Тепловые процессы в технике. 2024. Т. 16. № 8. С. 364–379
Thermal processes in engineering, 2024, vol. 16, no. 8, pp. 364–379

Научная статья
УДК 539.3
URL: https://tptmai.ru/publications.php?ID=183183
EDN: https://www.elibrary.ru/XKPZSK

Математические модели динамической термовязкоупругости

Э.М. Карташов[1,2]✉, С.С. Крылов[2]

[1]*МИРЭА-Российский технологический университет (Институт тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова), Москва, Россия*
[2]*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Россия*
✉*Professor.kartashov@gmail.com*

Аннотация. В статье дается развитие теоретических основ нового научного направления – динамической термовязкоупругости в условиях локально-неравновесного процесса переноса теплоты. Динамические модели, описывающие тепловой удар, привлекли внимание исследователей особенно в последние десятилетия в связи с созданием мощных излучателей энергии и их использованием в технологических операциях. При этом большинство исследований термической реакции твердых тел при резком нагреве (или охлаждении) выполнены для технически важных материалов, подчиняющихся закону Гука. Однако, при повышенных температурах и более высоком уровне напряжений понятие об упругом теле становится недостаточным: почти у всех материалов обнаруживается более или менее отчетливо явление вязкого течения. Реальное тело начинает проявлять упругие и вязкие свойства и становится вязкоупругим. Возникает достаточно сложная проблема: развитие динамической (квазистатической) термовязкоупругости в рамках соответствующих математических моделей классической прикладной термомеханики и математики. Цель работы – рассмотреть открытую проблему теории теплового удара в терминах обобщенной модели термовязкоупругости в условиях локально-неравновесного процесса распространении теплоты в твердых телах. Рассматриваются три вида интенсивного нагрева: температурный, тепловой, нагрев средой. В равной мере могут быть рассмотрены режимы интенсивного охлаждения. Ставится задача: разработать модельные представления динамической (квазистатической) термовязкоупругости, допускающие точные аналитические решения соответствующих краевых задач на их основе. Указанное направление в научной литературе практически отсутствует.

В результате развиты модельные представления термической реакции вязкоупругих тел с использованием предложенного нового уравнения совместности в перемещениях.

Последнее позволило предложить новые интегро-дифференциальные соотношения на базе линейных реологических моделей для среды Максвелла и среды Кельвина, включающие одновременно динамические и квазистатические модели для вязкоупругих и упругих сред, обобщающие результаты предыдущих исследований. Предложенные определяющие соотношения новой формы применимы для описания термической реакции квазиупругих тел канонической формы одновременно в трех системах координат с определяющим систему параметром, что позволяет выявить влияние топологии области на величину соответствующих температурных напряжений.

© Карташов Э.М., Крылов С.С., 2024

Ключевые слова: тепловой удар; термовязкоупругость; обобщенные динамические модели; аналитические решения; термические напряжения

Для цитирования. Карташов Э.М., Крылов С.С. Математические модели динамической термовязкоупругости // Тепловые процессы в технике. 2024. Т. 16. № 8. С. 364–379. URL: https://tpt mai.ru/publications.php?ID=183183

Original article

Mathematical models of dynamic thermoviscoelasticity

E.M. Kartashov[1,2]✉, **S.S. Krylov**[2]

[1]*MIREA-Russian Technological University (Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies), Moscow, Russia*
[2]*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*
✉*Professor.kartashov@gmail.com*

Abstract. The article provides the development of theoretical foundations of a new scientific direction – dynamic thermoviscoelasticity under conditions of locally nonequilibrium heat transfer process. Dynamic models describing thermal shock have attracted the attention of researchers especially in recent decades in connection with the creation of powerful energy emitters and their use in technological operations. At the same time, most studies of the thermal reaction of solids during sudden heating (or cooling) have been performed for technically important materials that obey Hooke's law. However, at elevated temperatures and higher stress levels, the concept of an elastic body becomes insufficient: almost all materials exhibit a more or less distinct phenomenon of viscous flow. A real body begins to exhibit elastic and viscous properties and becomes viscoelastic. A rather complex problem arises: the development of dynamic (quasi-static) thermoviscoelasticity within the framework of the corresponding mathematical models of classical applied thermomechanics and mathematics. The purpose of the work is to consider an open problem of the theory of thermal shock in terms of a generalized model of thermoviscoelasticity under conditions of a locally nonequilibrium process of heat propagation in solids. Three types of intense heating are considered: temperature, thermal, heating by the environment. Intensive cooling modes can be considered equally. The task is to develop model representations of dynamic (quasi-static) thermoviscoelasticity that allow accurate analytical solutions to the corresponding boundary value problems on their basis. This direction is practically absent in the scientific literature. As a result, model representations of the thermal response of viscoelastic bodies were developed using the proposed new equation of compatibility in displacements.

The latter allowed us to propose new integro-differential relations based on linear rheological models for the Maxwell medium and the Kelvin medium, including both dynamic and quasi-static models for viscoelastic and elastic media, generalizing the results of previous studies. The proposed constitutive relations of the new form are applicable to describe the thermal response of quasi-elastic bodies of canonical shape simultaneously in three coordinate systems with a parameter defining the system, which allows us to identify the influence of the topology of the domain on the magnitude of the corresponding temperature stresses.

Keywords: thermal shock; thermoviscoelasticity; generalized dynamic models; analytical solutions; thermal stresses

For citation. Kartashov E.M., Krylov S.S. Mathematical models of dynamic thermoviscoelasticity. *Thermal processes in engineering*. 2024, vol. 16, no. 8, pp. 364–379. (In Russ.). URL: https://tpt mai.ru/publications.php?ID=183183

Введение

Статья продолжает исследования в [1, 2] по развитию обобщенных локально-равновесных и локально-неравновесных процессов переноса теплоты. В данной статье изучается открытая проблема термической реакции вязкоупругих тел на нагрев массивного тела, ограниченного изнутри либо плоской поверхностью (упругое полупространство в декартовой системе координат), либо цилиндрической поверхностью (упругое пространство в цилиндрической системе координат с внутренней цилиндрической полостью), либо сферической поверхностью (упругое пространство в сферической системе координат с внутренней сферической полостью). Развивается новый подход на основе интегро-дифференциальных соотношений, включающих одновременно динамические и квазистатические модели для вязкоупругих и упругих сред, обобщающие результаты предыдущих исследований. Новые модельные представления основаны на линейных реологических моделях Максвелла и Кельвина, что позволяет отчетливо проследить влияние вязкого течения в упругой среде на температурные упругие напряжения. Приведенные результаты практически открывают новое научное направление в прикладной термомеханике и математике, а именно: исследование термической реакции вязкоупругих тел на интенсивный нагрев (охлаждение) в рамках динамических и квазистатических моделей. Исследования проводятся в условиях локально-неравновесного процесс переноса теплоты [3–10]. Принимаются во внимание два обстоятельства. При высокоинтенсивном нагреве твердых тел, создающих тепловой удар, тепловые потоки $\bar{q}(M,t)$ в области $\Omega = \{M(x,y,z) \in D, t > 0\}$, описывающих реальное твердое тело, отстают от градиента температуры $T(M,t)$ на величину, пропорциональную времени релаксации τ_r, связанную со скоростью распространения теплоты v_T соотношением $\mathrm{v}_T = \sqrt{a/\tau_r}$ (a – температуропроводность)

$$\bar{q}(M,t) = -\lambda_T\, gradT(M,t) - \tau_r \frac{\partial \bar{q}(M,t)}{\partial t}, \quad (1)$$

где λ_T – теплопроводность. Уравнение энергии для изотропных твердых тел $c\rho\partial T(M,t)/\partial t = div\,\bar{q}(M,t)$ приводит к уравнению переноса гиперболического типа

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a\Delta T(M,t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial t^2}, \quad (2)$$

содержащего не только первую, но и вторую производную от температуры по времени. Вследствие чего уравнение (2) описывает волновые процессы, в данном случае волновой теплоперенос. Второе обстоятельство состоит в том, что вопросы корректной постановки краевых задач для уравнения (2) рассмотрены сравнительно недавно [11], и ряд вопросов, связанных с тепловыми задачами для уравнения (2) требуют своего дальнейшего изучения.

Определяющие соотношения динамической термоупругости

Пусть D – конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства $M(x,y,z)$, описывающая реальное твердое тело и находящаяся в условиях термонапряженного состояния; S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D; $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – внешняя нормаль к S (вектор, непрерывный на S); $T(M,t)$ – распределение температуры в области D при $t > 0$; T_0 – начальная температура, при которой область находится в недеформированном и ненапряженном состоянии. Пусть $\sigma_{ij}(M,t), \varepsilon_{ij}(M,t), U_i(M,t)$ – соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям (несвязанной) термоупругости (в индексных обозначениях) [12]:

$$\sigma_{ij,j}(M,t) + F_i(M,t) = \rho^* U_i(M,t), \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij}(M,t) = (1/2)\left[U_{i,j}(M,t) + U_{j,i}(M,t)\right], \quad (4)$$

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}(M,t) = 2\mu\varepsilon_{ij}(M,t) + \\ +\left[\lambda\varepsilon_{ii}(M,t) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T(M,t) - T_0)\right]\delta_{ij}, \quad (5) \\ M \in D, t > 0,\end{gathered}$$

где ρ^* – плотность, λ, μ – изотермические коэффициенты Ламе, G – модуль сдвига,

$\lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$, ν – коэффициент Пуассона, при этом $2G(1+\nu) = E$, E – модуль Юнга, α_T – коэффициент линейного теплового расширения, δ_{ij} – символ Кронекера, $F_i(M,t)$ – компоненты обьемной силы; $\bar{e}(M,t) = U_{i,i}(M,t) =$ $= \varepsilon_{ii}(M,t)$ – обьемная деформация. связанная с суммой нормальных напряжений $\bar{\sigma}(M,t) =$ $= \sigma_{nn}(M,t)(n = x, y, z)$ соотношением

$$\bar{e}(M,t) = \frac{1-2\nu}{E}\bar{\sigma}(M,t) + 3\alpha_T\left[T(M,t) - T_0\right]. \quad (6)$$

Термонапряженное состояние области *D* при $t > 0$ может возникать при различных режимах теплового воздействия на границу *S*, создающих термический удар. К ним можно отнести наиболее распространенные на практике случаи:

– температурный нагрев (охлаждение)

$$\begin{gathered} T(M,t) = T_c(t), M \in S, t > 0 \\ (T_c(t) > T_0, t \geq 0, \text{ либо } T_c(t) < T_0 . t \geq 0); \end{gathered} \quad (7)$$

– тепловой нагрев (охлаждение)

$$\begin{gathered} \frac{1}{\tau_r}\int_0^t \frac{\partial T(M,\tau)}{\partial n}\Big|_{M\in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right)d\tau = \\ = (-)\frac{1}{\lambda_T} q(t) S_+(t), t \geq 0; \end{gathered} \quad (8)$$

– нагрев (охлаждение) средой

$$\begin{gathered} \frac{1}{\tau_r}\int_0^t \frac{\partial T(M,\tau)}{\partial n}\Big|_{M\in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right)d\tau = \\ = h\left\{T(M,t)\big|_{M\in S} - \left[T_0 + S_+(t)(T_c - T_0)\right]\right\}, \\ t \geq 0, \ (T_c > T_0 \text{ либо } T_c < T_0). \end{gathered} \quad (9)$$

а также от действия внутренних источников теплоты. Здесь λ_T – теплопроводность материала; $q_0(t)$ – величина теплового потока; *h* – относительный коэффициент теплообмена; T_c – температура окружающей среды;

$$S_+(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Входящая в (5) температурная функция *T*(*M*, *t*) находится из решения краевой задачи нестационарной теплопроводности для уравнения (2) с граничными условиям (7)–(9). Соотношения (3)–(6) – общие соотношения динамической термоупругости, связывающие напряжения, деформации, перемещения и температуру. При переходе к конкретным случаям выражения (3)–(6) необходимо преобразовать в так называемые уравнения совместности либо в напряжениях, либо в перемещениях и для этих уравнений записывать соответствующую задачу динамической термоупругости. Для рассматриваемого в статье случая необходимо учесть влияние кривизны граничной поверхности твердого тела на температуру и соответствующие температурные напряжения. Здесь более удобной математической моделью является уравнение «совместности» в перемещениях, одновременно охватывающее цилиндрическую, сферическую и декартовую системы координат. Подставляя правые части (5) в (3) (без обьемных сил) и используя далее (4) и (6) после ряда длительных преобразований приходим к трем уравнениям

$$\begin{gathered} \Delta U_i(M.t) + \frac{1}{(1-2\nu)}\frac{\partial \bar{e}(M,t)}{\partial i} - \\ -(\rho^*/G)\frac{\partial^2 U_i(M,t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{2(1+\nu)\alpha_T}{(1-2\nu)}\frac{\partial\left[T(M,t) - T_0\right]}{\partial i}, (i = x, y, z), \end{gathered} \quad (11)$$

которое формально можно записать в виде векторного равенства

$$\begin{gathered} \Delta\bar{U}(M,t) + \frac{1}{(1-2\nu)} grad\left[div\bar{U}(M,t)\right] - \\ -(\rho^*/G)\frac{\partial^2 \bar{U}(M,t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)}\alpha_T grad\left[T(M,t) - T_0\right], \\ M \in D, t > 0. \end{gathered} \quad (12)$$

Заметим, что при обратном переходе необходимо приравнять соответствующие компоненты в векторной записи левой и правой частей в (12).

Случаи интенсивного нагрева (охлаждения) поверхности области (реального тела) представляют значительный практический интерес, например, в случаях: поверхностный диэлектрический нагрев; расчет термических напряжений в стенках цилиндров паровых машин и двигателей внутреннего сгорания; в теории автоматических систем регулировки температуры; при исследовании области звуковых частот металлов при высоких или очень низких температурах поверхности; многочисленные случаи резкой смены температуры поверхности космических авиационных объектов; в машиностроительной отрасли при работе на различных экспериментальных установках для определения температурного состояния образцов и др. [12–14]. Представляет интерес охватить одновременно все три случая во всех трех системах координат в рамках обобщенной модели, что может представлять несомненную практическую значимость в теории теплового удара.

Для удобства записи обобщенной модели введем обобщенную координату μ: $\mu = z$ в декартовых координатах, $\mu = \rho$ – в сферических, $\mu = r$ – в цилиндрических. При этом $U_{\mu} = U_{\mu}(\mu,t)$, $\sigma_{\mu\mu} = \sigma_{\mu\mu}(\mu,t)$, $T_i = T_i(\mu,t)$. Основные соотношения для упругого тела теперь можно записать следующим образом в обобщенном виде:

$$\frac{\partial^2 U_{\mu}}{\partial \mu^2} + \frac{2m+1}{\mu}\left(\frac{\partial U_{\mu}}{\partial \mu} - \frac{1}{\mu}U_{\mu}\right) - \frac{1}{\upsilon_p^2}\frac{\partial^2 U_{\mu}}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T \frac{\partial}{\partial \mu}\left[T_i(\mu,t) - T_0\right], \quad (13)$$

$$\mu > R, t > 0,$$

$$\sigma_{\mu\mu}(\mu,t) = \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\left\{\frac{\partial U_{\mu}}{\partial \mu} + \frac{(2m+1)\nu}{(1-\nu)}\frac{1}{\mu}U_{\mu} - \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T\left[T_i(\mu,t) - T_0\right]\right\}, \mu > R, t > 0, \quad (14)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial T_i(\mu,t)}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 T_i}{\partial \mu^2} + \dfrac{2m+1}{\mu}\dfrac{\partial T_i}{\partial \mu}\right) - \\
-\tau_p\dfrac{\partial^2 T_i}{\partial t^2}, \mu > R, t > 0, \\
T_i(\mu,t)\Big|_{t=0} = T_0, \dfrac{\partial T_i}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \mu \ge R, t \ge 0, \\
T_1(\mu,t)\Big|_{\mu=R} = T_c, t > 0, \\
\dfrac{1}{\tau_p}\displaystyle\int_0^t \dfrac{\partial T_2(\mu,\tau)}{\partial \mu}\Big|_{\mu=R} \exp\left[-\dfrac{(t-\tau)}{\tau_p}\right]d\tau = \\
= -\dfrac{1}{\lambda_T}q_0, t > 0, \\
\dfrac{1}{\tau_p}\displaystyle\int_0^t \dfrac{\partial T_3(\mu,\tau)}{\partial \mu}\Big|_{\mu=R} \exp\left[-\dfrac{(t-\tau)}{\tau_p}\right]d\tau = \\
= h\left[T_3(\mu,t)\Big|_{\mu=R} - T_c)\right], t > 0, \\
\left|T_i(\mu,t)\right| < \infty, \mu \ge R, t \ge 0.
\end{array}\right\} (15)$$

Здесь

$$\mu = \begin{cases} z, z > R, m = -1/2 - \text{декартовы координаты}, \\ \rho, \rho > R, m = 1/2 - \text{сферические координаты}, \\ r, r > R, m = 0 - \text{цилиндрические координаты}. \end{cases} \quad (16)$$

К полной постановке динамической задачи для перемещений в упругой области следует добавить начальные и граничные условия (в последнем случае граница области предполагается свободной от напряжений):

$$U_{\mu}(\mu,t)\Big|_{t=0}, \frac{\partial U_{\mu}(\mu,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \mu \ge R, \quad (17)$$

$$\left[\frac{\partial U_{\mu}(\mu,t)}{\partial \mu} + \frac{(2m+1)\nu}{(1-\nu)}\frac{1}{\mu}U_{\mu}(\mu,t)\right]\Big|_{\mu=R} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T\left[T_i(\mu,t) - T_0\right]_{\mu=R}, t > 0, \quad (18)$$

$$\left|U_{\mu}(\mu,t); \sigma_{\mu\mu}(\mu,t)\right| < \infty, \mu \ge R, t \ge 0. \quad (19)$$

Зависимости между напряжениями и деформациями в реологических моделях

Многочисленные исследования термической реакции твердых тел выполнены, в основном, для большинства технически важных материалов, подчиняющихся закону Гука. В соответствующих математических моделях в терминах динамических, квазистатических или статических задач термоупругости материал считается однородным и изотропным, термомеханические коэффициенты являются постоянными величинами, не зависящими от температуры, и рассматриваемые разности температур не слишком велики, то есть температура не превышает некоторого предельного значения, зависящего от материала, и напряжения не достигают границы текучести. Считается, что при относительно низком уровне температур и напряжений поведение широкого класса материалов находится в хорошем соответствии с теорией термоупругости, изложенной выше.

При повышенных температурах и более высоком уровне напряжений понятие об упругом теле становится недостаточным: почти у всех материалов обнаруживается более или менее отчетливо выраженное явление вязкого течения. В этом случае поведение реального тела принято называть вязкоупругим, так как тело одновременно проявляет упругие и вязкие свойства. Чтобы математически описать неупругое поведение тела при заданных условиях нагрева и напряжения, необходимо соответствующим образом обобщить соотношения между напряжениями и деформациями (3)–(4).

Эти обобщения ведутся по разным направлениям [4], хотя четко разграничить их не всегда возможно. Наиболее общие подходы к проблеме основываются на представлениях и методах физики твердого тела. Чтобы получить сведения о механических характеристиках материала, рассматривается его микроструктура (кристаллическая, поликристаллическая, аморфная). Другой подход состоит в том, что, отвлекаясь от особенностей микроструктуры материала, рассматривать тело как сплошное и искать форму соотношений между напряжениями и деформациями, исходя из общих принципов механики и термодинамики сплошных сред. Наконец, наиболее формальный способ анализа заключается в том, что выбираются некоторые простые формы соотношений между напряжениями, описывающие такие типы неупругих явлений, как ползучесть, релаксация напряжений, пластическое течение, упрочнение. Реологические модели, которые учитывают одновременно протекающие процессы упругого деформирования и вязкого течения, благодаря достаточной простоте принятых соотношений между напряжениями и деформациями дают возможность математически проанализировать, как будут вести себя реальные тела в различных условиях нагружения. В этом отношении учет реологиеских эффектов имеет большое значение при проектировании элементов конструкций, подвергающихся воздействию высоких температур.

Выпишем все необходимые соотношения для реологических законов, связывающих напряжения $\sigma_{ij}(M,t)$ и деформации $\varepsilon_{ij}(M,t)(i.j=x,y,z)$.

Для этого введем девиатор напряжений $s_{ij}(M,t)$

и девиатор деформаций $e_{ij}(M,t)$ соотношениями

$$s_{ij}(M,t)=\sigma_{ij}(M,t)-\sigma^{*}(M,t)\delta_{ij}; \qquad (20)$$

$$e_{ij}(M,t)=\varepsilon_{ij}(M,t)-\varepsilon^{*}(M,t)\delta_{ij}, \qquad (21)$$

где σ^{*} и ε^{*} – среднее нормальное напряжение и среднее удлинение:

$$\begin{gathered}\sigma^{*}(M,t)=\frac{1}{3}\sum_{i}\sigma_{ii}(M,t);\\ \varepsilon^{*}(M,t)=\frac{1}{3}\sum_{i}\varepsilon_{ii}(M,t).\end{gathered} \qquad (22)$$

При помощи этих девиаторов соотношения (3)–(4) можно записать в виде:

$$s_{ij}(M,t)=2Ge_{ij}(M,t) \qquad (23)$$

$$\begin{gathered}\varepsilon^{*}(M,t)=\\ =\frac{1-2\nu}{2G(1+\nu)}\sigma^{*}(M,t)+\alpha_{T}\left[T(M,t)-T_{0}\right].\end{gathered} \qquad (24)$$

Эти равенства описывают поведение линейной упругой среды. Если к соотношениям закона Гука добавить слагаемое, выражающее ньютонов закон вязкости (последовательное или параллельное соединение пружины и вязкого сопротивления, то полученные зависимости будут приводить к среде Максвелла

$$\frac{\partial s_{ij}(M,t)}{\partial t}+\frac{1}{\tau_p}s_{ij}(M,t)=2G\frac{\partial e_{ij}(M,t)}{\partial t} \qquad (25)$$

и к среде Кельвина

$$s_{ij}(M,t)=2G\left[e_{ij}(M,t)+\tau_p\frac{\partial e_{ij}(M,t)}{\partial t}\right]. \qquad (26)$$

При этом соотношение (24) остается без изменения. Последнее означает, что при гидростатическом сжатии или растяжении тело ведет себя как вполне упругое. Постоянная $\tau_p=\eta/G$ носит название время релаксации в (25) и время запаздывания в (26), η – вязкость материала. Разумеется, поведение материалов на практике сложнее случаев (25)–(26), однако, если основываться на применении простейших моделей, то для металлов при высоких температурах и для полимеров, сочетающих процессы упругого деформирования и вязкого течения можно использовать схему Максвелла, а для материалов с внутренним трением при изучении затухающих колебаний – схему Кельвина.

Заметим, что при $\tau_p=0(\eta=\infty)$ соотношение (25) дает среду Гука; при $\tau_p=0(\eta=0)$ в (26) закон Кельвина сводится к зависимости (23).

При тепловом ударе (мгновенное нагревание или охлаждение граничной поверхности) напряжения скачкообразно изменяются на величину $\Delta=\left|E\alpha_T\left(T_C-T_0\right)\right|$. [13]. В упругой среде эти напряжения остаются неизменными, а в среде Максвелла начинается вязкое течение, вследствие которого напряжение непрерывно убывает, асимптоматически приближаясь к нулевому значению. В среде Кельвина, напротив, скачок напряжения превышает соответствующее упругое значение, к которому это напряжение впоследствии асимптотически приближается.

Новые интегральные соотношения для динамической термовязкоупругости

Так как соотношения между напряжениями и деформациями для вязкоупругих материалов содержат время, то соответствующие математические модели будут нестационарными и, следовательно, динамическими. Приведенные соотношения могут быть использованы для описания термической реакции вязкоупругих тел канонической формы (бесконечная пластина; полупространство, ограниченное плоской поверхностью; тела цилиндрической и сферической формы и др.) при заданных условиях нагрева (или охлаждения) в рамках соответствующей краевой задачи нестационарной теплопроводности. Для этого на начальном этапе необходимо получить дифференциальное уравнение динамической термовязкоупругости. Рассмотрение этого вопроса начнем в декартовых координатах для вязкоупругого полупространства $z\ge l$ температуры $T(z,t)$, граница которого свободна от напряжений. При этом $U_x=U_y=0$, $U_z=U_z(z,t)$, $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=0$; $e_{zz}=(2/3)\varepsilon_{zz}$; напряжения $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(z,t)$ для $i=j,\sigma_{ij}=0$ для $i\ne j(i,j=x,y,z)$. Имеем далее:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial s_{zz}(z,t)}{\partial t}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{p}}}s_{zz}(z,t)=\frac{4G}{3}\frac{\partial\varepsilon_{zz}(z,t)}{\partial t};\quad (t>0)\\&s_{zz}(z,t)\big|_{t=0}=0;\end{aligned}\right\}; \qquad (27)$$

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{zz}(z,t)=\frac{\partial U_z(z,t)}{\partial z};\\&\frac{\partial\sigma_{zz}(z,t)}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2U_z(z,t)}{\partial t^2};\ \left(z>l;\ t>0\right)\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

$$\begin{aligned}&\sigma_{zz}=s_{zz}+\sigma^*=\\&=s_{zz}+\frac{2G(1+v)}{3(1-2v)}\varepsilon_{zz}-\frac{2G(1+v)}{(1-2v)}\alpha_T(T_i-T_0).\end{aligned} \qquad (29)$$

Находим решение задачи Коши (27)

$$s_{zz}=\frac{4G}{3}\varepsilon_{zz}-\frac{4G}{3\tau_p}\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_p}\right]\varepsilon_{zz}(z,\tau)d\tau \qquad (30)$$

Находим σ_{zz} из (29)–(30) и подставляем в (28). В результате приходим к следующему соотношению для среды Максвелла:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2U_z}{\partial z^2}-\frac{1}{\upsilon_p^2}\frac{\partial^2U_z}{\partial t^2}=\frac{(1+v)}{(1-v)}\alpha_T\frac{\partial\left[T_i(z,t)-T_0\right]}{\partial z}+\\&+\frac{2(1-2v)}{3\tau_p(1-v)}\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_p}\right]\frac{\partial^2U_z(z,\tau)}{\partial z^2}d\tau.\end{aligned} \qquad (31)$$

При этом

$$\sigma_{zz}(z,t)=\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\frac{\partial U_z}{\partial z}-\frac{4G}{3\tau_p}\int_0^t \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_p}\right]\frac{\partial U_z(z,\tau)}{\partial z}d\tau-\frac{2G(1+\nu)}{(1-2\nu)}\alpha_T\left[T_i(z,t)-T_0\right]. \tag{32}$$

Аналогичными рассуждениями в сферической системе координат (центральная симметрия $T_i=T_i(\rho,t)$) для вязкоупругой области $\rho>R,t>0$ находим соотношения для среды Максвелла:

$$\frac{\partial^2U_\rho}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial U_\rho}{\partial\rho}-\frac{2}{\rho^2}U_\rho-\frac{1}{\upsilon_p^2}\frac{\partial^2U_\rho}{\partial t^2}=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T\frac{\partial\left[T_i(\rho,t)-T_0\right]}{\partial\rho}+\frac{2(1-2\nu)}{3\tau_p(1-\nu)}\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_p}\right]\times\left(\frac{\partial^2U_\rho}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial U_\rho}{\partial\rho}-\frac{2}{\rho^2}U_\rho(\rho,\tau)\right)d\tau, \tag{33}$$

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho,t)=\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\times\left\{\frac{\partial U_\rho}{\partial\rho}+\frac{2\nu}{1-\nu}\frac{1}{\rho}U_\rho-\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_T\left[T_i(\rho,t)-T_0\right]-\frac{2}{3\tau_p}\times\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_p}\right]\left(\frac{\partial U_\rho}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}U_\rho(\rho,\tau)\right)d\tau\right\}. \tag{34}$$

В цилиндрических координатах (радиальный поток $T_i=T_i(r,t)$) для вязкоупругой области $r>R,t>0$ аналогичные рассуждения приводят к результатам:

$$\frac{\partial^2U_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial r}-\frac{1}{r^2}U_r-\frac{1}{\upsilon_p^2}\frac{\partial^2U_r}{\partial t^2}=\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_T\frac{\partial\left[T_i(r,t)-T_0\right]}{\partial r}+\frac{2(1-2\nu)}{3\tau_p(1-\nu)}\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_p}\right]\times\left(\frac{\partial^2U_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial r}-\frac{1}{r^2}U_r(r,\tau)\right)d\tau, \tag{35}$$

$$\sigma_{rr}(r,t)=\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\left\{\frac{\partial U_r}{\partial r}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{r}U_r-\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_T\left[T_i(r,t)-T_0\right]-\frac{2}{3\tau_p}\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_p}\right]\times\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}-\frac{1}{2r}U_r(r,\tau)\right)d\tau\right\}. \tag{36}$$

Теперь в координатах (μ,t) можно записать обобщенную модель динамической термовязкоупругости одновременно для всех трех систем координат.

Для среды Максвелла:

$$\frac{\partial^2U_\mu}{\partial\mu^2}+\frac{2m+1}{\mu}\left(\frac{\partial U_\mu}{\partial\mu}-\frac{1}{\mu}U_\mu\right)-\frac{1}{\upsilon_p^2}\frac{\partial^2U_\mu}{\partial t^2}=\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_T\frac{\partial\left[T_i(\mu,t)-T_0\right]}{\partial\mu}+\frac{2(1-2\nu)}{3\tau_p(1-\nu)}\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_p}\right]\times\left[\frac{\partial^2U_\mu}{\partial\mu^2}+\frac{2m+1}{\mu}\left(\frac{\partial U_\mu}{\partial\mu}-\frac{1}{\mu}U_\mu(\mu,\tau)\right)\right]d\tau, \tag{37}$$

$$\sigma_{\mu\mu}(\mu,t) =$$
$$= \frac{2G(1-v)}{(1-2v)}\left\{\frac{\partial U_\mu}{\partial \mu} + \frac{(2m+1)v}{(1-v)}\frac{1}{\mu}U_\mu - \right.$$
$$\left. - \frac{(1+v)}{(1-v)}\alpha_T\left[T_i(\mu,t) - T_0\right]\right\} - \tag{38}$$
$$- \frac{4G}{3\tau_p}\int_0^t \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_p}\right]\times$$
$$\times\left[\frac{\partial U_\mu}{\partial \mu} - \frac{2m+1}{2\mu}U_\mu(\mu,\tau)\right]d\tau.$$

Конкретная системе координат в соотношениях (37)–(38) фиксируется записью (16).

Для среды Кельвина:

$$\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial \mu^2} + \frac{2m+1}{\mu}\left(\frac{\partial U_\mu}{\partial \mu} - \frac{1}{\mu}U_\mu\right) -$$
$$- \frac{1}{\upsilon_p^2}\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial t^2} =$$
$$= \frac{(1+v)}{(1-v)}\alpha_T\frac{\partial\left[T_i(\mu,t) - T_0\right]}{\partial \mu} - \frac{2\tau_p}{3}\frac{(1-2v)}{1-v}\times \tag{39}$$
$$\times\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial \mu^2} + \frac{2m+1}{\mu}\left(\frac{\partial U_\mu}{\partial \mu} - \frac{1}{\mu}U_\mu\right.\right]$$

$$\sigma_{\mu\mu}(\mu,t) =$$
$$= \frac{2G(1-v)}{(1-2v)}\left\{\frac{\partial U_\mu}{\partial \mu} + \frac{v}{1-v}\frac{2m+1}{\mu}U_\mu - \right.$$
$$\left. - \frac{1+v}{1-v}\alpha_T\left[T_i(\mu,t) - T_0\right]\right\} + \tag{40}$$
$$+ \frac{4G\tau_p}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U_\mu}{\partial \mu} - \frac{2m+1}{2\mu}U_\mu\right).$$

Здесь, как и выше в (38), соответствующая система координат определяется условиями (16).

Функции $T_i(\mu,t)(i = 1,2,3)$ соответствуют постановкам (15). Для записи краевых задач для уравнений (37) и (39) следует добавить начальные условия (17), условия ограниченности (19) и граничное условие для свободной от напряжений (38) и (40) границы области $\mu \geq R, t \geq 0$. При проведении численных экспериментов для различных условий теплового нагрева (или охлаждения), указанных в (15), уравнения (37) и (39) допускают преобразования Лапласа, что позволяет в пространстве изображений перейти к линейным краевым задачам для перемещений и после их нахождения выписать все (ненулевые) компоненты тензоров напряжений и деформаций, затем после перехода к оригиналам становится возможным воспроизвести полную картину динамической реакции вязкоупругого тела на тепловой удар. Можно использовать для этих целей также и частные соотношения (31), (33), (35), а можно (что более интересно) перейти сразу к обобщенным моделям для уравнений (37), (39). В [2] развит аналитический метод нахождения точных операционных решений такого рода обобщенных уравнений, что в конечном счете позволяет описать влияние топологии области (фиксируя в решении задачи m) на величину вязкоупругих температурных напряжений. Последнее с практической точки зрения представляет значительный интерес для многих направлений науки и техники [9,10,13].

Можно указать еще один новый подход на основе девиаторных соотношений, также приводящий к динамической постановке термовязкоупругой задачи. Рассмотрим этот подход для декартовых координат. Находим из (29)–(30):

$$\sigma_{zz}(z,t) = \frac{2G(1-v)}{(1-2v)}\varepsilon_{zz} -$$
$$- \frac{2G(1+v)}{(1-2v)}\alpha_T\left[T_i(z,t) - T_0\right] - \tag{41}$$
$$- \frac{4G}{3\tau_p}\int_0^t \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_p}\right]\varepsilon_{zz}(z,\tau)d\tau.$$

Операционным методом находим из (23) $\bar{\varepsilon}_{zz}(z,p)$ и подставляем найденное соотношение в операционную форму уравнения

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} = \rho^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon_{zz}).$$

Операционным методом находим из (23) $\bar{\varepsilon}_{zz}(z,p)$ и подставляем найденное соотношение в операционную форму уравнения

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} = \rho^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon_{zz}).$$

После длительных преобразований приходим к уравнению нового вида

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{\upsilon_p^2}\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{1+v}{1-v}\alpha_T \rho^* \frac{\partial^2 \left[T_i(z,t) - T_0\right]}{\partial t^2} +$$

$$+\frac{m_1}{\upsilon_p^2 \tau_p}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t \exp\left[-(m_2 / 3\tau_p)(t-\tau)\right]\sigma_{zz}(z,\tau)d\tau + \qquad (42)$$

$$+\frac{m_1 m_2}{\tau_p (1/\rho^*)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t \exp\left[-(m_2 / 3\tau_p)(t-\tau)\right]\times$$

$$\times\alpha_T\left[T_i(z,\tau) - T_0\right]d\tau, z > l, t > 0.$$

Здесь $m_1 = \dfrac{2(1-2v)}{3(1-v)}; m_2 = \dfrac{1+v}{1-v}.$

Уравнение (42) обобщает известное уравнение Даниловской для упругих тел [8] на вязкоупругие тела и фактически дает дальнейшее развитие указанной проблемы (в рамках среды Максвелла). Для среды Кельвина имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} = \frac{1}{m_1 \tau_p \upsilon_p^2}\times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{m_1\tau_p}\right]\sigma_{zz}(z,\tau)d\tau + \qquad (43)$$

$$+\frac{m_2\rho^*}{m_1\tau_p}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{m_1\tau_p}\right]\alpha_T\left[T_i(z,\tau) - T_0\right]d\tau.$$

Для проведения численных расчетов, например, на основе уравнения (43), целесообразно перейти к безразмерным величинам по формулам

$$\xi = \frac{\upsilon_p(z-l)}{a}; \tau = \frac{\upsilon_p^2 t}{a};$$

$$\beta_1 = \frac{2(1-2v)}{3(1-v)\tau_p(\upsilon_p^2 / a)};$$

$$\beta_2 = \frac{(1+v)}{(1-v)3\tau_p(\upsilon_p^2 / a)};$$

$$S_T = \frac{2G\alpha_T(T_c - T_0)(1+v)}{(1-2v);};$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau) = \frac{\sigma_{zz}(z,t)}{S_T};$$

$$W_i(\xi,\tau) = \frac{T_i(z,t) - T_0}{T_c - T_0}.$$

Здесь

$$\mathrm{v}_p = \sqrt{\frac{2G(1-v)}{\rho^*(1-2v)}} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho^*}$$

скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука.

Уравнение (43) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2} + \beta_1\int_0^\tau \exp\left[-\beta_2(\tau - \tau')\right]\times \qquad (44)$$

$$\times\left[\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau') + W_i(\xi,\tau')\right]d\tau'$$

и в такой форме является более удобным для преобразований в пространстве изображений по Лапласу, так как содержит слагаемое типа свертки (что удобно для применения преобразования Лапласа). Найдем операционное решение уравнения (44):

$$\begin{aligned}
&\overline{\sigma}_{\xi\xi}(\xi,p)=\frac{1}{2}p\sqrt{\frac{p+\beta_1+\beta_2}{p+\beta_2}}\overline{W}_i(0,p)\times\\
&\times\int\limits_0^{\infty}\exp\left[-p(\xi+\xi^{'})\sqrt{\frac{p+\beta_1+\beta_2}{p+\beta_2}}\right]d\xi^{'}-\\
&-\frac{1}{2}p\sqrt{\frac{p+\beta_1+\beta_2}{p+\beta_2}}\overline{W}_i(\xi,p)\times\\
&\times\int\limits_{\xi}^{\infty}\exp\left[-p(\xi^{'}-\xi)\sqrt{\frac{p+\beta_1+\beta_2}{p+\beta_2}}\right]d\xi^{'}-\\
&-\frac{1}{2}p\sqrt{\frac{p+\beta_1+\beta_2}{p+\beta_2}}\overline{W}_i(\xi,p)\times\\
&\times\int\limits_0^{\xi}\exp\left[-p(\xi-\xi^{'})\sqrt{\frac{p+\beta_1+\beta_2}{p+\beta_2}}\right]d\xi^{'}.
\end{aligned}\tag{45}$$

Представленное изображение является характерным для динамических задач термовязкоупругости и отличается от классических изображений (с оригиналами) в таблицах [16]. Ключевым вопросом при нахождении оригинала сложного изображения (66) является предварительное нахождение оригинала изображения

$$\begin{aligned}
&\overline{\Psi}_i(\xi,\xi^{'},p)=\\
&=\frac{1}{p}\exp\left[-\gamma_i(\xi,\xi^{'})\sqrt{\frac{p+\beta_1+\beta_2}{p+\beta_2}}\right].
\end{aligned}\tag{46}$$

Здесь можно использовать подход, разработанный авторами в [2] для сложных изображений. Используем для этих целей интеграл Римана–Меллина, учитывая, что функция (67) имеет две точки ветвления. Опуская длительные выкладки, приведем конечный результат:

$$\begin{aligned}
&\Psi_i(\xi,\xi^{'},\tau)=\left\{1-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\beta_1}\frac{1}{x+\beta_2}\exp\left[-(x+\beta_2)\tau\right]\times\right.\\
&\left.\times\sin\left[\gamma_i(\xi,\xi^{'})(x+\beta_2)\sqrt{\frac{\beta_1-x}{x}}\right]\right\}dx\times\\
&\times\eta\left[\tau-\gamma_i(\xi,\xi^{'})\right].
\end{aligned}\tag{47}$$

Здесь:

$$\gamma_i(\xi,\xi^{'})=\begin{cases}(\xi+\xi^{'}), i=1,\\ (\xi^{'}-\xi), i=2,\\ (\xi-\xi^{'}), i=3;\end{cases}$$

$\eta(z)$ – функция Хевисайда. Теперь можно выписать оригинал изображения (45):

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau)=-W_i(\xi,\tau)-\\
&-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_0^{\infty}d\xi^{'}\int\limits_0^{\tau}\frac{\partial W_i(0,\tau^{'})}{\partial\tau^{'}}\Psi_1(\xi,\xi^{'},\tau-\tau^{'})d\tau^{'}-\\
&-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_{\xi}^{\infty}d\xi^{'}\int\limits_0^{\tau}\frac{\partial W_i(\xi,\tau^{'})}{\partial\tau^{'}}\Psi_2(\xi,\xi^{'},\tau-\tau^{'})d\tau^{;}+\\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_0^{\xi}d\xi^{'}\int\limits_0^{\tau}\frac{\partial W_i\ (\xi,\tau^{'})}{\partial\tau^{'}}\Psi_3(\xi,\xi^{'},\tau-\tau^{'})d\tau^{'}.
\end{aligned}\tag{48}$$

Переходя к среде Кельвина, запишем прежде всего уравнение (43) в перемещениях (ξ,τ)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau)}{\partial\xi^2}=\beta^*\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\times\\
&\times\int\limits_0^{\tau}\exp\left[-\beta^*(\tau-\tau^{'})\right]\left[\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau^{'})+W_i(\xi,\tau^{'})\right]d\tau^{'},
\end{aligned}\tag{49}$$

где $\beta^*=\dfrac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)\tau_p(\upsilon_p^2/a)}$. (50)

Операционное решение уравнения (49) с краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau)\Big|_{\tau=0}=\frac{\partial\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}=0,\\
&\xi\geq 0,\\
&\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau)\Big|_{\xi=0}=\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau)\Big|_{\xi=\infty}=0,\\
&\tau\geq 0
\end{aligned}\right]\tag{51}$$

запишем в виде

$$
\begin{aligned}
&\overline{\sigma}_{\xi\xi}(\xi,p)=\frac{1}{2}p\sqrt{\frac{\beta^*}{p+\beta^*}}\overline{W}_i(0,p)\times\\
&\times\int_0^\infty \exp\left[-p(\xi+\xi^{'})\sqrt{\frac{\beta^*}{p+\beta^*}}\right]d\xi^{'}-\\
&-\frac{1}{2}p\sqrt{\frac{\beta^*}{p+\beta^*}}\overline{W}_i(\xi,p)\times\\
&\times\int_\xi^\infty \exp\left[-p(\xi^{'}-\xi)\sqrt{\frac{\beta^*}{p+\beta^*}}\right]d\xi^{'}-\\
&-\frac{1}{2}p\sqrt{\frac{\beta^*}{p+\beta^*}}\overline{W}_i(\xi,p)\times \qquad (52)\\
&\times\int_0^\xi \exp\left[-p(\xi-\xi^{'})\sqrt{\frac{\beta^*}{p+\beta^*}}\right]d\xi^{'}=-\frac{1}{2}\overline{W}_i(0,p)\times\\
&\times\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^\infty \exp\left[-p(\xi+\xi^{'})\sqrt{\frac{\beta^*}{p+\beta^*}}\right]d\xi^{'}-\overline{W}_i(\xi,p)-\\
&-\frac{1}{2}p\overline{W}_i(\xi,p)\frac{\partial}{\partial\xi}\int_\xi^\infty\frac{1}{p}\exp\left[-p(\xi^{'}-\xi)\sqrt{\frac{\beta^*}{p+\beta^*}}\right]d\xi^{'}+\\
&+\frac{1}{2}p\overline{W}_i(\xi,p)\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^\xi\frac{1}{p}\exp\left[-p(\xi-\xi^{'})\sqrt{\frac{\beta^*}{p+\beta^*}}\right]d\xi^{'}.
\end{aligned}
$$

Для перехода к оригиналу в изображении (52) нам понадобится оригинал следующего сложного изображения

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\exp\left[-\gamma_i(\xi,\xi^{'})p\sqrt{\frac{\beta^*}{p+\beta^*}}\right]\leftarrow\\
&\leftarrow\left\{1+\frac{1}{\pi}\int_{\beta^*}^\infty\frac{1}{\rho}\sin\left[\gamma_i(\xi,\xi^{'})\rho\sqrt{\frac{\beta^*}{\rho-\beta^*}}\right]\times\right. \qquad (53)\\
&\left.\times\exp(-\rho\tau)d\rho\right\}\eta\left[\tau-\gamma_i(\xi,\xi^{'})\right]=\\
&=\Psi_i^*(\xi,\xi^{'},\tau).
\end{aligned}
$$

Здесь:

$$
\gamma_i(\xi,\xi^{'})=\begin{cases}(\xi+\xi^{'}),i=1;\\ (\xi^{'}-\xi),i=2;\\ (\xi-\xi^{'}),i=3.\end{cases} \qquad (54)
$$

Теперь можно записать оригинал напряжения (52) для среды Кельвина:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau)=-W_i(\xi,\tau)-\\
&-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^\infty d\xi^{'}\int_0^\tau\frac{\partial W_i(0,\tau^{'})}{\partial\tau^{'}}\Psi_1^*(\xi,\xi^{'},\tau-\tau^{'})-\\
&-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\int_\xi^\infty d\xi^{'}\int_0^\tau\frac{\partial W_i(\xi,\tau^{'})}{\partial\tau^{'}}\Psi_2^*(\xi,\xi^{'},\tau-\tau^{'})d\tau^{'}+ \qquad (55)\\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^\xi d\xi^{'}\int_0^\tau\frac{\partial W_i(\xi,\tau^{'})}{\partial\tau^{'}}\Psi_3^*(\xi,\xi^{'},\tau-\tau^{'})d\tau^{'}.
\end{aligned}
$$

Входящие в (42) и (45) температурные функции $T_i(z,t)$ являются решениями задач:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_i(z,t)}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2}-\tau_p\frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2},z>l,t>0,\\
&T_i(z,t)\Big|_{t=0}=T_{0,}\ \frac{\partial T_i(z,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,z\geq l,\\
&T_1(z,t)\Big|_{z=l}=T_c,t>0,\\
&\frac{1}{\tau_p}\int_0^t\frac{\partial T_2(z,\tau)}{\partial z}\Bigg|_{z=l}\exp(-\frac{t-\tau}{\tau_p})d\tau=\\
&=-(1/\lambda_T)q_0,t>0,\\
&\frac{1}{\tau_p}\int_0^t\Big|\ \frac{\partial T_3(z,\tau)}{\partial z}\Bigg|_{z=l}\exp(-\frac{t-\tau}{\tau_p})d\tau=\\
&=h\left[T_3(z,t)\Big|_{z=l}-T_c\right]t>0,
\end{aligned}\right\} \qquad (56)
$$

$$
\left|T_i(z,t)\right|<\infty,z\geq l,t\geq 0.
$$

В переменных (ξ,τ) имеем задачи:

$$\left.\begin{gathered}
\frac{\partial W_i(\xi,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 W_i}{\partial\xi^2}-\beta^2\frac{\partial^2 W_i}{\partial\tau^2},\\
\xi>0,\tau>0,\\
W_i(\xi,\tau)\Big|_{\tau=0}=\frac{\partial W_i(\xi,\tau)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}=0,\\
\xi>0,\\
W_1(\xi,\tau)\Big|_{\xi=0}=1,\tau>0,\\
\int\limits_0^{\tau}\frac{\partial W_2(\xi,\tau^{'})}{\partial\xi}\Bigg|_{\xi=0}\exp(-\frac{\tau-\tau^{'}}{\beta^2})d\tau^{'}=\\
=-q_T,\tau>0,\\
\int\limits_0^{\tau}\frac{\partial W_3(\xi,\tau^{'})}{\partial\xi}\Bigg|_{\xi=0}\exp(-\frac{\tau-\tau^{'}}{\beta^2})d\tau^{'}=\\
=h_0\left[W_3(\xi,\tau)\Big|_{\xi=0}-1\right],\tau>0,\\
\left|W_i(\xi,\tau)\right|<\infty,\xi\geq 0,\tau\geq 0.
\end{gathered}\right\}\quad(57)$$

Здесь:

$$\beta^2=\upsilon_p^2\,/\,\upsilon_T^2;\,q_T=\frac{q_0\upsilon_p\tau_p}{\lambda_T(T_c-T_0)};$$

$$h_0=h\upsilon_p\tau_p.$$

Вначале запишем операционные решения тепловых задач:

$$\bar{W}_i(\xi,p)=\bar{f}_i(p)\exp\left[-\xi\sqrt{p(1+\beta^2 p)}\right].\quad(58)$$

$$\bar{f}_i(p)=\left[\begin{array}{ll}
1, & i=1;\\
(q_T\,/\,\beta^2)\dfrac{\sqrt{1+\beta^2 p}}{p^{3/2}}, & i=2\\
\dfrac{h_0\sqrt{1+\beta^2 p}}{p\left[\beta^2\sqrt{p}+h_0\sqrt{1+\beta^2 p}\right]}, & i=3.
\end{array}\right.\quad(59)$$

Находим оригиналы записанных изображений:

$$W_1(\xi,\tau)=\Bigg[\exp(-\xi\,/\,2\beta)+\frac{\xi}{2\beta}\times$$

$$\times\int\limits_{\beta\xi}^{\tau}\exp(-\tau^{'}\,/\,2\beta^2)\frac{I_1(\frac{1}{2\beta^2}\sqrt{\tau^{'2}-\beta^2\xi^2})}{\sqrt{\tau^{'2}-\beta^2\xi^2}}d\tau^{'}\Bigg]\times\quad(60)$$

$$\times\eta(\tau-\beta\xi);$$

$$W_i(\xi,\tau)=\Big[f_i(\tau-\beta\xi)\exp(-\xi\,/\,2\beta)+$$

$$+\frac{\xi}{2\beta}\int\limits_{\beta\xi}^{\tau}f_i(\tau-\tau^{'})\exp(-\tau^{'}\,/\,2\beta^2)\times$$

$$\times\frac{I_1(\frac{1}{2\beta^2}\sqrt{\tau^{'2}-\beta^2\xi^2})}{\sqrt{\tau^{'2}-\beta^2\xi^2}}d\tau^{'}\Big]\times\eta(\tau-\beta\xi);\quad(61)$$

$$(i=2,3).$$

Здесь:

$$f_2(\tau)=$$

$$=\frac{q_T}{\beta}\int\limits_0^{\tau/\beta^2}\left[\frac{\exp(-\tau^{'})}{\sqrt{\pi\tau^{'}}}+\Phi(\tau^{'})\right]\frac{d\tau^{'}}{\sqrt{\pi(\tau\,/\,\beta^2-\tau^{'})}};\quad(62)$$

$$f_3(\tau)=\frac{1}{\beta^4}\Big\{1-\gamma_1\exp(-(\gamma_2\,/\,\beta^2)\tau)-$$

$$-\gamma_3\int\limits_0^{\tau/\beta^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau^{'}}}+\sqrt{\gamma_1}\exp(\gamma_1\tau^{'})\Phi(\sqrt{\gamma_1\tau^{'}})\right]\times\quad(63)$$

$$\times\frac{\exp(-\tau^{'})d\tau^{'}}{\sqrt{\pi(\tau\,/\,\beta^2-\tau^{'})}};$$

Здесь:

$$\gamma_1=\left[1-(h_0\,/\,\beta)^2\right]^{-1};\gamma_2=1-\gamma_1;$$

$$\gamma_3=(1-\gamma_1)\,/\,(h_0\,/\,\beta).$$

$\Phi(z)=2\,/\sqrt{\pi}\int\limits_0^z\exp(-y^2)dy-$ функция Лапласа.

Соотношения (60)–(63) дают аналитическое решение тепловой задачи в декартовой системе координат. В качестве следующего шага представляет интерес получить аналитическое решение обобщенной тепловой модели (15), охватывающей все три системы координат, наиболее употребительные в прикладных вопросах теории теплового удара. Заметим, что подобное решение в литературе не приводилось.

Задачу (15) запишем в безразмерных переменных:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \dfrac{\upsilon_p \mu}{a};\ \tau = \dfrac{\upsilon_p^2 t}{a;};\ \xi_0 = \dfrac{\upsilon_p R}{a}; \\[2ex] \beta = \upsilon_p / \upsilon_T;\ B_i^* = ha / \upsilon_p; \\[2ex] W_i(\xi,\tau) = \begin{cases} \dfrac{T_i(\mu,t) - T_0}{T_c - T_0}, i = 1,3, \\[2ex] \dfrac{T_2(\mu,t) - T_0}{(q_0 / \lambda_T)(a / \upsilon_p)}, i = 2. \end{cases} \end{array}\right] \quad (64)$$

В приведенных величинах (64) имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial W_i}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} + \dfrac{2m+1}{\xi}\dfrac{\partial W_i}{\partial \xi} - \beta^2 \dfrac{\partial W_i}{\partial \tau}, \\[2ex] \xi > \xi_0, \tau > 0, \\[1ex] W_i(\xi,\tau)\Big|_{\tau=0} = \dfrac{\partial W_i(\xi,\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \xi \ge \xi_0, \\[2ex] W_1(\xi,\tau)\Big|_{\xi=\xi_0} = 1, \tau > 0, \\[2ex] \dfrac{1}{\beta^2}\displaystyle\int_0^{\tau} \dfrac{\partial W_2(\xi,\tau')}{\partial \xi}\Bigg|_{\xi=\xi_0} \exp\Big(-\dfrac{\tau-\tau'}{\beta^2}\Big) d\tau' = \\[2ex] = -1, \tau > 0, \\[2ex] \dfrac{1}{\beta^2}\displaystyle\int_0^{\tau} \dfrac{\partial W_3(\xi,\tau')}{\partial \xi}\Bigg|_{\xi=\xi_0} \exp\Big(-\dfrac{\tau-\tau'}{\beta^2}\Big) d\tau' = \\[2ex] = B^*\Big[W_3(\xi,\tau)\Big|_{\xi=\xi_0} - 1\Big] \tau > 0, \\[2ex] \big|W_i(\xi,\tau)\big| < \infty, \xi \ge \xi_0, \tau \ge 0. \end{array}\right] \quad (65)$$

В пространстве изображений по Лапласу операционное решение задачи (65) имеет вид:

$$\frac{\overline{W}_i(\xi,p)}{(\xi_0 / \xi)^m} = \overline{f}_i(\xi_0,p) K_m(\xi \overline{\mu}(p)), \quad (66)$$

где

$$\left.\begin{array}{l} \overline{f}_i(\xi_0,p) = \begin{cases} \dfrac{1}{pK_m(\xi_0 \overline{\mu}(p))}, & i = 1 \\[2ex] \dfrac{\overline{\mu}(p)}{p^2 K_{m+1}(\xi_0 \overline{\mu}(p)),}, & i = 2 \\[2ex] \dfrac{B_i^* \overline{\mu}(p)}{p\Big[pK_{m+1}(\xi_0 \overline{\mu}(p)) + B_i^* \overline{\mu}(p) K_m(\xi_0 \overline{\mu}(p))\Big]}, & i = 3 \end{cases} \\[6ex] \overline{\mu}(p) = \sqrt{\beta^2 p^2 + p}. \end{array}\right] \quad (67)$$

Здесь $K_m(z)$ – модифицированная функция Бесселя. Переход к оригиналам в (66)–(67) связан с длительными и громоздкими вычислениями, которые, однако, доводятся до конца. Для этих целей воспользуемся интегралом Римана–Меллина

$$W_i(\xi,\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \overline{W}_i(\xi,p) \exp(p\tau) dp,$$

принимая во внимание наличие в (65)–(66) точек ветвления $p = 0, p = (1 / \beta^2)$. Предварительно найдем оригиналы следующих операционных соотношений, входящих в решения (66)–(67):

$$\frac{K_m(\xi \overline{\mu}(p))}{K_m(\xi_0 \overline{\mu}(p))} \leftarrow \quad (68)$$

$$\leftarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \frac{\big[J_m(\xi\gamma(\rho)) Y_m(\xi_0\gamma(\rho)) - J_m(\xi_0\gamma(\rho)) Y_m(\xi\gamma(\rho))\big] \exp(-\rho\tau)}{J_m^2(\xi_0\gamma(\rho)) + Y_m^2(\xi_0\gamma(\rho))} d\rho,$$

$$\frac{K_m(\xi \overline{\mu}(p))}{K_{m+1}(\xi_0 \overline{\mu}(p))} \leftarrow \quad (69)$$

$$\leftarrow -\frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \frac{\big[J_m(\xi\gamma(\rho)) J_{m+1}(\xi_0\gamma(\rho)) + Y_m(\xi\gamma(\rho)) Y_{m+1}(\xi_0\gamma(\rho))\big] \exp(-\rho\tau)}{J^2{}_{m+1}(\xi_0\gamma(\rho)) + Y^2{}_{m+1}(\xi_0\gamma(\rho))} d\rho$$

Здесь $\gamma(\rho) = \sqrt{\rho - \beta^2 \rho^2}$.

Теперь из (66)–(67) для $i = 1$ находим обобщенное аналитическое решение первой краевой задачи (для всех трех систем координат):

$$\frac{W_1(\xi,\tau)}{(\xi_0 / \xi)^m} = \tag{70}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{1/\beta^2} \frac{\left[J_m(\xi\gamma(\rho))Y_m(\xi_0\gamma(\rho)) - J_m(\xi_0\gamma(\rho))Y_m(\xi\gamma(\rho))\right]\left[1-\exp(-\rho\tau)\right]}{\rho\left[J_m^2(\xi_0\gamma(\rho))+Y_m^2(\xi_0\gamma(\rho))\right]}d\rho =$$

$$= (\xi_0 / \xi)^m -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{1/\beta^2} \frac{\left[J_m(\xi\gamma(\rho))Y_m(\xi_o\gamma(\rho)) - J_m(\xi_0\gamma(\rho))Y(\xi\gamma(\rho))\right]\exp(-\rho\tau)}{\rho\left[J_m^2(\xi_0\gamma(\rho))+Y_m^2(\xi_0\gamma(\rho))\right]}d\rho$$

Находим далее:

$$\frac{W_2(\xi,\tau)}{(\xi_0 / \xi)^m} = \int_0^{\tau} \Psi_1(\tau^{'})\Psi_2(\tau-\tau^{'})d\tau^{'}, \tag{71}$$

где

$$\Psi_1(\tau) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{1/\beta^2} \frac{\left[J_m(\xi\gamma(\rho))J_{m+1}(\xi_0\gamma(\rho)) + Y_m(\xi\gamma(\rho))Y_{m+1}(\xi_0\gamma(\rho))\right]\exp(-\rho\tau)}{J_{m+1}^2(\xi_0\gamma(\rho))+Y_{m+1}^2(\xi_0\gamma(\rho))}d\rho, \tag{72}$$

$$\Psi_2(\tau) = \beta\exp(-\tau / 2\beta^2)I_0(\tau / 2\beta^2) +$$

$$+\frac{1}{\beta}\int_0^{\tau}\exp(-\tau^{'} / 2\beta^2)I_0(\tau^{'} / 2\beta^2)d\tau^{'} \tag{73}$$

$$\frac{\Psi_3(\xi,\tau)}{(\xi_0 / \xi)^m} = \int_0^{\tau} \Psi_1(\tau^{'})\Psi_3(\tau-\tau^{'})d\tau^{'}, \tag{74}$$

где $\Psi_1(\tau)$ – функция (72),

$$\Psi_3(\tau) = 1-(1 / B_i^*\beta)\exp\left[-(1 / 2\beta^2)\tau\right] \tag{75}$$

В случае (74) во избежании излишней громоздкости решение приведено для малых времен, учитывая кратковременность инерционных эффектов, имеющих принципиальное значение в динамической модели и представляющих наиболее интересные времена для исследования.

Заканчивая теорию динамической термовязкоупругости, следует сравнить обобщенные соотношения (13)–(14) для упругой среды и соотношения (37)–(38) для модели Максвелла (39)–(40) для модели Кельвина вязкоупругой среды. Здесь наглядно проявляется влияние вязкости и ее вклад в обобщенную термомеханику. Фактически приведенные соотношения (как и (42), (43), (48)) открывают перспективное научное направление, связанное с исследованием термической реакции вязкоупругих сред на нагрев (или охлаждение) в терминах динамической вязкоупругости. Например, в (48) могут быть рассмотрены многочисленные случаи нагрева (охлаждения) в рамках модельных задач (15) тепловым потоком однородным, неоднородным, импульсным, пульсирующим, периодическим, апериодическим и др. Каждый случай такого изучения представляет собой самостоятельное научное исследование, затрагивающее не только термомеханику, но и вычислительную математику и в особенности операционноеисчисление при нахождении оригиналов сложных изображений. Заметим, что подобного рода решения динамических задач термовязкоупругости в литературе не рассмотрены. Авторы надеются, что настоящая публикация заинтересует читателей в плане поиска научного направления, активная работа в котором, несомненно, выльется в добротную кандитатскую диссертацию.

Заключение

Предложены новые модельные представления интегро-дифференциальной формы для динамической и квазистатической термовязкоупругости для различных случаев теплового воздействия на вязкоупругие тела одновременно в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Приведенные соотношения позволяют аналитически изучить многочисленные практические случаи термической реакции вязкоупругой среды (вязкоупругих тел канонической формы) в рамках линейных реологических моделей Максвелла и Кельвина в терминах феноменологии Максвелла–Каттанео–Лыкова–Вернотта о распространения теплоты в твердых телах.

Список источников

1. Карташов Э.М. Модельные представления теплового удара в динамической термоупругости // Российский технологический журнал. 2020. Т. 8. № 2. С. 85–108.
2. Карташов Э.М., Крылов С.С. Новые функциональные соотношения в аналитической теплофизике для локально-неравновесных процессов теплообмена // Тепловые процессы в технике. 2024. Т. 16.
3. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Математическая модель локально-неравновесного теплопереноса с учетом пространственно-временной нелокальности // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. № 2. С. 393–408.

4. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В. Разработка и исследование сильно неравновесной модели теплообмена в жидкости с учетом пространственно-временной нелокальности и диссипации энергии // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24. № 6. С. 929–935.
5. Баумейстер К., Хамилл. Т. Гиперболичесое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле // Теплопередача. 1969. № 4. С. 112–119.
6. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса // Успехи физических наук. 1997. Т. 167. № 10. С. 1095–1106.
7. Савельева И.Ю. Вариационная формулировка математической модели процесса стационарной теплопроводности с учетом пространственной нелокальности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2022. № 3 С. 45–61.
8. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Исследование теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. № 2. С. 301–310.
9. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
10. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М.: Физматгиз, 2002. 168 с.
11. Карташов Э.М. Аналитические решения гиперболических моделей теплопроводности // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 5. С. 1072–1081.
12. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости: монография. М.: URSS, 2012. 660 с.
13. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений: монография. М.: Мир, 1964. 517 с.
14. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика: учебное пособие. Киев: Наукова думка, 1976. 312 с.
15. Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы // Прикладная математика и механика. 1950. Т. 14 № 3. С. 317–318.
16. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению: справочник. М.: Высшая школа, 1965. 467 с.

References

1. Kartashov JeM. Model representations of thermal shock in dynamic thermoelasticity. Rossijskij tehnologicheskij zhurnal. 2020;8(2):85-108. (In Russ.)
2. Kartashov JeM, Krylov SS. New functional relationships in analytical thermal physics for locally nonequilibrium heat transfer processes. Thermal processes in engineering. 2024;16. (In Russ.)
3. Kudinov IV, Kudinov VA. Mathematical model of locally nonequilibrium heat transfer taking into account spatio-temporal nonlocality. Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 2015;88(2):393-408. (In Russ.)
4. Kudinov VA, Eremin AV, Kudinov IV. Development and study of a highly nonequilibrium model of heat transfer in a liquid taking into account spatiotemporal nonlocality and energy dissipation. Teplofizika i ajeromehanika. 2017;24(6):929-935. (In Russ.)
5. Baumeister K, Hamill T. Hyperbolic heat equation. Solution of the problem of a semi-infinite body. Teplofeedachi. 1969;(4):112-119. (In Russ.)
6. Sobolev SL. Locally nonequilibrium models of transfer processes. Uspehi fizicheskih nauk. 1997;167(10): 1095-1106. (In Russ.)
7. Savel'eva IJu. Variational formulation of a mathematical model of the process of stationary heat conduction taking into account spatial nonlocality. Vestnik MGTU im. N.Je. Baumana. Estestvennye nauki. 2022;(3):45-61. (In Russ.)
8. Kudinov VA, Kudinov IV. Study of thermal conductivity taking into account the finite velocity of heat propagation. Teplofizika vysokih temperatur. 2013;51(2):301-310. (In Russ.)
9. Zarubin VS, Kuvyrkin GN. Mathematical models of mechanics and electrodynamics. Moscow: Publishing house of Bauman Moscow State Technical University; 2008. 512 p. (In Russ.)
10. Zarubin VS, Kuvyrkin GN. Mathematical models of thermomechanics. Moscow: Fizmatgiz; 2002. 168 p. (In Russ.)
11. Kartashov JeM. Analytical solutions of hyperbolic models of thermal conductivity. Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 2014.87(5):1072-1081. (In Russ.)
12. Kartashov JeM, Kudinov VA. Analytical Theory of Thermal Conductivity and Applied Thermoelasticity. Moscow: URSS; 2012. 660 p. (In Russ.)
13. Boli B, Weiner J. Theory of Temperature Stresses. Moscow: Mir; 1964. 517 p. (In Russ.)
14. Podstrigach JaS, Koljano JuM. Generalized Thermomechanics. Kyiv: Naukova Dumka; 1976. 312 p. (In Russ.)
15. Danilovskaja VI. Temperature Stresses in an Elastic Half-Space Arising from Sudden Heating of Its Boundary. Prikladnaja matematika i mehanika. 1950;14(3):317-318. (In Russ.)
16. Ditkin VA, Prudnikov AP. Handbook of operational calculus. Moscow: Higher School; 1965. 467 p. (In Russ.)