

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПРИЛОЖЕНИИ К ЗАДАЧАМ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ БЛЭКА—ШОУЛЗА

Александр Сергеевич КОЖЕВНИКОВ родился в 1987 г. в городе Серпухове Московской области. Студент МАИ. Основные научные интересы — в области анализа стохастических систем управления и финансовой математики. Автор двух научных работ. E-mail: AlexKozhevnikov@yandex.ru

Alexander S. KOZHEVNIKOV, was born in 1987, in the Moscow Region. He is a Student at the MAI. His research interests are in analysis of stochastic control systems, financial mathematics. He has published 2 technical papers. E-mail: AlexKozhevnikov@yandex.ru

Константин Александрович РЫБАКОВ родился в 1979 г. в городе Москве. Доцент МАИ. Кандидат физико-математических наук. Основные научные интересы — в области методов анализа и синтеза стохастических систем управления, в том числе систем со случайной структурой, логико-динамических и непрерывно-дискретных систем; спектральной формы математического описания систем управления. Автор 36 научных работ. E-mail: rkoffice@mail.ru

Konstantin A. RYBAKOV, Ph.D., was born in 1979, in Moscow. He is an Associate Professor at the MAI. His research interests are in analysis and synthesis of stochastic control systems including systems with random structure, logical-dynamical systems, discrete-continuous systems as well as in spectral form of mathematical description for control systems. He has published 36 technical papers. E-mail: rkoffice@mail.ru

Рассматривается модель Блэка—Шоулза, которая применяется для оценки цен акций и европейских опционов. Ставится задача нахождения закона распределения стоимости акции, ожидаемого значения стоимости акции в срок исполнения опциона и дисперсии, а также премии за опцион в зависимости от выбранных значений срока исполнения опциона и цены исполнения. Для решения задачи анализа (нахождения закона распределения стоимости) разработан алгоритм, основанный на использовании спектральной формы математического описания. Для контроля точности решения задачи спектральным методом применяется метод Монте-Карло. Расчет премии осуществляется с помощью формулы Блэка—Шоулза. Проводится анализ результатов моделирования для различных сценариев поведения цены акции и стоимости опциона при изменении параметров волатильности, процентной ставки и цены исполнения опциона.

We consider the Black-Scholes model, which is used to estimate stock prices and European options. The problem of finding stock price probability density function, expected stock price and its dispersion as well as the option premium is studied in the paper. To solve the analysis problem which consists in finding of probability density function for stock price we develop the algorithm based on spectral form of mathematical description. We also use the Monte-Carlo method to control an accuracy of approximate solution. The Black-Scholes formula is used to calculate the option premium. Simulated results are analyzed for different variants of the stock price and values of the option behaviors.

Ключевые слова: волатильность; модель Блэка—Шоулза; опцион; спектральный метод; спектральная характеристика; стохастическая система; плотность вероятности.

Keywords: volatility, Black-Scholes model, option, spectral method, spectral characteristic, stochastic system, probability density function.

Введение

В наше время, в условиях возрастающей неустойчивости движения цен самых разных финансовых инструментов, таких, как акции, валюты или фьючерсы на фондовых, валютных и срочных рынках, операции с ними являются рисковыми [1]. На цены акций, курсы валют, а тем более значения спреда, т.е. разницы между ценой покупки и продажи финансовых инструментов, влияет такое огромное количество случайных факторов, что было

предложено использовать для описания математических моделей динамики цен стохастические дифференциальные уравнения [2]. Финансовые аналитики вынуждены разрабатывать специальные торговые стратегии с пониженным риском, создавать программное обеспечение для выработки сигналов о покупках и продажах, использовать опционные стратегии с фиксированными убытками для снижения рисков.

Известно, что на мировых рынках уже давно прошло время, когда инвестиционный портфель состоял исключительно из акций тех или иных компаний. Сегодняшний портфель — это совокупность разнообразных финансовых инструментов и активов, которые сильно различаются по своим показателям риска и доходности. Он приносит максимальную доходность при минимальных рисках. В портфель включают различные инструменты, способные в некоторых случаях путем ограничения суперприбыли также ограничить потери портфеля. Одним из таких финансовых инструментов, позволяющих ограничить будущие потери путем отказа от будущей суперприбыли, являются опционы [3, 4].

Опцион — это договор, по которому покупатель получает право (но не обязанность) совершить покупку или продажу определенной ценности (например, акции, облигации, валюты) в установленный период или момент времени по заранее оговоренной цене. Опционы (аналогично фьючерсам и спредам) относятся к производным финансовым инструментам.

В таком договоре обязательно оговариваются:

- актив, т.е. акции, которые могут быть куплены или проданы;
- число приобретаемых или продаваемых акций;
- цена приобретения или продажи акции, именуемая ценой исполнения или страйком;
- дата, после которой право купить или продать утрачивается, именуемая сроком исполнения или экспирацией.

Лицо, которое получило опцион и, таким образом, приняло решение, называется покупателем опциона, который должен платить за это право. Лицо, которое продало (предоставило) опцион и отвечает за решение покупателя, называется продавцом опциона.

Выделяют два основных вида опциона: call-опцион — опцион на покупку, предоставляющий покупателю право купить базовый актив; put-опцион — опцион на продажу, предоставляющий покупателю право продать базовый актив.

Наиболее распространены опционы двух стилей: американский опцион (может быть погашен в любой день до истечения срока исполнения) и европейский опцион (может быть погашен только в срок исполнения).

Основная привлекательность опционов для покупателя объясняется тем, что ему заранее известен максимально возможный размер убытков (это величина премии) [5].

Математическая теория опционов более развита по сравнению с другими финансовыми инструментами, на ее примере удобно рассматривать ос-

новные принципы оперирования с ценными бумагами, в частности принципы расчетов справедливых цен и хеджирующих (защищающих) стратегий. Кроме того, реальный объем опционов на рынках исчисляется миллионами штук, и, следовательно, для них имеется «хорошая статистика», дающая возможность проверки качества вероятностно-статистических моделей эволюции цен опционов [5, 6].

Труд в области оценки стоимости (премии) опционов, впервые опубликованный в 1973 г., принадлежит Блэку и Шоулзу, и известен под названием модели Блэка—Шоулза [7, 8]. Мертон [9] сделал значительный вклад в расширение модели (например, прыжки Мертона). Также над моделью работали Халл и Уайт, чей вклад характеризовался введением в модель стохастической волатильности. Стоит отметить модель Дюпери [10], которая является наиболее полной и прозрачной.

Модель Блэка—Шоулза [5, 7] с успехом используется для следующих целей:

- поиск недооцененных опционов, чтобы их продать, или переоцененных, чтобы их купить;
- хеджирование портфеля для понижения риска;
- оценка рыночных предпосылок будущей волатильности акции;
- вычисление позиций хеджирования для портфеля акций.

Данная модель применяется для оценки цен на акции и простых реальных опционов, имеющих единственный источник неопределенности (волатильность) и единственную дату решения.

Описание модели Блэка—Шоулза

Модель Блэка—Шоулза позволяет вычислить будущее значение цены актива и помогает определить справедливую стоимость европейского опциона.

Цена опциона выражается аналитической формулой, как функция от ожидаемой цены актива $m(t_k)$ в срок исполнения, начальной цены актива X_0 , цены исполнения опциона K , безрисковой процентной ставки r , процентной ставки μ , волатильности σ , срока исполнения опциона t_k , а именно [1, 5, 7]:

1) для call-опциона:

$$C = e^{-rt_k} (\Phi(d_+)m(t_k) - \Phi(d_-)K); \quad (1)$$

2) для put-опциона:

$$C = e^{-rt_k} (-\Phi(-d_+)m(t_k) + \Phi(-d_-)K), \quad (2)$$

где $\Phi(d)$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины и

$$d_{\pm} = \frac{1}{\sigma\sqrt{t_k}} \left(\ln \frac{X_0}{K} + t_k \left(\mu \pm \frac{\sigma^2}{2} \right) \right).$$

Динамика цены акции X в модели Блэка—Шоулза для нахождения ожидаемой цены актива описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито (поведение цены описывается геометрическим броуновским движением) [1, 5, 7]:

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad (3)$$

где $t \in T = [0, t_k]$; $X \in \Omega = [0, +\infty)$; X_0 — начальное условие; $W(t)$ — одномерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0 .

Замечание 1. При расчете премии параметр μ в уравнении (3) задается в зависимости от базисного актива [1]. Если рассматриваются опционы на акции, по которым не выплачиваются дивиденды, то r равно μ и уравнения (1) и (2) можно представить в следующем виде соответственно:

$$C = e^{-\mu t_k} (\Phi(d_+)m(t_k) - \Phi(d_-)K); \quad (4)$$

$$C = e^{-\mu t_k} (-\Phi(-d_+)m(t_k) + \Phi(-d_-)K). \quad (5)$$

Замечание 2. Фактически выбор параметров и является составной частью процедуры задания будущего гипотетического поведения цены базисного актива при расчете премии опциона. Основой для задания прогнозируемой волатильности и расчетной ставки служит оценка исторической волатильности [11] цены базисного актива. Для модели цены акции в виде уравнения (3) оценка максимального правдоподобия исторической волатильности [1, 5] по данным дискретных наблюдений за стоимостью базисного актива хорошо известна:

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{N_{data} - 1} \sum_{n=0}^{N_{data} - 1} \frac{(\ln S_{n+1} - \ln S_n - \hat{a}h_n)^2}{h_n} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\hat{a} = \frac{\ln S_{N_{data}} - \ln S_0}{T_{data}}$; $\{t_n\}$ — неравномерная сетка

по времени на интервале наблюдения $[0, T_{data}]$;

T_{data} — правая граница интервала; N_{data} — коли-

чество дискретных наблюдений $\{S_n\}$ на этом интервале; $h_n = t_{n+1} - t_n$ — промежуток времени между наблюдениями S_{n+1} и S_n .

Оценку параметра μ также несложно получить [1]:

$$\hat{\mu} = \hat{a} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}.$$

При оценке исторической волатильности обычно используют несколько различных периодов наблюдения $[0, T_{data}]$, так как замечено, что оценка $\hat{\sigma}$ в модели Блэка—Шоулза сильно зависит от объема используемых данных N_{data} , т.е. от числа дней торговли, учитываемых при оценке. Чем больший период наблюдения $[0, T_{data}]$ используется при оценке, тем более усредненная оценка исторической волатильности получается.

В данной модели сделан ряд допущений. Перечислим их [4, 7]:

- цена акции с ходом времени меняется непрерывно (без скачков);
- опцион относится к европейскому типу и до дня погашения исполнен быть не может;
- основные активы свободно продаются и покупаются, в том числе в дробных долях;
- допускается «короткая» продажа (продажа без покрытия) основных активов, при этом продавец может пускать полученную наличность в оборот;
- никаких дивидендов или иных выплат по основным активам до исполнения опциона не предусматривается;
- допускается привлечение и размещение наличности по той же самой безрисковой процентной ставке (с непрерывным накоплением процентов);
- налоги, расходы на совершение сделок и выплаты маржи отсутствуют;
- характер изменчивости цены акции, а также процентная ставка в течение срока действия опциона остаются постоянными.

Замечание 3. На практике далеко не все из этих предположений в точности выполняются, но для учета таких отклонений в основную модель можно вводить поправки (часто совсем простые). Работа [8] описывает недостатки рассматриваемой модели для краткосрочного прогнозирования будущих цен и оценки опционов.

Приведем постановку задачи с точки зрения экономики и математики.

Экономическая постановка задачи

Для рассматриваемой акции, по которой не предусматривается выплата дивидендов, известны

начальная цена акции X_0 и значения процентной ставки μ и волатильности σ . Начальную цену X_0 в общем случае будем задавать плотностью распределения вероятности (а в формулы (4) и (5) будем подставлять среднее значение). В зависимости от выбранных покупателем значений срока исполнения call-опциона t_k и цены исполнения K требуется рассчитать плотность распределения стоимости акции, ожидаемое значение стоимости акции в срок исполнения опциона t_k , риск (дисперсию), а также премию (стоимость европейского call-опциона).

Математическая постановка задачи

1. Решить задачу анализа одномерной стохастической системы, заданной уравнением (3), т.е. найти законы изменения плотности вероятности и моментов при заданных μ , σ , X_0 .

2. Найти стоимость опциона C с помощью формулы Блэка—Шоулза (4) и (5) при цене исполнения K .

Алгоритм решения задачи с использованием спектральной формы математического описания

Известно, что если математическая модель описывается уравнением (3), то плотность вероятности $\varphi(t, x)$ удовлетворяет уравнению Фоккера—Планка—Колмогорова [12]:

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu x \varphi(t, x)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2 x^2 \varphi(t, x)]; \quad (6)$$

$$\varphi(t, x)|_{t=0} = \varphi_0(x); \quad \varphi(t, x)|_{x=\pm\infty} = 0,$$

где $\varphi_0(x)$ — плотность вероятности начального состояния X_0 , $t \in T = [0, t_k]$, $x \in \mathbb{R}$.

Следовательно, задача сводится к решению уравнения (6). Из этого уравнения требуется получить закон изменения плотности вероятности $\varphi(t, x)$ и, используя его, найти моментные характеристики $m(t)$ и $D(t)$:

$$m(t) = \int_{\Omega} x \varphi(t, x) dx; \quad D(t) = \int_{\Omega} x^2 \varphi(t, x) dx - m^2(t).$$

Замечание 4. Для удобства последующих расчетов задача формально рассматривается при условии $\Omega = (-\infty, +\infty)$.

Для нахождения плотности вероятности $\varphi(t, x)$ используется спектральная форма математическо-

го описания систем управления [12-15]. В основе предлагаемого подхода лежит представление сигналов совокупностью коэффициентов разложения их в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций. Использование спектральной формы математического описания позволяет формализовать процесс решения задачи анализа при различных областях изменения времени и координат вектора состояния. Следует отметить, что спектральный метод наиболее универсален по сравнению с другими методами, основанными на ортогональных разложениях, поскольку соотношения для решения задачи анализа спектральным методом представляют собой линейные алгебраические уравнения, инвариантные к выбору базисных систем и их свойствам.

Алгоритм решения заключается в следующем:

1. Выбирают базисную систему

$$\{e(i_0, i_1, t, x) = q(i_0, t) \cdot p(i_1, x)\}_{i_0, i_1=0}^{\infty}$$

пространства $L_2(T \times \Omega)$ для представления плотности вероятности $\varphi(t, x)$, а также операторов дифференцирования и умножения. В качестве системы функций $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно использовать полиномы Лежандра $P(i_0, t)$, а в качестве системы функций $\{p(i_1, x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ — функции Эрмита $\Psi(i_1, x)$, так как $\Omega = (-\infty, \infty)$. Кроме того, возможны и другие варианты выбора базисных систем [12].

2. Вычисляют спектральные характеристики операторов дифференцирования, а именно $P(2, 2)$ — по времени с учетом значения функции в начальный момент; $P_1(2, 2)$ и $P_{11}(2, 2)$ — первого и второго порядков по координате x ; $F(2, 2)$ и $G(2, 2)$ — спектральные характеристики операторов умножения на коэффициенты сноса $f(t, x) = \mu x$ и диффузии $g(t, x) = \sigma^2 x^2$ соответственно; $\Phi_0(1, 0)$ — спектральную характеристику плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0 ; $q(1, 0; 0)$ — матрицу-столбец значений функций базисной системы $\{P(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке $t = 0$.

3. Составляют уравнение обобщенной характеристической функции в соответствии с постановкой задачи [12]:

$$P(2,2) \cdot \Phi(2,0) - q(1,0;0) \otimes \Phi_0(1,0) = -P_1(2,2) \cdot F(2,2) + \frac{1}{2} P_{11}(2,2) \cdot G(2,2), \quad (7)$$

где $\Phi(2,0)$ — спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t,x)$, и находят его решение:

$$\Phi(2,0) = \left(P(2,2) + P_1(2,2) \cdot F(2,2) - \frac{1}{2} P_{11}(2,2) \cdot G(2,2) \right)^{-1} \times (q(1,0;0) \otimes \Phi_0(1,0)). \quad (8)$$

4. Находят плотность вероятности $\varphi(t,x)$ по решению уравнения обобщенной характеристической функции, используя обратное спектральное преобразование:

$$\varphi(t,x) = \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \Phi_{i_0 i_1} \cdot P(i_0,t) \cdot \Psi(i_1,x), \quad (t,x) \in T \times \Omega,$$

где $\Phi_{i_0 i_1}$ — координаты спектральной характеристики $\Phi(2,0)$.

5. Вычисляют $X_1(2,2)$ и $X_{11}(2,2)$ — спектральные характеристики операторов умножения на функции $a_1(t,x) = x$ и $a_{11}(t,x) = x^2$ соответственно; $J(0,1)$ — спектральную характеристику функционала J , ставящего в соответствие заданной функции интеграл от этой функции по множеству Ω ; $V(1,2)$ — спектральную характеристику множительного звена.

6. Находят спектральные характеристики $M(1,0)$ и $D(1,0)$ функций $m(t)$ и $D(t)$ соответственно при помощи следующих соотношений [12]:

$$M(1,0) = (E(1,1) \otimes J(0,1)) \cdot (X_1(2,2) \cdot \Phi(2,0)); \quad (9)$$

$$D(1,0) = (E(1,1) \otimes J(0,1)) \times (X_{11}(2,2) \cdot \Phi(2,0)) - (V(1,2) \odot M(1,0)) \cdot M(1,0). \quad (10)$$

7. Находят моментные характеристики $m(t)$ и $D(t)$ по спектральным характеристикам $M(1,0)$ и $D(1,0)$, применяя формулы обращения:

$$m(t) = \sum_{i_0=0}^{\infty} m_{i_0} \cdot P(i_0,t); \quad D(t) = \sum_{i_0=0}^{\infty} d_{i_0} \cdot P(i_0,t), \quad t \in T,$$

где m_{i_0} — координаты спектральной характеристики $M(1,0)$; d_{i_0} — координаты спектральной характеристики $D(1,0)$.

8. Вычисляют премию C с помощью формул Блэка—Шоулза (4) и (5).

Результаты моделирования при различных параметрах модели

Применим разработанный алгоритм для анализа возможных вариантов поведения цены акции и стоимости опциона при изменении параметров волатильности, процентной ставки, цены исполнения опциона и проанализируем полученные результаты. В рассмотренных ниже примерах начальная цена акции X_0 имеет усеченное нормальное распределение с математическим ожиданием 10 и дисперсией 1 (рассматриваются неотрицательные значения X_0), а срок исполнения call-опциона t_k равен 1,2. Для расчетов при представлении искомой функции в виде ряда будем использовать первые тридцать функций базисных систем $\{P(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{\Psi(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (т.е. порядок усечения будет равен 30).

Для сравнения и контроля точности воспользуемся методом Монте-Карло (число моделируемых траекторий — 100000, численное интегрирование методом Эйлера с шагом 0,01 по времени t , шаг по состоянию x для построения гистограммы — 0,1).

Пример 1. Рассмотрим задачу при процентной ставке $\mu = 0,15$ и волатильности $\sigma = 0,2$, при которых стоит ожидать рост цены акции, так как $\mu > 0$.

На рис. 1—3 видно, что с течением времени математическое ожидание и дисперсия возрастают (здесь и далее сплошной жирной линией показаны графики функций, полученных спектральным методом, а сплошной тонкой линией и пунктиром — при использовании метода Монте-Карло). В конечный момент времени видно, что в точке $x = 11,00$ плотность достигает своего максимального значения 0,14. Причиной того, что есть отрицательные значения плотности вероятности, является погрешность аппроксимации функциями Эрмита и частичное выбором порядка усечения [12].

Из рис. 2 следует, что в конечный момент времени (т.е. при $t_k = 1,2$) математическое ожидание $m(t_k)$ будет равно 11,75, что доказывает предполо-

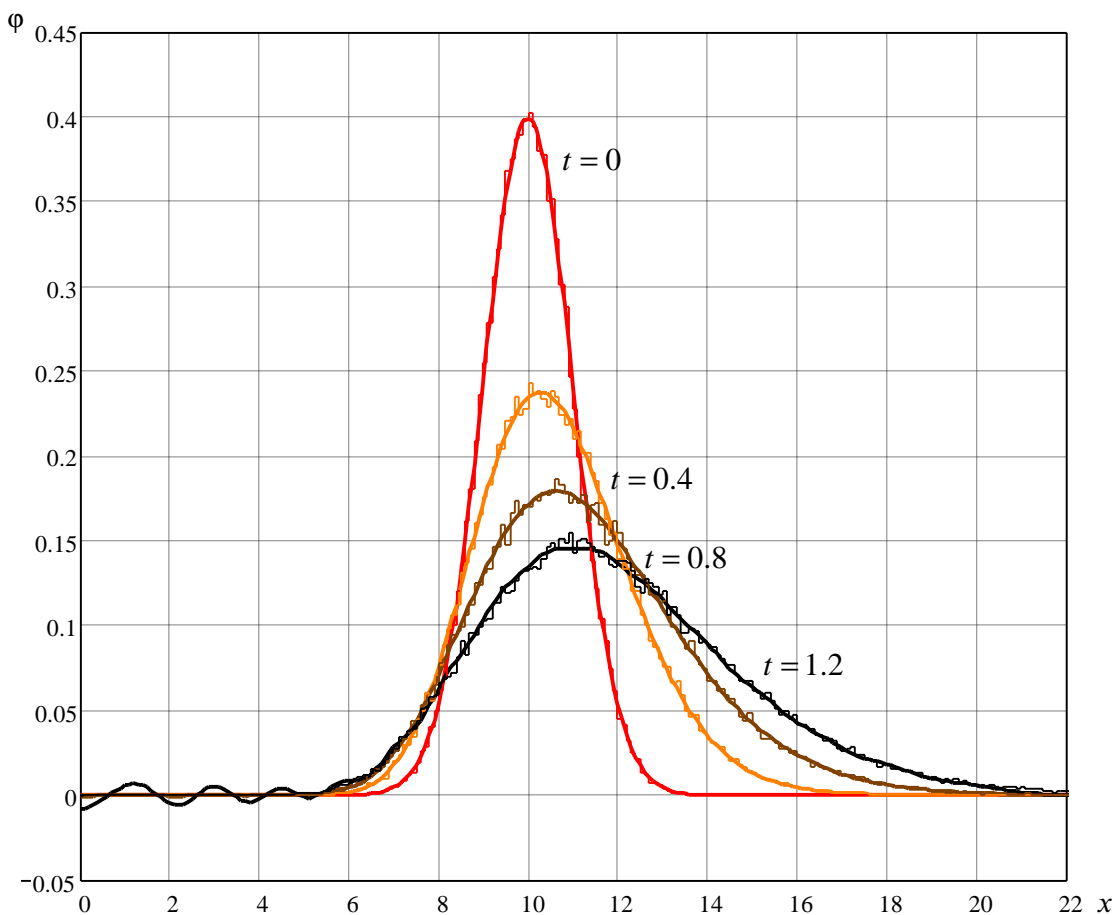


Рис. 1. Сечения плотности вероятности в разные моменты времени при $\mu = 0,15$, $\sigma = 0,2$

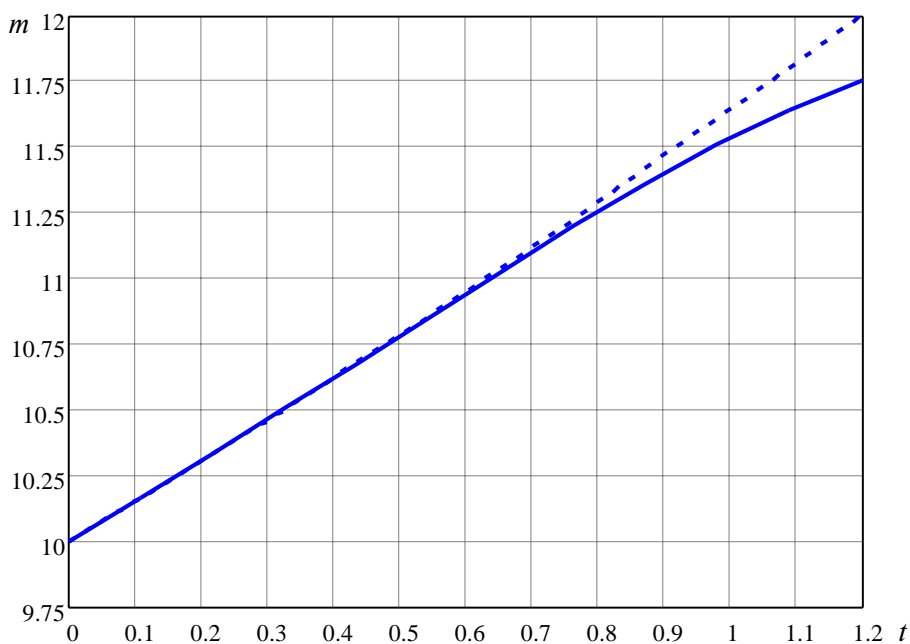


Рис. 2. Математическое ожидание $m(t)$ при $\mu = 0,15$, $\sigma = 0,2$

ожение о росте цены акции. Если покупатель желает приобрести определенную акцию, цена которой по прогнозам увеличится, по оптимальной для него цене и не нести риск, то ему стоит воспользовать-

ся услугами продавца, предоставляющего call-опцион по данному активу. Call-опцион позволит купить акцию по (желаемой) цене исполнения, если цена актива примет большее значение, чем ожидает по-

покупатель, но при этом покупатель выплатит премию продавцу. Премия поможет скомпенсировать разницу в цене между ожидаемой и текущей ценой в будущем и обеспечит продавца прибылью (платой за предоставленные услуги). Очевидно, что доход продавца — это компенсация за его риск.

При прогнозировании на большие промежутки времени дисперсия увеличивается, так как вероятность ошибки растет, что отражает рис. 3. При этом дисперсия $D(t_k)$ равна 9.

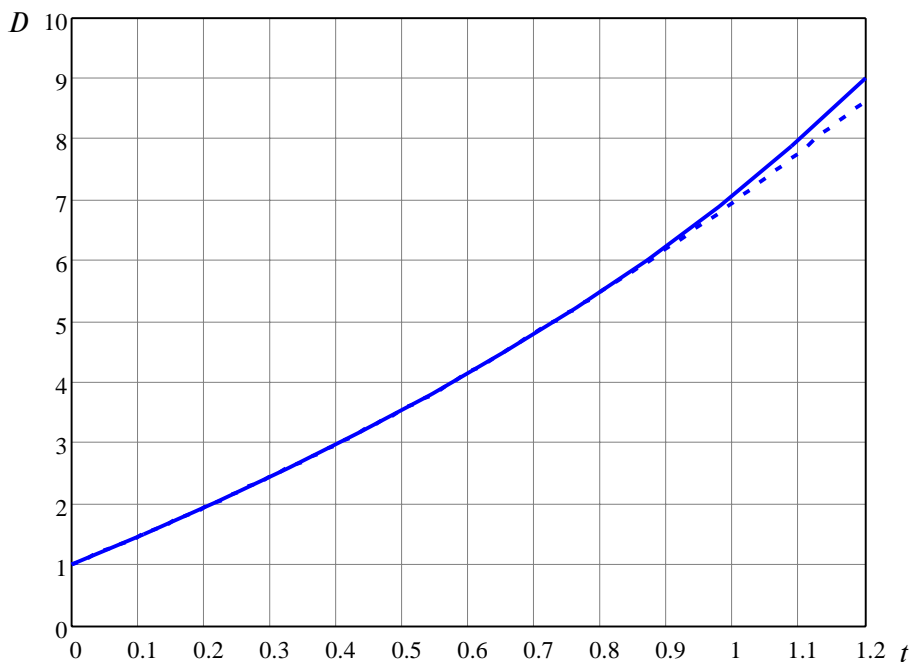


Рис. 3. Дисперсия $D(t)$ при $\mu = 0,15$, $\sigma = 0,2$

Рассчитаем стоимость call-опциона. При желаемой цене покупки $K = 9$ акции и ожидаемой цене $m(t_k) = 11,75$ премия, которую выплатит покупатель, составит $C = 2,35$. Если покупатель исполнит опцион (при этом он заплатит $K + C = 9 + 2,35 = 11,35$), то продавец будет обязан передать покупателю акцию по цене $K = 9$ и понести убытки, если недооценит стоимость опциона. Если покупатель откажется от исполнения опциона, то доход продавца составит $C = 2,35$. Премия примет такое значение из-за желания покупателя купить акцию по цене меньшей, чем она принималась вначале и ожидается во время исполнения опциона. В самом деле, покупатель опциона обязан понять, что он должен соглашаться с той ценой, которая дает продавцу возможность выполнить условия, заложенные в контракте при покупке опциона. Понятно, что эта цена не может быть малой. Но покупатель, в частности, осознает, что он не должен переплачивать, а должен платить такую минимальную цену (в выборе этой цены

частично заключается хеджирование портфеля с опционами), которая будет достаточна для того, чтобы продавец выполнил условия контракта [5].

Значения премии при других ценах исполнения представлены в табл. 1.

Таблица 1

| | | | | |
|-----|------|------|----|------|
| K | 10 | 13 | 30 | 0 |
| C | 1,73 | 0,47 | 0 | 9,82 |

Рис. 4 и 5 отражают зависимость значения премии от цены исполнения в конечный момент времени и от времени при цене исполнения, равной ожидаемой цене.

Из рис. 4 видно, что для call-опционов чем выше покупатель выбирает цену исполнения, тем

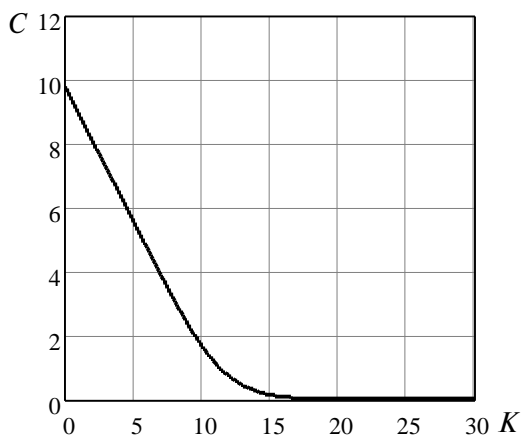


Рис. 4. Зависимость стоимости call-опциона от цены исполнения

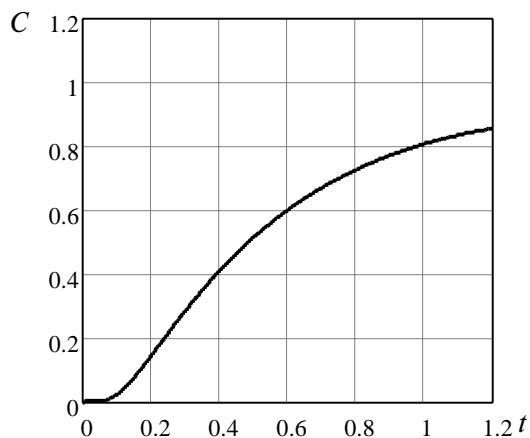


Рис. 5. Зависимость стоимости call-опциона от времени

меньшее значение принимает премия, а значит, продавец будет нести меньший риск за недооцененный опцион.

Пример 2. Рассмотрим модель цены при параметрах $\mu = -0,3$, $\sigma = 0,2$. В этом случае стоит ожидать падение цены акции, так как $\mu < 0$.

Из рис. 6—8 видно, что с течением времени математическое ожидание уменьшается и дисперсия возрастает. В конечный момент времени видно, что

в точке $x = 6,4$ плотность достигает своего максимального значения 0,25.

Из рис. 7 следует, что в конечный момент времени (т.е. при $t_k = 1,2$) математическое ожидание $m(t_k) = 6,98$, что доказывает наше предположение о падении цены актива. Также очевидно, что не стоит покупать акцию, поскольку ее владелец в будущем понесет убыток. Так как ожидается снижение цены акции, то покупателю стоит взять put-опцион, потому что он позволит продать акцию по большей цене, чем ожидается в рассматриваемом примере, т.е. по цене исполнения (например, по цене $K = 10$), но при этом покупатель выплатит премию за риск, который понесет продавец.

При прогнозировании на большие промежутки времени дисперсия увеличивается, так как вероятность ошибки прогноза растет, что отражает рис. 8. Дисперсия $D(t_k)$ будет равна 2,9.

Значения премии call-опциона при разных значениях K представлены в табл. 2.

Таблица 2

| | | | | |
|-----|------|------|----|----|
| K | 6,98 | 4 | 16 | 0 |
| C | 0,87 | 4,27 | 0 | 10 |

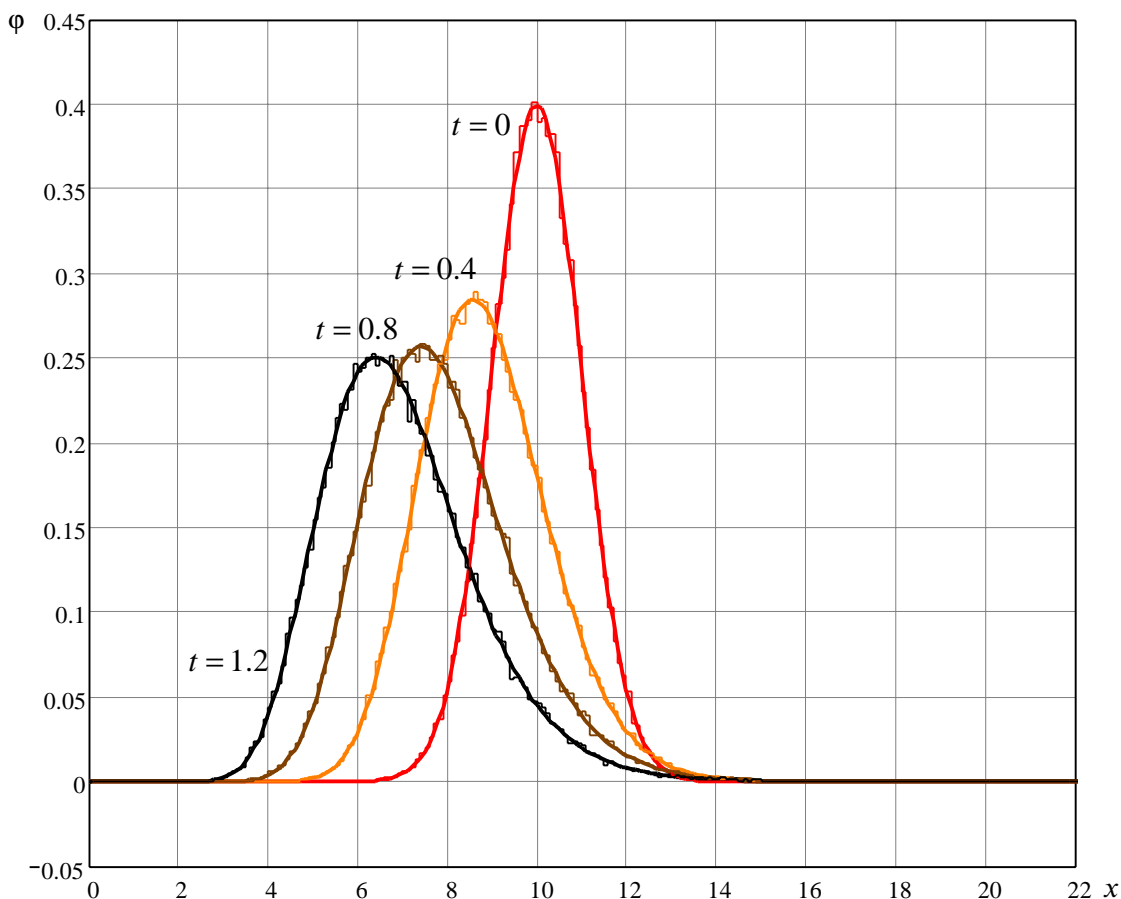


Рис. 6. Сечения плотности вероятности в разные моменты времени при $\mu = -0,3$, $\sigma = 0,2$

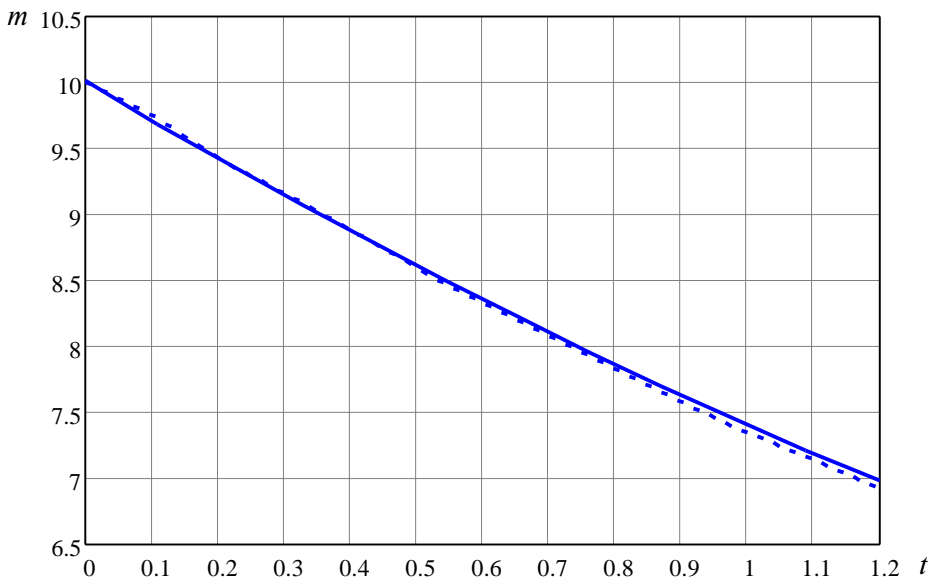


Рис. 7. Математическое ожидание $m(t)$ при $\mu = -0,3$, $\sigma = 0,2$

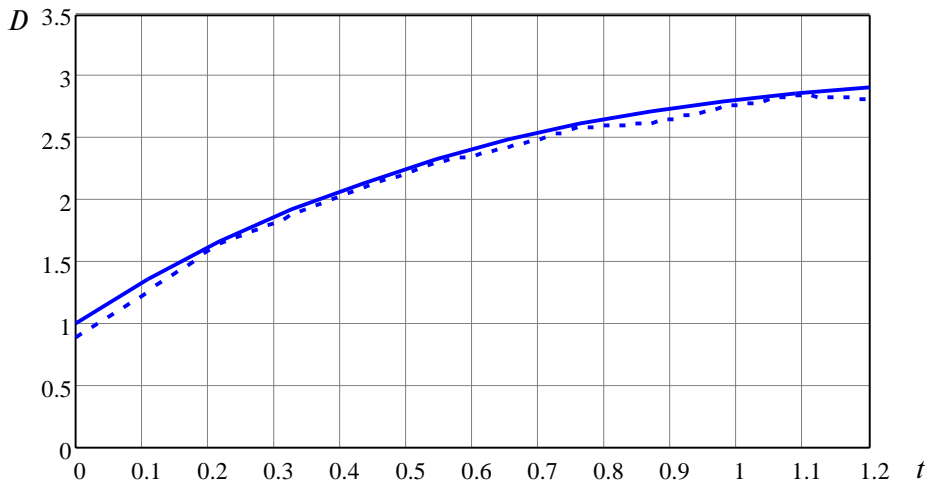


Рис. 8. Дисперсия $D(t)$ при $\mu = -0,3$, $\sigma = 0,2$

Рис. 9 и 10 отражают зависимость значения премии от цены исполнения в конечный момент времени и от времени при цене исполнения, равной ожидаемой цене.

Рассчитаем премию на put-опцион, так как при данных условиях покупателю имеет смысл использовать его для продажи акции по желаемой цене.

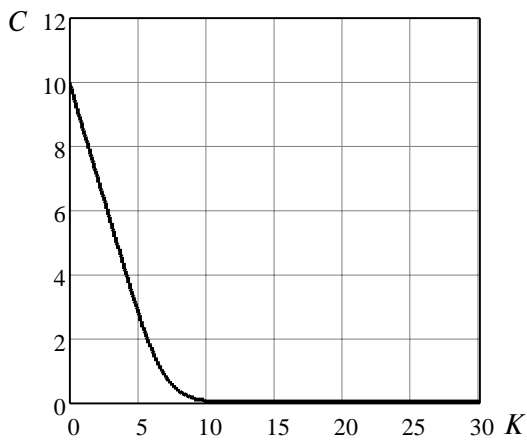


Рис. 9. Зависимость стоимости call-опциона от цены исполнения

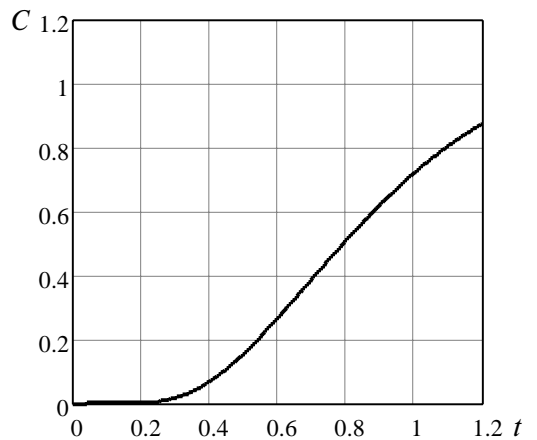


Рис. 10. Зависимость стоимости call-опциона от времени

Значения премии put-опциона при разных значениях K представлены в табл. 3.

Таблица 3

| | | | | |
|-----|------|------|------|---|
| K | 6,98 | 8 | 15 | 0 |
| C | 0,88 | 1,45 | 11,5 | 0 |

Рис. 11 и 12 отражают зависимость значения премии от цены исполнения в конечный момент времени и от времени при цене исполнения, равной ожидаемой цене.

Пример 3. Рассмотрим модель цены при параметрах $\mu = 0$, $\sigma = 0,2$ (нулевое значение процентной ставки говорит о том, что никакие проценты по акции начисляться не будут; параметр μ принимается равным нулю для расчета премии опционов на фьючерсные контракты, причем цена базисного актива X — текущая фьючерсная цена).

Из рис. 13—15 видно, что с течением времени математическое ожидание уменьшается и дисперсия возрастает. В конечный момент времени вид-

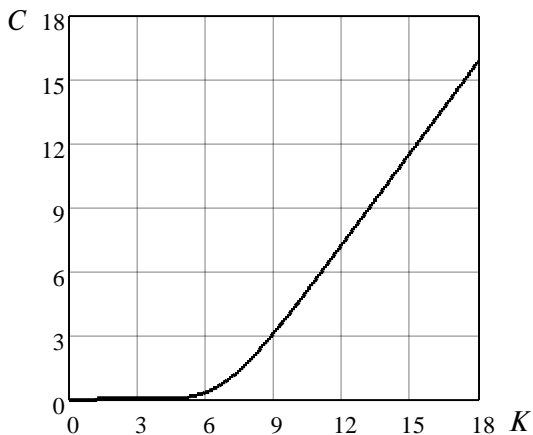


Рис. 11. Зависимость стоимости put-опциона от цены исполнения

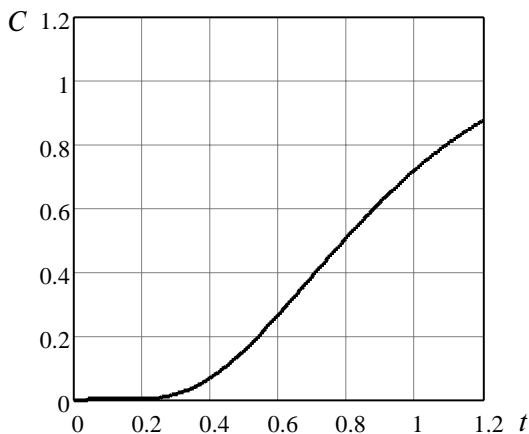


Рис. 12. Зависимость стоимости put-опциона от времени

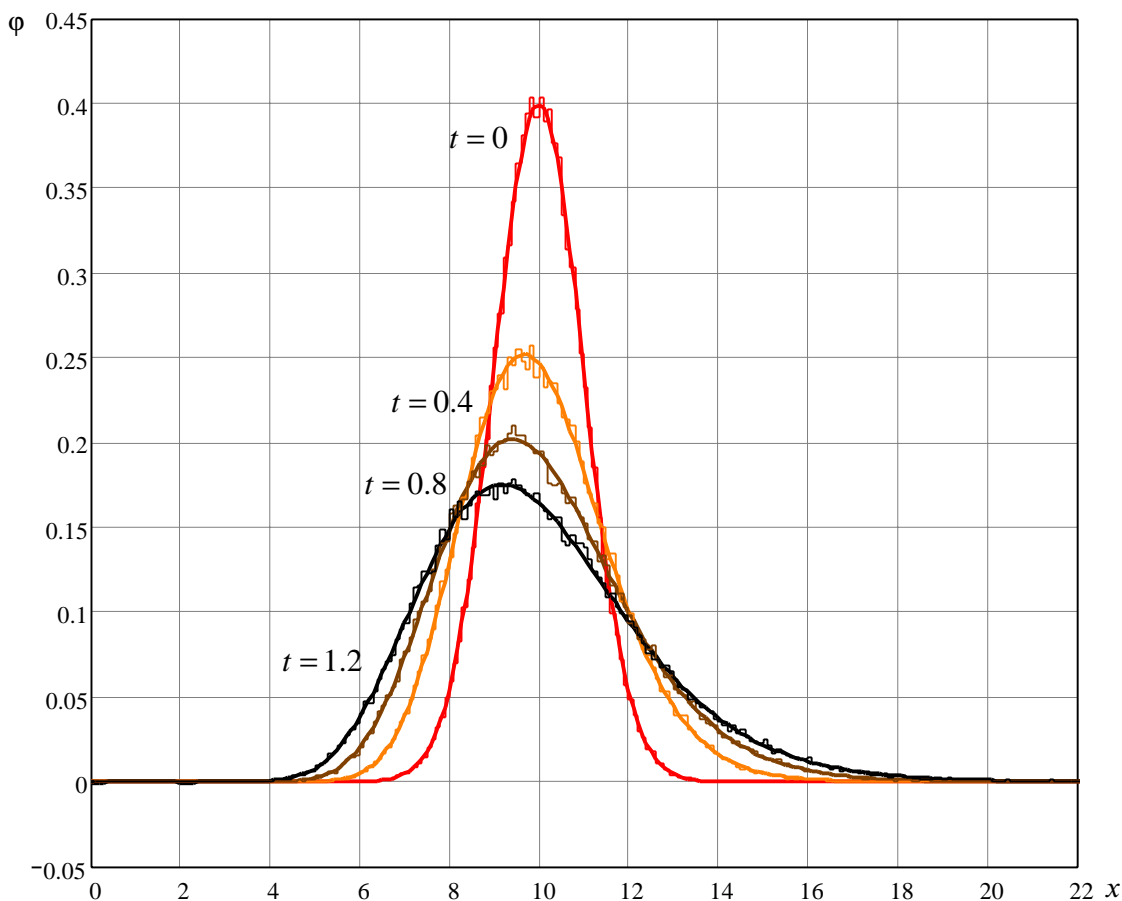


Рис. 13. Сечения плотности вероятности в разные моменты времени при $\mu = 0$, $\sigma = 0,2$

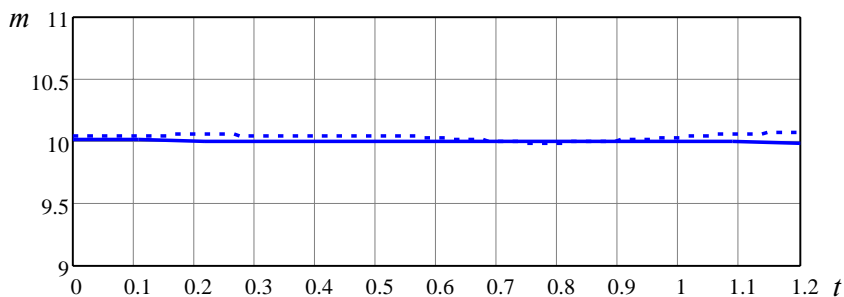


Рис. 14. Математическое ожидание $m(t)$ при $\mu = 0, \sigma = 0,2$

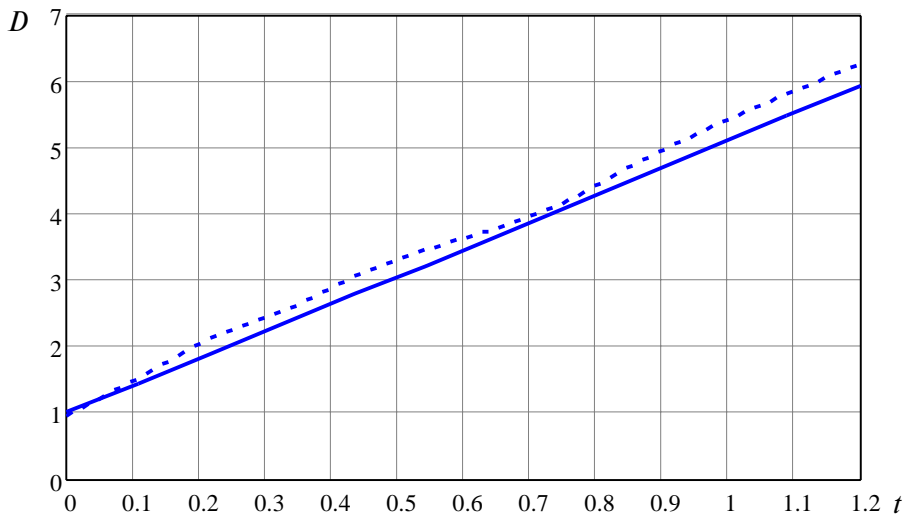


Рис. 15. Дисперсия $D(t)$ при $\mu = 0, \sigma = 0,2$

но, что в точке $x = 9,2$ плотность достигает своего максимального значения $0,175$.

Из рис. 14 следует, что в конечный момент времени (т.е. при $t_k = 1,2$) математическое ожидание $m(t_k) = 9,98$, что практически не отличается от его начального значения (причиной отклонения от начальной цены является погрешность при численных расчетах).

При прогнозировании на большие промежутки времени дисперсия увеличивается, так как вероятность ошибки прогноза растет, что отражает график

зависимости дисперсии $D(t)$ от времени, изображенный на рис. 15. Дисперсия $D(t_k)$ будет равна $5,94$.

Значения премии call-опциона при разных значениях K представлены в табл. 4.

Рис. 16 и 17 отражают зависимость значения премии от цены исполнения в конечный момент

Таблица 4

| | | | | |
|-----|------|------|----|------|
| K | 8 | 10 | 18 | 0 |
| C | 2,14 | 0,86 | 0 | 9,98 |

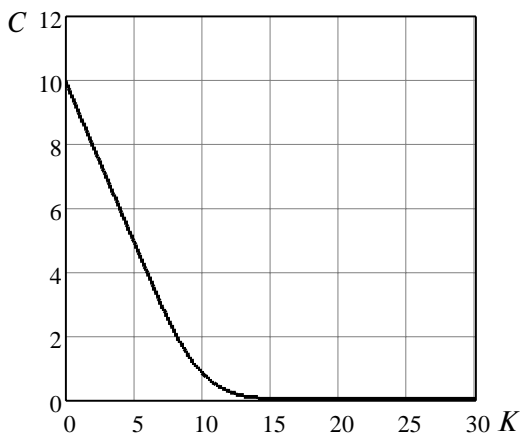


Рис. 16. Зависимость стоимости call-опциона от цены исполнения

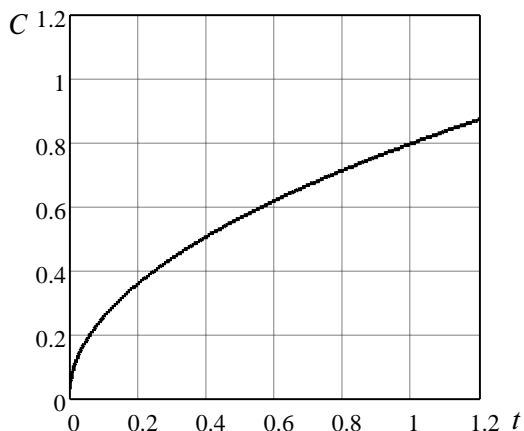


Рис. 17. Зависимость стоимости call-опциона от времени

времени и от времени при цене исполнения, равной ожидаемой цене.

Дополнительные расчеты показывают, что увеличение волатильности в рассматриваемом примере приводит к существенному росту дисперсии. Так, увеличение волатильности на 0,1 дает изменение

$D(t_k)$ почти в два раза, однако при этом премии на опцион почти одинаковые.

Таким образом, модель достаточно полно отражает динамику цены акций, которая зависит от процентной ставки и волатильности, и очень полезна при принятии инвестиционных решений (поскольку показывает себя как ценный инструмент для оценки опционов и рыночных ожиданий), но не гарантирует прибыль на опционных и биржевых торгах. Очевидно, что чем большую волатильность имеет данная акция, тем больше вероятность того, что в момент исполнения опциона цена будет сильно отличаться от начальной. Основные трудности, которые могут возникнуть при применении данной модели, связаны с получением достоверных исходных данных, необходимых для расчета (время до реализации заложенных в проекте возможностей, значение волатильности и т.д.). То есть использование модели Блэка—Шоулза осложнено тем, что в расчетах всегда будет присутствовать множество параметров, которые носят оценочный характер (например, уровень процентных ставок, значение волатильности).

Из рассмотренных примеров видно, что покупатель опциона имеет два варианта действий в зависимости от ситуации. Если $X(t_k) > K$, то эта ситуация окажется благоприятной для покупателя, поскольку ему по условиям контракта дано право купить акции по цене K , что он может сделать с немедленной их продажей по рыночной цене $X(t_k)$, а следовательно, получит доход от этой операции, равный $X(t_k) - K$. Если $X(t_k) < K$, то данное покупателю право покупки (по цене K) ему ничего не дает, поскольку он может купить акции по более низкой цене $X(t_k)$.

При анализе рассмотрены две ситуации, которые хорошо характеризуют модель: 1) при сильно завышенных значениях цены исполнения опциона премия будет равна нулю, так как при такой ситуации продавец получит огромную выручку, равную разнице между ценой исполнения и текущей ценой акции, не неся никакого риска; 2) при желании покупателя получить акцию бесплатно премия бу-

дет приближаться к начальной цене акции в случае ненулевой процентной ставки, а в случае нулевой она будет равна ожидаемой цене акций во время исполнения опциона, так как продавец откажется предоставить покупателю опцион.

Результаты, полученные спектральным методом, практически совпадают с результатами, полученными методом Монте-Карло (этот факт подтверждают приведенные выше графики плотностей вероятности, математических ожиданий и дисперсий). Значит, данный метод может быть использован в качестве альтернативы методу Монте-Карло, особенно при увеличении размерности задачи или расширении модели динамики цены акции.

Рассмотренная модель позволяет проводить расчеты только для одного финансового инструмента. Однако разработанный алгоритм может быть использован и для оценки портфеля финансовых инструментов (увеличение размерности вектора цен приведет к увеличению размерности спектральных характеристик [12], а в целом алгоритм анализа останется без существенных изменений).

В качестве направления дальнейших исследований необходимо расширить модель динамики цены акции, например учесть, что:

- волатильность σ зависит от времени и цены исполнения рассматриваемых европейских опционов, безрисковая процентная ставка r и процентная ставка μ зависят от времени;
- обычно выплачиваются дивиденды $q(t)$.

Поэтому модель динамики цены актива можно представить в следующем виде [4]:

$$dX(t) = \mu(t)X(t)dt + \sigma(K, t)X(t)dW(t),$$

где $\mu(t) = r(t) - q(t)$.

Это расширило бы модель Блэка—Шоулза без увеличения размерности задачи и позволило бы оценить и хеджировать любой американский опцион, который на практике больше используется, так как дает больше свободы покупателю, допуская выбор момента исполнения опциона. При этом использование такой модели позволит более точно найти стоимость опционов (в особенности это верно для экзотических опционов).

Выводы

В ходе данной работы сформирован алгоритм решения рассматриваемой задачи, проведено моделирование различных случаев поведения цены акции, проведены сравнение спектрального метода и метода Монте-Карло и анализ результатов моделирования при различных параметрах модели, показано, что спектральный метод может служить аль-

тернативной методу Монте-Карло для решения данной задачи.

Библиографический список

1. *Артемов С.С., Якунин М.А.* Математическое и статистическое моделирование в финансах. — Новосибирск: Изд. ИВМиМГ СО РАН, 2008.
2. *Dubačsová J., Hurt J., Štěpán J.* Stochastic Modeling in Economics and Finance. — Kluwer Academic Publishers, 2003.
3. *Вайн С.* Опционы. Полный курс для профессионалов. — М.: Алытина Паблишер, 2003.
4. *Rishel R.* Whether to sell or hold a stock // Communication in information and system. 2006. V. 6. № 3. P. 193-202.
5. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. — М.: ФАЗИС, 1998.
6. *Артемов С.С., Михайличенко И.Г., Сеницын И.Н.* Статистическое моделирование срочных финансовых операций. — Новосибирск: Изд. ВЦ СО РАН, 1996.
7. *Black F., Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // The Journal of Political Economy. 1973. V.81. № 3. P. 637-654.
8. *Black F.* How to Use the Holes in Black-Scholes // Journal of Applied Corporate Finance. 1989. V. 1. № 4. P. 67-73.

9. *Merton R.C.* Theory of rational pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. 1973. № 4. P. 141-183.

10. *Dupire B.* Pricing with a smile // RISK-magazin. 1994. V. 7. № 1. P. 18-20.

11. *Королев В.Ю.* Новый подход к определению и анализу компонент волатильности финансовых индексов // Актуарий. 2004. № 12. С. 47-49.

12. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.* Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. — М.: Вузовская книга, 2006.

13. *Солодовников В.В., Семенов В.В.* Спектральная теория нестационарных систем управления. — М.: Наука, 1974.

14. *Рыбаков К.А.* Программное обеспечение спектральных преобразований Spectrum // Электронный журнал «Труды МАИ». 2003. № 14. <http://www.mai.ru>.

15. *Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.* Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал «Труды МАИ». 2004. № 16. <http://www.mai.ru>.

Московский авиационный институт
Статья поступила в редакцию 10.06.2009