

Труды МАИ. 2023. № 131
Trudy MAI, 2023, no. 131

Научная статья
УДК 539.3
DOI: [10.34759/trd-2023-131-08](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-08)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПАНЕЛЕЙ И АРОК В ОБЛАСТИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ИЗ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Владимир Георгиевич Дмитриев¹✉, Анастасия Руслановна Попова²

^{1,2}Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Москва, Россия

¹vgd2105@mail.ru ✉

²Popova.ar@1566.ru

Аннотация. В работе разрабатываются математические модели и вычислительные алгоритмы для исследования особенностей процессов деформирования панельных и арочных конструкций из гиперупругих материалов при произвольных обобщенных перемещениях и деформациях. Дискретизация исходной континуальной задачи по пространственным переменным осуществляется методом конечных разностей с аппроксимацией дифференциальных операторов конечно-разностными второго порядка точности. Для построения вычислительного алгоритма решения нелинейной

краевой задачи используется квазидинамическая форма метода установления с построения явной двухслойной разностной схемы по времени второго порядка точности. Методами вычислительного эксперимента исследованы особенности напряженно-деформированного состояния и определены значения критических нагрузок для локально нагруженной арочной конструкции из гиперупругого материала при использовании соотношений модели Муни-Ривлина и неогуковской модели как для случаев защемленных, так и шарнирно закрепленных краев.

Ключевые слова: арки, панели, гиперупругие материалы, конечные разности, нелинейные задачи, метод установления, аппроксимация, граничные условия

Для цитирования: Дмитриев В.Г., Попова А.Р. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния панелей и арок в области больших перемещений и деформаций при проектировании тонкостенных конструкций летательных аппаратов из гиперупругих материалов // Труды МАИ. 2023. № 131.

DOI: [10.34759/trd-2023-131-08](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-08)

Original article

MATHEMATICAL MODELING OF PANELS AND ARCHES STRESS-STRAIN STATE FOR THE CASE OF LARGE DISPLACEMENTS AND STRAINS AT DESIGNING THIN-WALLED AIRCRAFT STRUCTURES OF HYPERELASTIC MATERIALS

Vladimir G. Dmitriev^{1✉}, Anastasiya R. Popova²

^{1,2} Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

vgd2105@mail.ru✉

Popova.ar@1566.ru

Abstract. Mathematical models and numerical algorithms for investigation of panel and arch structures of hyperelastic materials at large displacements and strains deforming processes features are developed in the work. For constructing discrete models of original integro-differential initial-boundary problems in nonlinear mechanics of thin-wall structures finite difference method (FDM) and finite element method (FEM) are most widely used. Each of these methods of discretization has its characteristic advantages and disadvantages, which are revealed when solving problems of the corresponding class. FDM method effectiveness is connected with using the simplest formulas of numerical differentiation, as well as minimum amount of integration points when approximating corresponding functional in variational equations. Advantages of FEM method are connected mainly with smaller in comparison to FDM method sensitivity to the form of external or internal boundary of the shell when calculating nonregular structures of complicated form. This justifies commercial success of such well-known finite-element software as ANSYS and NASTRAN. However, when calculating thin-wall structures on the basis of Timoshenko-Reissner models containing singular terms in the original equations, problem discretization using FEM method can make difficulties in carrying out calculations. Among other things this accounts for peculiarities of machine arithmetic when carrying out operations with matrices and can often lead to significant computational errors.

Discretization of the given continual problem in space variables is carried out using finite difference method approximating differential operators by finite-difference ones of the

second order of accuracy. Approximation accuracy can be risen either by increasing the number of discretization points, or by approximation by difference operators of the higher order of accuracy. However, using higher order approximation leads to increasing the number of nodes when forming difference stencil and loss of simplicity of difference schemes.

For nonlinear boundary value problem solution numerical algorithm construction a quasi-dynamic form of stabilization method with constructing explicit two-layer differential scheme in time of the second order of accuracy is used. It should be mentioned that when using iteration methods similar to quasi-dynamic form of relaxation method considered here also the term “dynamic relaxation” is used, though the authors specify that such a term doesn’t correspond to the essence of the method.

By means of numerical experiment features of stress-strain state are investigated and critical load values are determined for locally loaded arched construction of hyperelastic material using relations of Mooney-Rivlin model and neohookean model for the cases of clamped and hinged boundaries.

Keywords: Arches, panels, hyperelastic materials, finite differences, nonlinear problems, stabilization method, approximation, boundary conditions

For citation: Dmitriev V.G., Popova A.R. Mathematical modeling of panels and arches stress-strain state for the case of large displacements and strains at designing thin-walled aircraft structures of hyperelastic materials. *Trudy MAI*, 2023, no. 131. DOI: [10.34759/trd-2023-131-08](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-08)

Введение

Гибкие упругие тонкостенные конструкции достаточно широко применяются в различных областях современной техники, в частности – в авиакосмических системах. Рассматриваются тонкостенные конструкции в виде арок (криволинейных балок) и панелей произвольного очертания в общем случае переменной толщины h , выполненные из гиперупругих (нелинейно упругих) материалов. Для панельных конструкций предполагается выполнение условий плоской деформации. В процессе эксплуатации конструкции из таких материалов претерпевают значительные перемещения и деформации, что вызывает необходимость разработки математических моделей, адекватно описывающих особенности напряженно-деформированного состояния (НДС) под действием различных систем краевых и/или поверхностных нагрузок. В настоящей работе для описания процессов деформирования арочных и панельных конструкций из гиперупругих материалов при больших перемещениях точек координатной поверхности и неограниченных углах поворота нормали к ней в качестве неизвестных принимаются изменения декартовых координат x, y , поскольку использование традиционных компонент тангенциального u и нормального w перемещения для рассматриваемого варианта геометрически нелинейного деформирования тонкостенных конструкций приводит к значительному усложнению структуры уравнений [1-11].

Постановка задачи. Математическая модель

В исходном (недеформированном) состоянии элемент образующей длиной ds_0 имеет начальные координаты x_0, y_0 , кривизну k_{10} и начальный угол θ_0 между осью x и нормалью к образующей (рис. 1). Для начального состояния имеют место следующие геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
 ds_0 &= \sqrt{dx_0^2 + dy_0^2}; & \sin \theta_0 &= \frac{dx_0}{ds_0}; & \cos \theta_0 &= \frac{dy_0}{ds_0}; \\
 ds_0 &= R_{10} \cdot d\theta_0; & k_{10} &= \frac{1}{R_{10}} = \frac{d\theta_0}{ds_0}, & & (1)
 \end{aligned}$$

где R_{10} - радиус кривизны в направлении образующей, координаты x_0, y_0 являются заданными функциями линейной координаты s_0 вдоль образующей: $x_0=x_0(s_0)$, $y_0=y_0(s_0)$.

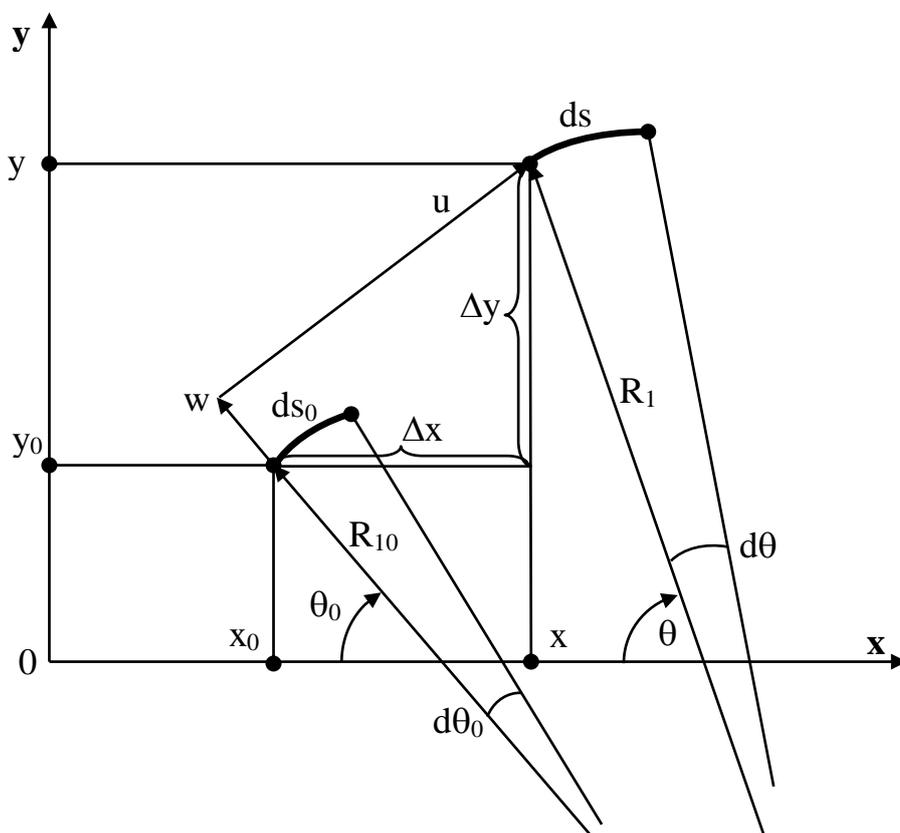


Рис. 1. Элемент оболочки до и после деформации

В деформированном состоянии элемент имеет длину ds , координаты x, y , угол θ и кривизну k_1 (рис. 1). Полагая координаты x, y функциями линейной координаты s вдоль деформированной образующей $x=x(s), y=y(s)$, для деформированного состояния имеем соотношения, аналогичные (1)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}; \quad \sin \theta = \frac{dx}{ds}; \quad \cos \theta = \frac{dy}{ds}; \quad \Delta\theta = \theta - \theta_0;$$

$$ds = R_1 \cdot d\theta; \quad k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds}, \quad (2)$$

где $\Delta\theta$ - угол поворота, аналогичный кинематическому параметру "жесткой" нормали в рамках гипотез Кирхгоффа-Лява. На углы поворота $\Delta\theta$ ограничения не накладываются. Компоненты деформации вдоль образующей ε_{11} , а также изменение кривизны k_{11} срединной поверхности, принятой в качестве координатной $z=0$, определяются следующим образом

$$\varepsilon_{11} = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{ds}{ds_0} - 1; \quad k_{11} = k_1 - k_{10} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{d\theta_0}{ds_0}. \quad (3)$$

В рамках традиционных гипотез и допущений балочной теории компоненты деформации для волокна на расстоянии z от координатной поверхности распределяются по линейному закону

$$\varepsilon_{11}^z = \varepsilon_{11} + z \cdot k_{11}. \quad (4)$$

Введем силовые факторы в поперечном сечении арки: продольную T , поперечную силу Q и изгибающий момент M . В качестве нагрузки на конструкцию рассматривается действие как консервативной нагрузки с компонентами q_x и q_y , так

и нагрузки «следящего» типа с компонентами q_u и q_w . Положительные направления для силовых факторов T , Q , M и компонент нагрузки $q=q(s)$ показаны на рис. 2.

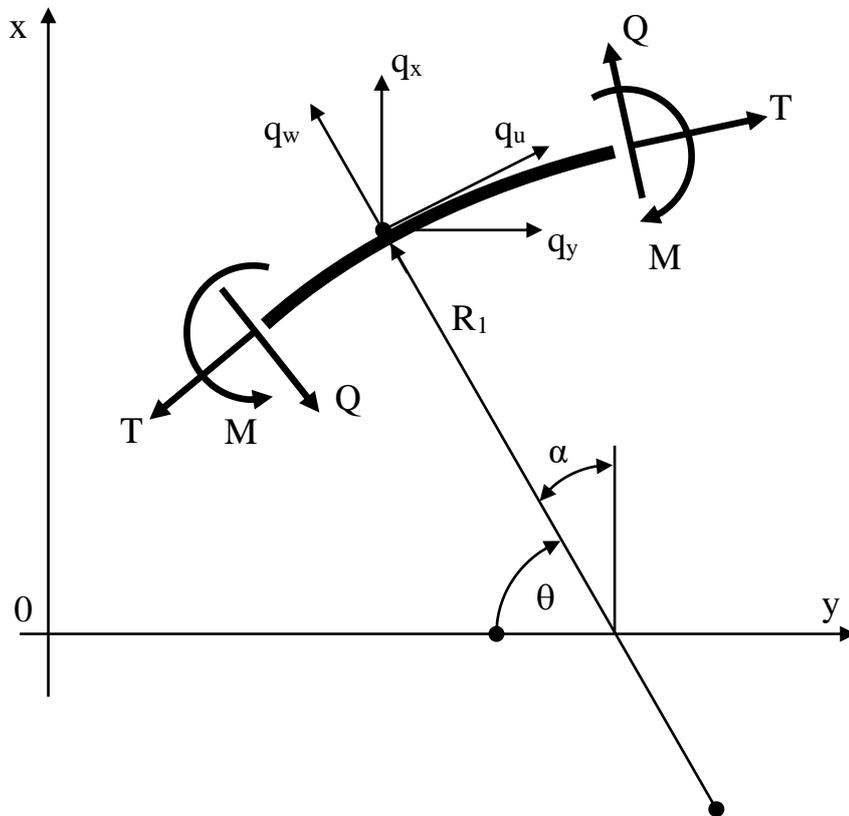


Рис. 2. Принятые положительные направления для силовых факторов и нагрузок

При выводе физических соотношений для тонкостенных конструкций из гиперупругих материалов предполагается, что материал является изотропным и несжимаемым. В таком случае упругий потенциал, характеризующий физические свойства гиперупругого материала, является функцией трех главных инвариантов тензора деформации Коши-Грина, которые обычно представляются функциями главных кратностей удлинений $W=W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ [12,13]. В настоящей работе

рассматривается два варианта упругих потенциалов для несжимаемых материалов [12-16]:

- неогуковская модель

$$W = C_{11} \cdot (I_1 - 3); \quad (5)$$

- модель Муни-Ривлина

$$W = C_{21} \cdot (I_1 - 3) + C_{22} \cdot (I_2 - 3), \quad (6)$$

где C_{11}, C_{21}, C_{22} – параметры материала, $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2$ – инварианты тензора деформаций Коши-Грина; $\lambda_i = 1 + \varepsilon_{ii}$, ($i=1,2,3$).

Для несжимаемого материала напряжения σ_{ii} выражаются через функции упругого потенциала следующим образом

$$\sigma_{ii} = -p + \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}, \quad (7)$$

где p – гидростатическое давление. После соответствующих преобразований с учетом принятых гипотез и допущений (4) для рассматриваемых тонкостенных конструкций можно получить следующие геометрические и физические соотношения:

- неогуковская модель

$$\lambda_1^z = 1 + \varepsilon_{11}^z; \quad \sigma_{11}^z = 2 \cdot C_{11} \cdot \left[(\lambda_1^z)^2 - \frac{1}{(\lambda_1^z)^2} \right]; \quad (8)$$

- модель Муни-Ривлина

$$\lambda_1^z = 1 + \varepsilon_{11}^z; \quad \sigma_{11}^z = 2 \cdot (C_{21} + C_{22}) \cdot \left[(\lambda_1^z)^2 - \frac{1}{(\lambda_1^z)^2} \right]. \quad (9)$$

Силловые факторы определяются далее интегрированием напряжений по толщине h

$$T = b \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{11}^z \cdot dz; \quad M = b \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{11}^z \cdot z \cdot dz, \quad (10)$$

где b - ширина арки. Для панельных конструкций $b=1$. Уравнения равновесия в проекциях на оси, связанные с деформированной координатной поверхностью, имеют вид [1-4]

$$\frac{dT}{ds} + k_1 Q + q_u = 0; \quad \frac{dQ}{ds} - k_1 T + q_w = 0; \quad Q = \frac{dM}{ds}. \quad (11)$$

Граничные условия на крае $s=s_0$ формулируются следующим образом:

- жесткое защемление (рис. 3а)

$$x(s_0) = x_0; \quad y(s_0) = y_0; \quad \theta(s_0) = \theta_0; \quad (12)$$

- шарнирное закрепление (рис. 3б)

$$x(s_0) = x_0; \quad y(s_0) = y_0; \quad k_1(s_0) = k_{10} = 1/R_{10}. \quad (13)$$

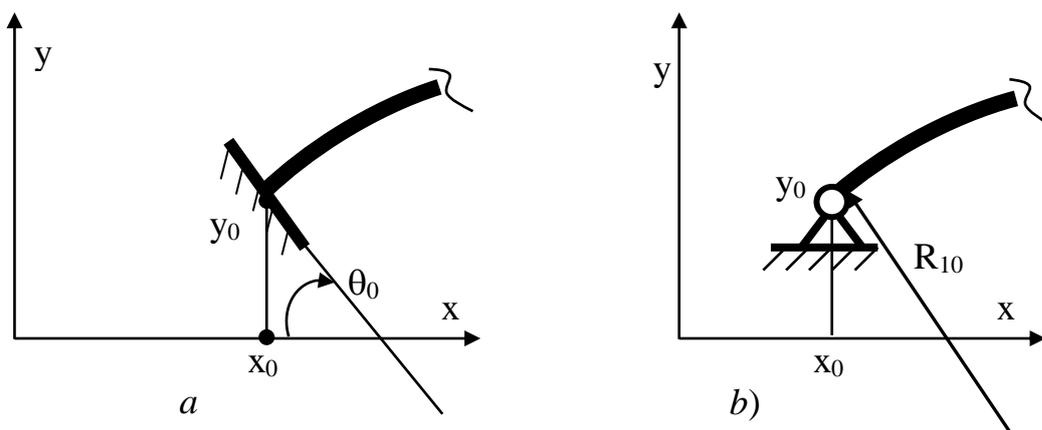


Рис. 3. Моделирование граничных условий на крае $s=s_0$.

Граничные условия на крае $s=s_L$ формулируются аналогично (12), (13).

Дискретизация задачи. Вычислительный алгоритм

Дискретизация исходной дифференциальной задачи по пространственным переменным осуществляется методом конечных разностей (МКР) [17-19]. В области непрерывного изменения аргумента s_0 вводятся две сетки: основная с целочисленными индексами i и вспомогательная с индексами $i \pm 1/2$, узлы которой располагаются посередине между узлами основной сетки $i \pm 1$ (рис. 4). Частные производные аппроксимируются разностными операторами второго порядка точности.

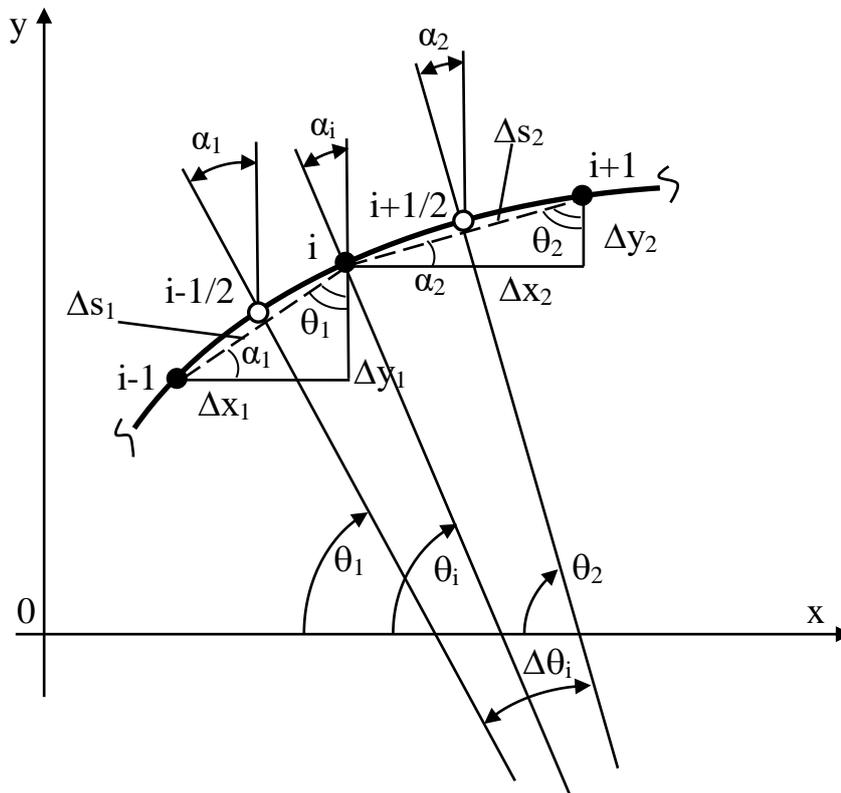


Рис. 4. Конечно-разностная модель элемента оболочки

Геометрия конструкции в недеформированном состоянии описывается сеточными функциями $(x_0)_i, (y_0)_i$, которые задаются из условия постоянства шага $\Delta s_0 = \text{const}$ для всей расчетной области $0 \leq s_0 \leq L_0$, так, что

$$\Delta s_0 = \frac{L_0}{N-1}; \quad \Delta s = (\Delta s_0)_{i-1/2} = (\Delta s_0)_{i+1/2}, \quad (14)$$

где N – число точек дискретизации: $1 \leq i \leq N$. Дискретные аналоги дифференциальных соотношений (1) для начального состояния представляются следующим образом (рис. 4)

$$\begin{aligned} (\Delta s_0)_{i-1/2} = \Delta s_1 &= \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2}; & (\Delta s_0)_{i+1/2} = \Delta s_2 &= \sqrt{\Delta x_2^2 + \Delta y_2^2}; \\ \sin \alpha_1 &= \frac{\Delta y_1}{\Delta s_1}; & \theta_1 = (\theta_0)_{i-1/2} &= \frac{\pi}{2} - \alpha_1; \\ \sin \alpha_2 &= \frac{\Delta y_2}{\Delta s_2}; & \theta_2 = (\theta_0)_{i+1/2} &= \frac{\pi}{2} - \alpha_2; \end{aligned} \quad (15)$$

$$(\Delta s_0)_i = \frac{(\Delta s_0)_{i-1/2} + (\Delta s_0)_{i+1/2}}{2}; \quad (k_{10})_i = \frac{(\theta_0)_{i+1/2} - (\theta_0)_{i-1/2}}{(\Delta s_0)_i},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= (x_0)_i - (x_0)_{i-1}; & \Delta y_1 &= (y_0)_i - (y_0)_{i-1}; \\ \Delta x_2 &= (x_0)_{i+1} - (x_0)_i; & \Delta y_2 &= (y_0)_{i+1} - (y_0)_i. \end{aligned} \quad (16)$$

Деформированное состояние описывается сеточными функциями узловых перемещений x_i и y_i с аппроксимацией соотношений (2) конечно-разностными операторами, аналогичными (15), (16). Сеточные функции компонент деформации ε_{11} в (3) соотносятся с узлами вспомогательной сетки $i \pm 1/2$, а сеточные функции изменения кривизн k_{11} аппроксимируются в узлах основной сетки i . Сеточные функции для продольной T и поперечной Q силы определяются в узлах вспомогательной сетки $i \pm 1/2$, а сеточные функции изгибающего момента M аппроксимируются в узлах основной сетки i . При вычислении усилий T и моментов

М в (10) конструкция разбивается на заданное число слоев L по толщине: $\Delta h = h/L$. Деформации ε_{11}^z и параметры λ_1^z в (4),(8),(9) вычисляются в середине l -го слоя, а напряжения σ_{11}^z полагаются постоянными в пределах толщины слоя Δh ; l - индекс слоя: $l=1,2,\dots,L$. Силовые факторы определяются далее численным интегрированием напряжений по толщине h .

Конечно-разностные аналоги уравнений равновесия (11), дискретизированные относительно узловой точки основной сетки i , записываются в виде

$$\frac{T_{i+1/2} - T_{i-1/2}}{\Delta s_i} + 0,5 \cdot (k_1)_i \cdot (Q_{i-1/2} + Q_{i+1/2}) + (q_u)_i = 0; \quad (17)$$

$$\frac{Q_{i+1/2} - Q_{i-1/2}}{\Delta s_i} - 0,5 \cdot (k_1)_i \cdot (T_{i-1/2} + T_{i+1/2}) + (q_w)_i = 0,$$

$$Q_{i-1/2} = \frac{M_i - M_{i-1}}{\Delta s_1}; \quad Q_{i+1/2} = \frac{M_{i+1} - M_i}{\Delta s_2}.$$

где $(q_u)_i, (q_w)_i$ - сеточные функции компонент поверхностной нагрузки. Поскольку для аппроксимации параметров НДС как в начальном, так и деформированном состоянии используются одностипные конечно-разностные аппроксимации, то при $(q_u)_i = (q_w)_i = 0$ недеформированное состояние, заданное соотношениями (15),(16), является точным решением сеточных уравнений (17), что подтверждает корректность разработанных дискретных аналогов исходных дифференциальных уравнений.

Для построения вычислительного алгоритма решения нелинейных сеточных уравнений (17) используется квазидинамическая форма метода установления [18-21]. Сеточные аналоги уравнений равновесия (17) заменяются на уравнения,

совпадающие по форме с уравнениями движения в вязкой среде. Не теряя общности, ограничимся случаем построения итерационного процесса при действии «следящей» нагрузки. Тогда для упрощения вычислительной процедуры целесообразно строить итерационный процесс относительно перемещений локального базиса u, w с последующим пересчетом в системе координат x, y (рис. 1). Конечно-разностные аналоги уравнений равновесия (17) можно представить в операторной форме как

$$[L_{\Delta s}(U_k)]_i + (q_k)_i = 0, \quad (18)$$

где $[L_{\Delta s}(U_k)]_i$ - соответствующие обобщенные конечно-разностные операторы для вектора U_k сеточных функций перемещений: $U_1=u_i, U_2=w_i; (q_1)_i=(q_u)_i, (q_2)_i=(q_w)_i; (k=1,2)$. Нестационарные уравнения метода установления записываются в виде

$$[L_{\Delta s}(U_k)]_i + (q_k)_i = (m \cdot \ddot{u}_k)_i + (\varepsilon_k \cdot \dot{u}_k)_i, \quad (19)$$

где ε_k - параметры удельной вязкости искусственной среды, ρ - плотность, $m=\rho h$.

Точкой обозначено дифференцирование по времени t . Аппроксимируя уравнения (19) на временной сетке с шагом $\Delta t = \text{const}$ с использованием разностных операторов второго порядка точности $O(\Delta t^2)$, получаем в явном виде выражения для скоростей

$[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}$ на временном слое $t^{(n+1/2)}$

$$[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} = \frac{[2m - \varepsilon_k \Delta t]_i}{[2m + \varepsilon_k \Delta t]_i} \cdot [\dot{u}_k]_i^{(n-1/2)} + \frac{2\Delta t \cdot [L_{\Delta s}(U_k) + q_k]_i^{(n)}}{[2m + \varepsilon_k \Delta t]_i}. \quad (20)$$

Далее путем интегрирования определяются сеточные функции обобщенных перемещений $[u_k]_i^{(n+1)}$ на временном слое $t^{(n+1)}$

$$[u_k]_i^{(n+1)} = [u_k]_i^{(n)} + \Delta t \cdot [\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}. \quad (21)$$

Сеточные функции перемещений x_i, y_i узловых точек в системе координат x, y определяются через сеточные функции компонент перемещений u_i, w_i по следующим формулам преобразования

$$x_i = (x_0)_i + \Delta x_i; \quad (22)$$

$$y_i = (y_0)_i + \Delta y_i,$$

где (рис. 1)

$$\Delta x_i = u_i \cdot \sin(\theta_0)_i - w_i \cdot \cos(\theta_0)_i; \quad (23)$$

$$\Delta y_i = u_i \cdot \cos(\theta_0)_i + w_i \cdot \sin(\theta_0)_i.$$

Таким образом, разностная аппроксимация нестационарных уравнений (19) приводит к итерационному процессу (20),(21) нахождения решения исходной стационарной задачи (18). Параметры итерационного процесса - удельные вязкости среды ε_k и шаг по времени Δt - определяются из условия ускорения сходимости и устойчивости разностной схемы [18,19]

$$\varepsilon_k = 2a_{\varepsilon,(k)} \sqrt{\frac{m\mu_{1,(k)}\mu_{2,(k)}}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}; \quad \Delta t_k = 2a_{t,(k)} \sqrt{\frac{m}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}, \quad (24)$$

где $\mu_{1,(k)}$ и $\mu_{2,(k)}$ - наименьшие и наибольшие собственные числа для соответствующих разностных операторов в уравнениях (18); $a_{\varepsilon,(k)}$ и $a_{t,(k)}$ - близкие к единице поправочные коэффициенты. Шаг по времени Δt для всей разностной схемы определяется из условия вида: $\Delta t = \min(\Delta t_k)$. Для нелинейных задач точное определение границ спектров разностных операторов связано со значительными математическими трудностями, поэтому $\mu_{1,(k)}$ и $\mu_{2,(k)}$ оцениваются в рамках линейных соотношений при соответствующих упрощениях в исходных уравнениях.

Оценочные формулы для $\mu_{1,(k)}$ и $\mu_{2,(k)}$ для конструкций из гиперупругих материалов, описываемых физическими соотношениями (8),(9), можно представить следующим образом:

- наименьшие собственные числа

$$\mu_{1,(1)} = 4 \frac{B_{11}}{\Delta s_0^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi \Delta s_0}{2 L_0}; \quad \mu_{1,(2)} = 16 \frac{D_{11}}{\Delta s_0^4} \sin^4 \frac{\pi \Delta s_0}{2 L_0} + k_{10}^2 B_{11}; \quad (25)$$

- наибольшие собственные числа

$$\mu_{2,(1)} = 4 \frac{B_{11}}{\Delta s_0^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi \Delta s_0}{2 L_0}; \quad \mu_{2,(2)} = 16 \frac{D_{11}}{\Delta s_0^4} \cos^4 \frac{\pi \Delta s_0}{2 L_0} + k_{10}^2 B_{11}, \quad (26)$$

где k_{10} - характерное значения кривизны. Параметры B_{11} и D_{11} определяются как:

- неогуковская модель

$$B_{11} = C_{11} \cdot F; \quad D_{11} = C_{11} \cdot J; \quad (5)$$

- модель Муни-Ривлина

$$B_{11} = (C_{21} + C_{22}) \cdot F; \quad D_{11} = (C_{21} + C_{22}) \cdot J, \quad (5)$$

где F и J - площадь и момент инерции поперечного сечения. При расчете реальных конструкций отношение $\mu_{2,(k)}/\mu_{1,(k)}$ обычно велико, поэтому метод установления, построенный в форме оптимального линейного итерационного процесса (20),(21), позволяет сократить число итераций примерно в $\sqrt{\mu_2/\mu_1}$ раз по сравнению с вариантом метода установления, когда в правых частях уравнений (19) учитывается только второе слагаемое [18].

Численные результаты и выводы

Разработанные математические модели и вычислительные алгоритмы были практически реализованы в виде прикладных программ на языке FORTRAN-IV для исследования процессов деформирования тонкостенных конструкций из гиперупругих материалов при произвольных перемещениях и деформациях. Рассматривалась арочная конструкция постоянной толщины h под действием статической локально распределенной внешней нагрузки «следающего» типа интенсивностью q_w . Недеформированный контур арки представляет собой часть дуги окружности с начальным радиусом кривизны R_{10} . Геометрические параметры арки: $R_{10}/h=200$, $x_c/R_{10}=1$, $y_c=0$, $\theta_L=150^\circ$, $\theta_q/\theta_L=0,16$ (рис. 5).

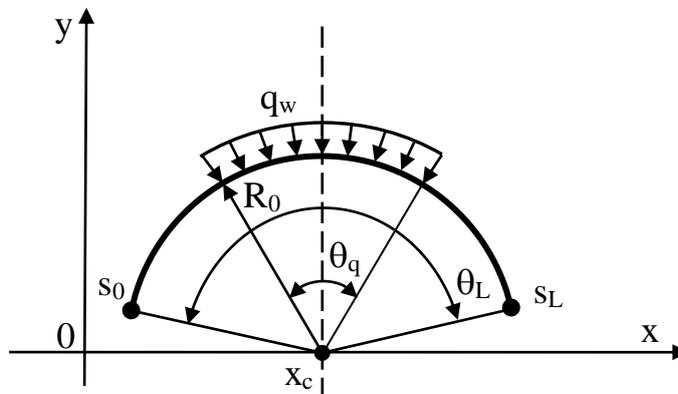


Рис. 5. Арочная конструкция, нагруженная локально распределенным поверхностным давлением

Поперечное сечение арки – прямоугольник шириной b и высотой h с соотношением сторон: $b/h=4$. Рассматривалось два варианта граничных условий на краях $s=s_0$ и $s=s_L$:

- вариант С-С: края $s=s_0$ и $s=s_L$ защемлены – граничные условия (12);

- вариант Н-Н: края $s=s_0$ и $s=s_L$ шарнирно закреплены – граничные условия (13).

Исследования проводились для гиперупругого материала со следующими характеристиками [14-16]:

- неогуковская модель: $C_{11}=191999,034$ Па;

- модель Муни-Ривлина: $C_{21}=210587,307$ Па; $C_{22}=1504,767$ Па.

При численном решении задачи число точек дискретизации принималось равным $N=47$ с числом слоев по толщине $L=7$. В силу симметрии задачи расчетная область представляла собой $1/2$ длины арки с угловым размером $\theta_L/2$.

Результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 6,8 (неогуковская модель), рис. 7,9 (модель Муни-Ривлина) и в Таблице.

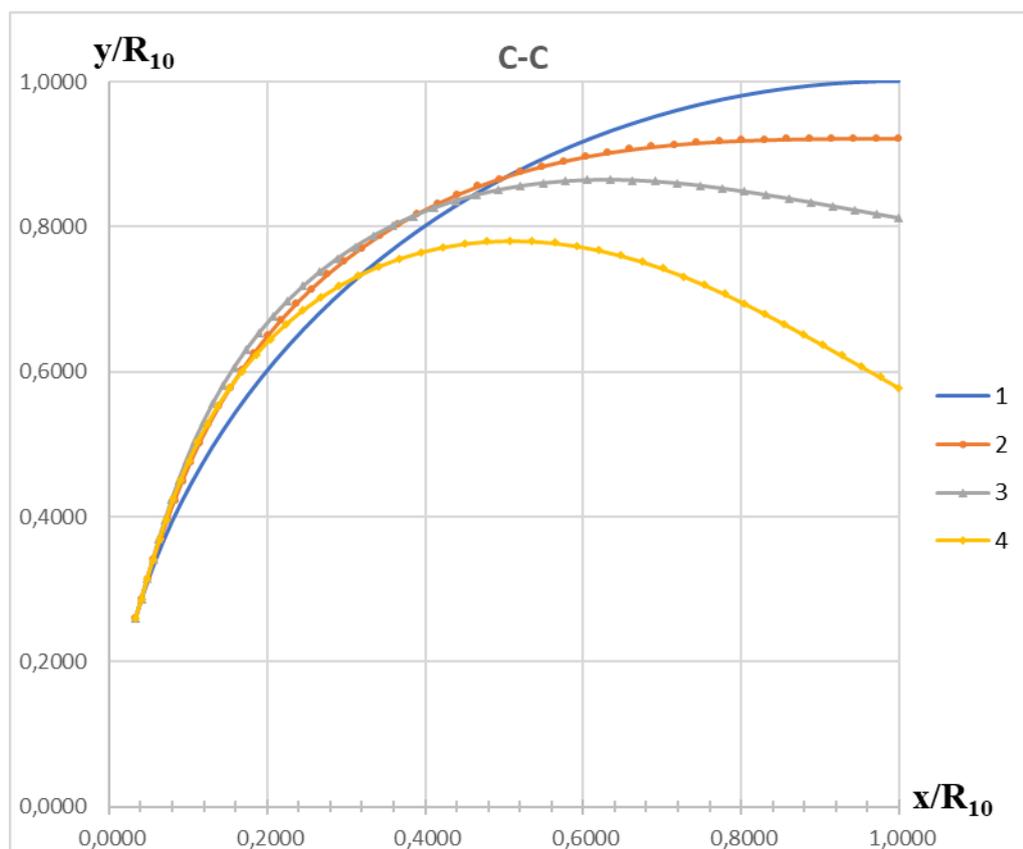


Рис. 6. Формы деформированной поверхности арки для неогуковской модели

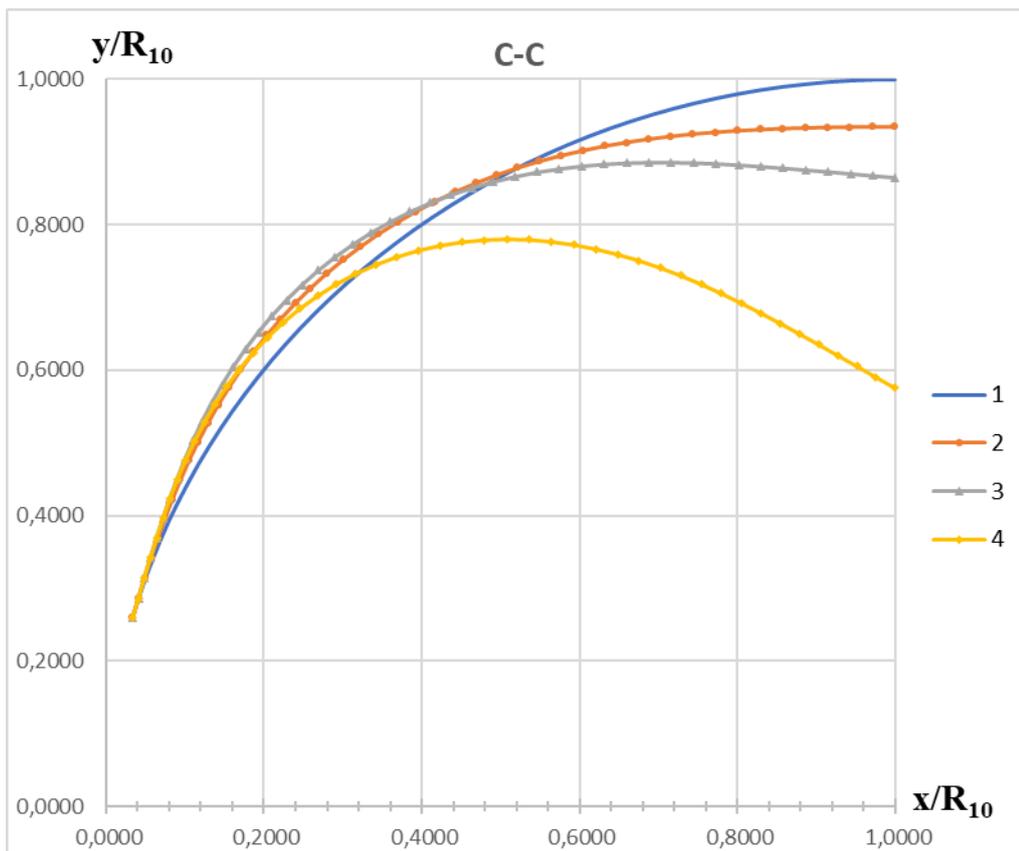


Рис. 7. Формы деформированной поверхности арки для модели Муни-Ривлина

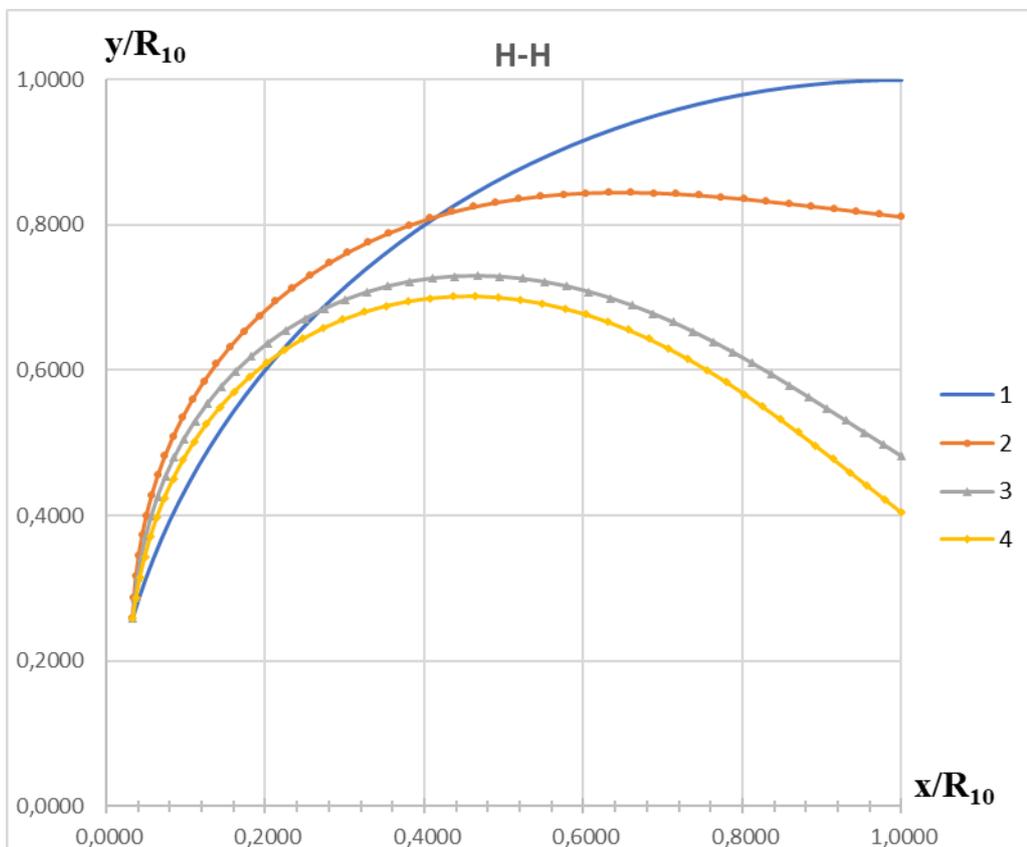


Рис. 8. Формы деформированной поверхности арки для неогуковской модели

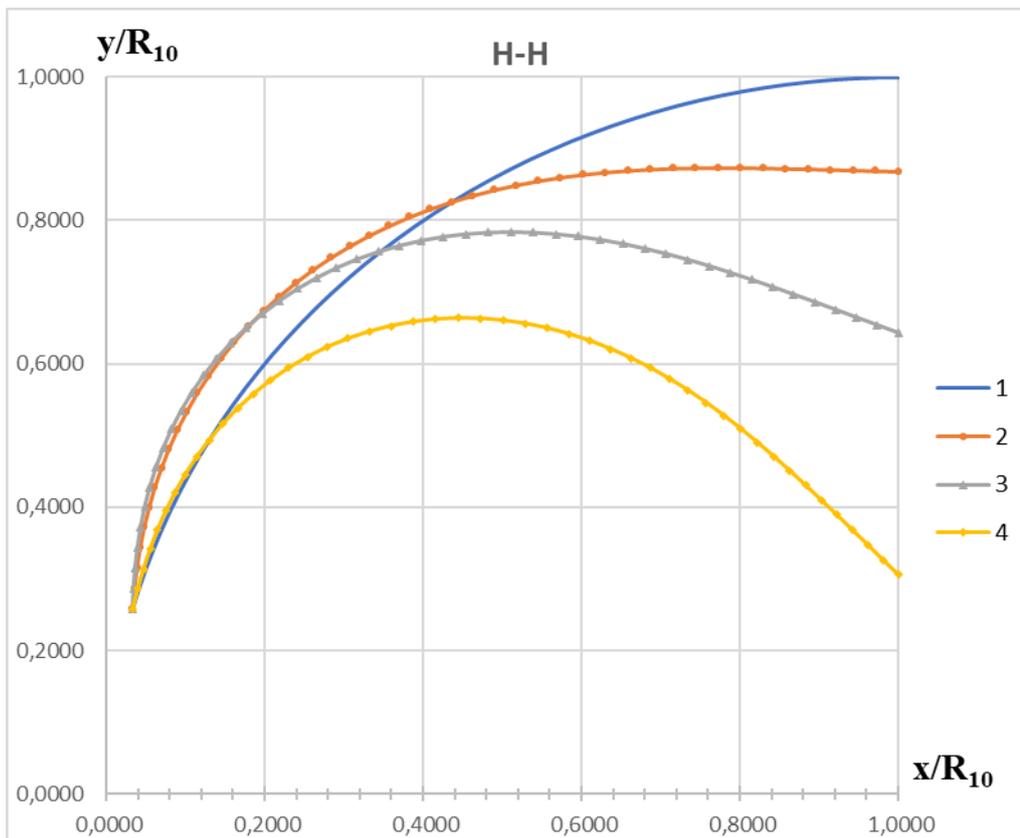


Рис. 9. Формы деформированной поверхности арки для модели Муни-Ривлина

Таблица

	Неогуковская модель		Модель Муни-Ривлина	
	С-С	Н-Н	С-С	Н-Н
q_{cr} [Па]	480700	412000	529700	461100
u_{max}/h	-6,88	-9,55	-6,88	-9,57
w_{max}/h	-84,46	-119,16	-84,97	-138,82
$\Delta\theta_{max}/\pi$	0,231	0,285	0,232	0,321
$(\epsilon_{11})_{max} \cdot 10^4$	-0,23	-0,17	-0,24	-0,17

В Таблице представлены значения критических нагрузок, при которых арка теряла устойчивость, для различных вариантов граничных условий и моделей гиперупругого материала.

Кривые 1 на рисунках соответствуют исходной (недеформированной) форме арки, а кривые 2 и 3 описывают деформированное состояние при значениях интенсивности внешней нагрузки $q_w=294300$ Па и $q_w=392400$ Па соответственно. Кривые 4 характеризуют деформированное состояние арки при нагрузках, близким к критическим, и составляющим 0,98 от соответствующих критических q_{cr} , представленных в Таблице. Результаты проведенных исследований показали, что если для случая защемленных краев (вариант С-С) параметры НДС и критические нагрузки как по неогуковской модели (однокомпонентная модель гиперупругого материала), так и по модели Муни-Ривлина (двухкомпонентная модель) незначительно отличаются друг от друга, то при шарнирном закреплении краев (вариант Н-Н) различия проявляются в большей степени. Для случая шарнирного закреплении максимальные перемещения и углы поворота составили: $\max(u,w)\approx 140\cdot h$, $\max(\Delta\theta)\approx 0,32\cdot\pi$, а для защемленных краев они не превышали: $\max(u,w)\approx 85\cdot h$, $\max(\Delta\theta)\approx 0,24\cdot\pi$.

Выводы

Разработаны адекватные математические модели и вычислительные алгоритмы, позволяющие исследовать напряженно-деформированное состояние тонкостенных конструкций из гиперупругих материалов в области больших перемещений и деформаций. Для построения итерационного процесса решения существенно нелинейной краевой задачи использована квазидинамическая форма метода установления. Рассмотрены особенности построения вычислительного алгоритма решения нелинейной краевой задачи для случая действия статической нагрузки

«следящего» типа. Получены оценочные соотношения для определения оптимальных значений параметров итерационного процесса. Разработанные математические модели и вычислительные алгоритмы реализованы в виде пакета программ, с помощью которого проведены исследования особенностей процессов деформирования локально нагруженной арочной конструкции из гиперупругого материала при использовании соотношений модели Муни-Ривлина и неогуковской модели для случаев защемленных и шарнирно закрепленных краев. Результаты проведенных исследований показали, что деформированное состояние тонкостенных конструкций из гиперупругих материалов даже в докритической области существенно отличается от исходной формы, что вызывает необходимость использования нелинейных математических моделей для определения параметров НДС и критических нагрузок при проектировании гибких конструкций из нелинейно упругих материалов.

Список источников

1. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. - М.: Наука, 1988. - 232 с.
2. Биргер И.А. Стержни, пластинки, оболочки. - М.: Физматлит, 1992. - 392 с.
3. Григолюк Э.И., Мамай В.И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. - М.: Наука. Физматлит, 1997. - 272 с.

4. Коровайцев А.В. Расчет упругих оболочек вращения при больших осесимметричных перемещениях. Расчет на прочность, жесткость, устойчивость и колебания. – М.: Машиностроение, 1983. С. 290-295.
5. Evkin A.Y., Kalamkarov A.L. Analysis of large deflection equilibrium states of composite shells of revolution. Part.1. General model and singular perturbation analysis // International Journal of Solids and Structures, 2001, vol. 38, no. 50-51, pp. 8961-8974. DOI:[10.1016/S0020-7683\(01\)00184-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00184-6)
6. Evkin A.Y., Kalamkarov A.L. Analysis of large deflection equilibrium states of composite shells of revolution. Part. 2. Applications and numerical results // International Journal of Solids and Structures, 2001, vol. 38, no. 50-51, pp. 8975-8987. DOI:[10.1016/S0020-7683\(01\)00185-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00185-8)
7. Коровайцева Е.А. Смешанные уравнения теории мягких оболочек // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109235>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-1](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1)
8. Коровайцева Е.А. О некоторых особенностях решения задач статики мягких оболочек вращения при больших деформациях // Труды МАИ. 2020. № 114. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=118881>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-04](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-04)
9. Дмитриев В.Г. Численный анализ особенностей упруго-пластического деформирования неоднородных оболочек вращения в области больших перемещений и углов поворота нормали // Ученые записки ЦАГИ. 2023. № 1. С. 76-88.

10. Dmitriev V.G., Danilin A.N., Popova A.R., Pshenichnova N.V. Numerical Analysis of Deformation Characteristics of Elastic Inhomogeneous Rotational Shells at Arbitrary Displacements and Rotation Angles // *Computation*, 2022, no. 10 (10), pp. 184. DOI:[10.3390/computation10100184](https://doi.org/10.3390/computation10100184)
11. Коровайцева Е.А. Об использовании метода автоматической сегментации в решении нелинейных начально-краевых задач механики мягкооболочечных конструкций // *Проблемы прочности и пластичности*. 2021. Т. 83. № 4. С. 5-13. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2021-83-4-415-423>
12. Адамов А.А. Об одном преобразовании соотношений напряжение-деформация для изотропных гиперупругих несжимаемых материалов при конечных деформациях // *Вестник Пермского государственного технического университета. Математическое моделирование систем и процессов*. 2001. № 9. С. 6-9.
13. Бондарь В.Д. О конечных плоских деформациях несжимаемого упругого материала // *Прикладная механика и техническая физика*. 1990. № 2. С. 155-164.
14. Treolar L.R.G. *The physics of rubber elasticity*, Oxford, Clarendon Press, 1975, 310 p.
15. Rodríguez–Martínez J.A., Fernández–Sáez J., Zaera R. The role of constitutive relation in the stability of hyper-elastic spherical membranes subjected to dynamic inflation // *International Journal of Engineering Science*, 2015, vol. 93, pp. 31–45. DOI: [10.1016/j.ijengsci.2015.04.004](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.04.004)
16. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1948, vol. 241, pp. 379-397. DOI: [10.1098/rsta.1948.0024](https://doi.org/10.1098/rsta.1948.0024)

17. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989. - 616 с.
18. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Физматлит. Лаборатория Базовых Знаний, 2001. - 632 с.
19. Dmitriev V. Applied Mathematic Technologies in Nonlinear Mechanics of Thin-Walled Constructions. Chapter 4. Book Mathematics Applied to Engineering and Management Sciences. Edited by Mangey Ram and S. B. Singh. CRC Press Taylor & Francis Group. BocaRaton, 2019, pp. 71-116. DOI: [10.1201/9781351123303-4](https://doi.org/10.1201/9781351123303-4)
20. Дмитриев В.Г., Преображенский И.Н. Деформирование гибких оболочек с вырезами // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1988. № 1. С. 177 - 184.
21. Turvey G.J., Der Avanessian N.G.V. Elastic large deflection of circular plates using graded finite-differences // Computers & Structures, 1986, vol. 23, no. 6, pp. 763-774. DOI: [10.1016/0045-7949\(86\)90244-0](https://doi.org/10.1016/0045-7949(86)90244-0)

References

1. Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. *Problemy nelineinogo deformirovaniya: Metod prodolzheniya resheniya po parametru v nelineinykh zadachakh mekhaniki tverdogo deformiruemogo tela* (Problems of Nonlinear Deforming: Parameter Continuation Method in Nonlinear Problems of Mechanics of Deformed Solid), Moscow, Nauka, 1988, 232 p.
2. Birger I.A. *Sterzhni, plastinki, obolochki* (Bars, plates, shells), Moscow, Fizmatlit, 1992, 392 p.
3. Grigolyuk E.I., Mamai V.I. *Nelineinoe deformirovanie tonkostennykh konstruksii* (Nonlinear deformations of thin-walled constructions), Moscow, Nauka. Fizmatlit, 1997, 272 p.

4. Korovaitsev A.V. *Raschet uprugikh obolochek vrashcheniya pri bol'shikh osesimmetrichnykh peremeshcheniyakh. Raschet na prochnost', zhestkost', ustoichivost' i kolebaniya* (Calculation of elastic shells of rotation at large axisymmetric displacements), Moscow, Mashinostroenie, 1983, pp. 290-295.
5. Evkin A.Y., Kalamkarov A.L. Analysis of large deflection equilibrium states of composite shells of revolution. Part.1. General model and singular perturbation analysis, *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol. 38, no. 50-51, pp. 8961-8974. DOI: [10.1016/S0020-7683\(01\)00184-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00184-6)
6. Evkin A.Y., Kalamkarov A.L. Analysis of large deflection equilibrium states of composite shells of revolution. Part. 2. Applications and numerical results, *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol. 38, no. 50-51, pp. 8975-8987. DOI: [10.1016/S0020-7683\(01\)00185-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00185-8)
7. Korovaitseva E.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109235>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-1](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1)
8. Korovaitseva E.A. *Trudy MAI*, 2020, no. 114. URL: <http://www.trudymai.ru/eng/published.php?ID=118881>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-04](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-04)
9. Dmitriev V.G. *Uchenye zapiski TsAGI*, 2023, no. 1, pp. 76-88.
10. Dmitriev V.G., Danilin A.N., Popova A.R., Pshenichnova N.V. Numerical Analysis of Deformation Characteristics of Elastic Inhomogeneous Rotational Shells at Arbitrary Displacements and Rotation Angles, *Computation*, 2022, no. 10 (10), pp. 184. DOI: [10.3390/computation10100184](https://doi.org/10.3390/computation10100184)

11. Korovaitseva E.A. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2021, vol. 83, no. 4, pp. 5-13.
DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2021-83-4-415-423>
12. Adamov A.A. *Vestnik Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*, 2001, no. 9, pp. 6-9.
13. Bondar' V.D. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1990, no. 2, pp. 155-164.
14. Treolar L.R.G. *The physics of rubber elasticity*, Oxford, Clarendon Press, 1975, 310 p.
15. Rodríguez–Martínez J.A., Fernández–Sáez J., Zaera R. The role of constitutive relation in the stability of hyper-elastic spherical membranes subjected to dynamic inflation, *International Journal of Engineering Science*, 2015, vol. 93, pp. 31–45. DOI: [10.1016/j.ijengsci.2015.04.004](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.04.004)
16. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1948, vol. 241, pp. 379-397. DOI: [10.1098/rsta.1948.0024](https://doi.org/10.1098/rsta.1948.0024)
17. Samarskii A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* (Theory of differences schemes), Moscow, Nauka, 1989, 616 p.
18. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennyye metody* (Numerical methods), Moscow, Fizmatlit. Laboratoriya Bazovykh Znaniy, 2001, 632 p.
19. Dmitriev V. Applied Mathematic Technologies in Nonlinear Mechanics of Thin-Walled Constructions. Chapter 4. *Book Mathematics Applied to Engineering and Management Sciences*. Edited by Mangey Ram and S. B. Singh. CRC Press Taylor & Francis Group. BocaRaton, 2019, pp. 71-116. DOI: [10.1201/9781351123303-4](https://doi.org/10.1201/9781351123303-4)

20. Dmitriev V.G., Preobrazhenskii I.N. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1988, no. 1, pp. 177 - 184.

21. Turvey G.J., Der Avanessian N.G.V. Elastic large deflection of circular plates using graded finite-differences, *Somruters & Structures*, 1986, vol. 23, no. 6, pp. 763-774. DOI: [10.1016/0045-7949\(86\)90244-0](https://doi.org/10.1016/0045-7949(86)90244-0)

Статья поступила в редакцию 11.06.2023

Одобрена после рецензирования 19.06.2023

Принята к публикации 28.08.2023

The article was submitted on 11.06.2023; approved after reviewing on 19.06.2023; accepted for publication on 28.08.2023