -0,49 & -0,53 \\ 0,26 & 0,66 & 2,93 & 0,71 & 0,62 \\ 0,29 & 0,71 & 1,21 & 2,38 & 0,86 \\ 0,33 & 0,77 & 1,12 & 1,09 & 2,32 \\ -3,56 & -10,21 & -18,07 & -14,52 & -10,02 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,2 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Система является стабилизируемой для любого набора измеряемых компонент, так как матрица A асимптотически устойчива. Однако простой алгоритм синтеза оптимального регулятора сходится не во всех случаях. Это видно из приведенных результатов, представленных в табл. 1.1.

Таблица 1.1. Значения критерия оптимальности.

Измеряемые компоненты вектора состояния (информационная матрица Ω)	Значение критерия	
	Простой метод	Градиентный метод
$diag(0,0,0,0,0)$	3,44	3,45
$diag(0,0,0,1,1)$	3,49	3,49
$diag(1,0,0,0,1)$	-	4,13
$diag(1,1,0,1,0)$	-	5,61
$diag(0,1,1,1,1)$	11,82	11,07
$diag(1,1,1,1,1)$	13,53	13,53

В табл. 1.1 приведены лишь некоторые варианты информационных ограничений. Видно, что простой алгоритм не сходится при $\Omega = diag(1,0,0,0,1,)$ и $\Omega = diag(1,1,0,1,0)$, градиентный же алгоритм сходится при любых информационных ограничениях. Если измерению доступны все компоненты, то экстремальная стратения (в данном случае строго оптимальная) имеет вид $\bar{u}(x) = 1,2x_1 + 2,7x_2 + 2,5x_3 + 0,7x_4 - 0,13x_5$, а оптимальное значение критерия будет $\bar{\gamma} = 3,44$.

Рассматриваемая система оказалась вполне возмущаемой при любых информационных ограничениях.

Результаты, представленные в табл. 1.1, позволяют проследить влияние состава измерений на оптимальное значение критерия. Наглядно показано, что чем слабее информационные ограничения, тем экстремальное значение критерия ближе к величине критерия в случае полной информации.

2.5.4 Стабилизация ориентации спутника с гибким стержнем

Рассматривается задача стабилизации углового положения спутника с гибким элементом (стержнем) на круговой орбите относительно местной вертикали.

Спутник обладает моментом инерции $J_c = 0.07$ (кг·м^2) и массой $m_c = 35$ (кг), отклоняется от местной вертикали на угол α под действием возмущающего момента L_m (Рис. 1.1). В точке O на расстоянии $a = 0.1$ (м) от центра масс C спутника жестко закреплен прямолинейный однородно упругий стержень длины $l = 5$ (м), масса стержня $m_z = 1.02$ (кг).

Исходные уравнения, описывающие возмущенное движения гибкого спутника, представляют собой совокупность взаимосвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих вращение спутника, и уравнения в частных производных четвертого порядка, описывающего колебания гибкого стержня [3].

С использованием принципа разделения движения на медленное квазистатическое и быстрое колебательное получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая управляемое движение спутника с гибким стержнем [53]. Причем, вклад быстропеременной компоненты представляется в виде бесконечного ряда разложения по собственным функциям. Исследование показало, что первая мода вносит наиболее существенный вклад в решение, последующие же моды вносят пренебрежительно малую величину. В связи с этим, воспользовавшись построенной в [53] моделью, преобразуем ее к виду (2.1)

$$\begin{aligned} d\alpha &= \nu dt, \\ d\nu &= (Q_1\alpha + Q_2 u + V)dt, \end{aligned} \tag{2.29}$$

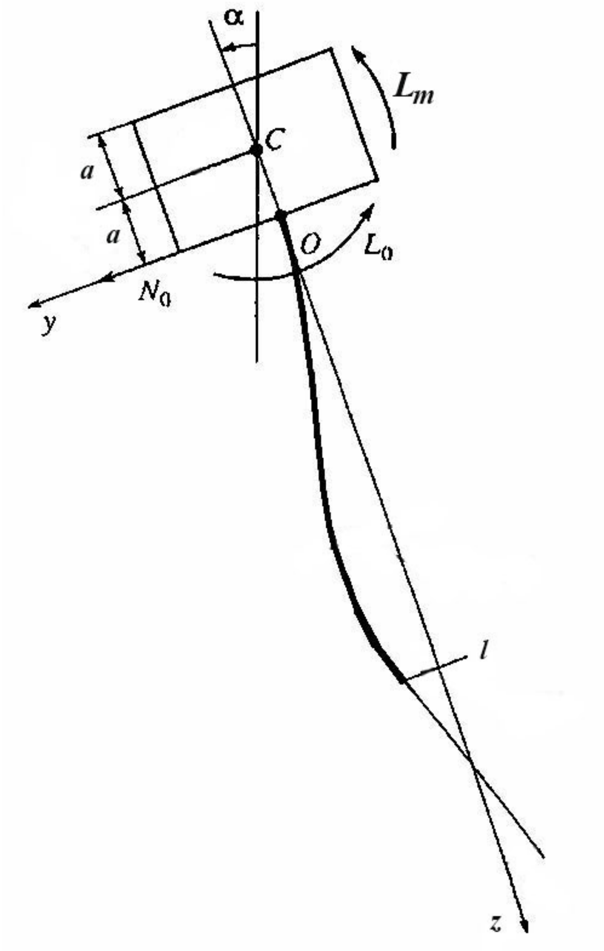

Рис. 2.1: Спутник с гибким стержнем.

где $\Delta x = (\alpha, \nu)^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния; u – управление; слагаемое V отражает вклад первой моды быстропеременной компоненты решения; Q_1, Q_2 определяются выражениями

$$Q_1 = -\frac{(m_c + m_z)\Omega_0}{(m_c + m_z)(J_c - Q_1) - Q_2 Q_3},$$

$$Q_2 = \frac{(m_c + m_z)}{(m_c + m_z)(J_c - Q_1) - Q_2 Q_3},$$

$$Q_1 = m_z(\frac{1}{3}l^2 - a^2), \quad Q_2 = m_z(a - \frac{1}{2}l), \quad Q_3 = m_z(a + \frac{1}{2}l).$$

Зададим формирующий фильтр для V в виде

$$\begin{aligned} dV &= \mu dt, \\ d\mu &= -1.5V - 2\mu - 3dw. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Случайное возмущение $w(t)$ (винеровский процесс) может быть обусловлено влиянием атмосферы при низких орбитах и неточностью реализации управляющего воздействия.

Итак, движение спутника описывается линейной стохастической системой уравнений (2.29), (2.30), где $x = (\alpha, \nu, V, \mu)^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния системы. Доступны измерению компоненты α и ν вектора состояния. Оптимальный регулятор ищется в виде $u = -L\Delta x$. Критерий оптимальности задан в виде

$$J = \frac{1}{2} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \int\limits_{R^n} (\alpha^2 + 2\nu^2 + V^2 + \mu^2 + u^2) P(t, dx) dt. \tag{2.31}$$

Применяя описанный градиентный метод, было получено оптимальное управление $u = -L\Delta x$ в задаче (2.29)-(2.31), где

$$L = \begin{pmatrix} 1.80 & 10.90 \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

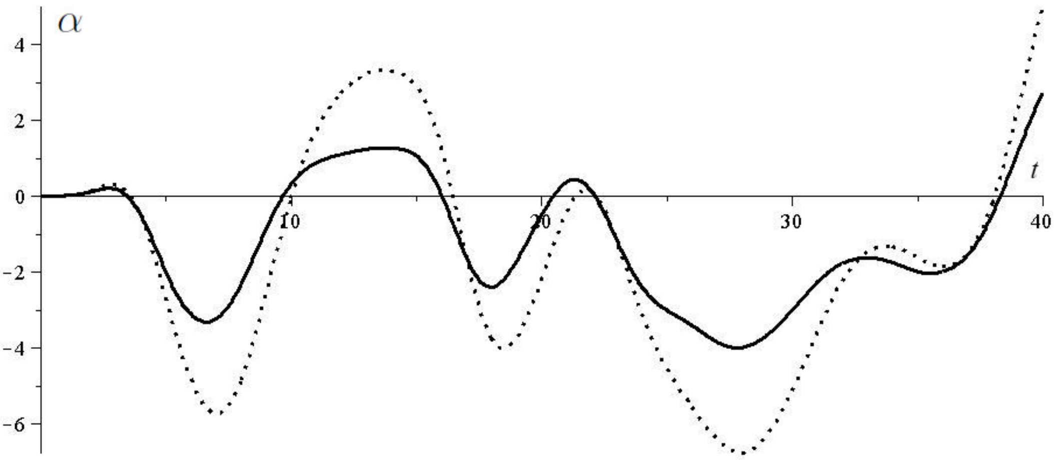

Рис. 2.2: Угол отклонения спутника от местной вертикали α (град).

Для сравнения была рассмотрена детерминированная задача, получающаяся из (2.29) без учета слагаемого V. В соответствии с теорией АКОР А.М. Летова было найдено оптимальное управление $u = -L\Delta x$ для детерминированной системы, где матрица L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 1.40 & 5.09 \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

Далее было проведено сравнение регуляторов (2.32) и (2.33) в стохастической системе (2.29)-(2.31). Значение критерия (2.31), подсчитанное по формуле (2.6), для летовского регулятора (2.33) составило 70.7, а для оптимального регулятора стохастической системы – 61.1 (меньше на 13.5%).

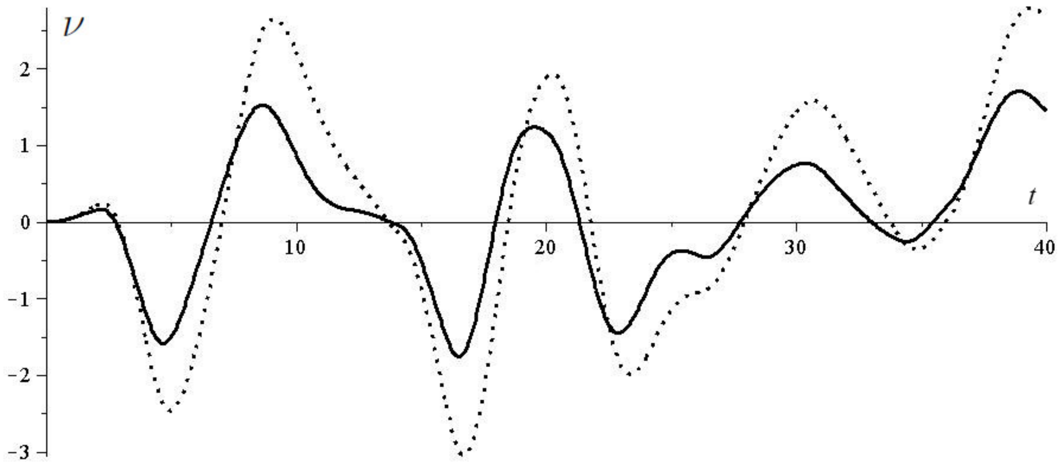

Рис. 2.3: Скорость отклонения спутника от местной вертикали ν.

На рис. 2.2, 2.3 приводится пример реализации процессов управления системы (2.29)-(2.31) с регуляторами (2.32), которому соответствует сплошная линия, и (2.33), которому соответствует пунктирная. Видно, что хотя значения критерия при сравниваемых управлениях мало отличаются, амплитуда колебаний при оптимальном управлении (2.32) значительно меньше, чем при управлении, задаваемом (2.33).

2.6 Выводы по главе 1

Во второй главе получены необходимые условия оптимальности линейного регулятора неполной обратной связи в теории АКОРСС, обеспечивающего устойчивость системы и оптимальность затрат на стабилизацию по заданном критерию.

Исследован случай неединственности решения задачи. Определено свойство вполне возмущаемости системы, и предложен критерий его наличия. Доказана эквивалентность полученных необходимых условий оптимальности и условий работы [46] в случае, когда оптимальная замкнутая система вполне возмущаема.

На основе условий оптимальности разработаны итерационный и градиентный численные методы, работа которых продемонстрирована на модельном примере при различных составах измерений вектора состояния.

В качестве прикладного примера рассмотрена задача стабилизации орбиты искусственного спутника Земли с гибкой штангой.

Глава 3

Оптимизация облика и стабилизация квазилинейных стохастических систем при неполной информации о состоянии

Рассматривается задача синтеза оптимального регулятора для квазилинейной стохастической системы, функционирующей на неограниченном интервале времени, с квадратичным критерием, характеризующим средние затраты величины, определяющей оптимальность процесса, в единицу времени.

Эта задача погружается в более общую задачу оптимизации облика системы, в которой оптимизации подлежат компоненты векторного параметра, от которого зависят матрицы системы. Компоненты этого вектора могут представлять собой параметры алгоритма управления, конструктивные параметры объекта, а также параметры среды, в которой функционирует объект.

В п. 2.2 проводится анализ устойчивости и стабильности рассматриваемой системы, для чего используется конкретизация теоремы из работ Хрусталева М.М. [46], которая содержит достаточные условия стабилизируемости системы.

В п. 2.3 показывается, что критерий не зависит от начального распределения состояния системы и реализовавшегося процесса и является функцией компонент векторного параметра. Используя аналитическое выражение для величины критерия, получены и доказаны необходимые условия стабильности и оптимальности квазилинейной системы.

В п. 2.4 выполняется конкретизация полученных необходимых условий для управляемой по выходу системы, включая частный случай – симметрической управляемой по выходу системы.

В п. 2.5 рассматриваются управляемые системы при полной информации о векторе состояния. Получены и доказаны необходимые и достаточные условия оптимальности линейного регулятора, более общие, чем известные ранее.

Для системы с пропорционально-интегрально-дифференциальным регулятором в п. 2.6 указывается метод сведения к системе общего вида, для которой могут быть записаны уравнения для первого и второго центрального моментов, исследована устойчивость системы и синтезирован оптимальный регулятор.

В п. 2.7 используя полученные необходимые условия, разрабатывается градиентный численный метод синтеза оптимальной системы, работа которого демонстрируется на ряде модельных примеров.

В. п. 2.8 рассматривается пример управления беспилотным летательным аппаратом с учетом ветровых воздействий. Получены оптимальные стратегии управления для стохастической системы и системы без учета влияния случайных воздействий. Производится сравнение качества полученных управлений для рассматриваемой стохастической системы.

3.1 Описание динамической системы. Постановка задачи

Рассматривается стохастическая динамическая система, описываемая стационарным дифференциальным уравнением Ито

$$dx(t) = (A_0(\lambda)x(t) + B_0(\lambda))dt + \sum_{k=1}^{n_w}(A_k(\lambda)x(t) + B_k(\lambda))dw_k(t). \tag{3.1}$$

Здесь $x = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}} \in R^n$ – случайное состояние системы; $w(t) = (w_1(t), ..., w_{n_w}(t))^{\mathrm{T}} \in R^{n_w}$ – стандартный винеровский процесс; $t \in [0, +\infty)$ – время; $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ – операция транспонирования; A_k, B_k $(k = \overline{0, n_w})$ – матрицы размеров $n \times n$ и векторы-столбцы длины n соответственно.

Постоянные во времени матрицы A_k, B_k зависят от векторного параметра $\lambda \in \Lambda \subset R^{n_\lambda}$. В качестве этого векторного параметра могут выступать параметры алгоритма управления, конструктивные параметры объекта (например, жесткость шасси самолета, размеры крыла), а также параметры среды, в которой функционирует объект. Поэтому будем говорить, что этот векторный параметр определяет ***облик системы*** и подлежит оптимизации.

Уравнение (3.1) порождает вероятностную меру $P^*(t) = P(t, \cdot)$, задающую распределение случайного состояния x системы (3.1) в момент времени $t \in [0, +\infty)$. Начальное распределение $P_0(\cdot) = P(0, \cdot)$ состояния $x_0 = x(0)$ считается заданным. Начальная мера $P_0(\cdot)$ выбирается из заданного множества $\mathcal{P}_0$, которое будет конкретизировано в разделе 3.2.

Система (3.1) относится к классу квазилинейных стохастических систем [20], отличающихся от линейных тем, что коэффициенты диффузии могут зависеть линейно от вектора состояния системы. По существу, система (3.1) содержит нелинейность, состоящую в том, что в нее входят произведения компонент вектора состояния на дифференциал винеровского процесса.

Задача состоит в оптимизации облика системы (3.1), исходя из условий минимума критерия оптимальности

$$\begin{gathered} J(P^*(\cdot), \lambda) = \frac{1}{2} \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{R^n} f^c(x, \lambda) P(t, dx) dt, \\ f^c(x, \lambda) = x^{\mathrm{T}} Q(\lambda) x + 2S(\lambda)x + D(\lambda), \end{gathered} \tag{3.2}$$

где $x^{\mathrm{T}}Qx$ – неотрицательная квадратичная форма при любых $\lambda \in \Lambda$; Q – матрица размеров $n \times n$; $S \in R^n$ – вектор-строка длины n; $D \in R^1$ – скаляр. Как и в первой глве внутренний интергал в (3.2) представляет собой математическое ожидание «мгновенных потерь». Здесь и далее для краткости записи матриц системы и критерия аргумент λ будем опускать.

Точная формулировка задачи оптимизации будет дана в разделе 3.3.

3.2 Анализ устойчивости и стабилизируемости

Задача этого раздела состоит в том, чтобы исследовать устойчивость и стабильность [46] системы (3.1), подсчитать значение критерия (3.2) при фиксированном значении параметра λ.

Если случайный процесс $x(t)$, удовлетворяющий (3.1), имеет первый $m(t)$ и второй центральный $\Gamma(t)$ моменты, то они удовлетворяют уравнениям [20]

$$\dot{m} = A_0 m + B_0, \tag{3.3}$$

$$\dot{\Gamma} = A_0\Gamma + \Gamma A_0^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{n_w} A_k \Gamma A_k^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{n_w} (A_k m + B_k)(A_k m + B_k)^{\mathrm{T}} \tag{3.4}$$

с начальными условиями $m(0) = m_0$, $\Gamma(0) = \Gamma_0$, где m_0, Γ_0 – математическое ожидание и матрица ковариаций начального состояния $x_0 = x(0)$ системы.

Уравнение (3.3) решается независимо от уравнения (3.4) и является линейным дифференциальным уравнением. Если $m(t)$ найдено, то уравнение (3.4) также является линейным и сводится к векторному уравнению

$$\dot{\Gamma}_* = \mathcal{A}\Gamma_* + Q_*, \tag{3.5}$$

где матрица $\mathcal{A}$ имеет размерность $n^2 \times n^2$,

$$\Gamma_* = [\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, ..., \Gamma_{1n}, \Gamma_{21}, \Gamma_{22}, ..., \Gamma_{2n}, ..., \Gamma_{nn}]^{\mathrm{T}},$$

$$Q_* = [Q^{\Gamma}_{11}, Q^{\Gamma}_{12}, ..., Q^{\Gamma}_{1n}, Q^{\Gamma}_{21}, Q^{\Gamma}_{22}, ..., Q^{\Gamma}_{2n}, ..., Q^{\Gamma}_{nn}]^{\mathrm{T}}$$

– векторы длины n^2 составленные из элементов матриц Γ и

$$Q^{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n_w} (A_k m + B_k)(A_k m + B_k)^{\mathrm{T}}.$$

Согласно [20] будем считать, что процесс $x(t)$, удовлетворяющий (3.1), устойчив, если существуют и асимптотически устойчивы первый и второй центральный моменты этого процесса. При фиксированном значении параметра λ матрица A_0 в (3.3) постоянна, и первый момент $m(t)$ будет асимптотически устойчив, если асимптотически устойчива матрица A_0.

Асимптотическая устойчивость (3.5) может быть исследована обычными методами, гарантирующими отрицательность вещественных частей собственных чисел матрицы $\mathcal{A}$. Если матрица $\mathcal{A}$ асимптотически устойчива, то и второй момент $\Gamma(t)$ будет асимптотически устойчив. Отсюда следует устойчивость процесса $x(t)$ [20].

Определение 3.1. *Обозначим $\Lambda_a \subset \Lambda \in R^{n_\lambda}$ совокупность векторов $\lambda \in \Lambda$, для которых матрицы $A_0(\lambda)$, $\mathcal{A}(\lambda)$ асимптотически устойчивы.*

Из асимптотической устойчивости матриц A_0, $\mathcal{A}$ и уравнений (3.3)-(3.5) также следует, что уравнения

$$A_0 m^\infty + B_0 = 0, \tag{3.6}$$

$$A_0\Gamma^\infty + \Gamma^\infty A_0^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{n_w} A_k \Gamma^\infty A_k^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{n_w} (A_k m^\infty + B_k)(A_k m^\infty + B_k)^{\mathrm{T}} = 0 \tag{3.7}$$

для предельных значений m^∞ и Γ^∞ имеют решения. Так же как уравнение (3.4) сводится к (3.5), уравнение (3.7) сводится к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathcal{A}\Gamma_*^\infty + Q_*^\infty = 0, \tag{3.8}$$

где Γ_*^∞ – предельное при $t \to +\infty$ значение функции $\Gamma_*(t)$, а вектор Q_*^∞ составлен из компонент матрицы

$$Q^\infty = \sum_{k=1}^{n_w} (A_k m^\infty + B_k)(A_k m^\infty + B_k)^{\mathrm{T}}. \tag{3.9}$$

Так как асимптотически устойчивые матрицы не вырождены, то решения уравнений (3.6), (3.8) единственны. А тогда и решение уравнения (3.7) эквивалентного (3.8) также единственно.

Учитывая сказанное, далее всюду будем считать, что множество $\mathcal{P}_0$ начальных мер $P_0(\cdot)$ процесса задается условиями:

1. борелевская мера $P_0(\cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в R^n (имеет плотность);

2. существуют конечные вектор математического ожидания и матрица ковариаций.

В работе [20] показано, что в этом случае текущая мера $P(t,\cdot)$ процесса также обладает свойствами 1, 2 и справеливы уравнения (3.3), (3.4), имеющие единственное решение.

Определение 3.2. *Допустимый вектор параметров $\lambda \in \Lambda$ назовем стабилизирующим, если для любого начального распределения $P_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0$ состояния x системы* (3.1) *и любого реализовавшегося в силу уравнения* (3.1) *процесса $P(t,\cdot)$, функционал* (3.2) *определен и принимает одно и то же постоянное значение $J(P^*(\cdot),\lambda) = \bar{\gamma}(\lambda)$. Величину $\bar{\gamma}(\lambda)$ в этом случае назовем стабильным значением критерия и будем говорить, что система* (3.1) *обладает свойством стабильности.*

В работе [46] получены условия стабильности системы в общем нелинейном случае и частном случае линейной системы. Для исследования стабильности вводится в рассмотрение функция $\psi^0(x)$, играющая роль множителя Лагранжа, отвечающего за связь в виде дифференциального уравнения (3.1). Для линейной системы функция $\psi^0(x)$ выбирается в виде квадратичной формы от вектора x. В рассматриваемой здесь квазилинейной задаче функцию $\psi^0(x)$ следует выбирать в виде линейно-квадратичной формы

$$\psi^0(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Mx + \xi^{\mathrm{T}}x, \tag{3.10}$$

где M, ξ – постоянные матрицы размеров $n \times n$, $n \times 1$ соответственно.

Для корректного использования функции $\psi^0(x)$ необходимо доказать справедливость условия А. Это доказательство дает лемма 3.1.

Лемма 3.1. *Для любого случайного процесса* $x(t)$ *системы* (3.1) *с начальным распределением* $P_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0$ *вероятностная мера* $P(t,\cdot)$*, являющаяся решением уравнения* (1.2)*, удовлетворяет условию А.*

Доказательство. Для процесса $x(t)$ системы (3.1) существуют непрерывно дифференцируемые первый $m(t)$ и второй $\Gamma(t)$ центральные моменты, удовлетворяющие уравнениям (3.3), (3.4). Положим в равентсве (1.4) $\eta(x) = \psi^0(x)$. Будем иметь

$$\int\limits_{R^n} \psi^0(x)\frac{d}{dt}P(t,dx) = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_{R^n} \psi^0(x)P(t,dx)\right).$$

Правая часть в этом равенстве определена, так как под знаком производной стоит матричное выражение, элементами которого являются моменты первого и второго порядка, которыедифференцируемы. Следовательно определна и левая часть. Более того

$$\int\limits_{R^n} \psi^0(x)P(t,dx) = \frac{1}{2}tr[M\Gamma(t)] + \xi^{\mathrm{T}}m(t),$$

и тогда левая часть равенства (1.4)

$$\int\limits_{R^n} \psi^0(x)\frac{d}{dt}P(t,dx) = \frac{1}{2}tr[M\frac{d\Gamma(t)}{dt}] + \xi^{\mathrm{T}}\frac{dm(t)}{dt}. \tag{3.11}$$

Правая часть равенства (1.4) для квазилинейной системы (3.1) также представляет собой линейную композицию моментов первого и второго порядков. Подставляя в равенство (3.11) производные $d\Gamma/dt$, dm/dt, определяемые дифференциальными уравнеими (3.3), (3.4), нетрудно убедиться в тождественном равенстве левой и правой частей условия (1.4).

□

Далее воспользуемся теоремой 1.1 которая также применима к рассматриваемой задаче, так как стратегия управления $\bar{u}(x)$ в указанной теореме фиксирована (в рассматриваемом случае фиксирован вектор параметров λ). Применительно к рассматриваемой здесь квазилинейной задаче указанная теорема будет иметь следующий вид.

Теорема 3.1. *Пусть выбран вектор параметров $\lambda \in \Lambda$, а функция $\psi^0(x)$ вида* (3.10) *и число $\bar{\gamma}$ удовлетворяют условиям:*

1. *для любого начального распределения состояния $P_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0$ и реализовавшегося процесса $P(t,\cdot)$ функция*
$$\phi^0(P(t,\cdot)) = \frac{1}{2}\int\limits_{R^n} \psi^0(x)P(t,dx) \tag{3.12}$$
ограничена на интервале $[0,+\infty)$;

2. $h(x,\lambda) = \bar{\gamma}, \quad x \in R^n$.

Тогда вектор параметров λ является стабилизирующим, и система (3.1) *обладает свойством стабильности.*

Здесь
$$h(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x,\lambda)\frac{\partial}{\partial x_i}\psi^0(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,\lambda)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\psi^0(x) + \frac{1}{2}f^c(x,\lambda), \tag{3.13}$$
где $f(x,\lambda) = \{f_i(x,\lambda)\}_{i=1}^{n} = A_0(\lambda)x + B_0(\lambda)$ суть коэффициенты сноса системы (3.1), а матрица диффузии имеет вид
$$\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_w}(A_kx + B_k)(A_kx + B_k)^{\mathrm{T}}. \tag{3.14}$$
Функция $h(x,\lambda)$ с учетом (3.10) для рассматриваемой задачи имеет линейно-квадратичный вид
$$h(x,\lambda) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\Psi x + \Theta x + B_0^{\mathrm{T}}\xi + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}}MB_k + \frac{1}{2}D, \tag{3.15}$$
где
$$\Psi = A_0^{\mathrm{T}}M + MA_0 + \sum_{k=1}^{n_w} A_k^{\mathrm{T}}MA_k + Q. \tag{3.16}$$
$$\Theta = \xi^{\mathrm{T}}A_0 + \sum_{k=1}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}}MA_k + B_0^{\mathrm{T}}M + S. \tag{3.17}$$
Достаточные условия выполнения предположения 1 теоремы 3.1 содержатся в следующей лемме.

Лемма 3.2. *Пусть задан векторный параметр $\lambda \in \Lambda$, определяющий матрицы A_k, B_k, $k = \overline{0, n_w}$. Если $\lambda \in \Lambda_a$ и $P_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0$, то предположение 1 теоремы 3.1 выполнено для любой функции $\psi^0(x)$ вида* (3.10).

Доказательство. Из (3.10), (3.12) следует, что

$$\phi^0(P(t,\cdot)) = \frac{1}{2} tr[M\Gamma(t)] + \xi^{\mathrm{T}} m(t),$$

где $m(t)$, $\Gamma(t)$ определяются равенствами (3.3) и (3.4) соответственно. При заданном значении вектора λ матрицы A_k, B_k, $k = \overline{0, n_w}$ постоянны. Об асимптотической устойчивости первого и второго центрального моментов в случае асимптотической устойчивости матриц A_0, $\mathcal{A}$ сказано в пункте 3.2. Так как (3.3) и (3.4) асимптотически устойчивы, их решения ограничены, следовательно, ограничена функция $\phi^0(P(t,\cdot))$. □

Имеет место также следующая лемма.

Лемма 3.3. *Если $\lambda \in \Lambda_a$, то уравнения* (3.6), (3.7) *относительно m^∞ и Γ^∞ и подобные им уравнения относительно ξ и M*

$$\xi^{\mathrm{T}} A_0 + \sum_{k=1}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}} M A_k + B_0^{\mathrm{T}} M + S = 0, \tag{3.18}$$

$$A_0^{\mathrm{T}} M + M A_0 + \sum_{k=1}^{n_w} A_k^{\mathrm{T}} M A_k + Q = 0 \tag{3.19}$$

имеют решения, и эти решения единственны. Кроме того, матрицы M и Γ^∞ неотрицательны (в смысле соответствующих квадратичных форм).

Доказательство. Существование и единственность решений уравнений (3.6), (3.7) доказаны в пункте 3.2.

Уравнение (3.19) подобно уравнению (3.7). В результате с ним можно связать эквивалентное ему уравнение

$$\tilde{\mathcal{A}} M_* + Q_* = 0, \tag{3.20}$$

аналогичное уравнению (3.8). Принимая во внимание (3.7), (3.9), (3.16), (3.19) имеем

$$H = A_0 \Gamma^\infty + \Gamma^\infty A_0^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{n_w} A_k \Gamma^\infty A_k^{\mathrm{T}} + Q^\infty,$$

$$\Psi = A_0^{\mathrm{T}} M + M A_0 + \sum_{k=1}^{n_w} A_k^{\mathrm{T}} M A_k + Q.$$

Элемент H_{ij} матрицы H будет иметь вид

$$H_{ij} = \sum_{\mu=1}^{n} (A_{0i\mu} \Gamma^\infty_{\mu j} + \Gamma^\infty_{i\mu} A_{0\mu j}) + \sum_{k=1}^{n_w} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\eta=1}^{n} A_{kj\mu} \Gamma^\infty_{\mu\eta} A_{k\eta j} + Q^\infty_{ij},$$

а производные элементов H_{ij} по компонентам матрицы $\Gamma^\infty = \{\Gamma^\infty_{\mu\eta}\}$ имеют вид

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial \Gamma^\infty_{\mu\eta}} = (A_{0i\mu}\delta_{i\mu} + A_{0j\eta}\delta_{j\eta} + \sum_{k=1}^{n_w} A_{ki\mu}A_{kj\eta}),$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Аналогично, выписав производные элементов $\Psi_{\mu\eta}$ по компонентам матрицы $M = \{M_{ij}\}$, можно увидеть, что

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial \Gamma^\infty_{\mu\eta}} = \frac{\partial \Psi_{\mu\eta}}{\partial M_{ij}}. \tag{3.21}$$

Равенство (3.21) указывает, что матрица $\tilde{\mathcal{A}}$ в (3.20) является транспонированной матрице $\mathcal{A}$ уравнения (3.5), $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^{\mathrm{T}}$.

Так как $\mathcal{A}$ асимптотически устойчива, то и матрица $\mathcal{A}^T$ также асимптотически устойчива и невырождена. Следовательно уравнение (3.20) имеет единственное решение. А тогда и эквивалентное (3.20) уравнение (3.19) также имеет единственное решение. Далее из асимптотической устойчивости матрицы A_0 также следует существование и единственность решения уравнения (3.18) относительно матрицы ξ.

Остается доказать, что матрицы M и Γ^∞ неотрицательны. При условии, что $P_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0$, $\lambda \in \Lambda_a$, матрица Γ^∞ – предельная ковариационная матрица и неотрицательна по определению. Сложнее доказательство неотрицательности M. Оказывается можно сконструировать квазилинейную стохастическую устойчивую по Параеву систему, отличную от (3.1), для которой матрица M будет предельной ковариационной матрицей, из чего будет следовать неорицательность M. Эта вспомогательная квазилинейная система имеет вид

$$dx = A_0^{\mathrm{T}}(\lambda)xdt + \sum_{k=1}^{n_w} A_k^{\mathrm{T}}(\lambda)xdw_k + G_k(\lambda)dw, \tag{3.22}$$

где $x \in R^n$, $w \in R^n$, $G(\lambda)$ - матрица размеров $n \times n$. При $P_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0$, $\lambda \in \Lambda_a$ предельная матрица ковариаций M^∞ для этой системы удовлетворяет уравнению

$$A_0^{\mathrm{T}}M^\infty + M^\infty A_0 + \sum_{k=1}^{n_w} A_k^{\mathrm{T}}M^\infty A_k + GG^{\mathrm{T}} = 0. \tag{3.23}$$

Если выбрать матрицу G из условия

$$GG^{\mathrm{T}} = Q(\lambda),$$

учитывая, что $Q(\lambda) \geq 0$, то при $M = M^\infty$ уравнение (3.23) совпадает с уравнением (3.19). Так как, как было установлено, решение урвнения (3.19) существует и единственно, матрица M есть предельная ковариационная матрица системы (3.22) и поэтому неотрицательна. □

Следует заметить, что уравнения (3.19) и (3.18) в общем случае могут не иметь решения.

Из теоремы 3.1 и лемм 3.2, 3.3 очевидно вытекает следующий результат.

Теорема 3.2. *Если $\lambda \in \Lambda_a$, то векторный параметр λ является стабилизирующим и стабильное значение критерия $\bar{\gamma}$ определяется выражением*

$$\bar{\gamma}(\lambda) = B_0^{\mathrm{T}}\xi + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}} M B_k + \frac{1}{2}D, \tag{3.24}$$

где вектор ξ и матрица M находятся из уравнений (3.18), (3.19).

В связи с результатом теоремы 3.2 всюду далее будем считать, что векторный параметр λ выбирается из множества Λ_a.

3.3 Оптимизация облика квазилинейной стохастической системы. Необходимые условия оптимальности

В связи с результатом теоремы 3.2 возникает естественная идея: среди стабилизирующих векторных параметров $\lambda \in \Lambda_a$ найти вектор, обеспечивающий минимальное значение критерия (3.2). Для стабилизирующего вектора $\lambda \in \Lambda_a$ значение критерия (3.2) может быть подсчитано по формуле (3.24). Однако, эта формула не удобна для получения условий оптимальности, так как для каждого значения λ необходимо решать уравнения (3.18), (3.19). Целесообразно воспользоваться идеями метода функций типа Кротова, применявшимися в работах [45, 46, 54] для линейных стохастических систем. Прежде всего заметим, что в силу теоремы 3.1 в случае, когда $\lambda \in \Lambda_a$, критерий (3.2) не зависит от начального распределения состояния $P_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0$ и реализовавшегося процесса $P(t,\cdot)$. В результате критерий (3.2) является функцией конечного числа переменных – компонент вектора $\lambda \in \Lambda_a$

$$J(P^*(\cdot),\lambda) = F(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda_a.$$

Задача оптимизации облика системы. Найти значение векторного параметра $\bar{\lambda} \in \Lambda_a$, удовлетворяющее условию

$$F(\bar{\lambda}) = \min_{\lambda \in \Lambda_a} F(\lambda). \tag{3.25}$$

Предположение 3.1. *Матрицы A_k, B_k, $k = \overline{0, n_w}$, Q, S, D, задающие систему* (3.1) *и критерий* (3.2), *входящие в выражения* (3.16)-(3.24), *дифференцируемы по элементам λ_i вектора $\lambda \in \Lambda_a$, $i = \overline{1, n_\lambda}$ всюду на Λ_a.*

Теорема 3.3. *Для любых значений $\lambda \in \Lambda_a$, $P_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0$ справедливо равенство*

$$F(\lambda) = \bar{\gamma} + \frac{1}{2} tr[\Psi \Gamma^{\infty}] + \Theta m^{\infty} \tag{3.26}$$

независимо от выбора постоянных матриц M, ξ, задающих функцию (3.10). *Здесь m^{∞}, Γ^{∞}, Ψ, Θ, $\bar{\gamma}$ определяются равенствами* (3.6), (3.7), (3.16), (3.17), (3.24).

Кроме того, если выполнено предположение 3.1, функция $F(\lambda)$ дифференцируема при всех $\lambda \in \Lambda_a$.

Доказательство. Следуя [46], для заданной начальной меры $P_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0$ через $z_\lambda(t) = (P(t, \cdot), \bar{\lambda})$, $t \in [0, +\infty)$ обозначим произвольный процесс, соответствующий вектору $\bar{\lambda}$. Рассмотрим сужение этого процесса $z_T(t) = (P_T(t, \cdot), \bar{\lambda})$ на интервал $[0, t_1]$, $t_1 < +\infty$. Тогда критерий

$$J_T(z_T(\cdot)) = \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{R^n} f^c(x, \bar{\lambda}) P(t, dx) dt \tag{3.27}$$

может быть точно вычислен по аналогичной выражению (1.13) формуле

$$\begin{aligned} J_T(z_T(\cdot)) = L_T(z_T(\cdot)) = -\int\limits_{R^n} \psi^0(x) P_T(t_1, dx) + \int\limits_{R^n} \psi^0(x) P_0(dx) + t_1 \bar{\gamma} + \\ + \int\limits_0^{t_1} \left(-\bar{\gamma} + \int\limits_{R^n} h(x, \bar{\lambda}) P_T(t, dx) \right) dt, \end{aligned} \tag{3.28}$$

где $\psi^0(x)$, $h(x, \bar{\lambda})$, $\bar{\gamma}$ определяются равенствами (3.10), (3.15), (3.24). Здесь $L_T(z_T(\cdot))$ – функционал Лагранжа [44,45,54] для задачи на минимум критерия (3.27) на множестве процессов, получающемся из множества процессов исходной задачи сужением на интервал $[0, t_1]$. Функция $\psi^0(x)$ играет роль множителя Лагранжа. Важно то, что равентсво (3.28) справедливо для любой функции вида (3.10) (при любых M и ξ).

Равенство (3.28) в [46,54] использовалось для исследования линейной стохастической системы, однако оно справедливо и для рассматриваемой здесь квазилинейной системы, так как линейность системы и конкретный вид функции $\psi^0(x)$ использовались в [46,54] лишь в дальнейших преобразованиях равенства (3.28).

Если матрицы A_0, $\mathcal{A}$ асимптотически устойчивы и $P_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0$, то согласно теореме 3.1 критерий (3.2) однозначно определен, конечен и может быть записан в виде

$$J(z_\lambda(\cdot)) = \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} J_T(z_T(\cdot)). \tag{3.29}$$

Учитывая (3.28), (3.29), получим

$$\begin{aligned} J(z_\lambda(\cdot)) = \bar{\gamma} + \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \left[-\int\limits_{R^n} \psi^0(x) P_T(t_1, dx) + \int\limits_{R^n} \psi^0(x) P_0(dx) \right] + \\ + \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \int\limits_0^{t_1} \left(-\bar{\gamma} + \int\limits_{R^n} h(x, \bar{\lambda}) P_T(t, dx) \right) dt. \end{aligned} \tag{3.30}$$

В силу леммы 3.2 справедливо утверждение 1 теоремы 3.1, из которого следует, что второе слагаемое в правой части (3.30) равно нулю. И тогда с учетом (3.15), (3.24) получим

$$J(z_\lambda(\cdot)) = \bar{\gamma} + \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{R^n} (\frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} \Psi x + \Theta x) P_T(t, dx).$$

Так как $\lambda \in \Lambda_a$ и $P_0(\cdot) \in \mathcal{P}_0$, то функции $m(t)$ и $\Gamma(t)$ имеют предельные значения m^∞ и Γ^∞ при $t \to \infty$, и тогда

$$J(z_\lambda(\cdot)) = \bar{\gamma} + \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \int\limits_0^{t_1} tr[\frac{1}{2} \Psi \Gamma(t) + \Theta m(t)] dt =$$

$$= \bar{\gamma} + \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \int\limits_0^{t_1} tr[\frac{1}{2} \Psi \Gamma^\infty + \Theta m^\infty] dt = \bar{\gamma} + \frac{1}{2} tr[\Psi \Gamma^\infty] + \Theta m^\infty,$$

или, окончательно

$$J(z_\lambda(\cdot)) = \bar{\gamma} + \frac{1}{2} tr[\Psi \Gamma^\infty] + \Theta m^\infty,$$

где m^∞, Γ^∞ – предельные первый и второй центральный моменты меры $P(t, \cdot)$. Уравнения (3.6), (3.7) для величин m^∞, Γ^∞ в силу Леммы 3.3 имеют решения.

$\square$

Матрицы M, ξ, входящие в равенство (3.26), играют роль множителей Лагранжа, а функция $F(\lambda)$ – функция Лагранжа, совпадающая с исходным критерием $J(P^*(\cdot), \lambda)$ при любых M и ξ в силу того, что выполнены ограничения (3.6), (3.7), подменяющие исходное ограничение (3.1). Применительно к линейным стохастическим системам такой способ использования метода Лагранжа подробно описан в [54]. Для квазилинейных систем, как видно из доказательства теоремы 3.3, он также применим.

Учитывая результат теоремы 3.3 и предположение 3.1 нетрудно видеть, что необходимое условие оптимальности вектора $\lambda = \bar{\lambda}$ в задаче (3.25) очевидно будет иметь вид

$$\left. \frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = \bar{\lambda}} = 0,$$

где $\partial F(\lambda)/\partial \lambda$ – градиент функции $F(\lambda)$. Задача состоит в том, чтобы конструктивно записать выражение для $\partial F(\lambda)/\partial \lambda$.

В результате использования функции Лагранжа (3.26) вместо исходного критерия (3.2) мы имеем достаточно богатое многопараметрическое представление оптимизируемого функционала, позволяющее упростить вычисление градиента. Более того, в представленном ниже градиентном методе это представление изменяется от шага к шагу, так как на каждом шаге используются свои матрица M и вектор ξ.

Пусть выполнено предположение 3.1, тогда в силу теоремы 3.3 функция $F(\lambda)$ дифференцируема на Λ_a и i-й элемент ($i = \overline{1, n_\lambda}$) ее градиента с учетом (3.26) запишется в виде

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \lambda_i} + \frac{1}{2} tr[\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i}\Gamma^\infty + \Psi \frac{\partial \Gamma^\infty}{\partial \lambda_i}] + \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda_i} m^\infty + \Theta \frac{\partial m^\infty}{\partial \lambda_i}. \tag{3.31}$$

Здесь производная от матрицы по параметру λ_i, $i = \overline{1, n_\lambda}$ понимается как матрица производных от компонент исходной матрицы. Теперь воспользуемся тем, что функция $F(\lambda)$ зависит от произвольных постоянных матриц M и ξ (множителей Лагранжа). Выберем M и ξ так, чтобы упростить выражение градиента (3.31). А именно, будем предполагать, что для оптимального значения $\lambda = \bar{\lambda}$, удовлетворяющего условию (3.25) выполняются условия (3.18), (3.19), что означает равенство нулю величин Ψ и Θ, определенных равенствами (3.16), (3.17), при $\lambda = \bar{\lambda}$. Решения уравнений (3.18), (3.19) в силу леммы 3.3 существуют. И тогда выражение для компонент градиента $\partial F(\lambda)/\partial \lambda$ в точке $\lambda = \bar{\lambda}$ примет более простой вид

$$\left.\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda=\bar{\lambda}} = \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \lambda_i} + \frac{1}{2} tr[\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i}\Gamma^\infty] + \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda_i} m^\infty \tag{3.32}$$

(слагаемые в правой части вычисляются в точке $\lambda = \bar{\lambda}$). Сравнивая (3.31) и (3.32) нетрудно видеть, что формально при вычислении градиента в точке $\lambda = \bar{\lambda}$ можно считать, что Γ^∞ и m^∞ постоянны (не зависят от λ).

С учетом (3.16), (3.17) аналитическая формула для компонент градиента $\partial F(\lambda)/\partial \lambda$ в точке $\lambda = \bar{\lambda}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda=\bar{\lambda}} &= \frac{1}{2} tr[(\frac{\partial A_0^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda_i} M + M \frac{\partial A_0}{\partial \lambda_i} + \sum_{k=0}^{n_w} \frac{\partial A_k^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda_i} M A_k + \sum_{k=0}^{n_w} A_k^{\mathrm{T}} M \frac{\partial A_k}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial Q}{\partial \lambda_i})\Gamma^\infty] + \\ &+ (\xi^T \frac{\partial A_0}{\partial \lambda_i} + \sum_{k=0}^{n_w} \frac{\partial B_k^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda_i} M A_k + \sum_{k=0}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}} M \frac{\partial A_k}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial B_0^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda_i} M + \frac{\partial S}{\partial \lambda_i}) m^\infty + \\ &+ \frac{\partial B_0^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda_i}\xi + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n_w} \frac{\partial B_k^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda_i} M B_k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}} M \frac{\partial B_k}{\partial \lambda_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial \lambda_i}.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Слагаемые в правой части (3.33) вычисляются при $\lambda = \bar{\lambda}$, а матрицы ξ и M удовлетворяют условиям (3.18), (3.19) (при $\lambda = \bar{\lambda}$). В результате приходим к следующей теореме.

Теорема 3.4. *Если* $\bar{\lambda} \in \Lambda_a$ *оптимальный векторный параметр (удовлетворяет условию* (3.25)*) и выполнено предположение A, то функция* $F(\lambda)$ *дифференцируема в точке* $\lambda = \bar{\lambda}$ *и выполнено необходимое условие оптимальности*

$$\left.\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\bar{\lambda}} = 0, \tag{3.34}$$

где компоненты градиента $\partial F(\lambda)/\partial\lambda$ *в точке* $\lambda = \bar{\lambda}$ *задаются равенством* (3.33)*,* $i = \overline{0, n_\lambda}$*, а матрицы* m^∞*,* Γ^∞*,* ξ*,* M *находятся из уравнений* (3.6)*,* (3.7)*,* (3.18)*,* (3.19)*, единственные решения которых существуют.*

3.4 Управляемая по выходу система

Частным случаем поставленной задачи (3.25) является задача оптимизации управляемой системы, описываемой уравнением Ито

$$dx = (A_{0c}x + B_{0c}u + B^1_{0c})dt + \sum_{k=1}^{n_w}(A_{kc}x + B_{kc}u + B^1_{kc})dw_k, \tag{3.35}$$

а управление u задается равенствами

$$u = -Ly + \nu, \tag{3.36}$$

$$y = Cx. \tag{3.37}$$

Здесь $x \in R^n$ – состояние системы; $u \in R^{n_u}$ – вектор управления; $w \in R^{n_w}$ – стандартный винеровский процесс; $y \in R^{n_y}$ – выход системы; A_{kc}, B_{kc}, B^1_{kc} $(k = \overline{0, n_w})$, L, C – матрицы соответствующих размеров, не зависящие от вектора λ. Роль вектора параметров λ играют элементы матрицы L и компоненты вектора $\nu \in R^{n_u}$

$$\lambda = \{L, \nu\}.$$

Функцию вида (3.36) будем называть стратегией управления или регулятором. В уравнении (3.35) и далее, как это принято в теории дифференциальных уравнений, аргумент t в записи функций, входящих в уравнение Ито, будем опускать.

Критерий оптимальности задачи (3.35)-(3.37) имеет вид аналогичный (3.2), при этом функция

$$f^c(x, \lambda) = x^{\mathrm{T}}Q_c x + 2x^{\mathrm{T}}S_c u + u^{\mathrm{T}}D_c u \geq 0,$$

где Q_c, D_c, S_c – матрицы соответствующих размеров, причем Q_c, $D_c > 0$ симметрические.

Если подставить (3.36), (3.37) в (3.35), получим систему вида (3.1), где

$$A_k = A_{kc} - B_{kc}LC, \tag{3.38}$$

$$B_k = B_{kc}\nu + B_{kc}^1, \quad k = \overline{0, n_w}. \tag{3.39}$$

Тогда задача поиска оптимальной стратегии управления вида (3.36) сводится к поставленной выше задаче оптимизации критерия (3.2) по параметру λ. При этом матрицы Q, S и D в критерии (3.2) будут иметь вид

$$Q = Q_c - S_cLC - C^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}S_c^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}D_cLC,$$

$$S = \nu^{\mathrm{T}}S_c^{\mathrm{T}} - \nu^{\mathrm{T}}D_cLC, \tag{3.40}$$

$$D = \nu^{\mathrm{T}}D_c\nu. \tag{3.41}$$

Для управляемой по выходу системы (3.35)-(3.37) оптимизируемыми параметрами, играющими роль вектора λ, являются элементы матрицы L и вектора ν. Для нее также справедлива теорема 4, где матричные градиенты критерия по этим параметрам имеют вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)^T\Bigg|_{L=\bar{L},\nu=\bar{\nu}} = C[\Gamma^\infty\Pi_1 + m^\infty\Pi_2], \tag{3.42}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \nu}\right)^T\Bigg|_{L=\bar{L},\nu=\bar{\nu}} = -m^{\infty\mathrm{T}}\Pi_1 - \Pi_2, \tag{3.43}$$

где

$$\Pi_1 = -MB_{0c} - \sum_{k=1}^{n_w} A_{kc}^{\mathrm{T}}MB_{kc} - S_c + C^{\mathrm{T}}\bar{L}^{\mathrm{T}}(\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}}MB_{kc} + D_c), \tag{3.44}$$

$$\Pi_2 = -\xi^{\mathrm{T}}B_{0c} - \sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{1\mathrm{T}}MB_{kc} - \bar{\nu}^{\mathrm{T}}(\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}}MB_{kc} + D_c), \tag{3.45}$$

$\partial F/\partial L = \{\partial F/\partial L_{ij}\}$ – матричный градиент критерия оптимальности F задачи (3.35)-(3.37) по компонентам матрицы $L = \{L_{ij}\}$, $i = \overline{1, n_u}$, $j = \overline{1, n_y}$, а $\partial F/\partial \nu = (\partial F/\partial \nu_1, \ldots, \partial F/\partial \nu_{n_u})^{\mathrm{T}}$.

Необходимое условие (3.34) будет состоять из двух равенств

$$C[\Gamma^\infty\Pi_1 + m^\infty\Pi_2] = 0, \tag{3.46}$$

$$m^{\infty\mathrm{T}}\Pi_1 + \Pi_2 = 0. \tag{3.47}$$

Замечание 3.1. *Всюду выше в этом разделе 3.4 предполагалось, что все компоненты управления и могут зависеть от всех компонент вектора выхода* y *(равенство* (3.36)*). Интересен случай, когда каждая компонента управления и может зависеть лишь от своего назначенного заранее набора компонент вектора* y*. В этом случае элементы матрицы* L*, соответствующие не использованным компонентам вектора* y*, полагаются равными нулю, и соответствующие уравнения в системе* (3.46) *изымаются из рассмотрения. При численном решении из набора компонент матричного градиента* (3.42) *изымаются соответствующие компоненты. Это означает, что элементы матрицы* L *равные нулю не подлежат изменению.*

3.4.1 Симметрическая управляемая по выходу система

Представляет интерес частный случай системы (3.35), обладающий свойством симметрии.

Определение 3.3. *Будем говорить, что система* (3.35) *обладает свойством симметрии, если при замене переменных* x*, и на* $(-x)$*,* $(-u)$ *соответственно, получается система совпадающая с исходной* (3.35).

Лемма 3.4. *Для того, чтобы система* (3.35) *обладала свойством симметрии необходимо и достаточно выполнение условий:*

1. $B^1_{oc} = 0$*;*
2. *для каждого* $k = \overline{1, n_w}$ *выполнено одно из условий:* $B^1_{kc} = 0$ $(k \in K_a)$ *или* $A_{kc} = 0$, $B_{kc} = 0$ $(k \in K_b)$.

В справедливости леммы 3.4 нетрудно убедиться непосредственной проверкой, если учесть, что стандартный винеровский процесс не изменяется при замене его знака на противоположный.

Система (3.35), обладающая свойством симметрии принимает вид

$$dx = (A_{0c}x + B_{0c}u)dt + \sum_{k \in K_a} (A_{kc}x + B_{kc}u)dw_k + \sum_{k \in K_b} B^1_{kc} dw_k. \tag{3.48}$$

Для систем управляемых по выходу и обладающих свойством симметрии справедлива следующая теорема.

Теорема 3.5. *Пусть*

$$u = -Ly + \nu, \quad y = Cx \tag{3.49}$$

оптимальный линейный регулятор системы (3.48)*. Тогда при любом* $\tau \in (-\infty, +\infty)$

$$u = -Ly + \tau\nu \tag{3.50}$$

также оптимальный линейный регулятор и реализует в системе (3.48) *то же значение критерия, что и* (3.49).

Доказательство. По теореме 3.2 критерий для системы (3.48) вычисляется по формуле

$$\bar{\gamma} = \nu^{\mathrm{T}} B_{0c}^{\mathrm{T}} \xi + \frac{1}{2} \sum_{k \in K_a} \nu^{\mathrm{T}} B_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc} \nu + \frac{1}{2} \sum_{k \in K_b} (B_{kc}^{1})^{\mathrm{T}} M B_{kc}^{1} + \frac{1}{2} \nu^{\mathrm{T}} D_c \nu, \tag{3.51}$$

где матрица ξ, определяемая равенством (3.18), имеет вид

$$\xi = -A_0^{-\mathrm{T}} Q_\nu \nu, \tag{3.52}$$

а Q_ν определяется равенством (3.57). Подставляя (3.52) в (3.51) получим

$$\bar{\gamma} = \nu^{\mathrm{T}} [-B_{0c}^{\mathrm{T}} A_0^{-\mathrm{T}} Q_\nu + \frac{1}{2} \sum_{k \in K_a} B_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc} + \frac{1}{2} D_c] \nu + \frac{1}{2} \sum_{k \in K_b} (B_{kc}^{1})^{\mathrm{T}} M B_{kc}^{1}. \tag{3.53}$$

Пусть (3.49) – оптимальный регулятор. Фиксируем L и рассмотрим регулятор (3.50). Подставив в выражение критерия (3.53) $\tau\nu$ вместо ν, получим

$$\bar{\gamma} = \gamma^*(\tau) = A_\tau \tau^2 + B_\tau, \tag{3.54}$$

где A_τ и B_τ – постоянные числа. Так как $\bar{\gamma} \geq 0$, то и коэффициент $A_\tau \geq 0$. Если $A_\tau > 0$, то минимум (3.54) достигается при $\tau = 0$, и оптимальный регулятор имеет вид (3.55). Если $A_\tau = 0$, то $\gamma^*(\tau) = const$, и регулятор (3.50) оптимален при любом τ. □

Замечание 3.2. *Если* (3.49) *оптимальный линейный регулятор системы* (3.48)*, то регулятор*

$$u = -Ly \tag{3.55}$$

также является оптимальным.

Доказательство следствия элементарно: регулятор (3.55) получается из (3.50) при $\tau = 0$. Необходимые условия оптимальности регулятора (3.55) значительно упрощаются.

Теорема 3.6. *Для оптимальности регулятора* (3.55) *в системе* (3.48) *необходимо выполнение условия*

$$C \Gamma^{\infty} Q_\nu = 0, \tag{3.56}$$

где

$$Q_\nu = M B_{0c} + \sum_{k \in K_a} A_k^{\mathrm{T}} M B_{kc} + S_c - C^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} (\sum_{k \in K_a} B_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc} + D_c), \tag{3.57}$$

матрица M и предельная матрица ковариаций Γ^{∞} находятся из уравнений

$$A_0^{\mathrm{T}} M + M A_0 + \sum_{k \in K_a} A_k^{\mathrm{T}} M A_k + Q_c - S_c L C - C^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} S_c^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} D_c L C = 0, \tag{3.58}$$

$$A_0\Gamma^\infty + \Gamma^\infty A_0^{\mathrm{T}} + \sum_{k\in K_a} A_k\Gamma^\infty A_k^{\mathrm{T}} + \sum_{k\in K_b} B_{kc}^1 (B_{kc}^1)^{\mathrm{T}} = 0, \tag{3.59}$$

матрицы A_k, $k=\overline{0,n_w}$ определяются равенством (3.38), *а критерий оптимальности вычисляется по формуле*

$$\bar\gamma = \frac{1}{2}\sum_{k\in K_b} (B_{kc}^1)^{\mathrm{T}} M B_{kc}^1. \tag{3.60}$$

Доказательство. Теорема 3.6 является конкретизацией теоремы 3.4 для системы (3.48), обладающей свойством симметрии с регулятором вида (3.55).

Так как для регулятора вида (3.55) $\nu = 0$, то с учетом условия 1 леммы 3.4 и невырожденности матрицы A_0 из уравнения (3.6) для предельного математического ожидания m^∞ следует, что $m^\infty = 0$. И тогда из равенств (3.18), (3.38)-(3.40), если учесть, что $det(A_0) \neq 0$ и лемму 3.4, следует равенство $\xi = 0$.

Учитывая равенства $m^\infty = 0$ и $\xi = 0$, нетрудно видеть, что необходимое условие (3.47) при $\nu = 0$ выполняется автоматически независимо от вида матрицы L, а условие (3.46) приобретает вид (3.56).

Уравнения (3.58), (3.59) и равенство (3.60) являются конкретизацией для системы (3.48) уравнений (3.19), (3.7) и равенства (3.24), соответственно. □

Замечание 3.3. *Если матрица ковариаций не вырождена ($|\Gamma^\infty| \neq 0$) и матрица L имеет полный ранг n_y, то уравнение* (3.48) *разрешимо относительно L*

$$L = (\sum_{k\in K_a} B_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc} + D_c)^{-1}(B_{0c}^{\mathrm{T}} M + \sum_{k\in K_a} B_{kc}^{\mathrm{T}} M A_{kc} + S_c^{\mathrm{T}})\Gamma^\infty C^{\mathrm{T}} (C\Gamma^\infty C^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Справедливость этого утверждения следует из сделанных предположений и положительной определенности матрицы D_c.

Интересно отметить случай, когда необходимым условиям оптимальности удовлетворяет лишь регулятор вида (3.55).

Теорема 3.7. *Если* (3.49) *оптимальный линейный регулятор системы* (3.48) *и имеет полный ранг матрица*

$$\Omega = -Q_\nu^{\mathrm{T}} A_0^{-1} B_{0c} - B_{0c}^{\mathrm{T}} A_0^{-\mathrm{T}} Q_\nu + \sum_{k\in K_a} B_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc} + D_c, \tag{3.61}$$

где матрица Q_ν определяется равенством (3.57), *то $\nu = 0$ и оптимальный регулятор имеет вид* (3.55).

Доказательство. Для системы обладающей свойством симметрии (3.48) необходимое условие (3.47) и уравнение (3.18) для ξ примут вид

$$Q_\nu^{\mathrm{T}} m^\infty + B_{0c}^{\mathrm{T}}\xi + R_m^{\mathrm{T}}\nu = 0, \tag{3.62}$$

$$A_0^{\mathrm{T}}\xi + Q_\nu = 0, \tag{3.63}$$

где Q_ν определяется равенством (3.57),

$$R_m^{\mathrm{T}} = \sum_{k\in K_a} B_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc} + D_c$$

. Выразив m^∞ из (3.6) и ξ из выражения (3.63) и подставив в (3.62), получим равенство

$$(-Q_\nu^{\mathrm{T}} A_0^{-1} B_{0c} - B_{0c}^{\mathrm{T}} A_0^{-\mathrm{T}} Q_\nu + \sum_{k\in K_a} B_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc} + D_c)\nu = 0.$$

Из этого равества наглядно видно, что если матрица (3.61) имеет полный ранг, то $\nu = 0$. □

3.5 Система с пропорционально-интегрально-дифференциальным регулятором

Рассмотрим стохастическую управляемую по выходу систему

$$\begin{aligned} &dx = (A_0x + B_0^1)dt + B_0udt + \sum_{k=1}^{n_w}(A_kx + B_k^1)dw_k, \\ &y = Cx, \end{aligned} \tag{3.64}$$

где $x \in R^n$ – состояние системы; $u \in R^{n_u}$ – вектор управления; $w \in R^{n_w}$ – стандартный винеровский процесс; $y \in R^{n_y}$ – выход системы; A_k, B_k^1, $(k = \overline{0, n_w})$, B_0 – матрицы соответствующих размеров.

Весьма популярным в прикладных задачах управления является так называемый ПИД-регулятор. Интерес к нему обусловлен его простотой и простотой необходимых измерительных устройств. Если ПИД-регулятор удовлетворительно решает проблему стабилизации системы, то нет смысла использовать более сложный регулятор.

Выходной сигнал ПИД-регулятора u для рассматриваемой задачи (3.64) определяется выражением

$$u = -L_1y - L_2z - L_3\frac{dy}{dt} + L_4,$$

где

$$z = \int_0^t y(\tau)d\tau,$$

а L_1, L_2, L_3 – коэффициенты усиления пропорциональной, интегральной и дифференциальной составляющих регулятора, L_4 – коэффициент сдвига.

Уравнение регулятора u запишем в виде

$$udt = -L_1ydt - L_2dy - L_3zdt + L_4dt = -L_1Cxdt - L_2Cdx - L_3zdt + L_4dt.$$

Подставив его в рассматриваемую систему (3.64), предпологая, что $S_* = E + B_0L_2C$ не вырожденная матрица, получим динамическую систему

$$\begin{aligned}
&dx = S_*^{-1}[(A_0 - B_0L_1C)xdt - B_0L_3zdt + (B_0^1 + B_0L_4)dt + \\
&+ \sum_{k=1}^{n_w}(A_kx + B_k^1)dw_k], \\
&dz = Cxdt.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Система (3.65) – квазилинейная система вида (3.1), для которой могут быть записаны уравнения (3.3), (3.4) для первого и второго центрального моментов и исследована устойчивость ситемы (3.65).

При решении задачи оптимизации ПИД-регулятора критерий оптимальности целесообразно взять в виде (3.2), где Q – постоянная матрица, $S = 0$, $D(\lambda) = D(L_1, L_2, L_3, L_4)$ – положительно определенная квадратичная форма от компонент матриц L_1, L_2, L_3, L_4 регулятора, которые выполняют роль оптимизируемого векторного параметра λ в общей теории.

3.5.1 Пример

Рассмотрим квазилинейную стохастическую систему вида (3.64), описываемую уравнениями Ито

$$\begin{aligned}
&dx_1 = x_2dt, \\
&dx_2 = (-x_2 - x_3)dt, \\
&dx_3 = (x_1 - x_3 + x_4)dt + x_4dw_2, \\
&dx_4 = (-x_4 + u)dt + (x_4 + 1)dw_1, \\
&y = x_2,
\end{aligned} \tag{3.66}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$ – состояние системы; u – управление; $w = (w_1, w_2)^{\mathrm{T}}$ – стандартные винеровские процессы.

Матрица A_0, определяемая системой (3.66), является асимптотически устойчивой.

Выходом системы (3.66) является компонента x_2 вектора состояния, а компонента x_4 не доступна измерению. ПИД-регулятор определяется выражением

$$u = -L_1x_2 - L_2x_1 - L_3(-x_2 - x_3), \tag{3.67}$$

где коэффициенты регулятора составляют матрицу $L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \end{pmatrix}$.

Критерий оптимальности задан в виде

$$J(P^*(\cdot), \lambda) = \frac{1}{2} \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{R^n} (x^{\mathrm{T}} Q x + D) P(t, dx) dt, \tag{3.68}$$

$$Q = diag(1, 2, 1, 1), \qquad D = 1.$$

Используя предложенный градиентный численный метод, было получено оптимальное управление (3.67) в задаче (3.66),(3.68), где

$$L = \begin{pmatrix} -0.61 & 1.08 & 1.58 \end{pmatrix}. \tag{3.69}$$

Оптимальное значение критерия составило 2.47.

Было произведено сравнение оптимального регулятора с оптимальным регулятором, найденным в соответствии теорией АКОР для детерминированной системы, в котором не доступная измерению компонента x_4 была исключена

$$L = \begin{pmatrix} 0.15 & -0.49 & 0.89 \end{pmatrix}. \tag{3.70}$$

Значение критерия (3.68), найденное по формуле (3.24), при использовании регулятора (3.70) составило 6.31.

Пример реализации процессов управления системы приведен на рис. 3.1, 3.2, пунктирная линия соответствует регулятору (3.70), сплошная – оптимальному (3.69).

3.6 Управляемая система в случае полной информации о векторе состояния

Вернемся к общему случаю управляемой по выходу системы и рассмотрим случай полной информации о состоянии. Рассмотрим управляемую систему (3.35), но будем предполагать, что имеется полная информация о состоянии, так что стратегия управления

$$x \to u(x) : R^n \to R^{n_u} \tag{3.71}$$

может зависеть от всех компонент вектора состояния x. В этом частном случае можно получить не только необходимые, но и достаточные условия оптимальности регулятора вида (3.71).

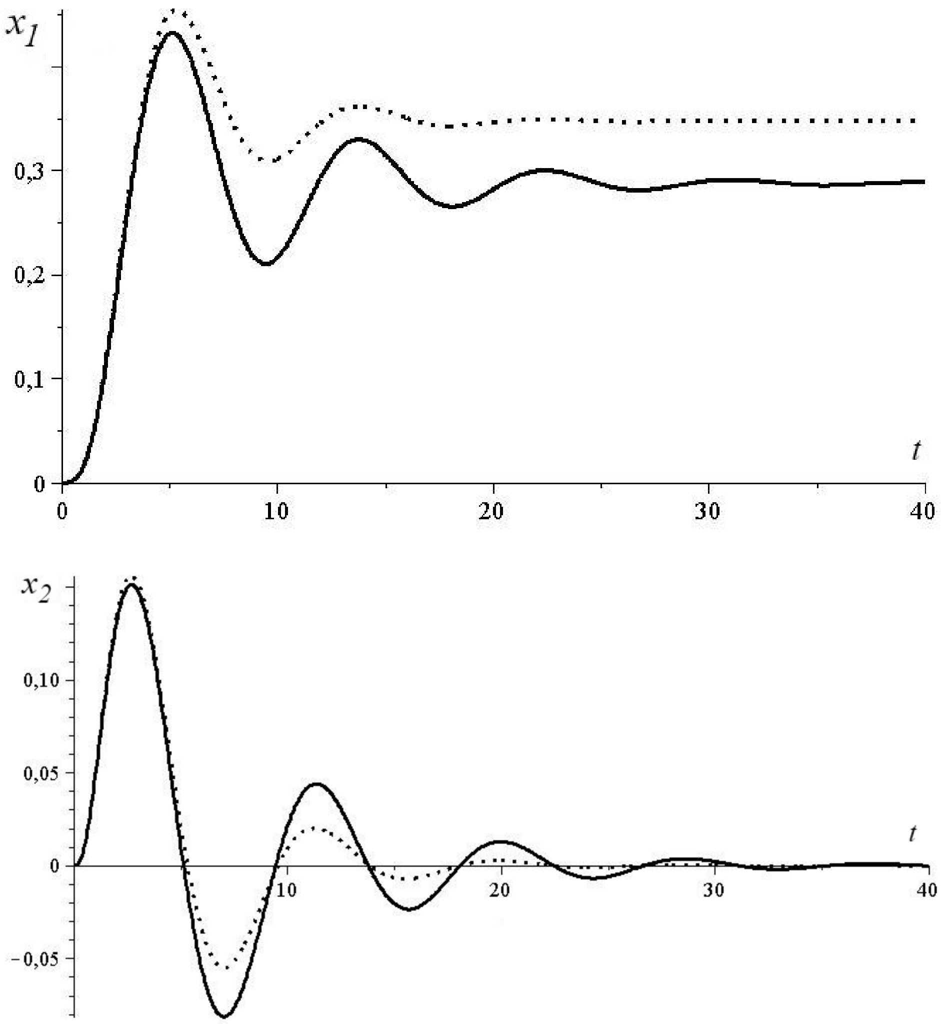

Рис. 3.1: График отклонение фазовых координат.

В предыдущих разделах, посвященных задачам оптимального управления системой (3.35) при неполной информации о состоянии, использовался усредненный по времени квадратичный критерий оптимальности (3.2). Такой же критерий можно было бы выбрать и в рассматриваемой здесь задаче. Однако, в задаче оптимизации при полной информации о состоянии будем рассматривать достаточно богатый класс нелинейных допустимых стратегий управления $u(x)$, для которых предел в правой части равенства (3.2) может не существовать. В связи с этим необходимо заново описать класс допустимых стратегий вида (3.71) и несколько видоизменить постановку задачи оптимизации.

Определение 3.4. *Через D^∞ обозначим множество процессов $z_P(t) = (P(t, \cdot), u(\cdot))$, где функция $u(x)$ вида* (3.71) *измерима по Борелю на пространстве R^n, а $P(t, \cdot)$ – борелевская вероятностная мера состояния x системы* (3.35) *в момент $t \in [0, +\infty)$, удовлетворяющих условиям:*

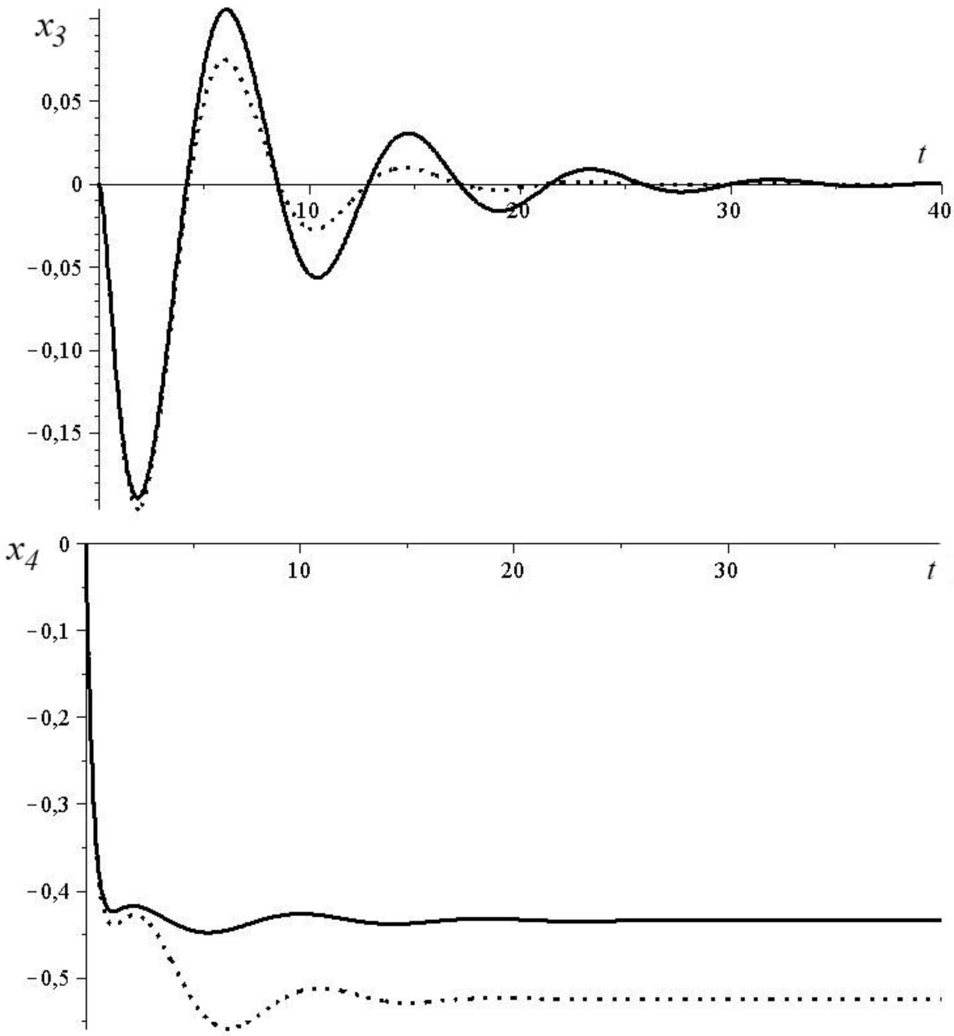

Рис. 3.2: График отклонение фазовых координат.

1. *процесс $z_P(t)$ является обобщенным решением уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова* (1.4) *с начальным условием* (1.3)*;*

2. *при всех $t \in [0, +\infty)$ и $q(\cdot) = P(t, \cdot)$ тождество* (1.4) *вдоль траектории $P(t, \cdot)$ должно выполняться не только для финитных функций $\eta(x) \in C_0^2$, но и для любых линейно-квадратичных функций от x;*

3. *функция $P(t, \cdot)$ имеет математическое ожидание $m(t)$ и матрицу ковариаций $\Gamma(t)$, непрерывно дифференцируемые и ограниченные на интервале $[0, +\infty)$;*

4. *начальная мера $P_0^* = P(0, \cdot)$ выбирается любой, удовлетворяющей условию 3) при $t = 0$;*

5. *определен функционал*

$$J(z_P(\cdot)) = \varliminf_{t_1 \to +\infty} \zeta(t_1) = \lim_{t_1 \to +\infty} \inf_{\tau \in [t_1, +\infty)} \zeta(\tau), \tag{3.72}$$

где

$$\zeta(t_1) = \frac{1}{2t_1} \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{R^n} (x^{\mathrm{T}} Q_c x + 2u^{\mathrm{T}} S_c^{\mathrm{T}} x + u^{\mathrm{T}} D_c u) P_T(t, dx) dt, \tag{3.73}$$

а $P_T(t,\cdot)$ *– сужение функции* $P(t,\cdot)$ *на интервал* $[0,T]$.

На множестве D^∞ необходимо минимизировать функционал (3.72), принимающий значения из интервала $[0,+\infty]$ (допускаются бесконечные значения).

Теорема 3.8. *Пусть процесс* $z_P(t) = (P(t,\cdot), u(\cdot))$ *из множества* D^∞, *где* $u(\cdot)$ *стратегия вида* (3.85), *удовлетворяет условиям:*

1. *набор параметров* (L,ν) *стратегии* $u(\cdot)$ *принадлежит множеству* Λ_a;
2. *справедливы равенства*

$$\Pi_1 = -MB_{0c} - \sum_{k=1}^{n_w} A_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc} - S_c + C^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} (\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc} + D_c) = 0, \tag{3.74}$$

$$\Pi_2 = -\xi^{\mathrm{T}} B_{0c} - \sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{1\mathrm{T}} M B_{kc} - \nu^{\mathrm{T}} (\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc} + D_c) = 0, \tag{3.75}$$

где матрицы ξ, M *удовлетворяют уравнениям* (3.18), (3.19) *соответственно.*

Тогда:

а) *процесс* $z_P(t)$ *минимизирует функционал* (3.72) *на множестве* D^∞;

б) *любой другой процесс* $\tilde{z}_P(t) = (\tilde{P}(t,\cdot), u(\cdot))$ *из множества* D^∞, *использующий ту же стратегию управления* $u(x)$, *что и процесс* $z_P(t)$, *также минимизирует функционал* (3.72) *на* D^∞, *и значения критерия на процессах* $\tilde{z}_P(t)$ *и* $z_P(t)$ *совпадают;*

в) *оптимальное значение критерия вычисляется по формуле*

$$J(z_P(\cdot)) = B_0^{\mathrm{T}} \xi + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}} M B_k + \frac{1}{2} D, \tag{3.76}$$

где B_k, D *определяются равенствами* (3.39), (3.41);

г) *уравнения* (3.74), (3.75) *разрешимы относительно параметров регулятора* L *и* ν

$$L = (\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc} + D_c)^{-1} (\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}} M A_{kc} + S_c^{\mathrm{T}} + B_{0c}^{\mathrm{T}} M)), \tag{3.77}$$

$$\nu = (\sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc} + D_c)^{-1} (B_{0c}^{\mathrm{T}} \xi + \sum_{k=1}^{n_w} B_{kc}^{\mathrm{T}} M B_{kc}^1); \tag{3.78}$$

д) условия (3.74), (3.75) *гарантируют выполнение необходимых условий оптимальности* (3.46), (3.47).

Доказательство. Функция $h(x, u)$ для системы (3.35), аналогичная формуле (3.13) для системы (3.1), имеет вид

$$h = Q_x + u^{\mathrm{T}} Q_u + \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} Q_{uu} u, \tag{3.79}$$

где

$$Q_x = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} \Psi_0 x + (\xi^{\mathrm{T}} A_{0c} + \sum_{k=1}^{n_w} (B^1_{kc})^{\mathrm{T}} M A_{kc} + (B^1_{0c})^{\mathrm{T}} M) x + \xi^{\mathrm{T}} B^1_{0c} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_w} (B^1_{kc})^{\mathrm{T}} M B^1_{kc},$$

$$Q_u = (\sum_{k=1}^{n_w} B^{\mathrm{T}}_{kc} M A_{kc} + S^{\mathrm{T}}_c + B^{\mathrm{T}}_{0c} M) x + B^{\mathrm{T}}_{0c} \xi + \sum_{k=1}^{n_w} B^{\mathrm{T}}_{kc} M B^1_{kc},$$

$$Q_{uu} = \sum_{k=1}^{n_w} B^{\mathrm{T}}_{kc} M B_{kc} + D_c,$$

$$\Psi_0 = A^{\mathrm{T}}_{0c} M + M A_{0c} + \sum_{k=1}^{n_w} A^{\mathrm{T}}_{kc} M A_{kc} + Q_c.$$

Так как по условию теоремы матрица M является решением уравнения (3.19), то в силу леммы 3.3 $M \geq 0$. Если учесть, что матрица $D_c > 0$, то нетрудно видеть, что $Q_{uu} > 0$. Из этого легко следует справедливость утверждения г) теоремы.

Если сравнить необходимые условия (3.46), (3.47) и условия теоремы (3.74), (3.75), нетрудно убедиться в справедливости утверждения д) теоремы.

Остается доказать основные утверждения а)-в) теоремы. Доказательство утверждения а) выполняется по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.3 с соответствующими изменениями. Величина $\zeta(T)$ при фиксированном процессе $z_P(\cdot)$, определяемая равенством (3.73), может быть вычислена по формуле

$$\zeta(t_1) = t_1 \bar{\gamma} - \int\limits_{R^n} \psi^0(x) P_T(t_1, dx) + \int\limits_{R_n} \psi^0(x) P_T(0, dx) + \\ + \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{R^n} (h(x, u(x)) - \bar{\gamma}) P_T(t, dx) dt, \tag{3.80}$$

где $\psi^0(x)$, $\bar{\gamma}$, $h(x, u)$ определяются равенствами (3.10), (3.24), (3.79).

Заметим, что условие 2) определения 3.4 гарантирует выполнение условия А и, следовательно, корректность использования функции $\psi^0(x)$ вида (3.10) в равенстве (3.80).

Из предположения 3 в определении 3.4 множества D^∞, если учесть вид (3.10) функции $\psi^0(x)$, следует что

$$\lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} [-\int\limits_{R^n} \psi^0(x) P_T(t_1, dx) + \int\limits_{R^n} \psi^0(x) P_T(0, dx)] = 0.$$

Учитывая это для критерия (3.72) получим равенство

$$J(z_P(\cdot)) = \varliminf_{t_1 \to +\infty} \zeta(t_1) = \bar{\gamma} + \varliminf_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \int_{R^n} (h(x, u(x)) - \bar{\gamma}) P_T(t, dx) dt. \tag{3.81}$$

В силу теоремы 3.2 стратегия $u(x) = Lx + \nu$ является стабилизирующей и

$$J(z_P(\cdot)) = \bar{\gamma}, \tag{3.82}$$

где $\bar{\gamma}$ определяется равенством (3.24). Далее, так как $Q_{uu} > 0$, функция $h(x, u)$ является положительно определенной формой относительно вектора u, и тогда управление

$$u(x) = -Q_{uu}^{-1} Q_u = -Lx + \nu$$

минимизирует функцию $h(x, u)$ по u. Нетрудно проверить, что

$$h(x, u(x)) = \bar{\gamma}, \quad x \in R^n. \tag{3.83}$$

Из этого следует, что для любого процесса $\tilde{z}_P(t) = (\tilde{P}(t, \cdot), \tilde{u}(\cdot))$ из D^∞ справедливо неравенство

$$h(x, \tilde{u}(x)) - \bar{\gamma} \geq 0, \quad x \in R^n. \tag{3.84}$$

Пусть $\tilde{z}_P(\cdot)$ – произвольный процесс из D^∞. Тогда, учитывая (3.81), (3.82) и (3.84), будем иметь

$$\Delta J = J(\tilde{z}_P(\cdot)) - J(z_P(\cdot)) = \varliminf_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \int_{R^n} (h(x, \tilde{u}(x)) - \bar{\gamma}) P_T(t, dx) dt \geq 0.$$

Это доказывает утверждение а) теоремы.

Утверждение б) следует из того, что стратегия $u(x)$ в силу теоремы 3.2 является стабилизирующей.

Утверждение в) вытекает из (3.24) и (3.82). Здесь следует подчеркнуть, что

$$J(z_P(\cdot)) = \lim_{t_1 \to +\infty} \zeta(t_1),$$

где в правой части стоит обычный предел, а не нижний. Это следует из (3.81), (3.83). Здесь величина $\zeta(T)$ определяется равенством (3.73) и вычисляется для процесса $z_P(\cdot)$. □

Целесообразно прокомментировать результаты теоремы. Результат б) теоремы 3.8, в частности, означает, что оптимальное значение критерия (3.76) не зависит от начального условия $P_0(\cdot)$ и самого реализовавшегося процесса изменения меры $P(t, \cdot)$, и полностью определяется оптимальной стратегией $u(\cdot)$. В равенстве (3.76) фигурирует обычный предел в отличие от нижнего предела в (3.72). Это означает, что оптимальный процесс $z_P(t)$ обладает свойством эргодичности. Эргодичность здесь понимается в предельном смысле, означающем, что при $t \to +\infty$ процесс сходится к стационарному эргодическому процессу. Но этот процесс является наилучшим по критерию (3.72) не только среди процессов обладающих эргодичностью, но и среди неэргодичных.

В отличие от теорем 3.4-3.6, в которых даются необходимые условия оптимальности регулятора вида (3.36) среди линейных, теорема 3.8 дает достаточные условия оптимальности такого регулятора в классе нелинейных весьма общего вида.

Также рассмотрим задачу оптимального управления системой (3.35), в которой множество допустимых стратегий управления $u^* = u(\cdot)$ сужается до линейных стратегий вида

$$u = -Lx + \nu \tag{3.85}$$

из класса Λ_a (множество линейных стратегий управления вида (3.85), удовлетворяющих определению 3.1, гарантирующее существование предельных значений m^∞, Γ^∞ математического ожидания $m(t)$ и матрицы ковариаций $\Gamma(t)$), а начальная мера P_0^* имеет дважды непрерывно дифференцируемую плотность, имеющую конечные первый и вторый моменты. В этом случае мера $P(t, \cdot)$ также имеет плотность, удовлетворяющую классическому уравнению ФПК. Множество таких процессов управления $z(t) = (P^*(t), u^*)$ обозначим D_∞^Λ. В этом случае условия 1, 3, 4, 5, определяющие множество D_∞, выполнены автоматически. Выполнение условия 2 следует из леммы 3.1.

Учитывая результат леммы 3.1, можно утверждать, что приведенная выше теорема будет также справедлива, если в ней заменить множество D_∞ на D_∞^Λ. Кроме того, в этом случае функционал (3.72) можно заменить на функционал (3.2) (для процессов из D_∞^Λ они равны).

В публикациях [67,71] имеются аналоги результата с множеством D_∞^Λ для частных случаев системы (3.35), обладающий свойством симметрии, вида

$$dx = (A_{oc}x + B_{0c}u)dt + \sum_{k=1}^{n_1} A_{kc}xdw_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} B_{kc}udw_k + \sum_{k=n_2+1}^{n_w} B_{kc}^1 dw_k. \tag{3.86}$$

При этом в [71] предпоследнее слагаемое в (3.86), зависящее от управления u, отсутствует. Система вида (3.86), рассматриваемая в работе [67] отличается от нашего общего случая (3.48) тем, что коэффициенты диффузии могут зависеть либо от состояния x, либо от управления u, и исключается одновременная зависимость от x и u. Кроме того, в [67, 71] совершенно не изучается общий случай систем вида (3.35) не обладающих свойством симметрии.

Существенно то, что в работах [67, 71] рассматривается лишь случай полной информации о состоянии, когда стратегия управления может зависеть от всех компонент вектора x. Но и в этом случае в указанных работах получен более слабый результат, чем результаты теоремы 3.8. В работах [67,71] предполагается, что матрица Q_c в критерии оптимальности (3.73) положительно определена. При очень сложных конструктивно непроверяемых предположениях, гарантирующих эргодичность всех допустимых процессов, доказывается оптимальность стратегии управления вида $u = -Lx$ в классе липшицевых стратегий $u(x)$. При этом не анализируется особая ситуация, когда наряду со стратегией $u = -Lx$ оптимальной может быть и стратегии вида $u = -Lx + \nu$. В [67, 71] условие оптимальности (3.75) отсутствует ($\nu = 0$). А условие (3.74) и уравнение для матрицы M после их конкретизации для частных случаев, рассматриваемых в [67, 71], совпадают с соответствующими уравнениями этих работ.

Слабость результатов [67, 71] объясняется тем, что их авторы используют технологию основанную на уравнении Беллмана. Этот подход приводит к необходимости жестких предположений в случае полной информации и вообще не позволяет рассматривать случай неполной обратной связи.

3.7 Численный метод и моделирование

3.7.1 Алгоритм синтеза оптимальных регуляторов квазилинейных стохастических систем

Пусть система (3.1) стабильна. Для того, чтобы подсчитать значение критерия (3.2) по формуле (3.24) нужно знать вектор ξ и матрицу M, которые находятся из (3.18) и (3.19) соответственно. Если матрица A_0 асимптотически устойчива, то уравнение (3.18) имеет решение. А уравнение (3.19) можно решить сведением к системе линейных алгебраических уравнений, аналогичной (3.8). Причем в силу симметрии матрицы M можно рассматривать не n^2, а $n(n+1)/2$ уравнений.

Так как для оптимизируемого критерия (3.2) получено выражение градиента (3.33), то для решения задачи оптимизации можно применить метод градиентного спуска. Для вычисления градиента (3.33) также необходимо считать матрицы m^∞, Γ^∞, удовлетворяющие уравнениям (3.6), (3.7), решение которых также сводится к решению системы линейных уравнений.

В методе градиентного спуска целесообразно увеличивать величину шага, если предыдущие шаги были удачными, и уменьшать – если неудачными.

В нашем случае имеется некоторая специфика. Неудачными нужно считать ситуации, когда значение критерия $J(P^*(\cdot), \lambda^i)$ на i-ом шаге не уменьшилось или когда хотя бы одна из матриц $A_0(\lambda^i)$, $\mathcal{A}(\lambda^i)$, определяющих первый и второй центральный моменты, не является асимптотически устойчивой.

Если критерий (3.2) ограничен снизу, то метод гарантирует монотонную сходимость последовательности $\{J(P^*(\cdot), \lambda^i)\}$ (не обязательно к значению минимума).

3.7.2 Модельный пример

Рассмотрим квазилинейную стохастическую систему, описываемую уравнениями Ито

$$
\begin{aligned}
dx_1 =& x_2 dt + x_2 dw_1, \\
dx_2 =& x_3 dt, \\
dx_3 =& (-3x_3 + u)dt + (x_1 + x_3 + c_1)dw_1 + x_1 dw_2,
\end{aligned}
\tag{3.87}
$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния; u – управление; $w = (w_1, w_2)^{\mathrm{T}}$ – стандартный винеровский процесс.

Функционал качества управления определяется выражением

$$
J(P^*(\cdot), u) = \frac{1}{2} \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{R^3} (x_1^2 + u^2) P(t, x) dx dt. \tag{3.88}
$$

Требуется найти такое управление u, что

$$
J(P^*(\cdot), \bar{u}) = \min_u J(P^*(\cdot), u). \tag{3.89}
$$

Используя предложенный градиентный численный метод был найден оптимальный регулятор $u = -Lx$, где

$$
L = \begin{pmatrix} 2.16 & 5.03 & 1.56 \end{pmatrix}. \tag{3.90}
$$

Значение критерия (3.88) составило 0.73, в то время как значение критерия, подсчитанное по формуле (3.24, при летовском регуляторе - 1.26.

3.8 Оптимальная стабилизация движения беспилотного летательного аппарата (БПЛА) в неспокойной атмосфере

3.8.1 Описание модели движения БПЛА

Рассматривается движение центра масс беспилотного летательного аппарата в вертикальной плоскости под действием внешнего ветрового возмущения ограниченной мощности. БПЛА имеет следующие характеристики [69]: длина - 1.7 м, высота - 0.6 м, начальная скорость - 25 м/с, максимальная скорость - 38 м/с, вес - 8.5 кг, максимальный взлетный вес - 13.5 кг, максимальная тяга - 22 Н.

Значения констант, характеризующих БПЛА: $c_{x0} = 0.0434$ – коэффициент лобового сопротивления при нулевом угле атаки; $c_{y0} = -0.23$ – коэффициент подъемной силы при нулевом угле атаки; $c_x^\alpha = 5.6106$ – коэффициент производной первого порядка по углу атаки; $S = 0.55$ – площадь крыла (м^2); $\rho = 1.1455$ – плотность атмосферы (кг/м^3), соответствующая высоте 0.5-1 км; $e = 0.75$ – коэффициент Освальда; $\delta = 2.8956$ – размах крыла (м).

Переменные используемые в уравнениях движения БПЛА представлены на рис. 3.3.

Введены следующие обозначения: V – скорость самолета относительно земли; V_x^w, V_y^w – соответственно, горизонтальная и вертикальная составляющие скорости ветра; α – угол атаки; θ – угол наклона траектории; V^* – воздушная скорость самолета, α^w – приращение угла атаки за счет ветра, определяемые формулами

$$V^{*2} = (V\cos\theta - V_x^w)^2 + (V\sin\theta - V_y^w)^2,$$

$$\sin\alpha^w = (V_y^w\cos\theta - V_x^w\sin\theta)/V^*;$$

$X^* = c_x\rho V^{*2}S/2$ – сила лобового сопротивления; $Y^* = c_y\rho V^{*2}S/2$ – подъемная сила; коэффициенты лобового сопротивления c_x и подъемной силы c_y определяются формулами соответственно

$$c_x = c_{x0} + (c_y^\alpha\alpha^*)^2/\gamma, \qquad c_y = c_{y0} + c_y^\alpha\alpha^*,$$

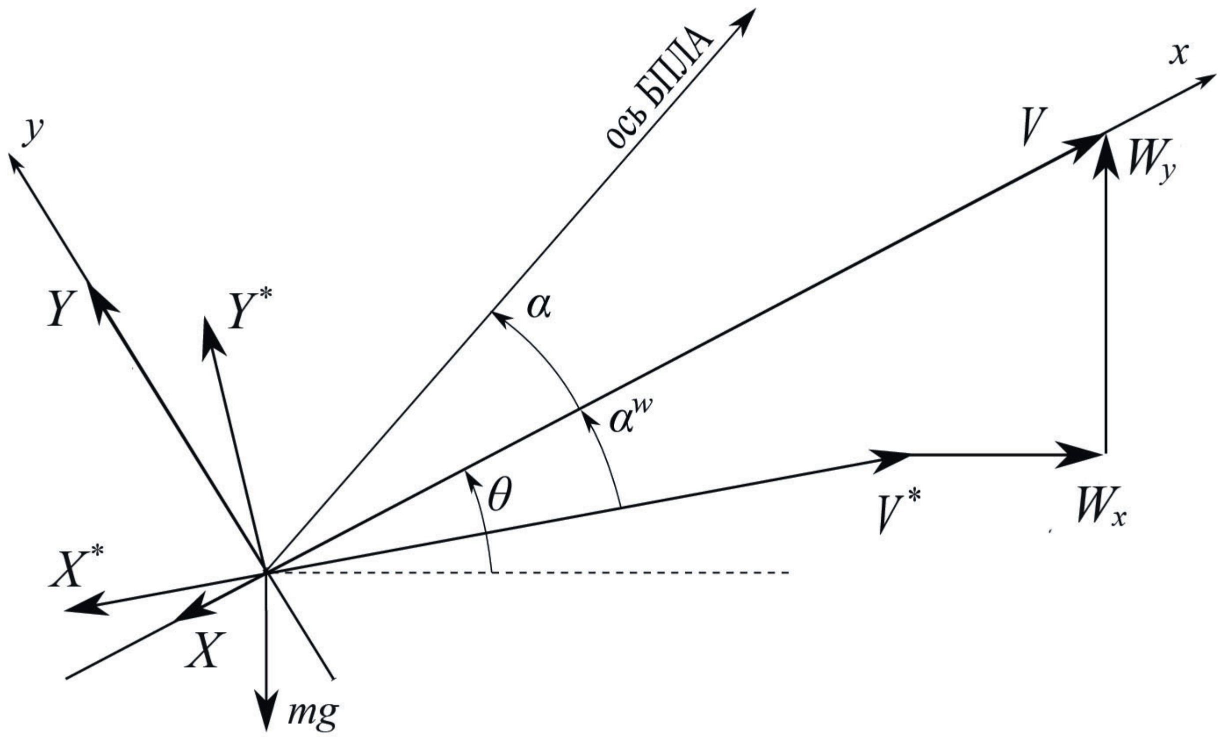

Рис. 3.3: Переменные, используемые в задаче.

где $\alpha^* = \alpha + \alpha^w$, $\gamma = \pi e \delta^2 / S$.

Уравнения движения БПЛА в скоростной системе координат имеют вид [12]

$$
\begin{aligned}
m\frac{dV}{dt} =& T_e \cos\alpha - X(\alpha, V, \theta, V_x^w, V_y^w) - mg\sin\theta, \\
mV\frac{d\theta}{dt} =& T_e \sin\alpha + Y(\alpha, V, \theta, V_x^w, V_y^w) - mg\cos\theta, \\
\frac{dh}{dt} =& V\sin\theta,
\end{aligned} \tag{3.91}
$$

где h – высота полета, m – масса, T_e – тяга, g – ускорение свободного падения,

$$X = X^* \cos\alpha^w - Y^* \sin\alpha^w,$$

$$Y = X^* \sin\alpha^w + Y^* \cos\alpha^w.$$

Эти уравнения справедливы в предположении, что направление силы тяги совпадает с осью самолета, масса самолета постоянна, Земля плоская.

Далее предполагаем, что БПЛА совершает почти горизонтальный полет, то есть $\sin\alpha \cong \alpha$, $\sin\alpha^w \cong \alpha^w$, $\sin\theta \cong \theta$, $\cos\alpha \cong 1$, $\cos\alpha^w \cong 1$, $\cos\theta \cong 1$, с почти постоянной скоростью $\bar{V} = 32$ м/с и тягой $\bar{T}_e = 17$ Н. Масса БПЛА изменяется достаточно медленно, и при решении задачи стабилизации ее можно считать постоянной $\bar{m} = 12.5$ кг.

В результате линеаризации системы (3.91) в окрестности номинальной траектории с учетом сделанных предположений и исходных данных получим систему линейных уравнений в приращениях

$$d\Delta x = \left(\begin{pmatrix} -0.09 & -9.81 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} 4.87 & 0.08 \\ 4.57 & 3 \times 10^{-4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u \right) dt + \\ + \begin{pmatrix} -0.09 & -0.15 \\ -0.02 & -0.14 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x^w \\ V_y^w \end{pmatrix} dt. \quad (3.92)$$

Здесь $\Delta x = (\Delta V, \Delta\theta, \Delta h)^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния летательного аппарата, $u = (\Delta\alpha, \Delta T_e)^{\mathrm{T}}$ – управление.

Критерий оптимальности задан в виде

$$J = \frac{1}{2} \lim_{t_1 \to +\infty} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \int_{R^n} [x^{\mathrm{T}} Q_c x + u^{\mathrm{T}} D_c u] P(t, dx) dt \to \min_u, \quad (3.93)$$

$$Q_c = diag(1, 80, 0.8, 0, 0, 0, 0), \quad D_c = diag(900, 0.3).$$

Применяя описанный в данной статье численный метод, было получено оптимальное управление $u = -L\Delta x$ в задаче (3.92)-(3.93), где

$$L = \begin{pmatrix} 6.4195 & 2.7379 & 254.4317 \\ 1.3036 & -0.9418 & 0.9457 \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

3.8.2 Моделирование ветра

Ветровые возмущения V_x^w, V_y^w задаются формирующими фильтрами типа Драйдена [21]. Наша модификация состоит в том, что сама модель фильтра содержит случайную неопределенность

$$\begin{aligned} dV_x^w =& \nu_1 dt, \\ d\nu_1 =& -(a_1\nu_1 + b_1 V_x^w)dt - a_1^w \nu_1 dw_{11} - b_1^w V_x^w dw_{12} + c_1^w dw_{13}, \\ dV_y^w =& \nu_2 dt, \\ d\nu_2 =& -(a_2\nu_2 + b_2 V_y^w)dt - a_2^w \nu_2 dw_{21} - b_2^w V_y^w dw_{22} + c_2^w dw_{23}, \end{aligned} \quad (3.95)$$

где $w_{ij}, i = \overline{1,2}, j = \overline{1,3}$ – независимые стандартные винеровские процессы; $a_i, b_i, i = \overline{1,2}$ – параметры модели ветра; $a_i^w, b_i^w, c_i^w, i = \overline{1,2}$ – коэффициенты при винеровских процессах. Классический фильтр Драйдена представляет собой линейную стохастическую систему. Второе и третье слагаемые правых частей выражений (3.95) отражают неопределенность самой модели формирующего фильтра.

При численных расчетах параметры формирующих фильтров ветра (3.95) были выбраны следующими: $a_1 = a_2 = 1.5$, $b_1 = b_2 = 0.5$, $a_1^w = a_2^w = 0.3$, $b_1^w = b_2^w = 0.5$, $c_1^w = c_2^w = 2.5$. Заметим, что выбранные характеристики ветрового воздействия не претендуют на статистическую достоверность и имеют лишь демонстративный характер.

Пример реализации ветрового воздействия представлен на рис. 3.5.

3.8.3 Результаты моделирования

Итак, движение БПЛА с учетом ветрового воздействия описывается системой уравнений (3.92)-(3.95), где $x = (\Delta V, \Delta\theta, \Delta h, V_x^w, \nu_1, V_y^w, \nu_2)^{\mathrm{T}}$ –вектор состояния. Полученная система является квазилинейной так как коэффициенты диффузии линейно зависят от части компонент вектора состояния. Доступна измерению и может быть использована при управлении лишь часть компонент вектора состояния, а именно компоненты $\Delta V, \Delta\theta, \Delta h$. Оптимальный регулятор ищется в виде $u = -L\Delta x$, где матрица L имеет размер 2×3. Постоянное слагаемое ν в равенстве (3.36) для рассматриваемой задачи равно нулю в силу следствия из теоремы 3.5.

Для сравнения была рассмотрена детерминированная задача, получающаяся из (3.92) без учета ветрового воздействия. В соответствии с теорией АКОР А.М. Летова было получено оптимальное управление $u = -L\Delta x$ для детерминированной системы, где матрица L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} -0.0020 & 0.7220 & 0.0294 \\ 0.9115 & -0.9498 & 0.2456 \end{pmatrix}. \tag{3.96}$$

Пример переходного процесса для этой системы (с регулятором (3.96)) при начальных условиях $\Delta V(0) = 1$, $\Delta\theta(0) = 3$, $\Delta h(0) = 1$ приведен на рис. 3.4.

Нетрудно видеть, что коэффициенты полученных регуляторов (3.94), (3.96) существенно отличаются.

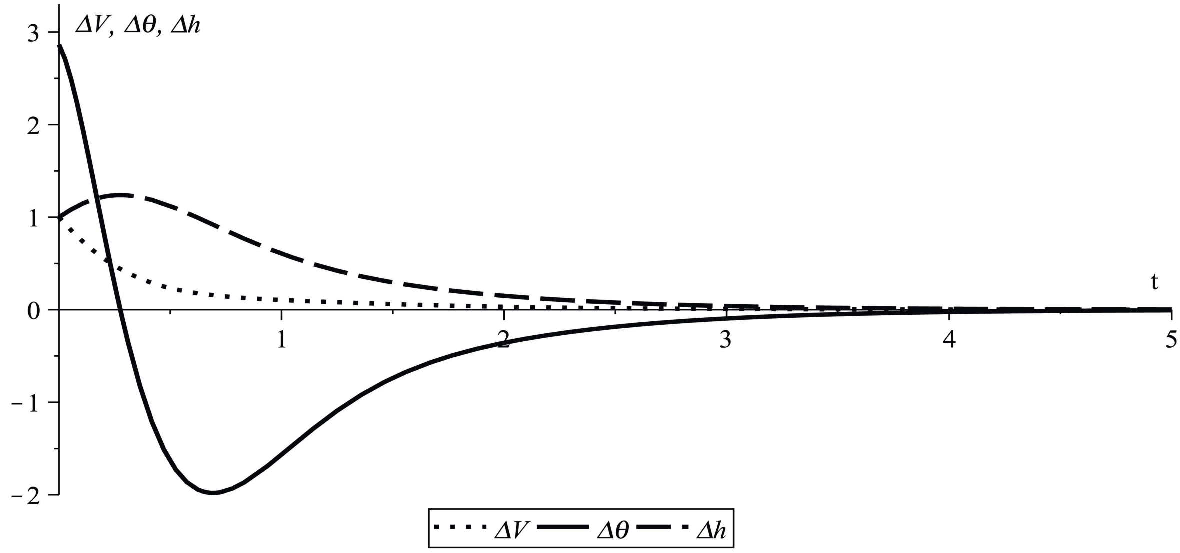

Рис. 3.4: Приращения скорости ΔV (м/с), угла наклона траектории $\Delta\theta$ (град), высоты Δh (м) в детерминированной системе.

Далее было проведено сравнение регуляторов (3.94) и (3.96) в стохастической системе (3.92)-(3.95). Значение критерия (3.93), подсчитанное по формуле (3.24), для летовского регулятора (3.96) составило 5.04, а для оптимального регулятора стохастической системы – 2.23.

На рис. 3.6-3.10 приводятся реализации процессов управления системы (3.92)-(3.95) с регуляторами (3.94) и (3.96), соответствующими ветровому воздействию показанному на рис. 3.5.

Нетрудно видеть, что отклонение скорости движения ΔV БПЛА в случае использования оптимального регулятора (3.94) меньше, но незначительно, в то время как отклонение угла наклона траектории $\Delta\theta$ и высоты Δh существенно меньше.

3.9 Выводы по главе 2

Во второй главе сформулирована задача оптимизации облика квазилинейной стохастической системы, матрицы которой зависят от векторного параметра, и частный случай – задача оптимизации управляемой по выходу системы. Получены достаточные условия стабильности и устойчивости квазилинейной стохастической системы, предложен метод подсчета стабильного значения критерия.

Получены необходимые условия оптимальности квазилинейной стохастической

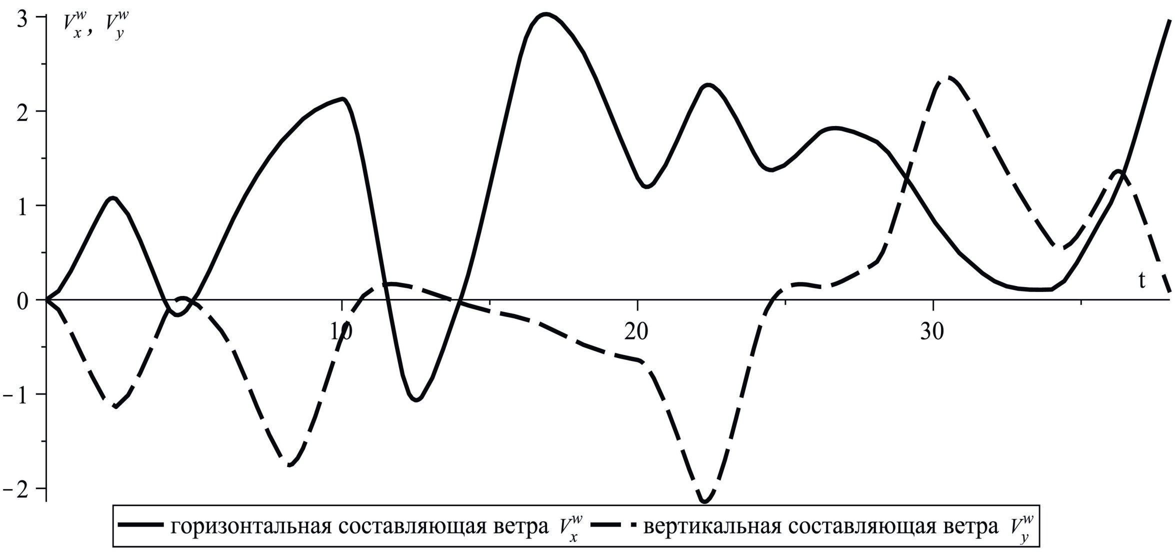

Рис. 3.5: Реализация ветрового воздействия, (м/с).

Рис. 3.6: Приращение тяги ΔT_e (Н).

системы. Показано, что критерий есть функция конечного числа переменных и получены аналитические выражения для величины критерия и его градиента.

Полученные результаты были конкретизированы для управляемой по выходу системы, включая частные случаи – симметрической управляемой по выходу системы и системы с пропорционально-интегрально-дифференциальным регулятором.

Для управляемой системы при полной информации о векторе состояния были получены необходимые и достаточные условия оптимальности линейного регулятора

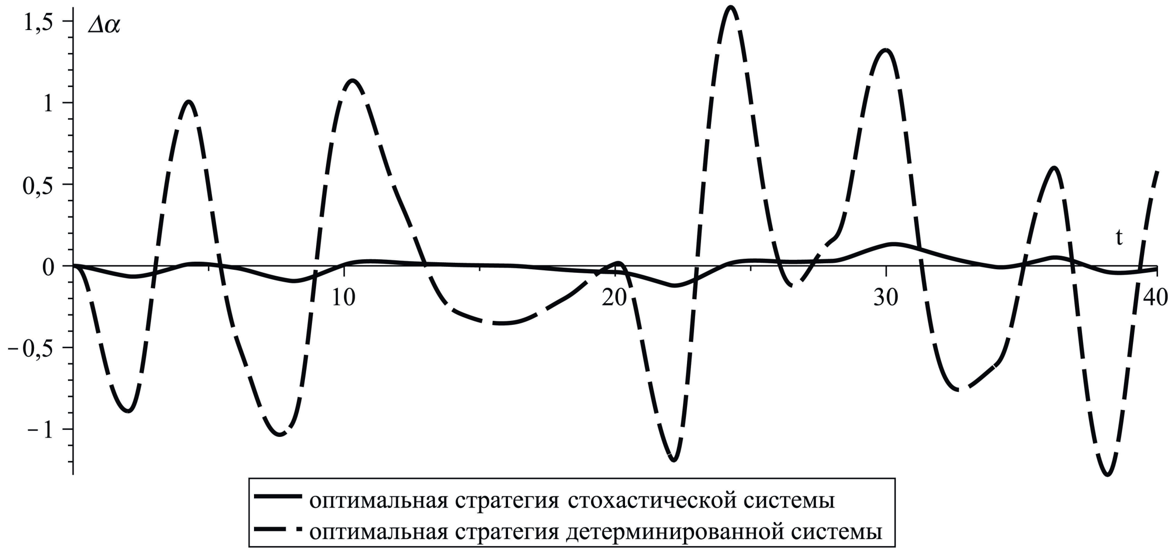

Рис. 3.7: Приращение угла атаки $\Delta\alpha$ (град).

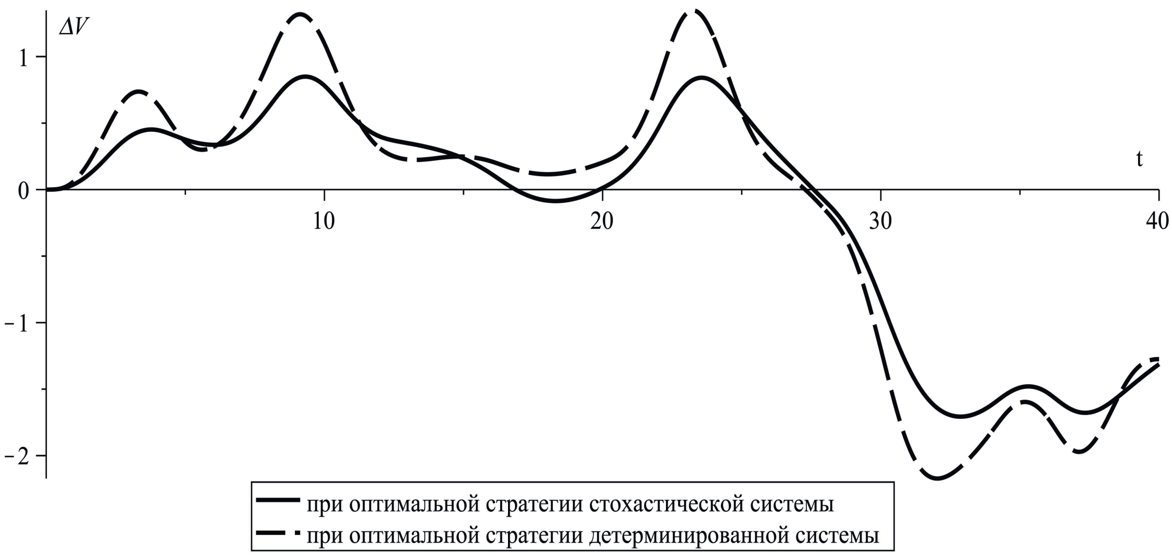

Рис. 3.8: Приращение скорости ΔV (м/с).

в классе нелинейных весьма общего вида, более общие, чем известные ранее.

На основе полученных необходимых условий разработан градиентный численный метод синтеза оптимальной системы, который был опробован на ряде модельных примеров. Рассмотрена прикладная задача стабилизации движения беспилотного летательного аппарата, относящаяся к авиационно-космическому комплексу.

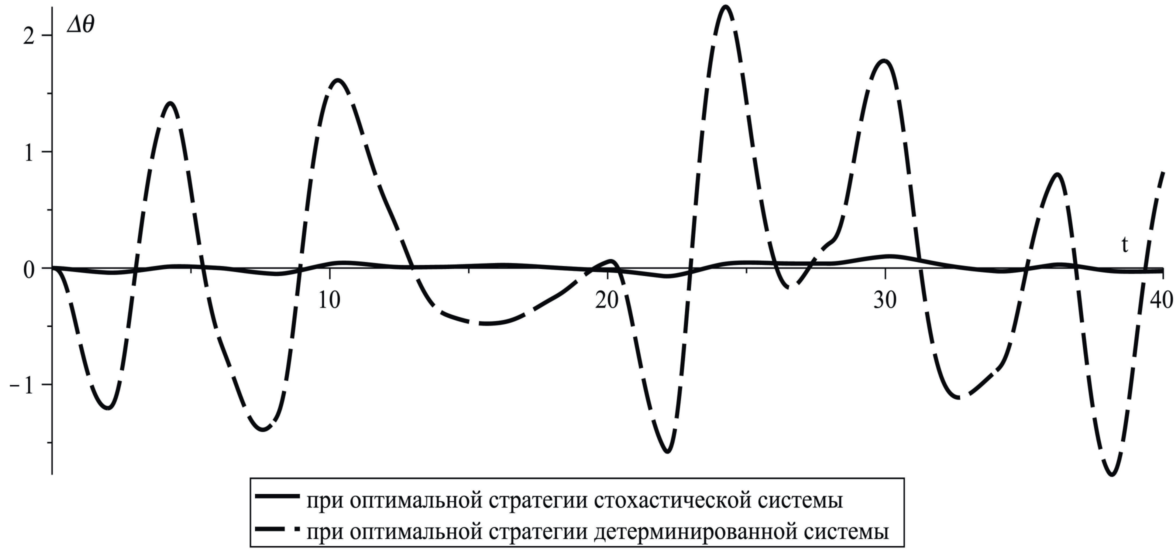

Рис. 3.9: Приращение угла наклона траектории $\Delta\theta$ (град).

Рис. 3.10: Приращение высоты Δh (м).

Глава 4

Условия второго порядка в задаче оптимизации квазилинейной стохастической системы

Во второй главе были получены необходимые условия первого порядка оптимальности квазилинейных стохастических систем. В этой главе получены условия второго порядка в задаче оптимизации облика квазилинейной стохастической системы, позволяющие проверить доставляет ли найденное управление (параметры системы) локальный минимум критерия.

Рассматривается объект управления, описываемый системой (3.1), оптимизация ведется по критерию качества, заданному в виде (3.2).

Для удобства приведу еще раз соотношения, полученный во второй главе, которые будут использоваться здесь. Во второй главе была исследована устойчивость системы (3.1) и подсчитано стабильное значение критерия при фиксированном $\lambda = \bar{\lambda}$, апределяемое выражением

$$\bar{\gamma} = B0^{\mathrm{T}}\xi + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}} M B_k + \frac{1}{2}D, \tag{4.1}$$

где матрица M и ξ находятся из уравнений

$$A_0^{\mathrm{T}}M + MA_0 + \sum_{k=1}^{n_w} A_k^{\mathrm{T}} M A_k + Q = 0, \tag{4.2}$$

$$\xi^{\mathrm{T}}A_0 + \sum_{k=1}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}} M A_k + B_0^{\mathrm{T}}M + S = 0. \tag{4.3}$$

Уравнения для предельных значений среднего m^∞ и второго центрального момента Γ^∞ имеют вид

$$A_0 m^\infty + B_0 = 0, \tag{4.4}$$

$$A_0\Gamma^\infty + \Gamma^\infty A_0^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{n_w} A_k \Gamma^\infty A_k^{\mathrm{T}} + \sum_{k=1}^{n_w} (A_k m^\infty + B_k)(A_k m^\infty + B_k)^{\mathrm{T}} = 0, \tag{4.5}$$

и имеют единственные решения.

Во второй главе было показано, что критерий есть дважды дифференцируемая функция конечного числа переменных, и выписан функционал Лагранжа

$$F(\lambda) = \bar\gamma + \frac{1}{2} tr[\Psi\Gamma^\infty] + \Theta m^\infty, \tag{4.6}$$

где Θ, Ψ определяются равенствами

$$\Theta = A_0^{\mathrm{T}} M + M A_0 + \sum_{k=1}^{n_w} A_k^{\mathrm{T}} M A_k + Q = 0, \tag{4.7}$$

$$\Psi = \xi^{\mathrm{T}} A_0 + \sum_{k=1}^{n_w} B_k^{\mathrm{T}} M A_k + B_0^{\mathrm{T}} M + S = 0. \tag{4.8}$$

С учетом (4.7), (4.8) аналитическая формула для компонент градиента $\partial F(\lambda)/\partial\lambda$ в точке $\lambda = \bar\lambda$ имеет вид

$$\left.\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda=\bar\lambda} = \frac{\partial\bar\gamma}{\partial\lambda_i} + \frac{1}{2} tr[\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i}\Gamma^\infty] + \frac{\partial\Theta}{\partial\lambda_i} m^\infty. \tag{4.9}$$

В выражение (4.9) не входят производные m^∞, Γ^∞ в силу выполнения равенств (4.7), (4.8). Слагаемые в правой части (4.9) вычисляются с учетом выражений (4.1), (4.7), (4.8) при $\lambda = \bar\lambda$.

4.1 Условия второго порядка

Матрицы M, ξ, входящие в равенство (4.1), играют роль множителей Лагранжа, а функция $F(\lambda)$ – функция Лагранжа, совпадающая с критерием (3.2) при любых M, ξ в силу выполнения ограничений (4.7), (4.8). При фиксированных значениях M, ξ выражение для компонент второй производной в поставленной задаче имеет вид

$$\left.\frac{\partial^2 F(\lambda)}{\partial\lambda_i\lambda_j}\right|_{\lambda=\bar\lambda} = \frac{\partial^2\bar\gamma}{\partial\lambda_i\lambda_j} + \frac{1}{2} tr[\frac{\partial^2\Psi}{\partial\lambda_i\lambda_j}\Gamma^\infty + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_i}\frac{\partial\Gamma^\infty}{\partial\lambda_j} + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_j}\frac{\partial\Gamma^\infty}{\partial\lambda_i}] + \\ + \frac{\partial^2\Theta}{\partial\lambda_i\lambda_j} m^\infty + \frac{\partial\Theta}{\partial\lambda_i}\frac{\partial m^\infty}{\partial\lambda_j} + \frac{\partial\Theta}{\partial\lambda_j}\frac{\partial m^\infty}{\partial\lambda_i}. \tag{4.10}$$

Частные производные $\partial m^{\infty}/\partial\lambda_k$, $\partial\Gamma^{\infty}/\partial\lambda_k$ находятся дифференцированием по λ_k из уравнений (4.4), (4.5) соответственно. Уравнение для $\partial m^{\infty}/\partial\lambda_k$ имеет вид

$$\frac{\partial m^{\infty}}{\partial\lambda_k} = -A_0^{-1}[\frac{\partial A_0}{\partial\lambda_k}m^{\infty} + \frac{\partial B_0}{\partial\lambda_k}], \quad det(A_0) \neq 0.$$

А уравнение для $\partial\Gamma^{\infty}/\partial\lambda_k$ имеет вид уравнения (4.5), если вместо Γ^{∞} подставить $\partial\Gamma^{\infty}/\partial\lambda_k$, которое также имеет решение. Первые и вторые производные для γ, Ψ, Θ находятся из уравнений (4.1), (4.7), (4.8).

Зная выражение для компонент матрицы вторых производных критерия и используя критерий Сильвестра, легко выписать необходимые и достаточные условия второго порядка.

4.2 Моделирование

Проверка достаточных условия продемонстрирована на модельных примерах в случае полной информации о векторе состояния системы и случае информационных ограничений.

4.2.1 Модельный пример. Полная информация о векторе состояния

Рассмотрим модельный пример из пункта 3.7.2.

Объект управления описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} dx_1 =& x_2 dt + x_2 dw_1, \\ dx_2 =& x_3 dt, \\ dx_3 =& (-3x_3 + u)dt + (x_1 + x_3 + c_1)dw_1 + x_1 dw_2, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния; u – управление; $w = (w_1, w_2)^{\mathrm{T}}$ – стандартный винеровский процесс.

Функционал качества управления определяется выражением

$$J(P^*(\cdot), u) = \frac{1}{2}\lim_{t_1\to+\infty}\frac{1}{t_1}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{R^3}(x_1^2 + u^2)P(t,x)dxdt. \tag{4.12}$$

В пункте 3.7.2 был получен оптимальный регулятор $u = -Lx$, где

$$L = \begin{pmatrix} 2.16 & 5.03 & 1.56 \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Используя формулу для для компонент второй производной (4.10), была подсчитана матрица вторых произодных. Найдены собственные числа полученной матрицы: $0.057, 0.186, 0.373$. Следовательно найденная стратегия управления (4.13) доставляет локальный минимум функционала качества (4.12).

На рис. 4.1 представлен график величины критерия при варьировании компонент матрицы L стратегии управления (4.13).

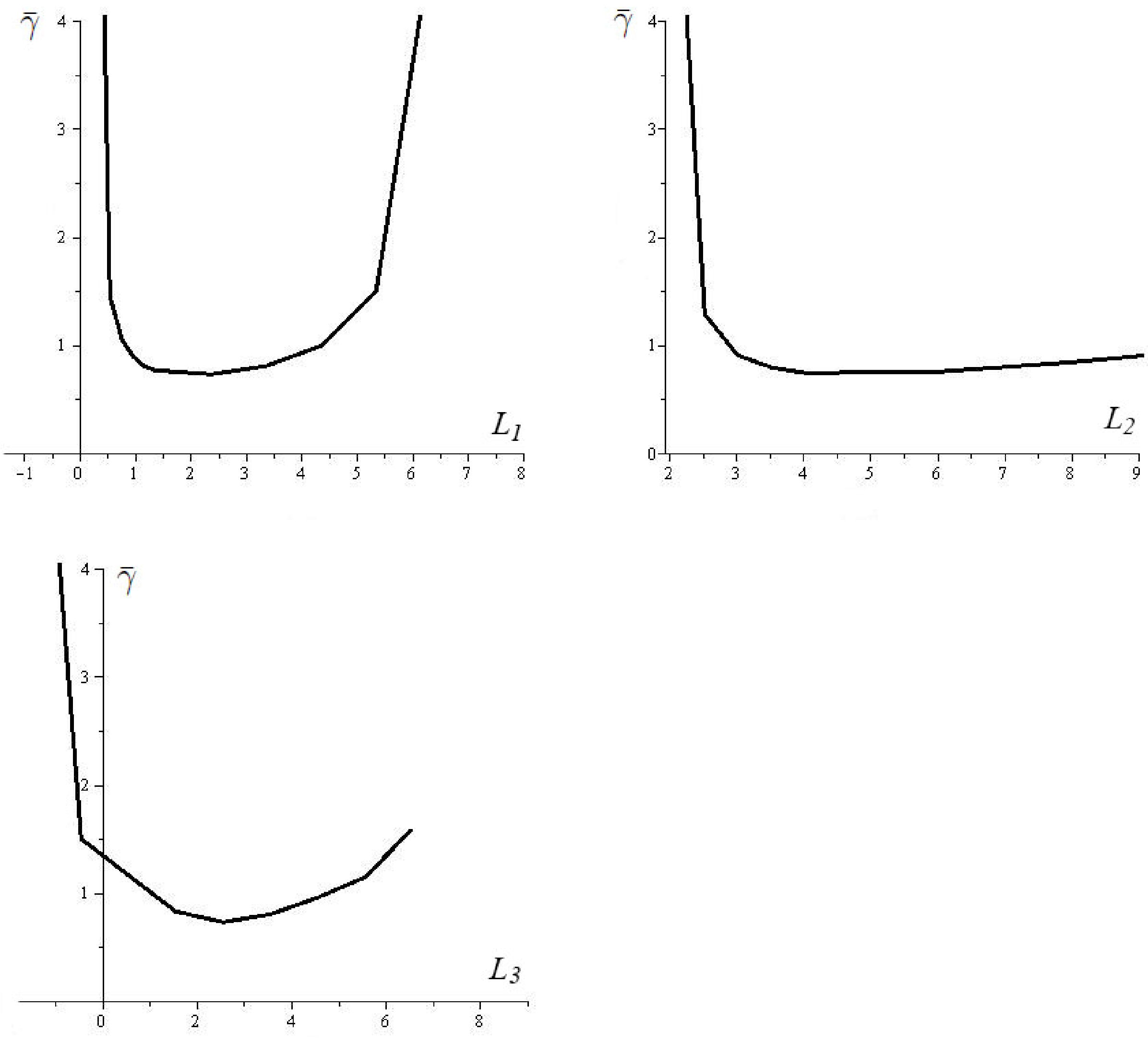

Рис. 4.1: Величина значения критерия при варьировании компонент матрицы L стратегии управления.

4.2.2 Модельный пример. Неполная информация о векторе состояния

Расмотрим тот же пример, где объект управления описывается системой уравнений (4.11), критерий качества – (4.12).

Пусть теперь комонента x_3 вектора состояния не доступна измерению и, соответственно, не может быть использована при управлении. Оптимальный регулятор будем искать в виде

$$u = -L_1 x_1 - L_2 x_2. \tag{4.14}$$

Роль векторного параметра λ здесь играют компоненты матрицы $L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \end{pmatrix}$.

С помощью разработанного численного метода, описанного во второй главе, был найден оптимальный регулятор (4.14), где

$$L = \begin{pmatrix} 1.578 & 4.444 \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Значение критерия (4.12), подсчитанное по формуле (3.24), составило 1.04. (Для сравнения приведу значения критерия в поставленной задаче (4.11), (4.12), полученные в пункте 3.7.2: при полной обратной связи – 0.73, при летовском регуляторе – 1.26).

На рис. 4.2 представлен график величины критерия при варьировании компонент матрицы L стратегии управления (4.15).

Для проверки условий второго порядка найдем матрицу вторых производных, используя формулу (4.10). Собственные числа полученной матрицы положительны и равны 0.21, 1.13, следовательно найденная стратегия управления (4.15) доставляет локальный минимум функционала качества (4.12). На рис. 4.3 представлен график зависимости величины критерия от выбираемых коэффициентов стратегии управления.

4.3 Выводы по главе 3

Рассмотрена задача оптимизации облика квазилинейной стохастической системы. Во второй главе было показано, что критерий в поставленной задаче есть дважды дифференцируемая функция конечного числа переменных. Используя аналитическое выражение для величины критерия получены необходимые и достаточные усло-

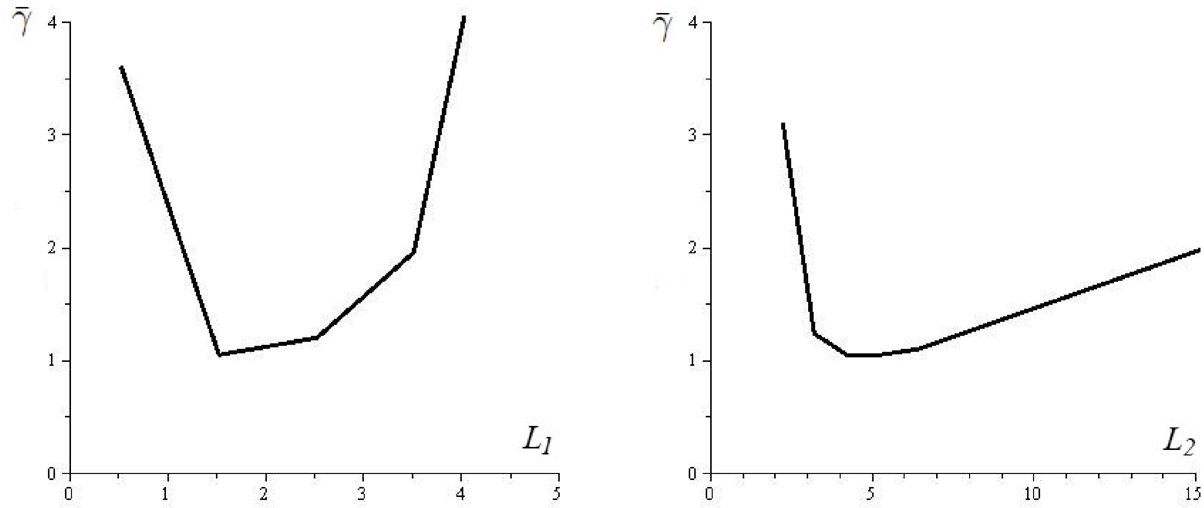

Рис. 4.2: Величина значения критерия при варьировании компонент матрицы L стратегии управления.

вия второго порядка в задаче оптимизации квазилинейной стохастической системы. Эти условия используют полученное выражение для компонент матрицы вторых производных по оптимизируемым параметрам. Применяя далее, например, критерий Сильвестра, легко установить доставляет ли найденная стратегия управления локальный минимум функционала качества.

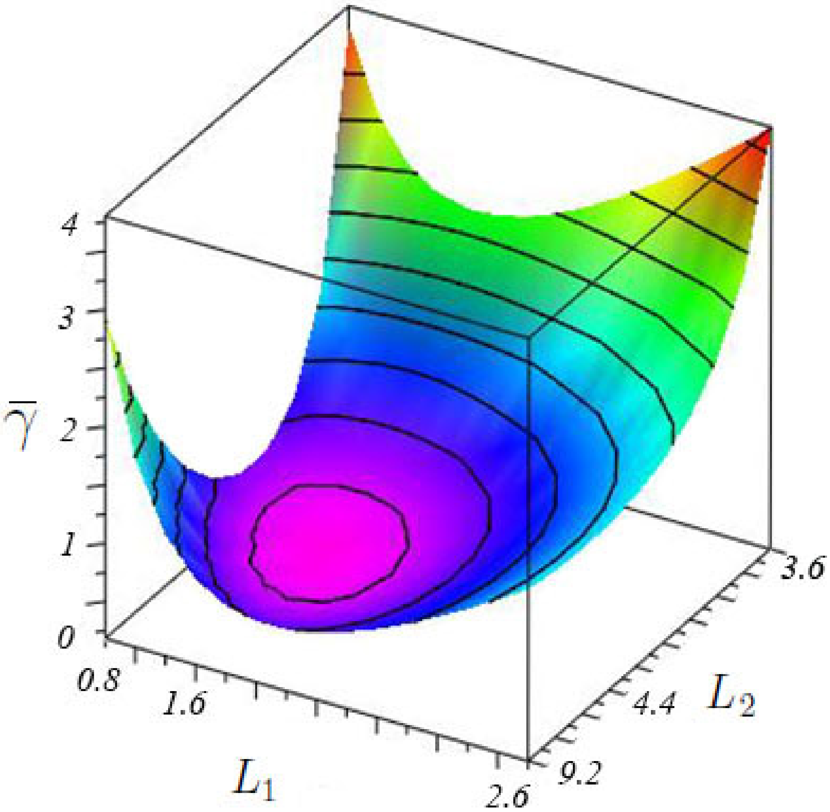

Рис. 4.3: Зависимость величины критерия от коэффициентов стратегии управления.

Заключение

В диссертационной работе предложены к рассмотрению линейные и квазилинейные стохастические системы, функционирующие на неограниченном интервале времени, при неполной информации о состоянии с усредненным по времени квадратичным критерием качества.

В первой главе приводятся используемые в последующих главах результаты работ Хрусталева М.М. [44–46], адаптированные для рассматриваемых в диссертации задач.

Во второй главе рассмотрены линейные стохастические системы. Получены необходимые условия оптимальности линейного регулятора неполной обратной связи в поставленной задаче. Предлагаются итерационный и градиентный численные методы синтеза оптимального регулятора.

В третьей главе рассмострена задача стабилизации и оптимизации квазилинейной стохастической системы, матрицы которой зависят от векторного параметра – задача оптимизации облика системы. Получены достаточные условия стабильности и необходимые условия оптимальности квазилинейной системы. Исследованы частные случаи: управляемая по выходу система, симметрическая управляемая по выходу система, а также система с пропорционально-интегрально-дифференциальным регулятором. Для указанных случаев произведена конкретизация полученных условий оптимальности. Кроме того для управляемой системы при полной информации о векторе состояния были получены достаточные условия оптимальности линейного регулятора в классе нелинейных стратегий весьма общего вида. На основе полученных необходимых условий разработан градиентный численный метод синтеза оптимальной системы. Рассмотрена прикладная задача оптимизации – задача стабилизации движения беспилотного летательного аппарата под действием ветровых возмущений, относящаяся к авиационно-космическому комплексу.

В четвертой главе получены необходимые и достаточные условия второго порядка в задаче оптимизации параметров квазилинейных стохастических систем. Проверка этих условий продемонстрирована на модельном примере в случае полной информации о состоянии системы и случае информационных ограничений.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Получены и доказаны необходимые условия оптимальности линейного регулятора в задаче оптимизации линейной стохастической системы, функционирующей на неограниченном интервале времени, при неполной информации о состоянии. [52, 54, 58].

2. Введено новое понятие вполне возмущаемости стохастической системы, получен критерий вполне возмущаемости для линейных систем и установлена связь отсутствия этого свойства с неединственностью оптимального процесса. [54, 60]

3. Получены и доказаны необходимые условия оптимальности квазилинейной стохастической системы, функционирующей на неограниченном интервале времени, матрицы которой зависят от подлежащего выбору векторного параметра, – задаче оптимизации облика системы [43, 55];

4. Выполнена конкретизация полученных в п.3 необходимых условий для управляемой по выходу стохастической системы, системы обладающей свойством симметрии и системы с ПИД-регулятором [43, 56, 68].

5. В задаче синтеза оптимальной стратегии управления квазилинейной стохастической системой в случае полной информации о состоянии предложен специальный критерий оптимальности, допускающий неэргодичность допустимых процессов управления, и получены необходимые условия оптимальности стратегии, обеспечивающей эргодичность оптимального процесса. [43, 61].

6. Получены условия второго порядка в задаче оптимизации облика квазилинейных стохастических систем [39].

7. Разработаны вычислительные алгоритмы синтеза оптимальной стратегии управления в задачах оптимизации линейной стохастической системы, облика системы и квазилинейной управляемой по выходу стохастической системы [43, 54, 57, 59].

8. Решены прикладные задачи оптимальной стабилизации ориентации спутника с гибким стержнем, движения беспилотного летательного аппарата в неспокойной

атмосфере [40–43, 53].

Исследования, проведённые в диссертационной работе, для квазилинейных систем могут быть продолжены в следующих направлениях:

Во-первых, предполагается детально изучить задачи оптимизации в случае неточных измерений доступных наблюдению компонент вектора состояния, использования фильтра заданной размерности с совместной оптимизации регулятора и фильтра (теорема разделения для квазилинейных систем не справедлива);

Во-вторых, предполагается обобщить полученные результаты для случая информационных ограничений, когда каждая компонента вектора управления может зависеть от своего назначаемого априори вектора состояния, что актуально при разработки струйных управляющих устройств.

Литература

[1] *Абгарян К.А., Хрусталев М.М., Жирнова Э.В.* Управляемость и наблюдаемость линейных систем. — М.:МАИ, 1977.

[2] *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976.

[3] *Андрейченко Д.К., Андрейченко К.П.* К теории стабилизации спутников с упругими стержнями // Изв. РАН ТиСУ, 2004. N 6. — С. 150–163.

[4] *Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.:Мир, 1974. — 207 с.

[5] *Бортаковский А.С, Пантелеев А.В.* Линейная алгебра в примерах и задачах. — М.: Высш.шк., 2005.

[6] *Волкова В.Н., Денисов А.А.* Основы теории систем и системного анализа. — СПб.:Изд-во СПбГТУ, 2001.. — 511 с.

[7] *Воронов А.А.* Теория автоматического управления. В 2-х ч. Ч.II Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления. — М.:Высшая школа, 1986. — 504 с.

[8] *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. — М.:Физматлит, 1997. — 287 с.

[9] *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: УРСС, 2004.

[10] *Касимов А.М., Балабанов А.В., Попов А.И., Артамонов А.Е.* Автоматизация производства струйных устройств управления // Труды XII Всероссийского

совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014). — М.:ИПУ РАН, 2014. — С. 9284–9290.

[11] *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.

[12] *Лебедев А.А., Красильщиков М.Н., Малышев В.В.* Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1974.

[13] *Летов А.М.* Математическая теория процессов управления. — М.Наука, 1981. — 256 с.

[14] *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Новые методы высокоточного управления летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1987.

[15] *Москаленко А.И.* Методы нелинейных отображений в нелинейном управлении. — Новосибирск: Наука, 1983.

[16] *Овсянников Д.А.* Математические методы управления пучками. — Л.:ЛГУ, 1980. — 228 с.

[17] *Пантелеев А.В.* Синтез оптимального управления стохастическими системами с неполной непрерывной информацией // Математические задачи управления движущимися объектами: Тем. сб. науч. тр. — М.:МАИ, 1987. — С. 16–22.

[18] *Пантелеев А.В., Бортаковский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. — М.:Высш.шк., 2003. — 583 с.

[19] *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной инормации. — М.:МАИ, 2012. — 160 с.

[20] *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. — М.:Сов.Радио, 1976. — 156 с.

[21] *Парышева Г.В., Ярошевский В.А.* Проблема формирования расчетных ветровых возмущений для задач динамики полета // Ученые записки ЦАГИ. 2001. Том XXXII. № 1-2. — С. 102–118.

[22] *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. — М.:Наука, 1986.

[23] *Плотников М.Ю., Хрусталев М.М.* Условия глобальной оптимальности стратегий управления диффузионными процессами с возможностью обрыва траекторий при неполной информации о состоянии // Изв. РАН. ТиСУ. — 2005. N 1.

[24] *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.:Наука, 2002. — 303 с.

[25] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.:Физматгиз, 1961. — 392 с.

[26] *Пугачев В.С., Синицин И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. — М.:Наука, 1985. — 559 с.

[27] *Румянцев А.Е.* Достаточные условия существования решения в линейных дифференциальных играх при неполной информации // Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов. Вып. 1. МГУ. М.:Изд-во Фак. вычисл. матем. и кибернет. МГУ, 2005. – С. 268–288

[28] *Румянцев Д.С.* Компьютерная программа расчёта оптимального управления квазилинейными системами диффузионного типа при информационных ограничениях // Промышленные АСУ и контроллеры. — 2007. N 9. — С. 28–32.

[29] *Румянцев Д.С., Хрусталев М.М.* Оптимальное управление квазилинейными системами диффузионного типа при неполной информации о состоянии // Изв. РАН. ТиСУ. — 2006. N 5. — С. 43–51.

[30] *Румянцев Д.С., Хрусталёв М.М.* Численные методы синтеза оптимального управления для стохастических динамических систем диффузионного типа // Изв. РАН. ТиСУ. — 2007. N 3. С. 27–38.

[31] *Рыбаков К.А.* Спектральный метод анализа и синтеза систем со случайной структурой. - Диссертация на соискание уч. ст. к.ф.-м.н. — М.:МАИ, 2005.

[32] *Савастюк С.В.* Оптимизация параметрически связанных стохастических систем со структурой децентрализованного управления // Оптимизация структур и параметров систем автоматического управления ЛА: Тем. сб. научн. тр. — М.:МАИ, 1991. - с. 24 - 33.

[33] *Семенов В.В.* Синтез алгоритмов управления нелинейными системами при случайных воздействиях с ограниченным составом точных измерений // Аналитические методы синтеза регуляторов: Тем. сб. науч. тр. — Саратов: СПИ, 1978. Вып. 3. — С. 3–20.

[34] *Семенов В.В., Пантелеев А.В.* Достаточные условия оптимальности управления ансамблем траекторий нелинейных динамических систем // Дифференциальные уравнения, 1985. — Т. 21, N 4. — С. 628–636.

[35] *Семенов В.В., Рыбин В.В.* Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом. — М.:МАИ, 1984. — 84 с.

[36] *Сиротин А.И.* Об условиях разрешимости класса задач управления дискретными системами с аддитивными случайными возмущениями // Изв. РАН. ТиСУ. — 2003.- N 3. — С. 17–29.

[37] *Солодовников В.В., Семенов В.В.* Спектральный метод расчета нестационарных систем управления ЛА. — М.:Машиностроение, 1975. — 272 с.

[38] *Трушкова Е.А.* Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // Автоматика и телемеханика. — 2011. N 6. — С. 151–159.

[39] *Халина А.С.* Условия второго порядка в задаче оптимизации параметров квазилинейных стохастических систем // Тезисы докладов международной конференции по математической теории управления и механике (Суздаль, 2015). — Суздаль:МИАН, 2015. — С. 136–138.

[40] *Халина А.С.* Оптимальная стабилизация движения беспилотного летательного аппарата в неспокойной атмосфере // Тезисы докладов 14-й Международной конференции «Авиация и космонавтика-2015». — М.:МАИ, 2015. — С. 464–465.

[41] *Халина А.С.* Управление движением беспилотного летательного аппарата с учетом атмосферных возмущений // Сборник тезисов докладов 42-ой Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения-2016». — М.:МАИ, 2016. Т. 1. — С. 648–649.

[42] *Халина А.С.* Оптимальное управление малым беспилотным летательным аппаратом в неспокойной атмосфере // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ N 20166114945 от 12 мая 2016 г.

[43] *Халина А.С., Хрусталев М.М.* Оптимизация облика и стабилизация управляемых квазилинейных стохастических систем, функционирующих на неограниченном интервале времени // Изв. РАН. ТиСУ. — 2017. № 1. (принята к публикации).

[44] *Хрусталев М.М.* Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информации о состоянии I. Достаточные условия равновесия // Изв. РАН. ТиСУ. — 1995. N 6. — С. 194–208.

[45] *Хрусталев М.М.* Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информации о состоянии II. Метод Лагранжа // Изв. РАН. ТиСУ. — 1996. N 1. — С. 72–79.

[46] *Хрусталев М.М.* Синтез оптимальных и устойчивых управляемых стохастических систем при неполной информации о состоянии на неограниченном интервале времени // Автоматика и телемеханика. — 2011. N 11. — С. 174–190.

[47] *Хрусталёв М.М., Румянцев Д.С.* Оптимизация квазилинейных динамических стохастических систем со сложной структурой // Автоматика и телемеханика. — 2011. N 10. — С. 154–169.

[48] *Хрусталев М.М., Савастюк С.В.* Условия оптимальности стохастических систем диффузионного типа в задачах сограничениями на процесс управления-наблюдения // Доклады Академии наук СССР. — 1990. - Т. 311, N 2. — С. 291–295.

[49] *Хрусталев М.М., Савастюк С.В.* Оптимизация стохастических систем диффузионного типа с ограничениями на процесс управления - наблюдения. I // Автоматика и телемеханика. — 1991. N 7. — С. 89–97.

[50] *Хрусталев М.М., Савастюк С.В.* Оптимизация стохастических систем диффузионного типа с ограничениями на процесс управления - наблюдения. II // Автоматика и телемеханика. — 1991. N 8. — С. 94–101.

[51] *Хрусталев М.М., Савастюк С.В.* Достаточные условия оптимальности стохастических систем в задачах с ограничениями на процесс управления - наблюдения // Статистические методы в теории управления ЛА: Тем. сб. науч. тр. — М.:МАИ., 1990. — С. 4–10.

[52] *Хрусталев М.М., Матросова Н.И., Халина А.С.* Матричный метод сопряженных направлений решения уравнения Ляпунова и Сильвестра. Проблемы устойчивости и управления. Сборник научных статей, посвященный 80-летию академика Владимира Мефодьевича Матросова. — М.:Физматлит, 2013. — С. 380–394.

[53] *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Простой алгоритм стабилизации ориентации спутника с гибким стержнем // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2012. N55.

[54] *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Синтез оптимальных регуляторов линейных стохастических систем при неполной информации о состоянии. Необходимые условия и численные методы // Автоматика и телемеханика. — 2014. N 11. — С. 70-–87.

[55] *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Условия стабилизируемости и оптимальности квазилинейных стохастических систем при неполной обратной связи на неограниченном интервале времени // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014). — М.:ИПУ РАН, 2014. — С. 1126–1134.

[56] *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) регулятор в задаче стабилизации квазилинейной

стохастической системы // XII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». — М.:ИПУ РАН, 2016. — С. 405–407.

Khrustalev M.M., Khalina A.S. Proportional-integral-derivative (PID) controller in stabilization problem for quasi-linear stochastic system / Proceedings of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). — M.: IEEE, 2016. http://ieeexplore.ieee.org/document/7541192/

[57] *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Численный метод определения экстремальной стабилизирующей стратегии для линейной стохастической системы с квадратичным критерием и его применение к задачам стабилизации ИСЗ // 11-я Международная конференция «Авиация и космонавтика-2012». — М.: МАИ, 2012. — С. 397–398.

[58] *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Необходимые условия оптимальности линейного регулятора стохастических систем при неполной информации о состоянии // Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС-2013). — М.:Изд-во МАИ, 2013. — С. 785–787.

[59] *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Градиентный метод синтеза оптимальных регуляторов стохастических систем при неполной информации о состоянии // Тезисы докладов Московской молодежной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике-2013». — М.: МАИ, 2013. — С. 305.

[60] *Хрусталев М.М., Халина А.С.* О единственности оптимального линейного регулятора в задаче синтеза для линейных стохастических систем при неполной информации о состоянии // Тезисы 12-й Международной конференции «Авиация и космонавтика-2013». — М.:МАИ, 2013. — 1 стр.

[61] *Хрусталев М.М., Халина А.С.* Оптимальное управление квазилинейной стохастической системой на неограниченном интервале времени // Сборник тезисов

докладов XX молодежной научно-практическая конференций «Наукоемкие информационные технологии». — (принята к публикации).

[62] *Hinrichsen D., Pritchard A.J.* Stochastic H_∞ // SIAM J. Control Optim. 1998, Vol. 36. N 5. P. 1504—1538.

[63] *Bor-Sen Chen, Weihai Zhang.* Stochastic H_2/H_∞ Control With State-Dependent Noise // IEEE Transactions on automatic control. 2004. Vol. 49, N 1. P. 45–57.

[64] *Christopeit N.* Optimal stochastic control with special information patterns // SIAM J. Contr. 1980. Vol. 18(5). P. 559–575.

[65] *Davis M.H.A., Varaiya P.* Dynamic programming conditions for partially observable stochastic systems // SIAM J. Contr. 1973. P. 226–221.

[66] *Fleming W.H.* Optimal control of partially observable diffusions // SIAM J. Control. 1968, Vol. 6, N 2. P. 194–214.

[67] *Haussmann U. G.* Optimal stationary control with state and control dependent noise // SIAM J. Control. 1971. Vol. 9, N 2. P. 184–198.

[68] *Khrustalev M.M., Khalina A.S.* Proportional-integral-derivative (PID) controller in stabilization problem for quasi-linear stochastic system / Proceedings of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). — M.: IEEE, 2016. http://ieeexplore.ieee.org/document/7541192/

[69] *Pegachkova E.A.* Aircraft motion control synthesis at horizontal flight with minimal fuel consumption // Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. — M.:МИАН, 2014. С. 227.

[70] *Viner N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. — N.Y.: John Wiley, 1949.

[71] *Wonham W.M.* Optimal stationary control of a linear system with state-depend noise // SIAM J. Control. 1967. Vol. 5, N 3. P. 486–500.

[72] *Yavin Y.* Computation of suboptimal randomized strategies for steering the random motion of a point under partial observation // J. Optim. Th. Appl. 1984. N 44(1). P. 159–79.