

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи

Викулов

Викулов Алексей Геннадьевич

Идентификация математических моделей теплообмена в космических
аппаратах

Специальность: 01.04.14 – «Теплофизика и теоретическая теплотехника»

Диссертация
на соискание ученой степени доктора технических наук

Научный консультант:
д.т.н., профессор Ненарокомов Алексей Владимирович

Москва - 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Обозначения и сокращения.....	4
Введение.....	6
1. Использование обратных задач теплообмена при тепловой отработке космических аппаратов.....	15
1.1. Тепловая отработка космических аппаратов расчетно- экспериментальным методом.....	15
1.2. Диагностика граничных условий.....	31
1.3. Идентификация математических моделей.....	34
1.4. Точность решения обратных задач теплообмена.....	46
1.5. Выводы по главе 1.....	48
2. Математическое моделирование теплообмена в космических аппаратах.....	53
2.1. Постановки задач идентификации математических моделей теплообмена в составных частях космического аппарата.....	53
2.2. Обобщенная теплофизическая постановка задачи идентификации математической модели с сосредоточенными параметрами.....	62
2.3. Проектные и поверочные тепловые расчеты.....	76
2.4. Граничные условия для расчетов тепловых вакуумных испытаний.....	79
2.5. Контрольная выборка результатов и доверительная вероятность тепловых расчетов.....	83
2.6. Точность математических моделей теплообмена.....	89
2.7. Выводы по главе 2.....	97
3. Методы регуляризации решения задач идентификации математических моделей теплообмена с сосредоточенными параметрами.....	100
3.1. Математическая корректность задач теплообмена.....	100
3.2. Модифицированный метод итерационной регуляризации на основе вариационного метода Тихонова.....	106
3.3. Метод итерационной регуляризации.....	109
3.4. Идентификация математических моделей теплообмена в системах космического аппарата.....	117
3.5. Единственность решения задач идентификации.....	124
3.6. Параметризация искомым функций при наличии температурной зависимости.....	128
3.7. Выводы по главе 3.....	130

4. Итерационная регуляризация на основе вариационного метода.....	131
4.1. Возмущение правой части в модифицированном вариационном методе итерационной регуляризации.....	131
4.2. Комбинированная методика минимизации сглаживающего функционала и функционала невязки температуры.....	140
4.3. Комбинирование функционалов при наличии температурной зависимости искомых функций.....	146
4.4. Вычислительные эксперименты для задачи идентификации с неединственным решением.....	148
4.5. Вычислительные эксперименты для задачи идентификации с неустойчивым решением.....	164
4.6. Выводы по главе 4.....	177
5. Идентификация математических моделей теплообмена в системах космического аппарата по результатам тепловых вакуумных испытаний.....	178
5.1. Идентификация теплофизических свойств экранно-вакуумной тепловой изоляции и сотовой панели прямым алгебраическим методом.....	178
5.2. Идентификация излучательной способности экранно-вакуумной тепловой изоляции методом регуляризации.....	189
5.3. Идентификация тепловой проводимости контурных тепловых труб методом регуляризации.....	207
5.4. Управление мощностью внутренних тепловых источников космических аппаратов.....	213
5.5. Выводы по главе 5.....	218
Заключение.....	220
Список литературы.....	222

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

Постоянные величины:

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) – постоянная Стефана-Больцмана.

Переменные величины:

$\mathbf{A} = \{\alpha_{ik}\}$ – матрица искомым функций;

A_s – коэффициент поглощения, м²;

\mathbf{a} – вектор-строка или вектор-столбец матрицы \mathbf{A} ;

$C = c_a$ – абсолютная теплоемкость, Дж/К;

$c = c_m$ – удельная массовая теплоемкость, Дж/(кг·К);

\mathbf{E} – единичная матрица;

E_i – тепловая мощность, подводимая к i -му элементу из окружающего пространства;

J – функционал-невязка температуры;

L – функционал Лагранжа;

l – текущая итерация;

M – сглаживающий функционал;

m – целевая итерация;

N – ранг матрицы тепловых проводимостей; количество уравнений в системе; размерность вектора идентифицируемых параметров;

\mathbf{Q} – тепловой поток, Вт;

\mathbf{q} – плотность теплового потока, Вт/м²;

Q_i – тепловая мощность, выделяемая в i -м элементе;

T – температура, К;

\mathbf{u} – вектор производных температур по времени с координатами u_i , $\mathbf{u} = \{u_i\}$;

V – объем, м³;

\mathbf{z} – вектор температур с координатами T_i , $\mathbf{z} = \{T_i\}$;

$\alpha_{th} = R_{th}^{-1}$ – удельная тепловая проводимость, Вт/(м²·К);

$\alpha_{th,a} = R_{th,a}^{-1}$ – абсолютная тепловая проводимость, Вт/К;

$\alpha_{D,ik}$ – коэффициенты взаимодействия потенциалов Φ_Y степени D элементов i, k ;

β – шаг спуска;

γ – параметр регуляризации;

Δ – оператор Лапласа; оператор изменения величины;

δ – толщина слоя материала, м;

δ^2 – ошибка аппроксимации правой части;

δ_T^2 – ошибка в температурной информации;

$\delta_\Sigma^2 = \delta^2 + \delta_T^2$ – суммарная ошибка задания исходных данных;

δY – вариация величины Y .

ε – излучательная способность (степень черноты);

λ – теплопроводность, Вт/(м·К);

ρ – плотность, кг/м³;

$\sigma^2(Y) = D(Y)$ – дисперсия величины Y ;

ξ – функция градиента функционала-невязки J (метод итерационной регуляризации); функция приращения правой части (вариационный метод Тихонова);

τ – время, с;

$\tau_{0,63}$ – постоянная времени, с;

ν_{ij} – вариация температуры $T_{ij} = T_i(\tau_j)$;

φ – угловой коэффициент;

$\chi_{ik}(\tau) = \varphi_{ik}(\tau)F_i\sigma$ – коэффициенты излучения, Вт/К⁴;

$\Psi_{ij}, \eta_i, \mu_{ij}$ – неопределенные множители Лагранжа.

Индексы:

$\mathbf{a}^{(0)}$ – начальное приближение вектора \mathbf{a} ;

$\mathbf{a}^{(\infty)}$ – точное значение вектора \mathbf{a} ;

max – maximum, максимум;

min – minimum, минимум;

$T^{(0)}$ – экспериментальное значение температуры;

th – thermal, термический (тепловой);

V – volume, объемный;

$Y^{(l)}$ – значение величины Y на итерации l .

Сокращения:

ИКИ – имитатор инфракрасного излучения;

МИР – метод итерационной регуляризации;

ИНС – искусственная нейронная сеть;

ИСИ – имитатор солнечного излучения;

МРП – математическая модель с распределенными параметрами;

МСП – математическая модель с сосредоточенными параметрами;

КА – космический аппарат;

КТТ – контурная тепловая труба;

САПР – система автоматизированного проектирования;

СТР – система термического (теплого) регулирования;

СЧ – составная часть;

СП – сотовая панель;

ТВИ – термические (тепловые) вакуумные испытания;

ТРП – терморегулирующее покрытие;

ТСП – термически стабилизированная сотовая панель;

ЭВТИ – экранно-вакуумная тепловая изоляция.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации

За несколько десятилетий космическая техника прошла путь от первых искусственных спутников до пилотируемых полетов и автоматических межпланетных аппаратов. За это время создана экспериментальная база наземной отработки космических аппаратов (КА), включая вакуумные стенды для тепловых вакуумных испытаний (ТВИ), позволяющие в режиме реального времени имитировать штатные тепловые воздействия на КА и его системы. В случае теплофизических задач системами целесообразно называть составные части (СЧ) космического аппарата, бортовые системы или аппарат в целом. Проверка работы систем терморегулирования (СТР) в составе конструкций КА при имитации условий летной эксплуатации в ТВИ позволяет сделать выводы о достаточности СТР для поддержания требуемого теплового состояния КА в штатных условиях эксплуатации.

Одновременно с экспериментальными методами совершенствовались и методы математического моделирования тепловых процессов, что в значительной мере связано с развитием вычислительной техники и программного обеспечения. Повышение точности расчетно-экспериментальных исследований может быть обеспечено автоматизированными информационно-измерительными комплексами, программное обеспечение которых основано на методах решения обратных задач теплообмена (ОЗТ) [1].

Присутствие связи в виде обратных задач теплообмена между физическими и математическими моделями в расчетно-экспериментальном методе тепловой отработки КА и их составных частей позволяет рассматривать физические и математические модели как элементы единой системы, параметры которой настраиваются решением обратных задач.

При наличии достоверной математической модели теплообмена отработка КА расчетно-экспериментальным методом позволяет [2]:

- уменьшить необходимый объем вакуумной камеры заменой комплексных испытаний КА автономными испытаниями СЧ;
- сократить объем ТВИ уменьшением количества режимов и продолжительности тепловакуумных испытаний;
- увеличить точность тепловых расчетов параметрической или функциональной идентификацией математических моделей.
- применять математические модели для оптимального проектирования конструкций КА, планирования теплофизического эксперимента и управления тепловыми режимами при наземных и летных испытаниях.

Построение достоверной математической модели теплообмена в КА является сложной задачей, которая состоит из структурной – качественной – и параметрической или функциональной – количественной – идентификации. Качественная идентификация подразумевает выбор способа математического описания теплофизической системы, которая ставится в соответствие

тепловым процессам в технической системе КА, и уравнений, отображающих тепловые процессы. Количественная идентификация заключается в определении параметров математической модели, обеспечивающих требуемую корреляцию теоретических и экспериментальных результатов.

Идентификация математических моделей является основой расчетно-экспериментального метода тепловой отработки КА, связывающей между собой результаты испытаний и параметры математических моделей, которые используются для проведения расчетов как штатных, так и нештатных тепловых режимов.

Таким образом, актуальность работы определена необходимостью методологической систематизации расчетно-экспериментального метода тепловакуумной отработки космических аппаратов с использованием обратных задач теплообмена для идентификации математических моделей, а также теоретических и экспериментальных исследований методов решения задач идентификации математических моделей теплообмена в космических аппаратах.

Степень разработанности темы диссертации

Обратные задачи теплообмена являются задачами математической физики, в которых определяются граничные условия (диагностика) или параметры и функции (идентификация) уравнения теплопроводности, а в более широком смысле – теплового баланса с учетом теплопроводности, конвекции и излучения. Также выделяются ретроспективные задачи нахождения температуры в обратном времени, задачи оптимального планирования и управления тепловыми режимами. Все они бывают математически некорректны, если не удовлетворяют требованиям единственности и устойчивости решения.

Методология решения таких задач основывается на регуляризации, суть которой заключается в обеспечении условной корректности постановки задачи ограничением искомого множества решений условиями отбора вариационного принципа. На основе этой методологии разработаны вариационный и вариационно-итерационный метод – метод итеративной (итерационной) регуляризации [3]. Применение вариационного метода итеративной регуляризации [3] для решения широкого спектра прикладных нелинейных некорректных задач показано в учебнике [4].

Метод итерационной регуляризации развит с применением теории оптимального управления и градиентных методов для решения обратных задач теплообмена в экстремальной постановке и в таком виде иногда выделяется как экстремальный метод решения некорректных задач [5-8].

Современные методы решения обратных и некорректных задач рассмотрены в учебнике [9], а применительно к тепловым процессам и системам – в учебном пособии [10].

Более широкий библиографический список монографий представлен в [11], где устанавливается непосредственная связь теории обратных задач

математической физики с теорией структурных свойств динамических систем, на основании которой проводится классификация и обзор части работ по обратным задачам математической физики и теплопроводности.

Рассмотрим вариант классификации обратных задач, предложенный в работе [12].

1. Корректно поставленные по Ж. Адамару – удовлетворяющие условиям математической корректности.

2. Некорректно поставленные по Ж. Адамару.

2.1. Условно корректные по А.Н. Тихонову – решения на конечномерных компактах (квазирешение) и бесконечномерных компактах требуют обязательной обратимости оператора в левой части операторного уравнения первого рода $\mathbf{Az} = \mathbf{u}$, где \mathbf{A} – оператор, действующий из метрического пространства \mathbf{Z} , в котором находится определяемый элемент \mathbf{z} , в метрическое пространство результатов измерений \mathbf{U} .

2.2. Условно корректные по Ж. Фикера – нормальные решение и псевдорешение не требуют обязательной обратимости оператора в левой части уравнения и могут находиться на основе минимизации нормы.

2.3. Существенно некорректные (неприводимые к условно корректным) – решение находится методом М.М. Лаврентьева (замена операторного уравнения первого рода $\mathbf{Az} = \mathbf{u}$ уравнением второго рода $\mathbf{Az} + \alpha\mathbf{z} = \mathbf{u}$ с малым положительным параметром α) и методом А.Н. Тихонова (минимизация квадратичного сглаживающего функционала $M^\alpha(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{Az} - \mathbf{u}_\delta\|^2 + \alpha\Omega(\mathbf{a})$, где \mathbf{u}_δ – возмущенная правая часть, $\Omega(\mathbf{a})$ – стабилизирующий функционал).

В части пункта 2.3 можно уточнить, что, если метод обеспечивает решение некорректной задачи, то оно так или иначе является условно корректным, поскольку ищется в подмножестве, ограниченном условиями отбора вариационного принципа, которые и отражаются в стабилизаторе Ω сглаживающего функционала. Поэтому некорректные задачи удобнее было бы классифицировать по признакам существования, единственности и устойчивости решения, а уже методы их решения – по требованию обратимости оператора \mathbf{A} . Тогда при условии существования и единственности решения малое возмущение правой или левой части уравнения может вызывать неустойчивость решения в смысле сходимости по Ляпунову для слабо обусловленных математических моделей (свойство математической модели сохранять устойчивость решения при малых изменениях левой и правой части). Поскольку задачи с несуществующим решением имеют решение в виде пустого множества, к существенно некорректным задачам остается отнести задачи с неединственным решением, возможность нахождения которого при усилении вариационного принципа – это актуальный предмет исследования. Вариационный принцип реализуется при помощи функционала, минимизация которого является классической задачей вариационного исчисления.

В задачах идентификации теплообмена в основном используются два вида функционалов: сглаживающий – вариационный метод А.Н. Тихонова –

и температурной невязки – метод итерационной регуляризации (МИР). Регуляризация решения задач идентификации математических моделей теплообмена в технических системах, в которых тепловые процессы (в первую очередь, излучение) нелинейны, чаще всего производится с использованием метода итерационной регуляризации, применимость которого для задач такого рода подтверждена практически. Вариационный метод А.Н. Тихонова, напротив, теоретически обоснован в частных нелинейных случаях, но не имеет единого подхода к определению параметра регуляризации при неизвестной точности задания исходных данных.

Цель и задачи работы

Цель – математическая формализация метода тепловой отработки космических аппаратов на основе математического моделирования и решения обратных задач теплообмена, разработка метода итерационной регуляризации решения нелинейных задач на основе вариационного метода Тихонова и методологическое обоснование системного применения этих методов для создания новой космической техники.

Задачи:

– методологическая систематизация и математическая формализация расчетно-экспериментального метода тепловой отработки КА с использованием обратных задач;

– обоснование математической некорректности задач идентификации моделей с сосредоточенными параметрами и необходимости регуляризации их решения;

– термодинамическое обоснование инвариантности метода регуляризации для аналогичных физических процессов первого порядка по времени, описываемых уравнением теплопроводности, и обобщение результатов для технических, в частности, космических систем;

– разработка вариационного метода итерационной регуляризации, в том числе, аналитической методики определения параметра регуляризации на основе вариационного метода Тихонова и метода итерационной регуляризации задач идентификации тепловых математических моделей с сосредоточенными параметрами;

– проведение вычислительных экспериментов, подтверждающих работоспособность аналитических выражений параметра регуляризации для нелинейных задач;

– применение полученных результатов для идентификации математических моделей составных частей космических аппаратов, в частности, теплового сопротивления и излучательной способности ЭВТИ, тепловой проводимости контурных тепловых труб, а также оптимального управления теплофизическими системами КА.

Научная новизна результатов:

- методологически систематизирована и математически формализована тепловая обработка космических аппаратов на основе расчетно-экспериментального метода с использованием двухмодельного метода математического моделирования и модифицированного вариационного метода итерационной регуляризации решения задач идентификации;
- построена методика оценки точности математических моделей теплообмена в системах космических аппаратов;
- выведено уравнение для идентификации параметров граничных узлов термодинамически закрытых технических систем;
- получены аналитические выражения неопределенных множителей Лагранжа, входящих в выражение градиента функционала температурной невязки метода итерационной регуляризации, и аналитические выражения параметра регуляризации вариационно-итерационного метода на основе метода Тихонова;
- разработан модифицированный вариационный метод итерационной регуляризации решения задач идентификации и комбинированная методика определения параметра регуляризации на основе минимизации сглаживающего функционала и функционала невязки температуры.

Теоретическая и практическая значимость работы

Разработана системная методология тепловакуумной обработки космических аппаратов, основанная на расчетно-экспериментальном методе, двухмодельном методе математического моделирования, методе регуляризации решения задач идентификации и методе оценки точности математических моделей теплообмена в КА.

Построен модифицированный вариационный метод итерационной регуляризации (вариационно-итерационный метод) решения задач идентификации математических моделей теплообмена в КА, основанный на одновременной минимизации сглаживающего функционала и функционала невязки температуры, в том числе, аналитическая методика, позволившая вывести единые выражения параметра регуляризации (вариационный метод Тихонова) и шага спуска (метод итерационной регуляризации) для решения нелинейных задач теплообмена в технических системах КА.

Методология применена для систематизации тепловой обработки составных частей КА, подтвердившей достоверность, перспективность и эффективность расчетно-экспериментального метода в совокупности с задачами идентификации математических моделей, методами итерационной регуляризации решения задач идентификации и оценки точности тепловых расчетов.

Результаты диссертации обеспечивают возможность проведения окончательных тепловых анализов (расчет температурных прогнозов для летных испытаний) автоматических космических аппаратов с использованием математической модели, идентифицированной по

термобалансным испытаниям с учетом наземной тепловакуумной обработки аппарата, в соответствии с требованиями ГОСТ Р 56468-2015 – «Аппараты космические автоматические. Системы обеспечения теплового режима».

Научно-технические результаты работы соответствуют пункту «Транспортные и космические системы» перечня «Приоритетных направлений развития науки, технологий и техники в Российской Федерации и перечня критических технологий Российской Федерации».

Результаты работы применены при тепловой обработке составной части автоматического КА, разработанного ПАО «РКК «Энергия», для параметрической идентификации математической модели теплообмена в составной части КА, на основе которой выпущены расчеты, подтверждающие тепловые режимы летных испытаний этого изделия; рекомендуются к внедрению на предприятиях космической отрасли для повышения эффективности тепловой обработки КА и увеличения точности тепловых расчетов.

Методология и методы диссертационного исследования

Объект исследования – обобщенные математические модели с сосредоточенными параметрами, описывающие теплофизические процессы в системах космических аппаратов, методы идентификации их параметров и функций, регуляризации решения задач идентификации и применения идентифицированных параметров и функций в математических моделях теплообмена с распределенными параметрами.

Предмет исследования – расчетно-экспериментальный метод тепловой обработки космических аппаратов как совокупность проведения тепловых расчетов наземных и летных испытаний на основе математических моделей в распределенных (МРП) и сосредоточенных параметрах (МСП), идентифицированных по результатам тепловых вакуумных испытаний.

Обобщенные математические модели теплообмена формулируются в диссертации в трех видах: гипотетическая модель в виде системы N обыкновенных дифференциальных уравнений $dT_i/dt = f_i(T_1, T_2, \dots, T_N)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), функции f_i которой раскладываются в ряд Тейлора вблизи точки $(0, 0, \dots, 0)$; термодинамическая модель, характеризующая процесс изменения физической величины Y , имеющей поле с потенциалом Φ_Y и потоком \mathbf{Y} в среде со свойством ξ_Y (для теплофизических задач $Y = Q$ – количество тепла, Дж; $\mathbf{Y} = \mathbf{Q}$ – тепловой поток, Вт; $\Phi_Y = T$ – температура, К; $\xi_Y = \lambda$ – теплопроводность, Вт/(м·К)); теплофизическая модель теплообмена в технических системах космического аппарата.

На основе аналитического обзора литературы по методам регуляризации решения задач параметрической и функциональной идентификации математических моделей в распределенных и сосредоточенных параметрах и их применению в расчетно-экспериментальном методе тепловой обработки космических аппаратов определены пути развития этих методов в рамках системной методологии.

Она определяется как методология обратных задач, связывающих между собой математические и физические модели, рассматриваемые в единой системе, параметры и функции которой настраиваются решением задач идентификации. Основополагающими элементами методологии являются иерархическая идентификация [76], двухмодельный метод [115] и модифицированный вариационный метод итерационной регуляризации (вариационно-итерационный метод), разработанный в диссертации.

Модифицированный итерационно-вариационный метод представляет собой развитие метода простых итераций, неопределенный параметр которого является регуляризирующим и определяется из решения вариационной задачи минимизации сглаживающего функционала и функционала невязки теоретической и экспериментальной температур. Методика решения вариационной задачи определения параметра регуляризации построена на основе гипотетической математической модели и обобщена для теплофизической модели. Термодинамическая модель применена для доказательства математической некорректности задач идентификации полного набора неизвестных коэффициентов и функций моделей теплообмена с сосредоточенными параметрами и необходимости применения вариационного принципа отбора условно корректных решений этих задач.

Особое внимание уделено идентификации контактных тепловых проводимостей, которые в МСП теплообмена являются наиболее сложными функциями, зависящими от двух температур и времени. При наличии температурной зависимости искомые функции раскладываются в ряды по известным базисным функциям температуры, и задача сводится к идентификации функций времени, как и при наличии только временной зависимости. Поэтому практические примеры, рассмотренные в работе, касаются функциональной идентификации как общего подхода и для идентификации функций в пространстве параметров.

Модифицированный вариационный метод итерационной регуляризации проверен вычислительными экспериментами по идентификации контактных тепловых проводимостей МСП составной части КА, показавшими эффективность этого метода в случае задач с неустойчивым решением.

При помощи итерационно-вариационного метода идентифицированы теплофизические характеристики составных частей КА.

Положения, выносимые на защиту:

– системная методология тепловой отработки конструкций космических аппаратов и их составных частей расчетно-экспериментальным методом на основе методов двухуровневого математического моделирования, регуляризации решения задач идентификации математических моделей с сосредоточенными параметрами, вычисления погрешности проведенных по ним тепловых расчетов, оптимального

управления тепловыми режимами космических аппаратов по идентифицированным математическим моделям;

– модифицированный вариационный метод итерационной регуляризации (вариационно-итерационный метод) математически некорректного решения задач идентификации параметров и функций математических моделей теплообмена с сосредоточенными параметрами как метод простых итераций, неизвестный параметр которого является регуляризирующим;

– комбинированная методика определения параметра регуляризации из решения вариационной задачи минимизации сглаживающего функционала и функционала невязки расчетной и экспериментальной температур;

– методика оценки точности математических моделей теплообмена на основе аналогии погрешности нестационарного теплового расчета и функции отклика электронного измерительного устройства первого порядка производной по времени;

– уравнение для идентификации теплоемкости и тепловой проводимости граничных узлов термодинамически закрытых технических систем космических аппаратов;

– методика управления мощностью внутренних тепловых источников космических аппаратов по идентифицированным математическим моделям теплообмена с сосредоточенными параметрами.

Степень достоверности и апробация результатов

Тепловая отработка СЧ КА расчетно-экспериментальным методом, проведенная с использованием системной методологии, позволила обеспечить расчетные тепловые режимы СЧ при летной эксплуатации, что обосновано совпадением результатов тепловых расчетов составных частей КА с результатами тепловых вакуумных испытаний (ТВИ).

Как следствие, косвенно подтверждены двухуровневый метод математического моделирования, модифицированный вариационный метод итерационной регуляризации решения задач идентификации математических моделей теплообмена с сосредоточенными параметрами и методика оценки точности математических моделей.

В частном случае теоретически проверено уравнение для идентификации параметров граничных узлов термодинамически закрытых технических систем, являющееся результатом применения к ним методики оценки точности математических моделей теплообмена.

Вычислительными экспериментами для задач идентификации математических моделей теплообмена с неустойчивым решением проверен модифицированный вариационный метод итерационной регуляризации.

Отдельные результаты работы докладывались на IV и V Российской национальной конференции по теплообмену (2006 г., 2010 г.), XVI и XVII Школе-семинаре молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А. И. Леонтьева (2007 г., 2009 г.), IX Международной

молодежной научно-практической конференции «Человек и космос» (2007 г.), VI международной конференции «Авиация и космонавтика» (2007 г.), V Курчатовской молодежной научной школе (2007 г.), VI Минском международном форуме по тепло– и массообмену "MIF" (2008 г.), XV международной выставке-конгрессе «Высокие технологии. Инновации. Инвестиции» (2009 г.), V международном межотраслевом молодежном научно-техническом форуме «Молодежь и будущее авиации и космонавтики» (2013 г.), 13th European Conf. on Spacecraft Structures, Materials & Environmental Testing, Braunschweig, Germany, 1–4 April 2014 (ESA SP-727, June 2014), научно-технических семинарах в АО «Корпорация космических систем специального назначения «Комета» (2014 г, 2016 г.), Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (2015 г., 2016 г., 2018 г.), АО «Концерн ВКО «Алмаз – Антей» (2016 г.).

По теме диссертации опубликовано 32 научные работы [2], [205], [212-214], [234], [236-240], [242-257], [264-265], [270-272]; из них в рецензируемых изданиях и приравниваемых к ним – 16 работ [2], [205], [212-214], [234], [238], [240], [250-254], [256], [264-265].

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания № 9.9074.2017/БЧ Министерства образования и науки РФ.

1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ТЕПЛОВОЙ ОТРАБОТКЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

1.1. Тепловая отработка космических аппаратов расчетно-экспериментальным методом

1.1.1. Транспортные космические системы и спускаемые космические аппараты.

Наиболее значительными ограничениями, влияющими на выбор теплового режима космической системы, в зависимости от ее назначения являются условия функционирования в космосе, входа в плотные слои атмосферы, воздействия на элементы конструкции низкоинтенсивного ионизирующего излучения космоса, мощного излучения газовой струи двигательных установок или плазмы. При этом, могут иметь место постановки задач синтеза оптимального управления системой по критериям минимума массы, интегральных тепловых потоков за время полета, неперевышения заданной температуры конструкции и т. д., или минимума комплексного функционала. В общем случае задача может рассматриваться как обратная в экстремальной постановке, когда по известным условиям, определяющим тепловой режим системы, необходимо найти требуемые причинные характеристики, удовлетворяющие этому режиму и принятому критерию эффективности [1].

Математическая модель теплообмена в системе КА может строиться на базе моделей ее отдельных подсистем, элементов конструкции и тепломассообменных процессов, происходящих в них. Для выбора, корректировки и проверки состоятельности этих моделей могут широко использоваться экспериментальные исследования и, как следствие, обратные задачи идентификации математических моделей рассматриваемых подсистем или их тепловых режимов, а в дальнейшем и обработки результатов тепловых экспериментов и контроля характеристик в ходе отработки самой системы [1].

Наиболее характерными в этом отношении являются спускаемые космические аппараты (СКА). При отработке тепловых режимов СКА, входящих в плотные слои атмосферы планет, существенную роль играет система тепловой защиты. Экспериментальная отработка таких систем связана с решением ряда сложных проблем, одна из которых – анализ взаимодействия высокоэнтальпийного газа с материалами теплозащиты и выбор наиболее эффективных из них. Особенно актуальна задача восстановления тепловых граничных условий и температурного поля в материале по данным измерений температуры внутри образца при отработке тепловых процессов, протекающих в композиционных теплозащитных материалах, разрушающихся при интенсивном нагреве [1].

Постановки, расчетные схемы, алгоритмы и примеры решения одно- и двумерных задач радиационно-кондуктивного теплообмена для определения характеристик теплопереноса в материалах тепловой защиты приведены в

учебных пособиях [13-14]. Отдельные задачи моделирования теплообмена в пористых, полупрозрачных, разлагающихся и многослойных материалах тепловой защиты спускаемых аппаратов решены, в частности, в работах [15-25].

Все теплозащитные покрытия (ТЗП) подразделяются на две группы в зависимости от степени включения их в обеспечение несущей способности конструкции. Различают ТЗП с несущим корпусом (интегрального типа) и присоединенные, которые не выполняют силовых функций. К последним относятся плиточная, гибкая и черепичная ТЗП, разработанные для первого поколения воздушно-космических самолетов («Буран», «Спейс Шаттл») [25].

В настоящее время проектирование ТЗП из пористых материалов строится преимущественно с помощью математических моделей эффективной теплопроводности. Однако эффективная теплопроводность λ_{eff} является свойством не только материала, а представляет собой характеристику суммарного теплопереноса конкретной конструкции в определенных условиях взаимодействия с окружающей средой. Условия полета могут значительно различаться по скоростям нагрева, уровням и перепадам температуры, оптическим свойствам граничных поверхностей, а также уровням и скоростям изменения давления окружающей среды, что вызывает различие температурных и барометрических зависимостей λ_{eff} . Для создания ТЗП с оптимальными массово-геометрическими и экономическими характеристиками требуется определение этих зависимостей с необходимой точностью. Решение этой проблемы осложнено тем, что ни экспериментальный, ни теоретический методы не являются самодостаточными. Недостатки эксперимента – неполнота воспроизведения требуемых условий и погрешности измерений. Теоретические методы ограничены недостаточной глубиной знания физических явлений, приближенностью математических моделей и исходных данных, погрешностями вычислений и вычислительными ресурсами. Поэтому для обработки экспериментальных данных при определении λ_{eff} следует воспользоваться методами параметрической идентификации тепловых процессов, основанными на решении обратных задач [25].

Сравнение моделей эффективной теплопроводности и радиационно-кондуктивного теплообмена при проектировании теплозащитных покрытий многоразовых космических аппаратов показало, что использование модели эффективной теплопроводности приводит к завышению значений температур в волокнистом материале по сравнению с моделью радиационно-кондуктивного теплопереноса и, как следствие, к увеличению необходимой толщины теплоизоляционного материала [19].

Граничные условия для расчета радиационно-кондуктивного теплообмена теплозащитного материала спускаемого аппарата формируются как результат воздействия конвективного и радиационного потоков, определяемых по корреляционным соотношениям. Сравнительный анализ плотностей потоков конвективного и радиационного нагрева четырех типов

спускаемых космических аппаратов, для которых имеется значительное число расчетных данных разных авторов, показал удовлетворительное совпадение между ними. Однако использование разных моделей химической кинетики (модели Парка, Данна и Канга), разных моделей неравновесной диссоциации, а также разных спектральных оптических моделей приводит к заметному разбросу расчетных данных по интегральному радиационному потоку, что говорит о необходимости дальнейшего развития моделей этих процессов [26].

Влияние лучистого теплообмена на внешние поверхности КА при его движении в атмосфере планет по траектории спуска с учетом испарения теплозащитного покрытия, потери его массы вдоль траектории, сильного вдува продуктов испарения, ослабляющих тепловые потоки, падающие на приборный отсек аппарата теоретически исследовано в [27] и показано на примере решения задачи входа и посадки космического аппарата на поверхность Венеры. Методика расчета прогрева многослойной теплозащиты спускаемого аппарата при указанных воздействиях представлена в [28] и применена для условий входа в атмосферу Земли. Разработанные методики реализованы в виде программного обеспечения, на основе которого рассчитана тепловая защита СА для атмосфер Земли и Юпитера [30]. Также по этим методикам выполнено численное исследование теплового разрушения метеорита «Челябинск» при входе в атмосферу Земли [30].

По результатам экспериментальной отработки [32-33] материалов тепловой защиты спускаемого аппарата, входящего в атмосферу Марса, и расчетно-теоретического исследования [34] воздействия атмосферы Марса на СА при аэродинамическом торможении создана система обеспечения теплового режима десантного модуля КА «Экзомарс-2018» [31] и разработан программный комплекс для разработки систем тепловой защиты космических аппаратов, спускаемых в атмосферах планет [35].

К числу основных проблем, решение которых обеспечивает возможность многоразового использования космического корабля, относится сохранение целостности и работоспособности открытых поверхностей стыковочного агрегата (СТА) и СТА в целом, а также обеспечение приемлемых температурных условий внутри герметичного контура корабля с учетом теплопритока от плазмы через конструкцию СТА при спуске. При штатном спуске СА ориентируется лобовым теплозащитным щитом (ЛТЩ) по вектору скорости корабля, и основной тепловой поток воспринимается этим щитом. Стыковочный агрегат располагается на корабле с противоположной стороны щита и при штатном спуске находится в аэродинамической тени корабля. В этом случае на него действуют обратные потоки циркулирующей у донного среза корабля плазмы с относительно небольшим тепловым воздействием. При нештатном спуске не обеспечивается требуемая ориентация СА, поэтому большим тепловым потокам подвергается не только ЛТЩ, но и все другие поверхности СА, в

том числе открытые и закрытые поверхности СТА. Экспериментальная отработка тепловых режимов нештатного спуска крайне затруднена [36].

Ввиду сложности и многофакторности тепловых процессов, происходящих с различными элементами СТА, а также верификации возможности повторного использования СТА необходима разработка тепловой модели СТА высокого уровня в условиях спуска, обеспечивающей выполнение проектно-конструкторского анализа на ранних стадиях разработки СТА и создание инженерных методик проведения тепловых анализов агрегата [36].

Проблема тепловой защиты является центральной и для многоразовых ракет-носителей (РН) и аэрокосмических систем (АКС). Многоразовые теплозащитные покрытия (ТЗП) не должны необратимо изменять форму, размеры, аэродинамические и теплозащитные характеристики от полета к полету из-за физико-химических и структурных превращений. Поэтому для многоразовых ТЗП не пригодны относительно тяжелые аблирующие полимерные композиционные материалы (КМ), традиционно применяемые в одноразовых ракетах и спускаемых аппаратах. Системы тепловой защиты без необратимого нарушения термической стабильности конструкции можно подразделить на пассивные, активные и комбинированные [25].

В пассивных системах, разработка которых наиболее развита, блокируется передача теплоты внутрь силовой конструкции с помощью низкой теплопроводности и высокой теплоемкости материала, обратного рассеивания внутреннего потока излучения на оптических неоднородностях, экранирования и переизлучения внутренними слоями и с поверхности. Рекомбинация на поверхности подавляется. Основным преимуществом пассивных систем тепловой защиты является относительная простота их технической реализации и связанная с ней надежность функционирования. Жестким требованиям применения в таких системах удовлетворяют материалы из волокон SiO_2 , Al_2O_3 , имеющие пористость более 90% и обладающие высокой термической и химической стойкостью. Образующие их волокна частично прозрачны для внешних источников излучения и собственного излучения в видимом диапазоне и в части инфракрасного диапазона. В таких материалах перенос энергии осуществляется одновременно теплопроводностью, излучением и конвекцией с преобладанием радиационно-кондуктивного теплообмена, а физико-химические превращения в эксплуатационном диапазоне температур исключаются [25].

В активных системах используется жидкий и газообразный охладитель. Подача охладителя позволяет отвести избыток теплоты с тыльной поверхности или из объема при напорной фильтрации через пористый материал либо через отверстия, снять избыток теплоты с помощью физико-химических превращений и создать завесы на нагреваемой поверхности. Активные системы тепловой защиты, как правило, технически сложнее пассивных. Наличие емкостей с охладителем, трубопроводов, насосов или

аккумуляторов давления и других вспомогательных устройств снижает их массово-геометрическую эффективность. Однако, они могут обеспечить снижение температуры защищаемой поверхности до приемлемого уровня, позволяющего использовать существующие конструкционные материалы [25].

Аналогичную ТЗП классификацию (активные, пассивные, комбинированные) имеют и системы обеспечения теплового режима (СОТР) или системы терморегулирования (СТР) РН, АКС, КА, СКА и разгонных блоков (РБ) – только в активных системах могут использоваться как жидкие и газообразные теплоносители, так и теплообменные агрегаты, холодильные машины, тепловые трубы, и др. Основные этапы проектирования и отработки СОТР рассмотрим на примере разгонного блока «Фрегат» (РБФ): определение состава и комплектации СОТР; расчетное определение параметров элементов СОТР; проведение тепловакуумных испытаний (ТВИ); сравнение результатов расчета и испытаний; корректировка тепловой математической модели СОТР; перерасчет проектных параметров и получение телеметрической информации (ТМИ) о тепловом режиме РБФ при его летных испытаниях [37-38].

Разгонный блок «Фрегат» предназначен для эксплуатации в составе современных РН «Союз», «Зенит» и перспективных РН «Ангара». После старта РН, сброса головного обтекателя (ГО) и отделения головного блока (ГБ) от третьей ступени РН разгонный блок «Фрегат» вместе с полезной нагрузкой выводится на опорную орбиту. Далее, после первого включения двигательной установки, ГБ переходит на промежуточную орбиту и затем, после следующих включений двигательной установки, переходит на орбиту отделения КА. После сброса ГО поверхности РБФ подвергаются воздействию тепловых потоков, обусловленных прямым солнечным излучением, альбедо и собственным излучением Земли. Указанные потоки рассчитываются по параметрам орбиты и ориентации поверхностей РБФ по отношению к Солнцу и Земле для каждого момента времени согласно программе ориентации ГБ [37-38].

Одной из отличительных особенностей разгонного блока «Фрегат» является то, что его двигатель должен обладать предельно высоким удельным импульсом. Наряду с этим конструкция РБФ должна удовлетворять высоким требованиям со стороны запускаемых КА по соблюдению чистоты, так как они в связке находятся в одном объеме под ГО. Поэтому СОТР РБФ также должна обеспечивать выполнение и этих требований. Для выполнения первого из них СОТР должна термостатировать баки горючего и окислителя МДУ так, чтобы разность температур компонентов топлива на входе в камеру смешения двигателя в зоне топливозаборников не превышала 5 К. Чтобы выполнить второе требование, из конструкции СОТР исключаются материалы, загрязняющие пространство в зонах размещения РБФ и КА под ГО и их собственной внешней атмосферы при совместном полете. С целью удовлетворения всей совокупности

изложенных требований в конструкции СОТР РБФ использованы следующие основные элементы [37-38]: газоциркуляционные подсистемы терморегулирования с радиаторами-излучателями избыточного тепловыделения или приборами РБФ в герметичных отсеках; экранновакуумная теплоизоляция (ЭВТИ) из «беспылевых» материалов на внешних поверхностях элементов РБФ; электронагреватели для компенсации недостатка тепловыделения приборами РБФ; элементы крепления, обеспечивающие калиброванные термические связи между различными узлами конструкции разгонного блока.

Автономные одноконтурные газоциркуляционные системы применяются в СОТР РБФ для обеспечения теплового режима приборов в гермоотсеках. В качестве теплоносителя используется азот, циркулирующий по замкнутому контуру, образованному разделяющимися после напорного вентилятора двумя газоходами, между корпусом приборного отсека и радиатором-излучателем, в качестве которого используется не закрытая ЭВТИ поверхность крышки каждого из приборных отсеков [37-38].

В рамках исследования процесса теплового разрушения разгонного блока «Фрегат» при сходе с рабочей орбиты и спуске в атмосфере Земли определены траектория спуска и характеристики аэродинамического нагрева, исследован процесс повышения давления в баках за счет нагрева и испарения жидкой фазы топлива, рассчитаны напряжения в оболочках, высота и энергетический эквивалент взрывного разрушения баков в зависимости от степени заполнения их остатками компонентов жидкого топлива [39].

Усовершенствованный РБ «Фрегат-СБУ» предназначен для перспективных ракет космического назначения среднего класса «Союз-5» и разрабатывается для следующих целей: обеспечение полного использования энергетических возможностей РН «Союз-5»; повышение конкурентных возможностей отечественных средств выведения КА на высокоэнергетические орбиты на мировом рынке коммерческих услуг; реализация единой концепции систем запусков КА с космодромов Байконур, Восточный и платформы «Морской старт», одной из составляющих которой является применение системы двойного запуска КА. Результаты сравнительного анализа энергетических возможностей РБ «Фрегат-СБУ» и возможностей РБ типа ДМ подтверждают конкурентные преимущества РБ «Фрегат-СБУ», что в значительной мере связано с использованием топливных компонент НДМГ и АТ вместо жидкого кислорода и керосина в РБ ДМ, а также с меньшей высотой блока, обеспечиваемой эффективными компоновочными решениями [40].

Системы обеспечения теплового режима разгонных блоков типа ДМ, их назначение, состав и эволюция по мере изменения конструкции РБ рассмотрены в [41].

Необходимый тепловой режим приборного отсека (ПО) во время предстартовой подготовки продолжительностью не более трех часов с учетом его предварительного захолаживания с помощью воздушной СОТР

стартового комплекса обеспечивается за счет аккумуляции избыточного тепла теплоинерционной массой приборно-агрегатного оборудования и корпуса ПО. Такое решение принято на основании математических расчетов и к настоящему времени подтверждено результатами штатной эксплуатации системы [41].

Задача перераспределения тепла для РБ ДМ, вся аппаратура которого в основном располагается в торовом ПО, решена за счет организации необходимой вентиляции внутри отсека. Охлаждение воздуха происходит в испарительном теплообменнике за счет теплоты испарения хладагента (спиртово-водный раствор), пары которого удаляются в окружающую среду [41].

1.1.2. Долгоресурсные космические аппараты с негерметичным приборным отсеком.

С начала девяностых годов прошлого века создается новое поколение российских долгоресурсных конкурентоспособных космических аппаратов связи с крупногабаритным негерметичным приборным отсеком в форме параллелепипеда, представляющим сборную на основе плоских прямоугольных трехслойных сотовых панелей блочно-модульную конструкцию, несущую теплонагруженную бортовую аппаратуру (БА) и выполняющую одновременно силовую, тепловую и защитную от ионизирующих излучений функции [42]. Для обеспечения теплового режима БА применяется пассивная система терморегулирования (ПСТР) на базе оптических покрытий и нерегулируемых низкотемпературных тепловых труб (НТТ) различной конфигурации и типов профилей в сочетании с системами электроподогрева. К данному классу КА предъявляются повышенные требования по точности проектных оценок тепловых режимов БА и теплового состояния элементов конструкции в реальных условиях эксплуатации на геостационарной орбите (ГСО), в том числе, при возникновении аварийных ситуаций [43].

Для таких КА разработаны физические и динамические тепловые математические модели в распределенных и сосредоточенных параметрах, вычислительные алгоритмы, программное обеспечение и получены результаты численных расчетов радиационно-кондуктивного теплообмена в несущих теплонагруженную БА блоках и модулях негерметичного приборного отсека с улучшенными по сравнению с традиционными гермоотсеками массогабаритными и энергетическими характеристиками [42-43].

Важнейшими элементами радиационно-кондуктивного теплообмена в негерметичном приборном отсеке долгоресурсного КА связи в условиях эксплуатации на ГСО являются [43]: внешний теплообмен на приборно-радиаторных и радиаторных панелях, а также съемных крышках; внутренний радиационный теплообмен; тепловыделение, в том числе по циклограммам, приборов БА; теплопроводность в трехслойных сотовых панелях;

теплоперенос в НТТ с учетом специфики их прокладки и работы в панелях МПН и МСС; контактный теплообмен.

Некоторые принципы построения СОТР негерметичных КА сформулированы на примере многофункциональной космической платформы «Навигатор» [44], приборного отсека посадочного модуля «Луна-глоб» [45], космических аппаратов «Электро Л» и «Спектр Р» [46] и для малых КА [47]. Как правило, используется пассивная СОТР, совмещенная с конструктивными элементами, выполняющими терморегулирующие функции, к которым относятся приборные сотовые панели со встроенными тепловыми трубами, установленными электронагревателям и нанесенными на внешние поверхности термооптическими покрытиями. Отвод тепла от приборно-агрегатного оборудования, установленного на внутренних поверхностях панелей, осуществляется теплопроводностью к тепловым трубам, выравнивающим температурное поле и направляющих тепловой поток к внешней поверхности панелей, на которых расположено излучающее покрытие. Поверхности, не выполняющие роль радиаторов, теплоизолированы. Температурный режим панелей поддерживается при помощи нагревателей, устанавливаемых на внутренних поверхностях над тепловыми трубами.

Для перераспределения тепла между панелями и теплоотвода к выносным радиаторам могут использоваться нерегулируемые или контурные тепловые трубы. Методы регулирования контурных тепловых труб рассмотрены в [48]. Теплоносители для внутренних контуров СТР (систем терморегулирования) КА рассмотрены в [49]. Температура в наружных контурах может опускаться до минус 80 °С и ниже. В наружных контурах применяются однофазные и двухфазные теплоносители с низкой температурой замерзания. В автоматических КА используются СТР с теми же низкотемпературными жидкостями, что и в наружных контурах пилотируемых аппаратов, а также тепловые трубы и активные системы с принудительной циркуляцией жидкости, заправленные двухфазным теплоносителем [50].

Математическое моделирование теплопереноса в однополочных нерегулируемых тепловых трубах, встроенных в анизотропный сотовый наполнитель по внутренним и внешним обшивкам трехслойных панелей негерметичного приборного отсека, проводится в рамках кондукционных динамических тепловых математических моделей в сосредоточенных параметрах, представляющих собой систему уравнений теплового баланса и начальных условий для каждого i -го элемента (зон испарения, транспорта, конденсации и пара) [51].

Модели в сосредоточенных и распределенно-сосредоточенных параметрах использованы в расчетах радиационно-кондуктивного теплообмена при функционировании приборов бортовой аппаратуры и сети нерегулируемых тепловых труб в негерметичном приборном отсеке [52]; в нетрадиционном Н-образном блоке модуля служебных систем [53]; модуле

полезной нагрузки [54] негерметичного приборного отсека в условиях орбитальной эксплуатации; для численного моделирования теплофизических процессов в типичном модуле приборного отсека космического аппарата связи и анализа распределения температурного поля по приборам радиоэлектронной БА [55], внутреннего переизлучения и функционированию тепловых труб в модуле [56-57].

При исследовании теплового режима космического аппарата, как и любой другой технической системы, имеет место эволюционный процесс определения и обобщения закономерностей его функционирования, который заключается в исследовании реакции рассматриваемой конструкции на изменение внешних воздействий, параметров системы, применяемых материалов и т. д. Наиболее успешно эволюционный процесс анализа теплового режима КА может быть реализован, если при формировании математических тепловых моделей и соответствующего алгоритмического обеспечения предусмотрена возможность их комбинаторного изменения [58].

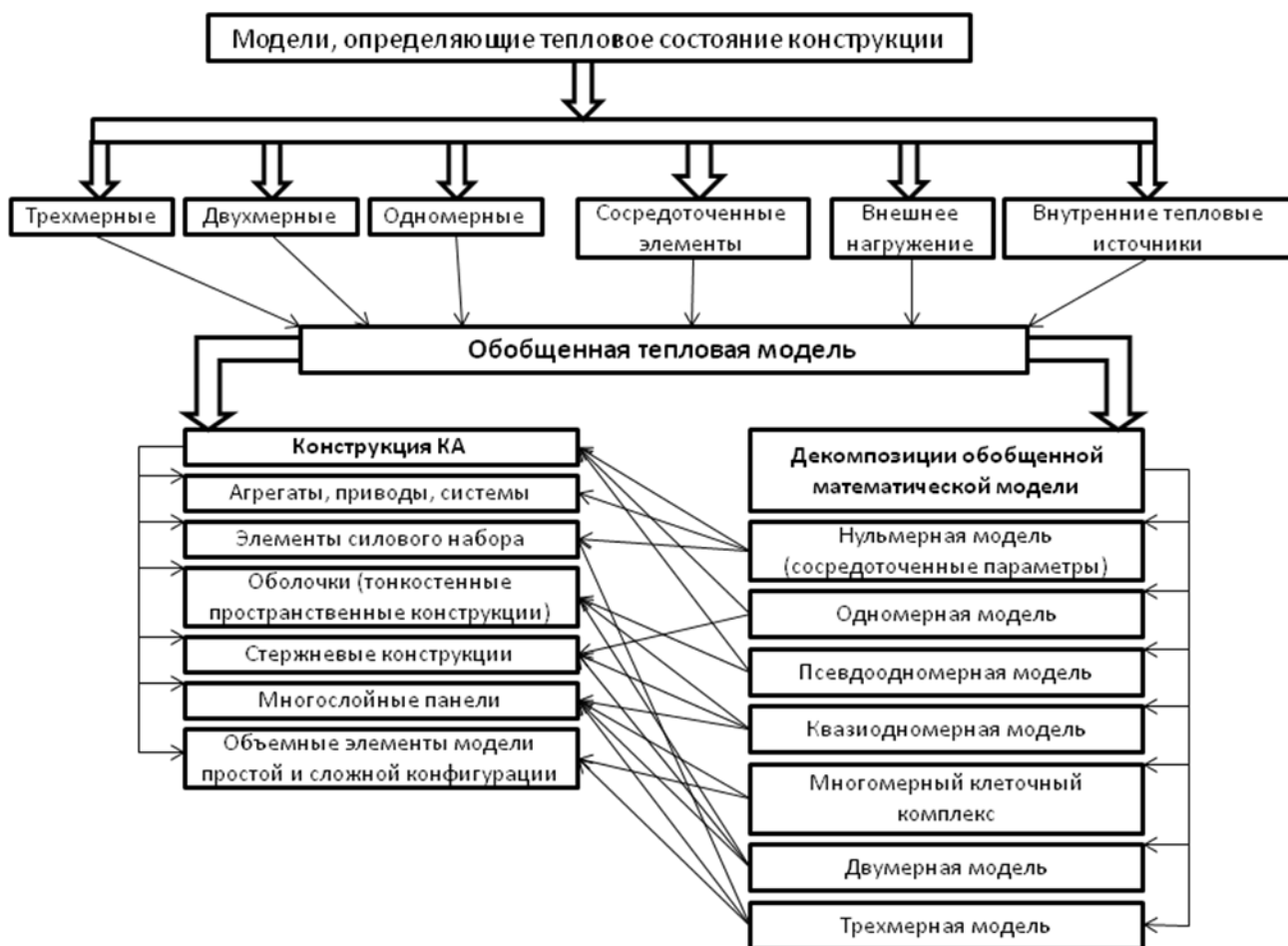


Рисунок 1.1 – Структура комплекса математических моделей теплового режима конструкций космических аппаратов

В процессе комбинаторного анализа теплового состояния КА возможно изменение как параметров, так и структуры исходной тепловой модели, включая изменение моделей рассматриваемых процессов, условий

примыкания, балансных соотношений, числа элементов в тепловой модели. Альтернативой изменению параметров является формирование новой, соответствующей целям конкретного исследования структуры тепловой модели. Это, в частности, может быть реализовано посредством изменения размерности модели (рисунок 1.1) [58].

Другой путь решения задачи комбинированного метода расчета, основанного на использовании положительных сторон каждой из групп методов, состоит в том, чтобы, разбивая конструкцию на подобласти (подконструкции) канонической и неканонической форм, для расчета температур в одних использовать разностные, а в других – конечно-элементные методы решения, обеспечив алгоритмы безытерационного сращивания решений в подобластях и общее решение для всей конструкции. При этом, должны быть соблюдены также условия технологичности реализации метода: произвольность порядка расчета подобластей, несогласованность сеток и разбиений на элементы смежных подобластей. Чтобы обеспечить условия технологичности при безытерационном сращивании разностных и конечно-элементных решений, а также последних между собой при несогласованном разбиении смежных подобластей, необходимо в рамках конечно-элементного решения определить зависимость между тепловыми потоками и температурами в узлах стыковки, в общем случае не совпадающих с узлами конечно-элементного разбиения подобласти [59].

Одним из наиболее сложных вопросов математического моделирования теплового состояния негерметичного КА является определение внешнего и внутреннего лучистого теплообмена. Для его решения внешние и внутренние поверхности КА предлагается рассматривать как совокупность конечного числа изотермических элементов. Плотность теплового потока излучения, падающего на каждый из этих элементов, определяется при следующих условиях [60]:

1. КА может находиться в заданном поле лучистых потоков, исходящих от Солнца и, если аппарат находится на невысокой околопланетной орбите, от планеты;

2. находящиеся в теплообмене поверхности КА могут иметь сложную геометрическую конфигурацию, вследствие чего возможно взаимное затенение некоторых поверхностей от излучения внешних источников лучистых потоков и от излучения поверхностей самого КА;

3. в пределах каждого изотермического элемента (участка поверхности КА) радиационные характеристики должны быть однородными.

Задача радиационного теплообмена решается при следующих допущениях [60]:

1. участвующие в теплообмене поверхности являются диффузными, т. е. направленные излучательная и поглощательная способности этих поверхностей не зависят от направления;

2. поверхности являются серыми в двух характерных спектральных диапазонах: в диапазоне длин волн от 0.2 до 2 мкм, где сосредоточена практически вся энергия излучения Солнца, и в диапазоне от 5 до 50 мкм, в котором испускается большая часть энергии собственного излучения тел, имеющих умеренную температуру на уровне от 200 до 500 К;

3. в пределах каждого участка разбиения поверхности КА на изотермические элементы плотность потока падающего излучения однородна по поверхности участка.

Геометрическая модель исследуемого объекта составляется в виде множества точек, для которых задаются координаты в какой-то выбранной пространственной системе координат, координаты направленного на Солнце единичного вектора и координаты единичного вектора, направленного на центр планеты, если рассматривается околопланетный аппарат. В последнем случае задается также высота орбиты, радиус планеты и радиационные характеристики поверхности планеты. На основе координат точек формируются поверхности аппроксимирующих многогранников, определяются координаты центральных точек каждой грани, вычисляются площади граней и направляющие косинусы их нормалей, что позволяет определить и уточнить распределение по поверхности объекта плотности падающего потока излучения, включая тепловые потоки от Солнца и планеты [60].

Условия освещенности поверхности КА и время возможного нахождения аппарата в тени от Земли при его переходе с орбиты ожидания на ГСО при заданных радиусе круговой орбиты ожидания, наклонении плоскости орбиты, долготы и различных начальных положениях КА с орбиты ожидания исследованы с использованием математической модели движения КА в проекциях на оси инерциальной системы координат. Расчеты параметров движения КА от орбиты ожидания до ГСО проведены для случая использования двухимпульсного перелета. Анализ результатов расчетов показал, что при фиксированных величинах параметров орбиты ожидания, условия освещенности поверхности КА при его движении по переходной эллиптической орбите во многом определяются начальным положением КА в момент старта с орбиты ожидания. Время нахождения КА в тени от Земли в основном определяется величиной нормальной составляющей скорости. При использовании двухимпульсного перелета по вытянутой эллиптической орбите величина нормальной составляющей скорости значительно уменьшается при подходе КА к ГСО. Поэтому максимальное время нахождения КА в тени от Земли определяется на момент подхода КА к ГСО. При соответствующем выборе момента старта КА с орбиты ожидания и положения Солнца можно избежать попадания аппарата в тень от Земли на конечном участке переходной орбиты [61-63].

1.1.3. Оптические системы и телескопы.

Одним из назначений КА с негерметичными приборными отсеками является сканирование поверхности Земли в оптическом и инфракрасном

диапазонах, прием и передача данных в радиодиапазонах, а также наблюдение за космическим пространством при помощи оптических и радиотелескопов.

Зона наблюдения оптической системы и ее освещенность Солнцем регулируются при помощи бленды. Для защиты фотоприемников на геостационарном космическом аппарате разработана и отработана в гелиевой криовакуумной камере перспективная поворотная бленда, перемещаемая при помощи электроприводов [64].

Тепловой режим точных оптических систем обеспечивается при помощи одного или двух контуров криогенного охлаждения. Тепло от внешнего контура отводится при помощи регулируемых или нерегулируемых тепловых труб и передается к криогенному радиатору. Для охлаждения внутреннего контура могут использоваться холодильные машины или криогенный излучающий холодильник [65].

Физическое и математическое моделирование распределения температур в криогенном излучающем холодильнике (КИХ) фотоприемников инфракрасного диапазона геостационарного метеорологического спутника «Электра-1» обеспечило оптимальное соотношение размеров радиаторов, при которых достигается наибольшая хладопроизводительность. В результате, был осуществлен первый успешный полет КИХ в составе этого спутника [65].

При помощи математического моделирования с использованием программного обеспечения рассмотрены вопросы обеспечения тепловых режимов космического солнечного телескопа и сканирующего земную поверхность устройства (многоканального спектрофотометра), определены температуры оптических приборов при движении КА по орбите [66].

В [67] представлены результаты разработки СОТР телескопа Т-170М и бортового комплекса научной аппаратуры космического аппарата «Спектр-УФ». СОТР состоит из автономных средств обеспечения теплового режима конструктивных составляющих телескопа и научной аппаратуры: узла главного зеркала и тубуса, модуля вторичного зеркала, инструментального отсека, приборных панелей внешнего расположения. Принципиально СОТР не отличается от аналогичных систем негерметичных приборных отсеков, хотя и имеет повышенные требования к температурным полям отдельных элементов. Например, при номинальной рабочей температуре главного зеркала 20 °С допускается перепад температуры в осевом направлении не более 3.5 °С, в диаметральной – не более 6.0 °С, скорость изменения температуры – не более 2.0 °С за сеанс. Построенные математические модели теплообмена показали перепад температуры по толщине главного зеркала не более 1.5 °С, а по диаметру на рабочей поверхности – не более 1.1 °С.

Таким образом, к математическим моделям оптических систем предъявляются высокие требования, так как диапазоны изменения температурного поля расчетных элементов зачастую сопоставимы с погрешностью тепловых расчетов, и современные методы и средства

математического моделирования должны быть способны обеспечить требуемую точность.

1.1.4. Антенны и радиотелескопы.

СОТР космического радиотелескопа (КРТ) КА «Спектр-Р» описана в [68]. СОТР КРТ состоит из нескольких автономных СОТР каждой составляющей корпуса научной аппаратуры: контейнера научной аппаратуры (КНА), фокального контейнера (ФК), холодной плиты (ХП) с размещенными на ней маломощными усилителями (МШУ) и блоком антенных облучателей (БАО), платформы радиопередающей аппаратуры (ПРД), платформы приборов фазовой синхронизации (ПФС), рефлектора и проставки КРТ, аппаратуры бортового водородного стандарта чистоты (БВСЧ). КНА и ФК КРТ герметичны, и тепловой режим внутри них обеспечивается циркуляцией теплоносителя, избыточная температура которого отводится на излучающую внешнюю поверхность корпуса. Тепловые режимы платформ и БВСЧ обеспечиваются как для негерметичных модулей при помощи тепловых труб, электронагревателей и радиаторов с необходимыми покрытиями. Температурные требования определяются рабочими температурными диапазонами блоков аппаратуры и необходимостью поддержания геометрической стабильности КРТ. Наиболее требовательной к тепловому режиму является аппаратура БВСЧ: температура в зоне посадочных мест оснований корпусов должна находиться в пределах $+30\pm 5^\circ$ с точностью $\pm 1^\circ\text{C}$ в течение всего времени проведения эксперимента в составе КРТ КА; скорость изменения температуры основания корпуса БВСЧ в зоне посадочного места за промежутки времени 1000 с, включающий одно измерение средней температуры, и 13 ч, разделяющий два соседних измерения, между которыми температура не должна измениться более, чем на величину $\pm 0.3^\circ\text{C}$, что также требует обеспечения высокой точности тепловых расчетов.

С целью защиты радиационных поверхностей ФК от прямого солнечного излучения при штатной ориентации КА «Спектр-Р» используется защитный экран [68]. Аналогичное техническое решение предложено для КА «Интергелио-зонд», предназначенного для исследования внутренней гелиосферы и Солнца с близких расстояний [69]. В последнем случае экран предназначен также для защиты от высокой температуры (до 600°C на внешней обшивке конструкции при плотности лучистого теплового потока 17500 Вт/м^2), потока солнечной радиации (ионизирующее излучение космического пространства $2.5\times 10^6\text{ Рад}$) и ударов метеорных потоков. Приведенным требованиям удовлетворяют углерод-углеродные композиционные материалы, для исследования теплофизических свойств которых широко применяются задачи идентификации.

Для условий воздействия электронного и протонного облучения на орбите эксплуатации КА «Спектр-РГ» разработана антибликовая ЭВТИ [70], теплофизические и оптические свойства которой исследуются при помощи обратных задач теплообмена.

Прием и передача данных на КА осуществляются малонаправленным (МНА) и остронаправленными (ОНА) антеннами, пассивными (ПФАР) или активными (АФАР) фазированными антенными решетками.

МНА устанавливаются на корпусе КА с учетом его ориентации во время полета и имеют обычно достаточно широкий допустимый диапазон рабочей температуры, что избавляет от необходимости применения СОТР или СТР.

Основные элементы СОТР АФАР и конструктивные элементы, участвующие в терморегулировании, такие же, как и для негерметичного отсека: сотовые панели с внутренними и коллекторными тепловыми трубами; контурные тепловые трубы, имеющие функцию теплопроводов к радиатору; электронагреватели, термооптические покрытия, различные теплоизолирующие материалы и ЭВТИ. Поэтому математическое моделирование теплового состояния АФАР на расчетной орбите проводится аналогично негерметичному отсеку.

ОНА в рабочем режиме должны быть ориентированы в определенную точку пространства, что приводит к необходимости использования электропривода и обеспечения его теплового режима. Условия освещенности КА, влияя на распределение температуры в отражателе ОНА или радиотелескопа, могут вызывать отклонение конструкции отражателя от начальной формы и ухудшение передающей способности антенны [63], поэтому отражатель также имеет собственный рабочий температурный диапазон: допустимое отклонение профиля рефлектора определяется величинами от $\Lambda/16$ до $\Lambda/50$, где Λ – длина волны, на которой работает антенна [71].

Сравнение температурных полей рефлекторов, найденных при помощи модели нелинейной теплопроводности (НЛТ) и радиационно-кондуктивного теплообмена (РКТ), показало, что температуры, полученные по модели РКТ для теневого участка орбиты, выше температур, найденных по модели НЛТ. В результате моделирования найдено, что тонкостенные элементы отражателя в теневой области орбиты могут охлаждаться до температуры менее 100 К, а на освещенных участках нагреваться до 400 К со скоростью изменения температуры выше 10 К/с, причем, температура полотна зависит от теплофизических и оптических свойств, для измерения которых стандартными приборами разработаны специальные методики [71].

Лабораторные исследования по методикам [71] позволили измерить оптические свойства и удельную теплоемкость металлических сетевых полотен, предназначенных для использования в рефлекторах. Металлическое сетеполотно имеет практически неселективное пропускание в обширной области спектра, его поглощательная способность с увеличением длины волны падает, а отражательная – слабо растет с увеличением длины волны. Отражение излучения от поверхности полотна имеет диффузный характер.

С использованием рассчитанных температурных полей проведено моделирование температурного и напряженно-деформированного состояний

рефлектора зеркальной космической антенны, устанавливаемой на космическом аппарате в условиях ГСО и низкой околоземной орбиты [72].

Проведено моделирование температурного поля перспективного рефлектора диаметром 100 м (существующая технология позволяет создавать сетчатые рефлекторы диаметром до 50 м), состоящего из силовых стержневых элементов, которые являются основой для металлического сетеполотна, и тросов из полимерных материалов, служащих для регулирования и поддержания заданной формы сетчатой поверхности. По результатам расчета, перепады температуры в конструкции рефлектора достигают 190 К, а на поверхности полотна имеются зоны пониженной температуры, связанные с его затенением силовыми стержневыми элементами. По результатам теоретического анализа, влияние теплопроводности композиционного материала силового каркаса на его температурное поле значительно, а теплопроводности сетевого полотна на его температурное состояние – крайне мало [73].

Для определения характеристик теплопереноса силовых тросовых элементов сформулированы условия проведения экспериментальных исследований, выбрана схема проведения эксперимента, исследовано влияние основных факторов на температурное состояние объекта испытаний, выполнена оценка методических погрешностей измерения температуры контактными датчиками, решена задача планирования температурных измерений для определения характеристик теплопереноса тросовых элементов [74].

С целью исследования тросовых элементов в условиях симметричного нагрева была разработана и изготовлена установка, на которой проведены экспериментальные исследования. Выполнен сравнительный анализ расчетных и экспериментальных значений температуры и на основе решения обратной задачи определена теплопроводность тросового элемента в продольном направлении [75].

1.1.5. Систематизация расчетно-экспериментального метода.

Как и в других областях науки и техники, в теплофизике свойства материалов и конструкций определяются экспериментально. Чем сложнее состав материала или структура конструкции, тем сложнее зависимости температурного поля от их характеристик. Поэтому измерения температуры дают лишь косвенную информацию о теплофизических и оптических свойствах, а косвенное измерение свойств по этой информации приводит к той или иной постановке обратной задачи теплообмена – диагностике граничных условий математической модели или ее параметрической идентификации. Основанный на таких задачах расчетно-экспериментальный метод позволяет построить единую систему математических и физических моделей путем введения обратной связи между теоретическими и экспериментальными данными в виде обратной задачи теплообмена.

Методология разработки новых теплотехнических систем и технологий их производства включает с точки зрения математического моделирования

тепловых процессов, протекающих в них, следующие этапы [76]: проектирование, содержащее структурную и параметрическую оптимизацию системы или процесса [77-82]; многофакторную настройку на оптимальный режим функционирования – оптимальное планирование теплофизического эксперимента [83-104]; оптимальное управление системой или процессом в реальном масштабе времени [105-114].

Сложность реализации представленной методологии разработки тепловых систем и технологий заключается в том, что все эти этапы требуют наличия математической модели, построение которой методологически идентично – модель проектируется, идентифицируется и применяется для расчетов в определенном масштабе времени. По этой причине структурную и параметрическую идентификацию математической модели предлагается проводить в два этапа в рамках проектных и поверочных тепловых расчетов наземных и летных испытаний систем КА, которые выполняются до и после их экспериментальной отработки [2].

Один и тот же процесс может быть представлен множеством моделей, различающихся числом факторов, полнотой, точностью описания и сложностью модели. В соответствии с целевым назначением каждого этапа математические модели тепловых процессов состоят из различных наборов параметров, управляющих воздействий или параметров оптимизации и включают различные ограничения и допущения. Поэтому идентификацию тепловых процессов целесообразно осуществлять на нескольких уровнях в зависимости от этапов разработки в рамках иерархической системы. Иерархическая система идентификации включает следующие элементы [76].

1. Совокупность моделей, описывающих тепловые процессы и функционирование теплотехнической системы или технологии. При этом, модели в виде краевых задач содержат информацию о физике процесса, а математические модели регрессионного типа – структуру и функциональные связи действующих факторов.

2. Совокупность моделей качества, определяющих по заданным критериям оптимальности степень сложности и детализации модели на отдельных этапах разработки.

3. Замкнутые контуры структурной и параметрической идентификации, обеспечивающие оптимальность модели по заданным критериям.

4. Условия, вид и сочетание натуральных и вычислительных экспериментов – включение и натурального, и вычислительного эксперимента в единый итерационный процесс параметрического синтеза.

В пределах методология тепловой отработки и применения космических систем должна основываться на единых математических моделях теплообмена, которые могут иметь несколько уровней детализации. Эти модели используются для проектирования систем КА, участвуют в планировании эксперимента, проходят качественную и количественную идентификацию после наземных испытаний и затем программируются в системах управления для обеспечения теплового режима КА.

Для этих целей хорошо подходят нейронные сети и близкие к ним по смыслу математические модели с сосредоточенными параметрами, которые могут быть представлены как полные нейросети с нейронами в виде узлов модели и синапсами в качестве тепловых связей. Тогда идентификация МСП аналогична по смыслу обучению нейронной сети, а применение МСП в системах управления – функции принятия решения обученной нейросетью в условиях, отличающихся от тех, которые присутствовали в обучающей выборке при наземных испытаниях.

1.2. Диагностика граничных условий

1.2.1. Теплообмен на неподвижной границе твердого тела.

В области диагностики теплообмена на неподвижной границе твердого тела разработан двухмодельный метод, позволяющий уменьшить расчетное время за счет перехода от точной к приближенной модели: эффективность метода определяется алгоритмизацией решения обратной задачи для приближенной модели и прямой задачи для точной [115].

Метод итерационной регуляризации усовершенствован отображением решения обратной задачи из гильбертова пространства в пространство Соболева, которое, как показали вычислительные эксперименты, придает регуляризирующему алгоритму сглаживающие свойства и большую устойчивость к погрешности температуры по сравнению с гильбертовым пространством [116].

В двумерной постановке при условии зависимости теплопроводности и теплоемкости только от координат обратная задача восстановления граничных условий сведена к начально-краевой на основе интегро-дифференциальных уравнений [117].

В одномерной постановке найдено аналитическое решение нелинейной задачи диагностики плотности теплового потока при малой теплопроводности и независимости теплофизических свойств от температуры [118].

Задача диагностики сведена к системам интегральных уравнений сверточного типа при переменных по координате и во времени граничных условиях [119].

В части практического применения задач диагностики на неподвижной границе твердого тела рассмотрен метод решения обратной граничной задачи теплопроводности по восстановлению тепловых потоков к элементам конструкций летательных аппаратов, изготовленных из анизотропных материалов [120].

Численно решены трехмерные прямая и обратная задачи теплообмена при сверхзвуковом пространственном обтекании головной части летательного аппарата в форме затупленного по сфере конуса. Показана перспективность применения высокотеплопроводных материалов и вдува газа-охлаждителя для снижения максимальных температур на поверхности обтекаемого тела. Проведено сравнение решений прямой и обратной задач в

одно-, двух- и трехмерных постановках для различных материалов оболочки. Оценена погрешность восстановления теплового потока с помощью метода тонкой стенки [121].

Приведен алгоритм решения обратной задачи восстановления фрикционного тепловыделения в подшипниках по температурным данным. Использован метод итерационной регуляризации на основе градиентных методов минимизации функционала. Вычислительными экспериментами показана эффективность данного метода [122].

Идентифицирован тепловой поток, получаемый от тормозного диска при сухом трении о тормозную подушку, когда скорость изменяется во времени. Использована редуцированная модель, основанная на методе сокращения собственных мод, ориентированном на переходные процессы. На основе этой модели последовательно формулируется постановка обратной задачи идентификации плотности теплового потока. Анализ диффузии и теплопередачи позволил получить двойной критерий для временного шага вычисления. Этот критерий приводит к малому значению временного шага, не совместимому с масштабом реального времени. С использованием низкочастотной фильтрации процедура идентификации обеспечивает удовлетворительные результаты даже при наличии гауссовских шумов и систематической погрешности, что позволяет решать задачу идентификации в реальном времени [123].

Решена обратная задача теплопроводности с целью выявить граничные условия на огневой поверхности неохлаждаемой модели проектируемой камеры сгорания жидкостного ракетного двигателя [124].

Диагностику нестационарного теплообмена в моделях тепловой защиты спускаемых космических аппаратов предлагается проводить с использованием методики, основанной на решении граничной обратной задачи для модели теплопроводности «стенки конечной толщины». С использованием принципа Дюамеля задача определения плотности теплового потока сводится к решению интегрального уравнения. Для получения устойчивого решения использован принцип регуляризации А.Н. Тихонова: задача приводится к поиску вектора q^y , минимизирующего сглаживающий функционал, решением системы линейных алгебраических уравнений с положительно определенной матрицей. В операторной форме система уравнений имеет вид [125]

$$\mathbf{B}q = \mathbf{D}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{A}_\Delta^T \mathbf{A}_\Delta + \gamma \mathbf{C}$; \mathbf{A}_Δ^T – транспонированная матрица; $\mathbf{D} = \mathbf{A}_\Delta^T \tilde{\Theta} + \mathbf{g}$; \mathbf{C} – матрица, являющаяся конечномерным аналогом сглаживающего функционала, учитывающим гладкость первой или второй производной искомой функции; \mathbf{g} – вектор, определяемый граничными условиями. Из решения системы (1.1) при заданном условии гладкости искомого решения и выбранном значении параметра γ получается некоторое приближение q^y к истинной функции $q(\tau)$. Обобщенные данные по тепловым потокам на всей

нагреваемой поверхности показывают картину их пространственного распределения для заданного момента времени.

Для оценки эффективности использования указанного алгоритма при обработке подобных экспериментальных исследований, характеризующихся высокой интенсивностью при кратковременных режимах нагрева, было проведено сравнение полученных результатов с решениями по другим алгоритмам. В частности, для априорно заданного импульсного теплового потока ($\tau_0 = 0.5$ с, $q_{\max} = 1.5 \cdot 10^6$ Вт/м²) и рассчитанной на некотором удалении ($x_1 = 1.5$ мм, $x_2 = 4.0$ мм) от нагреваемой поверхности температуры значения восстанавливаемого теплового потока по методу регуляризации сопоставлялись с решением, полученным методом итерационной регуляризации. Проведенный анализ показал высокую эффективность описанного алгоритма (значение относительной погрешности составило $\varepsilon_{\max} = 0.2$ %) в сочетании с небольшими затратами машинного времени. Для получения решения с такой точностью итерационным методом потребовалось более 400 итераций при использовании машинного времени в 60 раз больше [125].

1.2.2. Тепломассообмен на подвижной границе твердого тела.

Задача диагностики тепломассообмена на подвижной границе твердого тела возникает при взаимодействии теплозащитного материала с высокоэнтальпийным газовым потоком и усложняется присутствием радиационного теплообмена и физико-химических превращений.

На основе метода итерационной регуляризации разработана методика решения такой задачи в одномерной постановке при отсутствии химических реакций и излучения, но при наличии в газовом потоке твердых частиц, влияющих на скорость разрушения материала и его температуру [126-128].

Установлено, что в тепловую энергию на разрушающейся поверхности преобразуется около 70% кинетической энергии частиц. Доля тепла, обусловленная переходом части кинетической энергии частиц в теплоту, составляет в среднем 9.8% от измеренного теплового потока [129].

Методика [126-128] расширена для одномерной постановки задачи при наличии радиационного теплообмена и физико-химических превращений и применена для решения трехмерных задач диагностики внешнего теплового воздействия на элементы конструкции автоматической межпланетной станции «Марс-96» на этапе ее выведения после сброса головного обтекателя в различных системах координат [130].

Одномерные нестационарные задачи теплопроводности, возникающие в связи с восстановлением плотности теплового потока и температуры на поверхности калориметрической модели в высокоэнтальпийных аэродинамических установках кратковременного действия, при произвольной зависимости плотности теплового потока от времени решены двумя методами: методом итераций и методом интегральных преобразований с конечными пределами [131].

Помимо рассмотренных результатов в части решения задач диагностики тепломассообмена на подвижной границе твердого тела предложен метод лазерного рамановского рассеяния для диагностики прилегающего к стенке высокоэнтальпийного граничного слоя на поверхности аблирующих материалов с целью обнаружения пространственных зон химических реакций экзо- и эндотермического типа между уносимым материалом и газовыми компонентами основного потока. На основе экспериментальных данных разработана математическая модель, учитывающая влияние этих зон на характер сложного теплообмена при наличии теплопроводности и излучения [132].

Решена обратная задача массообмена при окислении и диффузии сплавов, используемых в лопатках газовых турбин. Представлены метод и результаты решения теоретических и практических задач идентификации коэффициентов диффузии и поглощения легирующего элемента и окислителя в сплаве и коэффициента массообмена между газовой средой и поверхностью окисляемого сплава, входящих в математическую модель [133].

Таким образом, если в случае диагностики теплообмена на неподвижной границе присутствуют тенденции поиска аналитического решения, приведения обратных задач к решению интегральных уравнений методом регуляризации или к краевым задачам с интегродифференциальными уравнениями, то для нахождения плотности теплового потока при взаимодействии материала с высокоэнтальпийным потоком газа характерно сохранение традиционных постановок обратных задач и применение метода итерационной регуляризации для их решения.

1.3. Идентификация математических моделей

1.3.1. Модели с распределенными параметрами.

Моделями с распределенными параметрами (МРП) называются модели, учитывающие эволюцию систем во времени и их распределенность в пространстве и описываемые дифференциальными уравнениями с частными производными. Математическая модель связывает входную функцию с выходной посредством оператора системы, которым является дифференциальный оператор с частными производными [134].

Методы параметрической идентификации делятся на явные и неявные. Явные методы связаны с минимизацией критерия качества от невязки уравнения (невязки по входу), явно зависящей от неизвестных параметров. При использовании неявных методов критерий качества строится по невязке выхода, которая неявно зависит от неизвестных параметров. Явные методы сравнительно легко реализуемы, однако достаточно неустойчивы по отношению к малым отклонениям исходных данных. Неявные методы обладают высокой помехоустойчивостью при трудоемкой численной реализации, связанной с необходимостью многократного решения дифференциального уравнения с частными производными [134].

Разработана группа методов нахождения явного решения: когда функция в правой части уравнения теплового баланса, включающая частные производные второго порядка, параметризуется функциями Уолша (при пяти независимых экспериментах получено устойчивое решение для четырех параметров, в то время как с использованием кубических В-сплайнов нулевого порядка только для двух из них) [134]; для систем параболических уравнений, искомые коэффициенты которых зависят от координат и времени [135]; в трехмерном случае, когда искомые теплофизические характеристики зависят от распределения температуры, если система уравнений имеет автомодельное решение и дополняется условиями определенного типа [136]; при произвольных тепловых режимах и произвольном расположении точек задания температур на поверхности полупространства [137].

В части неявных методов доказана теорема единственности решения двумерной обратной задачи по определению неизвестной функции, зависящей от решения исходной задачи и пространственной переменной квазилинейного уравнения параболического типа [138].

Предложена методология построения алгоритма решения прямой задачи теплообмена для пространственных областей сложной геометрической формы с использованием обобщенного двумерного уравнения теплообмена. В качестве численного метода решения уравнения выбран интергроинтерполяционный метод «контрольного объема». Также отмечаются метод переменных направлений и локально-одномерный метод, которые могут применяться в предложенном алгоритме без существенного изменения его структуры [139].

Построен метод численного восстановления двумерных температурных полей в анизотропных телах с произвольной границей для использования в коэффициентных обратных задачах теплопроводности [140].

Наиболее экономичным и одновременно точным методом решения задач Коши для уравнения теплопроводности в многомерной постановке является метод продольно-поперечных направлений, позволяющий найти условно устойчивое решение. Для его абсолютной устойчивости при сохранении свойств экономичности и точности предлагается экстраполяция решения с предыдущего временного слоя на расчетный по методу прямых. В девятиузловой конечно-разностной схеме это достаточно сделать для верхнего пространственного слоя, так как на нижнем распределение температуры известно. С помощью экстраполяции сеточных функций с k -го на $(k+1)$ -й временной слой по методу прямых получается задача Коши для экстраполяционных температур, решением которой является выражение, не содержащее операций обращения, т. е. не ухудшающее экономичности основной схемы, однако существенно улучшающее ее устойчивость [140].

Разработан и реализован подход к задаче моделирования температурных полей объемных анизотропных тел на основе принципа эквивалентности. В его основе лежат эквивалентные значения теплофизических характеристик и других параметров, входящих в условия

однозначности математической модели (ММ) теплообмена, которые могут быть получены из решения обратной задачи [141].

Пусть температурное поле анизотропного тела описывается ММ1. Это поле отражается экспериментальными температурами T_0 , определяемыми на реальном объекте или макете в некоторых точках, количество и расположение которых не регламентируется. Моделью для решения обратной задачи будет ММ2, записанная для гомогенного тела. В результате решения обратной задачи находятся постоянные теплофизические характеристики, минимизирующие функционал невязок $J(\varepsilon)$, где $\varepsilon = T - T_0$. Найденные характеристики позволяют из решения прямой задачи получить температурное поле T , наиболее близкое по значению функционала $J(\varepsilon)$ к экспериментальному [141].

Построен алгоритм применения метода итерационной регуляризации для идентификации постоянных теплофизических коэффициентов (теплопроводность, теплоемкость, тепловая мощность и коэффициент при первой производной температуры по координате) одномерного уравнения теплового баланса специального вида. Постоянные коэффициенты не параметризуются, являясь координатами искомого вектора, для определения которого используется градиентный метод и векторный шаг спуска [142].

Предложены методики определения комплекса теплофизических характеристик, зависящих от температуры, с использованием метода итерационной регуляризации на основе экстремальных постановок задач и градиентного спуска [143-144]. Они аналогичны методикам [126-128], используемым для диагностики теплообмена на неподвижной границе твердого тела. Если область значений искомой функции сильно изменяется в области определения, то использование градиентных методов может приводить к вычислению значения размерного шага спуска, близкого к нулю, и остановке сходимости алгоритма вдали от искомого решения [145].

Для устранения этого недостатка градиентных методов предложена методика использования безразмерного шага спуска, который также определяется из условия минимума функционала невязки температуры. При этом, в стандартном выражении итерационного спуска безразмерный шаг умножается не на функцию градиента функционала, а на единицу, что подразумевает возможность использования этого алгоритма только для поиска безразмерных коэффициентов, параметризующих искомую функцию [145].

В части функциональной (поточечной) идентификации, когда искомая функция не аппроксимируется полиномами, а ищется на той же временной сетке, что и измеряемая температура, рассмотрены градиентные методы решения обратной задачи теплопроводности по определению нелинейной функции $\lambda(T)$ без ее предварительной конечномерной аппроксимации [146-147]. Функциональная идентификация имеет преимущества перед параметрической по сходимости решения и необходимой точности начальных приближений.

Предложен нелинейный регуляризирующий алгоритм решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), учитывающий типичную априорную информацию об искомом решении [148].

К решению СЛАУ вида [148]

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f} \quad (1.2)$$

приводят многие постановки обратных задач теплопроводности, в том числе, параметрическая идентификация процессов теплообмена. Как правило, система (1.2) плохо обусловлена или вырождена и для построения устойчивого решения используются различные методы регуляризации. Метод регуляризации [148] основан на сингулярном разложении матрицы \mathbf{K} .

Пусть матрица \mathbf{K} имеет размер $N_f \times N_\varphi$, а $\boldsymbol{\varphi}$, \mathbf{f} – векторы соответствующей размерности. Сингулярным разложением матрицы \mathbf{K} называется представление $\mathbf{K} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V}^T$, в котором \mathbf{U} , \mathbf{V} – ортогональные матрицы размером $N_f \times N_f$, $\boldsymbol{\Lambda}$ – матрица размером $N_f \times N_\varphi$ с элементами $\Lambda_{ij} = \{\lambda_i, i = j; 0, i \neq j\}$. Величины $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N_\varphi$, называются сингулярными числами матрицы \mathbf{K} . Предполагается, что: а) $N_j \geq N_\varphi$; б) сингулярные числа упорядочены $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_\varphi} \geq 0$; в) вместо точной правой части \mathbf{f} задан вектор $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \boldsymbol{\eta}$, где $\boldsymbol{\eta}$ – случайный вектор с нулевым средним, отражающий погрешности задания правой части уравнения (1.2) [148].

Устойчивое к шуму $\boldsymbol{\eta}$ и к ошибкам вычислительного процесса, реализующего сингулярное разложение, решение можно представить в виде $\boldsymbol{\varphi}_\gamma = \mathbf{V}\mathbf{x}_\gamma$, $\mathbf{x}_\gamma(j) = \mathbf{r}_\gamma(j)\bar{\mathbf{y}}(j)$, $\mathbf{r}_\gamma(j) = 1/(\lambda_j + \gamma m(\lambda_j))$, $1 \leq j \leq N_\varphi$, где \mathbf{x}_γ – вектор размерности N_φ ; $\mathbf{x}_\gamma(j)$ – его j -я проекция; $\bar{\mathbf{y}}(j)$ – j -я проекция вектора $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{f}}$; γ – параметр регуляризации; $m(\lambda)$ – невозрастающая положительная функция (например, $m(\lambda) = \lambda^{-\theta}$, $\theta \geq 1$). Можно показать, что при соответствующем выборе γ решение $\boldsymbol{\varphi}_\gamma$ является регуляризованным, т. е. сходящимся к псевдорешению системы (1.2) при стремлении погрешностей к нулю. Оптимальное значение параметра регуляризации также может быть найдено с использованием сингулярного разложения матрицы \mathbf{K} [148].

Пусть априорные ограничения определяют m допустимых множеств $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$ и все эти множества выпуклы и замкнуты. Тогда решение, удовлетворяющее априорным ограничениям, должно принадлежать

пересечению $\Phi_0 = \prod_{i=1}^m \Phi_i$ допустимых множеств Φ_i , и каждое вновь вводимое

ограничение сужает область допустимых решений. Нахождение элемента $\boldsymbol{\varphi}^*$ множества Φ_0 сводится к построению оператора проецирования на множество Φ_0 . Непосредственное построение оператора проецирования на Φ_0 может быть сложной задачей, в то время как оператор проецирования на любое i -е множество Φ_i имеет достаточно простой вид. Поэтому для

нахождения φ^* целесообразно использовать итерационную процедуру $\varphi^{(k)} = \mathbf{P}^{(k)}\varphi^{(0)}$, основанную на том, что, если $\mathbf{P} = \prod_{k=1}^m \mathbf{P}^{(k)}$, то стационарная точка φ^* оператора \mathbf{P} принадлежит Φ_0 , и последовательность $\varphi^{(k)}$ сходится к φ^* при любом $\varphi^{(0)}$. Для улучшения сходимости вводятся операторы $\mathbf{T}_i = \mathbf{1} + \mu_i(\mathbf{P}_i - \mathbf{1})$, где $\mathbf{1}$ – единичный оператор, μ_i – параметр релаксации. Для оператора $\mathbf{T} = \prod_{k=1}^m \mathbf{T}^{(k)}$ справедливо утверждение [148]: если Φ_0 непусто и μ_i удовлетворяет условию $0 < \mu_i < 2$, $i = 1, 2, \dots, m$, то последовательность $\varphi^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)}\varphi^{(0)}$ сходится к φ^* при любом начальном элементе $\varphi^{(0)}$.

Схема нелинейной регуляризации реализована в виде нелинейного алгоритма построения регуляризованного решения, которое находится в подмножестве Φ_0 , образованном пересечением трех множеств, соответствующих следующим условиям [148]:

1. отличие проекций $\varphi(j)$ от нуля только для $j \in J_\varphi$ определяет допустимое множество $\Phi_1 = \{\varphi : \varphi(j) = 0, j \notin J_\varphi\}$;

2. принадлежность проекций $\varphi(j)$ отрезку $[\varphi_{\min}(j), \varphi_{\max}(j)]$ обуславливает допустимое множество $\Phi_2 = \{\varphi : \varphi_{\min}(j) \leq \varphi(j) \leq \varphi_{\max}(j)\}$;

3. принадлежность проекций допустимому множеству $\Phi_3 = \{\varphi : \{\mathbf{V}^T \varphi\}_j = \mathbf{x}_\gamma(j), 1 \leq j \leq M_1(\gamma)\}$, где $\{\mathbf{V}^T \varphi\}_j$ – j -я проекция вектора $\mathbf{V}^T \varphi$; $M_1(\gamma)$ – число степеней свободы регуляризирующего алгоритма [148].

Изучена возможность одновременного определения коэффициента теплоотдачи и температуры окружающей среды в виде функций двух переменных, которые входят в модель той же размерности, что и искомые величины, с применением априорной информации, обеспечивающей идентифицируемость математической модели при условии сохранения числа независимых переменных в искомым величинах. В основу подхода положено требование определенной параметризации идентифицируемых функций, в которой отражаются априорные сведения о свойствах объекта. В результате, установление идентифицируемости заданной модели сводится к выбору таких искомым функций, которые, с одной стороны, удовлетворительно аппроксимируют неизвестные величины, а с другой – сохраняют требуемое взаимно однозначное соответствие между состоянием объекта и искомыми параметрами [149].

С использованием функциональной идентификации построены методики одновременного определения функций $\lambda(T)$, $c(T)$ [150].

Алгоритм итерационного фильтра применен для одновременной идентификации теплопроводности и удельной объемной теплоемкости искусственных алмазов путем решения многопараметрических обратных задач теплопроводности [151]. Разработаны эффективные приемы улучшения качества предложенного алгоритма с использованием процедур

итерационной и шаговой регуляризации решения задачи идентификации локальных (числом более двух) параметров теплообмена для модельных задач различной сложности [152].

Обоснованы методы автоматизированного определения теплофизических свойств и термического анализа различных объектов (твердых тел, дисперсных материалов и жидкостей), основанные на программной вариации тепловых полей в эксперименте [153].

С единых методических позиций решена коэффициентная обратная задача определения теплофизических характеристик материала по измерениям температуры в его глубине в приближении полубесконечного тела, однослойной и двухслойной (со слоем идеального проводника) пластины конечной толщины. Предложенная методика не использует операции сглаживания экспериментальных данных, позволяет снять ограничения на выбор режима нагрева образца материала и расширить диапазон измерений по числу Фурье [154-155].

Рассмотрены обратные задачи теплопроводности по идентификации мощности внутренних источников тепла или закона их пространственного распределения, сформулированные в экстремальной постановке как задачи оптимального управления объектом с распределенными параметрами при ограничении множества управляющих воздействий до класса непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций. На основе параметризации управляющих воздействий задача сведена к негладкой задаче математического программирования, для решения которой используется специальный метод, учитывающий альтернативные свойства искомым оптимальных решений [156-157].

Рассмотрена обратная задача по идентификации зависящего от температуры коэффициента теплопроводности, сформулированная в экстремальной постановке как задача поиска величины, рассматриваемой в качестве оптимального управления объектом с распределенными параметрами, который описывается нелинейным однородным пространственно одномерным уравнением Фурье в частных производных с краевыми условиями второго рода. В качестве критерия оптимальности использована минимизируемая на временном интервале наблюдения ошибка равномерного приближения вычисляемой на модели объекта температуры в заданной точке отрезка изменения пространственной переменной к ее непосредственно измеряемому значению. Предварительная параметризация искомого управляющего воздействия, априори фиксирующая его описание с точностью до задания параметров представления в классе полиномиальных функций температуры, обеспечила редукцию исследуемой проблемы к задаче параметрической оптимизации. Для решения сформулированной задачи использован аналитический метод минимаксной оптимизации, учитывающий альтернативные свойства искомым оптимальных решений, на основе которых алгоритм вычисления оптимальных величин искомым параметров сводится к замкнутой относительно этих неизвестных системе

уравнений, фиксирующих минимаксные отклонения расчетных значений температуры от наблюдаемых на временном интервале идентификации. Полученные результаты подтверждают эффективность предлагаемого метода для решения определенного круга прикладных задач. Также исследовано влияние координаты точки измерения температуры на точность решения обратной задачи [158].

Исследованы методы параметрической идентификации дифференциально-разностных математических моделей теплообмена для нестационарных тепловых измерений. Использованы два алгоритма фильтра Кальмана; представлены результаты вычислительных и физических экспериментов; предложен универсальный метод построения совместных доверенных областей и интервалов [159].

Построен численный алгоритм, комбинирующий методы сопряженных градиентов (решение обратной задачи) и контрольных объемов (дискретизация системы уравнений), для идентификации формы двумерной границы теплообмена с известной температурой. Алгоритм проверен с использованием различных обратных задач, однако его применимость в случае переменных тепловых проводимостей требует дополнительного изучения [160].

Задачи идентификации уравнений теплового баланса с распределенными параметрами применены для исследования свойств волокнистых высокопористых материалов [161-163], пористых реагирующих материалов [164], неметаллических ультрапористых сетчатых материалов [165-167], анизотропных материалов [168-169], слоистых сред [170], стеклопластиков [171], армированных композитов [172], керамических материалов [173], тонкостенных композитных конструкций [174], разрушающихся теплозащитных материалов [175-176] композиционных структур с микрокомпонентами, имеющими различные теплопроводности [177-178]. При помощи решения задач идентификации рассчитана тепловая проводимость радиационно-кондуктивного теплообмена в высокопористых анизотропных полупрозрачных для теплового излучения материалах [178], [179], эффективная теплопроводность конструкционных, теплозащитных и теплоизоляционных материалов [180], анизотропного композиционного материала корпуса наноспутника [181]. Задачи идентификации поставлены для изучения теплообмена в процессе литья и последующего остывания заготовки [182], параметров материала в процессе термодиффузии [183], при квазистационарном оплавлении и прогреве образца кварцевой стеклокерамики [184].

С использованием обратных задач на основе уравнений в частных производных исследованы радиационный [185-191], контактный теплообмен [192-198] и термоупругость [199-202], решены ретроспективные задачи конвекции [203] и теплопроводности [204] – все эти области входят научно-техническую проблематику ракетно-космической техники.

1.3.2. Модели с сосредоточенными параметрами.

Представление технических систем в виде множеств взаимодействующих элементов приводит к росту сложности постановок теплофизических задач с использованием математических моделей с распределенными параметрами и трудоемкости их решения. В этой связи интересны математические модели с сосредоточенными параметрами, основанные на обыкновенных дифференциальных уравнениях [205]:

$$\frac{dT_i}{d\tau} = f_i(T_1, T_2, \dots, T_N), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.3)$$

В [206] рассмотрен аналитический метод решения дифференциального уравнения теплового баланса применительно к математическим моделям с сосредоточенными параметрами (1.3) при наличии теплового излучения, использующий конечно-разностную аппроксимацию по времени.

При переходе к разностной временной сетке система уравнений (1.3) преобразовывается как

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\tau_{j+1} - \tau_j} = f_i(T_{1,j}, T_{2,j}, \dots, T_{N,j}), \quad i = 1, 2, \dots, N; j = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (1.4)$$

Выражая из (1.4) $T_{i,j+1}$, получаем квазилинейную нестационарную дискретную динамическую систему следующего вида

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + (\tau_{j+1} - \tau_j) f_i(T_{1,j}, T_{2,j}, \dots, T_{N,j}), \quad (1.5)$$
$$i = 1, 2, \dots, N; j = 0, 1, 2, \dots, M,$$

где $\mathbf{x}_i = (T_{i,0}, T_{i,1}, \dots, T_{i,M})$ – вектор состояния; $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$. Тогда задача управления системой (1.5) по переводу ее из теплового состояния $T_{i,0}$ в теплое состояние $T_{i,M+1}$ является по определению задачей терминального управления.

На основе техники делителей нуля найдены условия получения единственного решения задачи терминального управления линейной нестационарной дискретной динамической системой с векторным управлением, построено множество решений и описан подход к получению приближенного решения [207]. Рассмотрен детерминированный подход к параметрической идентификации такой системы, определены условия разрешимости поставленной задачи, сформулирован критерий существования решения и построен алгоритм его поиска, возможности которого продемонстрированы на численных примерах [208-209].

При достаточно подробном разбиении на элементы с однородной температурой точность МСП сопоставима с точностью, обеспечиваемой методом конечных разностей, как в стационарном, так и в переходном процессе. Тем не менее, по мере увеличения количества узлов МСП все более сложной становится задача идентификации тепловых связей между ними [210].

Технологическая система сложного вида рассмотрена как «черный ящик» со входом и выходом. Описан теплоперенос в этой системе при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными

коэффициентами определенного порядка. Предложена методика использования «неустойчивых» уравнений для описания практических задач. Под неустойчивостью понимается, что полученный дифференциальный оператор имеет характеристические числа с положительной вещественной частью. Определены коэффициенты уравнения на основе анализа кривой отклика системы на возмущение в виде «ступеньки». Рассмотрен конкретный пример реализации предложенного алгоритма [211].

В настоящей работе метод итерационной регуляризации адаптирован для математических моделей теплообмена с сосредоточенными параметрами: получены аналитические выражения для расчета неопределенных множителей Лагранжа при определении градиента критериального функционала и расчета шага спуска, работоспособность которых подтверждена численными экспериментами; полученные результаты обобщены для технических, в частности, космических систем [212].

Тепловые процессы, (в первую очередь, излучение) в технических системах нелинейны. Применимость метода итерационной регуляризации [5-6] строго не доказана для нелинейных задач. В то же время, вариационный метод Тихонова [3] теоретически обоснован в частных нелинейных случаях, но не имеет единого подхода к определению параметра регуляризации при неизвестной точности задания исходных данных. Анализ вариационного метода Тихонова и метода итерационной регуляризации задач идентификации тепловых математических моделей с сосредоточенными параметрами позволил разработать модифицированный метод итерационной регуляризации на основе вариационного метода, а также комбинированную методику аналитического определения параметра регуляризации (безразмерного шага спуска) на основе минимизации функционала температурной невязки и сглаживающего функционала, работоспособность которой подтверждена вычислительными экспериментами [213]. Полученные результаты применены для идентификации математических моделей составных частей космических аппаратов, в частности, теплового сопротивления и излучательной способности ЭВТИ [214], [270].

Исследовано влияние внутреннего тепловыделения и числа Био на точность и применимость моделей с сосредоточенными параметрами в нестационарных одномерных задачах теплообмена. Для получения средней температуры и плотности теплового потока в пространственном направлении применены классическая МСП на основе объемной теплоемкости и усовершенствованная модель на основе эрмитовой и полиномиальной аппроксимации. Введены количественные критерии оценки применимости моделей с сосредоточенными параметрами [215].

Предложен экспериментально-аналитический метод, дающий возможность сформировать на базе результатов тепловакуумных испытаний космического устройства его математическую узловую модель, позволяющую распространить полученные результаты на тепловые режимы, не воспроизводимые при испытаниях. Метод основан на решении обратной

задачи по восстановлению тепловых параметров узловой модели из известных значений температур, тепловыделений и внешних тепловых потоков. Представлены данные экспериментальной проверки метода, подтверждающие его практическую применимость и показывающие некоторые особенности использования [216].

Очевидным способом определения эффективных параметров тепловых узлов математической тепловой модели является решение обратной задачи, в которой неизвестными являются эти параметры, а известными величинами – значения температур, измеренные при проведении теплового эксперимента, при различных наборах внешних тепловых условий и внутренних тепловыделений. Формализация и решение данной задачи для конкретного объекта, создаваемого для использования в космосе, состоят из следующих последовательных этапов [216].

Формируется структура узловой тепловой модели объекта (структурная идентификация модели). Для этого объект разбивается на N условно изотермических узлов, которые характеризуются следующими параметрами: теплоемкость C_i , внутреннее тепловыделение Q_i , площадь F_i и степень черноты ε_i поверхности внешнего теплообмена; площадь F'_i и степень черноты ε'_i поверхности внутреннего теплообмена. Параметром кондуктивной тепловой связи i -го и j -го узлов является тепловая проводимость $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, параметром радиационной тепловой связи – их взаимные угловые коэффициенты $\varphi'_{ij}, \varphi'_{ji}$. На каждом узле выбирается репрезентативная точка, температура T_i в которой считается температурой узла. В эксперименте обеспечивается измерение температуры во всех репрезентативных точках [216].

Объект помещается в вакуумную камеру. Характеристикой внешних тепловых условий для i -го узла внутри вакуумной камеры является облученность E_i его поверхности внешнего теплообмена. Данная облученность создается окружающей объект поверхностью, которой могут являться криогенные экраны, нагреватели, неохлаждаемая стенка вакуумной камеры или их сочетание. Измеряемыми данными в рассматриваемой задаче являются зависящие от времени τ значения $T_i(\tau), Q_i(\tau), E_i(\tau)$. Искомыми (определяемыми по исходным данным) величинами являются $C_i, F_i, \varepsilon_i, F'_i, \varepsilon'_i, \alpha_{ij}, \varphi'_{ij}, \varphi'_{ji}$, которые не зависят от времени. Используемая при решении задачи система уравнений линеаризуется путем объединения искомых величин $F_i, \varepsilon_i, F'_i, \varepsilon'_i, \varphi'_{ij}, \varphi'_{ji}$ в два параметра [216]: $F_i^{\text{eff}} = \varepsilon_i F_i$ – эффективная площадь внешнего теплообмена i -го узла; $F'_{ij}{}^{\text{eff}} = \varphi'_{ij}[1 + \varphi'_{ij}(\varepsilon_i^{-1} - 1) + \varphi'_{ji}(\varepsilon_j^{-1} - 1)]^{-1} F'_i$.

Проведенный эксперимент показал, что даже для теплоемкостного тестового теплового макета вычисление производной $dT_i(\tau)/d\tau$ по двум фиксированным значениям температуры приводит к существенной ошибке. Для повышения точности можно использовать математический анализ зависимости изменения температуры за все время эксперимента или только стационарные тепловые состояния макета, при которых можно считать, что $dT_i(\tau)/d\tau \rightarrow 0$. В результате использования метода наименьших квадратов были

получены значения элементов вектора искомых параметров \mathbf{x} , которые давали крайне низкое отклонение от эксперимента (от 0.3 до 3.0%). Однако ряд найденных элементов вектора \mathbf{x} не имели физического смысла, поскольку были отрицательными [216].

По всей видимости, полученный результат является следствием плохой обусловленности задачи из-за ошибок вычисления производных температуры по времени и возможной неустойчивости решения из-за математической некорректности постановки. В этом случае проблема физически необоснованных результатов решается применением метода регуляризации [3] или метода итерационной регуляризации [5-6].

Показано, что на основании анализа поля температур внешней поверхности космического аппарата возможно определение его ориентации – направлений на основные источники тепла в пределах Солнечной системы, включая Солнце и близлежащую планету. Для аппарата простейшей конфигурации эта задача может быть решена аналитически. В реальных аппаратах должны быть установлены простые термочувствительные элементы (ТЧЭ), имеющие слабую тепловую связь с космическим аппаратом и высокую чувствительность к изменению внешних тепловых условий. Эксперимент показал, что точность определения ориентации с помощью такой системы измерения температур достигает 5 угл. мин. при скорости вращения космического аппарата до 30 угл. град./мин [217].

Были сделаны термочувствительные элементы двух типов: солнечный и планетный, различающиеся оптическими характеристиками покрытия теплоприемной пластины. Солнечный ТЧЭ особенно чувствителен к видимому солнечному излучению за счет покрытия «черный никель» ($A_S = 0.9$, $\varepsilon = 0.3$), планетный – к инфракрасному излучению Земли за счет покрытия АК-573 ($A_S = 0.2$, $\varepsilon = 0.8$). Термодинамическая система определения ориентации (ТДСОО) должна включать не менее 12 таких элементов – по одному планетному и одному солнечному, перпендикулярно каждой оси связанной с КА системы координат в положительном и отрицательном направлениях [217].

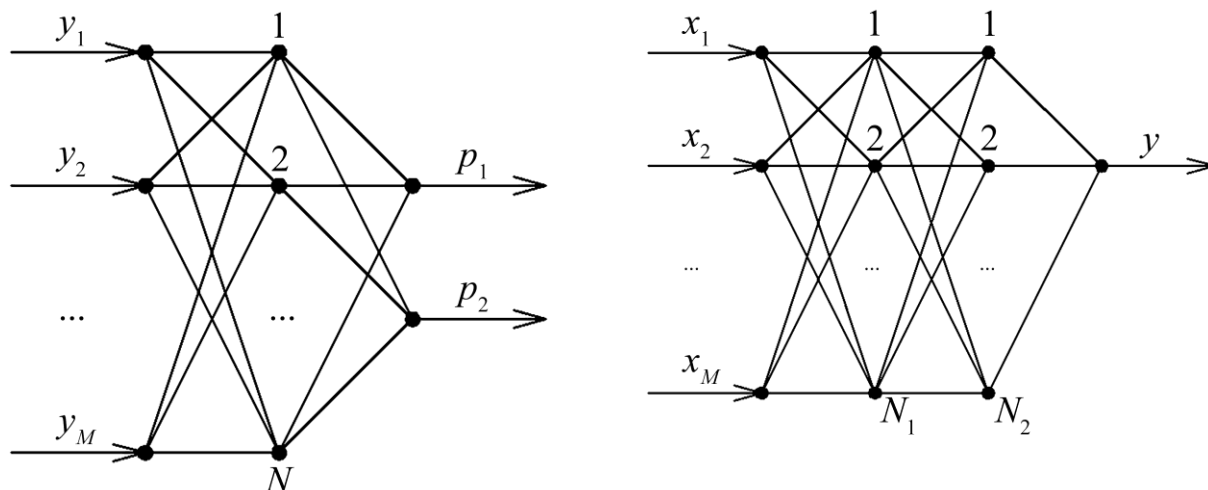
Поскольку ТДСОО основана на измерении солнечного и планетного облучения по температуре элементов конструкции ТЧЭ, она требует решения обратной задачи диагностики теплового потока на неподвижной границе твердого тела.

1.3.3. Решение задач идентификации с использованием нейронных сетей.

Модели с сосредоточенными параметрами близки по смыслу к полносвязным искусственным нейронным сетям: узлы представляют собой нейроны, а связи между ними – синапсы. Только в отличие от проводимостей связей МСП значения весовых коэффициентов ИНС не несут физического смысла. Задача идентификации полного набора и тех, и других существенно некорректна – имеет неединственное решение.

На сегодняшний день, проводятся исследования возможности решения таких задач при помощи усиления вариационного принципа отбора дополнительными условиями. Поэтому методы идентификации МСП и ИНС в принципе могут быть общими. Однако, малая изученность этой проблемы приводит к тому, что ИНС пока не могут обеспечить надежных решений прямых и обратных задач теплообмена.

В литературе не много примеров применения ИНС в космической технике и смежных с ней областях. Полносвязные ИНС совсем не встречаются – практические примеры основаны на модели многослойного персептрона с одним (рисунок 1.2а) или двумя (рисунок 1.2б) внутренними слоями: многослойные ИНС применены для идентификации параметров теплового процесса [218], микротвердости материала [219] и для прогнозирования температур элементов КА «Спектр-Р» на основе статистических данных [220-221].



а – с одним внутренним слоем из N нейронов, входным слоем из M нейронов, выходным слоем из двух нейронов

б – с двумя внутренними слоями из N_1 и N_2 нейронов, входным слоем из M нейронов, выходным слоем из одного нейрона

Рисунок 1.2 – Многослойный персептрон

Выделяется два типа погрешностей расчета с использованием ИНС: погрешности первого типа связаны с неточностью аппроксимации и зависят от количества нейронов, погрешности второго типа вызваны влиянием ошибок измерения параметров, которые используются для идентификации значений весовых коэффициентов синапсов – обучения ИНС [218].

Результатом обучения ИНС является не только идентификация значений весовых коэффициентов синапсов, но и определение количества нейронов, которое необходимо для решения той или иной задачи. По мере увеличения количества нейронов становится существенной разница в скорости расчета с использованием эмулирующих ИНС программных и аппаратных средств. Существенное преимущество в быстродействии имеют аппаратные средства. Тестирование многослойных ИНС на базе программируемых логических интегральных схем показало их

эффективность при решении штатных задач цифровой обработки информации в бортовых системах КА [222-223].

1.4. Точность решения обратных задач теплообмена

При обеспечении условной корректности обратных задач, подразумевающей сходимость решения к единственному существующему в ограниченном выпуклом множестве вектору, точность решения зависит от погрешности аппроксимации теплофизической системы математической моделью и погрешности входной информации, которая, как правило, выражается погрешностью измерения температуры в местах установки датчиков и имеет систематическую и случайную составляющие.

Если использование модели с минимальной погрешностью аппроксимации не удовлетворяет критериям оптимальности в системе иерархической идентификации, целесообразно перейти к двухмодельному методу, в котором обратная задача решается только для приближенной модели, что сокращает количество итераций в несколько раз. Вектор входных данных итеративно адаптируется для приближенного оператора, который, так же как и точный, может быть нелинейным [224].

Результаты оценки точности решения обратной задачи теплопроводности для неограниченной пластины при несимметричных граничных условиях теплообмена показали, что случайные ошибки в измерении температуры приводят лишь к локальным возмущениям и не нарушают сходимости решения. При наличии систематической погрешности одного знака в измерении температур расчетные значения критерия Био практически не отличаются от решения обратной задачи при вводе данных без искажений. Наличие погрешностей разных знаков приводит к значительной потере точности [225].

Установлено, что при аппроксимации неизвестной функции времени системой базисных функций, например, кусочно-постоянной, В-сплайнами и т. д., наблюдается резкое ухудшение точности решения ОЗТ с увеличением числа параметров аппроксимации (особенно в метрике C), несмотря на то, что искомые зависимости точно аппроксимируются соответствующими В-сплайнами. По этой причине целесообразно использовать минимальное число узлов В-сплайна, при котором достигается выполнение условия минимума останова итерационного процесса. Следовательно, параметрическая идентификация не приводит к улучшению сходимости получаемого решения к точной функции по сравнению с решением задачи в функциональном пространстве [226].

Любое возмущение может либо ослабевать, либо усиливаться в процессе вычисления. В качестве количественной характеристики изменения возмущения вводится параметр β , называемый степенью неустойчивости численного решения обратной задачи и показывающий, во сколько раз усиливается в процессе численной реализации алгоритма уровень входной погрешности. Введение безразмерного параметра регуляризации r позволяет

оценивать погрешность получаемых регуляризованных решений δ при $0 \leq r \leq 1/\beta$ соотношением $\delta = \delta_0 / (1 + r\beta^2)$, где δ_0 – погрешность нерегуляризованного решения, полученного при $r = 0$. В интервале значений безразмерного параметра регуляризации $1/\beta < r \leq 1$ погрешность получаемых решений изменяется слабо, что указывает на нахождение в этом интервале квазиоптимального значения r в ослабленной форме, использование которого по своей сути основывается на предположении о том, что искомое решение не содержит колебательной составляющей с характерным временем $\tau_0 = 2\Delta t$ (Δt – шаг временной сетки) и нарастающей по времени амплитудой. Погрешности более низкого уровня могут реализовываться при $r > 1$, что требует привлечения более полной информации об искомом решении [227].

Анализ погрешностей с помощью математической модели теплофизического процесса и разложения функции реакции одной величины на возмущение другой в ряд Тейлора позволил сделать вывод, что, если теплоизолированный отсек КА имеет активную систему терморегулирования, то погрешность расчета теплопритока или стока тепла через теплоизоляцию прямо пропорциональна погрешности расчета мощности системы терморегулирования, а при отсутствии такой системы – погрешности внутренней температуры отсека [228].

Разработан математический метод исследования теплового состояния плоского слоя волокнистого теплозащитного материала, испытывающего нестационарный тепловой нагрев заданного профиля, и проверена его корректность. Полученные результаты численного моделирования заложены в основу эксперимента, направленного на верификацию и прогнозирование погрешностей термодинамических измерений при экспериментально-теоретическом обосновании теплозащитных покрытий летательных аппаратов [229].

При использовании контактных датчиков происходит искажение полей температуры и деформаций, что оказывает дополнительное влияние на погрешность измерений. Для оценки влияния внедренных измерительных датчиков на работоспособность деталей из углерод-керамического композиционного материала, применяемого в ответственных деталях ракетно-космической техники, разработана методика, основанная на математическом моделировании напряженно-деформированного и температурного состояний [230]. Вопросы определения методической погрешности измерения температуры в материалах с низкой теплопроводностью рассмотрены в работе [231].

Методическая погрешность измерения температуры на поверхности керамического материала контактными датчиками температуры имеет место и при радиационном нагреве. С помощью математического моделирования, учитывающего теплофизические свойства всех материалов в системе датчик температуры – образец, были исследованы различные способы заделки контактных датчиков температуры в материал, что позволило выработать рекомендации по уменьшению погрешности измерения температуры фронтальной поверхности образцов при проведении тепловых испытаний на

стенде радиационного нагрева [232]. Сравнительный анализ бесконтактных и контактных способов измерения тепловых потоков показал преимущество контактных способов, основанных на решении обратных задач теплопроводности, в виде возможности создания малогабаритных датчиков, конструктивно оформленных как элементы исследуемой системы [233]. Полезная модель датчика такого типа представлена в [234].

В условиях космического пространства микроэлектронные устройства, в том числе, цифровые температурные датчики, находятся под воздействием низкоинтенсивного ионизирующего излучения, которое может вызывать деградацию точности измерения датчика в зависимости от поглощенной дозы вплоть до выхода его из штатного режима работы. По этой причине на внешних поверхностях КА устанавливаются аналоговые датчики температуры. При облучении в пассивном режиме доля отказа цифровых датчиков, как правило, больше, чем при облучении в активном электрическом режиме. Поскольку ионизирующее излучение космического пространства низкоинтенсивное, их радиационная стойкость должна определяться в полях гамма излучения низкой интенсивности в диапазоне доз от 0 до 31 крад при мощности дозы от 0,01 до 1 рад/с. Были проведены измерения, в результате которых установлены зависимости точности цифровых датчиков температуры, которые были установлены на КА «Фобос-грунт», от дозы облучения и температуры. Причем, при облучении в активном режиме функционирования скорость понижения точности была выше, чем в пассивном режиме, при измерении температуры при измерении температуры выше 0 °С, а при измерении температуры минус 55 °С в пассивном режиме точность измерения улучшалась с ростом величины поглощенной дозы в диапазоне от 15 до 25 крад. После термического отжига датчиков при температуре 125 °С на воздухе после их облучения и в пассивном, и в активном режиме функционирования точность измерения повышалась [235].

Таким образом, погрешность теплового расчета не учитывает собственную погрешность измерения температуры и ее возможного отклонения от истинного значения. Кроме того, контактные датчики температуры вносят возмущения в тепловое и напряженно-деформированное состояние материала конструкции, а в условиях космического полета теряют точность по мере облучения низкоинтенсивным ионизирующим излучением космического пространства. Поэтому погрешность расчетно-экспериментального метода должна суммироваться из ошибок, вызванных расхождением расчетных и экспериментальных данных, и ошибок измерения.

1.5. Выводы по главе 1

1. За время существования космической техники значительное развитие получили как экспериментальные методы ее наземной отработки, так и теоретические методы исследования тепловых процессов и систем КА.

Как правило, на основании тепловых расчетов проводились наземные испытания, по результатам которых делались выводы об обеспечении тепловых режимов КА. Создание методов решения обратных задач теплообмена позволило устанавливать обратную связь между результатами экспериментальной отработки и параметрами математических моделей, обеспечив возможность методического построения расчетно-экспериментальных систем отработки. Такие системы могут иметь аппаратное воплощение в виде наземных испытательных комплексов, программное обеспечение которых основано на методологии решения обратных задач.

2. Обратные задачи могут быть математически некорректны по Ж. Адамару. В случае существования единственного решения возможна слабая обусловленность математических моделей, подразумевающая нарушение устойчивости решения при малом возмущении левой или правой части операторного уравнения, – методы регуляризации неустойчивого решения достаточно хорошо разработаны на сегодняшний день. В случае существования неединственного решения задача является существенно некорректной, – возможность вариационно-итерационного решения таких задач при дополнительных ограничивающих условиях исследуется и сегодня. Если оператор в левой части уравнения обратим, то методы решения обратной задачи основываются на поиске условно корректного решения по А.Н. Тихонову (вариационные и вариационно-итерационные методы регуляризации), если необратим – по Ж. Фикера (методы итерационной регуляризации на основе вариационных задач теории оптимального управления динамическими системами).

3. Математическая модель системы КА (космической системы) может строиться на базе математических моделей ее подсистем, которые создаются и отрабатываются отдельно. Характерным примером являются спускаемые в атмосферах планет аппараты, тепловая защита которых взаимодействует с высокоэнтальпийным газовым потоком. Тепловая защита СА отрабатывается отдельно, а математические модели радиационно-кондуктивного теплообмена в теплозащитном материале могут часто меняться в процессе отработки, что не должно затрагивать математические модели других систем.

4. Особенно актуальна задача восстановления тепловых граничных условий и температурного поля в материале по данным измерений температуры внутри образца при отработке тепловых процессов, протекающих в композиционных теплозащитных материалах, разрушающихся при интенсивном нагреве. Граничные условия для расчета радиационно-кондуктивного теплообмена теплозащитного материала спускаемого аппарата формируются как результат воздействия конвективного и радиационного потоков, определяемых по корреляционным соотношениям. Использование разных моделей химической кинетики, разных моделей неравновесной диссоциации, а также разных спектральных оптических моделей приводит к заметному разбросу расчетных данных по

интегральному радиационному потоку, что говорит о необходимости дальнейшего развития моделей этих процессов.

5. В части транспортных космических систем первоочередными задачами математического моделирования являются прямые и обратные задачи, связанные с обеспечением теплового режима двигательных установок и приборно-агрегатного оборудования, устанавливаемого в герметичных отсеках. Для этого используются активные системы терморегулирования.

6. Радиационно-кондуктивный теплообмен в негерметичных отсеках КА связи и наблюдения, предназначенных для функционирования на эллиптической и геостационарной орбитах, рассчитывается при помощи динамических моделей в распределенных и сосредоточенных параметрах, которые могут объединяться в полную математическую модель системы КА в рамках комбинаторного анализа, обеспечивающего наилучшее соотношение между размерностью моделей подсистем. Также может использоваться комбинированный метод расчета, суть которого состоит в делении конструкции на подобласти канонической и неканонической форм, для расчета температур в одних использовать разностные, а в других – конечно-элементные методы решения, обеспечив алгоритмы безытерационной стыковки решений на границах. Тепловой режим негерметичных отсеков обеспечивается пассивными системами терморегулирования в сочетании с электронагревателями и тепловыми трубами.

7. Зона наблюдения высокоточных оптических систем, предназначенных для сканирования поверхности Земли и космического пространства в оптическом и инфракрасном диапазонах, ограничивается стационарной или поворотной блендой, защищающей фотоприемники от воздействия прямого солнечного излучения. Тепловой режим оптических систем обеспечивается двухконтурной системой терморегулирования. Внешний контур предназначен для поддержания требуемой температуры конструкции оптической системы путем отвода избыточного тепла через тепловые трубы на излучающий радиатор и ее подогрева электронагревателями. Внутренний контур обеспечивает температуру криогенных фотоприемников при помощи криогенного излучающего холодильника или холодильной машины. Поскольку рассматривается область криогенных температур, для отвода от фотоприемников тепловой мощности до 2 Вт требуется холодильная машина с мощностью компрессора на два порядка больше, а их тепловые расчеты должны быть очень точными. Для моделирования радиационно-кондуктивного теплообмена в оптических системах подходят методики, разработанные для негерметичных отсеков.

8. Аппаратура космических радиотелескопов размещается в герметичных контейнерах с активной системой терморегулирования и негерметичных платформах с пассивной. Прием и передача данных осуществляется посредством малонаправленных, остронаправленных антенн,

пассивных и активных фазированных антенных решеток. Малонаправленные антенны имеют широкий допустимый температурный диапазон работы, которому обычно удовлетворяют условия космического полета. Антенные решетки выполняются в виде негерметичной конструкции, расчет и обеспечение теплового режима которой аналогичны негерметичным отсекам. Остронаправленные антенны и зеркала радиотелескопов устанавливаются на электроприводы, частично закрытые экранно-вакуумной тепловой изоляцией. Открытые поверхности электроприводов выполняют функцию радиаторов и подогреваются электронагревателями при переохлаждении. Необходимость точной фокусировки рефлекторов остронаправленных антенн и радиотелескопов накладывает жесткие ограничения на их допустимое температурное поле и скорость изменения температуры. Для обеспечения требуемой точности тепловых расчетов свойства металлических сетевых полотен и композиционных материалов рефлекторов исследуются при помощи обратных задач теплообмена.

9. Системная методология отработки теплотехнических конструкций и тепловых процессов КА основывается на иерархической идентификации и включает этапы оптимального проектирования, планирования теплофизического эксперимента и управления конструкцией или процессом. Иерархическая система идентификации состоит из: краевых задач, описывающих теплофизику, и регрессионных моделей, содержащих информацию о взаимосвязанности различных факторов; критериев оптимальности, позволяющих детализировать модели с точностью, необходимой на каждом этапе отработки; структурную и параметрическую идентификацию математических моделей; алгоритмы, включающие численные и натурные эксперименты в единый цикл. В результате, вместе с теплотехнической системой или технологией создаются математические модели, применимые на всех этапах отработки, включая оптимальное управление. Для постановки и решения краевых задач используются модели в распределенных и сосредоточенных параметрах, которые идентифицируются с помощью регрессионных моделей, создаваемых вариационно-итерационными методами и с использованием искусственных нейронных сетей по алгоритмам, минимизирующим заданные критерии оптимальности.

10. Анализ работ по обратным задачам теплообмена показал, что сформирован расчетно-экспериментальный метод тепловой отработки КА и их систем на основе математического моделирования тепловых процессов с использованием идентифицированных математических моделей. Дальнейшее развитие расчетно-экспериментального метода возможно в рамках иерархической идентификации интеграцией в него двухмодельного метода, позволяющего увеличить точность и уменьшить время тепловых расчетов. Для математического моделирования теплообмена в КА рекомендуются математические модели с сосредоточенными параметрами, не содержащие частных производных по координате в правых частях уравнений.

Идентификация таких моделей может проводиться как методом итерационной регуляризации на основе градиентных методов, так и итерационным методом на основе вариационного метода А.Н. Тихонова.

Перспективен подход, объединяющий эти методы при помощи минимизации функционала невязки температуры и сглаживающего функционала в системе, а также вычисления безразмерного параметра регуляризации (шага спуска).

Модели с сосредоточенными параметрами близки по смыслу к полносвязным искусственным нейронным сетям: узлы представляют собой нейроны, а связи между ними – синапсы. Только в отличие от проводимостей связей МСП значения весовых коэффициентов ИНС не несут физического смысла. Задача идентификации полного набора и тех, и других существенно некорректна – имеет неединственное решение. Поэтому методы идентификации МСП и ИНС могут быть общими. Однако, малая изученность этой проблемы приводит к тому, что МСП и ИНС, требующие идентификации полной матрицы неизвестных коэффициентов, пока не могут обеспечить надежных решений обратных задач теплообмена.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТАХ

2.1. Постановки задач идентификации математических моделей теплообмена в составных частях космического аппарата

2.1.1. Физическое представление технических систем.

Любое материальное тело является физическим объектом, но не обязательно технической системой. Объект становится частью системы, если взаимодействует с другими объектами, и тогда совокупность взаимодействующих частей образует систему: совокупность материальных тел – физическую, совокупность технических объектов – техническую.

В широком смысле физический объект становится техническим, если он является средством решения некоторой технической задачи. Взаимодействующие технические объекты образуют техническую систему, способную решать более сложные задачи. Взаимодействие может быть одного или нескольких видов, каждый из которых описывается отдельным физическим законом. В зависимости от видов взаимодействия техническая система делится на физические, в каждой из которых реализуется один из видов взаимодействия: механический, тепловой, электрический, магнитный и т. д.

Во всех видах взаимодействия присутствует обмен энергией, поэтому все системы являются термодинамическими, а термодинамическое описание взаимодействий – наиболее общим. Термодинамическая система выделяется из окружающей среды, которая также рассматривается как термодинамическая система с определенными свойствами. При отсутствии обмена энергией (и массой) с окружающей средой термодинамическая система является закрытой, а при наличии – открытой.

Состояние системы характеризуется полем потенциала и свойствами, показывающими способность ее элементов участвовать в тех или иных видах взаимодействия. Взаимодействие с окружающей средой определяется краевыми условиями, которые задаются как функции координат в начальный момент времени (начальные условия) или как функции времени на границах системы (граничные условия). В результате взаимодействия элементов системы между собой и с окружающей средой происходит процесс, который описывается функцией координат, потенциала и времени: в теплофизических системах протекают тепловые процессы, в электрофизических – электрические, в механических – механические и т. д.

По отношению к параметрам термодинамических систем возможны два вида задач – прямые и обратные. В прямых задачах из уравнения взаимодействия определяется поле потенциала по известным краевым условиям. Целью обратных задач является восстановление граничных условий при соответствующих свойствах и поле потенциала (задачи диагностики) или свойств, при которых реализуется определенное поле потенциала для заданных граничных условий (задачи идентификации).

Уравнения взаимодействия включают функцию процесса и дифференциальный оператор, отвечающий за распределение потенциала внутри системы, имея первый (волновое уравнение) или второй (уравнение теплопроводности) порядок производной по времени и второй порядок производной по координате. Математические модели, основанные на дифференциальных уравнениях в частных производных, называются моделями с распределенными параметрами.

Если система приводится к конечному числу узлов, внутренние связи которых не рассматриваются, для каждого узла записывается уравнение взаимодействия, в котором дифференциальный оператор по координатам равен нулю, и, следовательно, уравнение взаимодействия узла представляет собой функцию процесса, равную нулю. Математические модели таких систем представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и называются моделями с сосредоточенными параметрами. Взаимодействие узлов системы в МСП характеризуется не свойствами непрерывной среды, как в МРП, а коэффициентами взаимодействия, которые в отличие от непрерывных свойств неизвестны.

Коэффициенты взаимодействия могут определяться прямым расчетом или решением обратных задач. И в том и в другом случае присутствуют особенности, которые рассматриваются и систематизируются ниже на примере теплофизических систем, описываемых уравнением теплопроводности, а затем обобщаются для термодинамически открытых систем.

2.1.2. Модели с сосредоточенными параметрами, основанные на уравнении теплопроводности.

Уравнение теплопроводности является дифференциальным в частных производных первого порядка по времени и второго порядка по координатам. В случае нестационарной задачи с одной пространственной координатой уравнение теплопроводности записывается как

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \sum q_{V,k}. \quad (2.1)$$

где ρ – плотность, кг/м³; λ – теплопроводность, Вт/(м·К); τ – время, с; T – температура, К; x – пространственная координата, м; $q_{V,k}$ – объемные тепловые мощности источников системы, Вт/м⁴.

В стационарной задаче каждый узел МСП является изотермическим, а в нестационарной – температура узла i зависит только от времени:

$$\frac{m_i}{V_i} c_i \frac{\partial T_i}{\partial \tau} = \sum_{q=1}^{N_q} \frac{Q_{iq}}{V_i}, \quad (2.2)$$

где (для узла i) m – масса, кг; V – объем, м³; Q_q – тепловые мощности источников, Вт. При умножении на объем узла уравнение теплопроводности преобразовывается к виду

$$m_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial \tau} = \sum_{q=1}^{N_q} Q_{iq} = Q_i. \quad (2.3)$$

Источниками тепловых мощностей в узле i являются тепловыделяющие элементы разного рода – электронные приборы, электронагреватели и др., – теплообмен излучением с окружающей средой или другими узлами, теплопроводность с другими узлами:

$$Q_i = Q_{E,i} + Q_{H,i} + Q_{R,i} A_{S,i} - \sigma \varepsilon_i F_i (T_i^4 - T_R^4) - \sigma \sum_k \varepsilon_{ik} S_{ik} (T_i^4 - T_k^4) - \sum_k \alpha_{ik} F_{ik} (T_i - T_k), \quad (2.4)$$

где (для узла i) Q_E – мощность электронных блоков, Вт; Q_H – мощность электронагревателей, Вт; Q_R – лучистый тепловой поток от источников вне системы, Вт; A_S – коэффициент поглощения; ε_i – коэффициент черноты поверхностей, излучающих в окружающую среду; F_i – площадь поверхностей, излучающих в окружающую среду, м²; ε_{ik} – приведенный коэффициент черноты поверхностей узлов i, k , участвующих в теплообмене излучением; S_{ik} – площадь поверхностей узла i , участвующего в теплообмене излучением с узлом k , м²; α_{ij} – проводимость кондуктивной тепловой связи между узлами i, k ; F_{ik} – площадь теплового контакта между узлами i, k .

При наличии конвективного теплообмена и химических реакций на поверхностях в правую часть уравнения (2.3) добавляются слагаемые, определяющие теплоотдачу и количество тепла, выделяемое или поглощаемое при химических реакциях [8]. Для математического описания теплового состояния негерметичного космического аппарата или его составных частей достаточно и приведенных слагаемых (исключая внутренние процессы фазового перехода в таких элементах, как тепловые трубы или контур системы охлаждения с жидким теплоносителем).

2.1.3. Идентификация излучательных способностей внутренних слоев экранно-вакуумной тепловой изоляции.

В некоторых случаях удобно применять уравнение (2.3) в удельных величинах. Например, при моделировании экранно-вакуумной тепловой изоляции точные массы и площади слоев отражающих пленок измерить сложно, в то время как плотности и толщины материалов известны. Для наружного слоя ЭВТИ справедливо уравнение

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho_1 c_1 \delta_1} \left[q_{R,1} A_{S,1} - \sigma \varepsilon_1 (T_1^4 - T_R^4) - \sigma \varepsilon_{12} (T_1^4 - T_2^4) \right]. \quad (2.5)$$

Для внутренних слоев уравнение теплопроводности записывается, исходя из того, что каждый из слоев имеет теплообмен излучением с двумя соседними – предшествующим и следующим:

$$\frac{\partial T_i}{\partial \tau} = \frac{\sigma}{\rho_i c_i \delta_i} \left[-\varepsilon_{i,i-1} (T_i^4 - T_{i-1}^4) - \varepsilon_{i,i+1} (T_i^4 - T_{i+1}^4) \right]. \quad (2.6)$$

Последний слой с одной стороны находится в кондуктивном контакте с защищаемой панелью космического аппарата, с другой – участвует в теплообмене излучением с предпоследним слоем:

$$\frac{\partial T_N}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho_N c_N \delta_N} \left[-\sigma \varepsilon_{N,N-1} (T_N^4 - T_{N-1}^4) - \alpha_{N,N+1} (T_N - T_{N+1}) \right], \quad (2.7)$$

где $\alpha_{N,N+1}$ – тепловая проводимость контакта ЭВТИ с поверхностью аппарата, Вт/(м²·К).

Прямая задача сводится к поиску решений T_1, T_2, \dots, T_N при граничных условиях, заданных на первом и последнем слоях. Для ее решения записывается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой все теплофизические свойства, коэффициенты поглощения, коэффициенты черноты и тепловые проводимости должны быть известны:

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} &= \frac{1}{\rho_1 c_1 \delta_1} \left[q_{R,1} A_{S,1} - \sigma \varepsilon_1 (T_1^4 - T_R^4) - \sigma \varepsilon_{12} (T_1^4 - T_2^4) \right], \\ & \dots \\ \frac{\partial T_i}{\partial \tau} &= \frac{\sigma}{\rho_i c_i \delta_i} \left[-\varepsilon_{i,i-1} (T_i^4 - T_{i-1}^4) - \varepsilon_{i,i+1} (T_i^4 - T_{i+1}^4) \right], \\ & \dots \\ \frac{\partial T_N}{\partial \tau} &= \frac{1}{\rho_N c_N \delta_N} \left[-\sigma \varepsilon_{N,N-1} (T_N^4 - T_{N-1}^4) - \alpha_{N,N+1} (T_N - T_{N+1}) \right] \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Тепловые связи внутренних слоев определены излучательными способностями ε_{ij} : при $\varepsilon_{ij} = 0$ теплообмен излучением между слоями отсутствует, при $\varepsilon_{ij} = 1$ равновесное излучение максимально, как у абсолютно черных тел. Степени черноты имеют следующие свойства:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji} \ll i \neq j, \\ \varepsilon_{ij} &= 0 \ll i = j \end{aligned} \right\}. \quad (2.9)$$

В случае известных теплофизических свойств ρ_i, c_i и толщин слоев δ_i обратная задача идентификации сводится к определению степеней черноты внутренних слоев:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(T_1^4 - T_2^4 \right) \varepsilon_{12} = -\frac{1}{\sigma} \left[\rho_1 c_1 \delta_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - q_{R,1} A_{S,1} + \sigma \varepsilon_1 (T_1^4 - T_R^4) \right], \\ & \dots \\ & \left(T_i^4 - T_{i-1}^4 \right) \varepsilon_{i,i-1} + \left(T_i^4 - T_{i+1}^4 \right) \varepsilon_{i,i+1} = -\frac{\rho_i c_i \delta_i}{\sigma} \frac{\partial T_i}{\partial \tau}, \\ & \dots \\ & \left(T_N^4 - T_{N-1}^4 \right) \varepsilon_{N,N-1} = -\frac{1}{\sigma} \left[\rho_N c_N \delta_N \frac{\partial T_N}{\partial \tau} + \alpha_{N,N+1} (T_N - T_{N+1}) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (2.10)$$

Сумма левых частей уравнений системы представляет собой линейную комбинацию

$$\begin{aligned}
 F(\varepsilon_{ij}) = & (T_1^4 - T_2^4)\varepsilon_{12} + (T_2^4 - T_1^4)\varepsilon_{21} + \dots \\
 & \dots + (T_{i-1}^4 - T_i^4)\varepsilon_{i-1,i} + (T_i^4 - T_{i-1}^4)\varepsilon_{i,i-1} + \\
 & + (T_i^4 - T_{i+1}^4)\varepsilon_{i,i+1} + (T_{i+1}^4 - T_i^4)\varepsilon_{i+1,i} + \dots \\
 & \dots + (T_{N-1}^4 - T_N^4)\varepsilon_{N-1,N} + (T_N^4 - T_{N-1}^4)\varepsilon_{N,N-1},
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

которая в силу условия (2.9) тождественно равна нулю:

$$F(\varepsilon_{ij}) \equiv 0. \tag{2.12}$$

Отсюда следует, что решения ε_{ij} линейно зависимы, а определитель матрицы коэффициентов в левой части равен нулю:

$$\det \mathbf{A}_0 = 0. \tag{2.13}$$

где

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix}
 0 & (T_1^4 - T_2^4) & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 (T_2^4 - T_1^4) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & (T_{i-1}^4 - T_i^4) & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & (T_i^4 - T_{i-1}^4) & 0 & (T_i^4 - T_{i+1}^4) & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & (T_{i+1}^4 - T_i^4) & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (T_{n-1}^4 - T_n^4) \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & (T_n^4 - T_{n-1}^4) & 0
 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Таким образом, задача идентификации степеней черноты, определяющих тепловые связи между внутренними слоями ЭВТИ, в общем виде имеет бесконечное множество решений и требует дополнительных условий для корректной математической постановки.

В силу симметричности и противоположности наддиагональных и поддиагональных элементов согласно (2.9) и наличия нулевой диагонали ранг матрицы \mathbf{A}_0 может быть понижен на единицу. В этом случае дополнительное условие появляется в форме избыточного уравнения на первом или последнем слое:

$$\left. \begin{aligned} (T_1^4 - T_2^4) \varepsilon_{12} &= -\frac{1}{\sigma} \left[\rho_1 c_1 \delta_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - q_{R,1} A_{S,1} + \sigma \varepsilon_1 (T_1^4 - T_R^4) \right], \\ \dots \\ (T_i^4 - T_{i+1}^4) \varepsilon_{i,i+1} &= -\frac{\rho_i c_i \delta_i}{\sigma} \frac{\partial T_i}{\partial \tau} - (T_i^4 - T_{i-1}^4) \varepsilon_{i,i-1}, \\ \dots \\ (T_{N-1}^4 - T_N^4) \varepsilon_{N-1,N} &= -\frac{\rho_{N-1} c_{N-1} \delta_{N-1}}{\sigma} \frac{\partial T_{N-1}}{\partial \tau} - (T_{N-1}^4 - T_{N-2}^4) \varepsilon_{N-1,N-2}; \\ (T_N^4 - T_{N-1}^4) \varepsilon_{N,N-1} &= -\frac{1}{\sigma} \left[\rho_N c_N \delta_N \frac{\partial T_N}{\partial \tau} + \alpha_{N,N+1} (T_N - T_{N+1}) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

или в матричном виде

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{X} = \mathbf{B}_1, \quad (2.16)$$

где

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{12} \\ \dots \\ \varepsilon_{i-1,i} \\ \varepsilon_{i,i+1} \\ \dots \\ \varepsilon_{N-1,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{21} \\ \dots \\ \varepsilon_{i,i-1} \\ \varepsilon_{i+1,i} \\ \dots \\ \varepsilon_{N,N-1} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

Система решается методом прогонки, а структура матриц \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 зависит от направления вычисления решений. Если условий на внешнем слое достаточно для расчета ε_{12} , то $\varepsilon_{i,i+1}$ вычисляются через $\varepsilon_{i,i-1}$, и матрицы имеют вид

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} (T_1^4 - T_2^4) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & \dots & (T_{i-1}^4 - T_i^4) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (T_i^4 - T_{i+1}^4) & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (T_{N-1}^4 - T_N^4) \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma} \left[\rho_1 c_1 \delta_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - q_{R,1} A_{S,1} + \sigma \varepsilon_1 (T_1^4 - T_R^4) \right] \\ \dots \\ -\frac{\rho_{i-1} c_{i-1} \delta_{i-1}}{\sigma} \frac{\partial T_{i-1}}{\partial \tau} - (T_{i-1}^4 - T_{i-2}^4) \varepsilon_{i-1,i-2} \\ -\frac{\rho_i c_i \delta_i}{\sigma} \frac{\partial T_i}{\partial \tau} - (T_i^4 - T_{i-1}^4) \varepsilon_{i,i-1} \\ \dots \\ -\frac{\rho_{N-1} c_{N-1} \delta_{N-1}}{\sigma} \frac{\partial T_{N-1}}{\partial \tau} - (T_{N-1}^4 - T_{N-2}^4) \varepsilon_{N-1,N-2} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Если условия взаимодействия на внешнем слое неизвестны, должны быть определены граничные условия третьего рода на внутреннем слое для расчета $\varepsilon_{N,N-2}$. Тогда $\varepsilon_{i,i-1}$ вычисляются через $\varepsilon_{i,i+1}$, и матрицы имеют вид

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} (T_2^4 - T_1^4) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & \dots & (T_{i-1}^4 - T_{i-2}^4) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (T_i^4 - T_{i-1}^4) & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (T_N^4 - T_{N-1}^4) \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\rho_2 c_2 \delta_2}{\sigma} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} - (T_2^4 - T_3^4) \varepsilon_{23} \\ \dots \\ -\frac{\rho_{i-1} c_{i-1} \delta_{i-1}}{\sigma} \frac{\partial T_{i-1}}{\partial \tau} - (T_{i-1}^4 - T_i^4) \varepsilon_{i-1,i} \\ -\frac{\rho_i c_i \delta_i}{\sigma} \frac{\partial T_i}{\partial \tau} - (T_i^4 - T_{i+1}^4) \varepsilon_{i,i+1} \\ \dots \\ -\frac{1}{\sigma} \left[\rho_N c_N \delta_N \frac{\partial T_N}{\partial \tau} + \alpha_{N,N+1} (T_N - T_{N+1}) \right] \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

2.1.4. Идентификация тепловых связей математической модели с сосредоточенными параметрами составной части космического аппарата.

При моделировании космического аппарата или его составной части удобнее использовать уравнение (2.3) в абсолютных величинах, так как массы и удельные теплоемкости конструктивных узлов определены, а мощности тепловыделяющих элементов известны. Прямая задача заключается в поиске температур узлов при заданных граничных условиях,

представленных слагаемыми в правой части уравнений (потоки через тепловые проводимости выделены в отдельную сумму):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} &= \frac{1}{m_1 c_1} \left[\sum_q Q_{1q} - \sum_k \alpha_{1k} F_{1k} (T_1 - T_k) \right], \\ &\dots \\ \frac{\partial T_i}{\partial \tau} &= \frac{1}{m_i c_i} \left[\sum_q Q_{iq} - \sum_k \alpha_{ik} F_{ik} (T_i - T_k) \right], \\ &\dots \\ \frac{\partial T_N}{\partial \tau} &= \frac{1}{m_N c_N} \left[\sum_q Q_{Nq} - \sum_k \alpha_{Nk} F_{Nk} (T_N - T_k) \right] \end{aligned} \right\}, \quad (2.22)$$

где абсолютные тепловые проводимости между узлами определены выражениями

$$\alpha_{a,ik} = \alpha_{ik} F_{ik}. \quad (2.23)$$

Если $\alpha_{a,ik} = 0$, тепловая проводимость между узлами отсутствует; если $\alpha_{a,ij}$ имеет конечное значение, между узлами присутствует теплообмен теплопроводностью или конвекцией. Тепловые проводимости имеют следующие свойства:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{ik} &= \alpha_{ki} \Leftrightarrow i \neq k, \\ \alpha_{ik} &= 0 \Leftrightarrow i = k \end{aligned} \right\}. \quad (2.24)$$

В предельном случае каждый из узлов имеет тепловые связи с остальными $(N-1)$ узлами. При наличии N уравнений (2.22) с учетом условия (2.24) обратная задача идентификации связей может быть решена только для одного узла. Полный набор тепловых проводимостей не восстанавливается по граничным условиям и температурному полю из-за недостаточного количества уравнений.

Поскольку номера узлов произвольны, система уравнений для определения тепловых связей первого узла характерна и для любого другого:

$$\left. \begin{aligned} \sum_k (T_1 - T_k) \alpha_{a,1k} &= \sum_q Q_{1q} - m_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau}, \\ (T_2 - T_1) \alpha_{a,21} &= \sum_q Q_{2q} - m_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial \tau} - \sum_{k=2}^N (T_2 - T_k) \alpha_{a,2k}, \\ &\dots \\ (T_i - T_1) \alpha_{a,i1} &= \sum_q Q_{iq} - m_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial \tau} - \sum_{k=2}^N (T_i - T_k) \alpha_{a,ik}, \\ &\dots \\ (T_N - T_1) \alpha_{a,N1} &= \sum_q Q_{Nq} - m_N c_N \frac{\partial T_N}{\partial \tau} - \sum_{k=2}^N (T_N - T_k) \alpha_{a,Nk} \end{aligned} \right\}. \quad (2.25)$$

Поскольку в левой части первого уравнения содержатся левые части остальных уравнений с обратным знаком, линейная комбинация суммы левых частей равна нулю:

$$F(\alpha_{a,ik}) = (T_1 - T_1) \alpha_{a,11} + \sum_{k=2}^N (T_1 - T_k) \alpha_{a,1k} + \sum_{k=2}^N (T_k - T_1) \alpha_{a,k1} = 0. \quad (2.26)$$

Отсюда следует, что решения $\alpha_{a,ik}$ линейно зависимы, а определитель матрицы коэффициентов в левой части равен нулю:

$$\det \mathbf{A}_0 = 0. \quad (2.27)$$

где

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & (T_1 - T_2) & \dots & (T_1 - T_i) & \dots & (T_1 - T_{N-1}) & (T_1 - T_N) \\ (T_2 - T_1) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (T_i - T_1) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (T_{N-1} - T_1) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (T_N - T_1) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Решение задачи становится возможным, если принять во внимание, что связь узла с самим собой отсутствует. Тогда первое уравнение может быть исключено из системы, а оставшихся $(N-1)$ уравнений достаточно для вычисления проводимостей $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1N}$. Причем, в правых частях содержатся связи остальных узлов системы, первые приближения которых должны быть известны:

$$\left. \begin{array}{l} (T_2 - T_1)\alpha_{a,21} = \sum_q Q_{2q} - m_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial \tau} - \sum_{k=2}^N (T_2 - T_k)\alpha_{a,2k}, \\ \dots \\ (T_i - T_1)\alpha_{a,i1} = \sum_q Q_{iq} - m_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial \tau} - \sum_{k=2}^N (T_i - T_k)\alpha_{a,ik}, \\ \dots \\ (T_N - T_1)\alpha_{a,N1} = \sum_q Q_{Nq} - m_N c_N \frac{\partial T_N}{\partial \tau} - \sum_{k=2}^N (T_N - T_k)\alpha_{a,Nk} \end{array} \right\}. \quad (2.29)$$

Аналогичная система существует для каждого узла, поэтому их тепловые связи могут уточняться итерационно во втором, третьем и дальнейших приближениях.

2.2. Обобщенная теплофизическая постановка задачи идентификации математической модели с сосредоточенными параметрами

2.2.1. Термодинамическая параметризация физических систем.

Рассмотренные физические системы являются термодинамически открытыми, так как обмениваются энергией с окружающей средой в соответствии с определенными граничными условиями. Состояние термодинамической системы в общем виде описывается обобщенным уравнением, характеризующим процесс изменения физической величины Y , имеющей поле с потенциалом Φ_Y в среде со свойством ξ_Y [236]:

$$F_Y(x^r, \tau, \Phi_Y) = \text{div} \left[\xi_Y(x^r, \Phi_Y) \mathbf{grad} \Phi_Y \right], \quad (2.30)$$

где x^r – система координат; $r = 1, 2, \dots, R$; R – число пространственных измерений (далее рассматривается одномерная задача); F_Y – функция процесса. Его решением является распределение потенциала в зависимости от координаты и времени при определенных краевых условиях:

$$\Phi = \Phi(x, \tau). \quad (2.31)$$

Данное уравнение может быть решено, только если условия задачи сформулированы математически корректно (см. 4.1).

Начальные условия определяют значение искомой функции или ее производной в момент времени $\tau = 0$:

$$\left[\Phi(x, \tau) \right]_{\tau=0} = \Phi_{0,1}(x), \quad (2.32)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi(x, \tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=0} = \Psi_{0,2}(x). \quad (2.33)$$

Краевые условия задают значения искомой функции или ее производной на границах среды, в пределах которой определяется функция потенциала:

1. первого рода, когда задается граничное значение функции

$$\left[\Phi(x, \tau) \right]_{x=x_i} = \Phi_{1,i}(\tau) \quad (i=1, 2, \dots, N); \quad (2.34)$$

2. второго рода, когда задается граничное значение первой производной функции

$$\left[\frac{\partial \Phi(x, \tau)}{\partial x} \right]_{x=x_i} = \Psi_{2,i}(\tau) = \frac{|\mathbf{y}(x, \tau)|_{x=x_i}}{\xi} \quad (i=1, 2, \dots, N), \quad (2.35)$$

где \mathbf{y} – плотность потока величины Y ;

4. третьего рода, когда задается граничное значение линейной комбинации функции и ее первой производной

$$\left[c_1 \Phi(x, \tau) + c_2 \frac{\partial \Phi(x, \tau)}{\partial x} \right]_{x=x_i} = \Psi_{3,i}(\tau) \quad (i=1, 2, \dots, N), \quad (2.36)$$

где $c_1 = \text{const}$; $c_2 = \text{const}$.

Для термодинамически открытой системы функция процесса первого порядка по времени, характеризуемого величиной Y , представляется в виде

$$F_Y(x, \tau, \Phi_Y) = \frac{1}{V} \left(C_Y \frac{\partial \Phi_Y}{\partial \tau} - \sum_q |\mathbf{Y}_q| \right), \quad (2.37)$$

где C_Y – емкость системы по отношению к величине Y (способность системы накапливать величину Y в объеме V); \mathbf{Y}_q – потоки величины Y , направленные в систему и из нее. Знак потока следует из противоположной направленности векторов потока и градиента: при положительном градиенте потенциала в уравнении (2.30) поток отрицателен.

2.2.2. Идентификация математических моделей теплообмена.

Пусть открытая система состоит из N элементов, закон взаимодействия которых выражается через степень D потенциала Φ_Y :

$$\left. \begin{cases} Y_{ik} = \alpha_{D,ik} (\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,k}^D), \\ Y_{ik} = -Y_{ki}, \\ \alpha_{D,ik} = \alpha_{D,ki} \end{cases} \right\}, \quad (2.38)$$

где $\alpha_{D,ik}$ – коэффициенты взаимодействия. Тогда функция процесса, связанного с величиной Y , для элемента i выражается как

$$F_{Y,i}(x, \tau, \Phi_Y) = \frac{1}{V_i} \left(C_{Y,i} \frac{\partial \Phi_{Y,i}}{\partial \tau} - \sum_q |\mathbf{Y}_{iq}| + \sum_k \alpha_{D,ik} (\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,k}^D) \right), \quad (2.39)$$

а обобщенное уравнение (2.30) записывается в виде

$$\begin{aligned} \text{div} \left[\xi_{Y,i}(x, \tau, \Phi_{Y,i}) \mathbf{grad} \Phi_{Y,i} \right] = \\ = \frac{1}{V_i} \left(C_{Y,i} \frac{\partial \Phi_{Y,i}}{\partial \tau} - \sum_k |\mathbf{Y}_{ik}| + \sum_k \alpha_{D,ik} (\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,k}^D) \right), \end{aligned} \quad (2.40)$$

Состояние совокупности N элементов описывается системой уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \operatorname{div} \left[\xi_{Y,i} (x, \tau, \Phi_{Y,i}) \mathbf{grad} \Phi_{Y,i} \right] = \\ & = \frac{1}{V_i} \left(C_{Y,i} \frac{\partial \Phi_{Y,i}}{\partial \tau} - \sum_q |\mathbf{Y}_{iq}| + \sum_k \alpha_{D,ik} (\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,k}^D) \right) \end{aligned} \right\}_{i=1,2,\dots,N}. \quad (2.41)$$

Если распределение потенциала внутри элементов считается равномерным, производные по координате равны нулю, и уравнения упрощаются до вида МСП:

$$\left\{ C_{Y,i} \frac{\partial \Phi_{Y,i}}{\partial \tau} - \sum_q |\mathbf{Y}_{iq}| + \sum_k \alpha_{D,ik} (\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,k}^D) = 0 \right\}_{i=1,2,\dots,N}. \quad (2.42)$$

Прямая задача заключается в определении поля Φ_Y при известных $C_{Y,i}$, $|\mathbf{Y}_{iq}|$, $\alpha_{D,ik}$ и начальных условиях. Обратная задача идентификации коэффициентов взаимодействия для связей степени D сводится к решению системы уравнений (2.42) относительно $\alpha_{D,ik}$:

$$\left\{ \sum_k (\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,k}^D) \alpha_{D,ik} = \sum_q |\mathbf{Y}_{iq}| - C_{Y,i} \frac{\partial \Phi_{Y,i}}{\partial \tau} \right\}_{i=1,2,\dots,N}. \quad (2.43)$$

Сумма левых частей уравнений системы представляет собой линейную комбинацию

$$\begin{aligned} F(\alpha_{D,ik}) = & (\Phi_{Y,1} - \Phi_{Y,2}) \alpha_{D,12} + (\Phi_{Y,2} - \Phi_{Y,1}) \alpha_{D,21} + \dots \\ & \dots + (\Phi_{Y,i} - \Phi_{Y,k}) \alpha_{D,ik} + (\Phi_{Y,k} - \Phi_{Y,i}) \alpha_{D,ki} + \dots \\ & \dots + (\Phi_{Y,N} - \Phi_{Y,k}) \alpha_{D,Nk} + (\Phi_{Y,k} - \Phi_{Y,N}) \alpha_{D,kN} + \dots, \end{aligned} \quad (2.44)$$

которая в силу условия (2.38) тождественно равна нулю:

$$F(\alpha_{D,ik}) \equiv 0. \quad (2.45)$$

Отсюда следует, что решения $\alpha_{D,ik}$ линейно зависимы, а определитель матрицы коэффициентов в левой части равен нулю:

$$\det \mathbf{A}_Y = 0, \quad (2.46)$$

где

$$A_{Y,ik} = (\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,k}^D)_{i,k=1,2,\dots,N}, \quad (2.47)$$

Следовательно, полный набор коэффициентов взаимодействия термодинамически открытой физической системы в процессе первого порядка по времени является линейно зависимым. Кроме того, N уравнений системы (2.43) недостаточны для одновременного определения N^2 связей всех узлов, поэтому при отсутствии первого приближения обратная задача идентификации коэффициентов взаимодействия порядка D решается для $(N-1)$ связи $\alpha_{D,1j}$ одного узла (уравнение узла исключается):

$$\left\{ (\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,1}^D) \alpha_{D,i1} = \sum_q |\mathbf{Y}_{iq}| - C_{Y,i} \frac{\partial \Phi_{Y,i}}{\partial \tau} - \sum_{k=2}^N (\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,k}^D) \alpha_{D,ik} \right\}_{i=2,3,\dots,N}. \quad (2.48)$$

При наличии приближения $(l-1)$ связей $\alpha_{D,ik}$ можно записать N аналогичных систем для определения приближения l для связи $(N-1)$ каждого узла i :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,1}^D \right) \alpha_{D,i1}^{(l)} = \sum_q |\mathbf{Y}_{iq}| - C_{Y,i} \frac{\partial \Phi_{Y,i}}{\partial \tau} - \sum_{k=2}^N \left(\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,k}^D \right) \alpha_{D,ik}^{(l-1)} \end{aligned} \right\}_{i=2,3,\dots,N}, \\
 \left\{ \begin{aligned} & \left(\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,2}^D \right) \alpha_{D,i2}^{(l)} = \\ & = \sum_q |\mathbf{Y}_{iq}| - C_{Y,i} \frac{\partial \Phi_{Y,i}}{\partial \tau} - \left(\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,1}^D \right) \alpha_{D,i1}^{(l-1)} - \sum_{k=3}^N \left(\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,k}^D \right) \alpha_{D,ik}^{(l-1)} \end{aligned} \right\}_{i=1,3,\dots,N}, \\
 \dots \\
 \left\{ \begin{aligned} & \left(\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,n}^D \right) \alpha_{D,in}^{(l)} = \sum_q |\mathbf{Y}_{iq}| - C_{Y,i} \frac{\partial \Phi_{Y,i}}{\partial \tau} - \\ & - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,k}^D \right) \alpha_{D,ik}^{(l-1)} - \sum_{k=n+1}^N \left(\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,k}^D \right) \alpha_{D,ik}^{(l-1)} \end{aligned} \right\}_{i=1,2,\dots,n-1,n+1,\dots,N}, \\
 \dots \\
 \left\{ \begin{aligned} & \left(\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,N}^D \right) \alpha_{D,iN}^{(l)} = \\ & = \sum_q |\mathbf{Y}_{iq}| - C_{Y,i} \frac{\partial \Phi_{Y,i}}{\partial \tau} - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,k}^D \right) \alpha_{D,ik}^{(l-1)} \end{aligned} \right\}_{i=1,2,\dots,N-1}.
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Таким образом, для термодинамически открытой системы первого порядка по времени справедливы следующие утверждения:

1) коэффициенты взаимодействия связей внутренних элементов являются линейно зависимыми;

2) полный набор коэффициентов взаимодействия не может быть определен только по граничным условиям и соответствующему им полю потенциала;

3) при наличии приближения $(l-1)$ коэффициентов взаимодействия $\alpha_{D,in}$ обратная задача идентификации коэффициентов последовательно решается в приближении l для $(N-1)$ связи $\alpha_{D,ik}$ каждого узла i системы.

Поскольку вид левых частей уравнений (2.43) не зависит от порядка производной потенциала по времени, утверждения о внутренних связях справедливы для открытой системы любого порядка по времени, и могут быть сформулированы в следующем виде: полный набор внутренних связей термодинамически открытой физической системы является линейно зависимым и при отсутствии первого приближения восстанавливается по граничным условиям и полю потенциала только для $(N-1)$ связи одного узла.

Согласно системе уравнений (2.49) коэффициенты взаимодействия $\alpha_{D,ik}$ МСП термодинамически открытой технической системы (узел i , связь k) идентифицируются по экспериментальным значениям абсолютных величин $|\mathbf{Y}_{iq}|$ потоков (узел i , поток q), направленных в систему и из нее, и известным значениям емкостей $C_{Y,i}$ при наличии экспериментального поля потенциала

$\Phi_{Y,i}$ и первых приближений идентифицируемых коэффициентов (начальные условия по умолчанию считаются определенными).

Если узел i имеет одну единственную связь $\alpha_{D,ik}$, то при отсутствии потоков $[\mathbf{Y}_{ik}]$, определяющих для него граничные условия второго рода, и известной емкости $C_{Y,i}$ коэффициент взаимодействия узла i с узлом k восстанавливается по полю потенциала и его первой производной по времени:

$$C_{Y,i} \frac{d\Phi_{Y,i}}{d\tau} - \alpha_{D,ik} (\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,k}^D) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha_{D,ik}}{C_{Y,i}} = \frac{1}{\Phi_{Y,i}^D - \Phi_{Y,j}^D} \frac{d\Phi_{Y,i}}{d\tau}. \quad (2.50)$$

Косвенное измерение коэффициента взаимодействия $\alpha_{D,ij}$ по (2.50) требует проведения режимов испытаний, поля потенциалов в которых достаточно точно аппроксимируются линейными зависимостями и позволяют перейти к конечно-разностной схеме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\Phi_{Y,i} = \Phi_{Y,i}(\tau_2) - \Phi_{Y,i}(\tau_1), \\ \Delta\tau = \tau_2 - \tau_1, \\ \frac{d\Phi_{Y,i}}{d\tau} \approx \frac{\Delta\Phi_{Y,i}}{\Delta\tau} \end{array} \right\}. \quad (2.51)$$

Отношение абсолютной теплоемкости узла i к абсолютной проводимости его тепловой связи с узлом k определяет постоянную времени взаимодействия узла i с узлом k (см. 3.5):

$$\tau_{ik} = \frac{C_i}{\alpha_{a,ik}} = \frac{m_i c_i}{\alpha_{ik} F} = \frac{\rho_i V_i c_i}{\alpha_{ik} F} = \frac{\rho_i c_i \delta_i}{\alpha_{ik}}. \quad (2.52)$$

Тогда согласно уравнению (2.50) постоянная времени узла i в тепловом процессе с узлом k восстанавливается по полю температуры и ее первой производной по времени:

$$C_i \frac{dT_i}{d\tau} - \alpha_{a,ik} (T_i - T_k) = 0 \Rightarrow \tau_{ik} = \frac{T_i - T_k}{\frac{dT_i}{d\tau}}. \quad (2.53)$$

Таким образом, для узла i , имеющего единственную тепловую связь с узлом k , при отсутствии действующих на него тепловых потоков и известной теплоемкости проводимость тепловой связи идентифицируется по постоянной времени этого узла в процессе взаимодействия с узлом k . В остальных случаях определение полного набора связей узла МСП требует решения системы уравнений (2.49).

Поскольку абсолютная тепловая проводимость α_a , отнесенная к абсолютной теплоемкости C , и удельная тепловая проводимость α , отнесенная к комплексу $(\rho c \delta)$, равны между собой и обратны постоянной времени, данные соотношения удобно называть относительной проводимостью.

Сложность идентификации коэффициентов взаимодействия в математических моделях КА с распределенными параметрами связана с большим количеством уравнений, которые при использовании автоматизированных систем проектирования, как правило, недоступны.

Нет необходимости идентифицировать все коэффициенты в уравнениях МРП. Множества элементов определены в пределах конструктивных узлов, которые проектируются или упрощенно представляются как условно изотермические. Таким составным частям ставятся в соответствие узлы МСП, которая связывается с МРП КА. На этапе проектирования связанная МСП строится для всего аппарата, а для идентификации параметров после проведения ТВИ достаточно выборочного построения МСП уточняемых частей модели.

Возможны два подхода к идентификации МРП с использованием связанной МСП.

В первом случае предполагается, что МСП достаточно подробно отражает тепловой процесс в идентифицируемом интерфейсе МРП, а уточненные с ее помощью коэффициенты напрямую переносятся в МРП. Алгоритм идентификации МРП в этом случае следующий:

- строится достаточно подробная МСП идентифицируемого теплового интерфейса МРП для определенных режимов испытаний;
- снимаются показания температуры в местах установки датчиков и вычисляются средние значения температуры и ее первой производной по времени для каждого узла МСП в данных режимах;
- выполняется идентификация искомых коэффициентов взаимодействия;
- идентифицированные параметры напрямую вводятся в МРП.

Если параметры МСП не могут быть непосредственно заданы в МРП, коэффициенты МСП идентифицируются дважды – относительно результатов расчетов по МРП и относительно экспериментальных результатов. Частные коэффициенты одной и той же МСП, идентифицированной по МРП и ТВИ, показывают отличие первых приближений коэффициентов МРП от их идентифицированных значений. Алгоритм идентификации тогда следующий:

- строится укрупненная МСП идентифицируемого теплового интерфейса для определенных режимов испытаний;
- снимаются показания температуры МРП в местах установки датчиков и вычисляются средние значения температуры и ее первой производной по времени для каждого узла МСП в данных режимах;
- выполняется идентификация коэффициентов взаимодействия по МРП;
- снимаются показания температуры в местах установки датчиков и вычисляются средние значения температуры и ее первой производной по времени для каждого узла МСП в режимах испытаний;
- выполняется идентификация коэффициентов взаимодействия по данным ТВИ;

– вычисляются частные параметров МСП, идентифицированных относительно МРП и ТВИ, уточняющие параметры МРП.

2.2.3. *Определение первого приближения тепловых проводимостей.*

Из рассмотренных положений следует, что обратная задача идентификации полного набора коэффициентов взаимодействия внутренних элементов физической системы может быть решена только итерационно последовательным перебором всех узлов МСП на каждой итерации. Для расчета первой итерации необходимо наличие первого приближения значений коэффициентов, которые должны быть вычислены по некоторым физическим моделям взаимодействия или определены заранее.

Возможность использования микроскопических свойств вещества для термодинамического анализа тепловых процессов исследована в [237-239].

В случае с ЭВТИ, где приведенные степени черноты внутренних слоев рассчитываются методом прогонки, такими взаимодействиями являются в зависимости от направления расчета теплообмен излучением наружного слоя с окружающей средой или контактный теплообмен внутреннего слоя с защищаемой поверхностью. При идентификации тепловых связей в модели космической системы необходимы первые приближения контактных проводимостей тепловых интерфейсов составных частей, имитируемых узлами МСП, и оптические свойства поверхностей, участвующих в теплообмене излучением.

В то время как оптические свойства могут быть измерены или их значения принимаются по справочной литературе, тепловые проводимости контактов конструктивных элементов зависят от механических, поверхностных свойств материалов, температуры, условий нагружения, а иногда и времени, поэтому рассчитываются по существующим аналитическим или полуэмпирическим зависимостям. Сложность прямого применения результатов расчетов в МСП заключается в том, что тепловые связи состоят из цепочек последовательно и параллельно расположенных сопротивлений, каждое из которых должно рассчитываться отдельно. После этого находится результирующее сопротивление (или проводимость) тепловой цепи, которая и является первым приближением тепловой связи.

На основе обзора современного состояния теории контактного теплообмена [240-241] и теоретических исследований тепловой проводимости в контактах твердых тел [242-249] развита модель одиночного теплового канала [250-252], разработан метод обобщенных сопротивлений [253] и выполнена количественная оценка влияния поверхностных нанопленок на тепловую проводимость в контактах металлов [254-258].

Для расчета первых приближений компонент суммарных сопротивлений могут быть использованы выражения обобщенных сопротивлений стягивания системы параллельных цилиндров, моделирующих контакт номинально гладких шероховатых поверхностей [236]:

– абсолютное сопротивление

$$R_{cn,a} = \Phi \frac{1}{n_r a_{r,1}} \Psi, \quad (2.54)$$

– удельное сопротивление

$$R_{cn} = R_{cn,a} A = \Phi \frac{A}{n_r a_{r,1}} \Psi = \Phi \frac{n_r A_1}{n_r a_{r,1}} \Psi = \Phi \frac{A_1}{a_{r,1}} \Psi = R_{cn,1}, \quad (2.55)$$

где A – активная площадь контакта, м^2 ; A_1 – активная площадь одиночного канала, связанного с пятном фактического контакта, м^2 ; $a_{r,1}$ – средний радиус пятен фактического контакта, м ; n_r – число пятен фактического контакта; Φ – функция формы; Ψ – функция стягивания. При стягивании потока $|\mathbf{Y}|$ к контактными пятнами функция стягивания и активная площадь определяются следующим образом ($a_n / a_r \gg 1$) [259]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi = \frac{1}{4}, \\ A = A_r = n_r A_{r,1} \end{array} \right\}, \quad (2.56)$$

a_n – эквивалентный радиус номинальной площади, м ; a_r – эквивалентный радиус фактической площади, м :

$$A_n = \pi a_n^2, \quad (2.57)$$

$$A_r = \pi a_r^2. \quad (2.58)$$

Функция стягивания (2.56) обычно принимается при расчете контактного теплообмена твердых тел с номинально гладкими шероховатыми поверхностями, фактическая площадь касания которых много меньше номинальной.

Согласно (2.54) для расчета абсолютного сопротивления возмущенной зоны необходимо определить число параллельных одиночных каналов, равное количеству контактных пятен и представляющее собой частное фактической контактной площади A_r и площади одного пятна:

$$n_r = \frac{A_r}{A_{r,1}} = \frac{A_r}{\pi a_{r,1}^2}, \quad (2.59)$$

где средний радиус контактных пятен $a_{r,1} \approx 30$ $\mu\text{м}$ [259]. Следовательно, вычисление сопротивления стягивания в контакте твердых тел с номинально гладкими шероховатыми поверхностями возможно только при известной фактической контактной площади. Метод расчета фактической контактной площади A_r в зависимости от поверхностных свойств материалов и механических характеристик контакта приведен в [236].

Обобщенное сопротивление стягивания связано с сопротивлением $R_{Y,cn,a}$ потоку $|\mathbf{Y}|$ величины Y в среде со свойством ξ_Y и, в частности, с тепловым сопротивлением $R_{th,cn,a}$ (сопротивление тепловому потоку $|\mathbf{Q}|$ количества тепла Q в среде с теплопроводностью λ) следующим уравнением [236]:

$$\xi_Y R_{Y,cn,a} = R_{cn,a} = \lambda R_{th,cn,a}. \quad (2.60)$$

Активной площадью сопротивлений стягивания является площадь A_r источника (стока), т. е. удельные сопротивления определяются в виде

$$R_{cn} = R_{cn,a} A_r \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R_{Y,cn} = R_{Y,cn,a} A_r, \\ R_{th,cn} = R_{th,cn,a} A_r \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Обратные обобщенным сопротивлениям величины представляют собой обобщенные проводимости стягивания:

$$\alpha_{cn,a} = \frac{1}{R_{cn,a}}, \quad (2.62)$$

$$\alpha_{cn} = \frac{1}{R_{cn}}. \quad (2.63)$$

При наличии на поверхности искусственных или естественных макронеровностей происходит двухступенчатое стягивание – сначала контурное от номинальной площади A_n к контурной площади A_{ap} , в пределах которой группируются контактные пятна, а затем фактическое к фактической площади A_r [236]:

$$R_{cn,a}^{A_n \rightarrow A_{ap} \rightarrow A_r} = R_{cn,a}^{A_n \rightarrow A_{ap}} + R_{cn,a}^{A_{ap} \rightarrow A_r}. \quad (2.64)$$

Если в зазорах находится проводящая среда (для условий вакуума теплопроводящая паста или прокладка), то параллельно с сопротивлением стягивания к контурной площади появляется сопротивление стягивания к межконтурной площади $(A_n - A_{ap})$. В пределах контурной площади также присутствуют два параллельных сопротивления – стягивания к контактным пятнам и межконтактным зазорам $(A_{ap} - A_r)$ (рисунок 2.1) [236]:

$$\frac{1}{R_{cn,a,c}} = \frac{1}{R_{cn,a}^{A_n \rightarrow A_{ap}} + \left[\frac{1}{R_{cn,a}^{A_{ap} \rightarrow A_r}} + \frac{1}{R_{cn,a}^{A_{ap} \rightarrow (A_{ap} - A_r)}} \right]^{-1}} + \frac{1}{R_{cn,a}^{A_n \rightarrow (A_n - A_{ap})}}. \quad (2.65)$$

Результаты расчетов удельных номинальных контактного теплового сопротивления и проводимости в зависимости от относительной контактной площади показаны на рисунке 2.2, в зависимости от средней температуры контакта – на рисунке 2.3.

Наилучшее совпадение с результатами аналитического расчета [259] обеспечивают полуэмпирические выражения по [261-263]. Выражение по [261-262] является уточненным вариантом выражения по [260], поэтому лучше коррелирует с другими выражениями. Наиболее универсальным полуэмпирическим выражением, учитывающим как зависимость от температуры, так и от номинального давления, является [263].

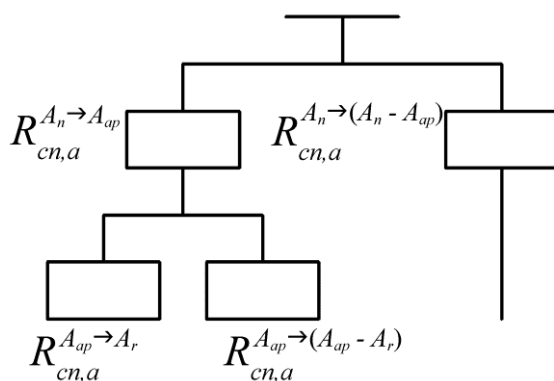
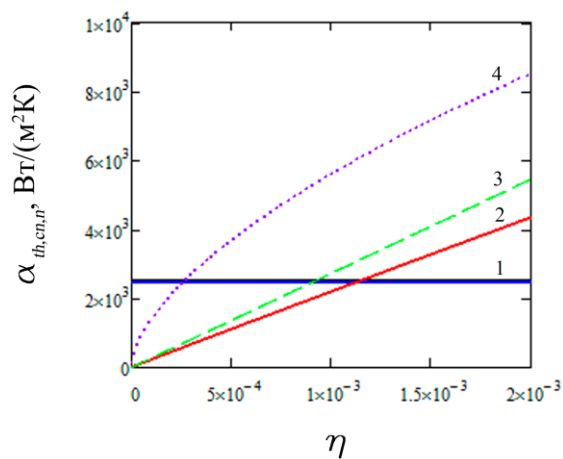
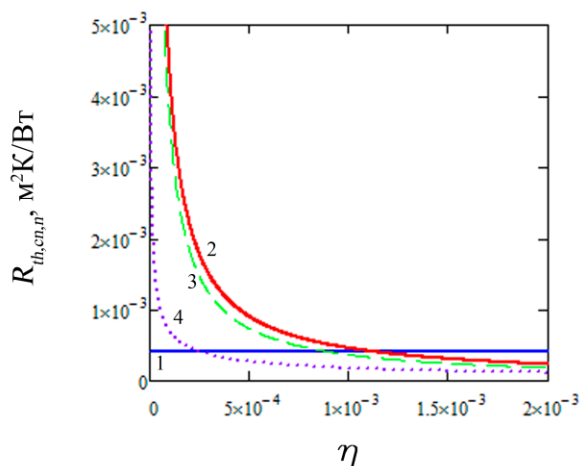


Рисунок 2.1 – Эквивалентная схема обобщенного сопротивления стягивания со стороны тела с волнистой шероховатой поверхностью в интерфейсе с проводящей средой в зазорах



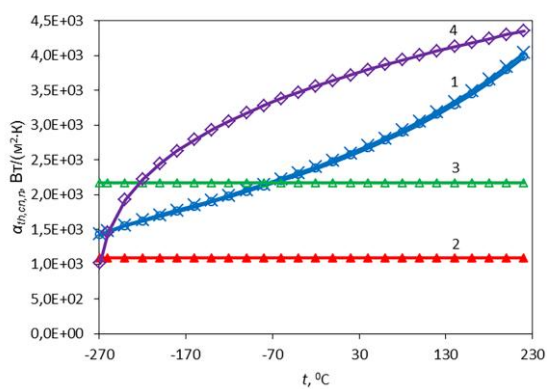
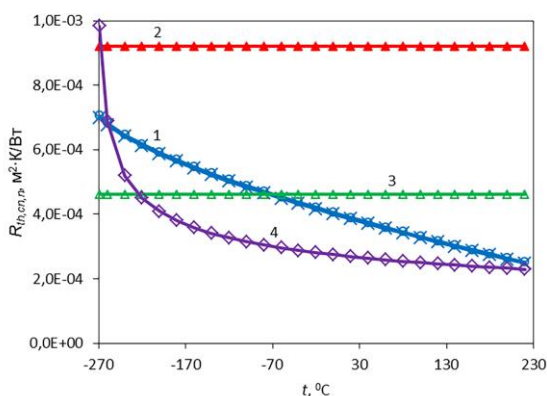
а – удельное номинальное тепловое сопротивление

б – удельная номинальная тепловая проводимость

Рисунок 2.2 – Зависимость номинальных удельных теплового сопротивления и проводимости контакта Al-Al от относительной площади контакта

($T = 273 \text{ K}$, $R_a = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$):

1 – (2.56) при $\eta = 4,908 \cdot 10^{-4}$ [259]; 2 – [260], 3 – [261-262]; 4 – [263]



а – удельное номинальное тепловое сопротивление

б – удельная номинальная тепловая проводимость

Рисунок 2.3 – Зависимость номинальных удельных теплового сопротивления и проводимости контакта Al-Al от температуры контакта

($R_a = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $P_n = 10^5 \text{ Па}$):

1 – (2.56) при $\eta = 4,908 \cdot 10^{-4}$ [259]; 2 – [260], 3 – [261-262]; 4 – [263]

2.2.4. Укрупненная математическая модель с сосредоточенными параметрами негерметичного отсека космического аппарата.

Рассматриваемая математическая модель с сосредоточенными параметрами представляет собой систему уравнений теплового баланса для укрупненного представления составной части космического аппарата в виде негерметичного отсека, состоящего из четырех узлов: узел 1 – несущая конструкция с термостабилизированными сотопанелями (ТСП) и аппаратурой; узел 2 – внутренняя часть оптической защиты (ОЗ) – внутренняя бленда; узел 3 – наружная часть ОЗ, наружная бленда; узел 4 – стыковочная рама [212-213], [264].

Узел 1 имитирует несущую конструкцию (НК) и ТСП отсека суммарной массой m_1 и средней удельной теплоемкостью c_2 . Охлаждение узла осуществляется излучением с терморегулирующего покрытия (ТРП) суммарной площадью

$$F_1 = F_{II} + F_{IV}, \quad (2.66)$$

где F_{II} – площадь ТРП на приборной панели (ПП) II; F_{IV} – площадь ТРП на ПП IV. Граничные условия для узла 1 задаются в виде значений следующих параметров [212-213], [264]:

- 1) $Q_{e.1}$ – тепловая мощность аппаратуры на ПП II, IV, Вт;
- 2) $Q_{h.1}$ – тепловая мощность нагревателей на ПП II, IV, Вт;
- 3) поглощенный тепловой поток на ПП II, IV

$$Q_{s.1} = Q_{s.1.II} + Q_{s.1.IV}, \quad (2.67)$$

где $Q_{s.2.II}$ – поглощенный тепловой поток на ПП II, Вт; $Q_{s.2.IV}$ – поглощенный тепловой поток на ПП IV, Вт;

- 4) излученный с ТРП тепловой поток

$$Q_{R.1} = F_1 \sigma \varepsilon_1 (T_1(\tau)^4 - T_R^4), \quad (2.68)$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) – постоянная Стефана-Больцмана; $\varepsilon_1 = \varepsilon_{ТРП}$ – степень черноты ТРП; T_R – температура космического пространства или криоэкранов (для условий ТВИ); T_1 – температура узла 1, К; τ – расчетное время, с.

Узел 2 представляет собой внутреннюю часть ОЗ с массой m_2 и средней удельной теплоемкостью c_3 . Граничные условия для узла 2 не задаются.

Узел 3 представляет собой наружную часть ОЗ с массой m_3 и средней удельной теплоемкостью c_4 . Граничные условия для узла 3 задаются в виде значений следующих параметров:

- 1) $Q_{s.3}$ – поглощенный тепловой поток, Вт;
- 2) излученный тепловой поток

$$Q_{R.3} = F_3 \sigma \varepsilon_3 (T_3(\tau)^4 - T_R^4), \quad (2.69)$$

где ε_3 – степень черноты ОЗ; T_3 – температура узла 3, К.

Узел 4 представляет собой раму с массой m_4 и средней удельной теплоемкостью c_4 . Граничные условия для узла 4 не задаются.

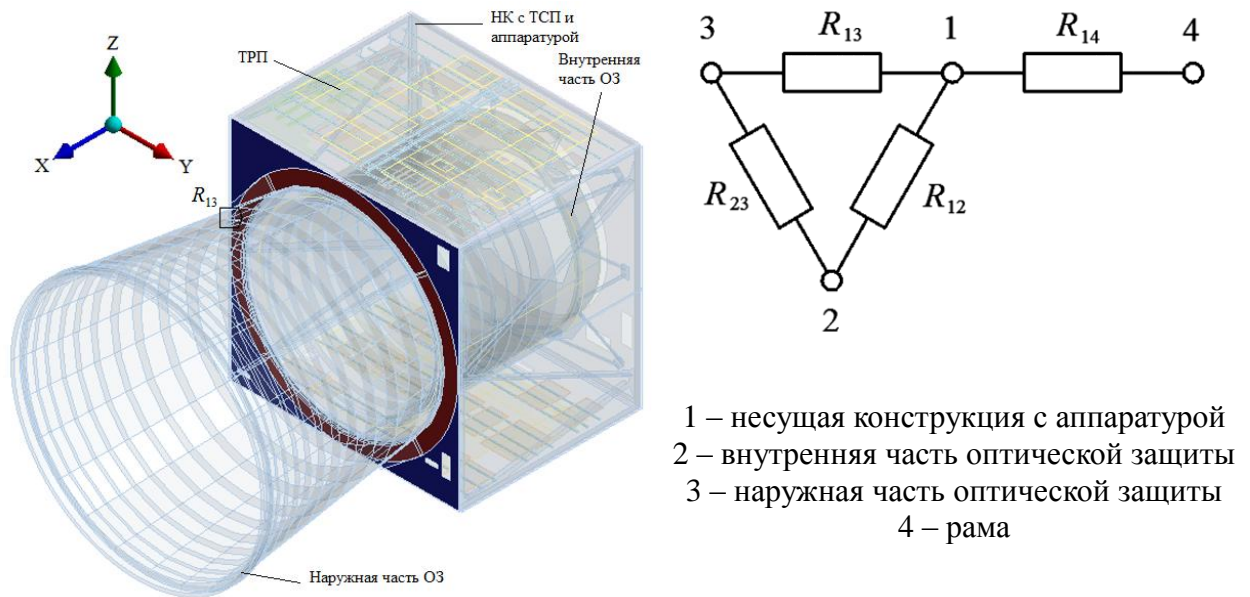


Рисунок 2.4 – Укрупненная МСП негерметичного отсека КА

Контактные площади конструктивных элементов, обеспечивающих тепловую проводимость между узлами МСП (рисунок 2.4): $F_{14}, F_{12}, F_{13}, F_{23}$.

Первые приближения абсолютных контактных проводимостей α_a между узлами МСП определяются произведением удельных контактных проводимостей α и площадей соединений: $\alpha_a = \alpha F$.

В результате, система уравнений математической модели с сосредоточенными параметрами записывается в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_1(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{m_1 c_1} [Q_{e.1} + Q_{h.1} + Q_{s.1} - \\ &- F_1 \sigma \varepsilon_1 (T_1(\tau)^4 - T_R^4) - \alpha_{a.13} (T_1(\tau) - T_3(\tau)) - \\ &- \alpha_{a.12} (T_1(\tau) - T_2(\tau)) - \alpha_{a.14} (T_1(\tau) - T_4(\tau))], \\ \frac{dT_2(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{m_2 c_2} [-\alpha_{a.12} (T_2(\tau) - T_1(\tau)) - \alpha_{a.23} (T_2(\tau) - T_3(\tau))], \\ \frac{dT_3(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{m_3 c_3} [Q_{s.3} - F_3 \sigma \varepsilon_3 (T_3(\tau)^4 - T_R^4) - \alpha_{a.13} (T_3(\tau) - T_1(\tau)) - \\ &- \alpha_{a.23} (T_3(\tau) - T_2(\tau))], \\ \frac{dT_4(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{m_4 c_4} [-\alpha_{a.14} (T_4(\tau) - T_1(\tau))] \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

Обозначим проводимости тепловых связей между узлами переменными x_i :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{14} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \end{pmatrix}, \quad (2.71)$$

Запишем систему (2.70) относительно этих переменных:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 - T_4)x_1 + (T_1 - T_2)x_2 + (T_1 - T_3)x_3 &= \\ &= Q_{e.1} + Q_{h.1} + Q_{s.1} - F_1\sigma\varepsilon_1(T_1^4 - T_R^4) - m_1c_1 \frac{dT_1}{d\tau}, \\ (T_2 - T_1)x_2 + (T_2 - T_3)x_4 &= -m_2c_2 \frac{dT_2}{d\tau}, \\ (T_3 - T_1)x_3 + (T_3 - T_2)x_4 &= \\ &= Q_{s.3} - F_3\sigma\varepsilon_3(T_3^4 - T_R^4) - m_3c_3 \frac{dT_3}{d\tau}, \\ (T_4 - T_1)x_1 &= -m_4c_4 \frac{dT_4}{d\tau} \end{aligned} \right\}. \quad (2.72)$$

В матричном виде данная система имеет вид

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \quad (2.73)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} T_1 - T_4 & T_1 - T_2 & T_1 - T_3 & 0 \\ 0 & T_2 - T_1 & 0 & T_2 - T_3 \\ 0 & 0 & T_3 - T_1 & T_3 - T_2 \\ T_4 - T_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.74)$$

$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{aligned} &Q_{e.1} + Q_{h.1} + Q_{s.1} - F_1\sigma\varepsilon_1(T_1^4 - T_R^4) - m_1c_1 \frac{dT_1}{d\tau}, \\ &-m_2c_2 \frac{dT_2}{d\tau}, \\ &Q_{s.3} - F_3\sigma\varepsilon_3(T_3^4 - T_R^4) - m_3c_3 \frac{dT_3}{d\tau}, \\ &-m_4c_4 \frac{dT_4}{d\tau} \end{aligned} \right\}. \quad (2.75)$$

Определитель матрицы коэффициентов в левой части равен нулю:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} T_1 - T_4 & T_1 - T_2 & T_1 - T_3 & 0 \\ 0 & T_2 - T_1 & 0 & T_2 - T_3 \\ 0 & 0 & T_3 - T_1 & T_3 - T_2 \\ T_4 - T_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned}
&= (T_1 - T_4) \det \begin{pmatrix} T_2 - T_1 & 0 & T_2 - T_3 \\ 0 & T_3 - T_1 & T_3 - T_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \\
&- (T_1 - T_2) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & T_2 - T_3 \\ 0 & T_3 - T_1 & T_3 - T_2 \\ T_4 - T_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\
&+ (T_1 - T_3) \det \begin{pmatrix} 0 & T_2 - T_1 & T_2 - T_3 \\ 0 & 0 & T_3 - T_2 \\ T_4 - T_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 0 = \\
&= (T_1 - T_4) [(T_2 - T_1) \cdot 0 - 0 + (T_2 - T_3) \cdot 0] - \\
&- (T_1 - T_2) [0 - 0 - (T_2 - T_3)(T_3 - T_1)(T_4 - T_1)] + \\
&+ (T_1 - T_3) [0 + (T_2 - T_1)(T_3 - T_2)(T_4 - T_1) + 0] = \\
&= (T_1 - T_2)(T_2 - T_3)(T_3 - T_1)(T_4 - T_1) + (T_1 - T_3)(T_2 - T_1)(T_3 - T_2)(T_4 - T_1) = \\
&= (T_1 - T_2)(T_2 - T_3)(T_3 - T_1)(T_4 - T_1) - (T_1 - T_2)(T_2 - T_3)(T_3 - T_1)(T_4 - T_1) = 0
\end{aligned}$$

Следовательно, полный набор проводимостей тепловых связей не определим по полям температуры и ее производной по времени, соответствующих заданным граничным условиям, однако, если согласно 2.4 исключить первое уравнение и считать проводимость α_{23} известной, то при отсутствии первого приближения система имеет единственное решение для переменных x_1, x_2, x_3 , т. е. для неизвестных проводимостей $\alpha_{14}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ тепловых связей первого узла с остальными узлами:

$$\left. \begin{aligned}
&(T_2 - T_1)x_2 = -m_2 c_2 \frac{dT_2}{d\tau} - (T_2 - T_3)x_4, \\
&(T_3 - T_1)x_3 = \\
&= Q_{s,3} - F_3 \sigma \varepsilon_3 (T_3^4 - T_R^4) - m_3 c_3 \frac{dT_3}{d\tau} - (T_3 - T_2)x_4, \\
&(T_4 - T_1)x_1 = -m_4 c_4 \frac{dT_4}{d\tau}
\end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (2.77)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
&\alpha_{12} = \frac{1}{T_1 - T_2} \left[m_2 c_2 \frac{dT_2}{d\tau} + (T_2 - T_3) \alpha_{23} \right], \\
&\alpha_{13} = \frac{1}{T_1 - T_3} \left[Q_{s,3} - F_3 \sigma \varepsilon_3 (T_3^4 - T_R^4) - m_3 c_3 \frac{dT_3}{d\tau} - (T_3 - T_2) \alpha_{23} \right], \\
&\alpha_{14} = \frac{m_4 c_4}{T_1 - T_4} \frac{dT_4}{d\tau}
\end{aligned} \right\}.$$

2.3. Проектные и поверочные тепловые расчеты

Понятие системы космического аппарата объединяет множество технических систем различного уровня, предназначенных для эксплуатации в условиях космического пространства. Применительно к теплофизическим задачам под системой подразумевается какая-либо составная часть или их совокупность, образующая космический аппарат.

Проектные тепловые расчеты СЧ КА делятся на две основные части: расчеты наземных и летных испытаний. Расчеты выполняются с использованием теплофизических математических моделей, параметры которых в первом приближении определяются по имеющимся теоретическим и справочным данным.

Проектные расчеты тепловых вакуумных испытаний являются основанием для разработки режимов ТВИ СЧ КА, а также позволяют проверить и идентифицировать математические модели СЧ по экспериментальным результатам.

Математические модели СЧ образуют модель КА в целом. Алгоритм математического моделирования зависит от метода проектирования КА. При восходящем проектировании математические модели СЧ разрабатываются отдельно, а затем объединяются в общую сборку. При нисходящем проектировании разрабатывается общая модель КА, которая затем детализируется для отдельных составных частей (рисунок 2.5).

Автономные ТВИ СЧ проводятся в случае невозможности или нецелесообразности комплексных испытаний КА. Возможность проведения комплексных ТВИ КА ограничена, в частности, габаритами вакуумной камеры, а их целесообразность зависит от структуры СТР КА. Если тепловые режимы отсеков КА обеспечиваются автономно, а их взаимное влияние в тепловых интерфейсах определено известными тепловыми потоками, то возможна автономная тепловая отработка СЧ. Если размеры аппарата небольшие, то его тепловой режим обеспечивается централизованно, и КА моделируется и отрабатывается как единая составная часть.

Таким образом, целью проектных расчетов ТВИ составных частей КА является разработка программы и теоретическое обоснование тепловых режимов ТВИ, по которым выполняется проверка тепловых моделей СЧ.

Цель расчетов достигается решением следующих задач (рисунок 2.5):

- создаются математические модели с распределенными параметрами и укрупненные математические модели с сосредоточенными параметрами СЧ КА;
- разрабатываются граничные условия для моделирования ТВИ СЧ;
- выполняются расчеты тепловых режимов ТВИ СЧ с использованием МРП и МСП при заданных граничных условиях;
- проводится проверка тепловых моделей СЧ КА сравнением результатов расчетов с результатами ТВИ;
- оценивается точность тепловых моделей СЧ КА;

– делаются выводы о необходимости идентификации тепловых моделей СЧ КА.

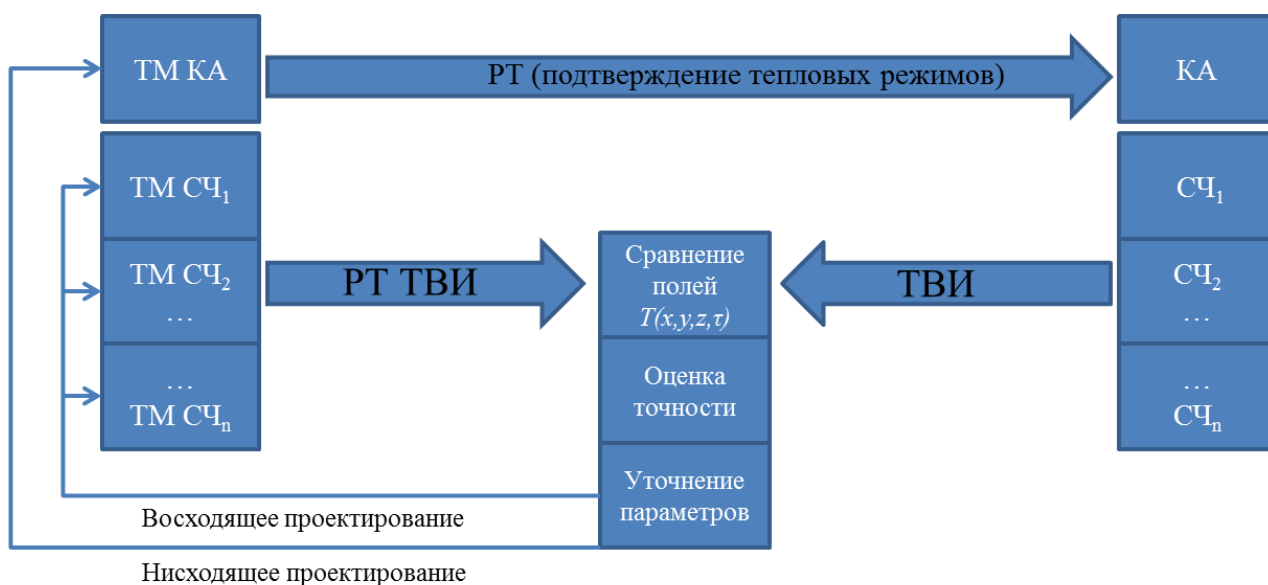


Рисунок 2.5 – Схема системной тепловой отработки тепловых режимов СЧ КА на основе математического и физического моделирования

Задачи проектных расчетов решаются в два этапа: сначала на базе укрупненных МСП, поставленных в соответствие МРП, а затем непосредственно по МРП. Это вызвано тем, что расчеты с использованием моделей с распределенными параметрами достаточно ресурсоемкие и требуют существенных затрат трудоемкости и машинного времени. Кроме того, связанные МСП могут использоваться для идентификации МРП.

Целью проектных расчетов летных испытаний СЧ КА является теоретическое обоснование тепловых режимов летной эксплуатации и выработка рекомендаций по доработке СЧ. С этой целью:

- определяются проектные параметры МРП и МСП СЧ, обеспечивающие точность расчетов, устанавливаемую проектными расчетами ТВИ СЧ;

- разрабатываются граничные условия для математического моделирования тепловых режимов СЧ на участках функционирования КА;

- выполняются тепловые расчеты при заданных граничных условиях;

- делаются выводы об обеспечении требований тепловых режимов СЧ КА и необходимости доработки СЧ.

Режимы ТВИ рассчитываются с использованием тех же тепловых моделей, что и режимы летной эксплуатации, поэтому расчеты ТВИ позволяют сделать общие выводы о точности тепловых моделей СЧ КА, на основе которых выполняются и расчеты режимов летных испытаний. В соответствии с задачами проектных расчетов определяются расхождения теоретических и экспериментальных данных, и устанавливается точность выполненных проектных расчетов тепловых режимов КА или его СЧ в

летних условиях эксплуатации. Если заданный критерий точности выполняется, модель обеспечивает достаточную точность расчетов, если нет – параметры модели идентифицируются по данным ТВИ, и проводится поверочный расчет ТВИ, подтверждающий, что уточненные параметры модели обеспечивают заданную точность.

В результате, выпускается поверенная тепловая модель СЧ КА, которая может интегрироваться в общую модель КА и использоваться для расчетов тепловых режимов в штатных и нештатных условиях летной эксплуатации с установленной точностью. Идентифицированные параметры проверяются сравнением расчетных и экспериментальных температурных полей элементов конструкции по результатам поверочного расчета.

Как и проектные, поверочные расчеты делятся на расчеты наземных и летных испытаний. Целью поверочных тепловых расчетов автономных ТВИ СЧ КА является проверка тепловых моделей СЧ КА, идентифицированных по результатам проектных расчетов, при граничных условиях, соответствующих измеренным внешним и внутренним воздействиям в автономных ТВИ СЧ. С этой целью решаются следующие задачи:

- идентифицируются МРП СЧ КА;
- уточняются граничные условия для моделирования автономных ТВИ СЧ;
- выполняются тепловые расчеты по МРП СЧ при заданных граничных условиях;
- проводится проверка тепловых моделей СЧ КА сравнением результатов расчетов с результатами автономных ТВИ;
- оценивается точность поверенных тепловых моделей СЧ КА.

Целью поверочных тепловых расчетов летных испытаний СЧ КА является подтверждение тепловых режимов СЧ согласно предъявляемым требованиям для условий летной эксплуатации на основе идентифицированной тепловой математической модели с точностью, установленной в поверочных расчетах ТВИ СЧ. С этой целью:

- определяются идентифицированные параметры МРП СЧ, обеспечивающие точность расчетов, устанавливаемую поверочными расчетами ТВИ СЧ;
- разрабатываются граничные условия для математического моделирования тепловых режимов СЧ на участках функционирования КА;
- выполняются тепловые расчеты при заданных граничных условиях;
- делаются выводы о подтверждении тепловых режимов КА предъявляемым к ним требованиям.

2.4. Граничные условия для расчетов тепловых вакуумных испытаний

Граничные условия для тепловых расчетов ТВИ разрабатываются на основе теоретических или статистических параметров, соответствующих штатным режимам эксплуатации СЧ, и реализуются в виде внутренних воздействий (тепловые мощности аппаратуры и нагревателей) и внешних воздействий, обеспечиваемых технологическим оборудованием вакуумной камеры – криоэкранами, имитаторами оптического и инфракрасного излучения, вакуумными насосами – с учетом возможностей измерительной системы.

Космическое пространство имитируется азотными криоэкранами. Отличие температуры криоэкранов (93 К) от температуры космического пространства (4 К) приводит к несущественному расхождению результатов ТВИ с реальными условиями эксплуатации.

Тепловой поток, излучаемый ТРП термостабилизированных панелей СЧ КА (рисунок 2.4), равен:

– в реальных условиях эксплуатации

$$Q_{4К} = F_{ТРП} \sigma \varepsilon_{ТРП} (T^4 - T_0^4) \approx 544 \text{ Вт}, \quad (2.78)$$

где $T = 253 \text{ К}$ ($t = -20 \text{ °С}$) – расчетная температура ТСП; $T_0 = 4 \text{ К}$ ($t_0 = -269 \text{ °С}$) – температура космического пространства; $F_{ТРП} \approx 2,6 \text{ м}^2$ – суммарная площадь ТРП панелей; ε – степень черноты ТРП;

– в вакуумной камере

$$Q_{93К} = F_{ТРП} \sigma \varepsilon_{пр} (T^4 - T_0^4) \approx 534 \text{ Вт}, \quad (2.79)$$

где $T = 253 \text{ К}$ ($t = -20 \text{ °С}$) – расчетная температура ТСП; $T_0 = 93 \text{ К}$ ($t_0 = -180 \text{ °С}$) – температура криоэкранов; $F_{ТРП} \approx 2,6 \text{ м}^2$ – площадь ТРП; $\varepsilon_{пр}$ – приведенная степень черноты ТРП и криоэкранов.

Разность тепловых потоков, излучаемых ТРП в реальных и имитируемых условиях, составляет

$$Q_{4К} - Q_{93К} \approx 10 \text{ Вт}, \quad (2.80)$$

что не превышает 2 % от значения излучаемого теплового потока:

$$\frac{Q_{4К} - Q_{93К}}{Q_{93К}} \approx 0,019. \quad (2.81)$$

При расчетной температуре панелей плюс 40 °С абсолютное расхождение сохраняется на том же уровне, а относительное не превышает 1 %:

$$Q_{4К} = F_{ТРП} \sigma \varepsilon_{ТРП} (T^4 - T_0^4) \approx 1273 \text{ Вт}, \quad (2.82)$$

$$Q_{93К} = F_{ТРП} \sigma \varepsilon_{пр} (T^4 - T_0^4) \approx 1264 \text{ Вт}, \quad (2.83)$$

$$Q_{4К} - Q_{93К} \approx 9 \text{ Вт}, \quad (2.84)$$

$$\frac{Q_{4К} - Q_{93К}}{Q_{93К}} \approx 0,0071. \quad (2.85)$$

Для проверки тепловой модели СЧ КА по результатам моделирования тепловых режимов автономных ТВИ предусматривается имитация следующих участков функционирования:

- стартовая позиция;
- участок выведения;
- участок начального функционирования;
- режим захлаживания криогенной аппаратуры;
- суточный цикл;
- имитация предельных (возможно, нештатных) условий эксплуатации и исследовательские режимы испытаний.

Поскольку стационарные режимы практически недостижимы, они имитируются квазистационарными, в которых температура изменяется достаточно медленно. Требования к допустимому значению производной температуры по времени предъявляются индивидуально для каждой СЧ КА в диапазоне от 0,5 до 2 К/ч. Расчетное время выхода на квазистационарный режим определяется по результатам моделирования.

При проведении проектных расчетов тепловые мощности оборудования (имитаторов) и нагревателей СТР принимаются равными номинальным значениям. Параметры пассивных элементов терморегулирования (ЭВТИ, ТРП, теплопроводы) также считаются равными номинальным.

Поглощенные лучистые потоки от ИКИ и ИСИ рассчитываются по следующим выражениям:

- от ИКИ

$$q_{\text{погл,ИКИ}} \approx \varepsilon q_{\text{пад,ИКИ}}, \quad (2.86)$$

где ε – излучательная способность поверхности СЧ; $q_{\text{пад,ИКИ}}$ – заданная плотность инфракрасного излучения, Вт/м²;

- от ИСИ

$$q_{\text{погл,ИСИ}} \approx A_s q_{\text{пад,ИСИ}}, \quad (2.87)$$

где A_s – коэффициент поглощения поверхности СЧ; $q_{\text{пад,ИСИ}}$ – заданная плотность излучения в оптическом диапазоне, Вт/м³. На поверхностях, одновременно освещаемых ИКИ и ИСИ, поглощенные потоки инфракрасного и оптического излучения складываются – действует принцип суперпозиции.

Характерным отрезком участка выведения является вращение аппарата вокруг оси, направленной в сторону его движения, когда вектор потока солнечного излучения направлен перпендикулярно оси с отклонением от нескольких градусов до нескольких десятков градусов. Поскольку непосредственно моделировать и имитировать в испытаниях такой режим достаточно сложно, рассчитывается средняя интегральная плотность потока, поглощаемого ТРП при вращении, по которой затем находится требуемая плотность потока излучения инфракрасных имитаторов. Синусоидальные колебания плотности лучистого теплового потока с амплитудой

$$q_{\text{max}} = 1400 \text{ Вт/м}^2 \quad (2.88)$$

и произвольным полупериодом l имеют частоту

$$\nu = \frac{1}{2l}, \quad (2.89)$$

циклическую частоту

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{\pi}{l} \quad (2.90)$$

и описываются функцией

$$q(\tau) = q_{\max} \sin \omega\tau = q_{\max} \sin \frac{\pi}{l} \tau. \quad (2.91)$$

Среднее значение функции $q(\tau)$ на полупериоде l равно с освещенной стороны

$$\begin{aligned} \bar{q}_{+l} &= q_{\max} \frac{1}{l} \int_0^l \sin \frac{\pi}{l} \tau d\tau = q_{\max} \frac{1}{\pi} \left(-\cos \frac{\pi}{l} \tau \right)_0^l = q_{\max} \frac{1}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{l} \tau \right)_l^0 = \\ &= q_{\max} \frac{1}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{l} \tau \right)_l^0 = \frac{2}{\pi} q_{\max}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

с затененной стороны

$$\bar{q}_{-l} = 0. \quad (2.93)$$

Среднее арифметическое значение функции $q(\tau)$ на периоде $2l$ составляет

$$\bar{q} = \frac{1}{2} (\bar{q}_{+l} + \bar{q}_{-l}) = \frac{1}{\pi} q_{\max} \approx 445,6 \text{ Вт/м}^3. \quad (2.94)$$

Средняя плотность потока инфракрасного излучения $\bar{q}_{\text{пад,ИКИ}}$, имитирующего синусоидальные колебания плотности лучистого потока, рассчитывается по средней плотности поглощенного ТРП потока солнечного излучения

$$\bar{q}_{\text{погл,ТРП}} = \bar{q} A_{s,\text{ТРП}} = \frac{q_{\max}}{\pi} A_{s,\text{ТРП}} \approx 49,02 \text{ Вт/м}^2, \quad (2.95)$$

где $A_{s,\text{ТРП}}$ – коэффициент поглощения ТРП. Плотность падающего потока от ИКИ равна

$$\bar{q}_{\text{пад,ИКИ}} = \frac{\bar{q}_{\text{погл,ТРП}}}{\varepsilon_{\text{ТРП}}} \approx 54,47 \text{ Вт/м}^2, \quad (2.96)$$

где $\varepsilon_{\text{ТРП}}$ – излучательная способность ТРП. Плотности поглощенных потоков от ИКИ на поверхности ЭВТИ составляют

$$q_{\text{погл,ЭВТИ}} = \varepsilon_{\text{ЭВТИ}} q_{\text{пад,ИКИ}}, \quad (2.97)$$

где $\varepsilon_{\text{ЭВТИ}}$ – излучательная способность ЭВТИ. Если плотность потока фонового излучения камеры превышает расчетную плотность потока от ИКИ, допускается имитация среднеинтегрального лучистого теплового потока при вращении аппарата на участке выведения фоновым излучением.

Расчеты имитации режимов штатной эксплуатации, максимальной и минимальной тепловой мощности выполняются в соответствии с циклограммами работы бортовой аппаратуры для критических случаев

освещенности: в режимах наибольшего тепловыделения задаются максимальные поглощенные тепловые потоки, в режимах наименьшего тепловыделения – минимальные. В целом, моделирование штатных режимов не отличается от расчетов имитации предельных условий функционирования, поэтому пример граничных условий приводится для последних:

- режим предельного нагрева от ИКИ;
- режим охлаждения до минимальной температуры функционирования бортовой аппаратуры;
- режим максимального нагрева от бортовой аппаратуры и нагревателей СТР;
- режим предельного охлаждения до температуры хранения.

Режим предельного нагрева от ИКИ проводится до достижения на термостабилизированных панелях с радиоэлектронной аппаратурой максимальной температуры по датчикам контрольной группы плюс 55 °С при следующих граничных условиях:

а) ИСИ выключен; плотность потока от ИКИ перпендикулярно к панелям составляет

$$q_{\text{пад,ИКИ}} = 900 \text{ Вт/м}^2. \quad (2.98)$$

Плотности поглощенных потоков от ИКИ составляют:

– на поверхности ТРП

$$q_{\text{погл,ТРП}} = \varepsilon_{\text{ТРП}} q_{\text{пад,ИКИ}} = 810 \text{ Вт/м}^2, \quad (2.99)$$

– на внешней поверхности ЭВТИ

$$q_{\text{погл,ЭВТИ}} = \varepsilon_{\text{ЭВТИ}} q_{\text{пад,ИКИ}}, \quad (2.100)$$

– на внешней поверхности оптической защиты

$$q_{\text{погл,НБ}} = \varepsilon_{\text{НБ}} q_{\text{пад,ИКИ}} = 270 \text{ Вт/м}^2; \quad (2.101)$$

б) бортовая аппаратура выключена;

в) нагреватели СТР выключены.

Режим охлаждения до минимальной температуры функционирования бортовой аппаратуры проводится до температуры ТСП вблизи посадочных оснований аппаратуры минус 25 °С при следующих граничных условиях:

а) ИСИ и ИКИ выключены;

б) бортовая аппаратура выключена;

в) нагреватели СТР выключены.

Режим максимального нагрева от бортовой аппаратуры и нагревателей СТР проводится до температуры ТСП с аппаратурой вблизи посадочного основания блока управления СТР плюс 45 °С или до перехода в квазистационарное состояние при следующих граничных условиях:

а) ИСИ и ИКИ выключены;

б) бортовая аппаратура включена;

в) нагреватели СТР включены.

Режим предельного охлаждения проводится до температуры ТСП вблизи посадочных оснований управляющих блоков не ниже минус 40 °С при следующих граничных условиях:

- а) ИСИ и ИКИ выключены;
- б) бортовая аппаратура выключена;
- в) нагреватели СТР выключены.

2.5. Контрольная выборка результатов и доверительная вероятность тепловых расчетов

Примеры результатов теплового расчета ТВИ СЧ по МСП (2.70) для режимов имитации предельных тепловых условий эксплуатации показаны на рисунках 2.6-2.9. Проектная МСП должна быть идентифицирована относительно МРП по тем же алгоритмам, что и в случае экспериментальных данных. Результаты расчета по МСП представляются в виде графиков зависимости от времени функций температуры узлов, теплового потока между узлами и теплового потока, излучаемого узлами. При наличии требований к этим параметрам их расчетные значения используются в качестве критериев для определения первого приближения продолжительности режимов. В рассматриваемом примере ограничивается максимальное или минимальное значение температуры узла 1 – несущей конструкции негерметичного отсека с установленными приборными панелями и оборудованием.

После предварительного расчета по МСП уточняются граничные условия для моделирования режимов ТВИ и проводятся расчеты на основе МРП. По результатам этих расчетов разрабатывается программа ТВИ, определяется длительность режимов и внешние воздействия. Например, расчетная продолжительность квазистационарного режима максимального нагрева от бортовой аппаратуры и нагревателей СТР составляет приблизительно 24 часа (рисунок 2.8) – через это время температуры и потоки практически устанавливаются на уровне стационарных значений.

Тепловая модель проверяется отдельно для элементов и систем СЧ КА по контрольной выборке результатов тепловых расчетов автономных ТВИ СЧ. Количество датчиков определяется необходимостью контроля теплофизических параметров в конкретной точке системы и количеством режимов испытаний, для которых получены результаты. Контрольная выборка должна быть статистически значимой для каждой проверяемой системы. Общее количество точек N равно произведению числа датчиков N_x и числа тепловых режимов N_τ :

$$N(x, y, z, \tau) = N_x N_\tau. \quad (2.102)$$

Доверительная вероятность P для формирования контрольной выборки задается рядом значений, одно из которых (как правило, максимальное) принимается равным надежности СТР контролируемой системы, например: 0,98 (надежность СТР); 0,9; 0,86. Значения P показывают процентное содержание теоретических или экспериментальных результатов в выборке, используемой для расчета точности элементов тепловой модели на заданном уровне доверительной вероятности.

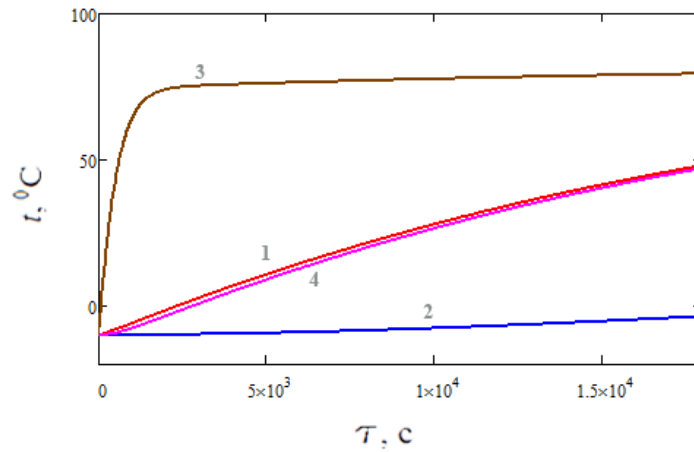
Деление составной части на системы и элементы может производиться по независимым или совмещенным признакам: тепловому режиму, функциональному назначению, пространственному расположению и др. (таблица 2.1). Тип датчиков – аналоговые или цифровые – зависит от требований к частоте опроса, надежности и стабильности показаний для данной системы. Аналоговые датчики имеют прямую градуировку и обеспечивают непрерывный и надежный сигнал при более высокой погрешности. Погрешность цифровых датчиков ниже, но, в то же время, они менее надежны, имеют дискретный и менее стабильный сигнал в более узком по сравнению с аналоговыми датчиками диапазоне температуры.

Обязательным требованием к ТВИ СЧ КА является обработка штатных СТР, поэтому количество, расположение и тип датчиков СТР совпадает со штатным изделием. Датчики на внутренних сторонах приборных панелей и несущей конструкции устанавливаются с целью измерения температуры в зонах с контролируемым тепловым режимом, поэтому они являются цифровыми, а их количество зависит от того, насколько подробно необходимо измерить температурное поле. На внешних поверхностях с неконтролируемым тепловым режимом устанавливаются аналоговые датчики из-за широкого температурного диапазона, обусловленного затененностью Землей (или другими планетами) или освещенностью Солнцем.

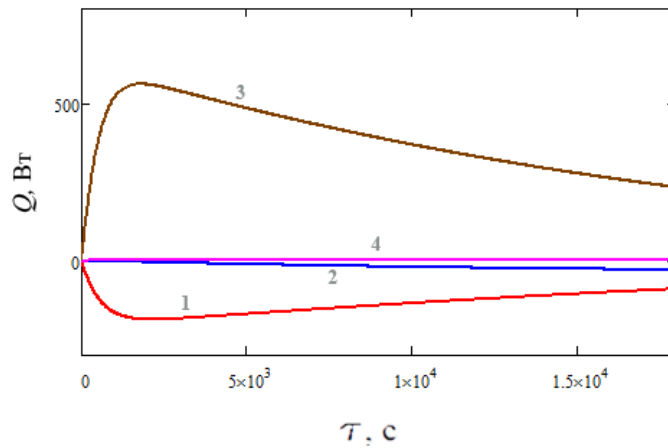
Примеры результатов теплового расчета ТВИ по МРП для ЭВТИ и расположенной под ней СП при имитации предельных тепловых условий эксплуатации приведены в виде функций температуры от времени в местах установки датчиков (рисунок 2.10).

Таблица 2.1 – Контрольные группы датчиков для ТВИ негерметичного отсека с электронной аппаратурой

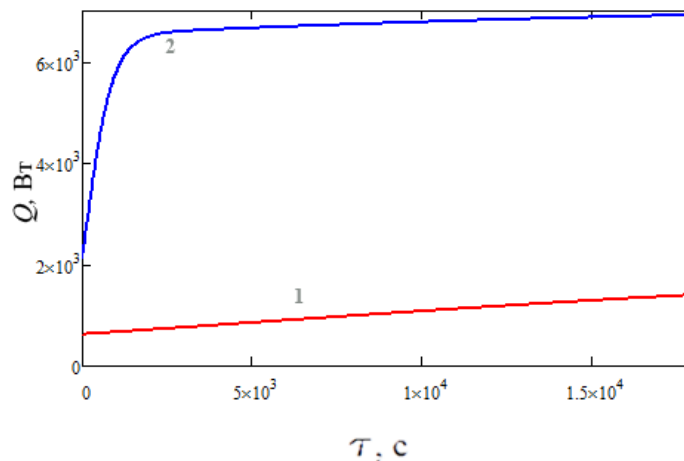
Система или элемент	Группа датчиков	Тип датчиков
СТР	По назначению	Аналоговый
Внутренние стороны приборных панелей	От 20 до 40	Цифровой
Наружные стороны приборных панелей	От 10 до 20	Аналоговый
Каркас (несущая конструкция)	От 20 до 40	Цифровой
Защита от радиации	От 5 до 10	Аналоговый
ЭВТИ	От 5 до 10	Аналоговый



а – температуры узлов МСП
 1 – отсек КА, 2 – внутренняя часть ОЗ, 3 – наружная часть ОЗ, 4 – рама

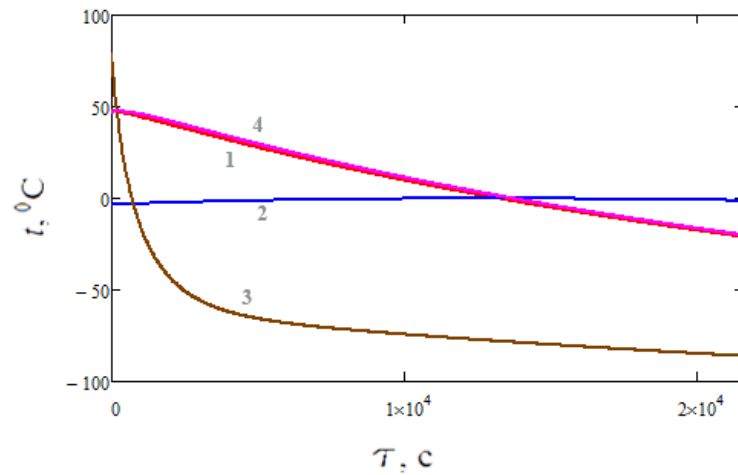


б – тепловые потоки между узлами МСП
 1 – Q_{14} , 2 – Q_{12} , 3 – Q_{13} , 4 – Q_{23}

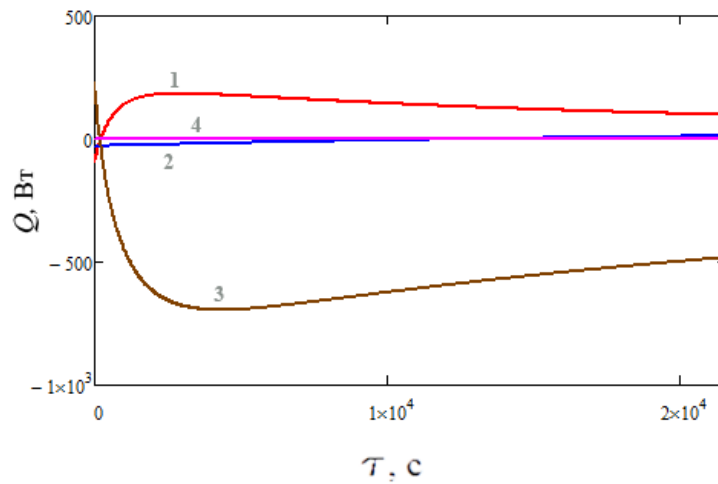


в – тепловые потоки, излучаемые узлами МСП (1 – ТРП, 2 – наружная часть ОЗ)

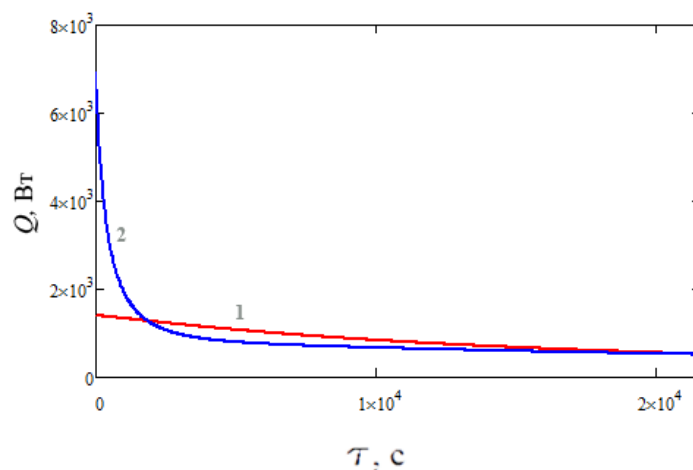
Рисунок 2.6 – Тепловое состояние узлов МСП в режиме предельного нагрева от ИКИ



1 – отсек КА, 2 – внутренняя часть ОЗ, 3 – наружная часть ОЗ, 4 – рама
а – температуры узлов МСП

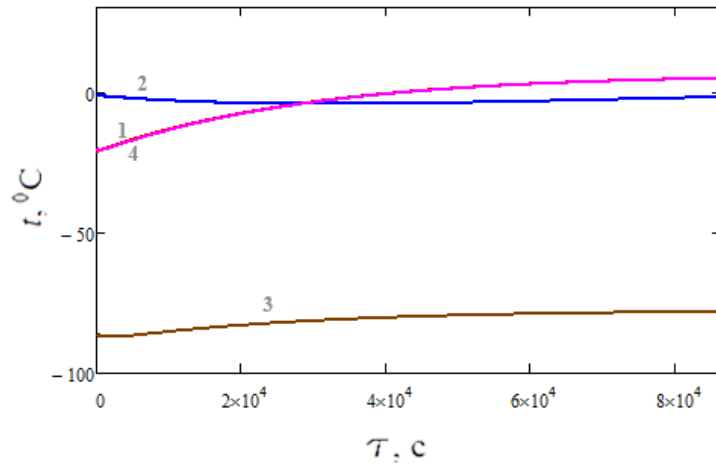


1 – Q_{14} , 2 – Q_{12} , 3 – Q_{13} , 4 – Q_{23}
б – тепловые потоки между узлами МСП

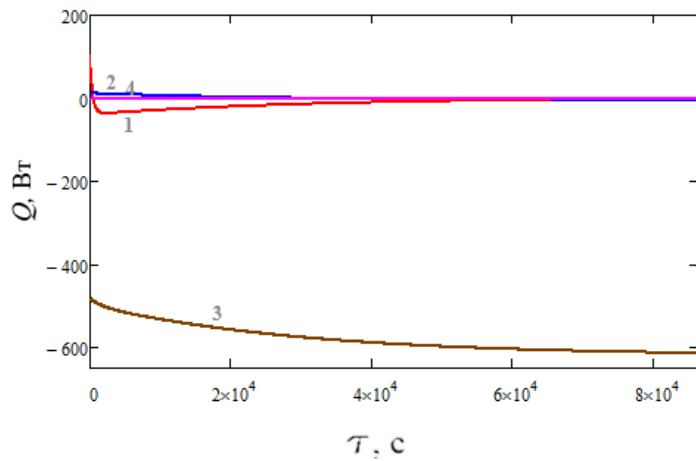


в – тепловые потоки, излучаемые узлами МСП (1 – ТРП, 2 – наружная часть ОЗ)

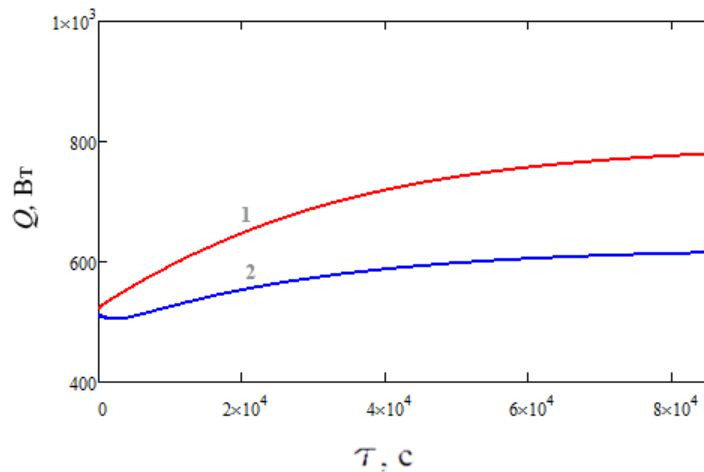
Рисунок 2.7 – Тепловое состояние узлов МСП в режиме охлаждения до минимальной температуры функционирования аппаратуры



1 – отсек КА, 2 – внутренняя часть ОЗ, 3 – наружная часть ОЗ, 4 – рама
а – температуры узлов МСП

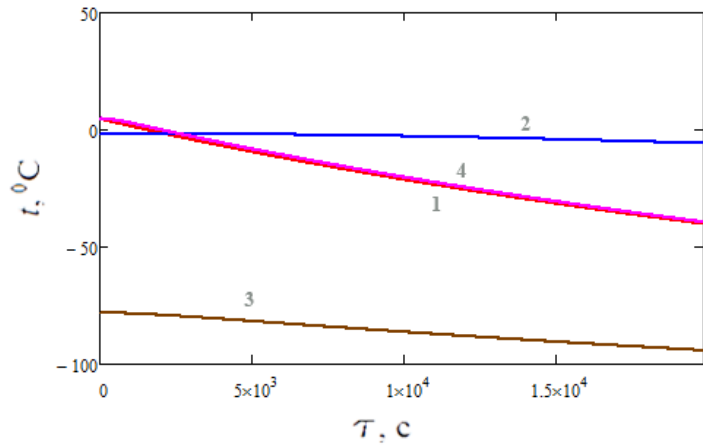


1 – Q_{14} , 2 – Q_{12} , 3 – Q_{13} , 4 – Q_{23}
б – тепловые потоки между узлами МСП

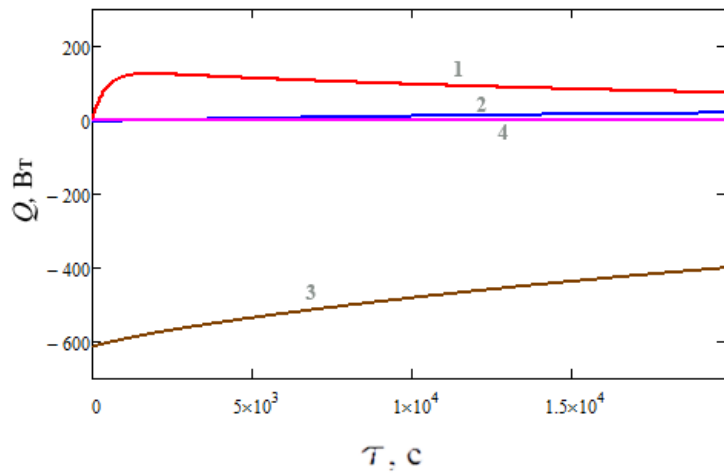


в – тепловые потоки, излучаемые узлами МСП (1 – ТРП, 2 – наружная часть ОЗ)

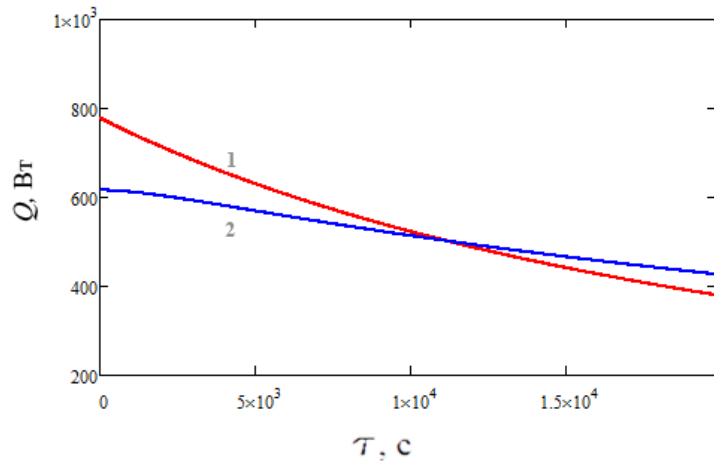
Рисунок 2.8 – Тепловое состояние узлов МСП в режиме максимального нагрева от бортовой аппаратуры и нагревателей СТР



а – температуры узлов МСП
 1 – отсек КА, 2 – внутренняя часть ОЗ, 3 – наружная часть ОЗ, 4 – рама



б – тепловые потоки между узлами МСП
 1 – Q_{14} , 2 – Q_{12} , 3 – Q_{13} , 4 – Q_{23}



в – тепловые потоки, излучаемые узлами МСП (1 – ТРП, 2 – наружная часть ОЗ)

Рисунок 2.9 – Тепловое состояние узлов МСП в режиме предельного охлаждения

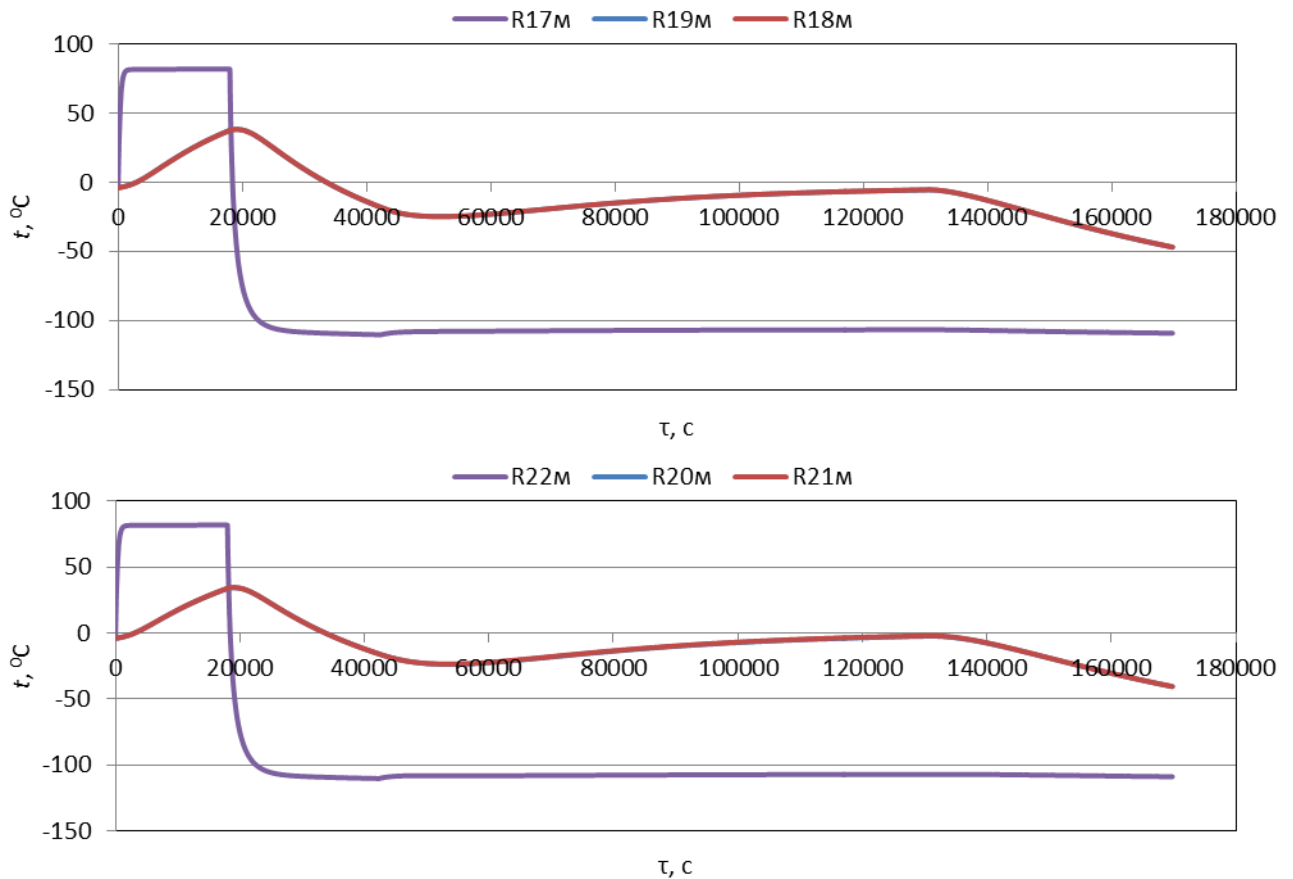


Рисунок 2.10 – Расчетные температуры ЭВТИ и СП при имитации предельных тепловых условий эксплуатации

2.6. Точность математических моделей теплообмена

Оценка точности тепловой модели с распределенными параметрами осуществляется сопоставлением значений температур в местах установки датчиков с показаниями датчиков, полученными в ТВИ. Точность тепловой модели выражается абсолютной $|\Delta T|$ и относительной δT погрешностями температуры, рассчитанными по контрольной выборке результатов с установленными значениями доверительной вероятности, одна из которых равна надежности СТР СЧ. Абсолютная погрешность температуры вычисляется в каждой контрольной точке n по температуре $T_{n,0}$ тепловой модели и показанию датчика $T_{n,1}$ для каждого режима ТВИ [265]:

$$|\Delta T_n| = |T_{n,0} - T_{n,1}|. \quad (2.103)$$

В качестве истинного значения температуры принимается показание датчика. Как следствие, погрешности тепловой модели имеют смысл расхождений с экспериментальными результатами и не учитывают погрешности измерения температуры в условиях проведения ТВИ.

Абсолютная погрешность температуры СЧ определяется средним квадратичным для N точек контрольной выборки:

$$|\overline{\Delta T}| = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (\Delta T_n)^2}{N}}, \quad (2.104)$$

Относительная погрешность температуры СЧ равна частному среднего квадратичного отклонения и допустимого диапазона температуры:

$$\delta T = \frac{|\overline{\Delta T}|}{(T_{\max} - T_{\min})}, \quad (2.105)$$

где T_{\min} , T_{\max} – границы диапазона. Для термостабилизированных панелей ширина диапазона составляет

$$(T_{\max} - T_{\min})_{\text{ПП}} = 60 \text{ К}, \quad (2.106)$$

Для механических элементов приводов

$$(T_{\max} - T_{\min})_{\text{МЭП}} = 95 \text{ К}, \quad (2.107)$$

для наружных поверхностей с неконтролируемым тепловым режимом

$$(T_{\max} - T_{\min})_{\text{НБ}} = 275 \text{ К}, \quad (2.108)$$

Соответствие границ допустимого и измеряемого диапазонов контролируется в ходе испытаний.

Если в качестве максимальной относительной погрешности СЧ КА в стационарном режиме принять величину 15 %, допустимые величины абсолютных погрешностей в стационарных режимах составляют: 9 К для термостабилизированных панелей; 14 К для несущей конструкции; 41 К для внешних поверхностей ЭВТИ и элементов конструкции.

В качестве дополнительной характеристики точности тепловой модели СЧ может использоваться относительная погрешность плотности теплового потока

$$q = \alpha_{th} \theta, \quad (2.109)$$

где $\theta = T_1 - T_2$ – разность температур T_1 , T_2 на границах системы, К; α_{th} – удельная тепловая проводимость, Вт/(м²·К). Относительная погрешность плотности теплового потока равна

$$\begin{aligned} \delta q(\theta, \alpha_{th}) &= \frac{1}{q} \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha_{th}} \Delta \alpha_{th}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial \theta} \Delta \theta\right)^2} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{th} \theta} \sqrt{(\theta \Delta \alpha_{th})^2 + (\alpha_{th} \Delta \theta)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \alpha_{th}}{\alpha_{th}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \theta}{\theta}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(\delta \alpha_{th})^2 + (\delta \theta)^2}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Относительная погрешность избыточной температуры равна относительной погрешности абсолютной температуры

$$\delta \theta = \delta T, \quad (2.111)$$

а относительная погрешность тепловой проводимости равна относительной погрешности удельного сопротивления для конкретного элемента СЧ

$$\delta\alpha_{th} = \delta R_{th}. \quad (2.112)$$

Проверка конечно-элементных моделей СЧ КА проводится по результатам испытаний сопоставлением температур модели и макета СЧ в квазистационарных режимах в местах установки датчиков. Конечно-элементная модель СЧ считается достоверной (подтвержденной, верифицированной), если относительная погрешность температуры (2.105) не превышает критерия допустимой точности. МСП СЧ, соответствующая МРП, в этом случае также считается верифицированной. Если относительная погрешность температуры (2.105) тепловой модели СЧ превышает установленный предел, проводится ее идентификация по экспериментальным данным.

Для определения точности модели в квазистационарных режимах расчетные и экспериментальные температуры датчиков приводятся в таблицах, аналогичных таблице 2.2, а среднее квадратичное абсолютных погрешностей и относительная погрешность при соответствующих доверительных вероятностях – в таблицах, аналогичных таблице 2.3 [2].

Таблица 2.2 – Расчетные и экспериментальные температуры СЧ КА

Величина	Режим	Датчик 1	Датчик 2	Датчик 3	Датчик 4	Датчик 5	Датчик 6	Датчик 7
Модель, $T_{n,0}, ^\circ\text{C}$	КР1	11,3	11,3	11,3	11,1	11,1	11,3	11,3
	КР2	8,6	4,6	6,9	19,8	21,2	5,6	5,1
	КР3	9,4	6,3	7,9	18,0	19,0	6,4	5,7
	КР4	0,6	-1,5	-1,1	2,7	4,0	-2,0	-4,2
	КР5	24,0	21,9	22,5	31,5	33,0	21,0	20,3
	КР6	1,2	-0,4	-0,7	0,4	1,7	-1,0	-2,4
	КР7	-3,1	-3,1	-3,1	-3,3	-3,3	-3,1	-3,1
	КР8	40,6	37,3	40,5	49,4	50,8	37,2	35,5
Исп., $T_{n,1}, ^\circ\text{C}$	КР1	11,1	9,9	10,7	12,0	11,9	10,1	10,0
	КР2	5,6	0,5	3,9	10,6	11,1	3,0	1,9
	КР3	10,4	6,5	9,6	14,8	15,3	7,9	7,1
	КР4	1,4	-2,3	0,1	3,1	4,2	-0,5	-2,4
	КР5	10,3	6,4	9,6	14,8	15,3	7,9	7,1
	КР6	-5,4	-8,9	-6,8	-4,6	-3,8	-7,4	-8,9
	КР7	-5,3	-3,9	-5,3	-5,4	-5,4	-4,9	-5,1
	КР8	21,7	16,9	20,9	28,6	28,3	18,9	17,2
$ \Delta T_n , ^\circ\text{C}$	КР1	0,2	1,4	0,6	0,9	0,8	1,2	1,3
	КР2	3,0	4,1	3,0	9,2	10,1	2,6	3,2
	КР3	1,0	0,2	1,7	3,2	3,7	1,5	1,4
	КР4	0,8	0,8	1,2	0,4	0,2	1,5	1,8
	КР5	13,7	15,5	12,9	16,7	17,7	13,1	13,2
	КР6	6,6	8,5	6,1	5,0	5,5	6,4	6,4
	КР7	2,2	0,8	2,2	2,1	2,1	1,8	2,0
	КР8	18,9	20,4	19,6	20,8	22,5	18,3	18,3

Таблица 2.3 – Статистические характеристики тепловой модели

Элемент модели	Внутренняя сторона ПП		Наружная сторона ТРП ПП		Наружная сторона ЭВТИ ПП	
	Значение	Число точек	Значение	Число точек	Значение	Число точек
$ \Delta T _1, K$	9,3	112	9,1	80	9	32
$ \Delta T _{0,98}, K$	8,9	110	8,6	78	8,4	31
$ \Delta T _{0,9}, K$	7,2	101	7,3	72	7,2	29
$ \Delta T _{0,85}, K$	6,1	95	6,6	68	6,2	27
$T_{\max} - T_{\min}, K$	60		60		60	
δT_1	0,155	112	0,151	80	0,15	32
$\delta T_{0,98}$	0,148	110	0,143	78	0,141	31
$\delta T_{0,9}$	0,12	101	0,122	72	0,12	29
$\delta T_{0,85}$	0,102	95	0,109	68	0,103	27

Окончание таблицы 2.3

Элемент модели	Наружная часть оптической защиты		ЭВТИ и СП		СЧ КА
	Значение	Число точек	Значение	Число точек	Всего точек
$ \Delta T _1, K$	44,6	32	55,8	48	400
$ \Delta T _{0,98}, K$	40,4	31	53,6	47	392
$ \Delta T _{0,9}, K$	35	29	43,6	43	360
$ \Delta T _{0,85}, K$	27,6	27	37,2	41	340
$T_{\max} - T_{\min}, K$	275		275		275
δT_1	0,162	32	0,203	48	400
$\delta T_{0,98}$	0,147	31	0,195	47	392
$\delta T_{0,9}$	0,127	29	0,159	43	360
$\delta T_{0,85}$	0,1	27	0,135	41	340

После расчета точности всех систем и элементов объекта испытаний для квазистационарных режимов строится сводная таблица, содержащая средние квадратичные абсолютных погрешностей и относительные погрешности тепловой модели при заданных доверительных вероятностях (таблица 2.3).

В рассматриваемом примере расхождения расчетных и экспериментальных данных не превышают 15% от ширины допустимого температурного диапазона, за исключением каркаса, ЭВТИ и ТСП, поэтому, если принять данную величину расхождений в качестве критерия точности тепловой модели, то по результатам проектных расчетов ТВИ в идентификации нуждаются только параметры математических моделей этих элементов конструкции.

Контрольная выборка разностей расчетных и экспериментальных температур в стационарных режимах должна удовлетворять гипотезам о независимости и стационарности данных, которые проверяются при помощи

критерия серий. Гипотеза о согласовании теоретического и экспериментального распределений температуры в стационарных режимах (в зависимости от координат) и в нестационарных режимах (в зависимости от координат и времени) может быть проверена по критериям согласия Пирсона (χ^2), Крамера-Смирнова (ω^2) и, в ряде случаев, по критерию Колмогорова, основанному на сравнении интегральных функций распределения [266].

Для оценки расхождения расчетных и экспериментальных данных в нестационарных режимах в данной работе проверяется аналогия погрешности расчета и функции отклика электронного измерительного устройства. В случае процесса первого порядка производной по времени функция отклика имеет следующий вид [266]:

$$y(\tau) = y_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{\tau_{0,63}}\right) \right], \quad (2.113)$$

где τ_0 – время подачи сигнала, с; τ – время ($\tau \geq \tau_0$), с; $\tau_{0,63}$ – постоянная времени, с; $y(\tau)$ – функция отклика; y_1 – стационарное значение сигнала. В момент времени ($\tau_0 + \tau_{0,63}$) значение функции составляет приблизительно 63% стационарного значения, а через $5\tau_{0,63}$ – 99% (рисунок 2.11).

Если в качестве стационарного значения функции принимается абсолютная погрешность температуры в стационарном эксперименте [265]

$$y_1 = \Delta T_1, \quad (2.114)$$

то функция отклика имеет смысл абсолютной погрешности температуры нестационарного эксперимента в момент времени ($\tau_0 + \tau$):

$$y(\tau) = \Delta T(\tau) = \Delta T_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{\tau_{0,63}}\right) \right]. \quad (2.115)$$

Если в качестве стационарного значения сигнала принимается относительная погрешность температуры в стационарном эксперименте

$$y_1 = \delta T_1, \quad (2.116)$$

то функция отклика имеет смысл относительной погрешности температуры нестационарного эксперимента в момент времени ($\tau_0 + \tau$):

$$y(\tau) = \delta T(\tau) = \delta T_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{\tau_{0,63}}\right) \right]. \quad (2.117)$$

Длительность квазистационарных режимов определяет время, за которое температура достигает 99% стационарного значения:

$$\tau_{0,99} = 5\tau_{0,63}, \quad (2.118)$$

Результаты расчета абсолютной погрешности по выражению (2.115) и относительной погрешности по выражению (2.117) в нестационарных режимах при $\tau_{0,99} = 24$ ч приведены в таблице 2.4.

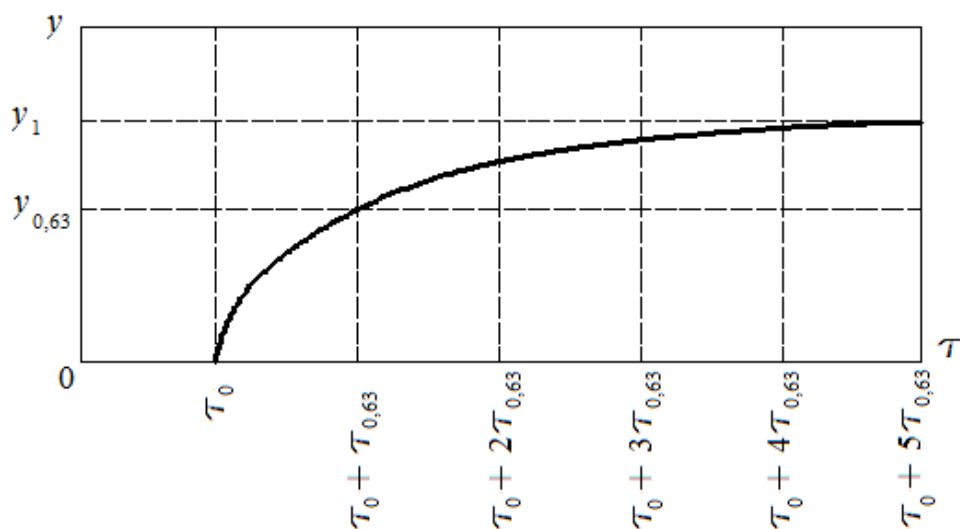


Рисунок 2.11 – Временная зависимость функции отклика для системы первого порядка

Таблица 2.4 – Относительная и абсолютная погрешности нестационарной модели в зависимости от длительности расчетного участка

τ , ч	δT_1 , %	$\delta T(\tau)$, %	ΔT_1 , К	$\Delta T(\tau)$, К	ΔT_1 , К	$\Delta T(\tau)$, К	ΔT_1 , К	$\Delta T(\tau)$, К
0,0	15,0	0,0	9,0	0,0	15,0	0,0	45,0	0,0
1,0	15,0	2,8	9,0	1,7	15,0	2,8	45,0	8,5
2,0	15,0	5,1	9,0	3,1	15,0	5,1	45,0	15,3
3,0	15,0	7,0	9,0	4,2	15,0	7,0	45,0	20,9
4,0	15,0	8,5	9,0	5,1	15,0	8,5	45,0	25,4
5,0	15,0	9,7	9,0	5,8	15,0	9,7	45,0	29,1
6,0	15,0	10,7	9,0	6,4	15,0	10,7	45,0	32,1
7,0	15,0	11,5	9,0	6,9	15,0	11,5	45,0	34,5
8,0	15,0	12,2	9,0	7,3	15,0	12,2	45,0	36,5
9,0	15,0	12,7	9,0	7,6	15,0	12,7	45,0	38,1
10,0	15,0	13,1	9,0	7,9	15,0	13,1	45,0	39,4
11,0	15,0	13,5	9,0	8,1	15,0	13,5	45,0	40,5
12,0	15,0	13,8	9,0	8,3	15,0	13,8	45,0	41,3
13,0	15,0	14,0	9,0	8,4	15,0	14,0	45,0	42,0
14,0	15,0	14,2	9,0	8,5	15,0	14,2	45,0	42,6
15,0	15,0	14,3	9,0	8,6	15,0	14,3	45,0	43,0
16,0	15,0	14,5	9,0	8,7	15,0	14,5	45,0	43,4
17,0	15,0	14,6	9,0	8,7	15,0	14,6	45,0	43,7
18,0	15,0	14,6	9,0	8,8	15,0	14,6	45,0	43,9
19,0	15,0	14,7	9,0	8,8	15,0	14,7	45,0	44,1
20,0	15,0	14,8	9,0	8,9	15,0	14,8	45,0	44,3
21,0	15,0	14,8	9,0	8,9	15,0	14,8	45,0	44,4
22,0	15,0	14,8	9,0	8,9	15,0	14,8	45,0	44,5
23,0	15,0	14,9	9,0	8,9	15,0	14,9	45,0	44,6
24,0	15,0	14,9	9,0	8,9	15,0	14,9	45,0	44,7

По результатам расчета погрешностей в зависимости от длительности нестационарного режима выполняется сопоставление теоретических и экспериментальных функций температуры от времени в местах установки датчиков. При справедливости принятого предположения о точности тепловых моделей в нестационарных режимах относительные и абсолютные расхождения теоретических и экспериментальных температур не должны превышать предельных значений с определенной доверительной вероятностью (таблица 2.4).

Если в испытаниях не предусмотрены квазистационарные режимы, и необходимо найти предельные расхождения расчетных и экспериментальных данных, соответствующие стационарному состоянию системы с известной постоянной времени $\tau_{0,63}$, искомое значение функции y_1 определяется по измеренному значению $y(\tau)$:

$$y_1 = \frac{y(\tau)}{1 - \exp\left(-\frac{\tau - \tau_0}{\tau_{0,63}}\right)}. \quad (2.119)$$

При неизвестной постоянной времени системы искомое значение функции y_1 и постоянная времени $\tau_{0,63}$ определяются по двум измеренным значениям $y_a = y(\tau_a)$, $y_b = y(\tau_b)$ из следующей системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_a = y_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau_a - \tau_0}{\tau_{0,63}}\right) \right], \\ y_b = y_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau_b - \tau_0}{\tau_{0,63}}\right) \right] \end{array} \right\}. \quad (2.120)$$

Справедливость предположения об аналогии погрешностей тепловой модели в нестационарных режимах и функции отклика электронного измерительного устройства покажем на примере твердого тела в виде параллелепипеда высотой l с теплопередающим основанием площадью F и внутренним источником тепла мощностью Q_V . Его технической иллюстрацией является электронагреватель СТР, установленный на термостабилизированной панели.

МСП данной системы для процесса нагрева или охлаждения при наличии тепловой проводимости α через теплопередающее основание запишется в виде [265]:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{mc} [Q_V - \alpha F (T - T_s)], \quad (2.121)$$

где T – температура нагревателя; T_s – температура панели под основанием нагревателя, К. Пусть начальная температура нагревателя равна T_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\alpha F}{mc} T = \frac{Q_V}{mc} + \frac{\alpha F}{mc} T_s, \\ T(0) = T_0 \end{array} \right\}. \quad (2.122)$$

Решение полученного дифференциального уравнения следующее:

$$\begin{aligned}
 T(\tau) &= \frac{l}{\alpha} \left(q_v + \frac{\alpha}{l} T_s \right) + \left[T_0 - \frac{l}{\alpha} \left(q_v + \frac{\alpha}{l} T_s \right) \right] \exp \left(-\frac{\alpha}{l\rho c} \tau \right) = \\
 &= \frac{l}{\alpha} \left(\frac{Q_v}{V} + \frac{\alpha}{l} T_s \right) + \left[T_0 - \frac{l}{\alpha} \left(\frac{Q_v}{V} + \frac{\alpha}{l} T_s \right) \right] \exp \left(-\frac{\alpha V}{lmc} \tau \right) = \\
 &= \frac{1}{\alpha F} (Q_v + \alpha F T_s) + \left[T_0 - \frac{1}{\alpha F} (Q_v + \alpha F T_s) \right] \exp \left(-\frac{\alpha F}{mc} \tau \right).
 \end{aligned} \tag{2.123}$$

В начальный момент времени температура нагревателя равна T_0 , а через бесконечный промежуток времени, соответствующий стационарному состоянию,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} T(\tau) &= \frac{1}{\alpha F} (Q_v + \alpha F T_s) + \left[T_0 - \frac{1}{\alpha F} (Q_v + \alpha F T_s) \right] \lim_{\tau \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{\alpha F}{mc} \tau \right) = \\
 &= \frac{1}{\alpha F} (Q_v + \alpha F T_s).
 \end{aligned} \tag{2.124}$$

Значение температуры

$$\begin{aligned}
 T_{0,63} &= T_0 + \left[\frac{1}{\alpha F} (Q_v + \alpha F T_s) - T_0 \right] \left[\left(1 - \frac{1}{e} \right) \right] \approx \\
 &\approx T_0 + 0,63 \left[\frac{1}{\alpha F} (Q_v + \alpha F T_s) - T_0 \right]
 \end{aligned} \tag{2.125}$$

достигается через время $\tau_{0,63}$:

$$\begin{aligned}
 T_{0,63} &= \frac{1}{\alpha F} (Q_v + \alpha F T_s) + \left[T_0 - \frac{1}{\alpha F} (Q_v + \alpha F T_s) \right] \exp \left(-\frac{\alpha F}{mc} \tau_{0,63} \right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \tau_{0,63} = \frac{mc}{\alpha F} = \frac{c_a}{\alpha_a},
 \end{aligned} \tag{2.126}$$

где c_a – абсолютная теплоемкость нагревателя, Дж/К; α_a – абсолютная тепловая проводимость контакта теплопередающего основания и панели, Вт/К. Величина $\tau_{0,63}$ является постоянной времени рассматриваемой системы в процессе нагрева или охлаждения. Поскольку постоянную времени процесса не сложно установить экспериментально по экспоненциальной зависимости, частное абсолютной теплоемкости узла системы и тепловой проводимости на границе узла позволяет идентифицировать один из этих параметров (ср. с (2.52)).

Таким образом, одним из критериев достоверности тепловой модели системы в теплофизическом процессе является значение постоянной времени, совпадающее с экспериментальным. Предположим, постоянная времени системы и абсолютная теплоемкость узла измерены с некоторыми относительными погрешностями $\delta\tau_{0,63}$ и δc_a . Тогда относительная погрешность абсолютной проводимости определится как

$$\delta\alpha(\tau_{0,63}, c_a) = \sqrt{(\delta\tau_{0,63})^2 + (\delta c_a)^2}. \tag{2.127}$$

Погрешность косвенного измерения тепловой проводимости приведет к тому, что при той же постоянной времени, что и в эксперименте, теоретическая функция температуры

$$T(\tau) = \frac{1}{\alpha_a}(Q_V + \alpha_a T_s) + \left[T_0 - \frac{1}{\alpha_a}(Q_V + \alpha_a T_s) \right] \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0,63}}\right) \quad (2.128)$$

будет отличаться от экспериментальной

$$T_e(\tau) = \frac{1}{\alpha_{a,e}}(Q_V + \alpha_{a,e} T_s) + \left[T_0 - \frac{1}{\alpha_{a,e}}(Q_V + \alpha_{a,e} T_s) \right] \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0,63}}\right), \quad (2.129)$$

а их разность определит абсолютную погрешность температуры тепловой модели:

$$\begin{aligned} \Delta T(\tau) &= T(\tau) - T_e(\tau) = \\ &= \frac{1}{\alpha_a}(Q_V + \alpha_a T_s) + \left[T_0 - \frac{1}{\alpha_a}(Q_V + \alpha_a T_s) \right] \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0,63}}\right) - \\ &- \frac{1}{\alpha_{a,e}}(Q_V + \alpha_{a,e} T_s) + \left[T_0 - \frac{1}{\alpha_{a,e}}(Q_V + \alpha_{a,e} T_s) \right] \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0,63}}\right) = \\ &= \frac{1}{\alpha_a}(Q_V + \alpha_a T_s) - \frac{1}{\alpha_{a,e}}(Q_V + \alpha_{a,e} T_s) + \\ &+ \left[T_0 - \frac{1}{\alpha_a}(Q_V + \alpha_a T_s) - T_0 + \frac{1}{\alpha_{a,e}}(Q_V + \alpha_{a,e} T_s) \right] \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0,63}}\right) = \\ &= \frac{1}{\alpha_a}(Q_V + \alpha_a T_s) - \frac{1}{\alpha_{a,e}}(Q_V + \alpha_{a,e} T_s) - \\ &- \left[\frac{1}{\alpha_a}(Q_V + \alpha_a T_s) - \frac{1}{\alpha_{a,e}}(Q_V + \alpha_{a,e} T_s) \right] \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0,63}}\right) = \\ &= \left[\frac{1}{\alpha_a}(Q_V + \alpha_a T_s) - \frac{1}{\alpha_{a,e}}(Q_V + \alpha_{a,e} T_s) \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0,63}}\right) \right] = \\ &= \Delta T_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0,63}}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.130)$$

где ΔT_1 – абсолютная погрешность температуры тепловой модели в стационарном состоянии, К. Следовательно, предположение об аналогии погрешности нестационарной математической модели теплообмена и функции отклика первого порядка производной по времени теоретически подтверждено для рассмотренной системы.

2.7. Выводы по главе 2

1. Технические системы представляют собой совокупности технических объектов, между которыми происходят физические

взаимодействия, и делятся на несколько физических систем по числу видов взаимодействия. Во всех видах взаимодействия присутствует обмен энергией, поэтому все физические системы являются термодинамическими, а термодинамическое описание – наиболее общим.

Каждый вид взаимодействия описывается дифференциальным уравнением в частных производных по времени и координатам (МРП). Если внутренние степени свободы элементов системы не учитываются, их уравнения представляются функцией процесса, равной нулю, а математическая модель системы (МСП) – системой обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых взаимодействия элементов учитываются коэффициентами, значения которых неизвестны.

Полный набор внутренних связей термодинамически открытой физической системы является линейно зависимым и при отсутствии первого приближения идентифицируется по граничным условиям и полю потенциала только для одного узла. При наличии первого приближения задача идентификации полного набора связей решается итерационно последовательным перебором узлов системы на каждой итерации.

Первые приближения коэффициентов взаимодействия рассчитываются по аналитическим или полуэмпирическим выражениям в зависимости от характера тепловой связи, соответствующей данному виду взаимодействия, или задаются априорно.

МРП идентифицируется при помощи связанных с ней МСП по экспериментальным полям температуры и граничным условиям ТВИ. В случае достаточно подробной МСП идентифицированные коэффициенты могут непосредственно задаваться в МРП. Если МСП не достаточно подробна, ее коэффициенты идентифицируются как по ТВИ, так и по МРП, а их частные используются для уточнения первых приближений искомых коэффициентов МРП.

2. Проектные расчеты делятся на расчеты наземных и летных испытаний. Целью проектных расчетов летных испытаний СЧ КА является теоретическое обоснование тепловых режимов летной эксплуатации и выработка рекомендаций по доработке СЧ. Проектные расчеты ТВИ выполняются с целью разработки программы и теоретического подтверждения режимов ТВИ, по которым проверяются тепловые модели СЧ КА. Для сокращения расчетного времени модели с распределенными параметрами ставится в соответствие модель с сосредоточенными параметрами, на основе которой проводятся предварительные расчеты и последующая идентификация модели с распределенными параметрами.

Поверочные расчеты режимов ТВИ являются завершающим этапом построения достоверной тепловой математической модели СЧ КА и определяют точность поверочных тепловых расчетов режимов летной эксплуатации, выполняемых с использованием идентифицированной МРП. Целью поверочных тепловых расчетов автономных ТВИ СЧ КА является проверка тепловых моделей СЧ КА, идентифицированных по результатам

проектных расчетов, при граничных условиях, соответствующих измеренным внешним и внутренним воздействиям в ТВИ СЧ. Целью поверочных тепловых расчетов летных испытаний СЧ КА является подтверждение тепловых режимов СЧ согласно предъявляемым требованиям для условий летной эксплуатации на основе идентифицированной тепловой математической модели с точностью, установленной в поверочных расчетах ТВИ СЧ.

Данные тепловых расчетов и результаты ТВИ используются для оценки точности тепловых моделей СЧ и их проверки на предмет соответствия установленному критерию точности в стационарных и нестационарных режимах. Контрольная выборка результатов должна удовлетворять гипотезам о независимости и стационарности данных, а также гипотезе о согласовании теоретического и экспериментального распределений температуры.

Для оценки расхождения расчетных и экспериментальных данных в нестационарных режимах принимается предположение об аналогии погрешности расчета и функции отклика электронного измерительного устройства, которое подтверждено теоретически для простейшей теплофизической системы и экспериментально для элементов конструкции космических систем. При справедливости этого предположения проводимость тепловой связи или теплоемкость граничного узла МСП могут быть идентифицированы по постоянной времени системы в тепловом процессе и второму известному параметру: для тепловой проводимости – теплоемкости, для теплоемкости – тепловой проводимости.

3. МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛООБМЕНА С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

3.1. Математическая корректность задач теплообмена

3.1.1. Математическая корректность по Ж. Адамару.

Процессы теплообмена формализуются в виде математических моделей, средства выражения которых зависят от метода математического описания. В математической физике распространение тепла описывается дифференциальными уравнениями параболического типа в частных производных первого порядка по времени и второго порядка по пространственным координатам [267]:

$$c\rho T_{\tau} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + F, \quad (3.1)$$

где $T = T(x, y, z, \tau)$ – температура; $\lambda = \lambda(x, y, z, T)$ – теплопроводность; $F = F(x, y, z, T, \tau)$ – плотность тепловых источников. Если среда однородна, уравнение принимает вид

$$T_{\tau} = a(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) + f, \quad (3.2)$$

где $a = \lambda / c\rho$ – температуропроводность, $f = F / c\rho$, или

$$T_{\tau} = a\Delta T + f, \quad (3.3)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Уравнения (3.1)-(3.3) в частных производных составляют основу математических моделей с распределенными параметрами. В случае пренебрежения пространственным распределением температуры уравнения становятся обыкновенными дифференциальными (ОДУ) и образуют модели с сосредоточенными параметрами:

$$T_{\tau} = f. \quad (3.4)$$

При решении краевых задач доказываются две теоремы – существования и единственности решения. Если существование решения доказано, то по теореме о единственности решения функция T , удовлетворяющая в области определения уравнению (3.1), начальным и граничным условиям, единственна при выполнении в области определения следующих условий [267]:

- 1) функция T и ее производные, входящие в уравнение (3.1), непрерывны;
- 2) коэффициенты c , ρ , λ непрерывны;
- 3) краевых (граничных и начальных) условий достаточно.

В связи с физической обусловленностью задач математической физики используется понятие корректности. Математическая задача поставлена корректно, если [267]:

- 1) решение задачи существует;
- 2) задача имеет единственное решение;
- 3) решение непрерывно зависит от исходных данных (устойчиво).

Если одно или несколько условий не выполняются, задача математически некорректна. Следовательно, корректная постановка краевой задачи основана на физически обусловленной математической модели.

В общем случае разработка математической модели состоит из двух этапов – структурной и параметрической идентификации. Структурная идентификация заключается в определении общей структуры математической модели в виде тех или иных уравнений. Параметрическая идентификация предполагает надление выбранной модели необходимой количественной информацией – определение неизвестных характеристик модели [6].

В случае тепловых процессов структурная идентификация заключается в выборе вида уравнения (3.1), параметрическая – в определении коэффициентов c , ρ , λ , F , которые могут являться функциями координат, времени (x , y , z , τ) и температуры T . При отсутствии справочной информации или недостаточной точности прямых методов расчета искомых параметров они восстанавливаются по температурному полю – решается коэффициентная обратная задача теплообмена [6].

Теорема о единственности решения содержит также требование достаточности количества начальных и граничных условий. Если условий недостаточно, они восстанавливаются решением граничной обратной задачи. По принятой классификации коэффициентные задачи называются задачами идентификации, граничные – задачами диагностики [6].

Нарушение причинно-следственных связей в обратных задачах теплообмена противоречит второму закону термодинамики в части необратимости теплового процесса и приводит к их некорректности, проявляющейся при математической формализации чаще всего в виде неустойчивости решения [6].

3.1.2. Устойчивость решения краевых задач на основе математических моделей с сосредоточенными параметрами.

Требование устойчивости решения обусловлено тем, что всякий физически определенный процесс, развивающийся во времени, должен характеризоваться функциями, непрерывно зависящими от краевых условий. При отсутствии непрерывной зависимости нарушается требование единственности решения, так как появляется множество функций, удовлетворяющих системе краевых условий [267].

Поскольку в дальнейшем речь пойдет о математических моделях с сосредоточенными параметрами, рассмотрим вопрос устойчивости решения системы ОДУ на основе уравнения (3.4) [268]:

$$\mathbf{z}_\tau = \mathbf{f}(\tau, \mathbf{z}). \quad (3.5)$$

В краевой постановке неизвестной является N -мерная вектор-функция \mathbf{z} с компонентами T_1, \dots, T_N . Для ее определения достаточно начального условия [268]

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0. \quad (3.6)$$

Далее приводятся два определения устойчивости решения системы (3.5), (3.6) по Ляпунову [268]:

1) решение $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\tau, \mathbf{z}_0)$ задачи (3.5), (3.6) устойчиво, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что при $\|\Delta\mathbf{z}_0\| < \delta(\varepsilon)$ для всех $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{z}(\tau, \mathbf{z}_0 + \Delta\mathbf{z}_0) - \mathbf{z}(\tau, \mathbf{z}_0)\| < \varepsilon; \quad (3.7)$$

2) решение $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\tau, \mathbf{z}_0)$ задачи (3.5), (3.6) асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и существует такое достаточно малое $\delta_0 > 0$, что при $\|\Delta\mathbf{z}_0\| < \delta_0$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\mathbf{z}(\tau, \mathbf{z}_0 + \Delta\mathbf{z}_0) - \mathbf{z}(\tau, \mathbf{z}_0)] = 0. \quad (3.8)$$

Исследование на устойчивость решения $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\tau, \mathbf{z}_0)$ можно свести к исследованию на устойчивость тривиального решения

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{z}(\tau, \mathbf{z}_0) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_0 = \mathbf{z}(0, \mathbf{z}_0 + \Delta\mathbf{z}_0) - \mathbf{z}(0, \mathbf{z}_0) = \Delta\mathbf{z}_0, \\ \mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}_0) = \mathbf{z}(\tau, \mathbf{z}_0 + \Delta\mathbf{z}_0) - \mathbf{z}(\tau, \mathbf{z}_0) \end{array} \right\}. \quad (3.9)$$

Тогда система (3.5) примет вид [268]

$$\dot{\mathbf{x}}_\tau = \chi(\tau, \mathbf{x}), \quad (3.10)$$

где $\chi(\tau, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x} + \mathbf{z}(\tau, \mathbf{z}_0)) - \mathbf{z}_\tau(\tau, \mathbf{z}_0)$.

Далее приводятся два определения устойчивости решения системы (3.10) по Ляпунову [268]:

1) тривиальное решение $\mathbf{x} \equiv 0$ системы (3.10) устойчиво, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что при $\|\mathbf{x}_0\| < \delta(\varepsilon)$ для всех $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon; \quad (3.11)$$

2) тривиальное решение $\mathbf{x} \equiv 0$ системы (3.10) асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и существует такое $\delta_0 > 0$, что при $\|\mathbf{x}_0\| < \delta_0$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}_0) = 0. \quad (3.12)$$

В случае, когда χ не зависит явно от τ , система (3.10) в координатной форме принимает вид [268]:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \chi_i(x_1, \dots, x_N) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.13)$$

Так как понятие устойчивости тривиального решения связано с малой окрестностью начала координат в фазовом пространстве, предполагается, что поведение решения системы (3.13) при разложении функций χ_i в ряд Тейлора будет определяться членами первого приближения. Тогда по формуле Тейлора, учитывая, что $\chi_i(0, \dots, 0) = 0$, и пренебрегая членами ряда с производными второго порядка, получаем так называемую систему первого приближения для системы (3.13) [268]

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{k=1}^N a_{ik} x_k, \quad (3.14)$$

или в матричном виде

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \dots & & \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

где $a_{ik} = \partial \chi_i(0, \dots, 0) / \partial x_k$ – элементы матрицы членов первого приближения ($i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N$). Данная система является редуцированным случаем более общей задачи

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} {}^{(1)}x_1 & \dots & {}^{(N)}x_1 \\ \dots & & \\ {}^{(1)}x_N & \dots & {}^{(N)}x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \dots & & \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{(1)}x_1 & \dots & {}^{(N)}x_1 \\ \dots & & \\ {}^{(1)}x_N & \dots & {}^{(N)}x_N \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

или

$$\mathbf{W}_\tau = \mathbf{A}\mathbf{W}, \quad (3.17)$$

в которой неизвестной является фундаментальная матрица \mathbf{W} , состоящая из N столбцов

$${}^{(j)}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} {}^{(j)}x_1 \\ \dots \\ {}^{(j)}x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{(j)}\alpha_1 \\ \dots \\ {}^{(j)}\alpha_N \end{pmatrix} e^{\lambda_j \tau} \quad (j = 1, \dots, N). \quad (3.18)$$

где λ_j – характеристические числа матрицы \mathbf{A} , определяемые как корни характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0, \quad (3.19)$$

⁽ⁱ⁾ α_i – некоторые числа, если $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_N$, и многочлены по τ , если $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N$.

Для системы (3.16), и, в частности, (3.15), доказываемая теорема, позволяющая судить об устойчивости тривиального решения по характеристическим числам матрицы первого приближения.

Пусть в некоторой окрестности точки $x_1 = 0, \dots, x_N = 0$ функции $\chi_i(x_1, \dots, x_N)$ ($i = 1, \dots, N$) непрерывны вместе с производными до второго порядка включительно. Тогда, если все характеристические числа λ_i матрицы с элементами a_{ik} удовлетворяют условию $\text{Re } \lambda_i < 0$, то тривиальное решение системы (3.16), и, в частности, (3.15), устойчиво и притом асимптотически. Если же $\text{Re } \lambda_i > 0$ хотя бы для одного i , то тривиальное решение системы неустойчиво [268].

Таким образом, устойчивость решения краевых задач полностью определяется характером функций в правой части уравнений системы (3.5).

3.1.3. Корректность решения задач идентификации математических моделей с сосредоточенными параметрами.

Задача идентификации коэффициентов функций f_i в правой части уравнений системы (3.5) некорректна по двум причинам. Во-первых, полный набор коэффициентов функций f_i линейно зависим, а количество коэффициентов в общем виде больше числа N уравнений, – решение неединственно.

Рассмотрим по аналогии с уравнением (3.14) поведение решения системы (3.5) при разложении функций f_i в ряд Тейлора в окрестности гипотетической точки $(0, \dots, 0)$ по членам первого приближения. Пренебрегая членами ряда с производными второго порядка и учитывая, что вблизи абсолютного нуля решение системы (3.5) стремится к тривиальному, т. е. $f_i(0, \dots, 0) = 0$, получаем систему первого приближения

$$\sum_{k=1}^N T_k a_{ik} = \frac{dT_i}{d\tau}. \quad (3.20)$$

Задача идентификации коэффициентов a_{ik} имеет неединственное решение, так как количество коэффициентов равно $N^2 > N$. Для восстановления корректности постановки задачи необходимо ограничить количество искомых коэффициентов числом уравнений:

$$T_1 a_{i1} = \frac{dT_i}{d\tau} - \sum_{k=2}^N T_k a_{ik} \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.21)$$

Если требуется определить все N^2 коэффициентов, задача решается итерационно, а коэффициенты должны быть заданы в первом приближении $a_{ik}^{(0)}$. Тогда на каждой итерации решается N^2 уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} T_1 a_{i1}^{(l)} = \frac{dT_i}{d\tau} - \sum_{k=2}^N T_k a_{ik}^{(l-1)}, \\ T_2 a_{i2}^{(l)} = \frac{dT_i}{d\tau} - T_1 a_{i1}^{(l-1)} - \sum_{k=3}^N T_k a_{ik}^{(l-1)}, \\ \dots \\ T_n a_{in}^{(l)} = \frac{dT_i}{d\tau} - \sum_{k=1}^{n-1} T_k a_{ik}^{(l-1)} - \sum_{k=n+1}^N T_k a_{ik}^{(l-1)}, \\ \dots \\ T_N a_{iN}^{(l)} = \frac{dT_i}{d\tau} - \sum_{k=1}^{N-1} T_k a_{ik}^{(l-1)} \end{array} \right\}_{(i=1, \dots, N)}. \quad (3.22)$$

Строка n системы (3.22) является подсистемой из N уравнений, решение которой определяет столбец n матрицы $\{a_{in}\}^{(l)}$ на итерации l :

$$\left. \begin{aligned} a_{i1}^{(l)} &= \frac{1}{T_1} \left(\frac{dT_i}{d\tau} - \sum_{k=2}^N T_k a_{ik}^{(l-1)} \right), \\ a_{i2}^{(l)} &= \frac{1}{T_2} \left(\frac{dT_i}{d\tau} - T_1 a_{i1}^{(l-1)} - \sum_{k=3}^N T_k a_{ik}^{(l-1)} \right), \\ &\dots \\ a_{in}^{(l)} &= \frac{1}{T_n} \left(\frac{dT_i}{d\tau} - \sum_{k=1}^{n-1} T_k a_{ik}^{(l-1)} - \sum_{k=n+1}^N T_k a_{ik}^{(l-1)} \right), \\ &\dots \\ a_{iN}^{(l)} &= \frac{1}{T_N} \left(\frac{dT_i}{d\tau} - \sum_{k=1}^{N-1} T_k a_{ik}^{(l-1)} \right) \end{aligned} \right\}_{(i=1, \dots, N)} \quad (3.23)$$

Во-вторых, наличие производных в правых частях уравнений системы (3.23) допускает их плохую обусловленность (свойство математической модели сохранять корректность решения при малых изменениях левой и правой части): малым изменениям правых частей могут отвечать большие (выходящие за допустимые пределы) изменения решения [3] – решение неустойчиво.

Каждая подсистема n линейных алгебраических уравнений системы (3.23) в векторном виде записывается как (для простоты индекс n не пишется)

$$\mathbf{E}\mathbf{a} = \mathbf{u}. \quad (3.24)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица, \mathbf{a} – искомый вектор с координатами a_i , $\mathbf{a} = \{a_i\}$, \mathbf{u} – известный вектор с координатами u_i , $\mathbf{u} = \{u_i\}$.

Поскольку на каждой итерации l вектор $\mathbf{a}^{(l)}$ минимизирует норму $\|\mathbf{E}\mathbf{a} - \mathbf{u}\|$ на всем пространстве \mathbf{R}^N , он является псевдорешением системы (3.24).

В результате итерационного процесса формируется множество $\mathbf{F}_a = \{\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(l)}, \mathbf{a}^{(l+1)}, \dots\}$ всех полученных псевдорешений.

Если $\mathbf{a}^{(\infty)}$ – точное решение, удовлетворяющее уравнению (3.20), то из множества \mathbf{F}_a должно быть выбрано псевдорешение $\mathbf{a}^{(m)}$, нормальное относительно точного решения, т. е. такое, что [3]

$$\|\mathbf{a}^{(m)} - \mathbf{a}^{(\infty)}\| = \inf_{\mathbf{a} \in \mathbf{F}_a} \|\mathbf{a} - \mathbf{a}^{(\infty)}\|. \quad (3.25)$$

Для любой системы вида (3.24) нормальное решение существует и единственно, если правые части однозначно определены из физических соображений. Задача нахождения нормального решения является некорректно поставленной в силу неустойчивости решения, только если ранг матрицы в левой части $r < N$ [3]. Так как ранг единичной матрицы $r_E = N$, неустойчивость решения задачи в виде (3.23) и, следовательно, (3.24) вызвана плохой обусловленностью задачи.

Следствием неустойчивости решения является его неединственность – при отсутствии непрерывной зависимости граничным условиям могут

удовлетворять разные функции. Ниже будет показано, что метод регуляризации неустойчивых задач применим и для задач с неединственным решением, как, например, (3.20). Однако, в этом случае требуется ограничение множества допустимых решений дополнительными условиями.

3.2. Модифицированный метод итерационной регуляризации на основе вариационного метода Тихонова

3.2.1. Вариационный принцип отбора нормального псевдорешения на основе сглаживающего функционала.

Метод нахождения нормального решения (3.25), устойчивого к малым возмущениям вектора \mathbf{u} в правой части (\mathbf{a} в общем виде и матрицы в левой части) основан на методе регуляризации [3], использующем вариационный принцип отбора приближенного решения.

Пусть $\mathbf{a}^{(m)}$ – нормальное решение системы (3.24), достигаемое на итерации m ,

$$\mathbf{E}\mathbf{a} = \mathbf{u}^{(m)}. \quad (3.26)$$

На итерации $l < m$

$$\mathbf{E}\mathbf{a} = \mathbf{u}^{(l)} \quad (3.27)$$

вместо вектора $\mathbf{u}^{(m)}$ определено приближение вектора $\mathbf{u}^{(l)}$ такое, что

$$\|\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}^{(m)}\| \leq \delta, \quad (3.28)$$

причем, векторы $\mathbf{u}^{(m)}$ и $\mathbf{u}^{(l)}$ (один из них или оба) могут не удовлетворять классическому условию разрешимости [3], поэтому

$$\inf_{\mathbf{a} \in \mathbf{F}_a} \|\mathbf{E}\mathbf{a} - \mathbf{u}^{(m)}\| = \mu^{(m)} \geq 0, \quad \inf_{\mathbf{a} \in \mathbf{F}_a} \|\mathbf{E}\mathbf{a} - \mathbf{u}^{(l)}\| = \mu^{(l)} \geq 0. \quad (3.29)$$

Необходимо найти такое $l \rightarrow m$, что $\mathbf{a}^{(l)} \rightarrow \mathbf{a}^{(m)}$ и $\delta \rightarrow 0$. Для всех $l \neq m$ приближение к нормальному решению ищется в классе векторов, сопоставимых по точности с исходными данными, т. е. таких, что [3]

$$\|\mathbf{E}\mathbf{a} - \mathbf{u}^{(l)}\| \leq \mu^{(m)} + \delta. \quad (3.30)$$

Из неравенств [3]

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \|\mathbf{E}\mathbf{a} - \mathbf{u}^{(l)}\| &\leq \|\mathbf{E}\mathbf{a} - \mathbf{u}^{(m)}\| + \|\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}^{(m)}\|, \\ \|\mathbf{E}\mathbf{a} - \mathbf{u}^{(m)}\| &\leq \|\mathbf{E}\mathbf{a} - \mathbf{u}^{(l)}\| + \|\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}^{(m)}\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \mu^{(l)} &\leq \mu^{(m)} + \delta, \\ \mu^{(m)} &\leq \mu^{(l)} + \delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\mu^{(l)} - \mu^{(m)}| \leq \delta \end{aligned} \quad (3.31)$$

следует, что искомое приближение $\mathbf{a}^{(l)}$ находится в классе векторов, для которых [3]

$$\|\mathbf{E}\mathbf{a} - \mathbf{u}^{(l)}\| \leq \mu^{(l)} + 2\delta. \quad (3.32)$$

Принцип отбора векторов в этом классе определяется постановкой задачи: искомое приближение $\mathbf{a}^{(l)}$ должно стремиться к нормальному решению $\mathbf{a}^{(m)}$, т. е. минимизировать функционал

$$\Omega(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{a}^{(m)}\|^2. \quad (3.33)$$

Из геометрических представлений, а также из того, что функция (3.33) является стабилизирующей и квазимонотонной, можно сделать вывод, что вектор $\mathbf{a}^{(l)}$, минимизирующий функцию (3.33), лежит на границе множества, удовлетворяющего условию (3.32) [3]:

$$\|\mathbf{E}\mathbf{a} - \mathbf{u}^{(l)}\| = \mu^{(l)} + 2\delta = \delta_1. \quad (3.34)$$

Таким образом, задача сводится к минимизации функции (3.33) для вектора $\mathbf{a}^{(l)}$, удовлетворяющего условию (3.34).

Поставленная задача может решаться методом Лагранжа в предположение, что вектор $\mathbf{a}^{(l)} = \mathbf{a}^\gamma$ минимизирует сглаживающий функционал [3]

$$\begin{aligned} M(\mathbf{a}, \mathbf{u}^{(l)}, \gamma) &= \|\mathbf{E}\mathbf{a} - \mathbf{u}^{(l)}\|^2 + \gamma \|\mathbf{a} - \mathbf{a}^{(m)}\|^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow M(\mathbf{a}^\gamma, \mathbf{u}^{(l)}, \gamma) &= \|\mathbf{E}\mathbf{a}^\gamma - \mathbf{u}^{(l)}\|^2 + \gamma \|\mathbf{a}^\gamma - \mathbf{a}^{(m)}\|^2 = \inf_{\mathbf{a} \in \mathbb{F}_a} M(\mathbf{a}, \mathbf{u}^{(l)}, \gamma), \end{aligned} \quad (3.35)$$

где $\gamma > 0$ – параметр регуляризации, определяемый однозначно по невязке (3.34).

Поскольку функционал (3.35) квадратичный, существует лишь один минимизирующий его вектор $\mathbf{a}^\gamma = \{a_i^\gamma\}^\gamma$. Компоненты a_i^γ являются решением системы линейных алгебраических уравнений, получающихся из условия минимума функционала (3.35) [3]:

$$\frac{\partial M(\mathbf{a}^\gamma, \mathbf{u}^{(l)}, \gamma)}{\partial a_i^\gamma} = 0 \quad (i = 1, \dots, N). \quad (3.36)$$

В результате решения системы (3.36) находится вектор \mathbf{a}^γ как функция неизвестного нормального решения $\mathbf{a}^{(m)}$ и регуляризирующего параметра γ :

$$\mathbf{a}^\gamma = f(\gamma, \mathbf{a}^{(m)}). \quad (3.37)$$

Этот вектор является искомым приближенным нормальным решением системы (3.26). С другой стороны, компоненты $a_i^\gamma = a_i^{(l)}$ определены на текущей итерации l системой (3.27) или, что то же самое, одной из подсистем системы (3.23), что позволяет на данной итерации получить нормальное решение с точностью до параметра γ и вектора $\mathbf{a}^{(l)}$ [3]:

$$\mathbf{a}^{(m)} = \varphi(\gamma, \mathbf{a}^{(l)}). \quad (3.38)$$

На следующей итерации полученное приближение нормального решения используется в качестве результата предыдущей, и процесс регуляризации решения повторяется.

3.2.2 Определение параметра регуляризации в методе Тихонова.

В отношении параметра регуляризации $\gamma(\delta_1)$ действует следующая теорема [3].

Если $M(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \gamma)$ – однозначная функция, то для всякого положительного числа

$$\delta_1 < \|\mathbf{E}\mathbf{a}_0 - \mathbf{u}\|, \text{ где } \mathbf{a}_0 \in \left\{ \mathbf{a}; \Omega(\mathbf{a}) = \inf_{\mathbf{Y} \in \mathbf{F}_a} \Omega(\mathbf{Y}) \right\} \quad (3.39)$$

существует $\gamma(\delta_1)$ такое, что

$$\|\mathbf{E}\mathbf{a}^\gamma - \mathbf{u}\| = \delta_1. \quad (3.40)$$

Поскольку оператор \mathbf{E} – линейный, то, если вектор \mathbf{u} принадлежит гильбертову пространству, и функционал $\Omega(\mathbf{a})$ имеет не равную нулю (при $\mathbf{a} \neq 0$) производную Фреше $\Omega'(\mathbf{a})$ (в частности, если $\Omega(\mathbf{a})$ – квадратичный), то $\gamma(\delta_1)$ определяется однозначно [3].

При известной погрешности δ_1 параметр регуляризации определяется однозначно по невязке (3.34). При неизвестной погрешности δ_1 приближения к $\mathbf{a}^{(m)}$ также можно находить путем минимизации сглаживающего функционала (3.35), но параметр регуляризации не определяется однозначно по невязке. В этом случае можно воспользоваться квазиоптимальным значением γ ($\gamma_{\text{к.о.}}$) или значением γ , определяемым по отношению двух норм ($\gamma_{\text{отн.}}$), при условии, что матрица в левой части является симметричной и неотрицательно определенной [3].

Предположим, что пространство \mathbf{F}_a возможных решений нормированное. Тогда квазиоптимальным называется значение параметра регуляризации, которое реализует [3]

$$\gamma_{\text{к.о.}} = \inf_{\gamma > 0} \sup_{\rho_U(\mathbf{u}, \mathbf{u}^{(m)}) \leq \delta} \left\| \gamma \frac{d\mathbf{a}^\gamma}{d\gamma} \right\|_{\mathbf{F}_a}, \quad (3.41)$$

где \sup берется по всем возможным правым частям \mathbf{u} уравнения (3.27), удовлетворяющим неравенству (3.28) $\rho_U(\mathbf{u}, \mathbf{u}^{(m)}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(m)}\| \leq \delta$.

На текущей итерации l известна только одна правая часть $\mathbf{u}^{(l)}$, и можно найти лишь квазиоптимальное значение γ в ослабленной форме, реализующее [3]

$$\gamma_{\text{к.о.}} = \inf_{\gamma > 0} \left\| \gamma \frac{d\mathbf{a}^\gamma}{d\gamma} \right\|_{\mathbf{F}_a}. \quad (3.42)$$

В случае вырожденных систем линейных алгебраических уравнений помимо ослабленной формы квазиоптимального значения γ используется «глобальное» значение и значение γ , определенное по отношению двух норм, а функция [3]

$$\mathbf{v}_\gamma = \gamma \frac{d\mathbf{a}^\gamma}{d\gamma} \quad (3.43)$$

является решением специальных уравнений. Поскольку в случае единичной матрицы в левой части $\text{def } \mathbf{E} = 1 \neq 0$, параметр регуляризации может быть определен в ослабленной форме из условия (3.42).

При использовании квазиоптимального значения γ требуется некоторая априорная информация об ожидаемом решении в связи с необходимостью качественного (обычно визуального) анализа результатов, что затрудняет автоматизацию вычислительного процесса [10].

3.2.3. Критерий точности итерационного процесса.

При построении методом итераций приближенных решений уравнения (3.26), устойчивых к малым изменениям исходных данных, в виде [3]

$$\mathbf{a}^{(m)} = R(\mathbf{u}, \mathbf{a}^{(m-1)}, \dots, \mathbf{a}^{(l)}, \dots, \mathbf{a}^{(0)}), \quad l < m, \quad (3.44)$$

необходимо, чтобы номер итерации m , которая принимается за приближенное решение, был согласован с уровнем погрешности исходных данных. Так, если оператор в левой части задан точно, а правая часть известна с погрешностью δ , то m берется зависящим от δ : $m = m(\delta)$.

Регуляризованное решение \mathbf{a}^γ рассматривается как результат применения к правой части уравнения (3.27) регуляризующего оператора $R = R(\mathbf{u}^{(l)}, \delta)$ [3]:

$$\mathbf{a}^\gamma = R(\mathbf{u}^{(l)}, \delta). \quad (3.45)$$

Согласно системе (3.37) регуляризующий оператор выражается функцией параметра регуляризации γ и нормального решения $\mathbf{a}^{(m)}$, что позволяет найти приближение к нормальному решению

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}^{(m)} = \varphi(\gamma, \mathbf{a}^{(l)}), \\ \mathbf{a}^{(m)} = R(\mathbf{u}, \mathbf{a}^{(l)}, \dots, \mathbf{a}^{(0)}), \\ l < m \end{array} \right\}. \quad (3.46)$$

Поскольку целью итерационного процесса является поиск $l \rightarrow m$, при котором $\delta \rightarrow 0$

$$\lim_{l \rightarrow m} \|\mathbf{u}^{(l)} - \mathbf{u}^{(m)}\| = 0 \quad (3.47)$$

или в силу уравнений (3.26), (3.27)

$$\lim_{l \rightarrow m} \|\mathbf{a}^{(l)} - \mathbf{a}^{(m)}\| = 0, \quad (3.48)$$

что возможно благодаря уточнению исходных данных за счет малых изменений правой части на каждой итерации.

Таким образом, критерием точности итерационного процесса является сходимость последовательности решений $\{\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(l)}\}$ к нормальному решению $\mathbf{a}^{(m)}$ при условиях (3.47), (3.48).

3.3. Метод итерационной регуляризации

3.3.1. Вариационный принцип отбора нормального псевдорешения на основе функционала невязки температуры.

В задаче регуляризации нахождения нормального решения для поиска минимума сглаживающего функционала используются методы второго порядка (ньютоновского типа), которые в линейном случае сводятся к обращению оператора \mathbf{B} обратной задачи $\mathbf{B}\mathbf{a} = \mathbf{u}$, связанной с каждой строкой n системы (3.22), а в нелинейном – к обращению матрицы вторых производных, что приводит к требованию непрерывности оператора \mathbf{B} и его производных [6].

Существует иной подход, который не предусматривает обращения оператора \mathbf{B} и, следовательно, не требует его непрерывности. Он позволяет решать исходную обратную задачу (3.20)

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{u}, \quad (3.49)$$

где $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}$ – искомая матрица ($i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N$), \mathbf{z} – известный вектор температур с координатами T_i , $\mathbf{z} = \{T_i\}$, \mathbf{u} – известный вектор производных температур по времени с координатами u_i , $\mathbf{u} = \{u_i\}$. Задача поиска матрицы \mathbf{A} приводится к экстремальной постановке и последующему использованию численных методов теории оптимизации – параметрической или функциональной. В случае параметрической оптимизации минимизируется функция конечного числа параметров, в случае функциональной – функционал от этих функций [5-6].

Каждый столбец k ($k = 1, \dots, N$) матрицы \mathbf{A} представляется вектором $\mathbf{a}_k = \{a_{ik}\}$ ($i = 1, \dots, N$). В итерационных алгоритмах оптимизации происходит последовательное уточнение решения в соответствии с формулой [5-6] (в источнике для граничной задачи относительно плотности теплового потока)

$$\mathbf{a}_k^{(l)} = \mathbf{a}_k^{(l-1)} + \Delta\mathbf{a}_k^{(l)}, \quad (l = 1, 2, \dots), \quad (3.50)$$

где $\mathbf{a}^{(0)}$ – начальное приближение, $\Delta\mathbf{a}^{(l)}$ – поправка, вычисляемая на каждой итерации l из условия убывания целевого функционала: $J(\mathbf{a}^{(l)}) < J(\mathbf{a}^{(l-1)})$. Некоторые методы оптимизации позволяют эффективно начинать итерационный процесс от далекой оценки $\mathbf{a}^{(0)}$ и резко замедляются при приближении к минимуму функционала. По мере увеличения числа итераций решение обратной задачи может ухудшаться, постепенно теряя гладкий характер. Главный вопрос такого подхода заключается в выборе критерия останова итерационного процесса на некоторой итерации $m = m(\delta)$. Таким условием может быть ограничение на уровень невязки функционала [6]:

$$J[\mathbf{a}_k] \approx \delta_\Sigma^2 = \delta_T^2 + \delta^2, \quad (l = 1, 2, \dots), \quad (3.51)$$

где δ_T^2 – ошибка в температурной информации, δ^2 – ошибка аппроксимации правой части (3.28). Вычислительный процесс завершается при выполнении неравенства $J^{(l)} \leq \delta_\Sigma^3$.

Величина δ_T^2 оценивается по формуле [6]

$$\delta_T^2 = \int_0^\tau \sigma^2(\tau) d\tau, \quad (3.52)$$

где $\sigma^2(\tau)$ – дисперсия функции $T(\tau)$. Поскольку ошибку δ определить достаточно сложно, указанным способом целесообразно пользоваться при выполнении условия $\delta \ll \delta_T$, когда можно принять $\delta_\Sigma \approx \delta_T$.

В экстремальной постановке задачи идентификации определение вектора \mathbf{a}_k соответствует минимизации функционала [5]

$$J[\mathbf{a}_k^{(l)}] = \rho_U^2 \left[\mathbf{A}(\mathbf{a}_k^{(l)})\mathbf{z}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)} \right] = \left\| \mathbf{A}(\mathbf{a}_k^{(l)})\mathbf{z}^{(0)} - \mathbf{u}^{(0)} \right\|^2, \quad (3.53)$$

представляющего собой квадратичную невязку левой части $\mathbf{A}\mathbf{z}^{(0)}$, рассчитанной для приближения $\mathbf{a}_k^{(l)}$ и известного вектора температур $\mathbf{z}^{(0)}$, и известной правой части $\mathbf{u}^{(0)}$. Для идентификации матрицы коэффициентов

$\mathbf{A} = \{a_{ik}\}$ ($i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N$) на итерации l необходимо определить N векторов $\mathbf{a}_k^{(l)}$ ($k = 1, \dots, N$), каждый из которых является столбцом матрицы \mathbf{A} . В этом случае минимизируется система из N функционалов:

$$\left. \begin{aligned} J[\mathbf{a}_1^{(l)}] &= \rho_U^2 \left[\mathbf{A}(\mathbf{a}_1^{(l)}, \mathbf{a}_2^{(l-1)}, \dots, \mathbf{a}_N^{(l-1)}) \mathbf{z}, \mathbf{u} \right], \\ J[\mathbf{a}_2^{(l)}] &= \rho_U^2 \left[\mathbf{A}(\mathbf{a}_1^{(l-1)}, \mathbf{a}_2^{(l)}, \dots, \mathbf{a}_N^{(l-1)}) \mathbf{z}, \mathbf{u} \right], \\ &\dots \\ J[\mathbf{a}_k^{(l)}] &= \rho_U^2 \left[\mathbf{A}(\mathbf{a}_1^{(l-1)}, \mathbf{a}_2^{(l-1)}, \dots, \mathbf{a}_k^{(l)}, \mathbf{a}_{k+1}^{(l-1)}, \dots, \mathbf{a}_N^{(l-1)}) \mathbf{z}, \mathbf{u} \right], \\ &\dots \\ J[\mathbf{a}_{N-1}^{(l)}] &= \rho_U^2 \left[\mathbf{A}(\mathbf{a}_1^{(l-1)}, \mathbf{a}_2^{(l-1)}, \dots, \mathbf{a}_{N-1}^{(l)}, \mathbf{a}_N^{(l-1)}) \mathbf{z}, \mathbf{u} \right], \\ J[\mathbf{a}_N^{(l)}] &= \rho_U^2 \left[\mathbf{A}(\mathbf{a}_1^{(l-1)}, \mathbf{a}_2^{(l-1)}, \dots, \mathbf{a}_{N-1}^{(l-1)}, \mathbf{a}_N^{(l)}) \mathbf{z}, \mathbf{u} \right], \end{aligned} \right\}. \quad (3.54)$$

При минимизации функционала $J_k^{(l)} = J(\mathbf{a}_k^{(l)})$ искомым является вектор $\mathbf{a}_k^{(l)}$, который находится при помощи дискретного итерационного процесса (3.50). С целью упрощения записи исключим из обозначений индекс k :

$$J[\mathbf{a}^{(l)}] = \rho_U^2 \left[\mathbf{A}(\mathbf{a}^{(l)}) \mathbf{z}, \mathbf{u}^{(0)} \right]. \quad (3.55)$$

В качестве приращения $\Delta \mathbf{a}^{(l)}$ используется вектор [6]

$$\Delta \mathbf{a}^{(l)} = -\beta^{(l)} \xi^{(l)}, \quad (3.56)$$

где $\xi^{(l)}$ – функция градиента функционала $J(\mathbf{a}^{(l)})$, определяющая направление движения от точки $\mathbf{a}^{(l)}$; $\beta^{(l)}$ – величина шага вдоль этого направления.

Методы скорейшего спуска и сопряженных градиентов выражаются общим итерационным алгоритмом

$$\mathbf{a}^{(l)} = \mathbf{a}^{(l-1)} - \beta^{(l)} \xi^{(l)}, \quad (l = 1, 2, \dots), \quad (3.57)$$

где глубина спуска $\beta^{(l)}$ выбирается из следующего условия:

$$\beta^{(l)} : J(\mathbf{a}^{(l)}) = \inf_{\beta} J(\mathbf{a}^{(l-1)} - \beta^{(l)} \xi^{(l)}). \quad (3.58)$$

Недостатком рассмотренной постановки, основанной на выборе функционала (3.53), является необходимость $2N$ измерений для определения N координат вектора \mathbf{a}_k в итерационной последовательности (3.54): прямых измерений N температур, являющихся координатами вектора $\mathbf{z}^{(0)}$, и косвенных измерений N первых производных температур по времени, являющихся координатами вектора $\mathbf{u}^{(0)}$. По этой причине целесообразно вернуться к представлению уравнения (3.49) в форме (3.20), где левая часть разложена в ряд Тейлора по температурам T_k .

В этом случае каждая строка i ($i = 1, \dots, N$) матрицы \mathbf{A} представляется вектором $\mathbf{a}_i = \{a_{ik}\}$ ($k = 1, \dots, N$), а итерационный процесс сохраняется:

$$\mathbf{a}_i^{(l)} = \mathbf{a}_i^{(l-1)} + \Delta \mathbf{a}_i^{(l)}, \quad (l = 1, 2, \dots), \quad (3.59)$$

Определение вектора \mathbf{a}_i соответствует минимизации функционала [5-6], [10]

$$J[\mathbf{a}_i^{(l)}] = \rho_U^2 \left[T(\mathbf{a}_i^{(l)}, \tau), T^{(0)} \right], \quad (3.60)$$

представляющего собой квадратичную невязку температуры $T(\mathbf{a}_i^{(l)}, \tau)$, рассчитанной для приближения $\mathbf{a}_i^{(l)}$, и известной температуры $T^{(0)}$. Применительно к постановке (3.20) задачи идентификации матрицы коэффициентов $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}$ ($i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N$) на итерации l необходимо определить N векторов $\mathbf{a}_i^{(l)}$ ($i = 1, \dots, N$), каждый из которых является строкой матрицы \mathbf{A} . В этом случае минимизируется система из N функционалов, а температуры в правой части (3.60) заменяются вектором экспериментальных температур $\mathbf{z}^{(0)} = \{T_k^{(0)}\}$ ($k = 1, \dots, N$) и вектором температур $\mathbf{z} = \{T_k\}$, являющихся решением прямой задачи для текущей матрицы коэффициентов \mathbf{A} :

$$\left. \begin{aligned} J[\mathbf{a}_1^{(l)}] &= \rho_U^2 \left[\mathbf{z}(\mathbf{a}_1^{(l)}, \mathbf{a}_2^{(l-1)}, \dots, \mathbf{a}_N^{(l-1)}, \tau), \mathbf{z}^{(0)} \right], \\ J[\mathbf{a}_2^{(l)}] &= \rho_U^2 \left[\mathbf{z}(\mathbf{a}_1^{(l-1)}, \mathbf{a}_2^{(l)}, \dots, \mathbf{a}_N^{(l-1)}, \tau), \mathbf{z}^{(0)} \right], \\ &\dots \\ J[\mathbf{a}_i^{(l)}] &= \rho_U^2 \left[\mathbf{z}(\mathbf{a}_1^{(l-1)}, \mathbf{a}_2^{(l-1)}, \dots, \mathbf{a}_i^{(l)}, \mathbf{a}_{i+1}^{(l-1)}, \dots, \mathbf{a}_N^{(l-1)}, \tau), \mathbf{z}^{(0)} \right], \\ &\dots \\ J[\mathbf{a}_{N-1}^{(l)}] &= \rho_U^2 \left[\mathbf{z}(\mathbf{a}_1^{(l-1)}, \mathbf{a}_2^{(l-1)}, \dots, \mathbf{a}_{N-1}^{(l)}, \mathbf{a}_N^{(l-1)}, \tau), \mathbf{z}^{(0)} \right], \\ J[\mathbf{a}_N^{(l)}] &= \rho_U^2 \left[\mathbf{z}(\mathbf{a}_1^{(l-1)}, \mathbf{a}_2^{(l-1)}, \dots, \mathbf{a}_{N-1}^{(l-1)}, \mathbf{a}_N^{(l)}, \tau), \mathbf{z}^{(0)} \right], \end{aligned} \right\}. \quad (3.61)$$

При минимизации функционала $J_i^{(l)} = J(\mathbf{a}_i^{(l)})$ искомым является вектор $\mathbf{a}_i^{(l)}$, который находится при помощи итерационного процесса (3.59). С целью упрощения записи исключим из обозначений индекс i , учитывая, что минимизируемый функционал определен квадратом нормы разности векторов расчетных и экспериментальных температур:

$$J[\mathbf{a}^{(l)}] = \rho_U^2 \left[\mathbf{z}(\mathbf{a}^{(l)}, \tau), \mathbf{z}^{(0)} \right]. \quad (3.62)$$

В качестве приращения $\Delta \mathbf{a}^{(l)}$ также используется вектор (3.56), а задача минимизации функционала $J^{(l)} = J(\mathbf{a}^{(l)})$ решается с использованием градиента функционала методами скорейшего спуска и сопряженных градиентов.

Важной особенностью метода сопряженных градиентов является то, что число итераций для достижения точного минимума квадратичной функции (3.62) теоретически равно N – размерности исходного вектора. Однако в практической реализации за счет ошибок, появляющихся в ходе вычислений, это условие не выполняется, вызывая ухудшение сходимости метода. По этой причине по истечении каждых N итераций рекомендуется выполнять один шаг по методу скорейшего спуска ($\gamma^N = 0$) и после этого продолжать вычисления с помощью метода сопряженных градиентов. Этот прием называется обновлением итераций и позволяет несколько снизить накопление вычислительных ошибок [5].

Направление спуска определяется по градиенту функционала невязки, поэтому вычисление градиента является ключевым вопросом метода итерационной регуляризации. От успешного построения эффективной процедуры расчета градиента зависит не только эффективность всей расчетной методики, но и, в ряде случаев, принципиальная возможность использования итерационных алгоритмов [5].

3.3.2. Градиент функционала невязки температуры.

Простейший способ вычисления градиента заключается в разностной аппроксимации частных производных $\partial J/\partial a_{ik}$ в окрестности рассматриваемого приближения \mathbf{a} [5]:

$$\frac{\partial J}{\partial a_{ik}} = \frac{J(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i,k-1}, a_{ik} + \Delta a_{ik}, a_{i,k+1}, \dots, a_{iN})}{\Delta a_{ik}}, \quad (3.63)$$

где Δa_{ik} – малое приращение компоненты a_{ik} вектора \mathbf{a}_i . Трудность применения данного способа связана с тем, что для расчета всех компонент градиента на данном итерационном шаге необходимо N раз вычислить приращение функционала. Другая трудность применения данного способа связана с выбором величины приращений Δa_{ik} . При очень малых Δa_{ik} возникают большие неточности определения приращения функции, обусловленные ошибками аппроксимации и округления. С другой стороны, увеличение Δa_{ik} может привести к значительному нарушению предположения о линейности функции отклика (зависимость целевого функционала $J(\mathbf{a})$ от переменных управления) в рассматриваемой точке [5].

Остановимся на более рациональном методе нахождения градиента функционала (3.60), основанном на решении краевой задачи для вариаций температуры, которая формулируется методом неопределенных множителей Лагранжа [6], [10].

Для решения задачи идентификации необходимо дополнительное условие, в качестве которого используются температуры точек, измеренные в определенные моменты времени τ_j [264]:

$$T_i^{(0)}(\tau_j) = T_{ij}^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i) \quad (3.64)$$

В соответствии с 4.7 функционал температурной невязки запишем в виде (3.60):

$$J[\mathbf{z}] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (T_i(\tau_j) - T_i^{(0)}(\tau_j))^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (T_{ij} - T_{ij}^{(0)})^2. \quad (3.65)$$

Минимизация функционала осуществляется методами сопряженных градиентов и скорейшего спуска по итерационному алгоритму (3.57). Номер последней итерации выбирается по принципу итерационной регуляризации из условия [6]

$$J[\mathbf{z}] \leq \delta_T^2, \quad (3.66)$$

где δ_T^2 – среднеквадратичная ошибка температурных измерений:

$$\delta_T^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \sigma_{ij}^2, \quad (3.67)$$

σ_{ij}^2 – дисперсия данного измерения температуры.

Для каждого промежутка времени $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ на основе системы (3.20) записывается следующая математическая модель [264]:

$$\frac{dT_{ij}}{d\tau} = \sum_{k=1}^N a_{ik}(T_{ij}, T_{kj}, \tau) T_{kj}, \quad \tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (3.68)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i),$$

с общим начальным условием

$$T_i(\tau_0) = T_{i0}, \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (3.69)$$

и условием непрерывности

$$\left\{ \begin{array}{l} T_i(\tau_j - 0) = T_i(\tau_j + 0) \\ \tau_0 = \tau_{\min}, \tau_{M_i+1} = \tau_{\max} \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i). \quad (3.70)$$

Функционал Лагранжа для задачи условной минимизации (3.64)-(3.70) принимает вид [264]

$$L = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (T_{ij} - T_{ij}^{(0)})^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \Psi_{ij}(\tau) \left(-\frac{dT_{ij}}{d\tau} + \sum_{k=1}^N a_{ik}(T_{ij}, T_{kj}, \tau) T_{kj} \right) d\tau + \quad (3.71)$$

$$+ \sum_{i=1}^N \eta_i (T_i(\tau_0) - T_{i0}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \mu_{ij} (T_i(\tau_j - 0) - T_i(\tau_j + 0)),$$

где Ψ_{ij} , η_i , μ_{ij} – неопределенные множители Лагранжа, соответствующие условиям (3.64)-(3.70).

Пусть искомые коэффициенты a_{ik} получили вариации δa_{ik} ($i = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, N$). Тогда температура изменится на некоторую величину $v_{ij}(\tau)$ ($i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M_i$), а вариация температуры $v_{ij}(\tau)$ удовлетворяет следующей краевой задаче [264]:

$$\frac{dv_{ij}}{d\tau} = \sum_{k=1}^N a_{ik}(T_{ij}, T_{kj}, \tau) \frac{\partial T_{kj}}{\partial T_{ij}} v_{ij} + \quad (3.72)$$

$$+ \sum_{k=1}^N \frac{\partial a_{ik}(T_{ij}, T_{kj}, \tau)}{\partial T_{ij}} T_{kj} v_{ij} + \sum_{k=1}^N \delta a_{ik}(T_{ij}, T_{kj}, \tau) T_{kj}$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i),$$

с начальным условием

$$v_i(\tau_0) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (3.73)$$

и условием непрерывности

$$\left\{ \begin{array}{l} v_i(\tau_j - 0) = v_i(\tau_j + 0) \\ \tau_0 = \tau_{\min}, \tau_{M_i+1} = \tau_{\max} \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i). \quad (3.74)$$

Выражение линейной части приращения минимизируемого функционала имеет вид [264]:

$$\delta J = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (T_{ij} - T_{ij}^{(0)}) v_{ij}. \quad (3.75)$$

Вариация функционала Лагранжа в виде линейной части приращения этого функционала представляется следующим образом [264]:

$$\delta L = \delta J + \delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3, \quad (3.76)$$

где

$$\delta L_1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \psi_{ij}(\tau) \left[-\frac{dv_{ij}}{d\tau} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial a_{ik}(T_{ij}, T_{kj}, \tau)}{\partial T_{ij}} T_{kj} v_{ij} + \sum_{k=1}^N \delta a_{ik}(T_{ij}, T_{kj}, \tau) T_{kj} \right] d\tau,$$

$$\delta L_2 = \sum_{i=1}^N \eta_i v_i(\tau_0),$$

$$\delta L_3 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \mu_{ij} (v_i(\tau_{j-0}) - v_i(\tau_{j+0})),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i).$$

Из условия стационарности функционала Лагранжа $\delta L = 0$

$$\delta J = -\delta L_1 - \delta L_2 - \delta L_3. \quad (3.77)$$

Предполагая, что поведение решения системы (3.72) определяется членами первого приближения с учетом условий (3.73), (3.74) имеем [264]

$$\begin{aligned} \delta J = -\delta L_1 &= -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \psi_{ij}(\tau) \left[-\frac{dv_{ij}}{d\tau} + \sum_{k=1}^N \delta a_{ik}(T_{ij}, T_{kj}, \tau) T_{kj} \right] d\tau = \\ &= -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \sum_{k=1}^N \psi_{ij}(\tau) \delta a_{ik}(T_{ij}, T_{kj}, \tau) T_{kj} d\tau + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \psi_{ij}(\tau) dv_{ij}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

В частном случае, когда искомые параметры a_{ik} являются только функциями времени, выражение (3.78) может рассматриваться как дифференциал функционала невязки. Так как по определению дифференциала Фреше

$$\delta J = (\mathbf{J}'_{\mathbf{a}}, \delta \mathbf{a}) + O(\delta \mathbf{a}^2) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \sum_{k=1}^N J'_{a_{ikj}} \delta a_{ikj} + O(\delta \mathbf{a}^2), \quad (3.79)$$

то, сравнивая подынтегральные выражения (3.78), (3.79) и, принимая во внимание (3.72), получаем выражение производной функционала [264]:

$$dJ'_{a_{ikj}} = -\psi_{ij}(\tau) T_{kj} d\tau, \Rightarrow J'_{a_{ikj}} = -\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \psi_{ij}(\tau) T_{kj} d\tau, \quad (3.80)$$

где коэффициенты ψ_{ij} могут быть найдены из сопряженной краевой задачи, которая решается в «обратном» времени [6]:

$$-\frac{d\psi_{ij}}{d\tau'} = \sum_{k=1}^N a_{ik} (\tau_{\max} - \tau') \psi_{kj} \quad (3.81)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i)$$

с начальным условием

$$\psi_i(\tau_{\max}) = \psi_{i, M_i+1} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (3.82)$$

и условием непрерывности

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_i(\tau'_j - 0) = \psi_i(\tau'_j + 0), \\ \tau'_0 = \tau_{\min}, \tau'_{M_i+1} = \tau_{\max} \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i). \quad (3.83)$$

Предложим другой способ определения множителей ψ_{ij} . Для этого продифференцируем уравнение (3.78) по времени [264]:

$$2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \left(\frac{dT_{ij}}{d\tau} v_{ij} + (T_{ij} - T_{ij}^{(0)}) \frac{dv_{ij}}{d\tau} \right) = \quad (3.84)$$

$$= - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \psi_{ij}(\tau) \left[- \frac{dv_{ij}}{d\tau} + \sum_{k=1}^N \delta a_{ik}(T_{ij}, T_{kj}, \tau) T_{kj} \right].$$

Приравнявая множители при одинаковых степенях слагаемых в левой и правой части уравнения (3.84), получим выражение для множителей ψ_{ij} [264]:

$$\psi_{ij} = 2(T_{ij} - T_{ij}^{(0)}), \quad (3.85)$$

где температуры T_{ij} являются решением краевой задачи (3.68)-(3.70).

В случае, если искомые функции a_{ik} зависят как от времени, так и от температуры, они параметризуются при помощи некоторой системы базисных функций $\{\gamma^a_{ikn} = \gamma^a(T_{in}, T_{kn})\}$, $(i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N; n = 1, \dots, N^a_{ik})$ [264]:

$$a_{ik}(T_i, T_k, \tau) = \sum_{n=1}^{N^a_{ik}} A_{ikn}(\tau) \gamma^a_{ikn}, \quad (3.86)$$

Подставляя в (3.78) вариации

$$\delta a_{ik}(T_i, T_k, \tau) = \sum_{n=1}^{N^a_{ik}} \delta A_{ikn}(\tau) \gamma^a_{ikn}, \quad (3.87)$$

получим следующее выражение для вариации функционала:

$$\delta J = -L_1 = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \psi_{ij}(\tau) \sum_{k=1}^N T_{kj} \sum_{n=1}^{N^a_{ik}} \delta A_{ikn}(\tau) \gamma^a_{ikn} d\tau. \quad (3.88)$$

Тогда градиент функционала будет равен [10], [264]

$$dJ'_{A_{ikn}} = -\psi_{ij} T_{kj} \gamma^a_{ikn} d\tau, \Rightarrow J'_{A_{ikn}} = - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \psi_{ij} T_{kj} \gamma^a_{ikn} d\tau. \quad (3.89)$$

3.3.3. Шаг спуска.

Чтобы определить шаг спуска итерационного процесса (3.57) решения задачи идентификации с использованием функционала невязки температуры из условия (3.58), будем считать приращение вектора характеристик на текущей итерации (3.56) вариацией δa_{ik} , которая вызывает вариацию температуры $v_{ij}(\tau)$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M_i$). Согласно (3.72) $v_{ij}(\tau)$ удовлетворяет краевой задаче [264]

$$\frac{dv_{ij}}{d\tau} = -\sum_{k=1}^N \beta_{ij} \xi_{ikj} T_{kj} \quad (3.90)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i),$$

с начальным условием (3.73) и условием непрерывности (3.74). Тогда функционал температурной невязки на итерации l запишется как [264]

$$J(\mathbf{a} + \delta \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (T_{ij} + v_{ij} - T_{ij}^{(0)})^2. \quad (3.91)$$

Из условия (3.58) шаг спуска β минимизирует функционал (3.91), поэтому в процессе минимизации должен являться аргументом температуры $T_{ij}(\tau, \beta_{ij})$ и вариации температуры $v_{ij}(\tau, \beta_{ij})$ [264]:

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (T_{ij} + v_{ij} - T_{ij}^{(0)}) \frac{\partial}{\partial \beta_{ij}} (T_{ij} + v_{ij} - T_{ij}^{(0)}) = 0, \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left[\begin{array}{l} T_{ij} + v_{ij} - T_{ij}^{(0)} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta_{ij}} (T_{ij} + v_{ij} - T_{ij}^{(0)}) = 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_{ij} = T_{ij}^{(0)} - T_{ij}, \\ \frac{\partial}{\partial \beta_{ij}} (T_{ij} + v_{ij} - T_{ij}^{(0)}) = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Подставляя вариации температуры из (3.92) в (3.90), имеем [264]

$$\begin{aligned} -\frac{dT_{ij}}{d\tau} &= -\sum_{k=1}^N \beta_{ij} \xi_{ikj} T_{kj} \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta_{ij} &= \frac{\frac{dT_{ij}}{d\tau}}{\sum_{k=1}^N \xi_{ikj} T_{kj}} = \frac{\sum_{k=1}^N a_{ikj} T_{kj}}{\sum_{k=1}^N \xi_{ikj} T_{kj}} \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i),$$

где температуры T_{kj} являются решением краевой задачи (3.68)-(3.70) на текущей итерации. Из (3.93) следует, что шаг спуска $\beta = \beta_{ij}$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M_i$) вычисляется NM раз и является индивидуальным для каждой строки искомой матрицы коэффициентов a_{ik} на каждом временном участке.

3.4. Идентификация математических моделей теплообмена в системах космического аппарата

Математическая модель с сосредоточенными параметрами, описывающая теплообмен в технической системе, представляет собой

систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно температур материальных точек, являющихся эквивалентами элементов системы по массе, теплофизическим и радиационно-оптическим характеристикам. Материальные точки условно считаются изотермическими, что подразумевает равенство зависящих от времени среднемассовых температур модельной точки и технического элемента.

Состояние термодинамически открытой технической системы КА из N элементов характеризуется вектором $\mathbf{z} = \{T_i\}$ ($i = 1, \dots, N$), который должен удовлетворять следующей системе уравнений [10]:

$$C_i(T_i, \tau) \frac{dT_i}{d\tau} = \sum_{k=1}^N \alpha_{ik}(\tau)(T_k - T_i) + \sum_{k=1}^N \varphi_{ik}(\tau) F_i \sigma (T_k^4 - T_i^4) + E_i(T_i, \tau) + Q_i(\tau), \quad \tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}], \quad T_i(\tau_{\min}) = T_{i0} \quad (3.94)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

где C_i – абсолютная теплоемкость i -го элемента; α_{ik} – матрица проводимостей конвективного или кондуктивного теплообмена между элементами; φ_{ik} – матрица угловых коэффициентов; σ – постоянная Стефана-Больцмана; E_i – тепловая мощность, подводимая к i -му элементу из окружающего пространства; Q_i – тепловая мощность, выделяемая в i -м элементе; T_{i0} – начальное значение температуры. Поскольку σ , F_i – известные величины, далее вместо матрицы угловых коэффициентов будем использовать матрицу коэффициентов излучения $\chi_{ik}(\tau) = \varphi_{ik}(\tau) F_i \sigma$, Вт/К⁴.

Для решения задачи идентификации характеристик $C_i(T_i, \tau)$, $E_i(T_i, \tau)$, $Q_i(\tau)$, $\alpha_{ik}(T_i, T_k, \tau)$, $\chi_{ik}(\tau)$ методом итерационной регуляризации используется дополнительное условие (3.64), функционал невязки (3.65) и условие регуляризации (3.66).

Для каждого промежутка времени $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ на основе системы (3.94) записывается следующая математическая модель [264]:

$$C_i(T_i, \tau) \frac{dT_{ij}}{d\tau} = \sum_{k=1}^N \alpha_{ik}(\tau)(T_{kj} - T_{ij}) + \sum_{k=1}^N \chi_{ik}(\tau)(T_{kj}^4 - T_{ij}^4) + E_i(T_i, \tau) + Q_i(\tau), \quad \tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (3.95)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i),$$

с общим начальным условием

$$T_i(\tau_0) = T_{i0}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.96)$$

и условием непрерывности

$$\left. \begin{array}{l} T_i(\tau_j - 0) = T_i(\tau_j + 0), \\ \tau_0 = \tau_{\min}, \tau_{M_i+1} = \tau_{\max} \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i). \quad (3.97)$$

В частном случае, когда искомые функции зависят только от времени $C_i(\tau)$, $E_i(\tau)$, $Q_i(\tau)$, $\alpha_{ik}(\tau)$, $\chi_{ik}(\tau)$, задача решается в функциональном пространстве. Минимизация функционала (3.65) осуществляется по итерационному алгоритму (3.57), а градиент функционала определяется по аналогии с выражением (3.80) [264]:

$$J'_{C_i} = \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \psi_{ij}(\tau) \frac{\partial T_{ij}}{\partial \tau} d\tau = \int_{T_{i,j-1}}^{T_{ij}} \psi_{ij}(\tau) dT_{ij}, \quad (3.98)$$

$$J'_{E_i} = - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \psi_{ij}(\tau) d\tau, \quad (3.99)$$

$$J'_{Q_i} = - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \psi_{ij}(\tau) d\tau, \quad (3.100)$$

$$J'_{\alpha_{ik}} = - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \psi_{ij}(\tau) (T_{kj} - T_{ij}) d\tau, \quad (3.101)$$

$$J'_{\chi_{ik}} = - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \psi_{ij}(\tau) (T_{kj}^4 - T_{ij}^4) d\tau \quad (3.102)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i),$$

где ψ_{ij} – решение задачи, сопряженной с линеаризованной формой исходной задачи [10]:

$$\begin{aligned} -C_i(T_i, \tau') \frac{d\psi_{ij}}{d\tau'} &= \sum_{k=1}^N \alpha_{ik}(\tau') (-\psi_{ij}) + 4 \sum_{k=1}^N \chi_{ik}(\tau') (-T_{ij}^3 \psi_{ij}), \\ \tau' &\in [\tau_{j-1}, \tau_j], \quad \tau'_0 = \tau_{\min}, \quad \tau'_{M_i+1} = \tau_{\max} \\ &(i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i) \end{aligned} \quad (3.103)$$

с начальным условием (3.82) и условием непрерывности (3.83). Возможен и способ определения ψ_{ij} по выражению (3.85). В этом случае, приравнявая коэффициенты при производной вариации температуры по времени в левой и правой части уравнения, которое строится аналогично уравнению (3.84), необходимо принять во внимание наличие теплоемкости при производной вариации температуры в правой части [264]:

$$\psi_{ij} = \frac{2}{C_i(T_i, \tau)} (T_{ij} - T_{ij}^{(0)}), \quad (3.104)$$

Если искомые характеристики $C_i(T_i, \tau)$, $E_i(T_i, \tau)$, $\alpha_{ik}(T_i, T_k, \tau)$ зависят как от времени, так и от температуры, задача идентификации решается в параметрическом пространстве. Характеристики параметризуются некоторыми системами функций $\{\eta^C_{in} = \eta^C(T_{in})\}$ ($n = 1, 2, \dots, N^C_i$), $\{\eta^E_{in} = \eta^E(T_{in})\}$ ($n = 1, 2, \dots, N^E_i$), $\{\eta^{\alpha}_{ikn} = \eta^{\alpha}(T_{in}, T_{kn})\}$ ($n = 1, \dots, N^{\alpha}_{ik}$) [264]:

$$C_i(T_i, \tau) = \sum_{n=1}^{N^C_i} c_{in}(\tau) \eta^C_{in}, \quad (3.105)$$

$$E_i(T_i, \tau) = \sum_{n=1}^{N^E_i} e_{in}(\tau) \eta^E_{in}, \quad (3.106)$$

$$\alpha_{ik}(T_i, T_k, \tau) = \sum_{n=1}^{N_{ik}^a} A_{ikn}(\tau) \eta_{ikn}^a. \quad (3.107)$$

Минимизация функционала (3.65) осуществляется по итерационному алгоритму (3.57), а градиент функционала по аналогии с выражением (3.80) имеет следующий вид [264]:

$$J'_{c_{in}} = \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \psi_{ij} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \tau} \eta_{in}^C d\tau = \int_{T_{i,j-1}}^{T_{ij}} \psi_{ij} \eta_{in}^C dT_{ij}, \quad (3.108)$$

$$J'_{e_{in}} = - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \psi_{ij} \eta_{in}^E d\tau, \quad (3.109)$$

$$J'_{A_{ikn}} = - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \psi_{ij} (T_{kj} - T_{ij}) \eta_{ikn}^a d\tau. \quad (3.110)$$

где ψ_{ji} – решение задачи, сопряженной с линеаризованной формой исходной задачи:

$$\begin{aligned} -C_i(T_i, \tau') \frac{d\psi_{ij}}{d\tau'} &= \sum_{k=1}^N \alpha_{ik}(\tau') (-\psi_{ij}) + \\ &+ 4 \sum_{k=1}^N \chi_{ik}(\tau') (-T_{ij}^3 \psi_{ij}) + \psi_{ij} \frac{\partial E_i(T_i, \tau')}{\partial T_{ij}}, \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j], \quad \tau_0 = \tau_{\min}, \quad \tau_{M_i+1} = \tau_{\max}$$

$$(i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i)$$

с начальным условием (3.82) и условием непрерывности (3.83). При решении задачи в пространстве параметров множители Лагранжа ψ_{ij} также могут быть определены по выражению (3.104).

Для определения шага спуска по условию (3.58) будем считать приращение вектора каждой искомой характеристики на текущей итерации (3.56) вариацией δ , которая вызывает отдельную вариацию температуры $v_{ij}(\tau, \delta)$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M_i$).

Пусть искомые теплоемкости C_{ij} получили вариации δC_{ij} ($i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N$), которые согласно (3.56) равны

$$\delta C_{ij} = -\beta_{ij}^C \xi_{ij}^C. \quad (3.112)$$

Тогда температура изменится на некоторую величину $v_{ij}(\tau)$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M_i$), а вариация температуры $v_{ij}(\tau)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} C_i(T_i, \tau) \frac{dv_{ij}}{d\tau} &= - \frac{\partial C_i(T_i, \tau)}{\partial T_{ij}} \frac{dT_{ij}}{d\tau} v_{ij} - \delta C_i(T_i, \tau) \frac{dT_{ij}}{d\tau} + \\ &+ \sum_{k=1}^N \alpha_{ik}(\tau) (-v_{ij}) + \sum_{k=1}^N \chi_{ik}(\tau) (-4T_{ij}^3 v_{ij}) + \frac{\partial E_i(T_i, \tau)}{\partial T_{ij}} v_{ij}, \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i),$$

с начальным условием (3.73) и условием непрерывности (3.74). Функционал температурной невязки на итерации l запишется как

$$J(\mathbf{C} + \delta\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (T_{ij} + v_{ij} - T_{ij}^{(0)})^2, \quad (3.114)$$

следовательно, вариации температуры $v_{ij}(\tau)$ определяются из (3.92). Подставляя вариации температуры из (3.92) в (3.113) и считая, что решение задачи определяется членами первого приближения, получаем уравнение для определения β^C_{ij} :

$$\begin{aligned} -C_i(T_i, \tau) \frac{dT_{ij}}{d\tau} &= \beta^C_{ij} \xi^C_{ij} \frac{dT_{ij}}{d\tau} + \\ &+ \left(-\sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} - \sum_{k=1}^N 4T_{ij}^3 \chi_{ikj} \right) (T_{ij}^{(0)} - T_{ij}), \end{aligned} \quad (3.115)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i).$$

Пусть искомые тепловые мощности E_{ij} получили вариации δE_{ij} ($i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N$), которые согласно (3.56) равны

$$\delta E_{ij} = -\beta^E_{ij} \xi^E_{ij}. \quad (3.116)$$

Тогда температура изменится на некоторую величину $v_{ij}(\tau)$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M_i$), а вариация температуры $v_{ij}(\tau)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} C_i(T_i, \tau) \frac{dv_{ij}}{d\tau} &= -\frac{\partial C_i(T_i, \tau)}{\partial T_{ij}} \frac{dT_{ij}}{d\tau} v_{ij} + \sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} (-v_{ij}) + \\ &+ \sum_{k=1}^N \chi_{ikj} (-4T_{ij}^3 v_{ij}) + \frac{\partial E_i(T_i, \tau)}{\partial T_{ij}} v_{ij} + \delta E_i(T_i, \tau), \end{aligned} \quad (3.117)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i).$$

с начальным условием (3.73) и условием непрерывности (3.74). Функционал температурной невязки на итерации l запишется как

$$J(\mathbf{E} + \delta\mathbf{E}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (T_{ij} + v_{ij} - T_{ij}^{(0)})^2, \quad (3.118)$$

следовательно, вариации температуры $v_{ij}(\tau)$ определяются из (3.92). Подставляя вариации температуры из (3.92) в (3.117) и считая, что решение задачи определяется членами первого приближения, получаем уравнение для определения β^E_{ij} :

$$-C_i(T_i, \tau) \frac{dT_{ij}}{d\tau} = \left(-\sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} - \sum_{k=1}^N 4T_{ij}^3 \chi_{ikj} \right) (T_{ij}^{(0)} - T_{ij}) - \beta^E_{ij} \xi^E_{ij} \quad (3.119)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i),$$

Определение шага спуска для $Q_i(\tau)$ полностью аналогично:

$$-C_i(T_i, \tau) \frac{dT_{ij}}{d\tau} = \left(\frac{\partial E_i(T_i, \tau)}{\partial T_{ij}} - \sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} - \sum_{k=1}^N 4T_{ij}^3 \chi_{ikj} \right) (T_{ij}^{(0)} - T_{ij}) - \beta_{ij}^Q \xi_{ij}^Q, \quad (3.120)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i),$$

Пусть искомые тепловые проводимости α_{ikj} получили вариации $\delta\alpha_{ikj}$ ($i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N$), которые согласно (3.56) равны

$$\delta\alpha_{ikj} = -\beta_{ij}^Q \xi_{ij}^Q \alpha_{ikj}. \quad (3.121)$$

Тогда температура изменится на некоторую величину $v_{ij}(\tau)$ ($i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M_i$), а вариация температуры $v_{ij}(\tau)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$C_i(T_i, \tau) \frac{dv_{ij}}{d\tau} = -\frac{\partial C_i(T_i, \tau)}{\partial T_{ij}} \frac{dT_{ij}}{d\tau} v_{ij} + \sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} (-v_{ij}) + \sum_{k=1}^N \delta\alpha_{ikj} (T_{kj} - T_{ij}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \chi_{ikj} (-4T_{ij}^3 v_{ij}) + \frac{\partial E_i(T_i, \tau)}{\partial T_{ij}} v_{ij}, \quad (3.122)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i).$$

с начальным условием (3.73) и условием непрерывности (3.74). Функционал температурной невязки на итерации l запишется как

$$J(\mathbf{\alpha}_i + \delta\mathbf{\alpha}_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (T_{ij} + v_{ij} - T_{ij}^{(0)})^2, \quad (3.123)$$

следовательно, вариации температуры $v_{ij}(\tau)$ определяются из (3.92). Подставляя вариации температуры из (3.92) в (3.122) и считая, что решение задачи определяется членами первого приближения, получаем уравнение для определения β_{ij}^Q :

$$-C_i(T_i, \tau) \frac{dT_{ij}}{d\tau} = \left(-\sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} - \sum_{k=1}^N 4T_{ij}^3 \chi_{ikj} \right) (T_{ij}^{(0)} - T_{ij}) -$$

$$-\beta_{ij}^Q \sum_{k=1}^N \xi_{ij}^Q (T_{kj} - T_{ij}), \quad (3.124)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_i).$$

Пусть искомые коэффициенты излучения χ_{ikj} получили вариации $\delta\chi_{ikj}$ ($i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N$), которые согласно (3.56) равны

$$\delta\chi_{ikj} = -\beta_{ij}^Q \xi_{ij}^Q \chi_{ikj}. \quad (3.125)$$

Тогда температура изменится на некоторую величину $v_{ij}(\tau)$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M_i$), а вариация температуры $v_{ij}(\tau)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$C_i(T_i, \tau) \frac{dv_{ij}}{d\tau} = -\frac{\partial C_i(T_i, \tau)}{\partial T_{ij}} \frac{dT_{ij}}{d\tau} v_{ij} + \sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} (-v_{ij}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \chi_{ikj} (-4T_{ij}^3 v_{ij}) + \sum_{k=1}^N \delta\chi_{ikj} (T_{kj} - T_{ij}) + \frac{\partial E_i(T_i, \tau)}{\partial T_{ij}} v_{ij}, \quad (3.126)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, M_i).$$

с начальным условием (3.73) и условием непрерывности (3.74). Функционал температурной невязки на итерации l запишется как

$$J(\chi_i + \delta\chi_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (T_{ij} + v_{ij} - T_{ij}^{(0)})^2, \quad (3.127)$$

следовательно, вариации температуры $v_{ij}(\tau)$ определяются из (3.92). Подставляя вариации температуры из (3.92) в (3.126), получаем уравнение для определения β_{ij}^χ :

$$\begin{aligned} -C_i(T_i, \tau) \frac{dT_{ij}}{d\tau} = & \left(-\sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} - \sum_{k=1}^N 4T_{ij}^3 \chi_{ikj} \right) (T_{ij}^{(0)} - T_{ij}) - \\ & -\beta_{ij}^\chi \sum_{k=1}^N \xi_{ikj}^\chi (T_{kj}^4 - T_{ij}^4), \end{aligned} \quad (3.128)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, M_i).$$

Во всех рассмотренных задачах определения шага спуска температуры T_{ij} являются решением краевой задачи (3.95)-(3.97) на текущей итерации, а производные $dT_{ij}/d\tau$ в уравнениях (3.115), (3.119), (3.120), (3.124), (3.128) выражаются из уравнения (3.95) после его решения относительно температур T_{ij} . Выражая производные $dT_{ij}/d\tau$ из уравнения (3.95), подставляя их в полученные уравнения и решая эти уравнения относительно шага спуска, получаем следующие выражения [264]:

$$\beta_{ij}^C = -\frac{C_i(T_i, \tau)}{\xi_{ij}^C} \times \left[1 + \frac{\left(-\sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} - \sum_{k=1}^N 4T_{ij}^3 \chi_{ikj} \right) (T_{ij}^{(0)} - T_{ij})}{\sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} (T_{kj} - T_{ij}) + \sum_{k=1}^N \chi_{ikj} (T_{kj}^4 - T_{ij}^4) + E_{ij} + Q_{ij}} \right]; \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^E = & \frac{1}{\xi_{ij}^E} \left[\left(-\sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} - \sum_{k=1}^N 4T_{ij}^3 \chi_{ikj} \right) (T_{ij}^{(0)} - T_{ij}) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} (T_{kj} - T_{ij}) + \sum_{k=1}^N \chi_{ikj} (T_{kj}^4 - T_{ij}^4) + E_{ij} + Q_{ij} \right]; \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^Q = & \frac{1}{\xi_{ij}^Q} \left[\left(-\sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} - \sum_{k=1}^N 4T_{ij}^3 \chi_{ikj} \right) (T_{ij}^{(0)} - T_{ij}) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} (T_{kj} - T_{ij}) + \sum_{k=1}^N \chi_{ikj} (T_{kj}^4 - T_{ij}^4) + E_{ij} + Q_{ij} \right]; \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\beta_{ij}^\alpha = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \xi_{ikj}^\alpha (T_{kj} - T_{ij})} \left[\left(-\sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} - \sum_{k=1}^N 4T_{ij}^3 \chi_{ikj} \right) (T_{ij}^{(0)} - T_{ij}) + \right. \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} (T_{kj} - T_{ij}) + \sum_{k=1}^N \chi_{ikj} (T_{kj}^4 - T_{ij}^4) + E_{ij} + Q_{ij}]; \\
\beta_{ikj}^x &= \frac{1}{\sum_{k=1}^N \xi_{ikj}^x (T_{kj} - T_{ij})} \left[\left(-\sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} - \sum_{k=1}^N 4T_{ij}^3 \chi_{ikj} \right) (T_{ij}^{(0)} - T_{ij}) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} (T_{kj} - T_{ij}) + \sum_{k=1}^N \chi_{ikj} (T_{kj}^4 - T_{ij}^4) + E_{ij} + Q_{ij} \right], \tag{3.133}
\end{aligned}$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M_j).$$

Для каждого вектора характеристик C_i , E_i , Q_i или каждой строки искомым матриц коэффициентов α_{ik} , χ_{ik} ($i = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, N$) шаг спуска $\beta = \beta_{ij}$ ($i = 1, \dots, N$) вычисляется NM раз и является индивидуальным. Так как система уравнений (3.95) решается на каждом временном шаге при наличии всех уравнений, временная сетка одинакова для всех узлов: $M_i = M$.

3.5. Единственность решения задач идентификации

Решение задачи одновременного определения всех характеристик C_i , α_{ik} , χ_{ik} , E_i , Q_i неединственно при любом количестве дополнительных измерений. Поэтому предполагается, что все коэффициенты C_i ($i = 1, \dots, N$) известны как наиболее легко оцениваемые экспериментально или теоретически [10]. В этом случае при построении функционала Лагранжа для задачи (3.95)-(3.97) необходимо учесть наличие известной функции теплоемкости C_i в левой части уравнения (3.95), тогда неопределенные множители Лагранжа находятся непосредственно по уравнению (3.85), а теплоемкость появляется в знаменателе под множителями ψ_{ij} в выражениях для градиента функционала. Данная операция равносильна учету теплоемкости в выражении для ψ_{ij} в случае, когда ее точное значение неизвестно и принимается равным значению, идентифицированному на текущей итерации. По этой причине при определении множителей ψ_{ij} по выражению (3.104) полученные выражения градиентов (3.98)-(3.102), (3.120)-(3.122) справедливы и для случая известных теплоемкостей, когда их вариации не учитываются в функционале Лагранжа для задачи (3.95)-(3.97).

Для оставшихся неизвестных коэффициентов условия единственности формулируются в следующих случаях [10]:

1. Если все неизвестные коэффициенты α_{ik} , χ_{ik} , e_{ik} , q_{ik} ($i = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, N$) постоянны, то для единственности решения задачи идентификации необходимо провести M дополнительных измерений ($M = N(N + 1) + N$) в такие моменты времени, для которых

$$\det \mathbf{D} \neq 0, \tag{3.134}$$

где

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \dots & T_k(\tau_1) - T_i(\tau_1) & \dots & T_k^4(\tau_1) - T_i^4(\tau_1) & \dots & \delta_{ri} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & T_k(\tau_j) - T_i(\tau_j) & \dots & T_k^4(\tau_j) - T_i^4(\tau_j) & \dots & \delta_{ri} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\delta_{ri} = \begin{cases} 1, & \text{если } r = N(N+1) + i \\ 0, & \text{если } r \neq N(N+1) + i \end{cases},$$

а номер элементов в матрице произволен, т. е. $1 \leq i \leq N$.

2. Если все характеристики $C_i(T_i, \tau)$, $Q_i(\tau)$, $\alpha_{ik}(T_i, T_k, \tau)$, $\chi_{ik}(\tau)$ ($i = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, N$) математической модели известны, а неизвестными являются только функции $E_i(T_i, \tau)$, то на основании теоремы о неявной функции для однозначного определения вектора $\{E_i\}$ необходимо и достаточно иметь непрерывные измерения температуры в одном из элементов i системы.

Обозначим $\mathbf{x} = \{T_i, \tau\}$, $\mathbf{y} = \{E_i\}$, где $\mathbf{x} \in R^{N+1}$, $\mathbf{y} \in R^N$ ($i = 1, \dots, N$). Считая остальные характеристики модели (3.94) известными, запишем систему уравнений (3.94) в виде $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, где $h: R^{2N+1} \rightarrow R^N$ – функция, отображающая множество R^{2N+1} в множество R^N .

По первой теореме о неявной функции, если [269]:

1. функция h определена на открытом множестве $S \subset R^{2N+1}$;
2. все частные производные функции h порядка $p \geq 0$, а также матрица $\nabla_{\mathbf{y}} h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, существуют и непрерывны на множестве S ;
3. вектор $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \in S$ удовлетворяет системе $h(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 0$, а матрица $\nabla_{\mathbf{y}} h(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ – невырожденная, –

то существуют числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и функция $\varphi: S(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon) \rightarrow S(\bar{\mathbf{y}}, \delta)$ такие, что:

1. все частные производные функции φ порядка $p \geq 0$ существуют и непрерывны на множестве $S(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon)$;
2. $\bar{\mathbf{y}} = \varphi(\bar{\mathbf{x}})$ и $h(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 0$ для всех $\mathbf{x} \in S(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon)$;
3. функция φ единственна в том смысле, что, если $\mathbf{x} \in S(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon)$, $\mathbf{y} \in S(\bar{\mathbf{y}}, \delta)$ и $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, то $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$;
4. если $p \geq 0$, то при $\mathbf{x} \in S(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon)$ справедливо выражение

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}) = - \frac{\nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))}{\nabla_{\mathbf{y}} h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))}. \quad (3.135)$$

Поскольку вектор $\mathbf{y} = \{E_i\}$ однозначно выражается через вектор $\mathbf{x} = \{T_i, \tau\}$ ($i = 1, \dots, N$), для идентификации вектора \mathbf{y} достаточно N известных температур T_i .

При переходе в пространство функций $e_{in}(\tau)$ одной переменной при помощи выражения (3.106) количество N_i^E неизвестных функций зависит от базиса $\{\eta_{in}^E = \eta^E(T_{in})\}$ ($i = 1, \dots, N$, $n = 1, 2, \dots, N_i^E$), по которому раскладываются функции $E_i(T_i, \tau)$. Действие теоремы сохраняется для

функций E_i , но не распространяется на матрицу $\{e_{in}\}$ в части единственности решения обратной задачи. Доказать можно лишь его существование путем рассмотрения прямой задачи, в которой матрица $\{e_{in}\}$ является аргументом искомой функции.

Обозначим $\mathbf{x}_i = \{e_{in}\}$, $\mathbf{y} = \{T_i, \tau\}$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$, $\mathbf{X} \subset R^{NN^E_i}$ – компактное множество; $\mathbf{y} \in R^{N+1}$ ($i = 1, \dots, N$, $n = 1, 2, \dots, N^E_i$). Считая остальные характеристики модели (3.94) известными, запишем систему уравнений (3.94) в виде $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, где $h: R^{N(N^E_i+1)+1} \rightarrow R^N$ – функция, отображающая множество $R^{N(N^E_i+1)+1}$ в множество R^N .

По второй теореме о неявной функции, если [269]:

1. функция h определена на открытом множестве $S \subset R^{N(N^E_i+1)+1}$;
2. все частные производные функции h порядка $p \geq 0$, а также матрица $\nabla_{\mathbf{y}} h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, существуют и непрерывны на множестве S ;
3. для любого $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}$ вектор $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \in S$ удовлетворяет системе $h(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 0$, а матрица $\nabla_{\mathbf{y}} h(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ – невырожденная, – то существуют числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и функция $\varphi: S(\mathbf{X}, \varepsilon) \rightarrow S(\bar{\mathbf{y}}, \delta)$ такие, что:

1. все частные производные функции φ порядка $p \geq 0$ существуют и непрерывны на множестве $S(\bar{\mathbf{x}}, \varepsilon)$;
2. $\bar{\mathbf{y}} = \varphi(\bar{\mathbf{x}})$ и $h(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 0$ для всех $\mathbf{x} \in S(\mathbf{X}, \varepsilon)$;
3. функция φ единственна в том смысле, что, если $\mathbf{x} \in S(\mathbf{X}, \varepsilon)$, $\mathbf{y} \in S(\bar{\mathbf{y}}, \delta)$ и $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, то $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$;
4. если $p \geq 0$, то при $\mathbf{x} \in S(\mathbf{X}, \varepsilon)$ справедливо выражение

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}) = - \frac{\nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))}{\nabla_{\mathbf{y}} h(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))}. \quad (3.136)$$

Поскольку вектор $\mathbf{y} = \{T_i, \tau\}$ однозначно выражается через любой вектор $\mathbf{x}_i = \{e_{in}\}$ ($i = 1, \dots, N$, $n = 1, 2, \dots, N^E_i$), решение системы $h(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = 0$ относительно температур $T_i(\tau)$ единственно, если все вектора \mathbf{x}_i однозначно определены.

Из теорем о неявной функции [269] следует, что однозначно идентифицируется только один из векторов \mathbf{x}_i при условии, что остальные вектора известны.

В случае, если решение обратной задачи существует, но является неустойчивым, применяются методы регуляризации. Неустойчивость решения имеет следствием его возможную безусловность (нарушение корректности решения при наличии малых погрешностей в исходных данных). В силу того, что безусловность выражается сколь угодно сильным отклонением приближенного решения от точного, она является причиной неединственности искомого приближенного решения. Метод регуляризации ориентирован на поиск псевдорешения, нормального

относительно точного решения. Поэтому при условии поиска решения в компактном множестве, ограниченном условиями вариационного принципа отбора, он может быть распространен на класс задач, решение которых существует, но не является единственным. Важно отметить, что это возможно только в случае наличия дополнительного условия отбора псевдорешений из множества, ограниченного точностью задания исходных данных. Иными словами, среди множества псевдорешений обязательно наличие единственного решения, относительно которого определяется нормальное псевдорешение (3.25).

Для физических и технических задач дополнительным условием отбора является физическая значимость решения, а для технических – и возможность реализации искомых характеристик в той или иной конструкции.

Методически возможность решения задач идентификации с неединственным решением обеспечивается вычислением единого шага спуска β_i (3.93) для каждого вектора \mathbf{x}_i в независимости от количества координат этого вектора, в то время как градиент функционала-невязки температуры и его функция ξ_{in} находятся индивидуально для каждой координаты x_{in} из условия достижения минимума функционала. Минимизация функционала является операцией перехода в компактное множество псевдорешений с известной точностью, а вариационный принцип – условием отбора.

Теоремы о неявной функции [269] справедливы и для других характеристик системы (3.94) с соответствующими поправками.

Применительно к тепловым проводимостям α_{ik} , если все характеристики $C_i(T_i, \tau)$, $Q_i(\tau)$, $\chi_{ik}(\tau)$, $E_i(T_i, \tau)$ ($i = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, N$), а также $\alpha_{ik}(T_i, T_k, \tau)$ за исключением $\alpha_{i1}(T_i, T_1, \tau)$ ($i = 1, \dots, N$; $k = 2, \dots, N$), математической модели известны, а неизвестными являются только функции $\alpha_{i1}(T_i, T_1, \tau)$, то на основании первой теоремы о неявной функции [269] для однозначного определения вектора $\mathbf{a}_1 = \{\alpha_{i1}\}$ ($i = 1, \dots, N$) необходимо и достаточно иметь непрерывные измерения температуры в элементах i системы.

Обозначим $\mathbf{x} = \{T_i, \tau\}$, $\mathbf{y} = \{\alpha_{i1}\}$, где $\mathbf{x} \in R^{N+1}$, $\mathbf{y} \in R^N$ ($i = 1, \dots, N$). Считая остальные характеристики модели (3.94) известными, запишем систему уравнений (3.94) в виде $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, где $h: R^{2N+1} \rightarrow R^N$ – функция, отображающая множество R^{2N+1} в множество R^N .

По первой теореме о неявной функции [269], поскольку вектор $\mathbf{y} = \{\alpha_{i1}\}$ однозначно выражается через вектор $\mathbf{x} = \{T_i, \tau\}$ ($i = 1, \dots, N$), для идентификации вектора \mathbf{y} достаточно N известных температур T_i ($i = 1, \dots, N$). Нетрудно убедиться, что данный вывод справедлив для любых векторов-столбцов $\{\alpha_{i1}\}$, $\{\alpha_{i2}\}, \dots, \{\alpha_{iN}\}$ или векторов-строк $\{\alpha_{1i}\}$, $\{\alpha_{2i}\}, \dots, \{\alpha_{Ni}\}$ с учетом $\alpha_{ii} = 0$ ($i = 1, \dots, N$).

Обозначим $\mathbf{x}_i = \{\alpha_{ik}\}$, $\mathbf{y} = \{T_i, \tau\}$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$, $\mathbf{X} \subset R^{(N^2)}$ – компактное множество; $\mathbf{y} \in R^{N+1}$ ($i = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, N$). Считая остальные

характеристики модели (3.94) известными, запишем систему уравнений (3.94) в виде $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, где $h: R^{N(N+1)+1} \rightarrow R^N$ – функция, отображающая множество R^{2N+1} в множество R^N .

По второй теореме о неявной функции [269], поскольку вектор $\mathbf{y} = \{T_i, \tau\}$ однозначно выражается через любой вектор $\mathbf{x}_i = \{\alpha_{in}\}$ ($i = 1, \dots, N$, $n = 1, 2, \dots, N$), решение системы $h(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = 0$ относительно температур $T_i(\tau)$ единственно, если все вектора \mathbf{x}_i однозначно определены.

Из теорем о неявной функции [269] следует, что однозначно идентифицируется только одна вектор-строка (вектор-столбец) матрицы тепловых проводимостей при условии, что остальные строки (столбцы) известны.

Задача определения всех строк (столбцов) матрицы α_{ik} ($i = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, N$) имеет неединственное решение и решается приближенно с использованием вариационного принципа и методической возможности вычислять единый шаг спуска для каждого искомого вектора. Условием усиления вариационного принципа является использование матрицы экспериментальных температур $T_{ij}^{(0)}$ ($i = 1, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, M$) для идентификации одной вектора-строки i матрицы неизвестных коэффициентов.

3.6. Параметризация искомых функций при наличии температурной зависимости

Если явными аргументами искомых функций, например, $E_i(T_i, \tau)$ ($i = 1, \dots, N$) являются как время, так и температура, функции раскладываются в ряд (3.106) по базису $\{\eta_{in}^E(T_i)\}$ ($n = 1, 2, \dots, N^E_i$), в качестве которого рекомендуется использовать полиномиальные кубические В-сплайны. Количество базисных функций N^E_i определяется временной сеткой температуры на отрезке $[T_0, T_S]$, где $T_0 = T_{j-1} = T(\tau_{j-1})$, $T_S = T_j = T(\tau_j)$ ($j = 1, \dots, M$). Если характер искомых функций не известен, строится равномерная временная сетка температуры $\{T_s = T_0 + sH\}$ ($s = 0, 1, \dots, S$) с шагом $H = (T_S - T_0)/S$ и дополняется узлами [6]

$$T_{-3} = T_0 - 3H, T_{-2} = T_0 - 2H, T_{-1} = T_0 - H;$$

$$T_{S+1} = T_0 + (S+1)H, T_{S+2} = T_0 + (S+2)H, T_{S+3} = T_0 + (S+3)H.$$

Базисная система кубических полиномов $\{B_s\}$ ($s = -1, 0, \dots, S+1$) вводится в виде следующих функций [6]:

$$B_s(\bar{T}) = B_0(\bar{T} - sH), s = -1, 0, \dots, S+1;$$

$$B_0(\bar{T}) = \frac{1}{6H^3} [(\bar{T} - 2H)_+^3 - 4(\bar{T} - H)_+^3 + 6(\bar{T})_+^3 - 4(\bar{T} + H)_+^3 + 4(\bar{T} + 2H)_+^3], \quad (3.137)$$

где [6]

$$(\bar{T} - g)_+^3 = \begin{cases} (\bar{T} - g)_+^3 & \text{при } \bar{T} \geq g, \\ 0 & \text{при } \bar{T} < g \end{cases}$$

Тогда ряд (3.106) запишется в виде

$$E_i(T_i, \tau) = \sum_{n=1}^{N_i^E} e_{in}(\tau) \eta_{in}^E(T) = \sum_{s=-1}^{S+2} e_{is}(\tau) B_{is}(T), \quad (3.138)$$

где $n = s+2$, $N_i^E = S+4$, $T = T_i$, $\eta_{in}^E = B_{i,n-3}$.

Базисная система полиномов (3.137) построена без использования краевых условий. Если имеется информация о поведении искомой функции $E_i(T_i, \tau)$, на одной или обеих границах отрезка $[T_0, T_S]$ могут быть заданы граничные условия, что уменьшает количество базисных функций и улучшает обусловленность задачи. Например, могут быть заданы так называемые «естественные» граничные условия [6]

$$\left[\frac{\partial E^2(T, \tau)}{\partial T^2} \right]_{T_0} = \left[\frac{\partial E^2(T, \tau)}{\partial T^2} \right]_{T_S} = 0.$$

В этом случае, базисная система функций $\{\varphi_s\}$ ($s = 0, 1, \dots, S$) имеет вид [6]

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi(T_0) = B_0 + 2B_{-1}, \\ \varphi_1 &= B_1 - B_{-1}, \\ \varphi_s &= B_s \quad (s = 2, 3, \dots, S-2), \\ \varphi_{S-1} &= B_{S-1} - B_{S+1}, \\ \varphi_S &= B_S + 2B_{S+1}. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Тогда ряд (3.106) запишется в виде

$$E_i(T_i, \tau) = \sum_{n=1}^{N_i^E} e_{in}(\tau) \eta_{in}^E(T) = \sum_{s=0}^S e_{is}(\tau) \varphi_{is}(T), \quad (3.140)$$

где $n = s+1$, $N_i^E = S+1$, $T = T_i$, $\eta_{in}^E = \varphi_{i,n-2}$.

В наиболее сложном случае идентификации функций $\alpha_{ik}(T_i, T_k, \tau)$, зависящих от температур узлов i и k , функции раскладываются по базису $\{\eta_{ikn}^\alpha = \eta^\alpha(T_{in}, T_{kn})\}$, ($n = 1, \dots, N_{ik}^\alpha$). Введя общую временную сетку для температур T_i, T_k , определим базисные функции равными

$$\begin{aligned} \eta_{ikn}^\alpha &= \eta_{in}^\alpha \eta_{kn}^\alpha \\ (i = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, N; n = 1, 2, \dots, N_{ik}^\alpha). \end{aligned} \quad (3.141)$$

Количество S участков аппроксимации может значительно влиять на качество решения, поэтому число S нужно выбирать согласованно с характером восстанавливаемой функции. Если S нельзя указать заранее, целесообразно задать небольшое число участков и затем последовательно увеличивать S на единицу, пока не будет достигнут уровень погрешности исходных данных в соответствии с условием (3.66) [6].

Если искомые функции зависят только от температур узлов $T_i(\tau), T_k(\tau)$ и имеют вид $\alpha_{ik}(T_i, T_k)$, не обязательно раскладывать их в ряды по известному базису. Поскольку функции идентифицируются в определенном тепловом

процессе, достаточно установить временную зависимость $\alpha_{ik}(\tau)$ в этом процессе, чтобы найти функцию $\alpha_{ik}(T_i, T_k)$ сопоставлением функций $\alpha_{ik}(\tau)$, $T_i(\tau)$, $T_k(\tau)$ на одной временной сетке.

3.7. Выводы по главе 3

1. Устойчивость решения краевых задач теплообмена полностью определяется характером функций в правой части уравнений системы математической модели с сосредоточенными параметрами.

2. Задача идентификации N^2 неизвестных функций матрицы тепловых связей математической тепловой модели с сосредоточенными параметрами, состоящей из N обыкновенных дифференциальных уравнений, в общем виде имеет неединственное решение и может быть неустойчивой из-за плохой обусловленности.

3. В случае неустойчивого решения использование итерационной регуляризации позволяет получить условно устойчивое решение, используя экспериментальную температуру одного узла для идентификации одной координаты искомого вектора.

4. Решение задачи в общем виде может находиться приближенно с использованием экспериментальной температуры одного узла для идентификации одного столбца (строки) матрицы, что обеспечивается методической возможностью расчета единого шага спуска для каждого искомого вектора. В этом случае требуется усиление вариационного принципа дополнительными условиями – экспериментальная температура одного узла в M точках временной сетки для идентификации одной координаты искомого вектора.

5. Для идентификации тепловых математических моделей с сосредоточенными параметрами построены итерационные алгоритмы регуляризации решения на основе сглаживающего функционала и функционала невязки температуры.

6. Анализ метода итерационной регуляризации на основе функционала температурной невязки, проведенный для гипотетической теплофизической системы, позволил получить аналитические выражения для вычисления неопределенных множителей Лагранжа, входящих в выражения градиента функционала, и шага спуска. Приведенный алгоритм обобщен для технических систем, характерных для космических аппаратов.

7. Алгоритм идентификации методом итерационной регуляризации на основе сглаживающего функционала (вариационный метод Тихонова) требует дальнейшего исследования в части определения безразмерного параметра регуляризации, в том числе, применительно к техническим системам.

4. ИТЕРАЦИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА

4.1. Возмущение правой части в модифицированном вариационном методе итерационной регуляризации

Рассмотрим редуцированный случай математической модели космической системы (3.94) в виде (2.22), считая проводимости кондуктивных (конвективных) тепловых связей неизвестными. Остальные параметры модели предполагаются заданными, поэтому, исключив их из правой части уравнений, мы не нарушим общего характера задачи идентификации исследуемой системы.

Если неизвестными являются связи одного (для определенности первого) узла, то задача их идентификации является математически корректной (здесь и далее абсолютные проводимости обозначаются α_{ik}):

$$\left\{ \alpha_{i1} = \frac{1}{(T_i - T_1)} \left[\sum_{q=1}^{N_q} Q_{iq} - C_i \frac{\partial T_i}{\partial \tau} - \sum_{k=2}^N (T_i - T_k) \alpha_{ik} \right] \right\}_{i=2,3,\dots,N} . \quad (4.1)$$

Для ее решения в момент времени τ формально необходимы $2N$ измерений: одна температура $T_i(\tau)$ и одна производная по времени $dT_i(\tau)/d\tau$ для узла i ($i = 1, 2, \dots, N$). Но поскольку измерение производной температуры по времени является косвенным, так как она приближенно рассчитывается по временной функции температуры в виде

$$\frac{dT_i}{d\tau} \approx \frac{\Delta T_i}{\Delta \tau} = \frac{T_{ij} - T_{i,j-1}}{\tau_j - \tau_{j-1}} \quad (j = 1, \dots, M), \quad (4.2)$$

для идентификации вектора размерностью N достаточно N прямых измерений температуры в момент времени τ .

В общем случае идентификации связей α_{ik} ($i = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, N$) всех N узлов системы задача решается итерационно при наличии первого приближения:

$$\left\{ (T_i - T_1) \alpha_{i1}^{(l)} = \sum_{q=1}^{N_q} Q_{iq} - C_i \frac{dT_i}{d\tau} - \sum_{k=2}^N (T_i - T_k) \alpha_{ik}^{(l-1)} \right\}_{i=2,3,\dots,N} ,$$

$$\left\{ (T_i - T_2) \alpha_{i2}^{(l)} = \sum_{q=1}^{N_q} Q_{iq} - C_i \frac{dT_i}{d\tau} - (T_i - T_1) \alpha_{i1}^{(l-1)} - \sum_{k=3}^N (T_i - T_k) \alpha_{ik}^{(l-1)} \right\}_{i=1,3,\dots,N} ,$$

...

$$\left\{ (T_i - T_n) \alpha_{in}^{(l)} = \sum_{q=1}^{N_q} Q_{iq} - C_i \frac{dT_i}{d\tau} - \sum_{k=1}^{n-1} (T_i - T_k) \alpha_{ik}^{(l-1)} - \sum_{k=n+1}^N (T_i - T_k) \alpha_{ik}^{(l-1)} \right\}_{i=1,2,n-1,n+1,\dots,N} ,$$

...

$$\left\{ (T_i - T_N) \alpha_{iN}^{(l)} = \sum_{q=1}^{N_i^Q} Q_{iq} - C_i \frac{dT_i}{d\tau} - \sum_{k=1}^{N-1} (T_i - T_k) \alpha_{ik}^{(l-1)} \right\}_{i=2,3,\dots,N-1} \quad (4.3)$$

Поскольку система (4.3) справедлива для определенного отрезка времени $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ ($j = 1, \dots, M$), необходимое количество измерений на этом отрезке времени сохраняется – температура и производная по времени для каждого узла, – и задача тем более некорректна, чем большее число узлов имеют неопределенные связи. Выразив тепловые проводимости в левой части, получим итерационный процесс, аналогичный системе (3.23):

$$\left\{ \alpha_{i1}^{(l)} = \frac{1}{(T_i - T_1)} \left[\sum_{q=1}^{N_i^Q} Q_{iq} - C_i \frac{dT_i}{d\tau} - \sum_{k=2}^N (T_i - T_k) \alpha_{ik}^{(l-1)} \right] \right\}_{i=2,3,\dots,N},$$

$$\left\{ \alpha_{i2}^{(l)} = \frac{1}{(T_i - T_2)} \left[\sum_{q=1}^{N_i^Q} Q_{iq} - C_i \frac{dT_i}{d\tau} - (T_i - T_1) \alpha_{i1}^{(l-1)} - \sum_{k=3}^N (T_i - T_k) \alpha_{ik}^{(l-1)} \right] \right\}_{i=1,3,\dots,N},$$

...

$$\left\{ \alpha_{in}^{(l)} = \frac{1}{(T_i - T_n)} \left[\sum_{q=1}^{N_i^Q} Q_{iq} - C_i \frac{dT_i}{d\tau} - \sum_{k=1}^{n-1} (T_i - T_k) \alpha_{ik}^{(l-1)} - \sum_{k=n+1}^N (T_i - T_k) \alpha_{ik}^{(l-1)} \right] \right\}_{i=1,2,n-1,n+1,\dots,N},$$

...

$$\left\{ \alpha_{iN}^{(l)} = \frac{1}{(T_i - T_N)} \left[\sum_{q=1}^{N_i^Q} Q_{iq} - C_i \frac{dT_i}{d\tau} - \sum_{k=1}^{N-1} (T_i - T_k) \alpha_{ik}^{(l-1)} \right] \right\}_{i=2,3,\dots,N-1}. \quad (4.4)$$

Обозначая левые части уравнений системы (4.4) компонентами векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \{ \alpha_{i1} \}_{i=1,2,\dots,N}, \alpha_{11} = 0, \\ \mathbf{a}_2 &= \{ \alpha_{i2} \}_{i=1,2,\dots,N}, \alpha_{22} = 0, \\ &\dots \\ \mathbf{a}_n &= \{ \alpha_{in} \}_{i=1,2,\dots,N}, \alpha_{nn} = 0, \\ &\dots \\ \mathbf{a}_N &= \{ \alpha_{iN} \}_{i=1,2,\dots,N}, \alpha_{NN} = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

а правые части – компонентами векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \{ u_{i1} \}_{i=1,2,\dots,N}, u_{11} = 0, \\ \mathbf{u}_2 &= \{ u_{i2} \}_{i=1,2,\dots,N}, u_{22} = 0, \\ &\dots \\ \mathbf{u}_n &= \{ u_{in} \}_{i=1,2,\dots,N}, u_{nn} = 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{u}_N = \{u_{iN}\}_{i=1,2,\dots,N}, u_{NN} = 0,$$

перепишем систему (4.4) в упрощенной форме

$$\{\alpha_{i1}^{(l)} = u_{i1}^{(l)}\}_{i=2,3,\dots,N}, \alpha_{11} = 0,$$

$$\{\alpha_{i2}^{(l)} = u_{i2}^{(l)}\}_{i=1,3,\dots,N}, \alpha_{22} = 0,$$

...

$$\{\alpha_{in}^{(l)} = u_{in}^{(l)}\}_{i=1,2,\dots,N}, \alpha_{nn} = 0,$$

...

$$\{\alpha_{iN}^{(l)} = u_{iN}^{(l)}\}_{i=1,2,\dots,N-1}, \alpha_{NN}^{(l)} = 0,$$

(4.7)

соответствующей векторной записи

$$\{\mathbf{E}\mathbf{a}_n = \mathbf{u}_n\}_{n=1,2,\dots,N}. \quad (4.8)$$

Каждое из уравнений системы (4.8) аналогично уравнению (3.24), в котором для простоты исключен индекс n . Поэтому метод итерационной регуляризации на основе сглаживающего функционала, изложенный в разделе 4.4 применительно к уравнению (3.24), справедлив и для уравнений системы (4.8).

Суть модифицированного вариационного метода итерационной регуляризации 4.4 заключается в последовательном приближении к целевой итерации m уточнением решения на итерации l с помощью минимизации сглаживающего функционала (3.35):

$$M(\mathbf{a}^\gamma, \mathbf{u}^{(l)}, \gamma) = \sum_{k=1}^N (\alpha_k^\gamma - u_k^{(l)})^2 + \gamma \sum_{k=1}^N (\alpha_k^\gamma - \alpha_k^{(m)})^2, \quad (4.9)$$

Из условия минимума (3.36) следует

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial M(\mathbf{a}^\gamma, \mathbf{u}^{(l)}, \gamma)}{\partial \alpha_i^\gamma} = 0 \right\}_{i=1,2,\dots,N} \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2|\alpha_i^\gamma - u_i^{(l)}| + 2\gamma|\alpha_i^\gamma - \alpha_i^{(m)}| = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow |\alpha_i^\gamma - u_i^{(l)}| + |\gamma\alpha_i^\gamma - \gamma\alpha_i^{(m)}| = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \alpha_i^\gamma(\gamma \pm 1) \mp u_i^{(l)} - \gamma\alpha_i^{(m)} = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \alpha_i^{(m)} = \frac{1}{\gamma} [\alpha_i^\gamma(\gamma \pm 1) \mp u_i^{(l)}]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Поскольку $\alpha_i^\gamma = \alpha_i^{(l)}$,

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(m)} &= \frac{1}{\gamma} [\alpha_i^{(l)}(\gamma \pm 1) \mp u_i^{(l)}] = \frac{1}{\gamma} [\gamma\alpha_i^{(l)} \pm \alpha_i^{(l)} \mp u_i^{(l)}] = \\ &= \frac{1}{\gamma} [\gamma\alpha_i^{(l)} \pm u_i^{(l)} \mp u_i^{(l)}] = \alpha_i^{(l)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

при любом параметре регуляризации, т. е. правые части $u_i^{(l)}$ системы не возмущены на итерации l . В то же время, уравнения системы (4.4) возмущены относительно итерации $(l-1)$, поэтому для расчета возмущения правой части на итерации l можно использовать значения проводимостей, вычисленные на предыдущей итерации $(l-1)$, заменив в невязке (первое слагаемое) функционала (4.9) правую часть $u_k^{(l)}$ на $u_k^{(l-1)}$. Тогда правая часть каждой подсистемы системы (4.4) изменится на

$$\Delta u_i^{(l)} = u_i^{(l)} - u_i^{(l-1)} = \alpha_i^{(l)} - \alpha_i^{(l-1)} = \Delta \alpha_i^{(l)}, \quad (4.12)$$

а регуляризованное решение будет равно

$$\alpha_i^{(m)} = \frac{1}{\gamma} \left[\gamma \alpha_i^{(l)} \pm \Delta u_i^{(l)} \right] = \alpha_i^{(l)} \pm \frac{\Delta u_i^{(l)}}{\gamma} = \alpha_i^{(l)} - \beta \Delta u_i^{(l)}, \quad \beta = \pm \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad (4.13)$$

где отрицательный знак выбирается из условия сходимости итерационного процесса к методу простых итераций при отсутствии регуляризации ($\gamma = 1$). Отсюда следует, что параметр регуляризации $\gamma > 0$ не может быть сколь угодно мал, так как в пределе

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \alpha_i^{(m)} = \pm \infty. \quad (4.14)$$

Поскольку матрица в левой части (4.8) единичная (является симметричной и неотрицательно определенной), параметр регуляризации может быть найден согласно 4.5 в ослабленной квазиоптимальной форме из условия (3.42):

$$\begin{aligned} \left\| \gamma \frac{d\mathbf{a}^\gamma}{d\gamma} \right\|_{\mathbb{F}_a} &= \left\| \gamma \frac{d\mathbf{a}^{(l)}}{d\gamma} \right\| = \left[\sum_{i=1}^N \left(\gamma \frac{d\alpha_i^{(l)}}{d\gamma} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[\sum_{i=1}^N \left(\gamma \frac{d}{d\gamma} \left(\alpha_i^{(m)} + \frac{\Delta u_i^{(l)}}{\gamma} \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^N \left(\gamma \frac{\Delta u_i^{(l)}}{\gamma^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\Delta u_i^{(l)}}{\gamma} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\gamma} \left[\sum_{i=1}^N (\Delta u_i^{(l)})^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

Из условия минимума

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\| \gamma \frac{d\mathbf{a}^\gamma}{d\gamma} \right\|_{\mathbb{F}_a} &= 0 \Rightarrow \\ -\frac{1}{\gamma^2} \left[\sum_{i=1}^N (\Delta u_i^{(l)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} &= 0 \Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma^2} = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

что означает равенство

$$\alpha_i^{(m)} = \alpha_i^{(l)}. \quad (4.17)$$

Следовательно, возмущенной правой части системы (4.8) соответствует бесконечно большой параметр регуляризации в ослабленной

квазиоптимальной форме, при котором условие регуляризации формулируется с учетом (3.34), (4.17) в виде следующего уравнения:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^N (\alpha_i^{(l)} - u_i^{(l)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \delta_1 &\Rightarrow \sum_{i=1}^N (\alpha_i^{(l)} - u_i^{(l)})^2 = \delta_1^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \left(\alpha_i^{(m)} \pm \frac{\Delta u_i^{(l)}}{\gamma} - u_i^{(l)} \right)^2 = \delta_1^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^N (\Delta u_i^{(m)})^2 = \delta_1^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

В силу (4.11) и (4.17) на каждой итерации (l) для параметра регуляризации в ослабленной квазиоптимальной форме принимается гипотеза о достижении нормального решения $\mathbf{a}^{(m)}$. Поскольку решение ищется в классе векторов, удовлетворяющих неравенству (3.32), критерием точности итерационного процесса является выполнение условия

$$\sum_{i=1}^N (\Delta u_i^{(m)})^2 \leq \delta_1^2. \quad (4.19)$$

Таким образом, возмущенные правые части должны сходиться к нормальному решению с точностью задания исходных данных, а значение параметра регуляризации зависит от итерации – при выполнении условия (4.19) параметр регуляризации максимален, а в пределе бесконечен. Если итерационный процесс расходится при выполнении условия (4.19), выбранные исходные данные (начальные приближения проводимостей, температуры и производные температур по времени) не обеспечивают устойчивого решения. В этом случае необходимо вычисление конечного значения параметра регуляризации на каждой итерации.

Простейший способ определения параметра итерационной регуляризации – считать его равным номеру итерации:

$$\gamma = l \quad (l = 1, 2, \dots, m). \quad (4.20)$$

Применение этого способа проиллюстрируем на примере математической модели космического аппарата (2.70). Согласно (4.4) с учетом (2.77) итерационный процесс идентификации внутренних тепловых связей без регуляризации в упрощенной форме имеет вид следующей системы:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{12}^{(l)} &= \frac{1}{T_1 - T_2} \left[m_2 c_2 \frac{dT_2}{d\tau} + (T_2 - T_3) \alpha_{23}^{(l-1)} \right], \\ \alpha_{13}^{(l)} &= \frac{1}{T_1 - T_3} \left[Q_{s.3} - F_3 \sigma \varepsilon_3 (T_3^4 - T_R^4) - m_3 c_3 \frac{dT_3}{d\tau} - (T_3 - T_2) \alpha_{23}^{(l-1)} \right], \\ \alpha_{14}^{(l)} &= \frac{m_4 c_4}{T_1 - T_4} \frac{dT_4}{d\tau}, \\ \alpha_{23}^{(l)} &= \frac{1}{T_3 - T_2} \left[m_2 c_2 \frac{dT_2}{d\tau} + (T_2 - T_1) \alpha_{12}^{(l-1)} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (4.21)$$

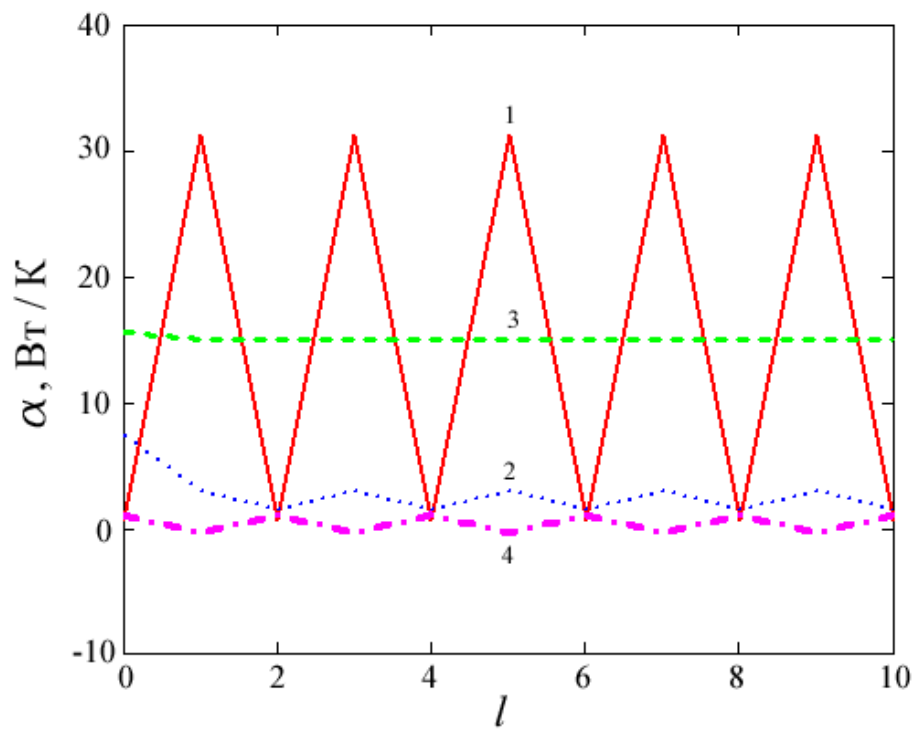
Регуляризация итерационного процесса (4.21) достигается вычислением на текущей итерации l возмущения $\Delta\alpha_{23}$ и получения регуляризованного решения в виде (4.13):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{12}^{(l)} &= \frac{1}{T_1 - T_2} \left[m_2 c_2 \frac{dT_2}{d\tau} + (T_2 - T_3) \alpha_{23}^{(l-1)} \right], \\ \alpha_{13}^{(l)} &= \frac{1}{T_1 - T_3} \left[Q_{s,3} - F_3 \sigma \varepsilon_3 (T_3^4 - T_R^4) - m_3 c_3 \frac{dT_3}{d\tau} - (T_3 - T_2) \alpha_{23}^{(l-1)} \right], \\ \alpha_{14}^{(l)} &= \frac{m_4 c_4}{T_1 - T_4} \frac{dT_4}{d\tau}, \\ \left. \begin{aligned} \alpha_{23}^{(l)} &= \frac{1}{T_3 - T_2} \left[m_2 c_2 \frac{dT_2}{d\tau} + (T_2 - T_1) \alpha_{12}^{(l-1)} \right], \\ \Delta\alpha_{23}^{(l)} &= \alpha_{23}^{(l)} - \alpha_{23}^{(l-1)}, \\ \alpha_{23}^{(m)} &= \alpha_{23}^{(l+1)} = \alpha_{23}^{(l)} - \beta \Delta\alpha_{23}^{(l)}, \\ \beta &= \pm\gamma \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

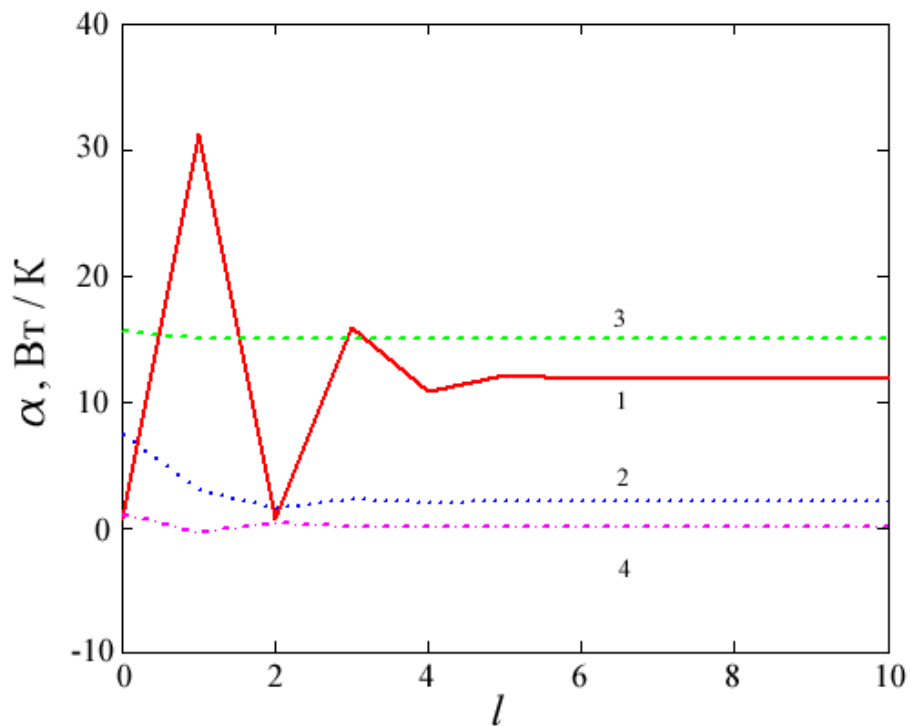
где $\alpha_{23}^{(m)} = \alpha_{23}^{(l+1)}$ – регуляризованное значение коэффициента α_{23} на итерации l , определяющее исходное значение этого коэффициента на следующей итерации ($l+1$); $\Delta\alpha_{23}$ – невязка возмущенной и невозмущенной правой части уравнения для коэффициента α_{24} . Результаты применения метода регуляризации к данной математической модели показаны на рисунке 4.1, невязка $\Delta\alpha_{23}$ – на рисунке 4.2.

Нерегуляризованное решение имеет осциллирующий характер для всех коэффициентов модели, за исключением α_{14} , который выражается только через температуры и производную температуры по времени на данном временном шаге. Применение параметра регуляризации $\gamma = l$ позволяет остановить колебания решения за шесть итераций и получить постоянные значения коэффициентов.

Скорость демпфирования колебаний решения зависит от параметра γ , который в является функцией $\gamma = \gamma(l)$ и может увеличивать или уменьшать количество итераций, необходимое для выполнения условия регуляризации (4.19), а также оказывать влияние на конечные значения искомым коэффициентов.



а – без итерационной регуляризации



б – с итерационной регуляризацией ($\gamma = l$)

1 – α_{12} , 2 – α_{13} , 3 – α_{14} , 4 – α_{23} ; начальные приближения $\alpha_{12}^{(0)} = 0,57$ Вт/К, $\alpha_{13}^{(0)} = 7,41$ Вт/К, $\alpha_{14}^{(0)} = 15,5$ Вт/К, $\alpha_{23}^{(0)} = 1,00$ Вт/К; температуры на временном шаге $T_1 = 273+20$ К, $T_2 = 273+15$ К, $T_3 = 273-90$ К, $T_4 = 273-9$ К; производные на временном шаге $dT_1/d\tau = 0,1$ К/Вт, $dT_2/d\tau = 0,001$ К/Вт, $dT_3/d\tau = -0,02$ К/Вт, $dT_4/d\tau = 0,01$ К/Вт

Рисунок 4.1 – Результаты идентификации коэффициентов математической модели

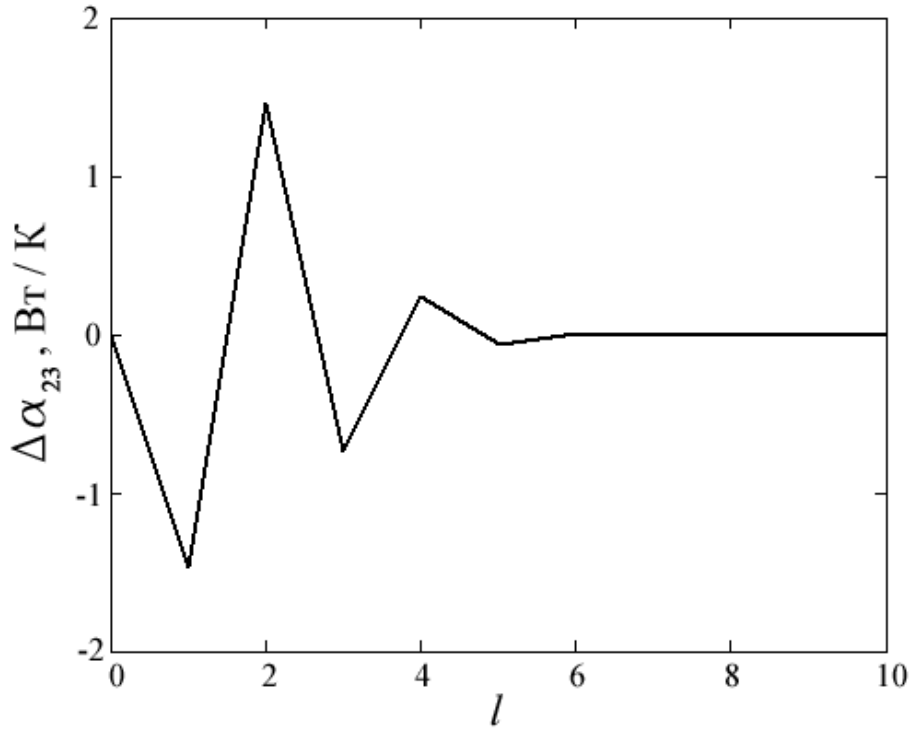


Рисунок 4.2 – Невязка возмущенной и невозмущенной правой части уравнения для коэффициента α_{23}

В полной форме записи система (4.4) применительно к математической модели (2.70) выглядит следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_{21}^{(l)} &= \frac{1}{T_2 - T_1} \left[-C_2 \frac{dT_2}{d\tau} - \alpha_{23}^{(l-1)} (T_2 - T_3) \right], \\
 \alpha_{31}^{(l)} &= \frac{1}{T_3 - T_1} \left[Q_{s.3} - F_3 \sigma \varepsilon_3 (T_3^4 - T_R^4) - C_3 \frac{dT_3}{d\tau} - \alpha_{32}^{(l-1)} (T_3 - T_2) \right], \\
 \alpha_{41}^{(l)} &= \frac{1}{T_4 - T_1} \left[-C_4 \frac{dT_4}{d\tau} \right]
 \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_{12}^{(l)} &= \frac{1}{T_1 - T_2} [Q_{e.1} + Q_{h.1} + Q_{s.1} - F_1 \sigma \varepsilon_1 (T_1^4 - T_R^4) - C_1 \frac{dT_1}{d\tau} - \\
 &\quad - \alpha_{13}^{(l-1)} (T_1 - T_3) - \alpha_{14}^{(l-1)} (T_1 - T_4)], \\
 \alpha_{32}^{(l)} &= \frac{1}{T_3 - T_2} \left[Q_{s.3} - F_3 \sigma \varepsilon_3 (T_3^4 - T_R^4) - C_3 \frac{dT_3}{d\tau} - \alpha_{31}^{(l-1)} (T_3 - T_1) \right]
 \end{aligned} \right\}, \tag{4.23}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_{13}^{(l)} &= \frac{1}{T_1 - T_3} [Q_{e.1} + Q_{h.1} + Q_{s.1} - F_1 \sigma \varepsilon_1 (T_1^4 - T_R^4) - C_1 \frac{dT_1}{d\tau} - \\
 &\quad - \alpha_{12}^{(l-1)} (T_1 - T_2) - \alpha_{14}^{(l-1)} (T_1 - T_4)], \\
 \alpha_{23}^{(l)} &= \frac{1}{T_2 - T_3} \left[-\alpha_{21}^{(l-1)} (T_2 - T_1) - C_2 \frac{dT_2}{d\tau} \right]
 \end{aligned} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{14}^{(l)} = \frac{1}{T_1 - T_4} [Q_{e.1} + Q_{h.1} + Q_{s.1} - F_1 \sigma \varepsilon_1 (T_1^4 - T_R^4) - C_1 \frac{dT_1}{d\tau} - \\ - \alpha_{13}^{(l-1)} (T_1 - T_3) - \alpha_{12}^{(l-1)} (T_1 - T_2)] \end{array} \right\}.$$

Формально регуляризация выполняется для всех коэффициентов, но для тех из них, которые имеют $\Delta\alpha_{in} = 0$, регуляризованное и нерегуляризованное решения будут равны между собой $\alpha_{in}^{(m)} = \alpha_{in}^{(l)}$:

$$\left\{ \left\{ \Delta\alpha_{in}^{(l)} = \alpha_{in}^{(l)} - \alpha_{in}^{(l-1)} \right\}_{i=1,2,\dots,N} \right\} \Rightarrow \left\{ \alpha_{in}^{(m)} = \alpha_{in}^{(l)} - \beta \Delta\alpha_{in}^{(l)} \right\}_{i=1,2,\dots,N} \Big|_{n=1,2,\dots,N}. \quad (4.24)$$

Каждый из искомых коэффициентов α_{in} входит в исходную систему дважды – в уравнение i в виде α_{in} и в уравнение n в виде α_{ni} . В то же время, из физического смысла $\alpha_{in} = \alpha_{ni}$. Отбор коэффициентов α_{in} , α_{ni} осуществляется по двум дополнительным условиям. Во-первых, искомый коэффициент должен иметь физический и технический смысл. Во-вторых, искомый коэффициент должен обеспечивать наилучшую сходимость итерационного процесса. Первое условие проверяется по принадлежности коэффициентов допустимым диапазонам значений. Для проверки второго условия используются функции чувствительности расчетных температур узлов к изменению искомых коэффициентов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_i^{(l)} = \max \left(\left| \frac{\Delta T_i^{(l)}}{\Delta \alpha_{in}^{(l)}} \right|, \left| \frac{\Delta T_i^{(l)}}{\Delta \alpha_{ni}^{(l)}} \right| \right), \\ \theta_n^{(l)} = \max \left(\left| \frac{\Delta T_n^{(l)}}{\Delta \alpha_{in}^{(l)}} \right|, \left| \frac{\Delta T_n^{(l)}}{\Delta \alpha_{ni}^{(l)}} \right| \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \Rightarrow \left| \Delta \alpha_{in}^{(l)} \right| = \min \left(\left| \Delta \alpha_{in}^{(l)} \right|, \left| \Delta \alpha_{ni}^{(l)} \right| \right) = \left| \Delta \alpha_{ni}^{(l)} \right|. \quad (4.25)$$

Данные функции имеют максимум при одном и том же минимальном значении знаменателя, поэтому

$$\alpha_{in}^{(l)} = \arg \min \left(\left| \Delta \alpha_{in}^{(l)} \right|, \left| \Delta \alpha_{ni}^{(l)} \right| \right) = \alpha_{ni}^{(l)}.$$

При наличии временной зависимости искомых проводимостей решение системы (4.4) и отбор решений производятся на каждом временном отрезке $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ ($j = 1, \dots, M$):

$$\alpha_{inj}^{(l)} = \arg \min \left(\left| \Delta \alpha_{inj}^{(l)} \right|, \left| \Delta \alpha_{nij}^{(l)} \right| \right) = \alpha_{nij}^{(l)}. \quad (4.26)$$

Верхний предел функций (4.25) – бесконечность – соответствует нулевому изменению проводимостей, однако, это изменение не должно быть вызвано сохранением значения проводимости с предыдущей итерации из-за нарушения границ допустимого диапазона.

Ключевым вопросом, который необходимо решить для эффективного применения итерационного метода на основе сглаживающего функционала, является определение параметра регуляризации $\beta = \pm \gamma$, $\gamma > 0$.

4.2. Комбинированная методика минимизации сглаживающего функционала и функционала невязки температуры

Рассмотрим задачу идентификации тепловых связей математической модели (3.100) в редуцированном виде (2.22):

$$C_i \frac{dT_i}{d\tau} = \sum_{q=1}^{N^Q} Q_{iq} + \sum_{k=1}^N \alpha_{ik}(\tau)(T_k - T_i) \quad (i=1, \dots, N). \quad (4.27)$$

Здесь α_{ik} имеют смысл абсолютных тепловых проводимостей, которые явно зависят от времени, а тепловые потоки Q_{ij} и абсолютные теплоемкости C_i считаются известными.

Коэффициенты α_{ik} являются компонентами матрицы \mathbf{A} , каждая строка i ($i=1, \dots, N$) которой представляется вектором $\mathbf{a}_i = \{\alpha_{ik}\}$ ($k=1, \dots, N$). Температуры $T_i(\tau)$ являются координатами вектора $\mathbf{z} = \{T_i\}$, представляющего собой непрерывное решение прямой задачи (4.27), которое на итерации l обратной задачи табулируется M значениями температуры в моменты времени $\tau_1 \leq \tau_j \leq \tau_M$:

$$T_i^{(l)}(\tau_j) = T_{ij}^{(l)} \quad (j=1, 2, \dots, M). \quad (4.28)$$

По первой теореме о неявной функции [269] для однозначного определения вектора \mathbf{a}_i необходимо и достаточно иметь непрерывные измерения температуры в одном из элементов i системы, если остальные коэффициенты известны (предположение об этом принимается при идентификации каждого из векторов \mathbf{a}_i). Измеренная температура $T_i^{(0)}(\tau)$ табулируется M значениями в моменты времени $\tau_1 \leq \tau_j \leq \tau_M$:

$$T_i^{(0)}(\tau_j) = T_{ij}^{(0)} \quad (j=1, 2, \dots, M). \quad (4.29)$$

Напомним, что временная сетка одинакова для всех узлов ($M_i = M$), так как система уравнений (4.27) решается на каждом временном шаге при наличии всех уравнений.

На итерации l функционал температурной невязки выражается квадратом нормы разности вектора температур $\mathbf{z} = \{T_i\}$, являющихся решением прямой задачи (4.27) для текущей матрицы коэффициентов \mathbf{A} , и известного вектора экспериментальных температур $\mathbf{z}^{(0)} = \{T_i^{(0)}\}$:

$$J_i^{(l)} = J(\mathbf{a}_i^{(l)}) = \sum_{j=1}^M (T_{ij}^{(l)} - T_{ij}^{(0)})^2 \quad (i=1, \dots, N). \quad (4.30)$$

Система уравнений (4.27) справедлива для каждого временного отрезка $[\tau_{j-1}, \tau_j]$, на котором определены температуры и первые производные температур по времени для всех узлов,

$$C_i \frac{dT_{ij}}{d\tau} = \sum_{q=1}^{N^Q} Q_{iqj} + \sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} (T_{kj} - T_{ij}), \quad (4.31)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, M),$$

имеет общее начальное условие

$$T_i(\tau_0) = T_{i0}, \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (4.32)$$

и условие непрерывности

$$\left\{ \begin{array}{l} T_i(\tau_j - 0) = T_i(\tau_j + 0), \\ \tau_0 = \tau_{\min}, \tau_{M+1} = \tau_{\max} \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M). \quad (4.33)$$

Если искомые коэффициенты α_{ik} зависят только от времени, задача решается в пространстве функций $\alpha_{ik}(\tau)$, а градиент функционала (4.30) определяется согласно (3.101) с учетом (3.104).

Если искомые характеристики $\alpha_{ik}(T_i, T_k, \tau)$ зависят как от времени, так и от температуры, задача идентификации решается в параметрическом пространстве. Характеристики параметризуются некоторыми системами функций $\{\eta^{\alpha}_{ikn}(T_i, T_k, \tau)\}$ ($n = 1, \dots, N^{\alpha}_{ik}$). Минимизация функционала (4.30) осуществляется по итерационному алгоритму (3.57), а градиент функционала определяется выражением (3.110) с учетом (3.104).

Вычисление $\mathbf{a}_i^{(l)}$ производится методом скорейшего спуска или сопряженных градиентов по формулам (3.57), (3.58). Параметр $\gamma^{(l)}$ (здесь не параметр регуляризации) вычисляется в зависимости от варианта метода сопряженных градиентов по следующим выражениям [5-6]:

$$\left[\begin{array}{l} \gamma^{(l)} = -\frac{\int_0^{\tau} [\mathbf{J}'^{(l)}(\tau)]^2 d\tau}{\int_0^{\tau} [\mathbf{J}'^{(l-1)}(\tau)]^2 d\tau}, \\ \gamma^{(l)} = -\frac{\int_0^{\tau} (\mathbf{J}'^{(l)}(\tau), \mathbf{J}'^{(l-1)}(\tau)) - [\mathbf{J}'^{(l)}(\tau)]^2 d\tau}{\int_0^{\tau} [\mathbf{J}'^{(l-1)}(\tau)]^2 d\tau} \end{array} \right] \Rightarrow \quad (4.34)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \gamma^{(l)} = -\frac{\sum_{j=1}^M \left(\sum_{k=1}^N J'_{\alpha_{ik}}{}^{(l)} J'_{\alpha_{ik}}{}^{(l)} \right)}{\sum_{j=1}^M \left(\sum_{k=1}^N J'_{\alpha_{ik}}{}^{(l-1)} J'_{\alpha_{ik}}{}^{(l-1)} \right)}, \\ \gamma^{(l)} = -\frac{\sum_{j=1}^M \left(\sum_{k=1}^N J'_{\alpha_{ik}}{}^{(l)} J'_{\alpha_{ik}}{}^{(l-1)} - J'_{\alpha_{ik}}{}^{(l)} J'_{\alpha_{ik}}{}^{(l)} \right)}{\sum_{j=1}^M \left(\sum_{k=1}^N J'_{\alpha_{ik}}{}^{(l-1)} J'_{\alpha_{ik}}{}^{(l-1)} \right)}, \end{array} \right].$$

Глубина спуска $\beta^{(l)}$ определяется из условия (3.58). Для его проверки необходимо получить функционал $J(\mathbf{a}_i^{(l)})$, который является функцией параметра $\beta^{(l)}$. С этой целью зададим искомым тепловым проводимостям α_{ik} вариации $\delta\alpha_{ik}$ ($i = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N$), которые согласно (3.56) равны

$$\delta\alpha_{ikj} = -\beta_{ij}^{\alpha} \xi_{ikj}^{\alpha}. \quad (4.35)$$

Тогда температура изменится на некоторую величину $v_{ij}(\tau)$ ($i = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M$), а вариация температуры $v_{ij}(\tau)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$C_i \frac{dv_{ij}}{d\tau} = \sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} (-v_{ij}) + \sum_{k=1}^N \delta \alpha_{ikj} (T_{kj} - T_{ij}), \quad (4.36)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M)$$

с начальным условием (3.73) и условием непрерывности (3.74). Функционал-невязка на итерации l согласно (3.91) запишется как

$$J(\mathbf{a}_i + \delta \mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (T_{ij} + v_{ij} - T_{ij}^{(0)})^2, \quad (4.37)$$

следовательно, вариации температуры $v_{ij}(\tau)$ определяются из (3.92). Подставляя вариации температуры из (3.92) в (4.36) и считая, что решение задачи определяется членами первого приближения, получаем уравнение для определения β_{ij}^α :

$$-C_i \frac{dT_{ij}}{d\tau} = -\sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} v_{ij} - \beta_{ij}^\alpha \sum_{k=1}^N \xi_{ikj}^\alpha (T_{kj} - T_{ij}), \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_{ij}^\alpha = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \xi_{ikj}^\alpha (T_{kj} - T_{ij})} \times$$

$$\times \left[C_i \frac{dT_{ij}}{d\tau} - \sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} (T_{ij}^{(0)} - T_{ij}) \right],$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M),$$

где температуры T_{ij} являются решением краевой задачи (4.31)-(4.33) на текущей итерации, а производные $dT_{ij}/d\tau$ в уравнениях (4.38) выражаются из уравнения (4.31) после его решения относительно температур T_{ij} . Заменяя произведения $C_i(dT_{ij}/d\tau)$ правыми частями уравнений (4.31), имеем

$$\beta_{ij}^\alpha = \frac{\sum_{q=1}^{N_i^0} Q_{iqj} + \sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} (T_{kj} - T_{ij}) - \sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} (T_{ij}^{(0)} - T_{ij})}{\sum_{k=1}^N \xi_{ikj}^\alpha (T_{kj} - T_{ij})} =$$

$$= \frac{\sum_{q=1}^{N_i^0} Q_{iqj} + \sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} (T_{kj} - T_{ij}^{(0)})}{\sum_{k=1}^N \xi_{ikj}^\alpha (T_{kj} - T_{ij})}, \quad (4.39)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M).$$

Применение метода итерационной регуляризации на основе функционала невязки температуры для идентификации тепловых проводимостей проиллюстрируем на примере математической модели

космического аппарата (2.70). Каждая строка i ($i = 1, \dots, N$) матрицы \mathbf{A} тепловых проводимостей представляется вектором $\mathbf{a}_i = \{\alpha_{ik}\}$ ($k = 1, \dots, N$):

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= \{0 \alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{14}\}, \\ \mathbf{a}_2 &= \{\alpha_{21} 0 \alpha_{23} 0\} = \{\alpha_{12} 0 \alpha_{23} 0\}, \\ \mathbf{a}_3 &= \{\alpha_{31} \alpha_{32} 0 0\} = \{\alpha_{13} \alpha_{23} 0 0\}, \\ \mathbf{a}_4 &= \{\alpha_{41} 0 0 0\} = \{\alpha_{14} 0 0 0\}.\end{aligned}\quad (4.40)$$

Для идентификации вектора $\mathbf{a}_i(\tau)$ достаточно иметь экспериментально определенную временную зависимость температуры узла i в виде (4.29), что справедливо и в случае постоянных координат вектора.

Для каждого вектора \mathbf{a}_i на итерации (l) записывается отдельный функционал (4.30), а система минимизируемых функционалов строится по схеме (3.61):

$$\left\{ \begin{aligned} J_1^{(l)} &= J(\mathbf{a}_1^{(l)}) = \sum_{j=1}^M \left[T_{1j}^{(l)}(\mathbf{a}_1^{(l)}, \mathbf{a}_2^{(l-1)}, \mathbf{a}_3^{(l-1)}, \mathbf{a}_4^{(l-1)}) - T_{1j}^{(0)} \right]^2, \\ J_2^{(l)} &= J(\mathbf{a}_2^{(l)}) = \sum_{j=1}^M \left[T_{2j}^{(l)}(\mathbf{a}_1^{(l-1)}, \mathbf{a}_2^{(l)}, \mathbf{a}_3^{(l-1)}, \mathbf{a}_4^{(l-1)}) - T_{2j}^{(0)} \right]^2, \\ J_3^{(l)} &= J(\mathbf{a}_3^{(l)}) = \sum_{j=1}^M \left[T_{3j}^{(l)}(\mathbf{a}_1^{(l-1)}, \mathbf{a}_2^{(l-1)}, \mathbf{a}_3^{(l)}, \mathbf{a}_4^{(l-1)}) - T_{3j}^{(0)} \right]^2, \\ J_4^{(l)} &= J(\mathbf{a}_4^{(l)}) = \sum_{j=1}^M \left[T_{4j}^{(l)}(\mathbf{a}_1^{(l-1)}, \mathbf{a}_2^{(l-1)}, \mathbf{a}_3^{(l-1)}, \mathbf{a}_4^{(l)}) - T_{4j}^{(0)} \right]^2 \end{aligned} \right\}_{j=1, 2, \dots, M}, \quad (4.41)$$

где температуры $T_{ij}^{(l)} = T_{ij}$ являются решением системы уравнений (4.31) для каждого временного шага $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ с начальным условием (4.32) и условием непрерывности (4.33):

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 \frac{dT_{1j}}{d\tau} &= Q_{e.1} + Q_{h.1} + Q_{s.1} + F_1 \sigma \varepsilon_1 (T_R^4 - T_{1j}^4) + \\ &+ \alpha_{13j} (T_{3j} - T_{1j}) + \alpha_{12j} (T_{2j} - T_{1j}) + \alpha_{14j} (T_{4j} - T_{1j}), \\ C_2 \frac{dT_{2j}}{d\tau} &= \alpha_{12j} (T_{1j} - T_{2j}) + \alpha_{23j} (T_{3j} - T_{2j}), \\ C_3 \frac{dT_{3j}}{d\tau} &= Q_{s.3} + F_3 \sigma \varepsilon_3 (T_R^4 - T_{3j}^4) + \alpha_{13j} (T_{1j} - T_{3j}) + \\ &+ \alpha_{23j} (T_{2j} - T_{3j}), \\ C_4 \frac{dT_{4j}}{d\tau} &= \alpha_{14j} (T_{1j} - T_{4j}) \end{aligned} \right\}_{j=1, 2, \dots, M}. \quad (4.42)$$

Вычисление $\mathbf{a}_i^{(l)}$ производится методом сопряженных градиентов по алгоритму, описанному выше. Шаг спуска находится из уравнения (3.132) индивидуально для каждой временной точки τ_j вектора \mathbf{a}_i :

$$\begin{aligned}
\beta_{1j}^{\alpha} &= \frac{1}{\left[\xi_{13j}^{\alpha} (T_{3j} - T_{1j}) + \xi_{12j}^{\alpha} (T_{2j} - T_{1j}) + \xi_{14j}^{\alpha} (T_{4j} - T_{1j}) \right]} \times \\
&\times \left[-(\alpha_{13j} + \alpha_{12j} + \alpha_{14j} + 4F_1 \sigma \varepsilon_1 T_{1j}^3) (T_{1j}^{(0)} - T_{1j}) + \right. \\
&+ Q_{e.1} + Q_{h.1} + Q_{s.1} + F_1 \sigma \varepsilon_1 (T_R^4 - T_{1j}^4) + \\
&\left. + \alpha_{13j} (T_{3j} - T_{1j}) + \alpha_{12j} (T_{2j} - T_{1j}) + \alpha_{14j} (T_{4j} - T_{1j}) \right], \\
\beta_{2j}^{\alpha} &= \frac{1}{\left[\xi_{21j}^{\alpha} (T_{1j} - T_{2j}) + \xi_{23j}^{\alpha} (T_{3j} - T_{2j}) \right]} \times \\
&\times \left[-(\alpha_{12j} + \alpha_{23j}) (T_{2j}^{(0)} - T_{2j}) + \right. \\
&\left. + \alpha_{12j} (T_{1j} - T_{2j}) + \alpha_{23j} (T_{3j} - T_{2j}) \right], \\
\beta_{3j}^{\alpha} &= \frac{1}{\left[\xi_{31j}^{\alpha} (T_{1j} - T_{3j}) + \xi_{32j}^{\alpha} (T_{2j} - T_{3j}) \right]} \times \\
&\times \left[-(\alpha_{13j} + \alpha_{23j} + 4F_3 \sigma \varepsilon_3 T_{3j}^3) (T_{3j}^{(0)} - T_{3j}) + \right. \\
&\left. + Q_{s.3} + F_3 \sigma \varepsilon_3 (T_R^4 - T_{3j}^4) + \alpha_{13j} (T_{1j} - T_{3j}) + \alpha_{23j} (T_{2j} - T_{3j}) \right], \\
\beta_{4j}^{\alpha} &= \frac{1}{\xi_{41j}^{\alpha} (T_{1j} - T_{4j})} \left[-\alpha_{14j} (T_{4j}^{(0)} - T_{4j}) + \alpha_{14j} (T_{1j} - T_{4j}) \right] \\
&(j = 1, 2, \dots, M).
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Используем шаг спуска, минимизирующий функционал невязку метода итерационной регуляризации для определения параметра регуляризации в итерационном методе на основе вариационного метода Тихонова.

Для обоснования выбора значения параметра регуляризации на текущей итерации l объединим в систему итерационный алгоритм (3.50) вычисления вектора характеристик \mathbf{a}_n на итерации l , минимизирующего функционал-невязку, и выражение (4.13) регуляризации вектора \mathbf{a}_n на итерации l , минимизирующего сглаживающий функционал, т. е. являющееся результатом применения к вектору $\mathbf{a}_n^{(l)}$ регуляризирующего оператора, переводящего искомый вектор в состояние $\mathbf{a}_n^{(m)}$, которое на каждой итерации предполагается целевым. Это означает, что стандартная операция перехода на следующую итерацию заменяется регуляризующей до тех пор, пока не выполнится условие регуляризации (4.19) или некоторое другое условие останова итерационного процесса идентификации векторов $\mathbf{a}_n = \{a_{in}\}$ ($i = 1, \dots, N$), являющихся столбцами n искомой матрицы \mathbf{A} :

$$\left\{ \begin{aligned} J[\mathbf{a}^{(l)}] &= \inf_{\mathbf{a} \in \mathbf{F}_a} \rho_U^2 [\mathbf{z}(\mathbf{a}, \tau), \mathbf{z}^{(0)}], \\ M(\mathbf{a}^{(l)}, \mathbf{u}^{(l)}, \gamma) &= \inf_{\mathbf{a} \in \mathbf{F}_a} M(\mathbf{a}, \mathbf{u}^{(l)}, \gamma) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tag{4.44}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{in}^{(l+1)} = \alpha_{in}^{(l)} - \beta_i^{(l)} \xi_{in}^{(l)}, \\ \alpha_{in}^{(m)} = \alpha_{in}^{(l)} \pm \frac{\Delta u_{in}^{(l)}}{\gamma_i^{(l)}}, \\ m = l + 1 \end{array} \right\}_{\substack{i=1,2,\dots,N \\ n=1,2,\dots,N}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_{in}^{(l)} = \Delta u_{in}^{(l)}, \\ \beta_i^{(l)} = \pm \frac{1}{\gamma_i^{(l)}}, \\ m = l + 1 \end{array} \right\}.$$

Поскольку $\xi_{in}^{(l)}$ в данном случае выражается не через градиент функционала, а через приращение функции, $\beta_i^{(l)}$ является не размерным шагом спуска, а скалярной величиной, обратной по значению параметру регуляризации. Однако, и в этом случае она может быть найдена из условия (3.58). Алгоритм расчета скалярного параметра $\beta_i^{(l)}$ в модифицированном вариационно-итерационном методе на основе сглаживающего функционала аналогичен алгоритму расчета шага спуска $\beta_i^{(l)}$ для векторов-строк $\mathbf{a}_i = \{a_{in}\}$ ($n = 1, \dots, N$) в методе итерационной регуляризации на основе функционала невязки температуры. Следовательно, комбинированный алгоритм сочетает итерационный процесс идентификации векторов-столбцов $\mathbf{a}_n = \{a_{in}\}$ ($i = 1, \dots, N$) при минимизации сглаживающего функционала с регуляризацией векторов-строк $\mathbf{a}_i = \{a_{in}\}$ ($n = 1, \dots, N$) при минимизации функционала невязки, что индивидуализирует итерационную регуляризацию для каждой искомой функции.

При определении параметра регуляризации $\gamma_i^{(l)}$ через $\beta_i^{(l)}$ также необходимо решение прямой задачи на каждой итерации и вычисление функционала невязки в виде (3.62). Если искомый вектор зависит от времени, вводится временная сетка, и функционал принимает вид (4.30).

Общее расчетное выражение $\beta_i^{(l)}$ применительно к математической модели (3.94) в редуцированном виде (2.22) имеет вид (4.39). Применительно к комбинированной методике в выражении (4.39) можно для наглядности заменить индекс k на индекс n , что следует из изменения выражения вариаций $\delta\alpha_{in}$ ($i = 1, \dots, N; n = 1, \dots, N$), которые согласно (3.56) равны

$$\delta\alpha_{in} = -\beta_i \xi_{in}. \quad (4.45)$$

Следовательно, параметр регуляризации в задаче (4.31)-(4.33) равен

$$\beta_{ij}^\gamma = \frac{\sum_{q=1}^{N_i^Q} Q_{iqj} + \sum_{n=1}^N \alpha_{inj} (T_{nj} - T_{ij}^{(0)})}{\sum_{n=1}^N \xi_{inj}^\alpha (T_{nj} - T_{ij})} \quad (4.46)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M),$$

где температуры T_{kj} , T_{ij} являются решением прямой задачи для известной на текущей итерации l матрицы коэффициентов. Как и шаг спуска в методе итерационной регуляризации, параметр регуляризации $\gamma_{ij}^{\alpha(l)}$ рассчитывается на итерации l индивидуально для каждого временного отрезка искомого вектора.

С использованием преобразований (4.44)-(4.46) регуляризация итерационного процесса (4.21) для идентификации математической модели

космического аппарата (2.70) в упрощенной форме достигается на итерации l вычислением параметра регуляризации (4.46) и решения краевой задачи (2.70):

$$\left. \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{12}^{(l)} = \frac{1}{T_{1j} - T_{2j}} \left[m_2 c_2 \frac{dT_{2j}}{d\tau} + (T_{2j} - T_{3j}) \alpha_{23}^{(l-1)} \right], \\ \alpha_{13}^{(l)} = \frac{1}{T_{1j} - T_{3j}} \left[Q_{s,3} - F_3 \sigma \varepsilon_3 (T_{3j}^4 - T_R^4) - m_3 c_3 \frac{dT_3}{d\tau} - (T_{3j} - T_{2j}) \alpha_{23}^{(l-1)} \right], \\ \alpha_{14}^{(l)} = \frac{m_4 c_4}{T_{1j} - T_{4j}} \frac{dT_{4j}}{d\tau} \\ \alpha_{23}^{(l)} = \frac{1}{T_{3j} - T_{2j}} \left[m_2 c_2 \frac{dT_{2j}}{d\tau} + (T_{2j} - T_{1j}) \alpha_{12}^{(l-1)} \right], \\ \xi_{12}^{(l)} = \Delta \alpha_{12}^{(l)} = \alpha_{12}^{(l)} - \alpha_{12}^{(l-1)} \\ \xi_{23}^{(l)} = \Delta \alpha_{23}^{(l)} = \alpha_{23}^{(l)} - \alpha_{23}^{(l-1)}, \\ \beta_2^{(l)} = \frac{-(\alpha_{12j} + \alpha_{23j})(T_{2j}^{(0)} - T_{2j}) + \alpha_{12j}(T_{1j} - T_{2j}) + \alpha_{23j}(T_{3j} - T_{2j})}{\xi_{12}^a (T_{1j} - T_{2j}) + \xi_{23}^a (T_{3j} - T_{2j})} \\ \alpha_{23}^{(l+1)} = \alpha_{23}^{(l)} - \beta_2^{(l)} \xi_{23}^{(l)} \end{array} \right\} \quad (4.47)$$

$(j = 1, 2, \dots, M),$

где температуры T_{ij} являются решением системы (2.70) для каждой временной точки j .

Функции $\xi_{ikj}^{(l)}$ и $\beta_{ij}^{(l)}$ индивидуальны для каждого временного отрезка $[\tau_{j-1}, \tau_j]$, что может приводить к значительным колебаниям решения в зависимости от времени. В ряде случаев после выполнения условия регуляризации или условия $J_i^{(l)} \geq J_i^{(l-1)}$ имеет смысл сгладить решение расчетом средних арифметических $\alpha_{ikj} = (\alpha_{ikj} + \alpha_{ik,j-1})/2$ ($j = 1, 2, \dots, M$) в течение нескольких последующих итераций. Такое «искусственное» сглаживание приведет к некоторому росту функционалов $J_i^{(l)}$, но позволит получить решения, близкие к математическим функциям, а не к случайным распределениям.

4.3. Комбинирование функционалов при наличии температурной зависимости искомых функций

Идентификация функций $\alpha_{ik}(T_i, T_k, \tau)$, зависящих как от времени, так и от температуры, является наиболее сложной из всех рассмотренных в главе 2 задач, поскольку искомые функции зависят от температур двух узлов i и k . В этом случае помимо разложения функций α_{ik} в ряд (3.107) по базису $\{\eta_{ikn}^a = \eta^a(T_{in}, T_{kn})\}$ ($n = 1, \dots, N_{ik}^a$) базисные функции η_{ikn}^a представляются

произведениями базисных функций η^{α}_{in} , η^{α}_{kn} , которые выражаются кубическими В-сплайнами (3.137):

$$\alpha_{ik}(T_i, T_k, \tau) = \sum_{n=1}^{N_{ik}^{\alpha}} A_{ikn}(\tau) \eta^{\alpha}_{in} \eta^{\alpha}_{kn}, \quad (4.48)$$

где $\eta^{\alpha}_{in} = B_{i,n-2}$ – при использовании базиса (3.137), $\eta^{\alpha}_{in} = \varphi_{i,n-1}$ – при использовании базиса (3.139). Задача заключается в определении временных функций A_{ikn} при заданных базисных функциях $\eta^{\alpha}_{in} = \eta^{\alpha}(T_{in})$, $\eta^{\alpha}_{kn} = \eta^{\alpha}(T_{kn})$. Количество базисных функций N_{ik}^{α} определяет количество двумерных матриц $A_{ik,n}$, которые должны быть идентифицированы в расчетной точке n временного диапазона $[\tau_{j-1}, \tau_j]$.

Градиент функционала определяется по выражению (3.110), а шаг спуска рассчитывается индивидуально для каждой строки $\mathbf{A}_i = \{A_{ik}\}_n$ ($k = 1, \dots, N$), в том числе, и в случае комбинированного алгоритма (4.44).

Количество временных точек, в которых на каждой итерации необходимо решить краевую задачу для идентификации коэффициентов α_{ik} при наличии температурной зависимости, равно произведению MN^{α}_{ik} . Если общее число итераций равно L , то количество точек решения краевой задачи составляет LMN^{α}_{ik} .

Поскольку тепловые проводимости чаще всего не регулируются по времени и зависят только от температур узлов $T_i(\tau)$, $T_k(\tau)$, для идентификации функций $\alpha_{ik}(T_i, T_k)$ достаточно идентифицировать временную функцию $\alpha_{ik}(\tau)$ и сопоставить с функциями температур $T_i(\tau)$, $T_k(\tau)$ на одной временной сетке.

Математическая модель (3.94) в редуцированном виде (2.22) для решения задачи идентификации функций $\alpha_{ik}(T_i, T_k, \tau)$ примет вид

$$C_i \frac{dT_i}{d\tau} = \sum_{q=1}^{N_{iq}^Q} Q_{iq} - \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^{N_{ik}^{\alpha}} A_{ikn}(\tau) \eta^{\alpha}_{in} \eta^{\alpha}_{kn} (T_i - T_k) \quad (4.49)$$

$(i = 1, \dots, N).$

Математическая модель (2.54) составной части КА преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} m_1 c_1 \frac{dT_1(\tau)}{d\tau} &= Q_{e.1} + Q_{h.1} + Q_{s.1} - F_1 \sigma \varepsilon_1 (T_1(\tau)^4 - T_R^4) - \\ &- \sum_{n=1}^{N_{13}^{\alpha}} A_{13n}(\tau) \eta^{\alpha}_{1n} \eta^{\alpha}_{3n} (T_1(\tau) - T_3(\tau)) - \\ &- \sum_{n=1}^{N_{12}^{\alpha}} A_{12n}(\tau) \eta^{\alpha}_{1n} \eta^{\alpha}_{2n} (T_1(\tau) - T_2(\tau)) - \\ &- \sum_{n=1}^{N_{14}^{\alpha}} A_{14n}(\tau) \eta^{\alpha}_{1n} \eta^{\alpha}_{4n} (T_1(\tau) - T_4(\tau)), \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}
m_2 c_2 \frac{dT_2(\tau)}{d\tau} &= - \sum_{n=1}^{N_{12}^a} A_{12n}(\tau) \eta_{1n}^a \eta_{2n}^a (T_2(\tau) - T_1(\tau)) - \\
&- \sum_{n=1}^{N_{23}^a} A_{23n}(\tau) \eta_{2n}^a \eta_{3n}^a (T_2(\tau) - T_3(\tau)), \\
m_3 c_3 \frac{dT_3(\tau)}{d\tau} &= Q_{s.3} - F_3 \sigma \varepsilon_3 (T_3(\tau)^4 - T_R^4) - \\
&- \sum_{n=1}^{N_{13}^a} A_{13n}(\tau) \eta_{1n}^a \eta_{3n}^a (T_3(\tau) - T_1(\tau)) - \\
&- \alpha_{a.23} \sum_{n=1}^{N_{23}^a} A_{23n}(\tau) \eta_{2n}^a \eta_{3n}^a (T_3(\tau) - T_2(\tau)), \\
m_4 c_4 \frac{dT_4(\tau)}{d\tau} &= - \alpha_{a.14} \sum_{n=1}^{N_{14}^a} A_{14n}(\tau) \eta_{1n}^a \eta_{4n}^a (T_4(\tau) - T_1(\tau)).
\end{aligned}$$

4.4. Вычислительные эксперименты для задачи идентификации с неединственным решением

4.4.1. Условия задачи.

С целью проверки рассмотренных методов итерационной регуляризации решений задач идентификации тепловых математических моделей с сосредоточенными параметрами в случае неединственного решения проведены вычислительные эксперименты на примере математической модели составной части КА (2.70).

Идентификация выполнена на основе экспериментальных данных, полученных в тепловых вакуумных испытаниях составной части КА в режиме предельного нагрева от инфракрасных имитаторов плотностью теплового потока до 900 Вт/м³. Экспериментальные температуры показаны на рисунке 4.2, соответствие точек временной сетки j ($j = 1, 2, \dots, M$; $M = 12$) моментам времени испытаний – в таблице 4.1 [2].

Задачи решены методом итерационной регуляризации на основе функционала температурной невязки и вариационным методом Тихонова с параметром регуляризации, определенным по комбинированной методике, для начальных приближений, заданных достаточно произвольно:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \{0 \ \alpha_{12} \ \alpha_{13} \ \alpha_{14}\} = \{0; 0,1; 0,1; 0\} \text{ Вт/К}, \\
\mathbf{a}_2 &= \{\alpha_{21} \ 0 \ \alpha_{23} \ 0\} = \{0,1; 0; 0,1; 0\} \text{ Вт/К}, \\
\mathbf{a}_3 &= \{\alpha_{31} \ \alpha_{32} \ 0 \ 0\} = \{0,1; 0,1; 0; 0\} \text{ Вт/К}, \\
\mathbf{a}_4 &= \{\alpha_{41} \ 0 \ 0 \ 0\} = \{0; 0; 0; 0\} \text{ Вт/К}.
\end{aligned}$$

Определение допустимых диапазонов в итерационных процессах осуществляется по значениям искомым проводимостей, рассчитанных по 2.7 (рисунок 4.2) и обеспечивающих значение 131,9 К² суммарного функционала невязки температуры (таблица 4.5):

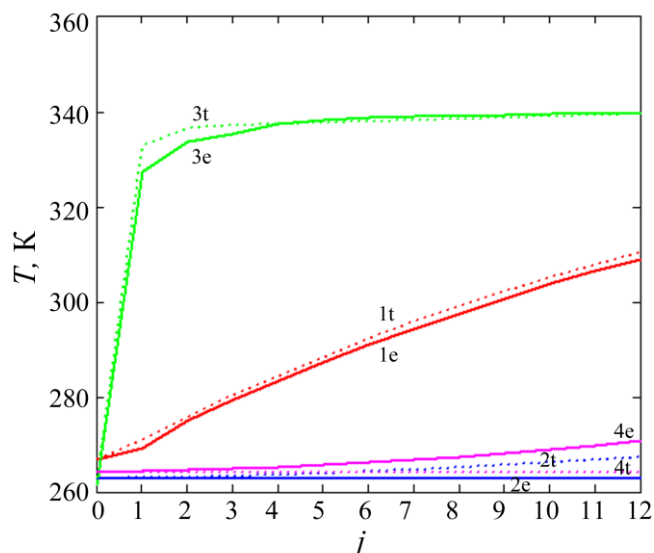


Рисунок 4.2 – Корреляция временных зависимостей расчетных (t) и экспериментальных (e) температур

Таблица 4.1 – Соответствие точек временной сетки времени испытаний

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tau, \text{с}$	0	$1,20 \cdot 10^3$	$2,40 \cdot 10^3$	$3,60 \cdot 10^3$	$4,80 \cdot 10^3$	$6,00 \cdot 10^3$	$7,20 \cdot 10^3$	$8,40 \cdot 10^3$	$9,60 \cdot 10^3$	$1,08 \cdot 10^4$	$1,20 \cdot 10^4$	$1,32 \cdot 10^4$	$1,44 \cdot 10^4$

$$\mathbf{a}_1 = \{0 \ \alpha_{12} \ \alpha_{13} \ \alpha_{14}\} = \{0; 0,566; 7,41; 0\} \text{ Вт/К,}$$

$$\mathbf{a}_2 = \{\alpha_{21} \ 0 \ \alpha_{23} \ 0\} = \{0,566; 0; 0,01; 0\} \text{ Вт/К,}$$

$$\mathbf{a}_3 = \{\alpha_{31} \ \alpha_{32} \ 0 \ 0\} = \{7,41; 0,01; 0; 0\} \text{ Вт/К,}$$

$$\mathbf{a}_4 = \{\alpha_{41} \ 0 \ 0 \ 0\} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0\} \text{ Вт/К.}$$

Поскольку пример является методическим, в нем выделено два предельных случая параметризации математической модели:

– $\alpha_{14} = \alpha_{41} = 0$, что исключает четвертое уравнение из системы и позволяет проверить, будет ли при таком условии идентифицированная функция $\alpha_{14}(\tau)$ стремиться к нулю;

– экспериментальная температура узла 2 (внутренняя часть оптической защиты) задана постоянной и равной $T_2^{(0)} = 273 - 10 \text{ К}$ (рисунок 4.2), что вызвано отсутствием измеренных температур для этого узла и позволяет проверить, будет ли расчетная температура T_2 стремиться к постоянному значению.

Первый методический случай обусловлен и тем, что внешние воздействия на узел 4 в испытаниях имеют сложный характер, который затруднительно сформулировать в виде граничных условий.

Дисперсия экспериментальной температуры $T_i^{(0)}$ равна

$$D(T_i^{(0)}) = \sigma^2(T_i^{(0)}) = \frac{\sum_{j=1}^M \varphi_{ij}^2}{M(M-1)}, \quad (4.51)$$

где $\varphi_{ij} = T_{ij}^{(0)} - T_{ij}'$, T_{ij}' – наиболее близкое к истинному значение температуры, чаще всего, среднее арифметическое ряда измерений в этой точке. Так как данный режим испытаний является единственным, определить среднее арифметическое температуры в данный момент времени невозможно, поэтому приближенно можно считать $\varphi_{ij} \approx \Delta T_{ij}^{(0)}$, где $\Delta T_{ij}^{(0)} = 2 \text{ К}$ – абсолютная погрешность измерения температуры по показаниям датчика. Тогда

$$D(T_i^{(0)}) = \frac{(\Delta T_i^{(0)})^2}{M-1} \approx 0,36 \text{ К}^2. \quad (4.52)$$

Среднеквадратичная ошибка температурных измерений для всей системы, следовательно, равна

$$\delta_T^2 = \sum_{i=1}^N D(T_i^{(0)}) = ND(T_i^{(0)}) = 1,44 \text{ К}^2. \quad (4.53)$$

Условие регуляризации (3.66) является пределом точности итерационного процесса, поэтому более рационально останавливать вычисления по условию $J_i^{(l)} \geq J_i^{(l-1)}$ или замедлению сходимости при достижении приемлемых значений функционалов и достаточно гладких зависимостей для искомым функций.

Поскольку четвертое уравнение не влияет на состояние системы и включено из методических соображений, шаг по методу скорейшего спуска выполняется не каждые четыре, а каждые три итерации: первая, третья, шестая и т. д. Сведение функций $\alpha_{ik}(\tau)$, $\alpha_{ki}(\tau)$ к единой осуществляется с использованием функций чувствительности (4.25).

В методе итерационной регуляризации расчеты градиента и шага спуска выполняются методом сопряженных градиентов с обновлением итераций, в вариационном методе Тихонова параметр регуляризации рассчитывается по комбинированной методике.

4.4.2. Метод итерационной регуляризации.

Результаты расчета функционалов температурных невязок приведены в таблице 4.2 и показаны на рисунке 4.3, корреляция расчетных и экспериментальных температур и идентифицированные функции времени на итерациях 1, 8 – на рисунках 4.4-4.7.

Суммарный функционал J убывает до итерации 8, а затем его значение стабилизируется в диапазоне от 88 до 9 К^2 .

Искомые функции определены на итерации 8 по условию достижения минимума суммарного функционала. Уровень среднеквадратичной ошибки измерения температуры не был достигнут.

По результатам идентификации методом итерационной регуляризации без расчета начальных приближений проверена его применимость в предельных методических случаях: $\alpha_{14} = \alpha_{41} \rightarrow 0$; $T_2 \rightarrow T_2^{(0)} = 273 - 10$ К.

Таблица 4.2 – Значения функционалов невязок в зависимости от номера итерации

Итерация	J_1	J_2	J_3	J
1	294,9	30,525	276,7	602
2	44,2	26,5	99,5	170,2
3	44,1	4,1	102,8	151,1
4	43,9	3,5	102,8	150,2
5	15,7	2,8	76,7	95,2
6	14,3	2,3	73,4	90,0
7	14,2	1,9	73,5	89,6
8	14,2	0,6	74,0	88,8
9	14,2	0,5	74,0	88,7
10	14,2	0,4	74,0	88,6
11	14,2	0,3	74,0	88,6
12	14,2	0,3	74,0	88,5

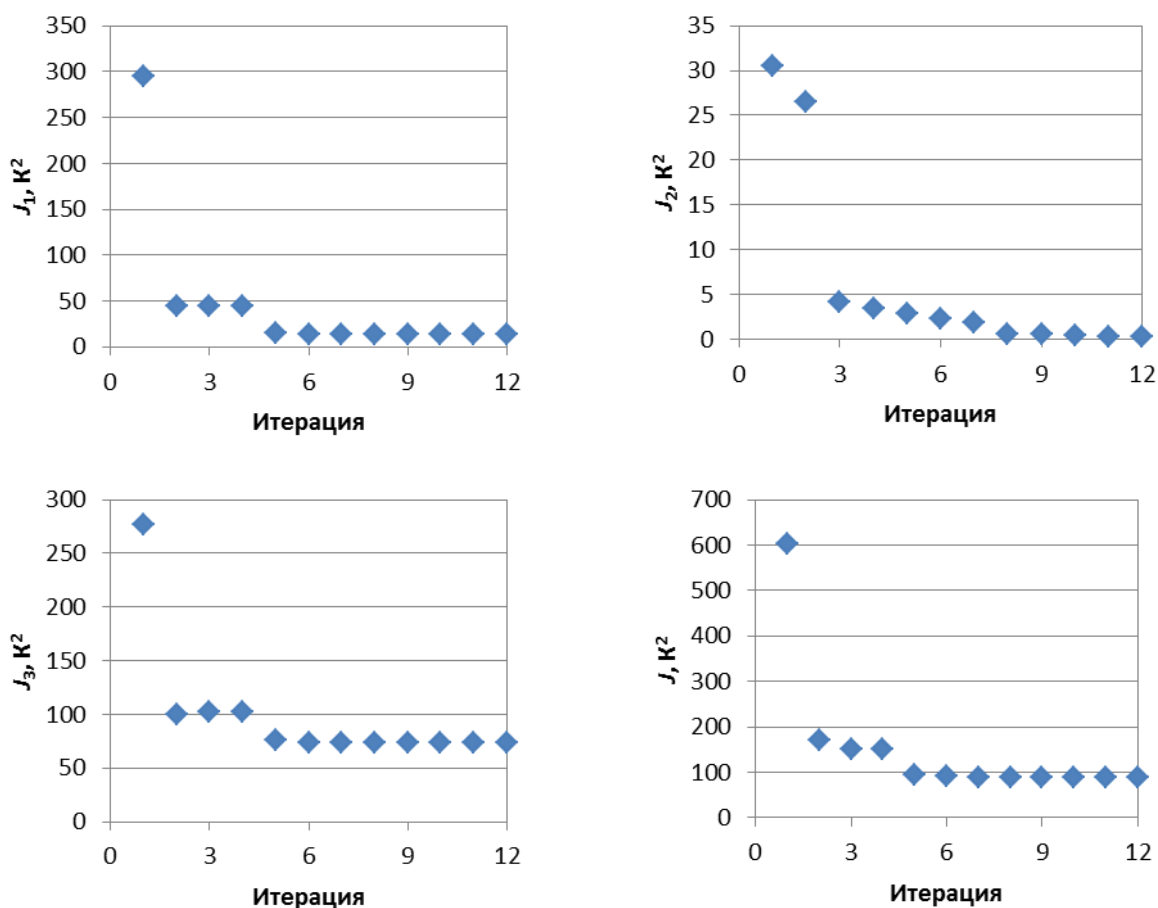


Рисунок 4.3 – Значения функционалов J_1, J_2, J_3, J в зависимости от номера итерации

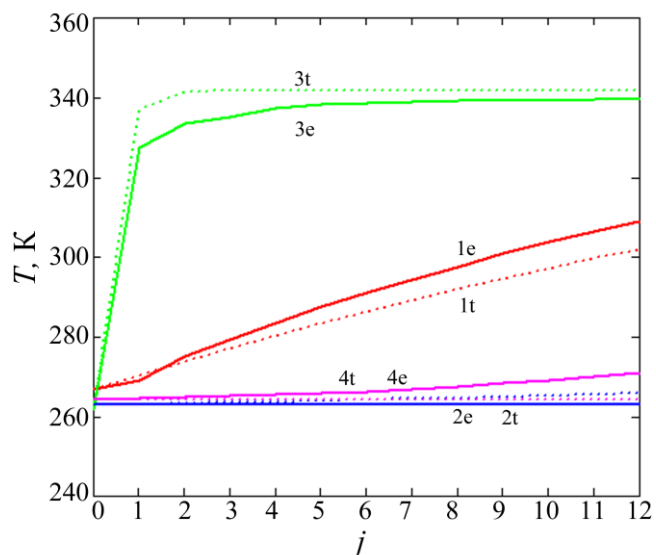


Рисунок 4.4 – Корреляция временных зависимостей расчетных (t) и экспериментальных (e) температур на итерации 1

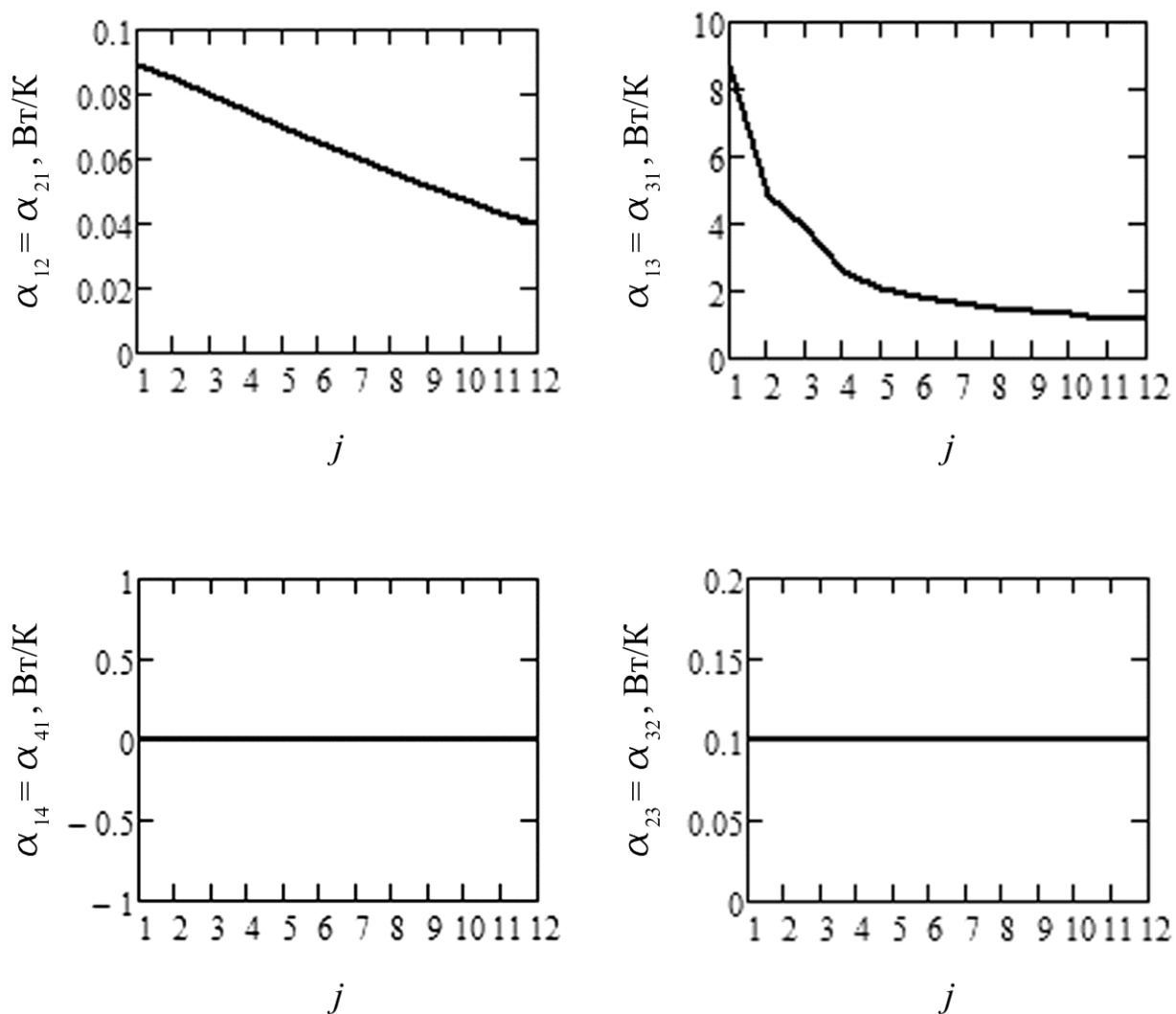


Рисунок 4.5 – Временные зависимости искомых функций на итерации 1

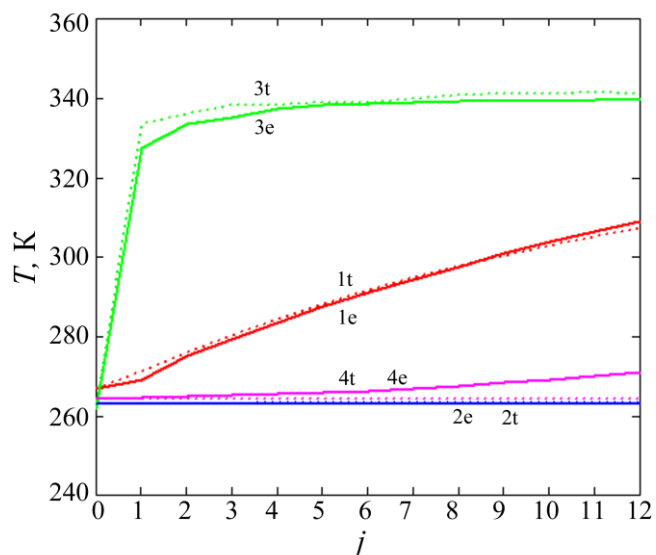


Рисунок 4.6 – Корреляция временных зависимостей расчетных (t) и экспериментальных (e) температур на итерации 8

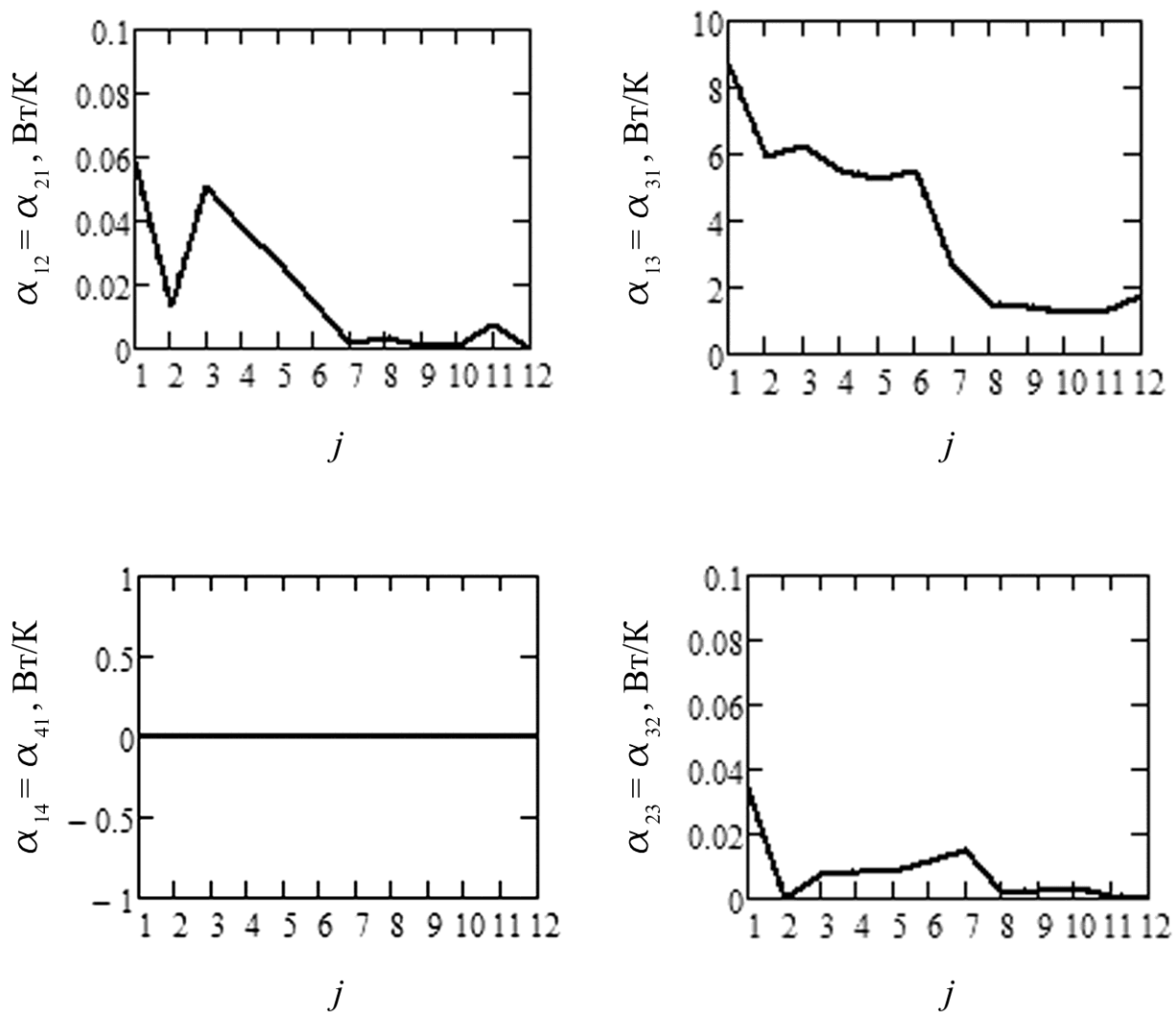


Рисунок 4.7 – Временные зависимости искомых функций на итерации 8

4.4.3. Вариационный метод Тихонова.

Результаты расчета функционалов-невязок приведены в таблице 4.3 и показаны на рисунке 4.8, корреляция расчетных и экспериментальных температур и идентифицированные функции времени на итерациях 1, 6 – на рисунках 4.9-4.13.

Суммарный функционал J убывает до итерации 4, а затем медленно возрастает до итерации 9 и стабилизируется в диапазоне от 248 до 251 К2.

Искомые функции определены на итерации 6 по условию достижения минимума суммарного функционала. Уровень среднеквадратичной ошибки измерения температуры не был достигнут.

По результатам идентификации вариационным методом Тихонова с параметром регуляризации, рассчитанным по комбинированной методике, проверена его применимость в предельных методических случаях: $\alpha_{14} = \alpha_{41} \rightarrow 0$; $T_2 \rightarrow T_2^{(0)} = 273 - 10$ К.

Таблица 4.3 – Значения функционалов невязок в зависимости от номера итерации

Итерация	J_1	J_2	J_3	J
1	294,9	30,525	276,7	602
2	101,5	7,7	223,6	332,8
3	46,4	4,5	177,8	228,6
4	39,2	3,2	183,0	225,4
5	34,0	2,1	190,2	226,3
6	31,3	1,9	197,5	230,7
7	33,2	1,5	204,7	239,5
8	35,9	4,4	206,4	246,8
9	38,8	2,6	207,2	248,6
10	41,8	2,1	207,2	251,1
11	42,8	2,0	206,6	251,4
12	43,0	2,0	205,6	250,6

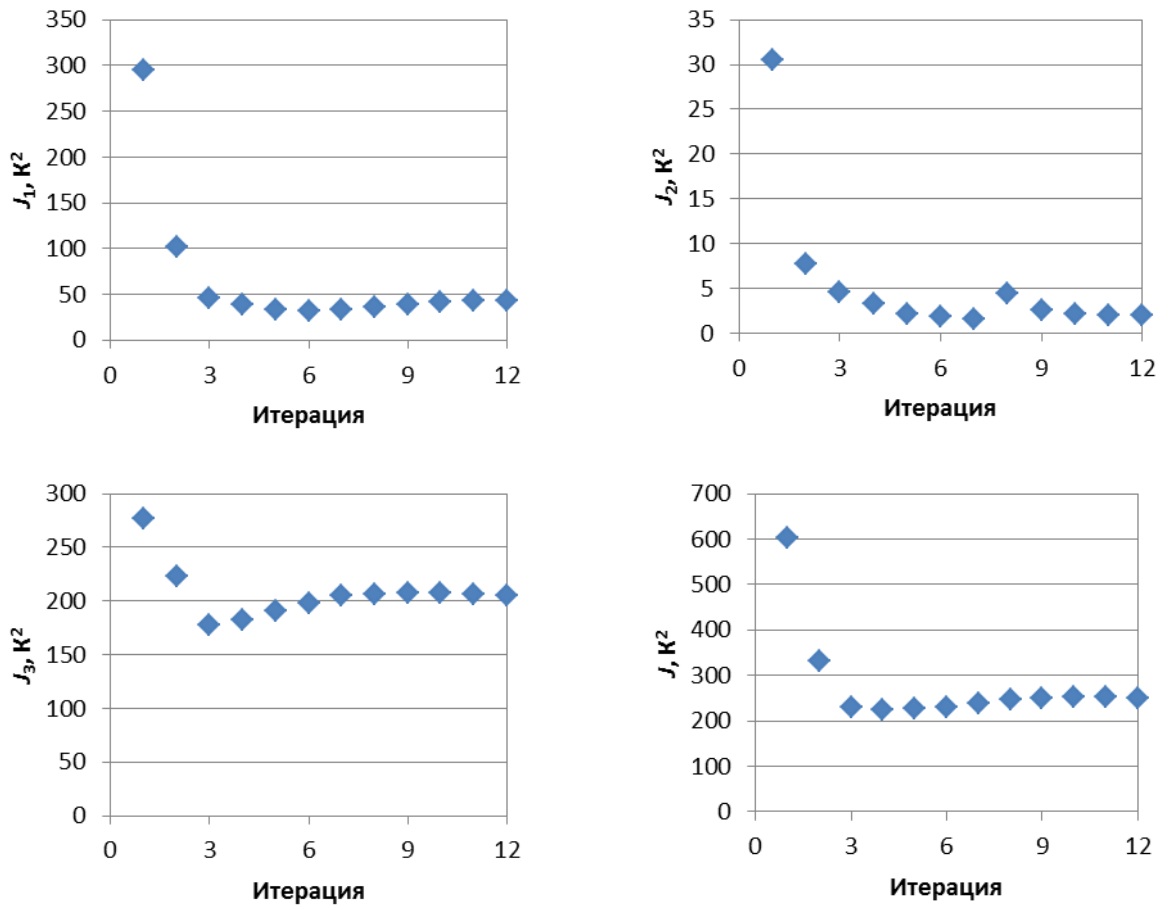


Рисунок 4.8 – Значения функционалов J_1, J_2, J_3, J в зависимости от номера итерации

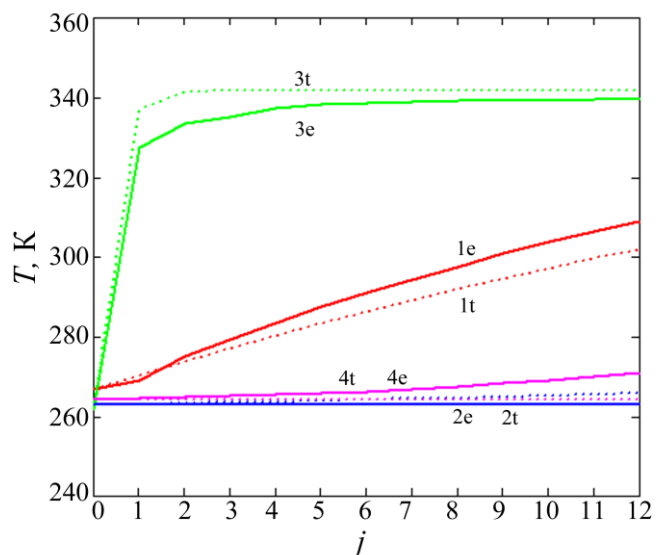


Рисунок 4.9 – Корреляция временных зависимостей расчетных (t) и экспериментальных (e) температур на итерации 1

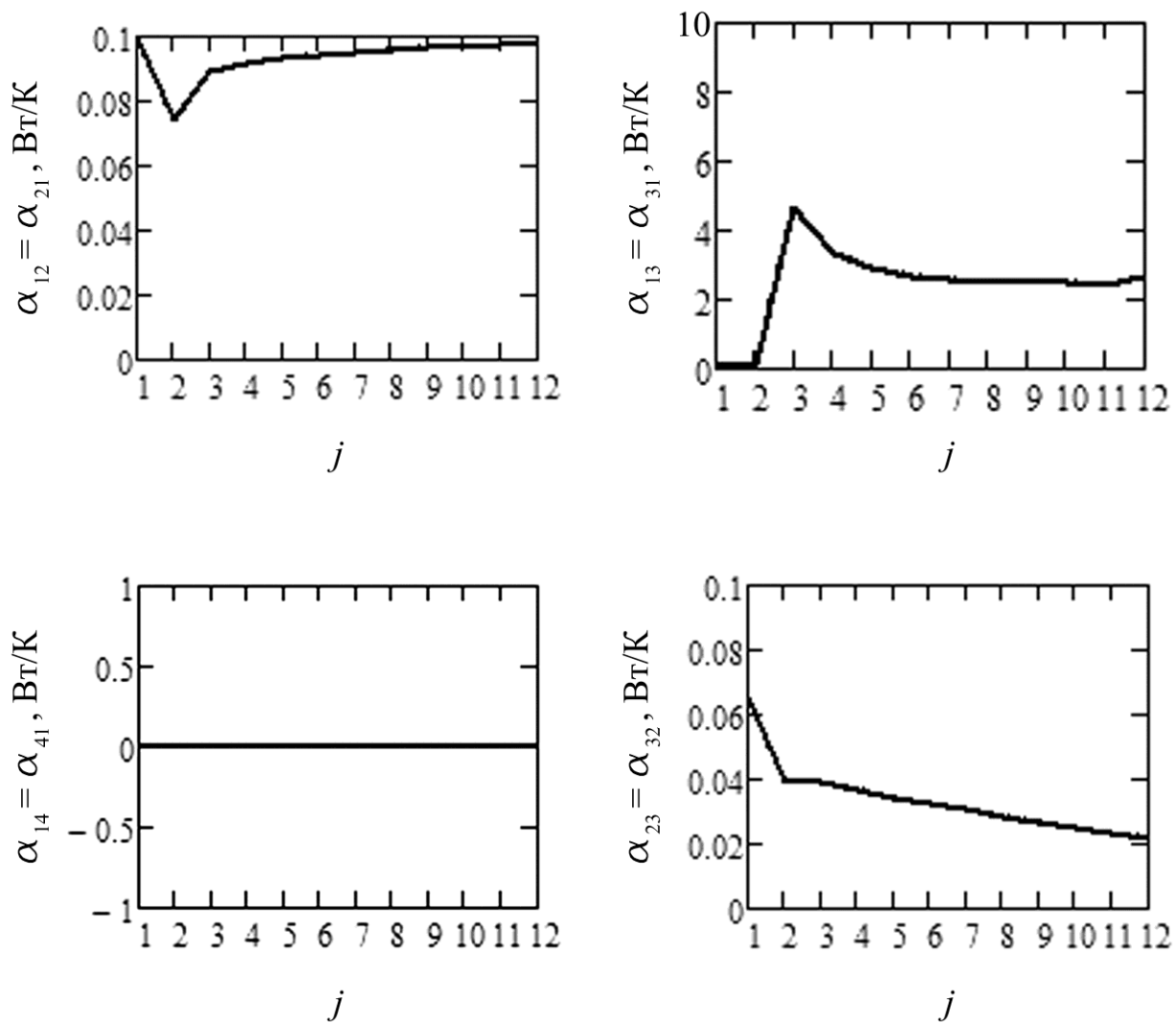


Рисунок 4.10 – Временные зависимости искомых функций на итерации 1

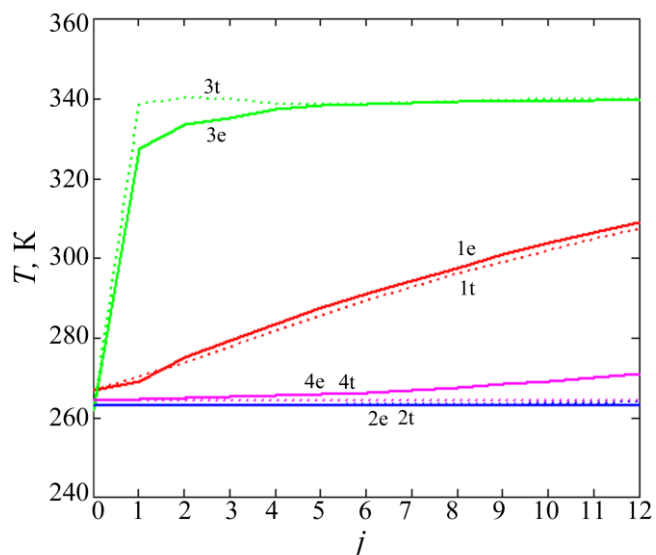


Рисунок 4.11 – Корреляция временных зависимостей расчетных (t) и экспериментальных (e) температур на итерации 6

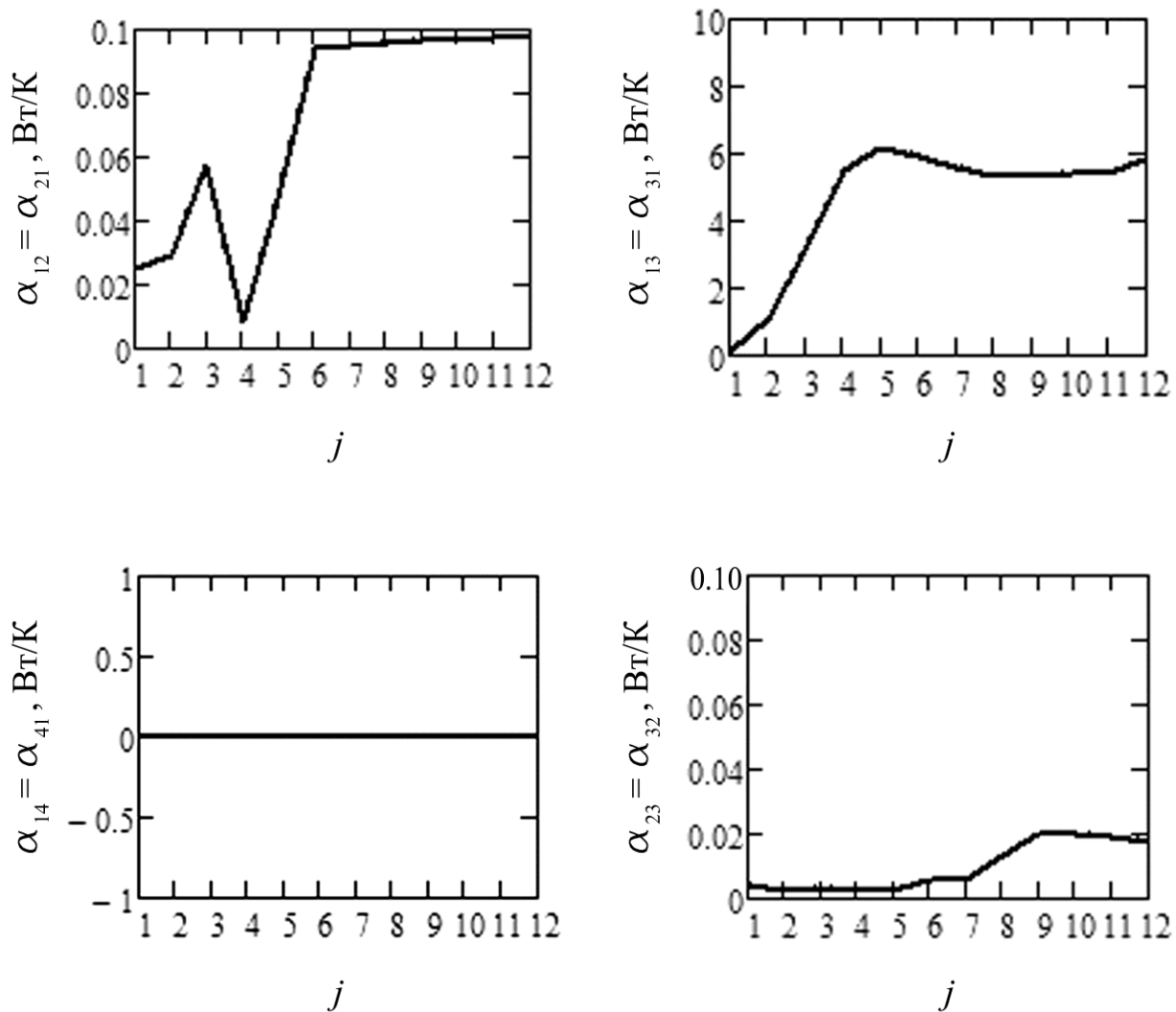


Рисунок 4.12 – Временные зависимости искомых функций на итерации 6

4.4.4. Проверка решения на устойчивость.

Устойчивость решений по Ляпунову проверяется сопоставлением функций, определенных по возмущенному температурному полю, с идентифицированными функциями, которые считаются «истинными», а рассчитанное по ним температурное поле – «экспериментальным». На «экспериментальное» поле накладываются малые нормальные возмущения, величина которых определяется по допустимой погрешности расчетов – не более 10% от ширины рабочего температурного диапазона. Поскольку рабочие температуры изменяются от 260 до 340 К, предельная величина малого возмущения равна 8 К. Нормальное возмущение получено как четыре (по числу узлов) массива из 13 значений с математическим ожиданием, равным нулю, и средним квадратичным отклонением, равным 0,4, умноженных на $C = 8$ К (рисунок 4.13, таблица 4.4).

В качестве «истинных» выбраны функции, идентифицированные соответствующим методом, рассчитанные по ним температуры – «экспериментальными».

Результаты применения метода итерационной регуляризации показаны на рисунках 4.14-4.15, итерационного метода на основе вариационного метода Тихонова – на рисунках 4.16-4.17. При наличии возмущения идентифицированные методом итерационной регуляризации функции определяются на 12 итерации, методом Тихонова – на 14 итерации, и заметно отличаются от «экспериментальных» функций, не имея выраженной зависимости.

Таким образом, в случае неединственного решения применение рассмотренных методов приводит к получению неустойчивых решений, зависящих как от используемого метода, так и от наложенного на «истинные» функции возмущения.

Таблица 4.4 – Нормальное возмущение идентифицированного решения ($C = 8 K$).

$x=j$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	$C\Delta_1, K$	$C\Delta_2, K$	$C\Delta_3, K$	$C\Delta_4, K$
0	-0,1756	0,2692	-0,2822	-0,3058	-1,4	2,2	-2,3	-2,4
1	-0,2718	-0,4177	0,0007457	-0,1637	-2,2	-3,3	0,0	-1,3
2	-0,1893	0,02763	0,443	-0,2695	-1,5	0,2	3,5	-2,2
3	-0,3806	-0,3022	0,357	-0,05287	-3,0	-2,4	2,9	-0,4
4	-0,6743	0,2787	-1,16	0,4072	-5,4	2,2	-9,3	3,3
5	0,01741	-0,07275	-0,8628	0,07221	0,1	-0,6	-6,9	0,6
6	-0,0483	-0,2578	0,08242	0,2053	-0,4	-2,1	0,7	1,6
7	0,2226	-0,2892	-0,2463	0,2959	1,8	-2,3	-2,0	2,4
8	0,8767	-0,2066	-0,4791	-0,006517	7,0	-1,7	-3,8	-0,1
9	0,3235	0,2232	0,03962	0,1115	2,6	1,8	0,3	0,9
10	0,3941	-0,09794	0,3083	0,06486	3,2	-0,8	2,5	0,5
11	0,3449	0,03581	0,1224	0,1714	2,8	0,3	1,0	1,4
12	0,3662	0,5047	0,004529	-0,1901	2,9	4,0	0,0	-1,5

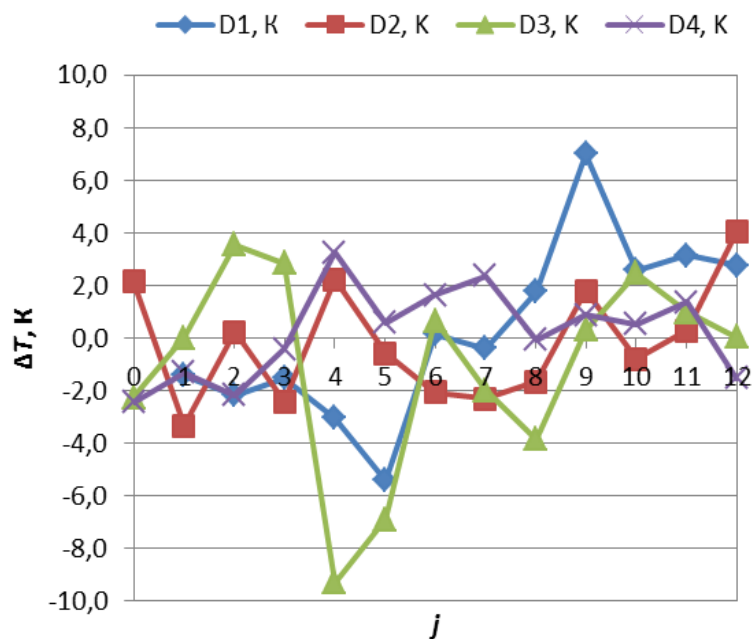


Рисунок 4.13 – Нормальное возмущение идентифицированного решения

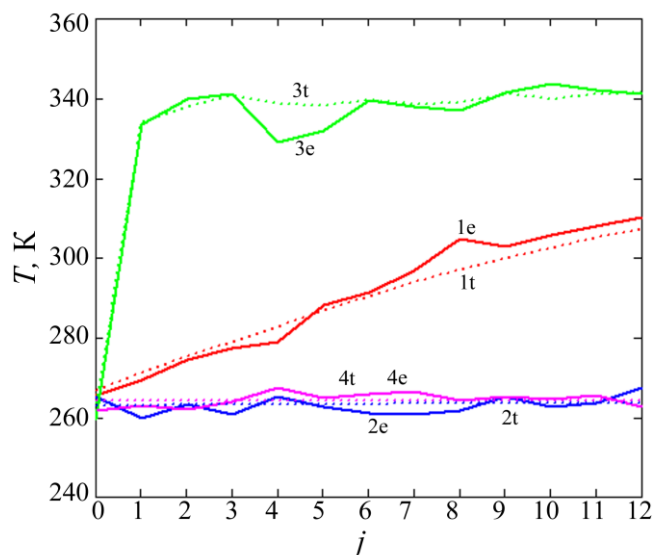


Рисунок 4.14 – Корреляция временных зависимостей расчетных (t) и возмущенных (e) температур на итерации 12 при нормальном возмущении (МИР)

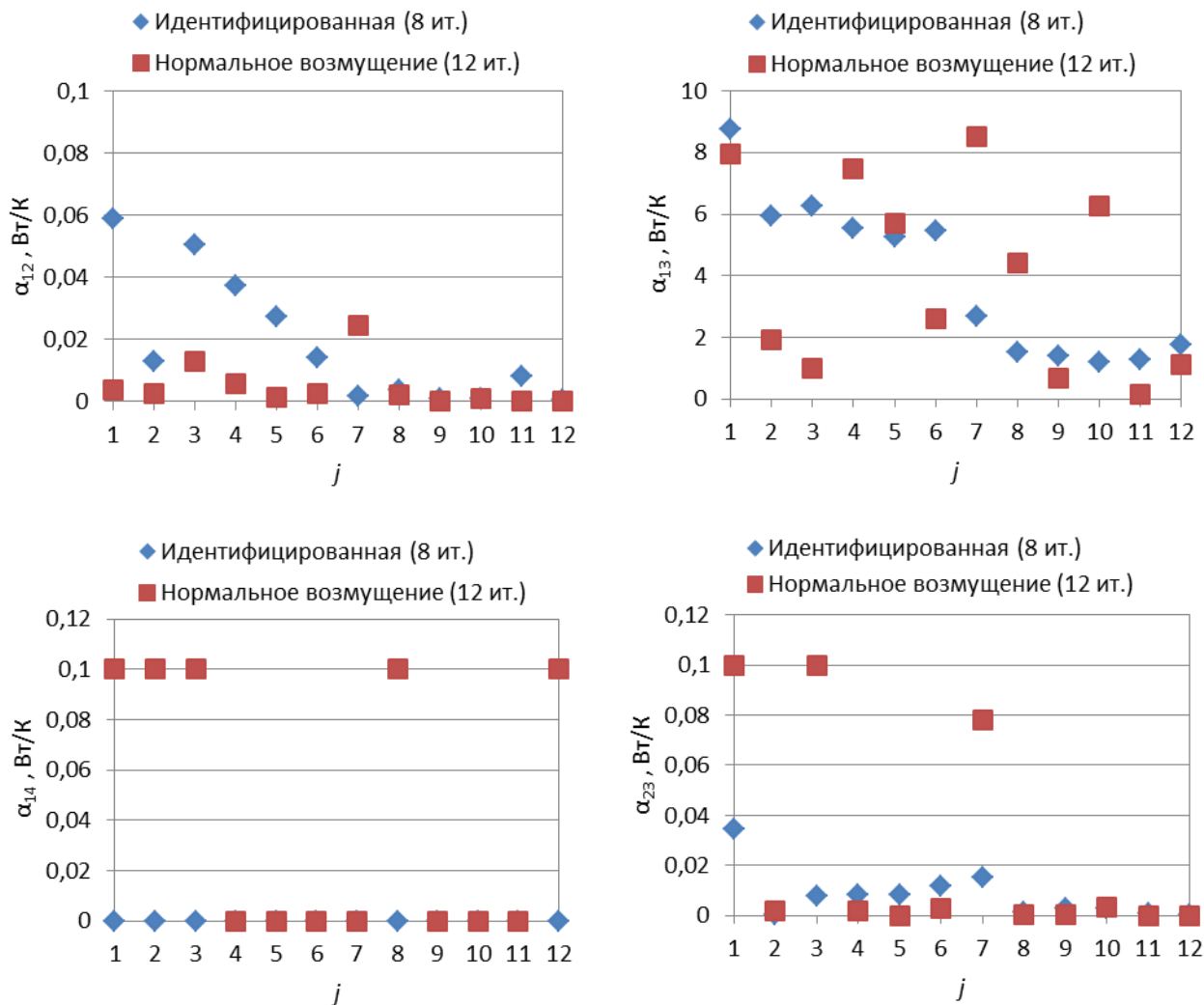


Рисунок 4.15 – Временные зависимости искомым функций при нормальном возмущении «экспериментальной» температуры (МИР)

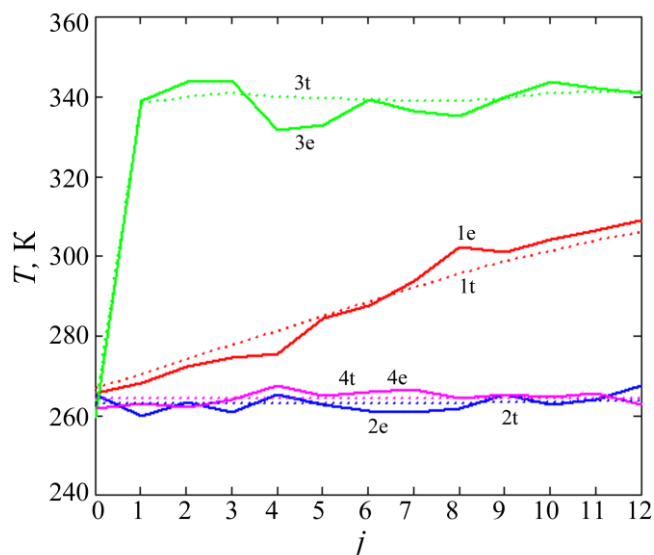


Рисунок 4.16 – Корреляция временных зависимостей расчетных (t) и возмущенных (e) температур на итерации 14 при нормальном возмущении (вариационный метод Тихонова)

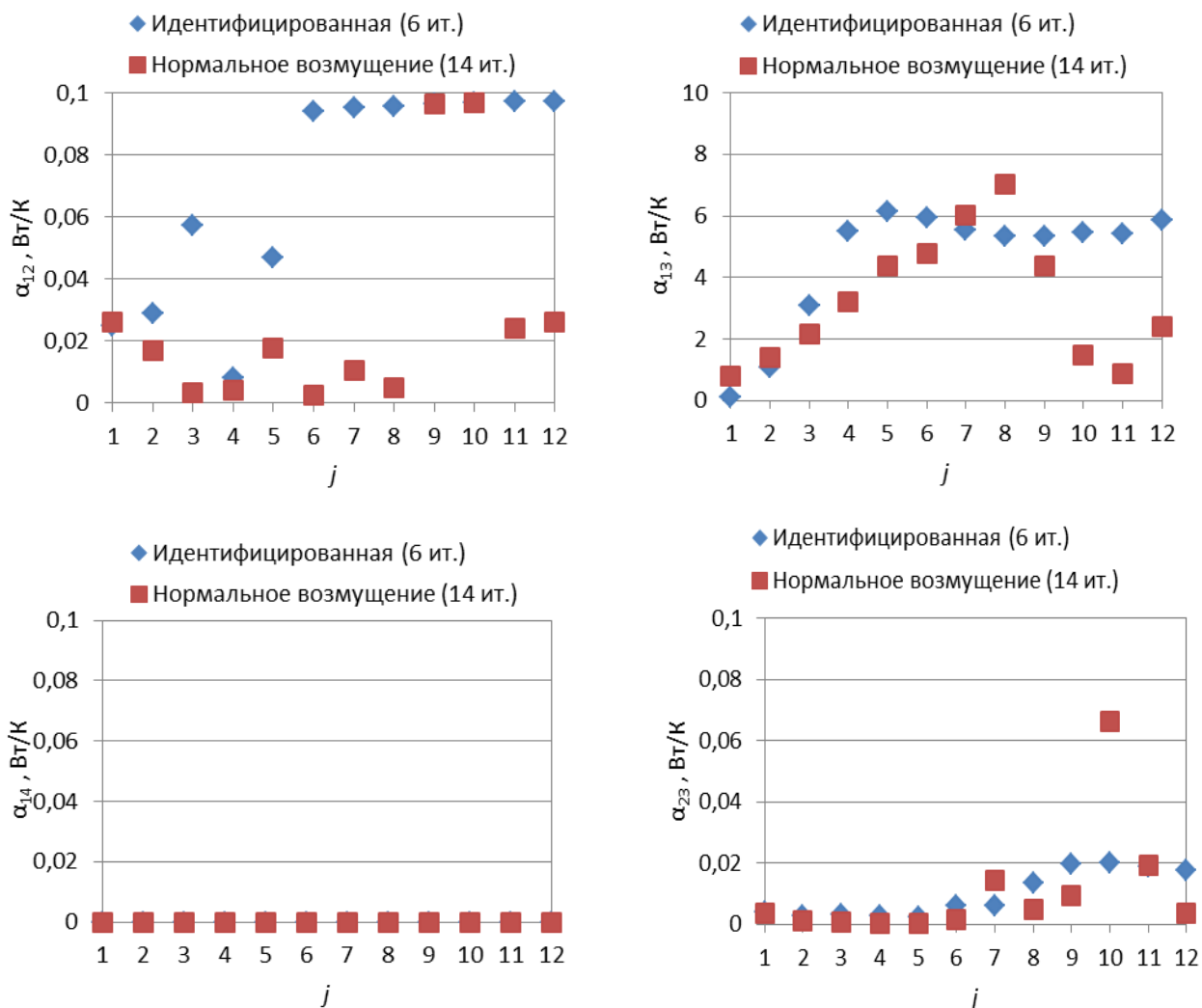


Рисунок 4.17 – Временные зависимости искомых функций при нормальном возмущении «экспериментальной» температуры (вариационный метод Тихонова)

4.4.5. Сравнительный анализ результатов применения методов.

Сравнительный анализ результатов применения метода итерационной регуляризации и вариационного метода Тихонова для идентификации тепловых проводимостей в случае неединственного решения показывает (таблица 4.5), что при одинаковых аналитических выражениях шага спуска (обратного параметру регуляризации) количество итераций, обеспечивающее минимум суммарного температурного функционала, сопоставимо в обоих методах. Уровень погрешности исходных данных по температуре не достигнут ни в одном случае, а итерационные процессы остановлены по условию достижения минимума суммарного функционала. Наименьшее значение суммарного функционала обеспечивает метод итерационной регуляризации, однако устойчивое решение не достигается ни одним из методов.

Оба метода подтвердили свою работоспособность в предельных методических случаях, позволяя идентифицировать функции с нулевыми значениями и обеспечивая сходимость расчетных температур к постоянным функциям экспериментальных. В промежуточных случаях идентифицированные функции имеют приближенный характер.

Идентифицированные значения функций принадлежат приблизительно одному и тому же диапазону значений (рисунок 4.18). Неединственность решения задачи идентификации проявляется в виде качественных отличий функций, соответствующих минимумам функционалов невязок, а также в неустойчивости найденных решений (рисунки 4.15, 4.17). Проблема двойственности решений, найденных различными методами, в общем виде требует применения дополнительных условий отбора решений (усиления вариационного принципа) и является существенной для задач идентификации функций тепловых процессов. Усиление условий отбора функциями чувствительности не решает проблему неединственности решения.

Таблица 4.5 – Спецификация итерационных процессов регуляризации при идентификации тепловых проводимостей в задаче идентификации с неединственным решением

Метод	Начальные приближения	δ_T^2, K^2	m	$J_1^{(m)}, \text{K}^2$	$J_2^{(m)}, \text{K}^2$	$J_3^{(m)}, \text{K}^2$	$J^{(m)}, \text{K}^2$
Аналитический	Нет	–	–	23,0	64,8	44,2	131,9
МИР	Произвольные	1,4	8	14,2	0,6	74,0	88,8
Метод Тихонова	Произвольные	1,4	6	31,3	1,9	197,5	230,7

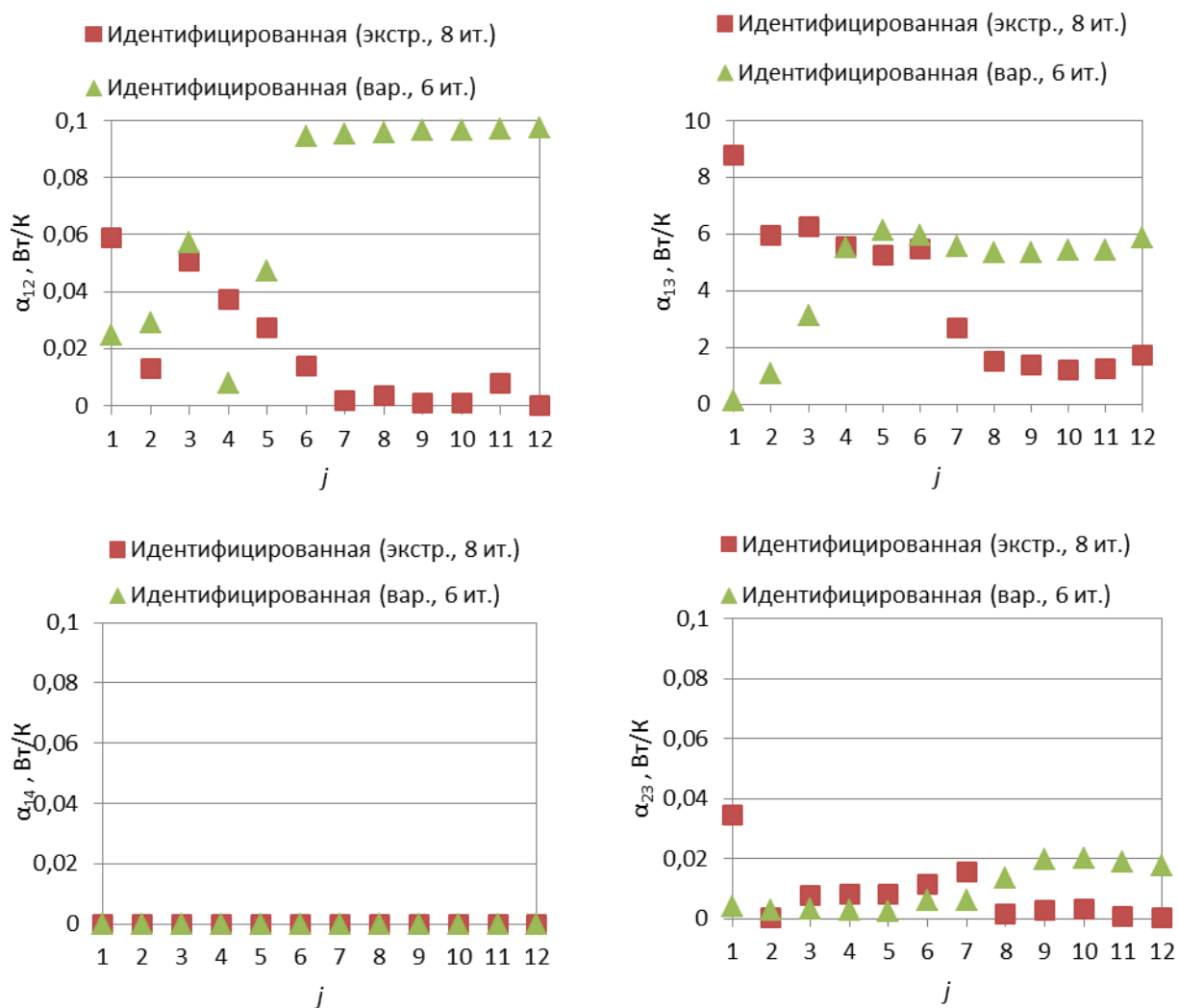


Рисунок 4.18 – Временные зависимости искоемых функций при нормальном возмущении «экспериментальной» температуры (вариационный метод Тихонова)

4.5. Вычислительные эксперименты для задачи идентификации с неустойчивым решением

4.5.1. Условия задачи.

Условия задачи идентификации с неустойчивым решением аналогичны условиям по 5.4.1 – начальные значения искомым проводимостей равны 0,1 Вт/К.

Единственность решения обеспечивается упрощением системы (4.23) до вида (4.47), в котором все искомые функции относятся к одному узлу и выражаются через $\alpha_{23}(\tau)$, которая и регуляризуется.

4.5.2. Метод итерационной регуляризации.

Результаты расчета функционалов температурных невязок приведены в таблице 4.6 и показаны на рисунке 4.19, корреляция расчетных и экспериментальных температур и идентифицированные функции времени на итерациях 1, 36 – на рисунках 4.20-4.24.

Суммарный функционал J достигает минимума уже на итерации 4, однако значение функционала на первых итерациях колеблется, а искомые функции не «заполнены», поэтому итерационный процесс продолжается до итерации 36, после которой значение J стабилизируется вблизи 225 К². Уровень среднеквадратичной ошибки измерения температуры достигнут только для функционала J_3 .

Таблица 4.6 – Значения функционалов-невязок в зависимости от номера итерации

Итерация	J_1	J_2	J_3	J	Итерация	J_1	J_2	J_3	J
1	294,9	30,525	276,7	602	22	96,9	1,3	129,9	228,1
2	78,7	30,528	121,9	231	23	97,4	1,1	130,0	228,4
3	136,0	29,135	165,2	330	24	96,5	0,9	129,9	227,3
4	69,5	28,083	98,9	196	25	96,9	0,7	130,0	227,6
5	132,2	22,616	156,6	311	26	96,2	0,5	129,9	226,6
6	83,0	18,8	115,5	217	27	96,4	0,4	130,0	226,8
7	110,7	10,5	139,1	260,2	28	95,9	0,3	129,9	226,1
8	91,1	7,9	124,8	223,8	29	96,0	0,2	130,0	226,3
9	102,3	5,0	132,8	240,1	30	95,6	0,2	129,9	225,7
10	95,7	5,6	128,8	230,1	31	95,7	0,1	130,0	225,8
11	100,7	6,2	130,5	237,4	32	95,3	0,1	129,9	225,3
12	96,8	6,8	129,3	232,9	33	95,5	0,0	130,0	225,6
13	97,1	4,7	128,4	230,2	34	95,2	0,0	129,9	225,2
14	99,5	4,3	131,2	235,1	35	95,3	0,0	130,0	225,4
15	98,3	3,9	129,3	231,4	36	95,1	0,0	129,9	225,0
16	98,3	3,4	130,4	232,2	37	95,2	0,0	130,0	225,3
17	98,6	2,9	129,7	231,3	38	95,1	0,0	129,9	225,0
18	97,7	2,6	130,1	230,4	39	95,2	0,0	130,0	225,2
19	98,3	2,2	129,9	230,4	40	95,1	0,0	130,0	225,0
20	97,2	1,9	129,9	229,0	41	95,1	0,0	130,0	225,1
21	97,9	1,6	130,0	229,5	42	95,0	0,0	130,0	225,0

По результатам идентификации методом итерационной регуляризации без расчета начальных приближений проверена его применимость в предельных методических случаях: $\alpha_{14} = \alpha_{41} \rightarrow 0$; $T_2 \rightarrow T_2^{(0)} = 273 - 10$ К.

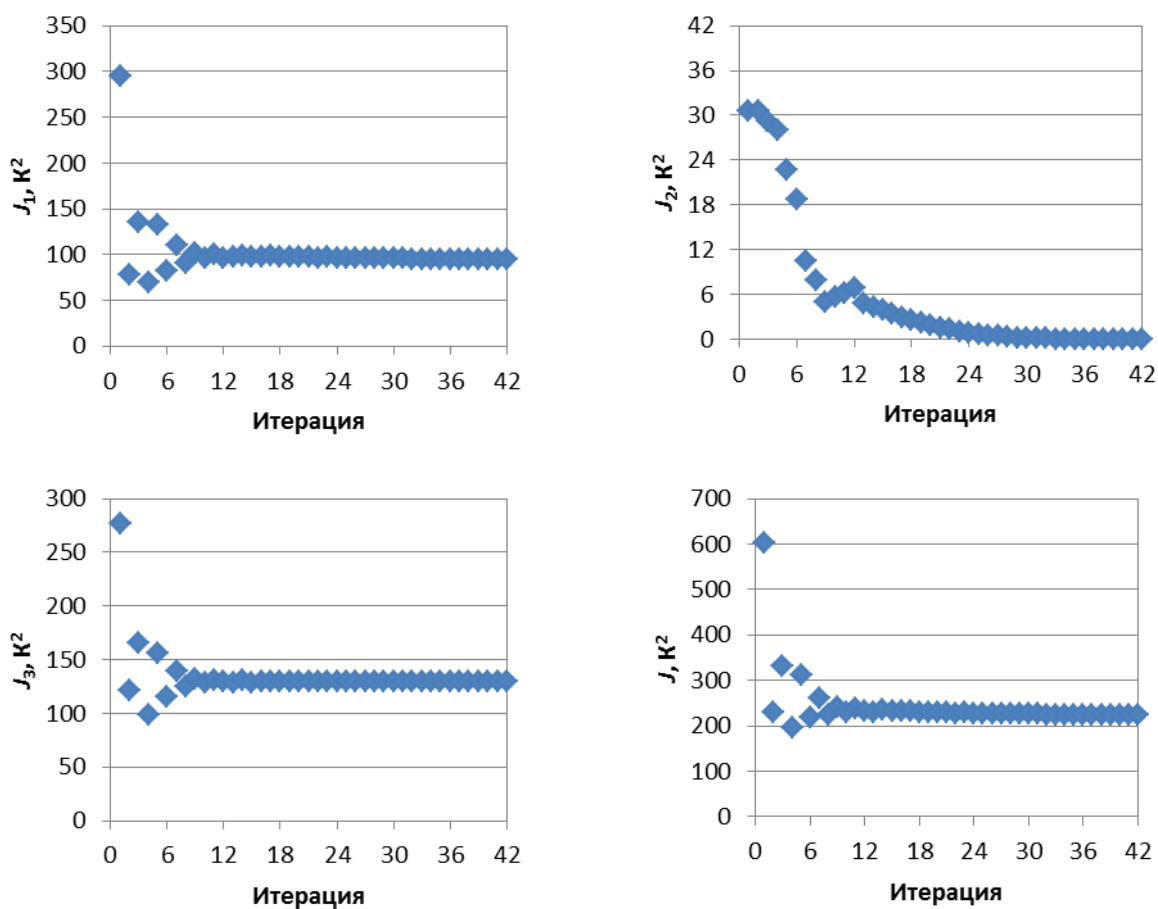


Рисунок 4.19 – Значения функционалов J_1, J_2, J_3, J в зависимости от номера итерации

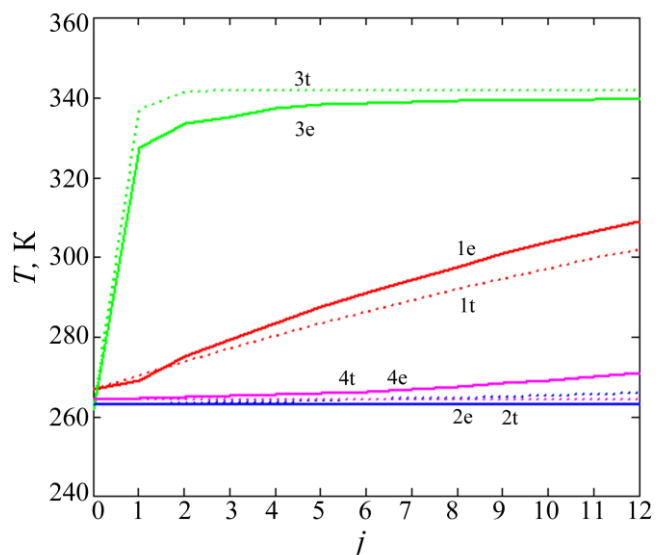


Рисунок 4.20 – Корреляция временных зависимостей расчетных (t) и экспериментальных (e) температур на итерации 1

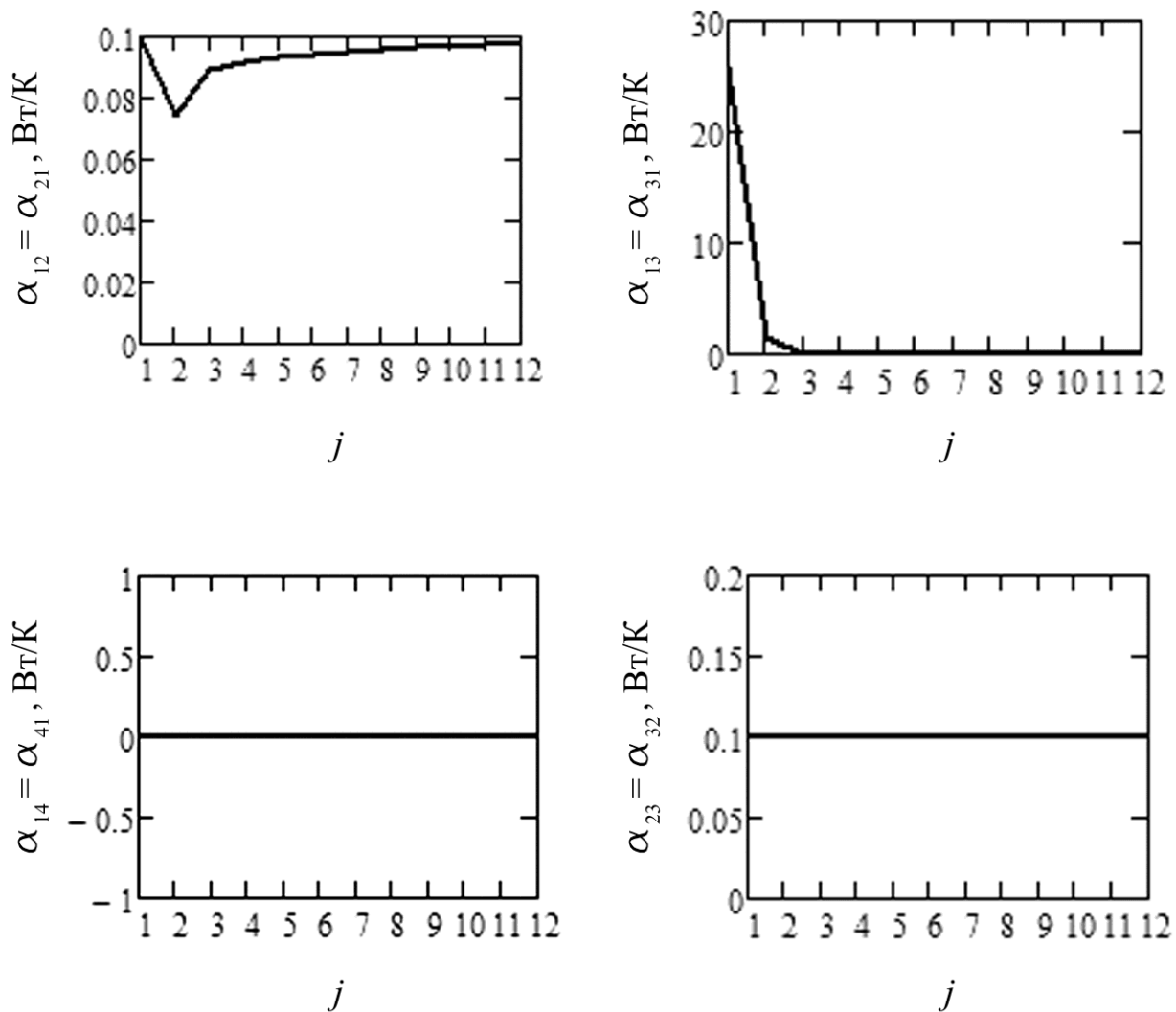


Рисунок 4.21 – Временные зависимости искомых функций на итерации 1

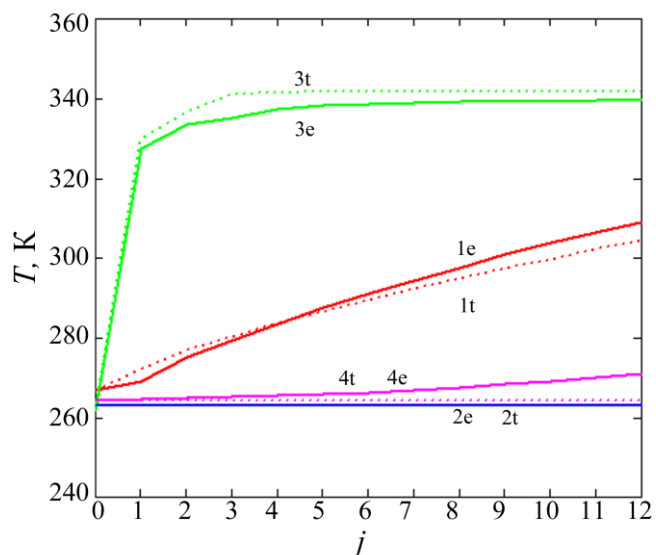


Рисунок 4.22 – Корреляция временных зависимостей расчетных (t) и экспериментальных (e) температур на итерации 36

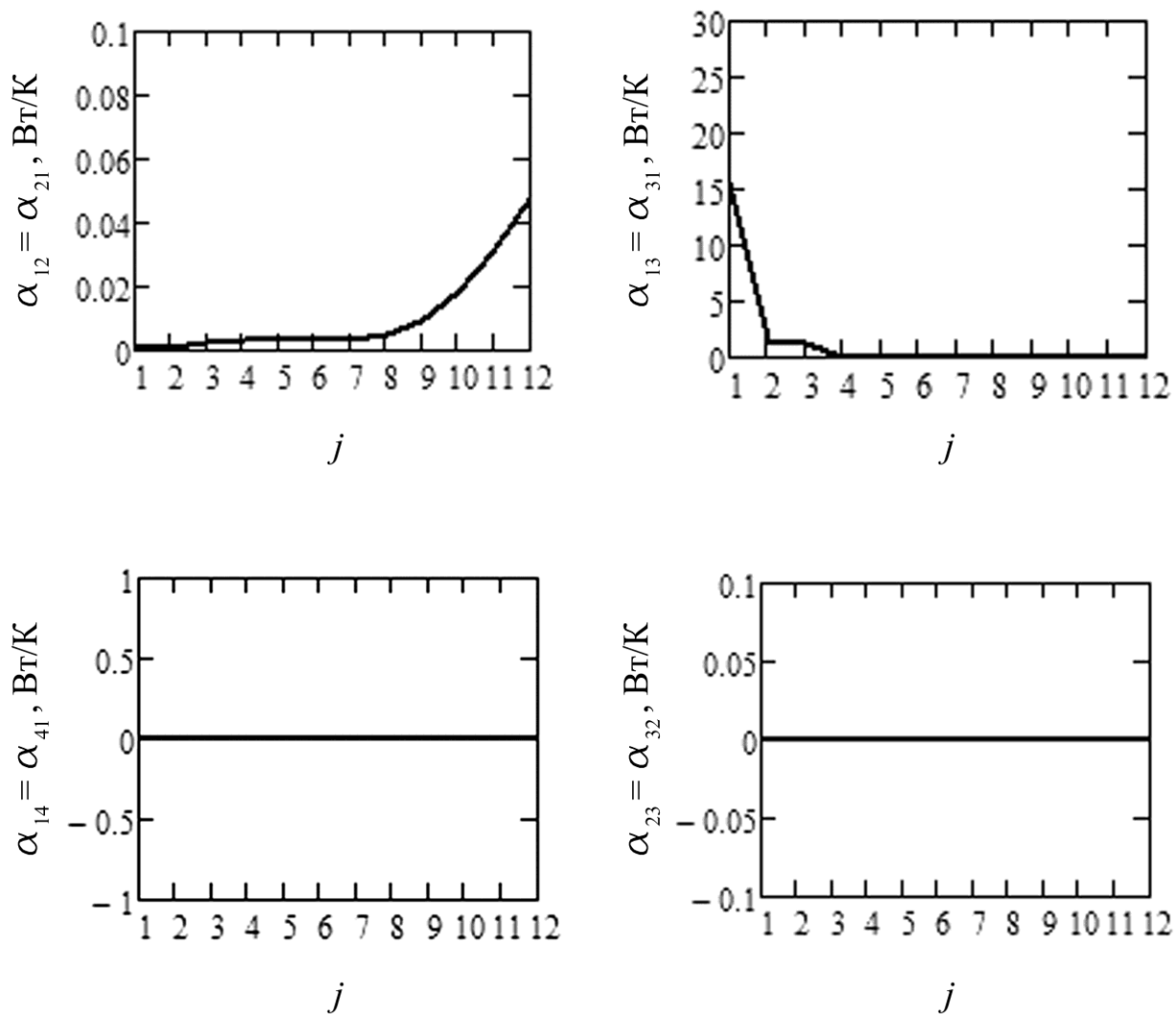


Рисунок 4.23 – Временные зависимости искомых функций на итерации 36

4.5.3. Вариационный метод Тихонова.

Результаты расчета функционалов-невязок приведены в таблице 4.7 и показаны на рисунке 4.24, корреляция расчетных и экспериментальных температур и идентифицированные функции времени на итерациях 1, 12 – на рисунках 4.25-4.28.

Суммарный функционал J достигает минимума уже на итерации 4, однако значение функционала на первых итерациях колеблется, а искомые функции не заполнены, поэтому итерационный процесс продолжается до итерации 27, после которой значение J стабилизируется в диапазоне от 222 до 227 K^2 . Уровень среднеквадратичной ошибки измерения температуры не был достигнут. Уровень среднеквадратичной ошибки измерения температуры достигнут только для функционала J_3 .

По результатам идентификации итерационным методом на основе вариационного метода Тихонова без расчета начальных приближений проверена его применимость в предельных методических случаях: $\alpha_{14} = \alpha_{41} \rightarrow 0$; $T_2 \rightarrow T_2^{(0)} = 273 - 10$ К.

Таблица 4.7 – Значения функционалов-невязок в зависимости от номера итерации

Без расчета нач. пригл.					Без расчета нач. пригл.				
Итерация	J_1	J_2	J_3	J	Итерация	J_1	J_2	J_3	J
1	294,9	31	276,7	602	13	93,6	1,821	126,6	222,1
2	78,7	28	122,0	229	14	95,9	1,403	129,6	226,9
3	136,1	23	166,4	326	15	94,7	1,056	127,8	223,6
4	69,5	20,1	99,2	189	16	94,9	0,798	129,2	224,9
5	131,8	15,7	157,4	305,0	17	95,3	0,592	128,5	224,4
6	82,5	12,9	115,3	210,6	18	94,6	0,426	129,1	224,1
7	109,7	9,739	138,5	257,9	19	95,6	0,303	129,1	225,0
8	89,6	7,518	123,1	220,2	20	94,6	0,208	129,3	224,1
9	99,6	5,694	130,4	235,7	21	95,4	0,142	129,4	224,9
10	93,4	4,28	127,0	224,6	22	94,5	0,094	129,4	224,0
11	97,5	3,197	128,8	229,5	23	95,4	0,06	129,6	225,1
12	93,7	2,413	127,9	224,0	24	94,7	0,034	129,6	224,4

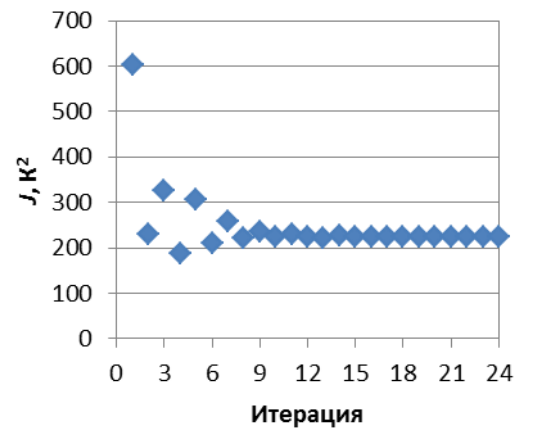
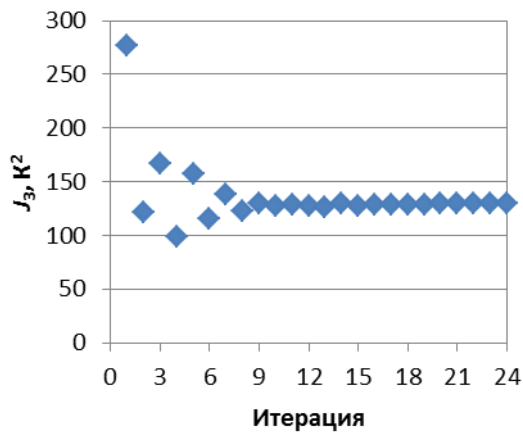
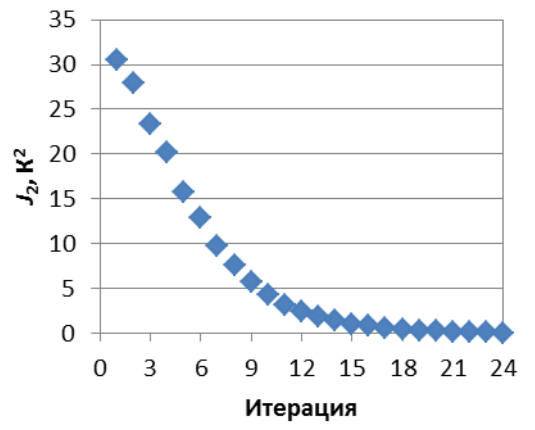
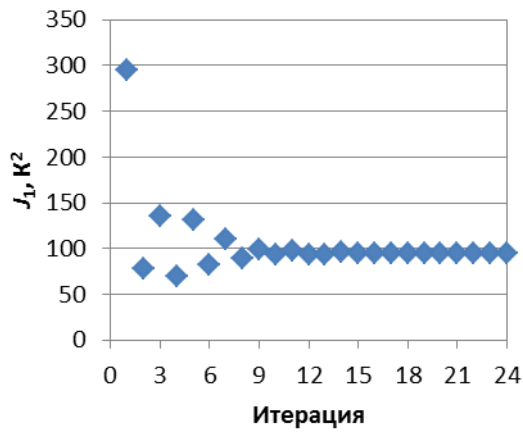


Рисунок 4.24 – Значения функционалов J_1, J_2, J_3, J в зависимости от номера итерации

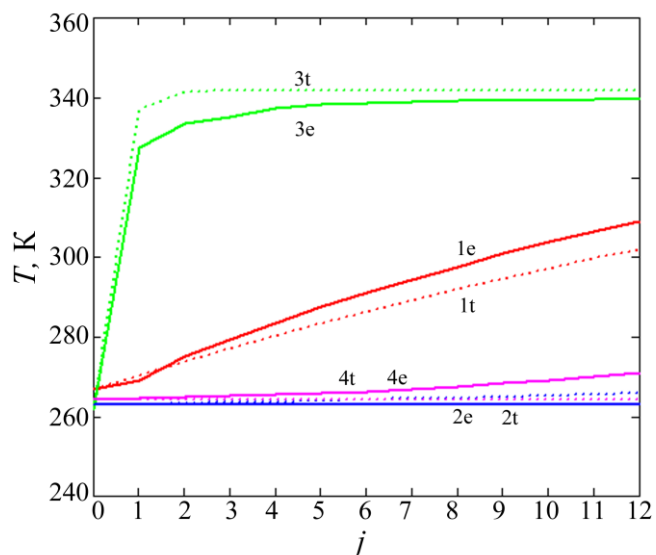


Рисунок 4.25 – Корреляция временных зависимостей расчетных (t) и экспериментальных (e) температур на итерации 1

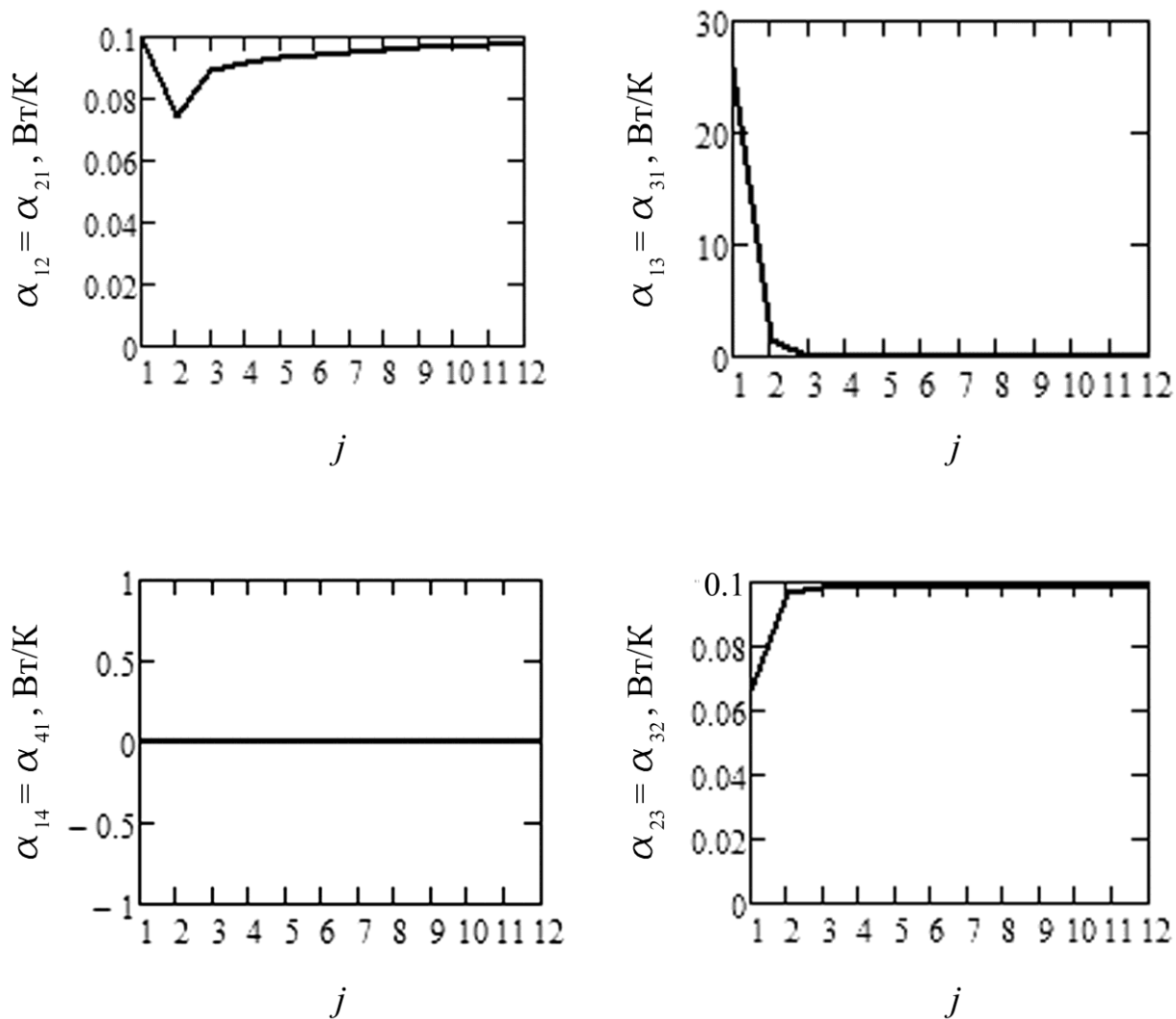


Рисунок 4.26 – Временные зависимости искомых функций на итерации 1

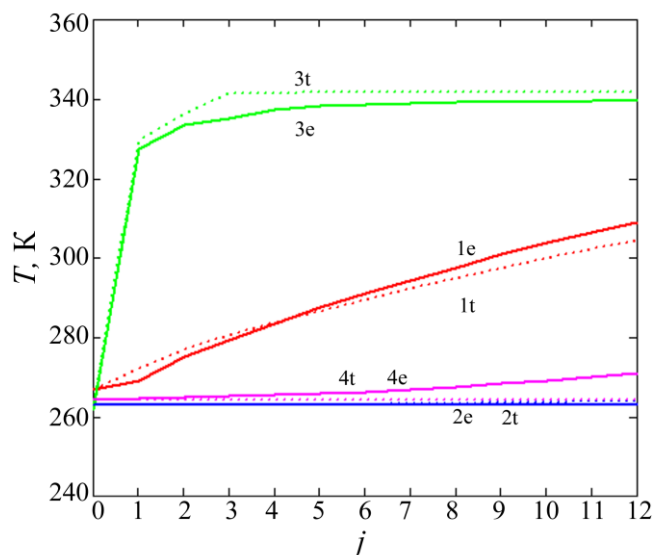


Рисунок 4.27 – Корреляция временных зависимостей расчетных (t) и экспериментальных (e) температур на итерации 12

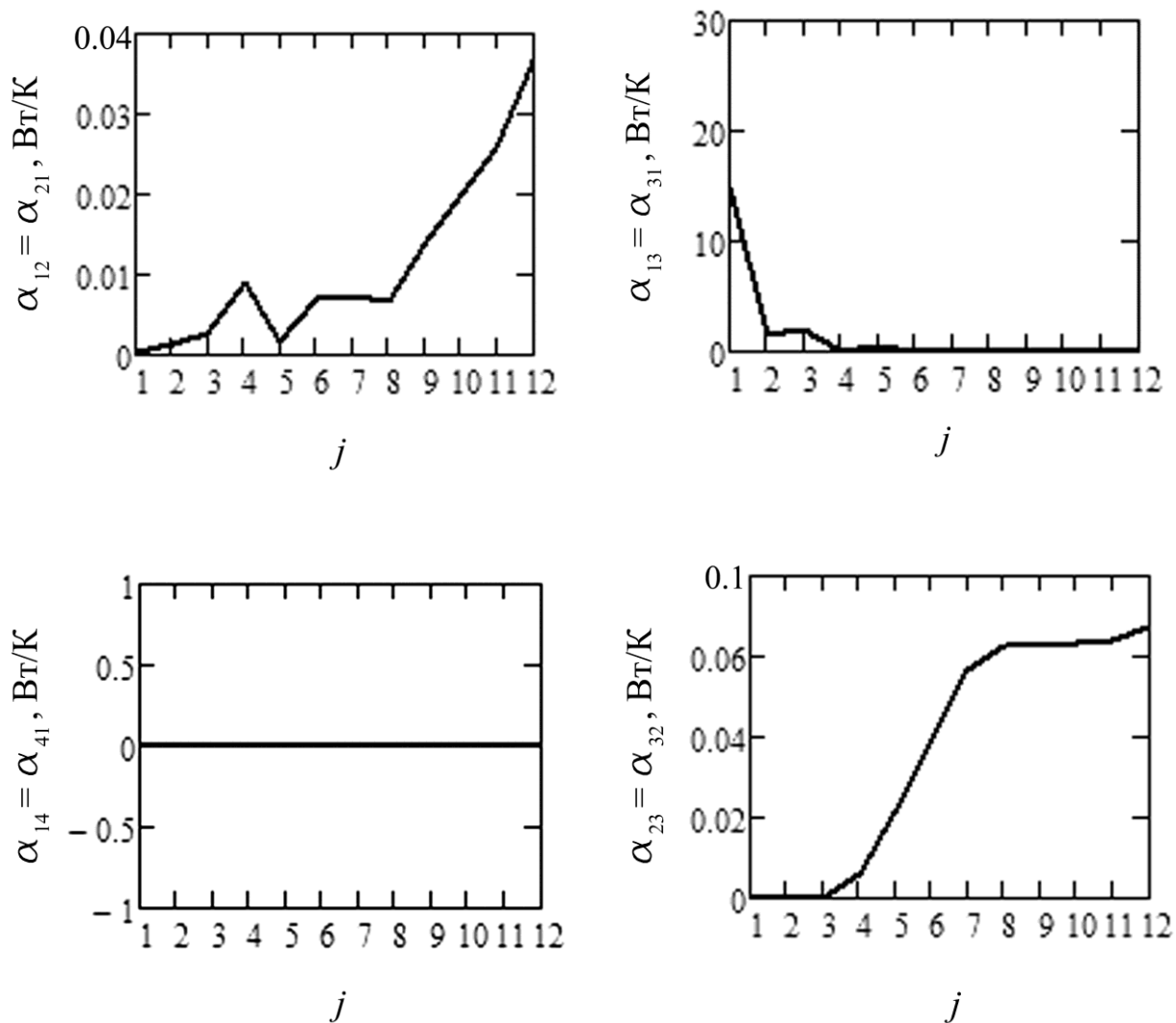


Рисунок 4.28 – Временные зависимости искоемых функций на итерации 12

4.5.4. Проверка решения на устойчивость.

Устойчивость решений по Ляпунову проверяется сопоставлением функций, определенных по возмущенному температурному полю, с идентифицированными функциями, которые считаются «истинными», а рассчитанное по ним температурное поле – «экспериментальным». На «экспериментальное» поле накладываются малые нормальные возмущения, величина которых определяется по допустимой погрешности расчетов – не более 10% от ширины рабочего температурного диапазона (рисунок 4.13, таблица 4.4).

В качестве «истинных» выбраны функции, идентифицированные соответствующим методом, рассчитанные по ним температуры – «экспериментальными».

Оба метода подтвердили свою работоспособность в предельных методических случаях, позволяя идентифицировать функции с нулевыми значениями и обеспечивая сходимость расчетных температур к постоянным функциям экспериментальных. В промежуточных случаях идентифицированные функции имеют приближенный характер.

Результаты применения метода итерационной регуляризации показаны на рисунке 4.30. В отличие от случая исходных экспериментальных температур идентифицированные функции определяются не на итерации 36, а на итерации 40, но являются близкими по значениям и характеру к идентифицированным при отсутствии возмущения.

Результаты применения метода Тихонова показаны на рисунке 4.32. Как и в случае исходных экспериментальных температур идентифицированные функции определяются на итерации 12 по условию замедления сходимости функционала невязки и являются близкими по значениям и характеру к идентифицированным методом Тихонова при отсутствии возмущения «истинным» функциям.

Оба метода обеспечивают устойчивые решения, что следует из сохранения характера расчетных температур и искомым функций при возмущении «экспериментального» температурного поля. Отличие «истинных» функций, идентифицированных методами итерационной регуляризации и Тихонова, вызвано не наложением возмущений на «экспериментальное» температурное поле, а особенностями алгоритмов самих методов.

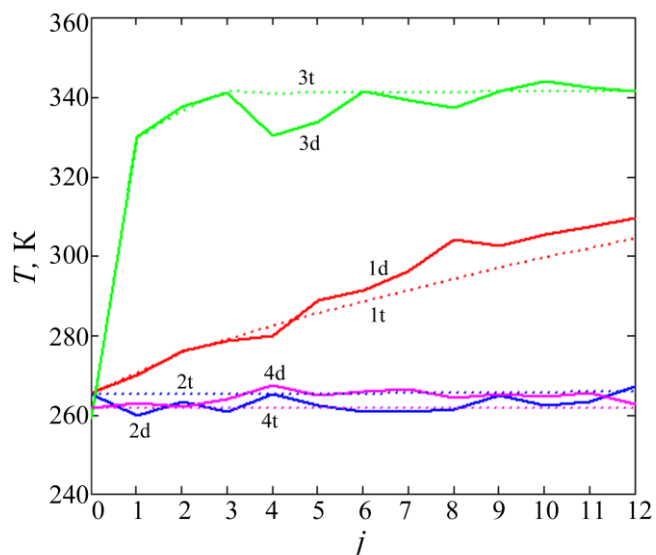


Рисунок 4.29 – Корреляция временных зависимостей расчетных (t) и возмущенных (d) температур на итерации 40 при нормальном возмущении (МИР)

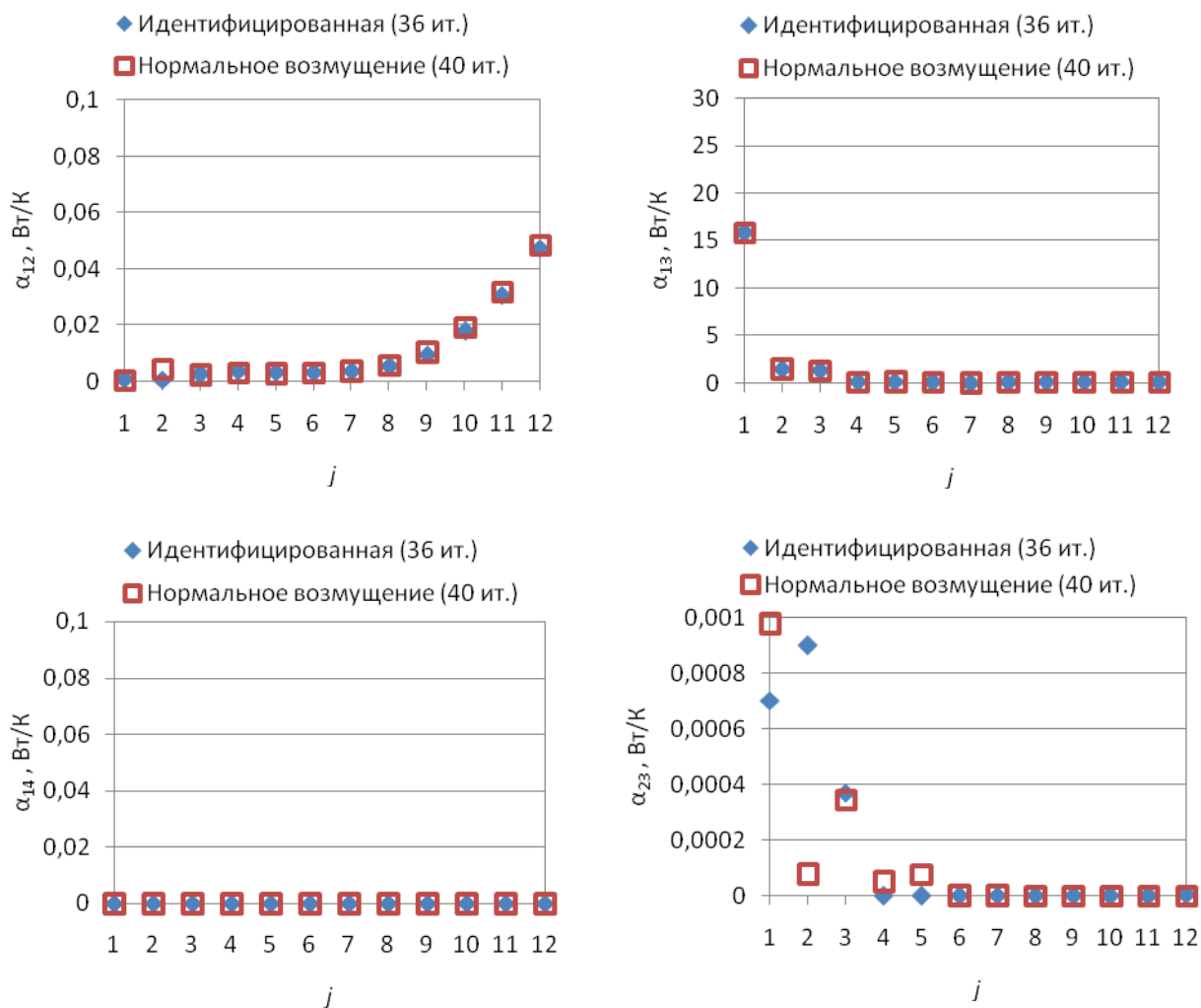


Рисунок 4.30 – Временные зависимости искомых функций при нормальном возмущении «экспериментальной» температуры (МИР)

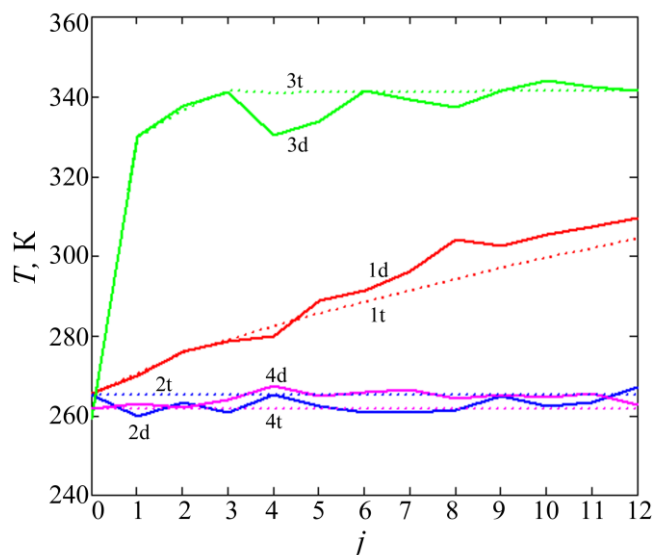


Рисунок 4.31 – Корреляция временных зависимостей расчетных (t) и возмущенных (d) температур на итерации 12 при нормальном возмущении (вариационный метод Тихонова)

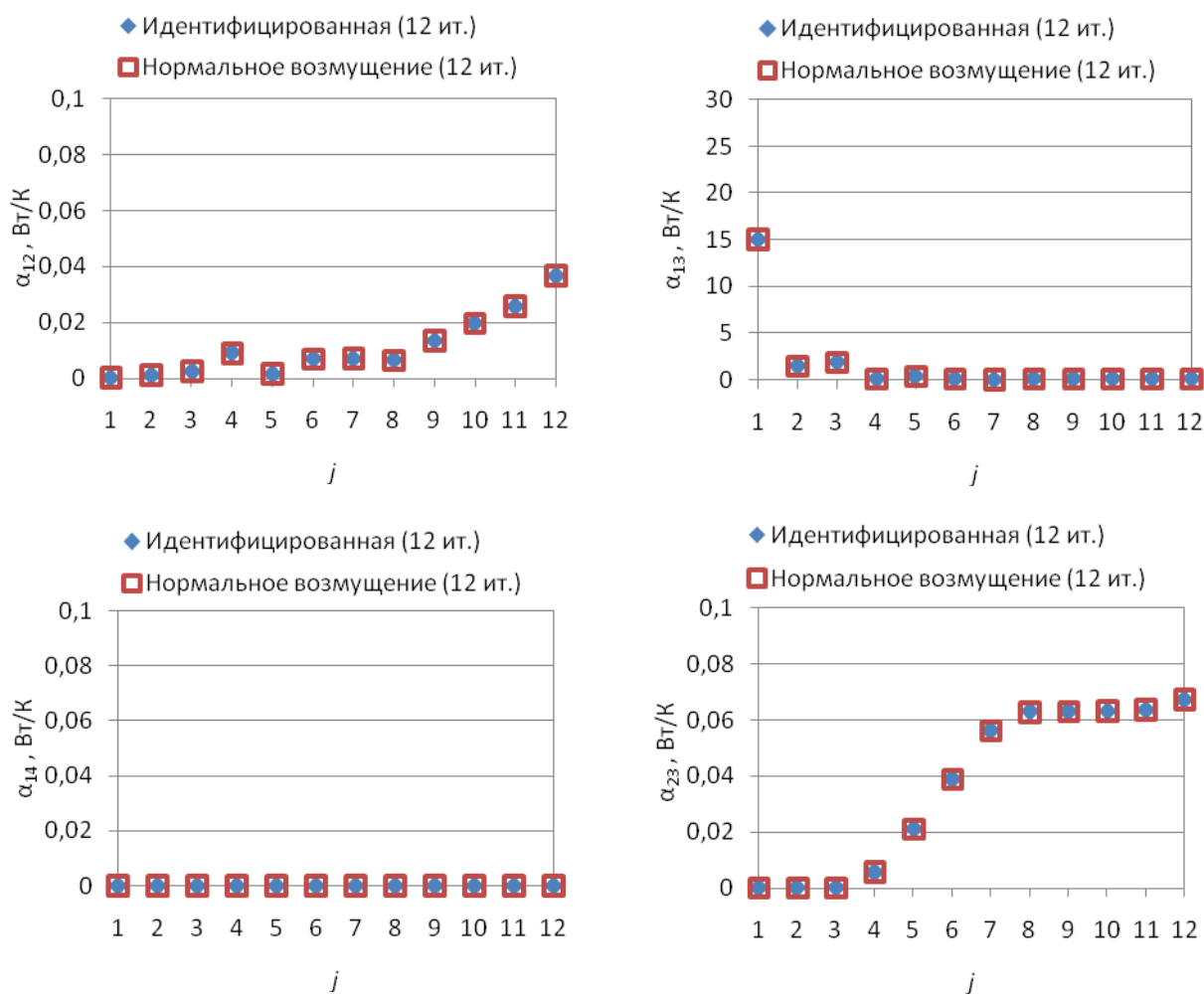


Рисунок 4.32 – Временные зависимости искомых функций при нормальном возмущении «экспериментальной» температуры (вариационный метод Тихонова)

4.5.5. Сравнительный анализ результатов применения методов.

Сравнительный анализ результатов применения метода итерационной регуляризации и вариационного метода Тихонова для идентификации тепловых проводимостей в задаче с неустойчивым решением показывает (таблица 4.8), что при одинаковых аналитических выражениях шага спуска (обратного параметру регуляризации) количество итераций, обеспечивающее минимум суммарного функционала-невязки температуры, меньше в методе Тихонова. Минимальные значения суммарного функционала, достигаемые обоими методами, сопоставимы между собой. Уровень погрешности исходных данных по температуре достигнут только по одной составляющей методом Тихонова, а итерационные процессы остановлены по условию достижения минимума суммарного функционала невязки.

В некоторых ситуациях в конце итерационного процесса появляется необходимость уточнения шага спуска (4.47) по условию обеспечения неотрицательных искомым функций. В связи с этим, аналитический шаг спуска может рассматриваться как максимальное значение диапазона $0 \leq \beta \leq \beta_{\max}$, в пределах которого β выбирается адаптивно.

Идентифицированные значения функций находятся в одном и том же диапазоне значений и имеют одинаковый характер. Неустойчивость решения проявляется локально в виде отличий функций α_{23} , соответствующих минимумам функционалов невязок, вызванных особенностями применения конкретного метода (рисунок 4.33).

Таким образом, полученное единое аналитическое выражение (4.39) шага спуска метода итерационной регуляризации, обратное выражению (4.46) параметра регуляризации в итерационном методе на основе метода Тихонова, показало свою работоспособность, позволяя получить условно устойчивое решение.

Таблица 4.8 – Спецификация итерационных процессов регуляризации при идентификации тепловых проводимостей в задаче идентификации с неустойчивым решением

Метод	Начальные приближения	δ_T^2, K^2	m	$J_1^{(m)}, \text{K}^2$	$J_2^{(m)}, \text{K}^2$	$J_3^{(m)}, \text{K}^2$	$J^{(m)}, \text{K}^2$
Аналитический	Нет	–	–	23,0	64,8	44,2	131,9
МИР	Произвольные	1,4	36	95,1	0,0	129,9	225,0
Метод Тихонова	Произвольные	1,4	12	93,7	2,413	127,9	224,0

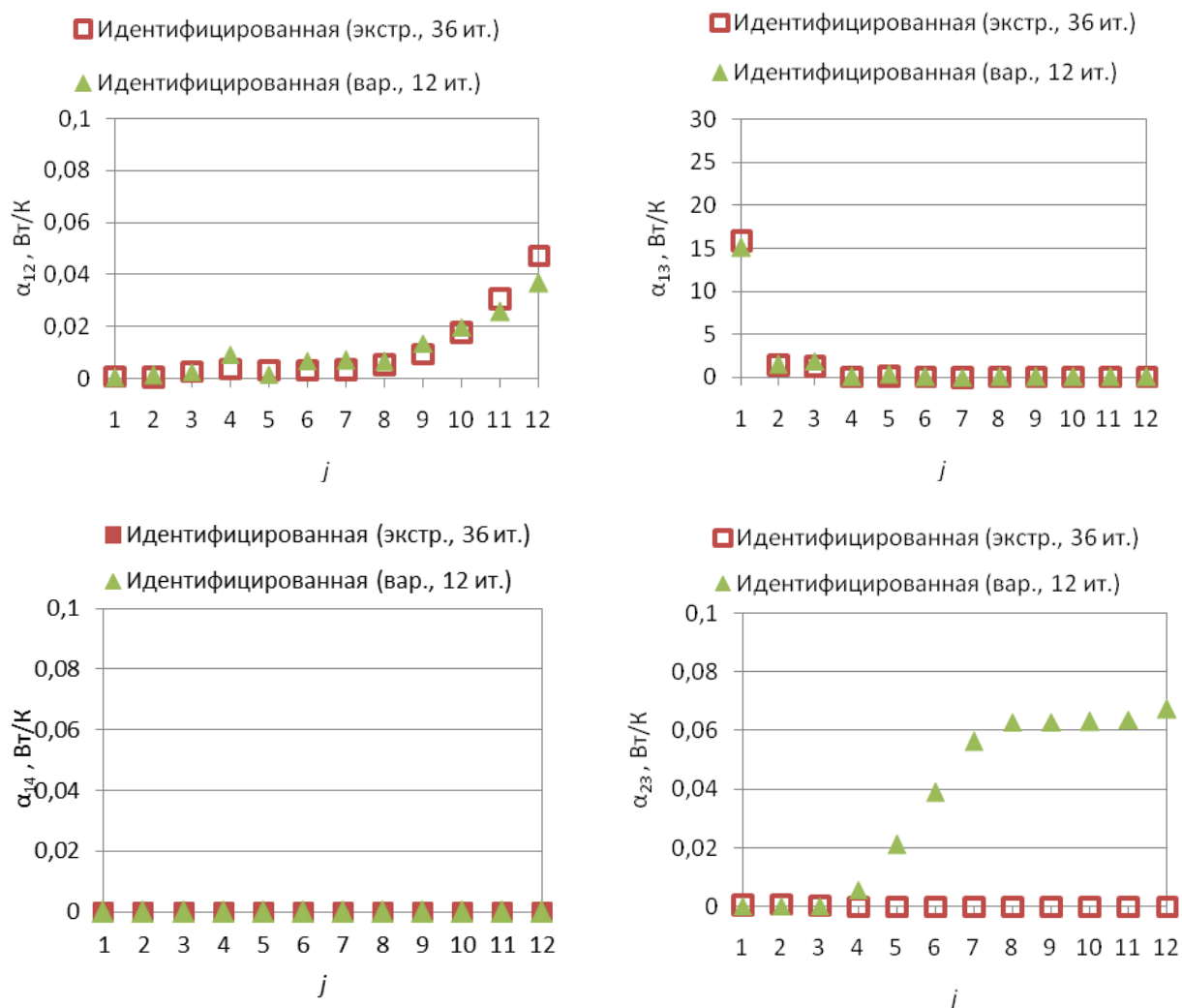


Рисунок 4.33 – Временные зависимости искомых функций при нормальном возмущении «экспериментальной» температуры

4.6. Выводы по главе 4

1. Получены аналитические выражения шага спуска (параметра регуляризации), единые для методов итерационной регуляризации на основе функционала невязки температуры и сглаживающего функционала. При замене в выражении шага спуска функции градиента функционала температурной невязки разностью значений искомой функции на двух соседних итерациях получается выражение безразмерного шага спуска, обратного параметру регуляризации.

2. По результатам вычислительных экспериментов установлено, что в задачах идентификации с неустойчивым решением единое аналитическое выражение шага спуска позволяет получить условно устойчивое решение. В то же время, вариационный принцип, основанный на отборе решений в классе векторов, невязки которых с нормальным решением сопоставимы с точностью задания исходных данных, не исключает неединственности решения (в задачах с неединственным решением) и требует усиления дополнительными условиями.

3. Условная устойчивость решения подтверждается сохранением характера расчетных температур и функций при возмущении температурного поля и совпадением решения с функциями, идентифицированными при отсутствии возмущения.

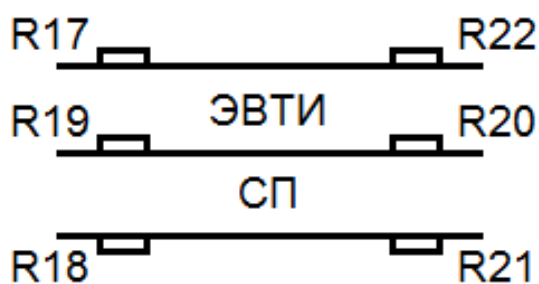
5. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМАХ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ТЕПЛОВЫХ ВАКУУМНЫХ ИСПЫТАНИЙ

5.1. Идентификация теплофизических свойств экранно-вакуумной тепловой изоляции и сотовой панели прямым алгебраическим методом

Рассмотрим задачу идентификации параметров тепловой модели характерного элемента конструкции КА в виде многослойной теплопередающей стенки, состоящей из последовательно расположенных ЭВТИ и сотовой панели (СП). СП устанавливается на силовом каркасе и вместе с ним образует несущую конструкцию КА.

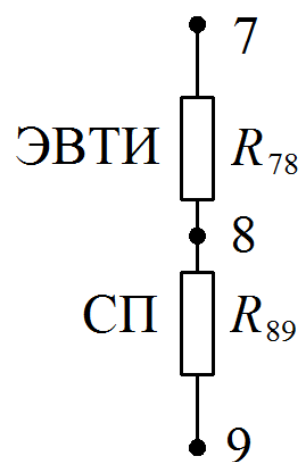
Расчет проводимостей ЭВТИ и СП проводится по показаниям двух групп аналоговых датчиков температуры (АДТ) в режимах тепловых вакуумных испытаний (ТВИ), имитирующих предельные условия эксплуатации (рисунок 5.1): «Д1» – внешний нагрев инфракрасными имитаторами (ИКИ), «Д2», «Д4» – охлаждение криоэкранами с температурой 83 К, «Д3» – внутренний нагрев испытательного образца за счет тепловыделений аппаратуры и электронагревателей [214], [270].

Прямой расчет проводимостей невозможен из-за отсутствия экспериментальных значений плотности теплового потока, проходящего через многослойную стенку, поэтому проводимости ЭВТИ и СП уточняются решением задачи идентификации МСП в удельных величинах, включающей три узла, соответствующие поверхностям МРП: узел 7 – внешняя поверхность ЭВТИ, узел 8 – внешняя поверхность СП, узел 9 – внутренняя поверхность СП (рисунок 5.2).



R17, R22 – АДТ снаружи ЭВТИ
R19, R20 – АДТ под ЭВТИ
R18, R21 – АДТ под СП

Рисунок 5.1 – Размещение АДТ на ЭВТИ и СП «Б1»



7 – внешняя поверхность ЭВТИ
8 – внешняя поверхность СП
9 – внутренняя поверхность СП

Рисунок 5.2 – МСП ЭВТИ и СП «Б1»

Узел 7 – модельная оболочка ЭВТИ толщиной 2,59 мм (толщина ЭВТИ в сжатом состоянии), имеющей с изолируемой поверхностью тепловой контакт, проводимость которого соответствует проводимости ЭВТИ в поперечном направлении. Плотность модельной оболочки равна

$$\rho_7 = \rho_{\text{ЭВТИ}} = \frac{m_{\text{ЭВТИ}}}{F\delta_{\text{ЭВТИ}}} \approx 1,544 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3, \quad (5.1)$$

где $m_{\text{ЭВТИ}} = 0,4$ кг – масса ЭВТИ площадью $F = 1$ м²; $\delta_{\text{ЭВТИ}} = 2,59 \cdot 10^{-3}$ м – толщина ЭВТИ в сжатом состоянии. Удельная теплоемкость оболочки ЭВТИ принята равной $c_7 = c_{\text{ЭВТИ}} = 1000$ Дж/(кг·К).

Узлы 8, 9 соответствуют поверхностям МРП СП, моделирующим две алюминиевые пластины толщиной

$$\delta_8 = \delta_9 = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad (5.2)$$

между которыми задана тепловая проводимость, эквивалентная теплопроводности сот в поперечном направлении. Плотность пластин пересчитывается с учетом массы сот:

$$\rho_8 = \rho_9 \approx 3,041 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^4. \quad (5.3)$$

Удельная теплоемкость модельных поверхностей СП равна

$$c_8 = c_9 \approx 747,4 \text{ Дж/(кг·К)}. \quad (5.4)$$

Удельное сопротивление ЭВТИ имеет начальное значение

$$R_{78} = R_{th, \text{ЭВТИ}} = 10 \text{ м}^2 \cdot \text{К/Вт}, \quad (5.5)$$

а удельное сопротивление СП

$$R_{89} = R_{th, \text{СП}} = \frac{\Delta T_{\text{СП}}}{\Delta T_{\text{ЭВТИ}}} R_{th, \text{ЭВТИ}} = \frac{2,0}{31,3} 10 \approx 0,639 \text{ (м}^2 \cdot \text{К/Вт)}, \quad (5.6)$$

где разности температур определены экспериментально.

Соответствующие удельные проводимости:

$$\alpha_{78} = \alpha_{th, \text{ЭВТИ}} = \frac{1}{R_{th, \text{ЭВТИ}}} = 0,1 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}. \quad (5.7)$$

$$\alpha_{89} = \alpha_{th, \text{СП}} = \frac{1}{R_{th, \text{СП}}} \approx 1,565 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}. \quad (5.8)$$

Система уравнений математической модели с сосредоточенными параметрами записывается в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_7(\tau)}{d\tau} &= \\ &= \frac{1}{\rho_7 c_7 \delta_7} \left[q_{s,7} - \sigma \varepsilon_7 (T_7(\tau)^4 - T_R^4) - \alpha_{78} (T_7(\tau) - T_8(\tau)) \right], \\ \frac{dT_8(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{\rho_8 c_8 \delta_8} \left[-\alpha_{78} (T_8(\tau) - T_7(\tau)) - \alpha_{89} (T_8(\tau) - T_9(\tau)) \right], \\ \frac{dT_9(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{\rho_9 c_9 \delta_9} \left[-\alpha_{89} (T_9(\tau) - T_8(\tau)) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (5.9)$$

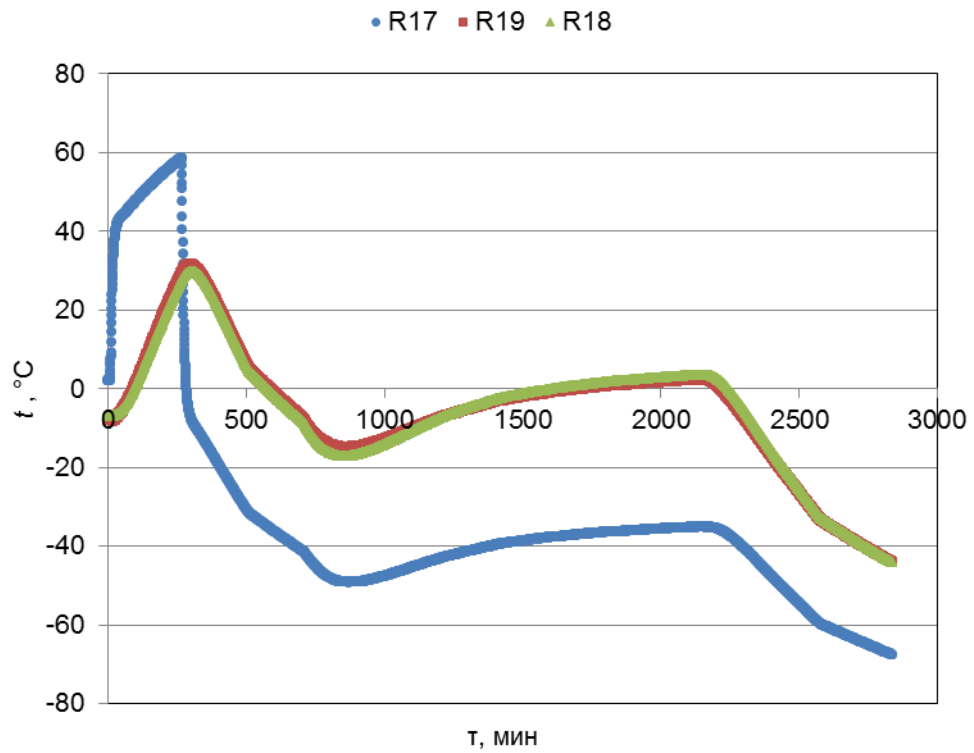
Для определения коэффициентов α_{78} , α_{89} достаточно двух уравнений системы (5.9). Первое уравнение нелинейно, поэтому задача решается с использованием второго и третьего:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_8 c_8 \delta_8 = \rho_9 c_9 \delta_9, \\ \frac{dT_8(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\rho_8 c_8 \delta_8} \left[-\alpha_{78} (T_8(\tau) - T_7(\tau)) - \alpha_{89} (T_8(\tau) - T_9(\tau)) \right], \\ \frac{dT_9(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\rho_9 c_9 \delta_9} \left[-\alpha_{89} (T_9(\tau) - T_8(\tau)) \right] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

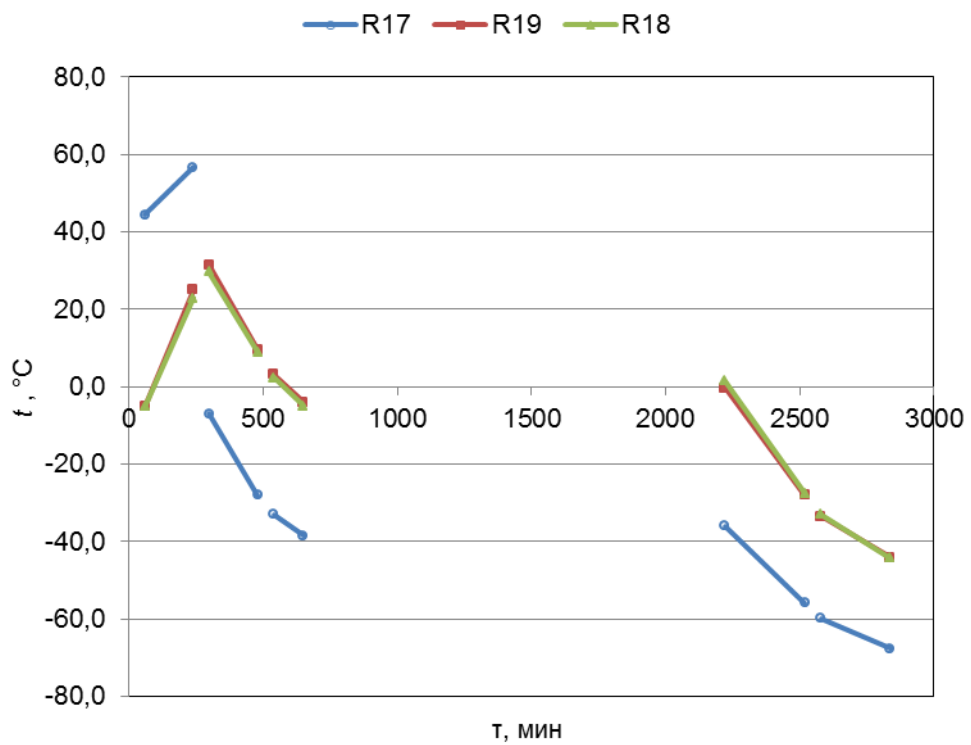
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_8 c_8 \delta_8 = \rho_9 c_9 \delta_9, \\ \frac{dT_8(\tau)}{d\tau} = \frac{\alpha_{78}}{\rho_8 c_8 \delta_8} (T_7(\tau) - T_8(\tau)) - \frac{dT_9(\tau)}{d\tau}, \\ \frac{dT_9(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\rho_9 c_9 \delta_9} \left[\alpha_{89} (T_8(\tau) - T_9(\tau)) \right] \end{array} \right\} \Rightarrow \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho_8 c_8 \delta_8 = \rho_9 c_9 \delta_9, \\ \frac{\alpha_{78}}{\rho_8 c_8 \delta_8} = \frac{1}{T_7(\tau) - T_8(\tau)} \left[\frac{dT_8(\tau)}{d\tau} + \frac{dT_9(\tau)}{d\tau} \right], \\ \frac{\alpha_{89}}{\rho_9 c_9 \delta_9} = \frac{1}{T_8(\tau) - T_9(\tau)} \frac{dT_9(\tau)}{d\tau} \end{array} \right\}.$$

Проводимости α_{78} ЭВТИ и α_{89} ТСП идентифицируются по линейным аппроксимациям экспериментальной температуры по группам датчиков R17, R19, R18 (рисунок 5.3) и R22, R20, R21 (рисунок 5.4) в режимах «Д1», «Д2», «Д4».

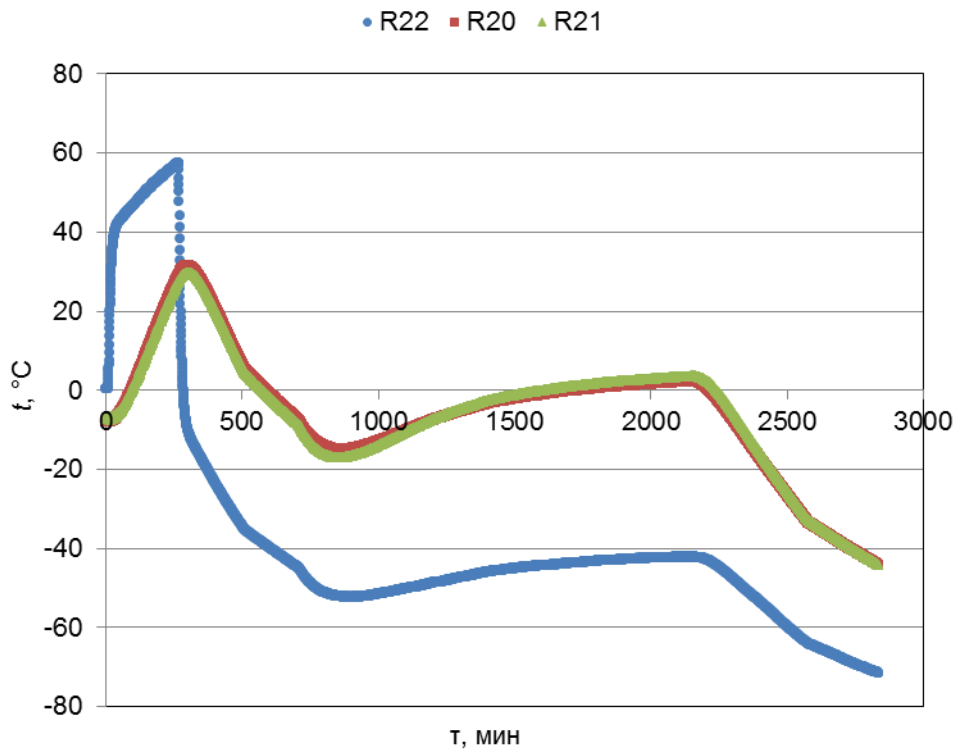


а – результаты испытаний

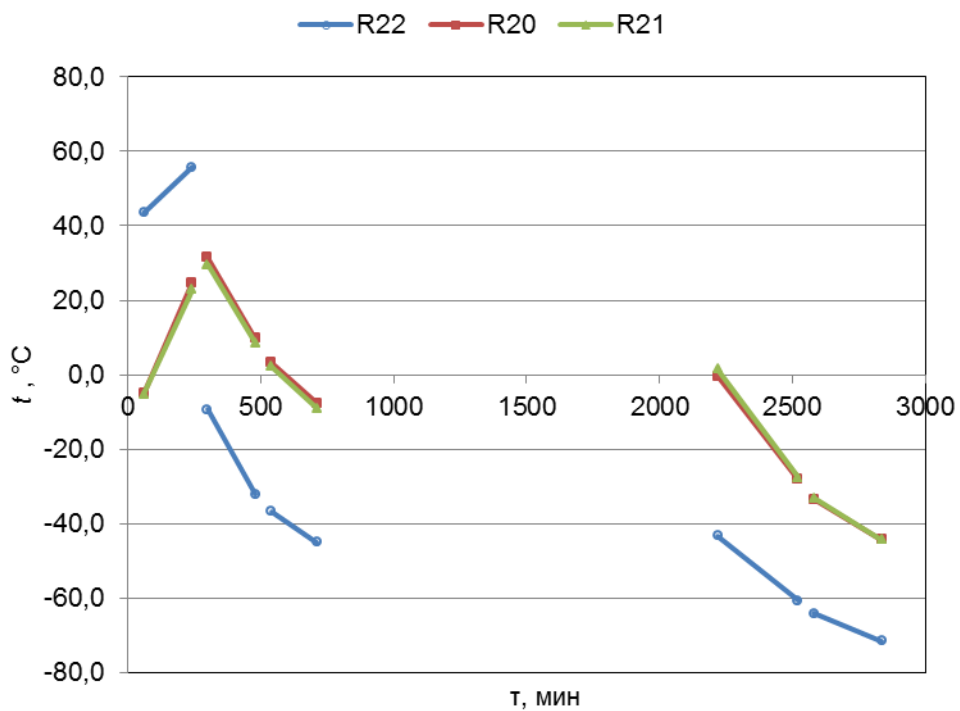


б – линейные аппроксимации

Рисунок 5.3 – Экспериментальные температуры по датчикам R17, R19, R18



а – результаты испытаний



б – линейные аппроксимации

Рисунок 5.4 – Экспериментальные температуры по датчикам R22, R20, R21

Таблица 5.1 – Результаты идентификации проводимости ЭВТИ и ТСП по линейным аппроксимациям экспериментальных температур датчиков R17, R19, R18

Режим	τ , мин	$\Delta\tau$, с	T_7 , °C	T_8 , °C	T_9 , °C	ΔT_8 , °C	ΔT_9 , °C	$\alpha_{78} \cdot 10^6 / (\rho\delta)_8$, 1/с	$\alpha_{89} \cdot 10^6 / (\rho\delta)_9$, 1/с
Испытания									
Д1	60		44,4	-5,1	-5,1				
	240	10800	56,7	25,0	22,9	30,1	28,0	169,7	1235
Д2	300		-7,0	31,5	29,7				
	480	10800	-28,1	9,6	8,9	-21,9	-20,8	104,9	некорректное
Д2	540		-33,0	3,2	2,3				
	650	6603	-38,5	-4,0	-5,0	-7,2	-7,3	63,65	некорректное
Д4	2220		-36,0	-0,3	1,5				
	2520	18000	-55,9	-28,1	-27,5	-27,8	-29,0	113,5	2685
Д4	2580		-59,9	-33,5	-33,0				
	2836	15360	-67,7	-44,2	-44,3	-10,7	-11,3	60,95	некорректное

Таблица 5.2 – Результаты идентификации проводимости ЭВТИ и ТСП по линейным аппроксимациям расчетных и экспериментальных температур датчиков R22, R20, R21

Режим	τ , мин	$\Delta\tau$, с	T_7 , °C	T_8 , °C	T_9 , °C	ΔT_8 , °C	ΔT_9 , °C	$\alpha_{78} \cdot 10^6 / (\rho\delta)_8$, 1/с	$\alpha_{89} \cdot 10^6 / (\rho\delta)_9$, 1/с
Испытания									
Д1	60		43,6	-5,0	-5,3				
	240	10800	55,7	24,8	22,8	29,8	28,1	173	1301
Д2	300		-9,3	31,4	29,5				
	480	10800	-32,1	9,7	8,6	-21,7	-20,9	94,4	некорректное
Д2	540		-36,8	3,2	2,2				
	710	10200	-45,0	-7,7	-9,0	-10,9	-11,2	58,1	некорректное
Д4	2220		-43,3	-0,4	1,4				
	2520	18000	-60,8	-28,2	-27,6	-27,8	-29,0	96,8	2685
Д4	2580		-64,2	-33,5	-33,1				
	2836	15360	-71,6	-44,3	-44,3	-10,8	-11,2	52,5	некорректное

Таблица 5.3 – Удельные тепловая проводимость и тепловое сопротивление ЭВТИ по линейным аппроксимациям экспериментальных температур двух групп датчиков

Режим	α_{78} , Вт/(м ² ·К)			R_{78} , м ² ·К/Вт		
	R17, R19, R18	R22, R20, R21	CA	R17, R19, R18	R22, R20, R21	CA
Д1, конец	0,3086	0,3155	0,3120	3,2	3,2	3,2
нагрев ИКИ	через 240 минут нагрева инфракрасными имитаторами 900 Вт/м ²					
Д2, начало	0,1907	0,1716	0,1811	5,2	5,8	5,5
охлаждение	через 180 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внешнего нагрева					
Д2, конец	0,1157	0,1056	0,1107	8,6	9,5	9,0
охлаждение	через 350 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внешнего нагрева					
Д4, начало	0,2064	0,1760	0,1912	4,8	5,7	5,2
охлаждение	через 360 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внутреннего нагрева					
Д4, конец	0,1108	0,0954	0,1031	9,0	10,5	9,7
охлаждение	через 676 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внутреннего нагрева					

Таблица 5.4 – Удельные тепловая проводимость и тепловое сопротивление СП по линейным аппроксимациям экспериментальных температур двух групп датчиков

Режим	α_{89} , Вт/(м ² ·К)			R_{89} , м ² ·К/Вт		
	R17, R19, R18	R22, R20, R21	CA	R17, R19, R18	R22, R20, R21	CA
Д1, конец	2,24	2,37	2,31	0,445	0,423	0,434
нагрев ИКИ	через 240 минут нагрева инфракрасными имитаторами 900 Вт/м ²					
Д4, начало	4,88	4,88	4,88	0,205	0,205	0,205
охлаждение	через 360 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внутреннего нагрева					

Идентифицированные значения проводимостей, отнесенные к $(\rho c \delta)$, приведены в таблицах 5.1, 5.2. Для расчета удельной проводимости (таблицы 5.3, 5.4) используются значения свойств, принятые в тепловой модели:

$$\rho c \delta = (\rho c \delta)_g = (\rho c \delta)_9 \approx 1,818 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}). \quad (5.11)$$

При тепловом сопротивлении 10 (м²·К)/Вт контакта модельных поверхностей ЭВТИ и СП поверхность ЭВТИ перегревается при моделировании падающего лучистого потока в режиме «Д1» и переохлаждается при моделировании охлаждения криоэкранами в режимах «Д2», «Д3», «Д4» (рисунок 5.5). В установившихся режимах временные производные расчетных и экспериментальных температур совпадают, что подтверждает заданные значения плотности и теплоемкости ЭВТИ. Так как при установленных теплофизических свойствах сопротивление ЭВТИ подтверждено экспериментально (таблица 5.3), а перегрев и переохлаждение модельной поверхности ЭВТИ происходят на границах режимов за короткий промежуток времени, параметром, определяющим расхождения расчетной и

экспериментальной температуры модельного слоя ЭВТИ, является не сопротивление контакта ЭВТИ и СП, а излучательная способность ЭВТИ.

Заданное в модели с распределенными параметрами значение излучательной способности равно излучательной способности наружного слоя (0,62), измеренной до и после ТВИ, и постоянно для всех режимов «Д» имитации предельных условий эксплуатации. Из сравнения расчетных и экспериментальных температур внешней поверхности ЭВТИ по данным датчиков R17 и R22 (рисунок 5.5) очевидно, что при внешнем нагреве инфракрасными имитаторами расчетная температура наружной поверхности ЭВТИ существенно больше, а при охлаждении криоэкранами – существенно меньше экспериментальных значений.

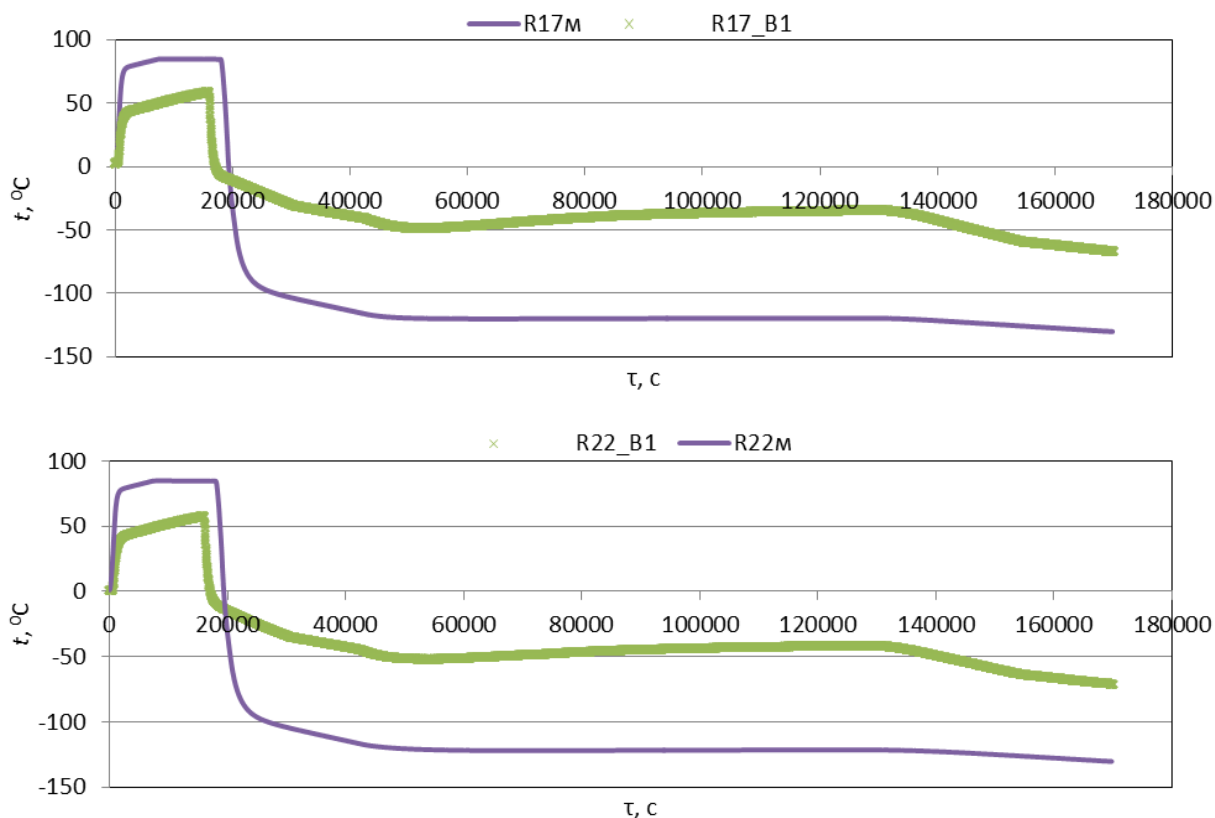


Рисунок 5.5 – Рассчитанные по МРП и экспериментальные температуры ЭВТИ ($R_{78} = 10 \text{ м}^2\text{K/Вт}$, $\varepsilon_7 = 0,62$)

С учетом идентифицированных значений тепловой проводимости α_{78} излучательная способность ε_7 определяется из первого уравнения системы (5.9). В случае инфракрасного лучистого потока коэффициент поглощения поверхности равен излучательной способности, а поглощенный поток $q_{s,7}$ выражается через падающий q_7 :

$$q_{s,7} = \varepsilon_7 q_7. \quad (5.12)$$

Тогда коэффициент ε_7 находится из следующего уравнения:

$$\rho_7 c_7 \delta_7 \frac{dT_7(\tau)}{d\tau} = \varepsilon_7 q_7 - \varepsilon_7 \sigma (T_7(\tau)^4 - T_R^4) - \alpha_{78} (T_7(\tau) - T_8(\tau)). \quad (5.13)$$

Он может быть рассчитан аналитически (таблицы 5.5, 5.7)

$$\varepsilon_7 = \frac{\alpha_{78} (T_7(\tau) - T_8(\tau)) + \rho_7 c_7 \delta_7 \frac{dT_7(\tau)}{d\tau}}{q_7 - \sigma (T_7(\tau)^4 - T_R^4)} \quad (5.14)$$

и вычислен итерационно (таблицы 5.6, 5.8, рисунок 5.6):

$$\varepsilon_7^{(i+1)} = \frac{\varepsilon_7^{(i)} q_7 - \alpha_{78} (T_7(\tau) - T_8(\tau)) - \rho_7 c_7 \delta_7 \frac{dT_7(\tau)}{d\tau}}{\sigma (T_7(\tau)^4 - T_R^4)}. \quad (5.15)$$

Итерационный расчет позволяет проверить аналитическое значение: если результаты итерационного расчета сходятся к аналитическому значению – решение корректно, если результаты итерационного расчета расходятся – решение некорректно. Корректные решения получены для режимов охлаждения «Д2», «Д4» и показывают, что значения ε_7 для ЭВТИ как системы в целом намного меньше теоретических и измеренных при нормальной температуре для наружного слоя пакета. Идентифицированное значение излучательной способности ЭВТИ составляет приблизительно 0,04 и совпадает и коэффициентами излучения внутренних слоев.

Коэффициент ε_7 восстанавливается с точностью до экспериментальных значений температур T_7 , T_8 , плотности q_7 падающего потока инфракрасного излучения, а также теоретических значений теплофизических свойств, принятых в тепловой модели:

$$(\rho c \delta)_7 \approx 399,9 \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}). \quad (5.16)$$

Таким образом, результаты идентификации излучательной способности наружного слоя ЭВТИ по экспериментальным данным в режимах охлаждения наружного слоя криоэкранами с температурой 83 К показывают значение коэффициента ε_7 в диапазоне от 0,032 до 0,061 (среднее арифметическое равно 0,04) при температуре поверхности от 202 до 245 К. В режиме внешнего нагрева инфракрасными имитаторами корректное решение не получено.

Таблица 5.5 – Результаты идентификации излучательной способности наружного слоя ЭВТИ по экспериментальным температурам датчиков R17, R19, R18 (аналитический расчет)

Режим	τ , мин	τ , с	α_{78} , Вт/(м ² ·К)	T_7 , К	T_8 , К	T_R , К	ΔT_7 , К	q_7 , Вт/м ²	ϵ_7
через 240 минут нагрева инфракрасными имитаторами 900 Вт/м ²									
Д1, конец	60	3620		317,6	268,1			926,7	
нагрев ИКИ	240	14420	0,2894	329,9	296,1	93,0	12,3	936,8	некорр.
через 180 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внешнего нагрева									
Д2, начало	300	18000		266,2	302,9			931,7	
охлаждение	480	28800	0,1943	245,1	282,1	93,0	-21,1	21,1	0,0445
через 350 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внешнего нагрева									
Д2, конец	540	32397		240,2	275,5			18,1	
охлаждение	650	39000	0,1192	234,7	268,2	93,0	-5,5	15,2	0,0284
через 360 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внутреннего нагрева									
Д4, начало	2220	133200		237,2	274,7			13,3	
охлаждение	2520	151200	0,2020	217,3	245,7	93,0	-19,9	12,1	0,0562
через 676 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внутреннего нагрева									
Д4, конец	2580	154800		213,3	240,2			11,2	
охлаждение	2836	170160	0,1113	205,5	228,9	93,0	-7,8	9,5	0,0322
СА:									0,040

Таблица 5.6 – Результаты идентификации излучательной способности наружного слоя ЭВТИ по экспериментальным температурам датчиков R17, R19, R18 (итерационный расчет)

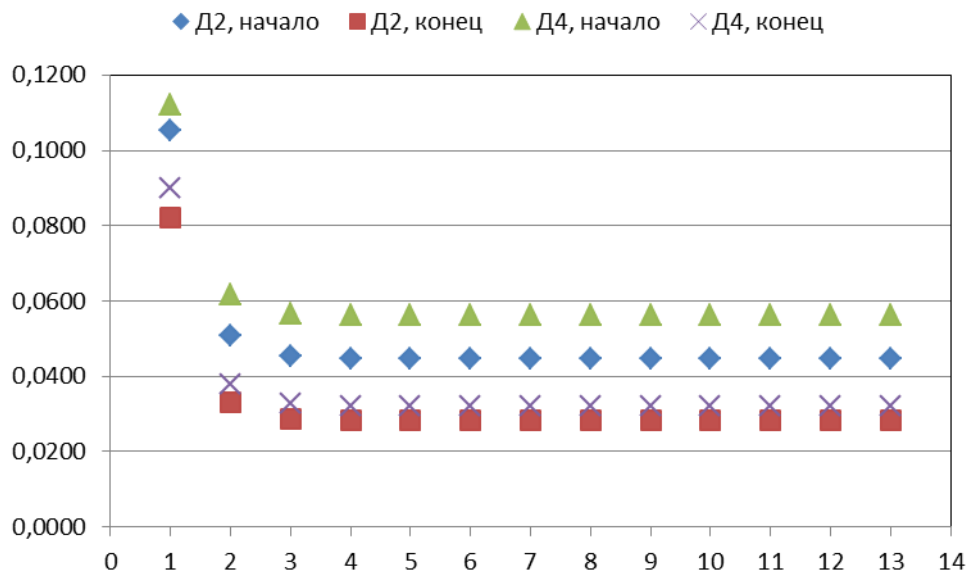
Режим	τ , мин	τ , с	ϵ_7	Начальное приближение	Итерации				
через 240 минут нагрева инфракрасными имитаторами 900 Вт/м ²									
Д1, конец	60	3620	по (5.19)	0	1	2	3	4	5
нагрев ИКИ	240	14420	некорр.	0,62	0,8555	1,1863	1,6509	2,3035	расходится
через 180 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внешнего нагрева									
Д2, начало	300	18000	по (5.19)	0	1	2	3	4	5
охлаждение	480	28800	0,0445	0,62	0,1051	0,0509	0,0452	0,0446	0,0445
через 350 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внешнего нагрева									
Д2, конец	540	32397	по (5.19)	0	1	2	3	4	5
охлаждение	650	39000	0,0284	0,62	0,0820	0,0332	0,0288	0,0284	0,0284
через 360 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внутреннего нагрева									
Д4, начало	2220	133200	по (5.19)	0	1	2	3	4	5
охлаждение	2520	151200	0,0562	0,62	0,1121	0,0617	0,0567	0,0563	0,0562
через 676 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внутреннего нагрева									
Д4, конец	2580	154800	по (5.19)	0	1	2	3	4	5
охлаждение	2836	170160	0,0322	0,62	0,0899	0,0378	0,0327	0,0322	0,0322

Таблица 5.7 – Результаты идентификации излучательной способности наружного слоя ЭВТИ по экспериментальным температурам датчиков R22, R20, R21 (аналитический расчет)

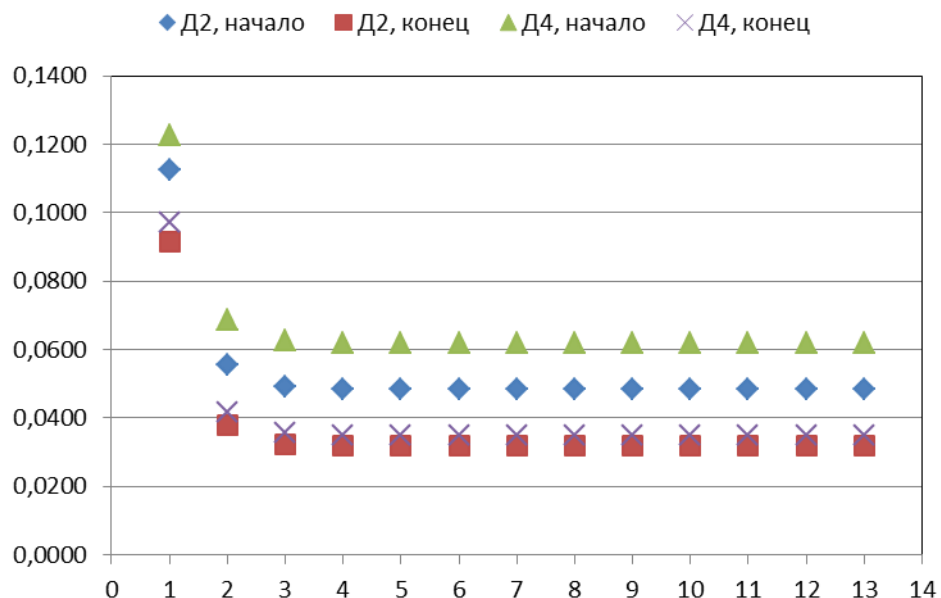
Режим	τ , мин	τ , с	α_{78} , Вт/(м ² ·К)	T_7 , К	T_8 , К	T_R , К	ΔT_7 , К	q_7 , Вт/м ²	ε_7
через 240 минут нагрева инфракрасными имитаторами 900 Вт/м ²									
Д1, конец	60	3620		316,8	268,2			926,7	
нагрев ИКИ	240	14420	0,2963	328,9	298,0	93,0	12,1	936,8	некорр.
через 180 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внешнего нагрева									
Д2, начало	300	18000	0,0000	263,9	304,6			931,7	
охлаждение	480	28800	0,1762	241,1	282,9	93,0	-22,8	21,1	0,0483
через 350 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внешнего нагрева									
Д2, конец	540	32400	0,0000	236,4	276,4			18,1	
охлаждение	710	42600	0,1094	228,2	265,5	93,0	-8,2	15,2	0,0318
через 360 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внутреннего нагрева									
Д4, начало	2220	133200	0,0000	229,9	272,8			13,3	
охлаждение	2520	151200	0,1728	212,4	245,0	93,0	-17,5	12,1	0,0619
через 676 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внутреннего нагрева									
Д4, конец	2580	154800	0,0000	209,0	239,7			11,2	
охлаждение	2836	170160	0,0954	201,6	228,9	93,0	-7,4	9,5	0,0350
									СА: 0,044

Таблица 5.8 – Результаты идентификации излучательной способности наружного слоя ЭВТИ по экспериментальным температурам датчиков R22, R20, R21 (итерационный расчет)

Режим	τ , мин	τ , с	ε_7	Начальное приближение	Итерации				
через 240 минут нагрева инфракрасными имитаторами 900 Вт/м ²									
Д1, конец	60	3620	по (5.19)	0	1	2	3	4	5
нагрев ИКИ	240	14420	некорр.	0,62	0,8661	1,2160	1,7135	2,4209	расходится
через 180 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внешнего нагрева									
Д2, начало	300	18000	по (5.19)	0	1	2	3	4	5
охлаждение	480	28800	0,0483	0,62	0,1127	0,0555	0,0491	0,0484	0,0483
через 350 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внешнего нагрева									
Д2, конец	540	32400	по (5.19)	0	1	2	3	4	5
охлаждение	710	42600	0,0318	0,62	0,0916	0,0378	0,0324	0,0318	0,0318
через 360 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внутреннего нагрева									
Д4, начало	2220	133200	по (5.19)	0	1	2	3	4	5
охлаждение	2520	151200	0,0619	0,62	0,1227	0,0685	0,0626	0,0620	0,0619
через 676 минут охлаждения криоэкранами 83 К (минус 190 °С) после внутреннего нагрева									
Д4, конец	2580	154800	по (5.19)	0	1	2	3	4	5
охлаждение	2836	170160	0,0350	0,62	0,0973	0,0417	0,0357	0,0351	0,0350



а – по экспериментальным температурам датчиков R17, R19, R18



б – по экспериментальным температурам датчиков R22, R20, R21

Рисунок 5.6 – Результаты идентификации излучательной способности ЭВТИ (итерационный расчет)

5.2. Идентификация излучательной способности экранно-вакуумной тепловой изоляции методом регуляризации

Примеры идентификации МСП ЭВТИ и элемента несущей конструкции КА показывают, что лишь некоторые режимы испытаний позволяют получить корректные решения по аналитическим выражениям или сходимость прямого итерационного процесса. В частности, идентификация излучательной способности ЭВТИ в режиме «Д1» нагрева инфракрасными имитаторами приводит к некорректному результату

(таблицы 5.5-5.8) и расхождению итерационного процесса (5.15) (рисунок 5.7).

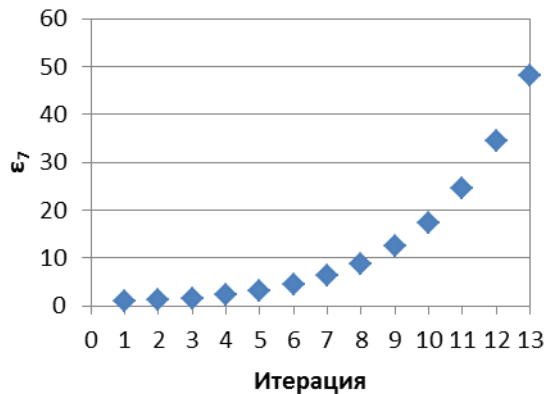


Рисунок 5.7 – Некорректные результаты идентификации излучательной способности наружного слоя ЭВТИ в режиме «Д1» нагрева инфракрасными имитаторами (итерационный расчет)

Для идентификации излучательной способности ЭВТИ методом регуляризации необходимо рассчитать размерный шаг спуска β в методе на основе функционала невязки температуры и скалярный параметр регуляризации $\gamma = 1 / \beta$ – в методе на основе сглаживающего функционала по комбинированной методике.

Для каждого отрезка времени $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ на основе уравнения (5.13), которое является первым уравнением системы (5.9), записывается следующая математическая модель:

$$\rho_7 c_7 \delta_7 \frac{dT_{7j}}{d\tau} = \varepsilon_7(\tau_j) q_{7j} - \varepsilon_7(\tau_j) \sigma (T_{7j}^4 - T_R^4) - \alpha_{78} (T_{7j} - T_{8j}^{(0)}) \quad (5.17)$$

$(j = 1, 2, \dots, M)$

с общим начальным условием

$$T_7(\tau_0) = T_{70}. \quad (5.18)$$

и условием непрерывности

$$\left\{ \begin{array}{l} T_i(\tau_j - 0) = T_i(\tau_j + 0) \\ \tau_0 = \tau_{\min}, \tau_{M+1} = \tau_{\max} \end{array} \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (5.19)$$

Чтобы ограничить систему (5.9) первым уравнением, температура восьмого узла принята равной экспериментальной: $T_{8j} = T_{8j}^{(0)}$.

Для определения шага спуска по условию (3.58) будем считать приращение $\Delta \varepsilon_7$ вариацией $\delta \varepsilon_7$, которая вызывает вариацию температуры $v_{7j}(\tau)$ ($j = 1, \dots, M$). Пусть искомая излучательная способность ε_7 получила вариацию $\delta \varepsilon_7$, которая согласно (3.56) равна

$$\delta \varepsilon_7 = -\beta_7^e \xi_7^e. \quad (5.20)$$

Тогда температура изменится на некоторую величину $v_{7j}(\tau)$ ($j = 1, \dots, M$), а вариация температуры $v_{7j}(\tau)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\rho_7 c_7 \delta_7 \frac{dv_{7j}}{d\tau} = \delta \varepsilon_7(\tau_j) q_{7j} - \delta \varepsilon_7(\tau_j) \sigma(T_{7j}^4 - T_R^4) - 4\varepsilon_7(\tau_j) \sigma T_{7j}^3 v_{7j} - \alpha_{78} v_{7j} \quad (5.21)$$

с начальным условием

$$v_7(\tau_0) = 0 \quad (5.22)$$

и условием непрерывности

$$\left\{ \begin{array}{l} v_7(\tau_j - 0) = v_7(\tau_j + 0), \\ \tau_0 = \tau_{\min}, \tau_{M+1} = \tau_{\max} \end{array} \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (5.23)$$

Функционал температурной невязки на итерации l запишется как

$$J(\varepsilon_7 + \delta \varepsilon_7) = \sum_{j=1}^M (T_{7j} + v_{7j} - T_{7j}^{(0)})^2, \quad (5.24)$$

следовательно, вариации температуры $v_{7j}(\tau)$ определяются из (3.92):

$$v_{7j} = T_{7j}^{(0)} - T_{7j}. \quad (5.25)$$

Подставляя вариации температуры из (5.25) в (5.21) и учитывая, что $\varepsilon_7(\tau_j) = \varepsilon_{7j}$, получаем уравнение для определения β_{7j}^ε :

$$-\rho_7 c_7 \delta_7 \frac{dT_{7j}}{d\tau} = -\beta_{7j}^\varepsilon \xi_{7j}^\varepsilon q_{7j} + \beta_{7j}^\varepsilon \xi_{7j}^\varepsilon \sigma (T_{7j}^4 - T_R^4) - 4\varepsilon_{7j} \sigma T_{7j}^3 (T_{7j}^{(0)} - T_{7j}) - \alpha_{78} (T_{7j}^{(0)} - T_{7j}), \quad (5.26)$$

где температуры T_{7j} являются решением краевой задачи (5.17)-(5.19) на текущей итерации, а производная $dT_{7j}/d\tau$ выражается из уравнения (5.17) после его решения относительно температур T_{7j} . Выражая производную $dT_{7j}/d\tau$ из уравнения (5.17), подставляя ее в полученное уравнение и решая его относительно β_7 , получаем следующее выражение:

$$\beta_{7j}^\varepsilon = \frac{\varepsilon_{7j} \left[q_{7j} - \sigma (4T_{7j}^3 T_{7j}^{(0)} - 3T_{7j}^4 - T_R^4) \right] - \alpha_{78} (T_{7j}^{(0)} - T_{8j}^{(0)})}{\xi_{7j}^\varepsilon \left[q_{7j} - \sigma (T_{7j}^4 - T_R^4) \right]} \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (5.27)$$

Для применения метода на основе функционала-невязки температуры также необходим градиент функционала, который определяется по аналогии с выражением (3.80):

$$J'_{\varepsilon_7} = - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \psi_{7j}(\tau) (q_{7j} - \sigma (T_{7j}^4 - T_R^4)) d\tau, \quad (5.28)$$

где ψ_{7j} – неопределенные множители Лагранжа, при вычислении которых нужно принять во внимание наличие известных параметров $\rho_7 c_7 \delta_7$ в левой части уравнения (5.17):

$$\psi_{7j} = \frac{2}{\rho_7 c_7 \delta_7} (T_{7j} - T_{7j}^{(0)}). \quad (5.29)$$

При идентификации излучательной способности ЭВТИ методом регуляризации в МСП использовано также уточненное значение удельной теплоемкости модельной поверхности ЭВТИ, равное 200 Дж/(кг·К) и обеспечивающее лучшее совпадение первых производных по времени расчетных и экспериментальных температур в режимах интенсивного нагрева и охлаждения.

Плотность q_7 падающего потока инфракрасного излучения в зависимости от времени режимов «Д» имитации предельных условий эксплуатации показана на рисунке 5.8. Идентифицированные значения удельных тепловых проводимостей и сопротивлений ЭВТИ приведены в таблице 5.3 и показаны на рисунках 5.9, 5.10 [214], [270].

Результаты идентификации излучательной способности ЭВТИ методами регуляризации на основе температурного и сглаживающего функционалов совпадают и отображаются на рисунках 5.11-5.33. Искомая функция $\varepsilon_7(\tau)$ устанавливается по условию достижения минимума функционала невязки температуры

$$J_7^{(l)} = \sum_{j=1}^M (T_{7j}^{(l)} - T_{7j}^{(0)})^2, \quad (5.30)$$

где количество временных точек M , в которых рассчитывается искомая функция, приведено в таблице 5.9.

Дисперсия экспериментальной температуры $T_7^{(0)}$ согласно (4.51)-(4.53) равна

$$D(T_7^{(0)}) = \frac{(\Delta T_7^{(0)})^2}{M - 1}. \quad (5.31)$$

где $\Delta T_7^{(0)} = 2$ К – абсолютная погрешность измерения температуры по показаниям датчика. Среднеквадратичная ошибка температурных измерений для всей системы, следовательно, равна дисперсии (таблица 5.9)

$$\delta_T^2 = D(T_7^{(0)}). \quad (5.32)$$

Погрешность входных данных не достигается в точках минимума функционала невязки, и критерием останова итерационных процессов является выполнение условия $J_7^{(l)} \geq J_7^{(l-1)}$. В то же время, значения $J_7^{(m)}$ в точках минимума на несколько порядков меньше, чем на первой итерации.

Начальное приближение излучательной способности ЭВТИ для всех режимов $\varepsilon_7^{(0)} = 0,02$. Общей чертой полученных функций $\varepsilon_7(\tau)$ является смещение значений ε_{71} к начальному приближению, в результате чего первые точки распределений излучательной способности отклоняются от общей зависимости, занимая промежуточное положение между начальным приближением и диапазоном, которому принадлежит основная часть идентифицированных значений. Это приводит к скачку расчетной температуры T_{71} , который особенно заметен в режимах «Д2», «Д4» (рисунки 5.18, 5.28).

Таблица 5.9 – Спецификация итерационных процессов идентификации излучательной способности ЭВТИ методом регуляризации

Режим	M	τ_{M+1} , с	τ_{M+1} , мин	$D(T_7^{(0)})$, К ²	$J^{(m)}$, К ²	m
Д1	25	15600	260	0,167	282,3	6
Д2	37	22800	380	0,111	52,8	7
Д3	69	84000	1400	0,059	19,6	6
Д4	31	38400	640	0,133	20,6	6

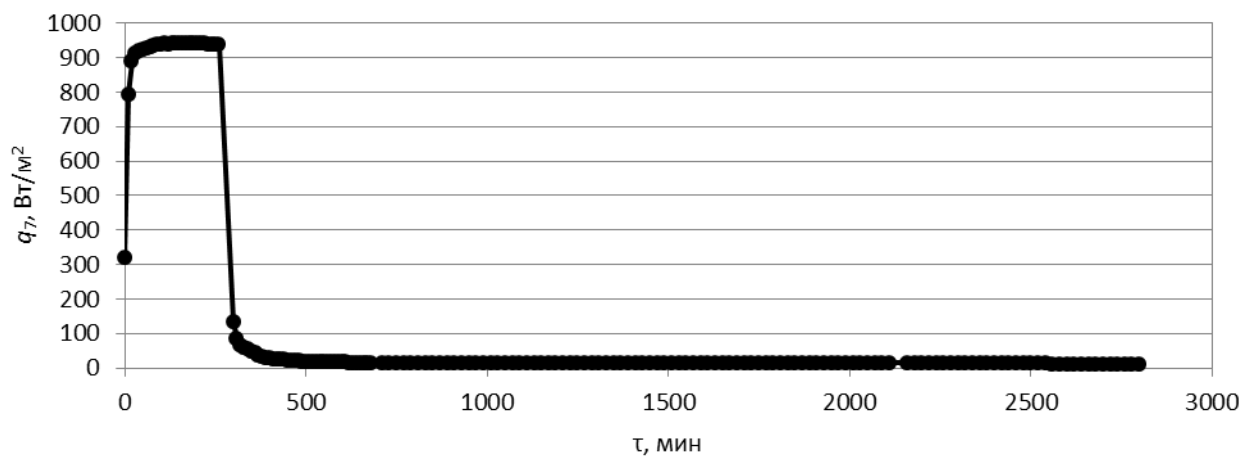
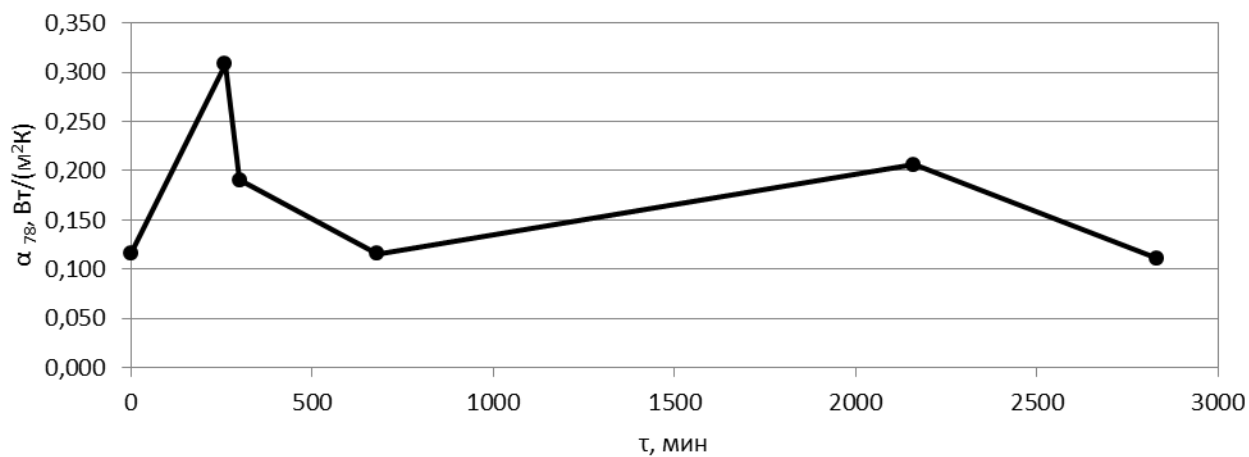
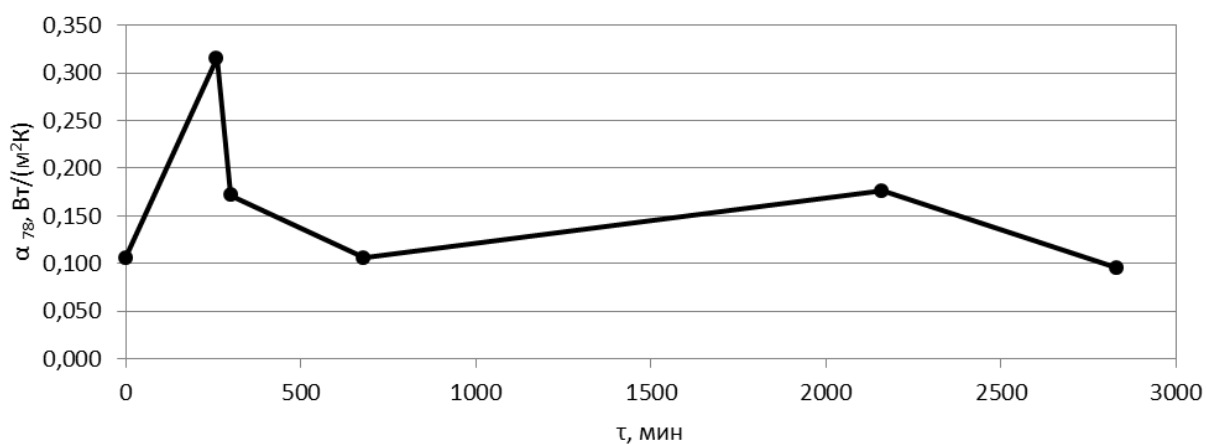


Рисунок 5.8 – Распределение плотности падающего потока инфракрасного излучения в зависимости от времени в режимах «Д1», «Д2», «Д3», «Д4»

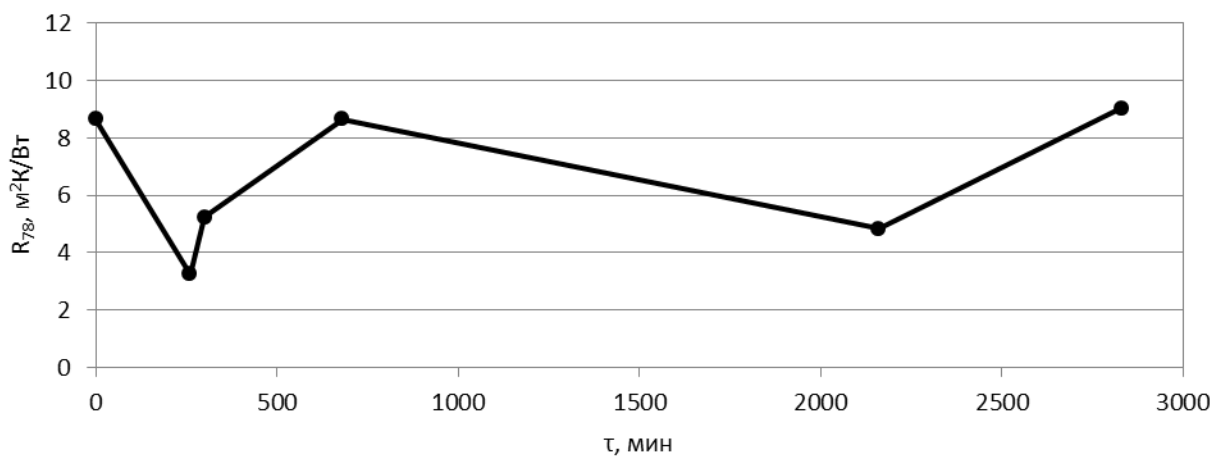


а – по температурам датчиков R17, R19, R18

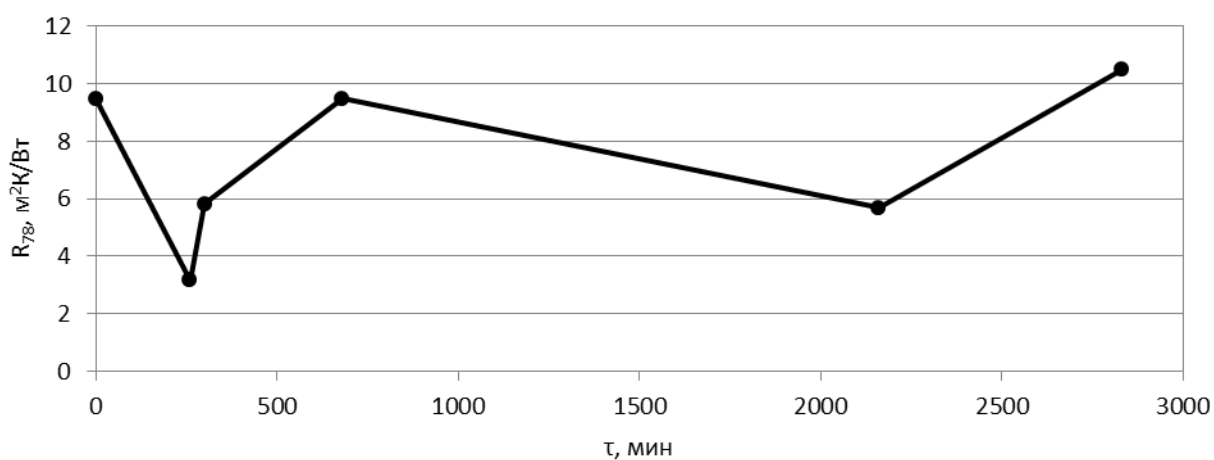


б – по температурам датчиков R22, R20, R21

Рисунок 5.9 – Распределение удельной тепловой проводимости ЭВТИ в зависимости от времени в режимах «Д1», «Д2», «Д3», «Д4»



а – по температурам датчиков R17, R19, R18



б – по температурам датчиков R22, R20, R21

Рисунок 5.10 – Распределение удельного теплового сопротивления ЭВТИ в зависимости от времени в режимах «Д1», «Д2», «Д3», «Д4»

Таблица 5.10 – Материалы и коэффициенты излучения слоев ЭВТИ (вариант исполнения)

Характеристика слоя	Слой	ϵ
1 слой, 20 мкм – наружная поверхность	1	0,65
		0,65
3 слоя, 20 мкм	2	0,05
		0,05
	3	0,05
		0,05
	4	0,05
		0,05
7 слоев, 12 мкм	5	0,04
		0,04
	6	0,04
		0,04
	7	0,04
		0,04
	8	0,04
		0,04
	9	0,04
		0,04
	10	0,04
		0,04
	11	0,04
		0,04
15 слоев, 5 мкм	12	0,05
		0,05
	13	0,05
		0,05
	14	0,05
		0,05
	15	0,05
		0,05
	16	0,05
		0,05
	17	0,05
		0,05
	18	0,05
		0,05
	19	0,05
		0,05
	20	0,05
		0,05
21	0,05	
	0,05	
22	0,05	
	0,05	
23	0,05	
	0,05	
24	0,05	
	0,05	
25	0,05	
	0,05	
26	0,05	
	0,05	
1 слой, 20 мкм – внутренняя поверхность	27	0,04
		0,06

Идентифицированные функции времени $\varepsilon_7(\tau)$ принадлежат диапазону значений $[0,02; 0,05]$ с доверительной вероятностью $P = 1 - 3/162 \approx 0,981$, где три точки вне диапазона получены в режиме «Д1». Среднее арифметическое диапазона равно 0,035. Отсюда следует, что излучательная способность ЭВТИ как системы из множества слоев с коэффициентами излучения 0,04 и 0,05 проявляется не как излучательная способность наружного слоя, равная 0,62, а как приведенный коэффициент излучения, получаемый в результате взаимодействия внутренних слоев и имеющий значение не выше максимального значения излучательных способностей этих слоев (таблица 5.10).

Важно отметить, что в режиме «Д1» внешнего нагрева инфракрасными имитаторами идентифицируется спектральная излучательная способность в инфракрасном диапазоне, а в режимах «Д2», «Д3», «Д4» внешнего охлаждения криоэкранами – интегральная. Идентифицированные в этих режимах значения близки между собой, следовательно, интегральная излучательная способность ЭВТИ приближенно равна спектральной в инфракрасном диапазоне длин волн.

Температурные зависимости $\varepsilon_7(T_7)$ найдены сопоставлением идентифицированных функций времени $\varepsilon_7(\tau)$ с функциями времени $T_7(\tau)$ и приведены для справки, поскольку температура наружной поверхности ЭВТИ является не единственным аргументом излучательной способности пакета (рисунки 5.15, 5.20, 5.25, 5.30, 5.32). Особенно наглядно этот вывод продемонстрирован на рисунке 5.32, где диапазоны значений излучательной способности ЭВТИ в различных режимах испытаний отличаются друг от друга. В начале режима «Д3» нагрева конструкции внутренними источниками температура наружной поверхности ЭВТИ продолжает уменьшаться некоторое время из-за тепловой инерции, а затем возрастает. В результате, функция $T_7(\tau)$ дважды проходит через одни и те же значения, и на графиках $\varepsilon_7(T_7)$ (рисунки 5.25, 5.32) одному аргументу соответствуют два значения функции, что также подтверждает многофакторность функции излучательной способности ЭВТИ.

Идентифицированная при помощи МСП излучательная способность ЭВТИ задается далее в МРП для проведения поверочных расчетов режимов ТВИ. Таким образом, рассмотренный пример иллюстрирует первый способ идентификации МРП по связанной МСП, когда идентифицированные при помощи МСП параметры непосредственно используются в МРП.

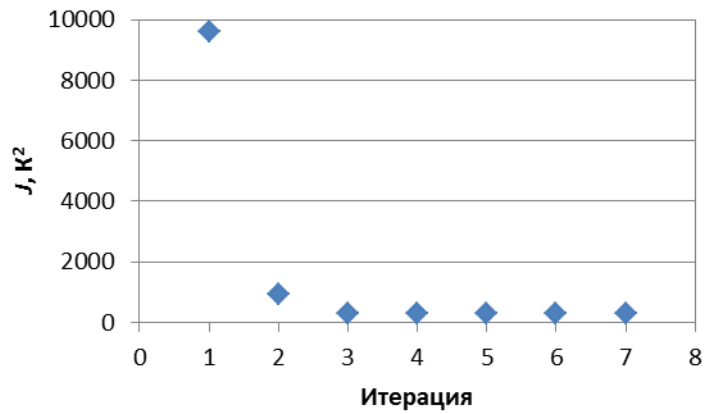


Рисунок 5.11 – Распределение значений функционала-невязки в зависимости от номера итерации при идентификации излучательной способности ЭВТИ в режиме «Д1»

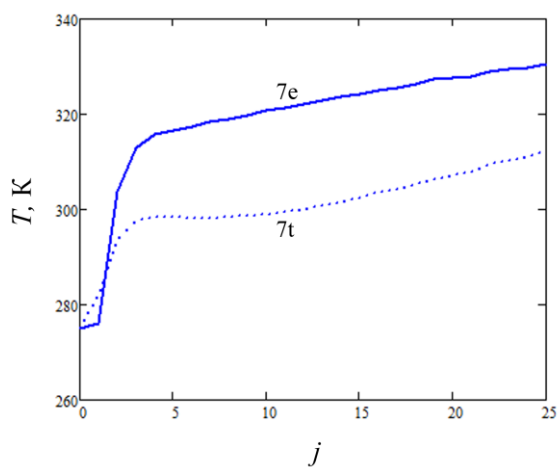


Рисунок 5.12 – Корреляция расчетной (t) и экспериментальной (e) температур наружного слоя ЭВТИ при идентификации излучательной способности ЭВТИ в режиме «Д1» на итерации 1

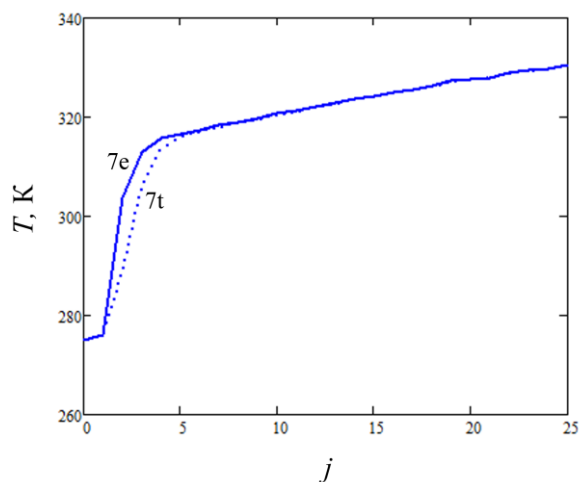


Рисунок 5.13 – Корреляция расчетной (t) и экспериментальной (e) температур наружного слоя ЭВТИ при идентификации излучательной способности ЭВТИ в режиме «Д1» на итерации m

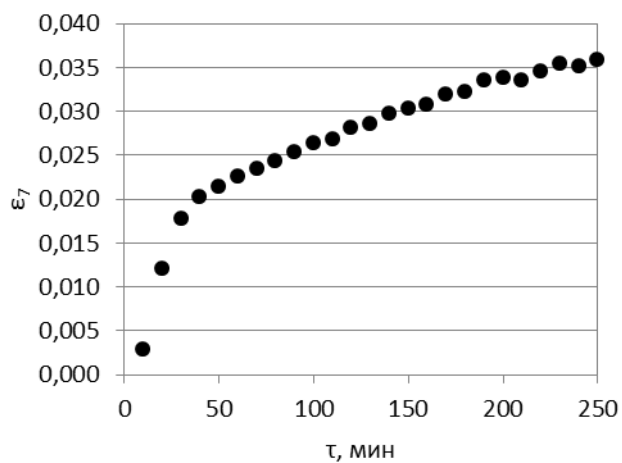
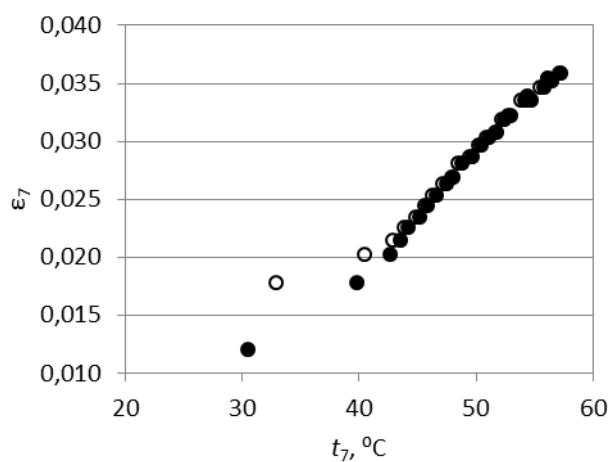


Рисунок 5.14 – Распределение излучательной способности ЭВТИ в зависимости от времени в режиме «Д1»



Закрашенные точки – $\varepsilon_7(T_7^{(0)})$,
 Пустые точки – $\varepsilon_7(T_7^{(11)})$

Рисунок 5.15 – Распределение излучательной способности ЭВТИ в зависимости от температуры в режиме «Д1»

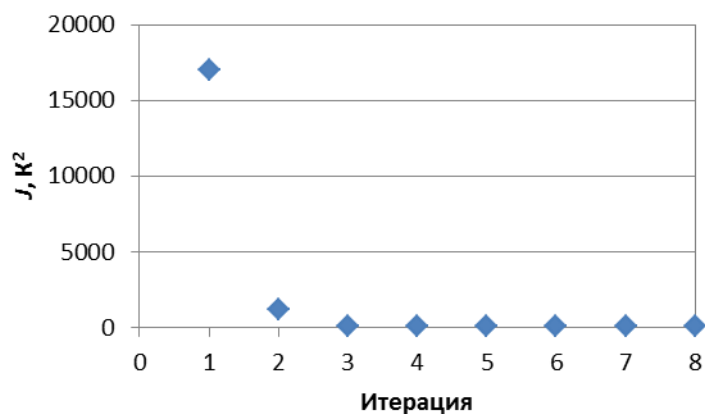


Рисунок 5.16 – Распределение значений функционала-невязки в зависимости от номера итерации при идентификации излучательной способности ЭВТИ в режиме «Д2»

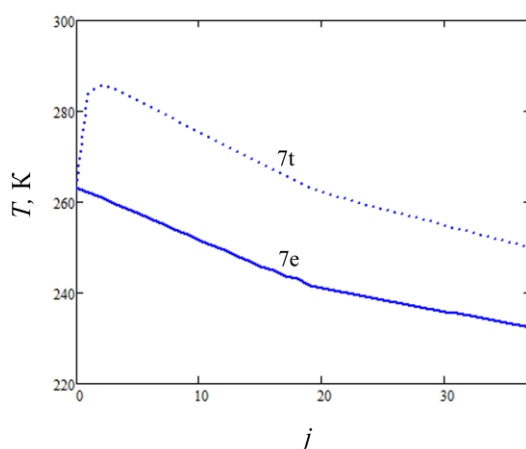


Рисунок 5.17 – Корреляция расчетной (t) и экспериментальной (e) температур наружного слоя ЭВТИ при идентификации излучательной способности ЭВТИ в режиме «Д2» на итерации 1

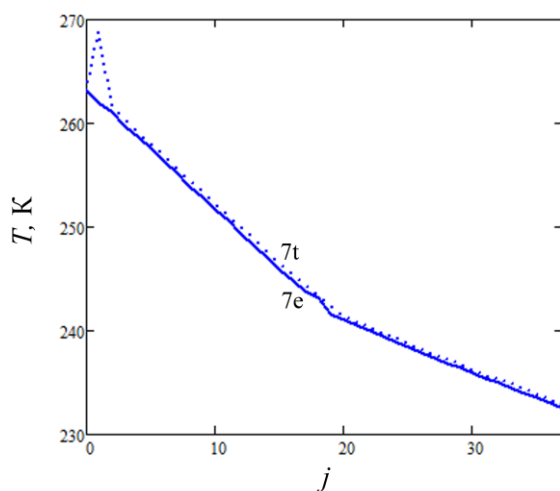


Рисунок 5.18 – Корреляция расчетной (t) и экспериментальной (e) температур наружного слоя ЭВТИ при идентификации излучательной способности ЭВТИ в режиме «Д2» на итерации m

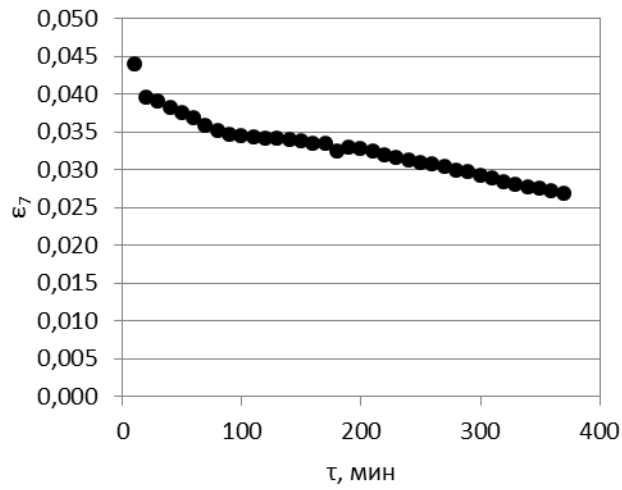
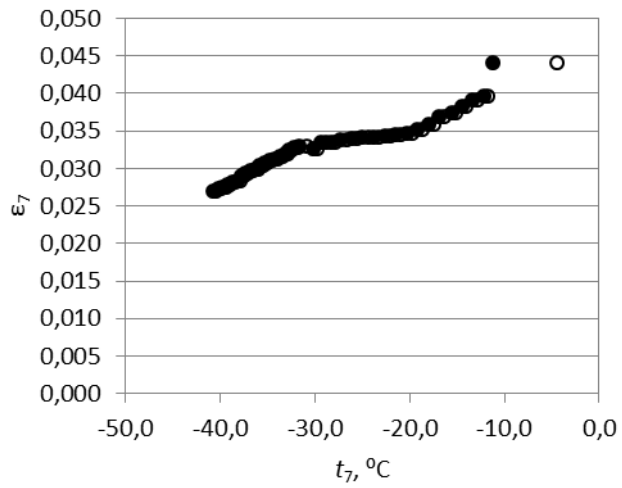


Рисунок 5.19 – Распределение излучательной способности ЭВТИ в зависимости от времени в режиме «Д2»



Закрашенные точки – $\varepsilon_7(T_7^{(0)})$,
 Пустые точки – $\varepsilon_7(T_7^{(12)})$

Рисунок 5.20 – Распределение излучательной способности ЭВТИ в зависимости от температуры в режиме «Д2»

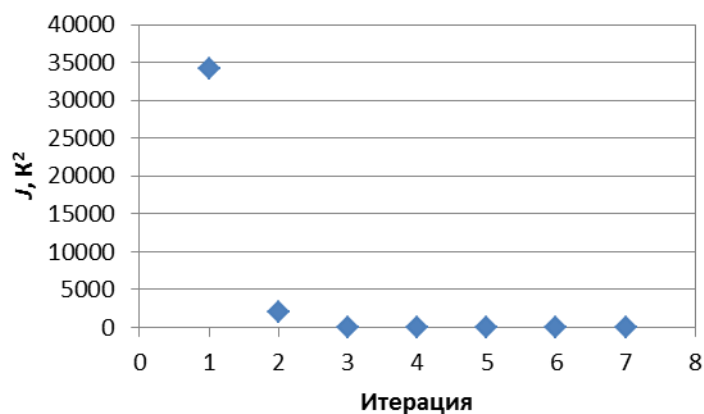


Рисунок 5.21 – Распределение значений функционала-невязки в зависимости от номера итерации при идентификации излучательной способности ЭВТИ в режиме «Д3»

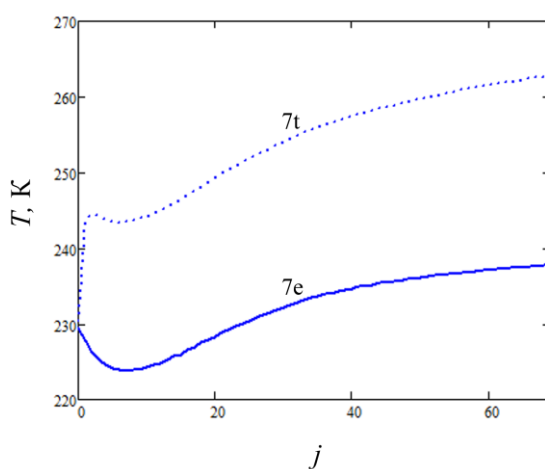


Рисунок 5.22 – Корреляция расчетной (t) и экспериментальной (e) температур наружного слоя ЭВТИ при идентификации излучательной способности ЭВТИ в режиме «Д3» на итерации 1

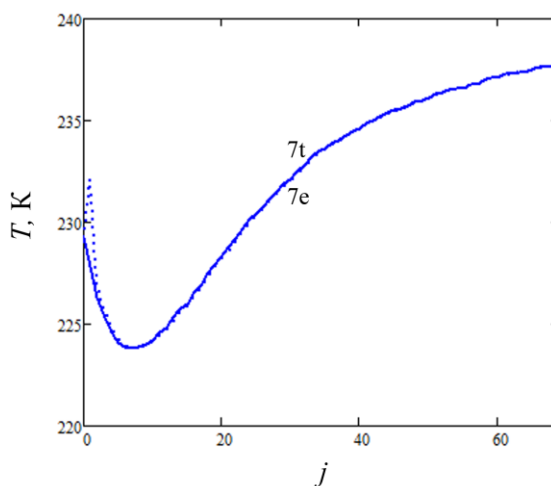


Рисунок 5.23 – Корреляция расчетной (t) и экспериментальной (e) температур наружного слоя ЭВТИ при идентификации излучательной способности ЭВТИ в режиме «Д3» на итерации m

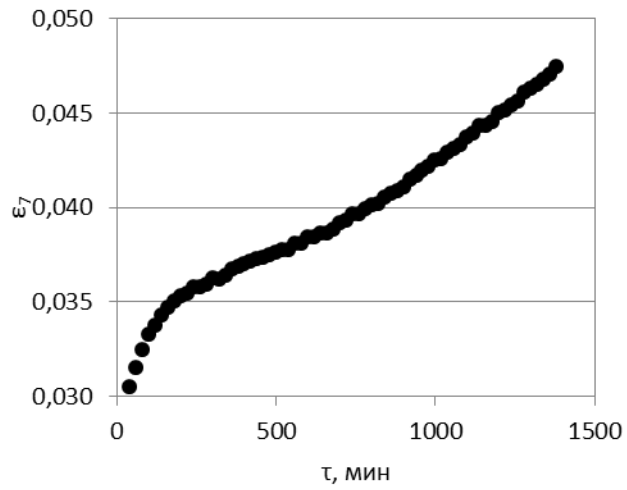
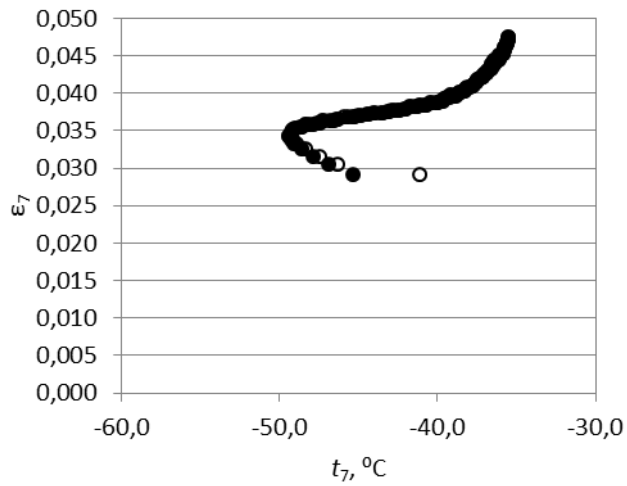


Рисунок 5.24 – Распределение излучательной способности ЭВТИ в зависимости от времени в режиме «ДЗ»



Закрашенные точки – $\varepsilon_7(T_7^{(0)})$,
 Пустые точки – $\varepsilon_7(T_7^{(12)})$

Рисунок 5.25 – Распределение излучательной способности ЭВТИ в зависимости от температуры в режиме «ДЗ»

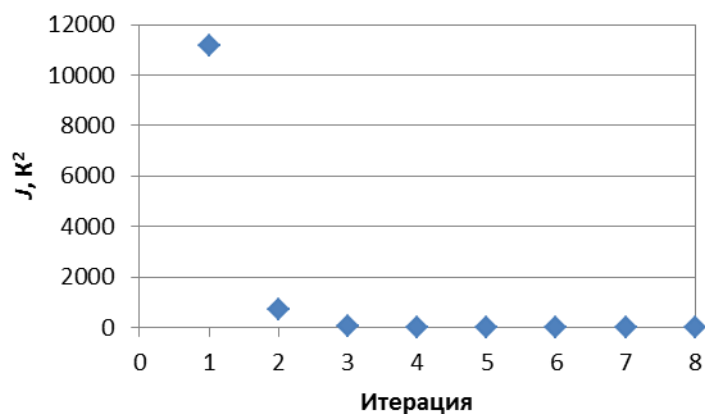


Рисунок 5.26 – Распределение значений функционала-невязки в зависимости от номера итерации при идентификации излучательной способности ЭВТИ в режиме «Д4»

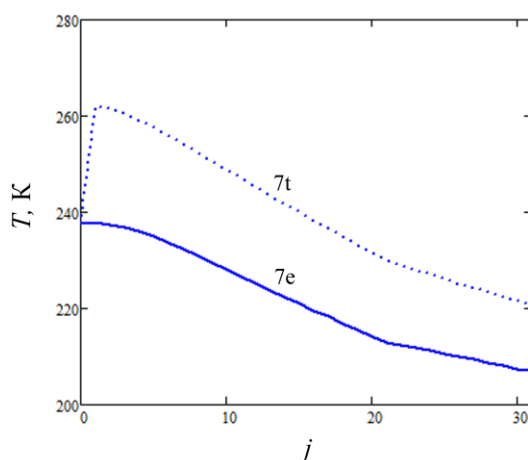


Рисунок 5.27 – Корреляция расчетной (t) и экспериментальной (e) температур наружного слоя ЭВТИ при идентификации излучательной способности ЭВТИ в режиме «Д4» на итерации 1

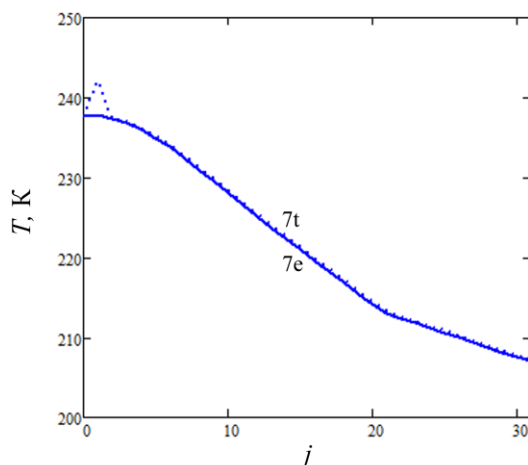


Рисунок 5.28 – Корреляция расчетной (t) и экспериментальной (e) температур наружного слоя ЭВТИ при идентификации излучательной способности ЭВТИ в режиме «Д4» на итерации m

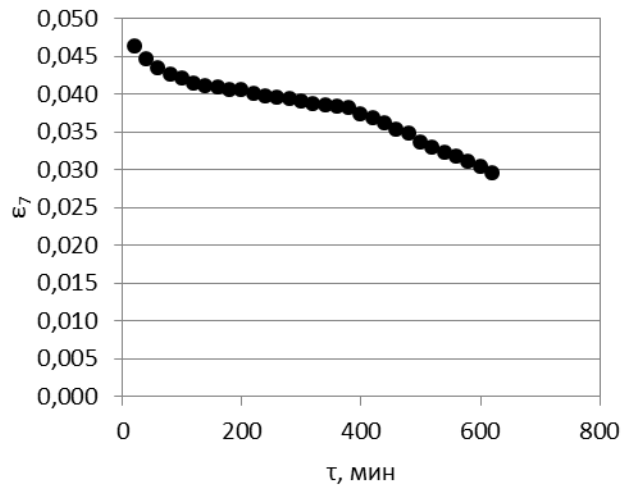
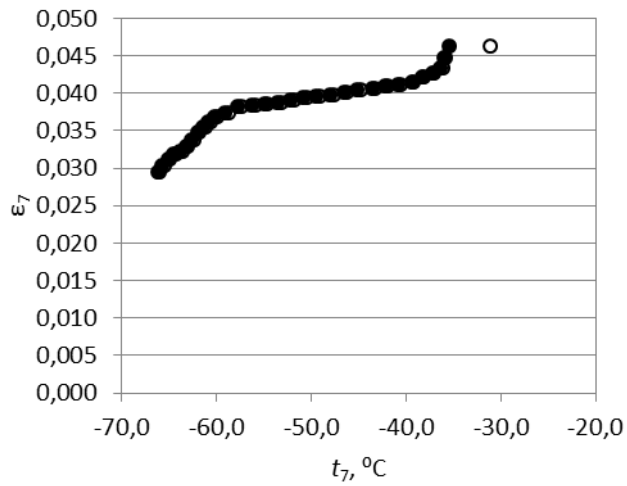


Рисунок 5.29 – Распределение излучательной способности ЭВТИ в зависимости от времени в режиме «Д4»



Закрашенные точки – $\varepsilon_7(T_7^{(0)})$,
 Пустые точки – $\varepsilon_7(T_7^{(14)})$

Рисунок 5.30 – Распределение излучательной способности ЭВТИ в зависимости от температуры в режиме «Д4»

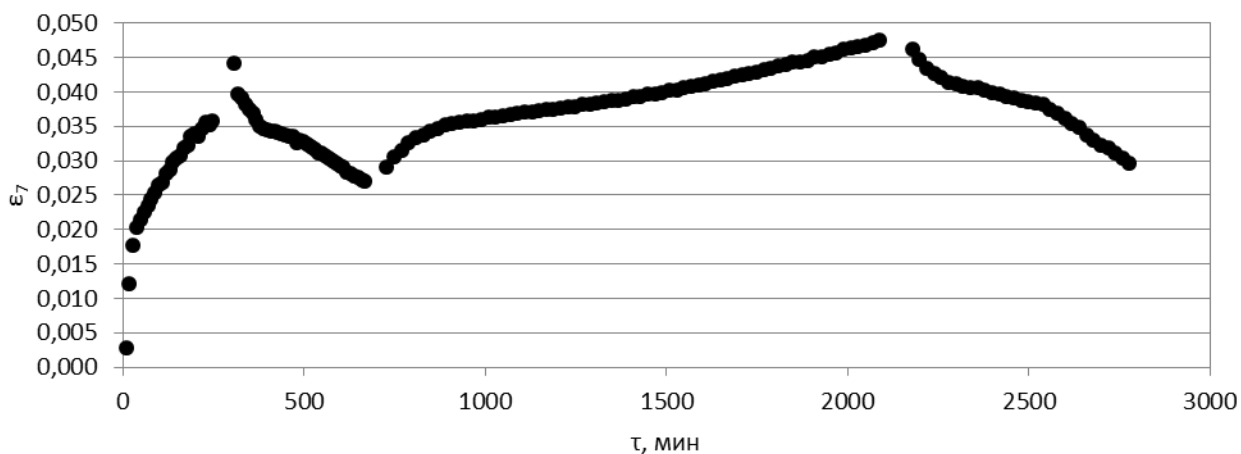
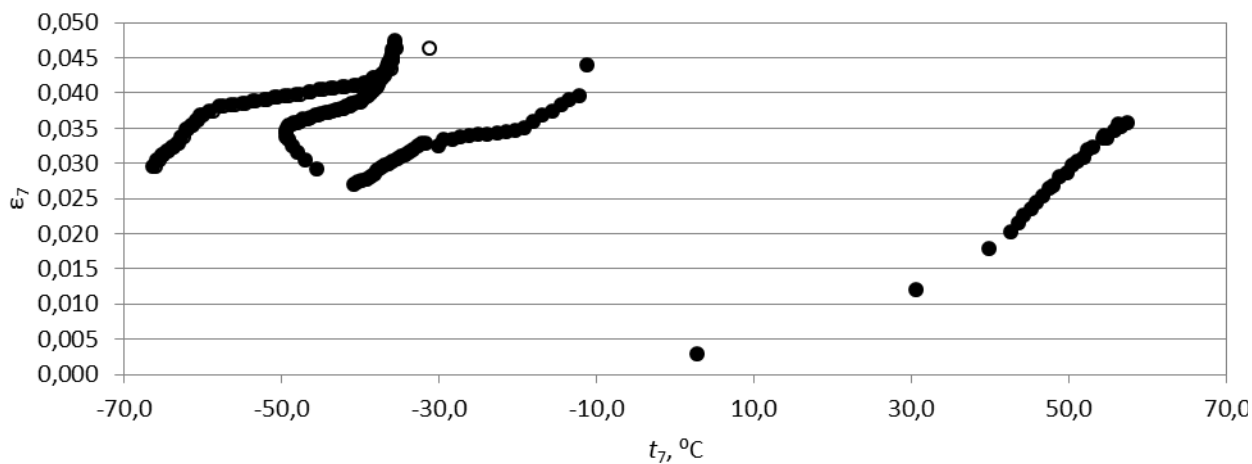


Рисунок 5.31 – Распределение излучательной способности ЭВТИ в зависимости от времени в режимах «Д1», «Д2», «Д3», «Д4»



Закрашенные точки – $\varepsilon_7(T_7^{(0)})$,
Пустые точки – $\varepsilon_7(T_7)$

Рисунок 5.32 – Распределение излучательной способности ЭВТИ в зависимости от температуры наружного слоя в режимах «Д1», «Д2», «Д3», «Д4»

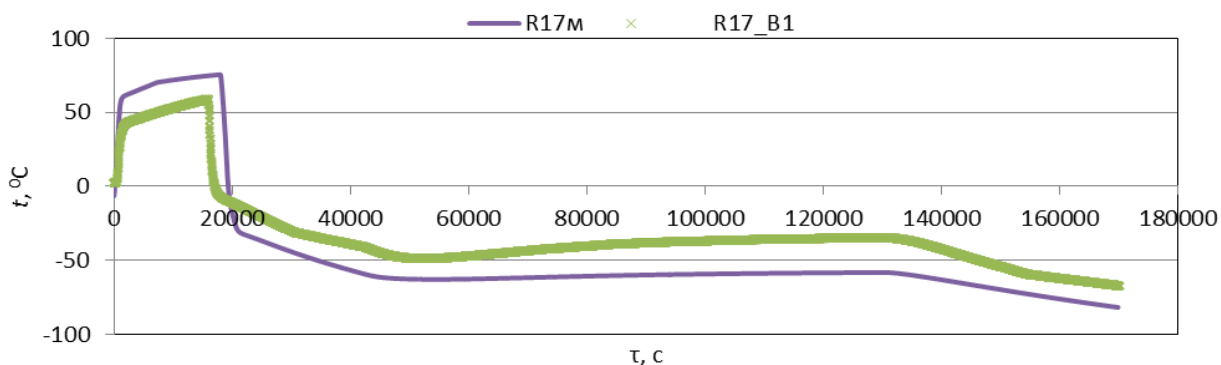


Рисунок 5.33 – Рассчитанные по МРП и экспериментальные температуры ЭВТИ ($R_{78} = 10 \text{ м}^2\text{К/Вт}$, $\varepsilon_7 = 0,04$)

Применение в МРП СЧ КА идентифицированного значения излучательной способности ЭВТИ, полученного методами регуляризации с использованием связанной МСП, привело к существенному уточнению расчетных температур модельной поверхности ЭВТИ в местах установки датчиков (рисунок 5.33) [271-272]. Аналогично уточняются и другие параметры МРП.

5.3. Идентификация тепловой проводимости контурных тепловых труб методом регуляризации

Рассмотрим задачу идентификации проводимости контурной тепловой трубы (КТТ), которая изменяется в зависимости от температуры испарителя и конденсатора, обеспечивая тем самым необходимую температуру объекта охлаждения (рисунок 5.34). Испаритель тепловой трубы находится в контакте с объектом термического регулирования, а конденсатор расположен внутри радиатора, излучающего энергию в космическое пространство.

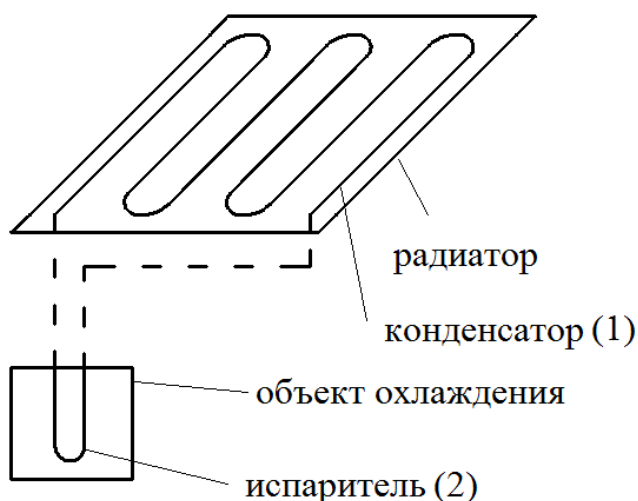


Рисунок 5.34 – Схема КТТ

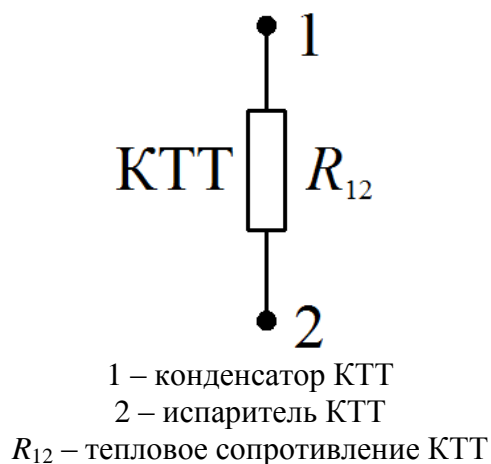


Рисунок 5.35 – МСП КТТ

МСП теплообмена КТТ состоит из двух узлов: узел 1 – конденсатор; узел 2 – испаритель [270].

Для идентификации тепловой проводимости контурной тепловой трубы методом регуляризации необходимо рассчитать размерный шаг спуска β в методе на основе квадратичного функционала невязки температуры и скалярный параметр регуляризации $\gamma = 1 / \beta$ – в методе на основе сглаживающего функционала по комбинированной методике.

В качестве дополнительного условия используются температуры точек, измеренные в определенные моменты времени τ_j :

$$T_i^{(0)}(\tau_j) = T_{ij}^{(0)} \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, M), \quad (5.33)$$

где индекс «1» относится к радиатору, индекс «2» – к коллектору теплопровода.

Для каждого отрезка времени $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ записывается следующая математическая модель:

$$C_1 \frac{dT_{1j}}{d\tau} = q_j F_1 A_{s,1} + \varepsilon_1 \sigma F_1 (T_R^4 - T_{1j}^4) + \alpha_{a,12j} (T_{2j}^{(0)} - T_{1j}) \quad (5.34)$$

$$(j = 1, 2, \dots, M)$$

с общим начальным условием

$$T_1(\tau_0) = T_{10}. \quad (5.35)$$

и условием непрерывности

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1(\tau_j - 0) = T_1(\tau_j + 0) \\ \tau_0 = \tau_{\min}, \tau_{M+1} = \tau_{\max} \end{array} \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (5.36)$$

где q – плотность инфракрасного потока от Земли, Вт/м²; $A_{s,1} = \varepsilon_1$ – коэффициент поглощения инфракрасного потока, равный при равновесном излучении излучательной способности радиатора ε_1 ; F_1 – площадь радиатора, м²; C_1 – абсолютная теплоемкость радиатора, Дж/К; $T_R = 4$ К – радиационная температура космического пространства; T_1 – температура радиатора (узел 1, считается равной температуре конденсатора), К; T_2 – температура коллектора объекта охлаждения (узел 2, считается равной температуре испарителя), К; $\alpha_{a,12}$ – абсолютная проводимость контурной трубы, Вт/К. Чтобы ограничить математическую модель (5.34) одним уравнением, температура узла 2 принята равной экспериментальной: $T_{2j} = T_{2j}^{(0)}$.

Для определения шага спуска будем считать приращение $\Delta\alpha_{a,12}$ вариацией $\delta\alpha_{a,12}$, которая вызывает вариацию температуры $v_{1j}(\tau)$ ($j = 1, \dots, M$). Пусть искомая тепловая проводимость $\alpha_{a,12}$ получила вариацию $\delta\alpha_{a,12}$, которая равна

$$\delta\alpha_{a,12j} = -\beta_{1j}^\alpha \xi_{12j}^\alpha. \quad (5.37)$$

Тогда температура изменится на некоторую величину $v_{1j}(\tau)$ ($j = 1, \dots, M$), а вариация температуры $v_{1j}(\tau)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$C_1 \frac{dv_{1j}}{d\tau} = -4(T_{1j})^3 v_{1j} \varepsilon_1 \sigma F_1 - \alpha_{a,12j} v_{1j} + \delta\alpha_{a,12j} (T_{2j}^{(0)} - T_{1j}) \quad (5.38)$$

с начальным условием

$$v_1(\tau_0) = 0 \quad (5.39)$$

и условием непрерывности

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(\tau_j - 0) = v_1(\tau_j + 0) \\ \tau_0 = \tau_{\min}, \tau_{M+1} = \tau_{\max} \end{array} \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (5.40)$$

где $Q_1 = qF_1\varepsilon_1$ – поглощенный радиатором инфракрасный поток, Вт. Функционал температурной невязки на итерации l запишется как

$$J(\alpha_{a,12} + \delta\alpha_{a,12}) = \sum_{j=1}^M (T_{1j} + v_{1j} - T_{1j}^{(0)})^2, \quad (5.41)$$

следовательно, вариации температуры $v_{1j}(\tau)$ определяются из следующего выражения:

$$v_{1j} = T_{1j}^{(0)} - T_{1j}. \quad (5.42)$$

Подставляя вариации температуры из (5.42) в (5.38) и учитывая, что $\alpha_{a,12}(\tau_j) = \alpha_{a,12j}$, получаем уравнение для определения β_{1j}^α :

$$\begin{aligned} -C_1 \frac{dT_{1j}}{d\tau} = & -4(T_{1j})^3 (T_{1j}^{(0)} - T_{1j}) \varepsilon_1 \sigma F_1 - \\ & -\alpha_{a,12j} (T_{1j}^{(0)} - T_{1j}) - \beta_{1j}^\alpha \xi_{12j}^\alpha (T_{2j}^{(0)} - T_{1j}), \end{aligned} \quad (5.43)$$

где температуры T_{1j} являются решением краевой задачи (5.34)-(5.36) на текущей итерации, а производная $dT_{1j}/d\tau$ выражается из уравнения (5.34) после его решения относительно температур T_{1j} . Выражая производную $dT_{1j}/d\tau$ из уравнения (5.34), подставляя ее в полученное уравнение и решая его относительно β_{1j}^α , получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \beta_{1j}^\alpha = & \frac{1}{\xi_{12j}^\alpha (T_{2j}^{(0)} - T_{1j})} \times \\ & \times \left[Q_{1,j} + \varepsilon_1 \sigma F_1 (T_R^4 - (T_{1j})^4 - 4(T_{1j})^3 (T_{1j}^{(0)} - T_{1j})) + \alpha_{a,12j} (T_{2j}^{(0)} - T_{1j}^{(0)}) \right] \\ & (j = 1, 2, \dots, M). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Для применения метода итерационной регуляризации на основе функционала невязки температуры также необходим градиент функционала, который определяется как:

$$J'_{\alpha_{a,12j}} = - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \psi_{1j}(\tau) (T_{2j} - T_{1j}) d\tau, \quad (5.45)$$

где ψ_{1j} – неопределенные множители Лагранжа, при вычислении которых необходимо принять во внимание наличие известной теплоемкости C_1 в левой части уравнения (5.39):

$$\psi_{1j} = \frac{2}{C_1} (T_{1j} - T_{1j}^{(0)}). \quad (5.46)$$

Искомая функция $\alpha_{a,12}(\tau)$ устанавливается по условию достижения минимума функционала-невязки температуры

$$J_1^{(l)} = \sum_{j=1}^M (T_{1j}^{(l)} - T_{1j}^{(0)})^2, \quad (5.47)$$

где M – количество временных точек, в которых рассчитывается искомая функция.

Модельное распределение поглощенного радиатором потока инфракрасного излучения в зависимости от времени показано на рисунке 5.36, температур конденсатора и испарителя КТТ – на рисунке 5.37.

Таблица 5.11 – Спецификация итерационного процесса идентификации тепловой проводимости КТТ методом регуляризации

Режим	M	τ_{M+1} , с	τ_{M+1} , мин	$D(T_1^{(0)})$, К ²	$J^{(m)}$, К ²	m
Модельный	60	18000	300	0,068	20,1	6

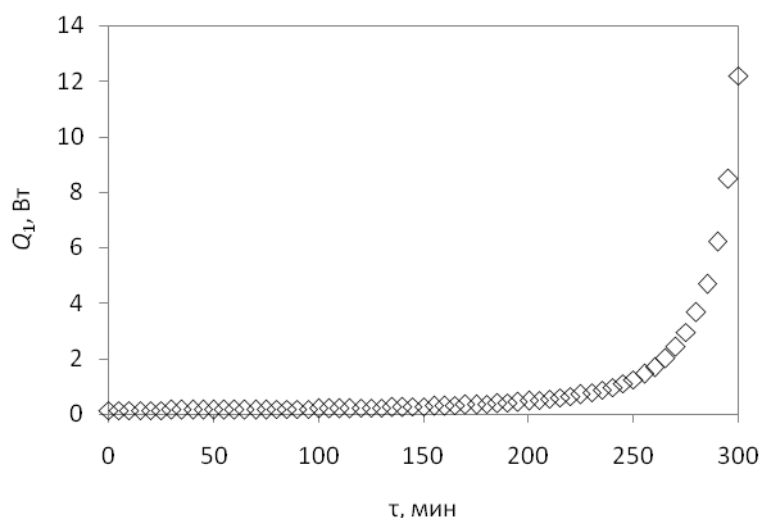
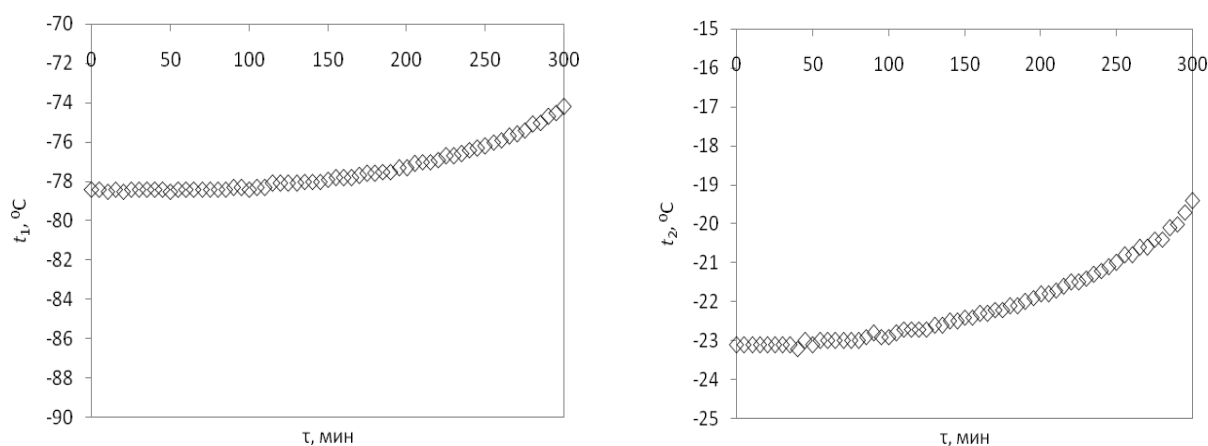


Рисунок 5.36 – Распределение поглощенного радиатором потока инфракрасного излучения в зависимости от времени



а – температура конденсатора КТТ

б – температура испарителя КТТ

Рисунок 5.37 – Распределение температуры КТТ в зависимости от времени

Среднеквадратичная ошибка температурных измерений для всей системы равна дисперсии (5.31) и составляет 0,068 К². Погрешность входных данных не достигается в точках минимума функционала невязки, и критерием останова итерационных процессов является выполнение условия $J_1^{(l)} \geq J_1^{(l-1)}$. В то же время, значения $J_1^{(m)}$ в точках минимума на несколько порядков меньше, чем на первой итерации (рисунок 5.38).

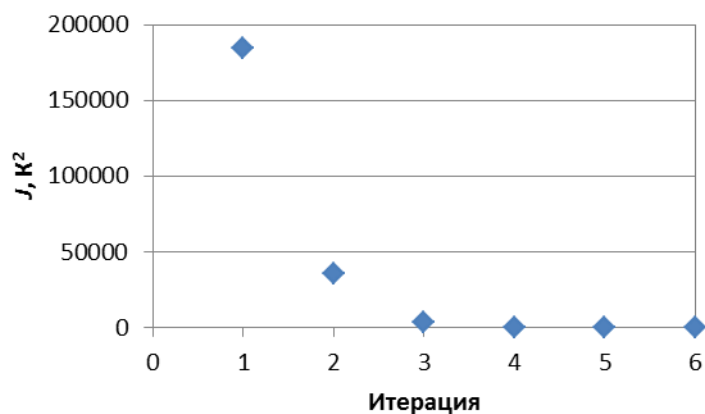
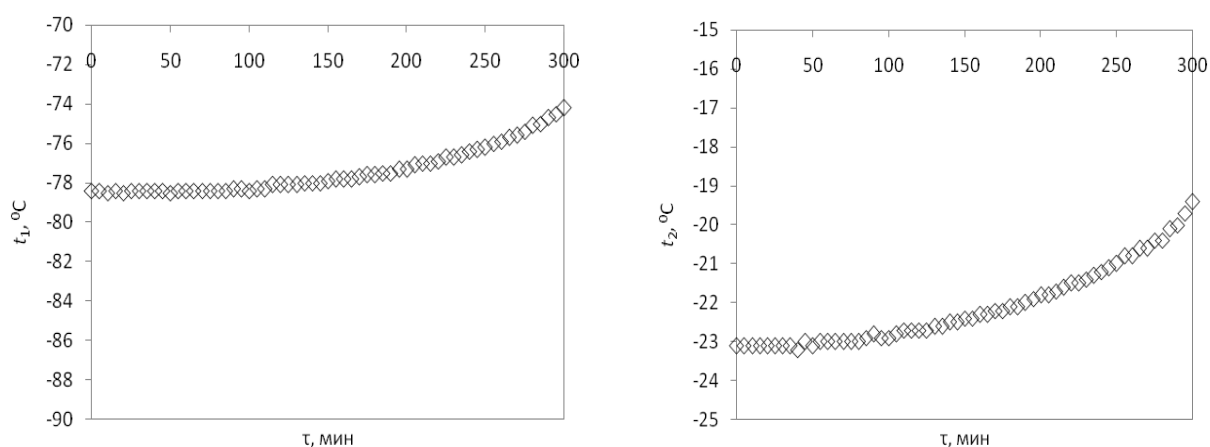


Рисунок 5.38 – Распределение значений функционала невязки в зависимости от номера итерации при идентификации тепловой проводимости КТТ



а – на итерации 1

б – на итерации m

Рисунок 5.39 – Корреляция расчетной (t) и экспериментальной (e) температур

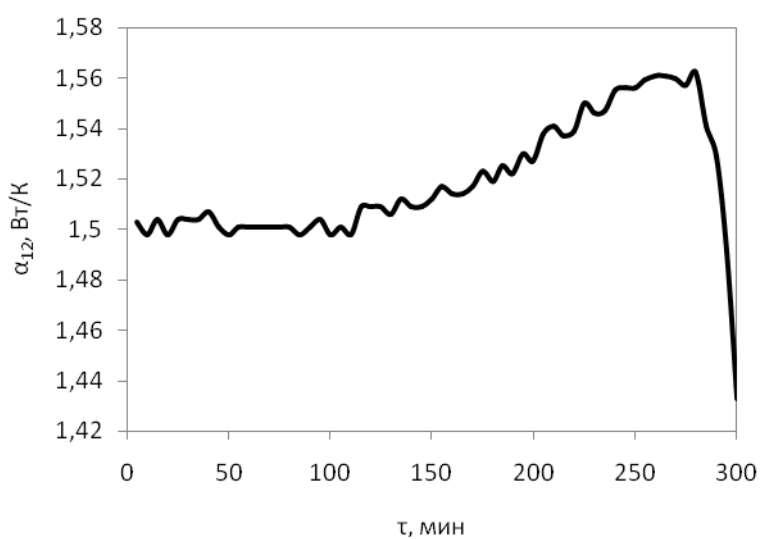


Рисунок 5.40 – Распределение абсолютной тепловой проводимости КТТ в зависимости от времени

Начальное приближение тепловой проводимости для всех режимов $\alpha_{a,12j}^{(0)} = 0,1$ Вт/К. Искомая функция достигается за шесть итераций (рисунок 5.39).

В результате идентификации тепловой проводимости КТТ по модельным массивам поглощенного испарителем инфракрасного потока и температур испарителя и конденсатора получена ожидаемая зависимость проводимости трубы от поглощенного потока – чем более интенсивен поглощенный поток, тем меньше проводимость трубы (рисунок 5.40) [270].

По идентифицированным параметрам построена математическая модель составной части космического аппарата, использованная при его тепловой обработке. Идентифицированные МСП и МРП СЧ применялись для разработки проектных и поверочных расчетов режимов тепловых вакуумных испытаний и летной эксплуатации и обеспечили погрешности стационарных расчетов не более 9 % от ширины допустимых диапазонов температуры для всех элементов СЧ за исключением ЭВТИ с относительной погрешностью 15% (таблица 5.12) [2].

Таблица 5.12 – Статистические характеристики тепловой модели СЧ в стационарных поверочных расчетах

Элемент модели	Внутренняя сторона ПП II		Внутренняя сторона ПП IV		Наружная сторона ТРП ПП II, IV		Наружная сторона ЭВТИ ПП II, IV	
	Значение	Число точек	Значение	Число точек	Значение	Число точек	Значение	Число точек
$ \Delta T _1, \text{K}$	4,5	112	4,1	144	4,5	80	4,9	32
$ \Delta T _{0,98}, \text{K}$	4,4	110	3,9	141	4,3	78	4,6	31
$ \Delta T _{0,9}, \text{K}$	3,8	101	3,3	130	3,8	72	4,2	29
$ \Delta T _{0,85}, \text{K}$	3,5	95	3,0	122	3,5	68	3,9	27
$T_{\max} - T_{\min}, \text{K}$	60		60		60		60	
δT_1	$\pm 0,075$	112	$\pm 0,069$	144	$\pm 0,075$	80	$\pm 0,081$	32
$\delta T_{0,98}$	0,073	110	0,065	141	0,072	78	0,077	31
$\delta T_{0,9}$	0,064	101	0,055	130	0,063	72	0,070	29
$\delta T_{0,85}$	0,059	95	0,050	122	0,059	68	0,064	27

Окончание таблицы 5.12

Элемент модели	Наружная часть оптической защиты		ЭВТИ и СП		СЧ КА
	Значение	Число точек	Значение	Число точек	Всего точек
$ \Delta T _1, ^\circ\text{C}$	25,1	32	42,6	48	448
$ \Delta T _{0,98}, ^\circ\text{C}$	23,0	31	41,2	47	438
$ \Delta T _{0,9}, ^\circ\text{C}$	18,2	29	37,2	43	404
$ \Delta T _{0,85}, ^\circ\text{C}$	15,3	27	35,2	41	380
$T_{\max} - T_{\min}, \text{K}$	275		275		275
δT_1	$\pm 0,091$	32	$\pm 0,155$	48	448
$\delta T_{0,98}$	0,084	31	0,150	47	438
$\delta T_{0,9}$	0,066	29	0,135	43	404
$\delta T_{0,85}$	0,056	27	0,128	41	380

5.4. Управление мощностью внутренних тепловых источников космических аппаратов

5.4.1. Принципы построения современных систем управления космических аппаратов.

История развития систем управления космических аппаратов показывает, что благодаря достижениям в области автоматических систем, приборов систем управления, вычислительных систем, исполнительных органов, способов и методов комплексирования созданы современные цифровые многоцелевые, многорежимные системы с длительным сроком активного существования, в основу которых положены следующие принципы [105]: максимальная автономность и автоматизация процессов управления, модульность и модифицируемость системы, гибкость управления системой по командной радиолинии, комплексное решение задач управления в рамках цели полета. Принципы построения бортовых комплексов управления автоматических космических аппаратов представлены в [106].

Методология разработки информационно-управляющих систем космических аппаратов, работающих в реальном времени, основывается на основополагающих принципах и имеет целью синтез систем с максимально высоким уровнем обслуживания требований пользователей за счет оптимального использования вычислительных ресурсов. В критических ситуациях должно быть как минимум два функционально-независимых способа управления с использованием различных алгоритмов решения задачи [109].

По этой причине необходимо создание математических моделей и основанных на них алгоритмов решения задач управления, в том числе, и для систем терморегулирования, применение которых в вычислительных средствах космических аппаратов [107] позволило бы повысить эффективность использования вычислительных ресурсов. Такие алгоритмы нужны также для обеспечения автономности систем управления.

Математическая модель системы управления космическими ядерными энергетическими установками с термоэмиссионным преобразованием энергии рассматривается в [108].

В системах управления реального времени важное значение имеет скорость решения задачи. Одним из путей достижения требуемого быстродействия является применение методов, основанных на системах обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задача терминального управления линейной нестационарной дискретной динамической системой с векторным управлением приближенно решена на основе техники делителей нуля в [207], параметрической идентификации такой системы – в [208-209].

Рассмотрим задачу нетерминального управления мощностью внутренних тепловых источников системы терморегулирования некоторой

составной части КА, которая в каждой точке временной сетки τ_j ($j = 0, 1, \dots, M$) переводит систему в состояние с температурой (3.64)

Пусть теплообмен в СЧ КА описывается идентифицированной МСП (3.95) с начальным условием (3.96) и условием непрерывности (3.97) [213].

Управление температурой системы (3.95)-(3.97) по закону (3.64) при помощи вектора тепловой мощности $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$ эквивалентно идентификации этого вектора по температурам (3.64). Искомые функции $Q_i(\tau)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) зависят только от времени, поэтому задача решается в функциональном пространстве.

5.4.2. Управление тепловой мощностью модифицированным итерационно-вариационным методом.

Задача нахождения вектора тепловой мощности $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$ имеет единственное решение, поскольку сводится к решению идентифицированной системы (3.95)-(3.97) из N уравнений относительно N неизвестных функций ($i = 1, 2, \dots, N$). Однако, наличие производных в левой части уравнений может быть причиной неустойчивости решения. Поэтому поиск решения, удовлетворяющего множеству температур (3.64), осуществляется модифицированным методом итерационной регуляризации (вариационно-итерационным методом) [213].

Метод состоит из двух частей. Во-первых, с помощью любой методики метода простых итераций или другого необходимо найти приращение функции на текущей итерации:

$$\Delta \mathbf{Q}^{(l)} = \mathbf{Q}^{(l)} - \mathbf{Q}^{(l-1)} \quad (l = 1, 2, \dots, m), \quad (5.48)$$

где $\mathbf{Q}^{(0)}$ – начальное приближение; $\mathbf{Q}^{(m)}$ – псевдорешение из множества $\mathbf{F}_Q = \{ \mathbf{Q}^{(1)}, \mathbf{Q}^{(2)}, \dots, \mathbf{Q}^{(l)}, \mathbf{Q}^{(l+1)}, \dots \}$, нормальное относительно точного решения $\mathbf{Q}^{(\infty)}$ [3]:

$$\| \mathbf{Q}^{(m)} - \mathbf{Q}^{(\infty)} \| = \inf_{\mathbf{Q} \in \mathbf{F}_Q} \| \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{(\infty)} \|. \quad (5.49)$$

Во-вторых, в силу возможной неустойчивости решения итерационный процесс (5.48) может не сходиться к нормальному псевдорешению и требовать регуляризации. Регуляризация решения производится методом Лагранжа в предположение, что вектор $\mathbf{Q}^{(l)}$ минимизирует сглаживающий функционал [3]

$$M(\mathbf{Q}^{(m)}, \mathbf{Q}^{(l)}, \gamma) = \| \mathbf{Q}^{(l-1)} - \mathbf{Q}^{(l)} \|^2 + \gamma \| \mathbf{Q}^{(l)} - \mathbf{Q}^{(m)} \|^2, \quad (5.50)$$

где $\gamma > 0$ – параметр регуляризации, определяемый однозначно по невязке в методе А.Н. Тихонова. Можно показать, что минимизация функционала (5.50) эквивалентна итерационной процедуре [213]

$$\inf_{\mathbf{Q} \in \mathbf{F}_Q} M(\mathbf{Q}^{(m)}, \mathbf{Q}^{(l)}, \gamma) \Rightarrow \mathbf{Q}^{(m)} = \mathbf{Q}^{(l)} \pm \frac{1}{\gamma} \Delta \mathbf{Q}^{(l)} = \mathbf{Q}^{(l)} - \beta \Delta \mathbf{Q}^{(l)}, \quad (5.51)$$

где $\beta = \pm 1/\gamma$ – безразмерный шаг спуска, определяемый из решения следующей вариационной задачи.

Пусть искомые тепловые мощности Q_{ij} ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M$) получили вариации

$$\delta Q_{ij} = -\beta_{ij} \Delta Q_{ij} \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M) \quad (5.52)$$

Тогда температура изменится на некоторую величину $v_{ij}(\tau)$ ($i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M$), а вариация температуры $v_{ij}(\tau)$ удовлетворяет краевой задаче:

$$\begin{aligned} C_i(T_i, \tau) \frac{dv_{ij}}{d\tau} = & -\frac{\partial C_i(T_i, \tau)}{\partial T_{ij}} \frac{dT_{ij}}{d\tau} v_{ij} + \sum_{k=1}^N \alpha_{ikj} (-v_{ij}) + \\ & + \sum_{k=1}^N \chi_{ikj} (-4T_{ij}^3 v_{ij}) + \frac{\partial E_i(T_i, \tau)}{\partial T_{ij}} v_{ij} + \delta Q_{ij}, \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j] \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M).$$

с начальным условием (3.73) и условием непрерывности (3.74). Функционал температурной невязки на итерации l запишется как

$$J(\mathbf{Q} + \delta \mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (T_{ij} + v_{ij} - T_{ij}^{(0)})^2. \quad (5.54)$$

Вариации температуры $v_{ij}(\tau)$ определяются из (3.92). Подставляя вариации температуры из (3.92) в (5.53) и считая, что решение задачи определяется членами первого приближения, получаем уравнение (3.120) для определения β_{ij} , где температуры T_{ij} являются решением краевой задачи (3.95)-(3.97) на текущей итерации, а производные $dT_{ij}/d\tau$ в уравнении (3.120) выражаются из уравнения (3.95) после его решения относительно температур T_{ij} . Выражая производные $dT_{ij}/d\tau$ из уравнения (3.95), подставляя их в уравнение (3.120) и решая его относительно шага спуска, получаем выражение (3.131).

5.4.3. Вычислительный эксперимент.

Для проведения расчетов используем упрощенную систему уравнений тепловой математической модели с сосредоточенными параметрами (2.70) составной части космического аппарата в виде негерметичного отсека, состоящего из четырех узлов (узел 1 – несущая конструкция с термостабилизированными сотопанелями и аппаратурой; узел 2 – внутренняя часть оптической защиты, внутренняя бленда; узел 3 – наружная часть оптической защиты, наружная бленда) [2], [213]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT_{1j}}{d\tau} &= \frac{1}{C_1} \left[Q_{1j} + E_{1j} - \chi_1 (T_{1j}^4 - T_R^4) - \alpha_{13} (T_{1j} - T_{3j}) - \alpha_{12} (T_{1j} - T_{2j}) \right], \\ \frac{dT_{2j}}{d\tau} &= \frac{1}{C_2} \left[-\alpha_{12} (T_{2j} - T_{1j}) - \alpha_{23} (T_{2j} - T_{3j}) \right], \\ \frac{dT_{3j}}{d\tau} &= \frac{1}{C_3} \left[E_{3j} - \chi_3 (T_{3j}^4 - T_R^4) - \alpha_{13} (T_{3j} - T_{1j}) - \alpha_{23} (T_{3j} - T_{2j}) \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

$$T_{i0} = T_i(0) = 273 \text{ К} \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, M),$$

где T – абсолютные температуры узлов, К; $T_R = 4$ К – температура космического пространства; C – абсолютные теплоемкости узлов ($C_1 = 4.072 \times 10^5$ Дж/К; $C_2 = 5.107 \times 10^4$ Дж/К; $C_3 = 3.432 \times 10^4$ Дж/К); α – абсолютные проводимости между узлами ($\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0.566$ Вт/К;

$\alpha_{13} = \alpha_{31} = 7.41$ Вт/К; $\alpha_{23} = \alpha_{32} = 0.01$ Вт/К; χ – коэффициенты излучения узлов ($\chi_1 = 1.327 \times 10^{-7}$ Вт/К⁴; $\chi_3 = 5.796 \times 10^{-7}$ Вт/К⁴); Q – внутренние тепловые мощности узлов, Вт; E – тепловые мощности, подводимые к узлам из окружающего пространства ($E_1 = E_2 = E_3 = 0$).

Внутренняя тепловая мощность Q_1 присутствует в узле 1, поэтому для построения итерационного процесса методом Ньютона преобразуем уравнение первого узла к виду

$$\begin{aligned} f(Q_{1j}) = & Q_{1j} + E_{1j} - \chi_1(T_{1j}^4 - T_R^4) - \\ & - \alpha_{13}(T_{1j} - T_{3j}) - \alpha_{12}(T_{1j} - T_{2j}) - C_1 \frac{dT_{1j}}{d\tau} = 0 \end{aligned} \quad (5.56)$$

$(j=1, \dots, M)$.

Тогда выражение метода Ньютона запишется как

$$Q_{1j}^{(l)} = Q_{1j}^{(l-1)} - \frac{f(Q_{1j})}{f'(Q_{1j})} \quad (l=1, 2, \dots; j=1, \dots, M) \quad (5.57)$$

где $Q_{1j}^{(0)}$ – начальное приближение. Поскольку $f'(Q_{1j}) = 1$, итерационный процесс метода Ньютона сводится к простому выражению $Q_{1j}^{(l)}$ через температуры, найденные из системы (5.55) по мощности $Q_{1j}^{(l-1)}$. Для расчета приращения искомой функции методом Ньютона выбирается константа того же знака, что и производная в окрестности корня:

$$\begin{aligned} Q_{1j}^{(l)} = & Q_{1j}^{(l-1)} - \text{const}[Q_{1j}^{(l-1)} + E_{1j} - \chi_1(T_{1j}^4 - T_R^4) - \\ & - \alpha_{13}(T_{1j} - T_{3j}) - \alpha_{12}(T_{1j} - T_{2j}) - C_1 \frac{dT_{1j}}{d\tau}], \end{aligned} \quad (5.58)$$

$0 \leq \text{const} \leq 1 \quad (j=1, 2, \dots, M; l=1, 2, \dots, m)$.

На нижней границе диапазона изменения постоянной ($\text{const} = 0$) приращение искомой функции равно нулю, а на верхней ($\text{const} = 1$) соответствует значению тепловой мощности, выраженной из первого уравнения системы (5.55):

$$\Delta Q_{1j}^{(l)} = Q_{1j}^{(l)} - Q_{1j}^{(l-1)} \quad (j=1, 2, \dots, M; l=1, 2, \dots, m). \quad (5.59)$$

Регуляризованное решение найдется по выражению

$$Q_{1j}^{(m)} = Q_{1j}^{(l)} \pm \frac{1}{\gamma_{1j}} \Delta Q_{1j}^{(l)} = Q_{1j}^{(l)} - \beta_{1j} \Delta Q_{1j}^{(l)} \quad (j=1, 2, \dots, M; l=1, 2, \dots, m), \quad (5.60)$$

где безразмерный шаг спуска определяется согласно (3.131) следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_{1j} = & \frac{1}{\Delta Q_{1j}} [(-4\chi_1 T_{1j}^3 - \alpha_{13} - \alpha_{12})(T_{1j}^{(0)} - T_{1j}) - \\ & - \chi_1(T_{1j}^4 - T_R^4) - \alpha_{13}(T_{1j} - T_{3j}) - \alpha_{12}(T_{1j} - T_{2j}) + Q_{1j} + E_{1j}] \quad (j=1, \dots, M). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Расчетный участок составляет $\tau_M = 12$ ч = 4.32×10^4 с, $M = 120$. Критериальная температура изменяется по гармоническому закону

$$t_1^{(0)} = A \sin \omega \tau, \quad T_1^{(0)} = t_1^{(0)} + 273 \text{ К}, \quad (5.62)$$

где $A = -10 \text{ }^\circ\text{C}$, $\omega = 2 \times (2\pi/\tau_M)$. Начальная тепловая мощность $Q_1^{(0)} = 0 \text{ Вт}$, начальные температуры $T_1(0) = T_2(0) = T_3(0) = 273 \text{ К}$.

В процессе решения функционал невязки температуры проходит следующие значения (рисунок 5.41):

$$J_1 = \sum_{j=1}^M (T_{1j} - T_{1j}^{(0)})^2 = (356960, \mathbf{5713}, 5740, 5735, 5737) \text{ К}^2. \quad (5.63)$$

Итерационный процесс ($\text{const} = 1$) прекращен по условию остановки убывания функционала J на четвертой итерации, а наилучшее решение найдено на первой итерации – для его достижения потребовалось однократное решение обратной задачи модифицированным итерационно-вариационным методом. Распределения расчетных и критериальной температур в зависимости от времени показаны на рисунках 5.42, 5.43, а функция $Q_1^{(1)}(\tau)$ – на рисунке 5.44. Из-за большой абсолютной теплоемкости первого узла заданная температура не воспроизводится точно – расчетная температура имеет меньшую амплитуду и смещение по фазе.

Таким образом, для решения задачи нетерминального управления тепловой мощностью в идентифицированной трехузловой МСП негерметичного отсека КА модифицированным вариационно-итерационным методом потребовалась одна итерация, что делает пригодным его применение в сочетании с МСП в системах управления реального времени.

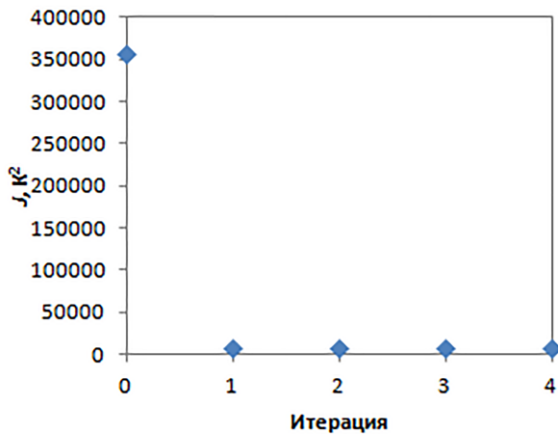


Рисунок 5.41 – Значения функционала невязки температуры в зависимости от номера итерации

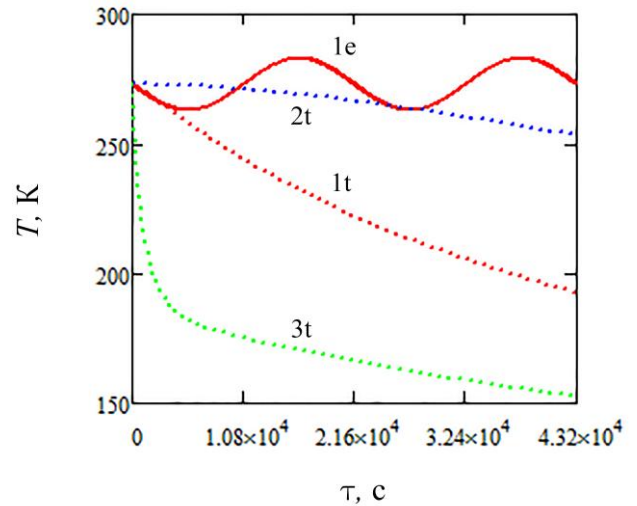
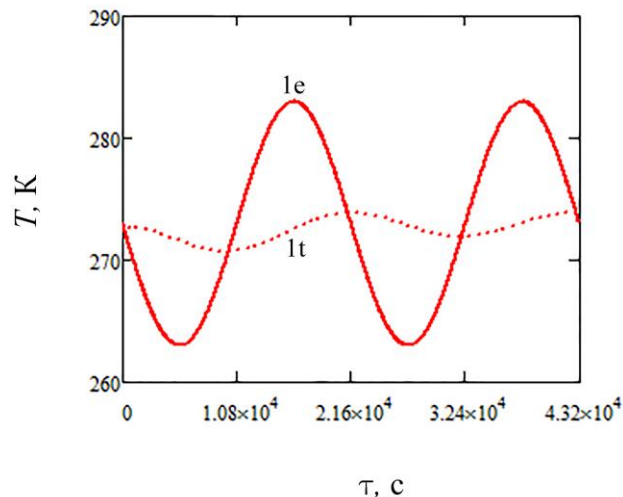
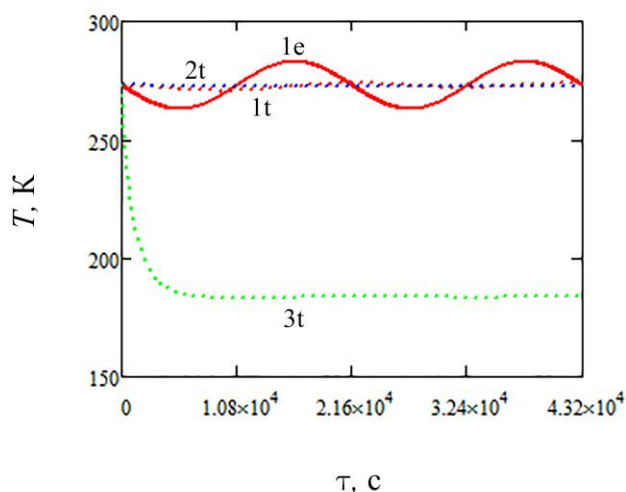


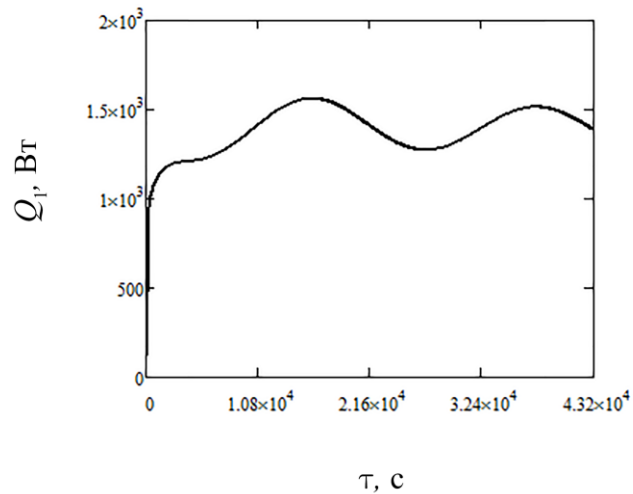
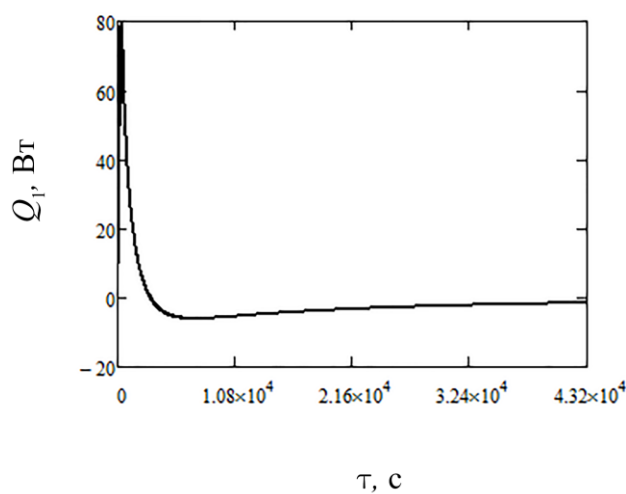
Рисунок 5.42 – Распределения температур в зависимости от времени при начальной тепловой мощности $Q_1^{(0)}(\tau) = 0$ (1e – критериальная температура первого узла; 1t, 2t, 3t – расчетные температуры первого, второго и третьего узлов)



а – для первого, второго и третьего узлов

б – для первого узла

Рисунок 5.43 – Распределения температур в зависимости от времени при идентифицированной тепловой мощности $Q_1^{(1)}(\tau)$ (1e – критериальная температура первого узла; 1t, 2t, 3t – расчетные температуры первого, второго и третьего узлов)



а – нерегуляризованное решение

б – регуляризованное решение

Рисунок 5.44 – Распределения тепловой мощности $Q_1^{(1)}(\tau)$

5.5. Выводы по главе 5

1. Идентификация параметров ЭВТИ прямым методом показывает, что тепловое сопротивление ЭВТИ зависит от условий освещенности, нагрева конструкции, продолжительности нагрева или охлаждения, изменяясь от $3,4 \text{ м}^2 \cdot \text{К}/\text{Вт}$ при нагреве инфракрасными имитаторами ($900 \text{ Вт}/\text{м}^2$) в течение 240 минут до $10,5 \text{ м}^2 \cdot \text{К}/\text{Вт}$ при охлаждении криоэкранами (83 К) в течение 676 минут. Излучательная способность ЭВТИ по результатам идентификации методом регуляризации изменяется от 0,02 при внешнем нагреве ИКИ (температура наружного слоя 330 К) до 0,05 при охлаждении

криоэкранами (температура наружного слоя от 202 до 245 К) и существенно отличается от коэффициента излучения наружной поверхности (0,65). Отсюда следует, что излучательная способность ЭВТИ как системы определяется не поверхностными свойствами наружного покрытия, а интегральными свойствами, являющимися результатом взаимодействия внутренних слоев, коэффициенты излучения которых находятся в диапазоне от 0,04 до 0,06. Идентифицированные в режимах внешнего нагрева инфракрасными имитаторами и охлаждения криоэкранами значения близки между собой, следовательно, интегральная излучательная способность ЭВТИ приближенно равна спектральной в инфракрасном диапазоне длин волн.

2. Применение идентифицированных параметров в тепловой математической модели СЧ КА позволило обеспечить погрешности стационарных расчетов не более 9 % от ширины допустимых диапазонов температуры для всех элементов СЧ за исключением ЭВТИ с относительной погрешностью 15 % и подтвердить тепловой режим СЧ КА расчетно-экспериментальным методом.

3. Академиками В.П. Легостаевым и Е.А. Микриным сформулированы следующие принципы построения современных цифровых многоцелевых, многорежимных информационно-управляющих систем КА реального времени с длительным сроком активного существования: максимальные автоматизируемость, автономность, модульность, модифицируемость, гибкость управления по командной радиолинии, комплексирование задач управления в рамках цели проекта при наиболее эффективном распределении вычислительных ресурсов между потребителями.

Для обеспечения автоматизируемости, автономности и наилучшего распределения вычислительных ресурсов систем управления необходима разработка эффективных алгоритмов решения задач для различных потребителей, в том числе, для систем терморегулирования КА. При этом, возможно оптимальное по скорости перевода системы в заданное конечное состояние терминальное управление и оптимальное по определенному критерию качества на каждом временном шаге нетерминальное управление. Нетерминальное управление аналогично идентификации системы по экспериментальным данным и может осуществляться методами решения задач идентификации.

На основе итерационно-вариационного метода регуляризации решения задачи идентификации математических моделей теплообмена с сосредоточенными параметрами построена методика нетерминального управления тепловой мощностью внутренних источников космических аппаратов, применение которой в простейшей модели из трех узлов позволило получить решение на первой итерации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана методология тепловой отработки космических аппаратов расчетно-экспериментальным методом, основанная на тепловых расчетах и тепловых вакуумных испытаниях, с использованием двухуровневого метода математического моделирования и модифицированного вариационного метода итерационной регуляризации для идентификации математических моделей. Ключевой проблемой системной тепловой отработки расчетно-экспериментальным методом является идентификация математических моделей теплообмена.

2. Показано, что задача идентификации неизвестных функций матрицы тепловых связей математической тепловой модели с сосредоточенными параметрами, состоящей из обыкновенных дифференциальных уравнений, в общем виде имеет неединственное решение и может быть неустойчивой из-за плохой обусловленности. В случае неустойчивого решения использование методов итерационной регуляризации позволяет получить условно устойчивое решение, используя экспериментальную температуру одного узла для идентификации одной координаты искомого вектора. Решение задачи в общем виде имеет неединственное решение и может находиться приближенно с использованием расчета единого шага спуска (параметра регуляризации) для каждого искомого вектора. В этом случае требуется усиление вариационного принципа восстановлением достаточности дополнительных условий до использования экспериментальной температуры одного узла для идентификации одной координаты строки матрицы неизвестных коэффициентов, соответствующей этому узлу. Задача идентификации полного набора связей решается итерационно последовательным перебором узлов системы на каждой итерации при наличии первого приближения.

3. По результатам анализа вариационного метода Тихонова и метода итерационной регуляризации получены аналитические выражения для вычисления неопределенных множителей Лагранжа, входящих в выражения градиента функционала температурной невязки, и единые аналитические выражения шага спуска метода итерационной регуляризации и параметра регуляризации итерационного метода на основе вариационного метода Тихонова. При замене в выражении шага спуска функции градиента функционала разностью значений искомого вектора на двух соседних итерациях получается выражение безразмерного шага спуска, обратного параметру регуляризации. Полученные выражения обобщены для технических, в частности, космических систем и проверены вычислительными экспериментами для нелинейных задач.

4. Разработан модифицированный вариационный метод итерационной регуляризации (вариационно-итерационный метод) решения задач идентификации и комбинированная методика определения параметра

регуляризации на основе минимизации сглаживающего функционала и функционала невязки температуры для решения нелинейных задач.

5. На основе аналогии погрешности нестационарного теплового расчета и функции отклика электронного измерительного устройства первого порядка производной по времени разработана методика оценки точности математических моделей теплообмена в термодинамически открытых технических системах КА и доказано в частном случае уравнение для идентификации теплоемкости и тепловой проводимости граничных узлов термодинамически закрытых технических систем.

6. Идентификация теплового сопротивления ЭВТИ прямым алгебраическим методом показывает, что тепловое сопротивление ЭВТИ зависит от условий освещенности, нагрева конструкции, продолжительности нагрева или охлаждения, изменяясь от $3,4 \text{ м}^2 \cdot \text{К}/\text{Вт}$ при нагреве инфракрасными имитаторами ($900 \text{ Вт}/\text{м}^2$) в течение 240 минут до $10,5 \text{ м}^2 \cdot \text{К}/\text{Вт}$ при охлаждении криоэкранами (83 К) в течение 676 минут.

7. Идентификация излучательной способности ЭВТИ методом итерационной регуляризации и модифицированным вариационно-итерационным методом дает одни и те же результаты и показывает, что излучательная способность ЭВТИ изменяется от 0,02 при внешнем нагреве инфракрасными имитаторами (температура наружного слоя 330 К) до 0,05 при охлаждении криоэкранами (температура наружного слоя от 202 до 245 К) и существенно отличается от коэффициента излучения наружной поверхности (0,62). Отсюда следует, что излучательная способность ЭВТИ как системы определяется не поверхностными свойствами наружного покрытия, а интегральными свойствами, являющимися результатом взаимодействия внутренних слоев, коэффициенты излучения которых находятся в диапазоне от 0,04 до 0,06. Идентифицированные в режимах внешнего нагрева инфракрасными имитаторами и охлаждения криоэкранами значения близки между собой, следовательно, интегральная излучательная способность ЭВТИ приближенно равна спектральной в инфракрасном диапазоне длин волн.

8. Применение идентифицированных параметров в тепловой математической модели СЧ КА позволило обеспечить погрешности стационарных расчетов не более 9 % от ширины допустимых диапазонов температуры для всех элементов СЧ за исключением ЭВТИ с относительной погрешностью 15 % и подтвердить тепловой режим СЧ КА расчетно-экспериментальным методом.

9. Модели с сосредоточенными параметрами удовлетворяют принципам современных цифровых систем управления КА. Сформулирована и решена модифицированным вариационно-итерационным методом задача нетерминального управления тепловой мощностью внутренних источников обобщенной модели с сосредоточенными параметрами, обеспечивающая для простейшей модели теплообмена в негерметичном космическом аппарате сходимость к устойчивому решению на первых итерациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панкратов Б.М. Методы отработки тепловых режимов технических систем и обратные задачи тепломассообмена // ИФЖ. 1989. Т. 56. № 3. С. 359-362.
2. Викулов А.Г. Математическое моделирование теплообмена в космических аппаратах // Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей». 2017. Т. 21 № 2. № 2. С. 71-88.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Изд. 2-е. – М.: Наука. Физматлит, 1979. 288 с.
4. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 199 с.
5. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1979. 216 с.
6. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
7. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. – М.: Физматлит, 1988. 288 с.
8. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Ненарокомов А.В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. – М.: Янус-К, 2009. 300 с.
9. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Учебник для студентов высших учебных заведений. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
10. Алифанов О.М., Вабищевич П.Н., Михайлов В.В. и др. Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем: Учебное пособие. – М.: Логос, 2001. 400 с.
11. Борухов В.Т., Тимошпольский В.И., Заяц Г.М., Андрианов Д.Н., Цурко В.А. Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики // ИФЖ. 2005. Т. 78. №2. С. 3-15.
12. Досько С.И., Киренков В.В. Методы решения обратных задач в машиностроении // Вестник МГТУ Станкин. 2012. № 1. С. 67-72.
13. Резник С.В., Просунцов П.В. Математическое моделирование комбинированного теплообмена в пористых материалах тепловой защиты многоразовых космических аппаратов. Учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 86 с.
14. Резник С.В., Просунцов П.В. Определение характеристик теплопереноса материалов тепловой защиты многоразовых космических аппаратов по результатам тепловых испытаний. Учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 90 с.
15. Просунцов П.В., Резник С.В. Определение теплофизических свойств полупрозрачных материалов // ИФЖ. 1985. Т. 49. № 6. С. 971.
16. Просунцов П.В., Резник С.В. Математическая модель коэффициентной обратной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена

в полупрозрачной рассеивающей среде // Известия Сибирского отделения Академии наук СССР. Серия технических наук. 1986. Т. 10. № 2. С. 3-9.

17. Падерин Л.Я., Просунцов П.В., Резник С.В., Фишер В.П. Экспериментальное исследование теплопереноса в пористых полупрозрачных теплозащитных материалах // ИФЖ. 2005. Т. 78. № 1. С. 60-66.

18. Prosuntsov P.V. Parametric identification of thermophysical properties of highly porous partially transparent materials based on the solution of a two-dimensional problem of radiative-conductive heat transfer // Heat Transfer Research. 2005. Т. 36. № 6. С. 481-499.

19. Данилова Д.А., Просунцов П.В. Математическое моделирование процессов комбинированного теплообмена и оптимизация параметров теплозащитного покрытия с системой радиационных экранов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. №. С. 27.

20. Просунцов П.В., Майорова И.А., Зуев А.В. Использование моделей комбинированного теплопереноса для анализа температурного состояния элементов тепловой защиты многоразовых космических аппаратов // Тепловые процессы в технике. 2014. № 7. С. 317-323.

21. Зуев А.В., Просунцов П.В., Майорова И.А. Расчетно-экспериментальное исследование процессов теплопереноса в высокопористых волокнистых теплоизоляционных материалах // Тепловые процессы в технике. 2014. № 9. С. 410-419.

22. Баринов Д.Я., Просунцов П.В. Моделирование теплопереноса в слое разлагающегося материала теплозащитного покрытия спускаемого аппарата // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. 2016. № 6. С. 22-32.

23. Просунцов П.В., Шуляковский А.В., Тараскин Н.Ю. Численное моделирование элемента тепловой защиты перспективного многоразового спускаемого аппарата капсульного типа // ИФЖ. 2017. Т. 90. № 1. С. 116-122.

24. Резник С.В., Просунцов П.В., Михайловский К.В. Прогнозирование теплофизических и термомеханических характеристик пористых углерод-керамических композиционных материалов тепловой защиты аэрокосмических летательных аппаратов // ИФЖ. 2015. Т. 88. № 3. С. 577-583.

25. Резник С.В., Фишер В.П., Мартинес Д., Падерин Л.Я., Павлюкевич Н.В., Петит Д., Просунцов П.В. Моделирование и идентификация процессов теплообмена в пористых материалах тепловой защиты многоразовых аэрокосмических систем // ИФЖ. 2004. Т. 77. №3. С. 3-8.

26. Суржииков С.Т., Шувалов М.П. Анализ радиационно-конвективного нагрева четырех типов спускаемых аппаратов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2014. Т. 15. № 4. С. 4.

27. Иванков А.А. Расчет радиационных тепловых потоков с учетом сильного вдува при входе космических аппаратов в атмосферу Венеры //

Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. № 7. С. 1279-1288.

28. Иванков А.А. О численном решении задачи прогрева многослойной теплозащиты спускаемого аппарата с учетом уноса массы внешних и внутренних слоев покрытия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. № 7. С. 1279-1288.

29. Иванков А.А. Численное моделирование тепломассообмена при проектировании теплозащиты космических спускаемых аппаратов // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2011. № 9. С. 3-11.

30. Иванков А.А., Финченко В.С. Численное исследование теплового разрушения метеорита «Челябинск» при входе в атмосферу Земли // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5. № 6. С. 941-956.

31. Бондаренко В.А., Куперштейн В.Б. Обеспечение теплового режима десантного модуля космического аппарата «Экзомарс-2018» // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2014. № 2. С. 95-104.

32. Аношко И.А., Ермаченко В.С., Пенязьков О.Г., Сандригайло Л.Е., Финченко В.С. Экспериментальная отработка тепловой защиты десантного модуля аппарата «Экзомарс» // Тепловые процессы в технике. 2014. № 10. С. 475-480.

33. Аношко И.А., Ермаченко В.С., Пенязьков О.Г., Протасеня В.Т., Финченко В.С. О результатах испытаний некоторых теплозащитных материалов для системы тепловой защиты спускаемого аппарата, входящего в атмосферу Марса // Тепловые процессы в технике. 2017. № 2. С. 66-75.

34. Голомазов М.М., Иванков А.А. Расчетно-теоретическое исследование воздействия атмосферы Марса на десантный модуль проекта «Экзомарс-2018» при аэродинамическом торможении // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2015. № 2. С. 26-35.

35. Голомазов М.М., Иванков А.А. Программный комплекс для разработки систем тепловой защиты космических аппаратов, спускаемых в атмосферах планет // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2017. № 3. С. 41-53.

36. Дилендик Е.М. Исследование задачи обеспечения допустимого температурного режима стыковочных агрегатов многоразовых космических кораблей при спуске с орбиты // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2013. № 2. С. 52-57.

37. Луженков В.В. Система обеспечения теплового режима многофункционального разгонного блока «Фрегат» // Тепловые процессы в технике. Т. 3. 2011. №2. С. 89-96.

38. Луженков В.В., Игнатенко А.П. Система обеспечения теплового режима межорбитального космического буксира «Фрегат» // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2014. № 1. С. 37-40.

39. Глазунов А.А., Гольдин В.Д., Зверев В.Г., Устинов С.Н., Финченко В.С. Аэротермодинамический расчет теплового разрушения разгонного блока «Фрегат» при спуске в атмосфере Земли // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20. № 2. С. 197-212.

40. Лемешевский С.А., Ишин С.В., Асюшкин В.А., Викуленков В.П., Ширшаков А.Е., Федоскин Д.И., Ефанов В.В., Яковлев Б.Д., Жумаханов Н.Б., Порешнев А.Ю., Бирюков А.С. Усовершенствованный разгонный блок типа «Фрегат» для перспективных ракет космического назначения среднего класса // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2018. № 2. С. 3-12.

41. Басов А.А., Огорокова К.С., Ставрицкий А.К. Системы обеспечения теплового режима разгонных блоков типа ДМ ракет космического назначения // Космическая техника и технологии. 2016. № 3. С. 71-79.

42. Ашурков Е.А., Кожухов В.П., Козлов А.Г., Корчагин Е.Н., Попов В.В., Решетнев М.Ф. Космический аппарат блочно-модульного исполнения. Патент № 2092398 МКИ Б6461/10. Б.И. 10.10.1997 № 28.

43. Бураков В.А., Корчагин Е.Н., Кожухов В.П., Ткаченко А.С., Щербакова И.В. Математическое моделирование теплообмена в негерметичном приборном отсеке космических аппаратов // ИФЖ. 2000. Т. 73. №1. С. 113-124.

44. Москатиныйев И.В., Тулин Д.В. Система обеспечения теплового режима. В кн.: Многофункциональная космическая платформа «Навигатор». Химки, 2017. С. 194-228.

45. Котляров Е.Ю. Система терморегулирования приборного отсека посадочного модуля «Луна-глоб» и расчетный анализ оптимальных рабочих параметров радиационного теплообменника // Тепловые процессы в технике. 2014. № 4. С. 164-178.

46. Альтов В.В., Гуля В.М., Копяткевич Р.М., Мишин Г.С., Гончаров К.А., Кочетков А.Ю., Тулин Д.В., Шабарчин А.Ф. Тепловое проектирование и пофрагментарная наземная отработка системы обеспечения теплового режима космического аппарата негерметичного исполнения на базе сотовых панелей с тепловыми трубами // Космонавтика и ракетостроение. 2010. № 3. С. 33-41.

47. Бондаренко В.А., Устинов С.Н., Немыкин С.А., Финченко В.С. Система обеспечения теплового режима малых космических аппаратов // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2013. № 3. С. 37-42.

48. Гончаров К.А. Методы регулирования двухфазных контуров и контурных тепловых труб // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2014. № 4. С. 50-55.

49. Морковин А.В., Плотников А.Д., Борисенко Т.Б. Теплоносители для внутренних контуров пилотируемых космических аппаратов // Космическая техника и технологии. 2013. № 1. С. 81-89.

50. Морковин А.В., Плотников А.Д., Борисенко Т.Б. Теплоносители для наружных гидравлических контуров систем терморегулирования автоматических и пилотируемых космических аппаратов // Космическая техника и технологии. 2015. № 3. С. 89-99.

51. Грибков А.С. Крупногабаритные тепловые трубы для космической ядерной энергетической установки мегаваттной мощности // Известия Российской академии наук. Энергетика. 2013. № 4. С. 118-123.
52. Бутов В.Г., Васенина Т.В., Кожухов В.П., Кувшинов Н.Е., Ящук А.А. Тепловой анализ негерметичного приборного отсека космических аппаратов // Известия высших учебных заведений. Физика. 2010. Т. 53. №12-2. С. 49-54.
53. Бураков В.А., Елизаров В.В., Корчагин Е.Н., Кожухов В.П., Ткаченко А.С., Щербакова И.В. Тепловая математическая модель Н-образного блока негерметичного приборного отсека геостационарных космических аппаратов // ИФЖ. 2003. Т. 76. №4. С. 142-149.
54. Бураков В.А., Елизаров В.В., Кожухов В.П., Корчагин Е.Н., Ткаченко А.С., Щербакова И.В. Математическое моделирование теплообмена модуля полезной нагрузки геостационарных космических аппаратов негерметичного исполнения // ИФЖ. 2004. Т. 77. №3. С. 108-116.
55. Кузнецов Г.В., Санду С.Ф. Особенности теплофизического моделирования приборных отсеков космических аппаратов // ИФЖ. 2001. Т. 74. №6. С. 57-60.
56. Kozlobrodov A.N., Kuntsevich G.V., Sandu S.F. Heat Transfer in Instrumentation Modules of Spacecrafts with the Systems of Heat Control on the Basis of Heat Pipes // Heat Transfer Research. 2001. V. 32. N. 7&8. Pp. 395-401.
57. Kuznetsov G.V., Kozlobrodov A.N., Sandu S.F. Heat Transfer in the Instrument Modules of Space Vehicles // Heat Transfer Research. 2003. V. 34. N. 1&2. Pp. 135-141.
58. Хохулин В.С. Принципы формирования алгоритмического и программного обеспечения комбинаторного моделирования теплового режима объектов космической техники // ИФЖ. 2000. Т. 73. №1. С. 90-100.
59. Юдин В.М. Комбинированный метод расчета температурных полей в конструкции летательных аппаратов // ИФЖ. 2000. Т. 73. №1. С. 101-106.
60. Алифанов О.М., Палешкин А.В., Терентьев В.В., Фирсюк С.О. Математическое моделирование теплового состояния изотермического элемента с учетом лучистого теплообмена между частями космического аппарата // ИФЖ. 2016. Т. 89. №1. С. 170-176.
61. Казаковцев В.П., Корянов В.В., Просунцов П.В. Анализ продолжительности пребывания космического аппарата в зоне тени от Земли в процессе его вывода на геостационарную орбиту // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2014. № 12. С. 14-18.
62. Казаковцев В.П., Корянов В.В., Просунцов П.В., Топорков А.Г. Методика расчета условий освещенности космического аппарата и возможности его попадания в тень от Земли в процессе выведения на заданную орбиту // Естественные и технические науки. 2015. № 11. С. 345-354.

63. Казаковцев В.П., Корянов В.В., Просунцов П.В., Топорков А.Г. Расчет условий освещенности в процессе выведения космического аппарата на геостационарную орбиту // Инженерный журнал: наука и инновации. 2016. № 12. С. 4.
64. Абросимов А.И., Пичхадзе К.М., Сысоев В.К., Верлан А.А., Yan L., Dingzhen L., Shangang W., Zhong L. Пассивная криогенная система охлаждения для геостационарного спутника // Оптический журнал. 2011. Т. 78. № 11. С. 73-77.
65. Абросимов А.И., Верлан А.А., Полищук Г.М., Пичхадзе К.М., Сысоев В.К. Оптимизация криогенного излучающего холодильника // Прикладная физика. 2009. № 2. С. 129-134.
66. Альтов В.В., Залетаев С.В., Копяткевич Р.М., Абросимов А.И. Исследование теплового режима космических аппаратов оптического назначения // Космонавтика и ракетостроение. 2006. № 3. С. 144-149.
67. Тулин Д.В., Ефремова Т.Н., Плугарь С.М., Шабарчин А.Ф. Система обеспечения теплового режима телескопа Т-170М и научной аппаратуры космического аппарата «Спектр-УФ» // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2014. № 5. С. 97-103.
68. Тулин Д.В., Виноградов И.С., Шабарчин А.Ф., Привезенцев А.С., Гончаров К.А. Система обеспечения теплового режима космического радиотелескопа // Космические исследования. 2014. Т. 52. № 5. С. 423
69. Алексеев С.В., Аксенова И.В., Иванова Е.К., Харитоновна Е.В., Лохов А.А. К вопросу создания конструкции защитного теплового экрана космического аппарата «Интергелио-зонд» // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2017. № 1. С. 64-67.
70. Алексеев С.В., Аксенова И.В., Белокрылова В.В., Иванова Е.К., Колесникова Е.М., Харитионовна Е.В. Новая антибликовая экранно-вакуумная тепловая изоляция для космических аппаратов // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2015. № 4. С. 65-69.
71. Денисова Л.В., Калинин Д.Ю., Резник С.В. Теоретические и экспериментальные исследования тепловых режимов сетчатых рефлекторов космических антенн // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. 2011. № 1. С. 92-105.
72. Резник С.В., Просунцов П.В., Азаров А.В. Моделирование температурного и напряженно-деформированного состояний рефлектора зеркальной космической антенны // ИФЖ. 2015. Т. 88. № 4. С. 945-950.
73. Просунцов П.В., Резник С.В., Денисов О.В., Заваруев В.А., Петров Н.М. Тепловой режим трансформируемого сетчатого рефлектора зеркальной космической антенны // Решетневские чтения. 2017. № 21-1. С. 164-165.
74. Резник С.В., Тимошенко В.П., Просунцов П.В., Минаков Д.С. Моделирование и идентификация параметров теплопереноса в тросовых

элементах космических конструкций. I. Обоснование условий эксперимента // Тепловые процессы в технике. 2013. №5. С. 235-239.

75. Резник С.В., Тимошенко В.П., Просунцов П.В., Минаков Д.С. Моделирование и идентификация параметров теплопереноса в тросовых элементах космических конструкций. II. Экспериментальные исследования. Определение теплопроводности тросового элемента // Тепловые процессы в технике. 2014. №8. С. 378-383.

76. Голев Р.В., Четкарев В.А. Иерархическая идентификация тепловых процессов при разработке технических систем и технологий // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 411-414.

77. Тулин Д.В., Финченко В.С. Теоретико-экспериментальные методы проектирования систем обеспечения теплового режима космических аппаратов. В кн.: Проектирование автоматических космических аппаратов для фундаментальных научных исследований. Москва, 2014. С. 1320-1437.

78. Ключкова М.А. Проектирование системы обеспечения теплового режима узлового модуля международной космической станции // Космонавтика и ракетостроение. 2013. № 1. С. 46-50.

79. Ненарокомов А.В. Проектирование системы многослойной теплоизоляции минимальной массы // ТВТ. 1997. Т. 35. № 6. С. 909-916.

80. Майорова И.А., Просунцов П.В., Зуев А.В. Оптимальное тепловое проектирование мультиэкранной системы тепловой защиты многоразовых космических аппаратов // ИФЖ. 2016. Т. 89. №2. С. 512-517.

81. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Селин И.А., Кузнецова Е.Л. Оптимальный выбор параметров экранно-вакуумной теплоизоляции космических аппаратов // ТВТ. 2017. Т. 55. № 1. С. 108-114.

82. Лившиц М.Ю. Системная оптимизация процессов тепло- и массопереноса технологической теплофизики // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. 2016. № 11 (93). С. 104-114.

83. Резник С.В., Денисов О.В. Разработка и реализация методик тепловых испытаний элементов натуральных композиционных стержневых космических конструкций на установках радиационного нагрева // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. 2010. № 5. С. 46-52.

84. Резник С.В., Денисов О.В., Чуднов И.В. Основные подходы к формированию программы термовакуумных испытаний прецизионных рефлекторов зеркальных космических антенн // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 8. С. 167-184.

85. Резник С.В., Шуляковский А.В. Стендовые тепловые испытания оболочечных конструкций из неметаллических материалов. Учебное пособие. Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 52 с.

86. Резник С.В., Русин М.Ю., Шуляковский А.В. Средства диагностики обтекателей ракет из неметаллических материалов при стендовых тепловых испытаниях. Учебное пособие. Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 40 с.

87. Просунцов П.В., Тимошенко В.П., Шуляковский А.В. Выбор условий термовакуумных испытаний рефлектора сверхлегкой зеркальной космической антенны // Тепловые процессы в технике. 2016. № 11. С. 519-527.
88. Просунцов П.В., Тимошенко В.П., Шуляковский А.В., Денисов О.В. Математическое моделирование термовакуумных испытаний рефлектора космической антенны из композиционного материала // Авиационная промышленность. 2016. № 4. С. 10-16.
89. Колесников А.В., Мамедова К.И., Палешкин А.В. Градиентные методы оптимизации энергетического режима работы имитатора внешних тепловых нагрузок // Тепловые процессы в технике. 2014. №11. С. 522-528.
90. Беляев М.Ю., Рулев Д.Н. Оптимизация планирования экспериментов, выполняемых на орбитальных станциях // Космические исследования. 2007. Т. 45. № 3. С. 236-243.
91. Белова В.В. Оперативный контроль телеметрических параметров системы теплового режима транспортных грузовых и пилотируемых кораблей на этапе комплексных электрических испытаний // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2012. № 1. С. 50-58.
92. Добрица Д.Б., Ушакова А.А., Шабарчин А.Ф., Яценко Б.Ю. Моделирование внешних тепловых воздействий от инфракрасных источников излучения при испытаниях ракетно-космической техники в ВК-600/300 // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2017. Т. 16. № 3. С. 27-38.
93. Кочетков А.Ю. Выбор оптимальной формы рабочего объема термовакуумной камеры для проведения тепловакуумных испытаний космических аппаратов // Вакуумная техника и технология. 2018. Т. 28. С. 9.1-9.4.
94. Артюхин Е.А. Оптимальное планирование экспериментов при идентификации процессов теплообмена // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 378-382.
95. Артюхин Е.А., Гусева Л.И., Трянин А.П., Шибин А.Г. Влияние неопределенности исходных данных на результаты планирования температурных измерений // ИФЖ. 1990. Т. 58. №5. С. 848-853.
96. Будник С.А., Ненарокомов А.В. Оптимальное планирование измерений при определении характеристик теплового нагружения тел с подвижными границами // ТВТ. 1997. Т. 35. № 3. С. 453-457.
97. Погорелов А.Г. О построении сглаживающих сплайнов методами линейного программирования // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 471-477.
98. Романовский М.Р. Математическое моделирование экспериментов с помощью обратных задач // ИФЖ. 1989. Т. 57. №3. С. 494-500.
99. Романовский М.Р. Планирование эксперимента при идентификации математических моделей // ИФЖ. 1990. Т. 58. №6. С. 1018-1026.

100. Михайлов В.В. Размещение точек измерений температуры и обусловленность обратных задач теплопроводности // ИФЖ. 1989. Т. 57. №5. С. 825-829.
101. Лагун И.М. Выбор инерционности термодатчика при решении обратной задачи теплопроводности // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 398-400.
102. Артюхин Е.А., Гусева Л.И., Трянин А.П., Шибин А.Г. Обработка данных и планирование нестационарных теплофизических экспериментов // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 414-418.
103. Будник С.А., Гусева Л.И., Шибин А.Г. Анализ схемы измерения температуры для определения комплекса характеристик теплозащитного покрытия // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 432-441.
104. Ненарокомов А.В., Нетелев А.В., Титов Д.М. Оптимальное планирование эксперимента при исследовании поверхностного разрушения теплозащитных материалов // Тепловые процессы в технике. 2017. №4. С. 163-170.
105. Легостаев В.П., Микрин Е.А. История создания систем управления космических аппаратов // Автоматика и телемеханика. 2013. № 3. С. 15-37.
106. Микрин Е.А., Суханов Н.А., Платонов В.Н., Орловский И.В., Котов О.С., Самсонов С.Г., Беркут В.Г. Принципы построения бортовых комплексов управления автоматических космических аппаратов // Проблемы управления. 2004. № 3. С. 62-66.
107. Бранец В.Н., Власов С.Ф., Власов Ф.С. Вычислительные средства систем управления космических аппаратов // Авиакосмическое приборостроение. 2005. № 2. С. 7-10.
108. Абдрахманов А.И., Синявский В.В. Математическая модель системы управления космическими ядерными энергетическими установками с термоэмиссионным преобразованием энергии // Известия Российской академии наук. Энергетика. 2006. № 1. С. 132-141.
109. Микрин Е.А., Кульба В.В., Павлов Б.В. Разработка моделей и методов проектирования информационно-управляющих систем космических аппаратов // Автоматика и телемеханика. 2013. № 3. С. 38-50.
110. Бойченко Т.Н., Коздоба Л.А. Вычислительный эксперимент для решения задач оптимизации при импульсных режимах нагрева // ИФЖ. 1990. Т. 59. №2. С. 308-314.
111. Слесаренко. А.П. Регионально-аналитический метод в задачах оптимального управления нестационарными тепловыми режимами // ИФЖ. 1989. Т. 57. №5. С. 853-859.
112. Мацевитый Ю.М., Мултановский А.В., Немировский Н.А. Оптимизация теплотехнических процессов с использованием методов управления и идентификации // ИФЖ. 1990. Т. 59. №2. С. 298-308.
113. Ковалевский В.Б., Бабушкин Ф.М., Седяко О.Ю. Алгоритм решения задачи оптимального управления нагревом заготовок в проходных печах // ИФЖ. 1991. Т. 61. №2. С. 199-203.

114. Лившиц М.Ю., Бородулин Б.Б. Оптимальное управление температурными режимами приборных конструкций автономных объектов // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. 2015. Т. 10. С. 31-34.
115. Балаковский С.Л., Дилигенский Н.В. О двухмодельном итерационном методе решения граничной обратной задачи теплообмена // ИФЖ. 1989. Т. 56. №2. С. 313-319.
116. Алифанов О.М., Балашова И.Е. Исследование алгоритмов диагностики теплового воздействия на конструкцию // ИФЖ. 1989. Т. 56. №4. С. 663-668.
117. Борухов В.Т., Вабищевич П.Н., Корзюк В.И. Сведение одного класса обратных задач теплопроводности к прямым начально-краевым задачам // ИФЖ. 2000. Т. 73. №4. С. 744-747.
118. Лобанов И.Е. Нелинейная нестационарная обратная задача теплопроводности для тел одномерной геометрии с низким коэффициентом теплопроводности: точные аналитические решения // Тепловые процессы в технике. 2012. Т. 4. №6. С. 274-282.
119. Арюткин Ю.И., Курякин В.Ф., Семенов Ю.К. Расчетно-экспериментальный метод решения температурных задач при переменных по координате и во времени граничных условиях // ИФЖ. 1991. Т. 61. №3. С. 479-485.
120. Колесник С.А., Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л. О граничной обратной задаче теплопроводности по восстановлению тепловых потоков к границам анизотропных тел // ТВТ. 2015. Т. 53. № 1. С. 72-77.
121. Кузин А.Я. Идентификация процессов теплообмена при сверхзвуковом пространственном обтекании летательных аппаратов // ИФЖ. 2004. Т. 77. №3. С. 165-173.
122. Кондаков А.С., Старостин Н.П., Васильева М.А. Решение граничной обратной задачи восстановления функции фрикционного тепловыделения в подвижных цилиндрических сопряжениях // Тепловые процессы в технике. 2011. Т. 3. №1. С. 28-36.
123. Quemener O., Joly F., Neveu A. On line heat flux identification for a diffusion-advection problem // Тепловые процессы в технике. 2011. Т. 3. №1. С. 37-47.
124. Кесаев Х.В., Мартинс Б.А. Обратная задача теплопроводности применительно к разработке камеры сгорания ЖРД // Тепловые процессы в технике. 2012. Т. 4. №2. С. 76-81.
125. Занцев В.К., Безрук Г.А., Рожков Б.А. Применение обратных задач для пространственной диагностики теплообмена моделей летательных аппаратов // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 362-368.
126. Артюхин Е.А., Киллих В.Е., Ненарокомов А.В., Репин И.В. Исследование теплового взаимодействия материала с двухфазными потоками методом обратных задач // ТВТ. 1990. Т. 28. № 1. С. 111-116.

127. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Ненарокомов А.В., Репин И.В. Определение характеристик теплового взаимодействия материалов с двухфазными потоками методом обратных задач // ТВТ. 1993. Т. 31. № 3. С. 450-454.
128. Артюхин Е.А., Ненарокомов А.В. Идентификация характеристик теплового взаимодействия материалов с газовыми потоками // ТВТ. 1990. Т. 28. № 2. С. 323-330.
129. Алифанов О.М., Репин И.В. Исследование теплообмена в гетерогенных потоках методом обратных задач теплопроводности // ТВТ. 1993. Т. 31. № 1. С. 78-82.
130. Алифанов О.М., Ненарокомов А.В. Трехмерная граничная обратная задача теплопроводности // ТВТ. 1999. Т. 37. № 2. С. 231-238.
131. Столяров Е.П. Моделирование процессов в тепловых датчиках на основе решения обратных задач теплопроводности // ТВТ. 2005. Т. 43. № 1. С. 71-85.
132. Loshkarev V.A. Diagnostics and Modeling of Heat Transfer in High-Enthalpy Gas Flows with Local Heat Sources and Sinks // Heat Transfer Research. 2002. V. 33. N. 7&8. P. 578-588.
133. Krukovskiy P.G. Identification of Mass Transfer Parameters in the Diffusion and Oxidation Model for Alloys in Gas Turbine Blades // Heat Transfer Research. 1998. V. 29. N. 6-8. P. 374-382.
134. Сакалаускас Э.И., Спячунас Г.Б. Применение функций Уолша для построения явного проекционного алгоритма идентификации распределенных систем // ИФЖ. 1988. Т. 54. №5. С. 840-845.
135. Искендеров А.Д., Гардашов Т.Б., Ибрагимов Т.М. Явные решения некоторых многомерных обратных задач для систем уравнений параболического типа // ИФЖ. 1989. Т. 56. №2. С. 319-327.
136. Гардашов Т.Б. Решение обратных задач для квазилинейного уравнения теплопроводности в автоматическом режиме для многомерного случая // ИФЖ. 1991. Т. 61. №3. С. 472-478.
137. Чубаров Д.Н., Жук В.И. Обобщенное решение коэффициентной обратной задачи теплопроводности для полупространства с переменной мощностью локальных осесимметричных источников тепла на поверхности // Тепловые процессы в технике. 2010. Т. 2. №7. С. 300-307.
138. Волков В.М. Определение неизвестного источника в квазилинейном уравнении параболического типа // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 419-423.
139. Керов Н.В. Решение двумерной задачи теплопроводности для геометрически сложной области интегроинтерполяционным методом // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 464-471.
140. Формалев В.Ф. Идентификация двумерных тепловых потоков в анизотропных телах сложной формы // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 382-386.

141. Коздоба Л.А., Мудриков В.Н. Решение внутренней обратной задачи для объемного анизотропного тела // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 455-458.
142. Артюхин Е.А., Охапкин А.С. Восстановление параметров в обобщенном уравнении теплопроводности по данным нестационарного эксперимента // ИФЖ. 1982. Т. 42. №6. С. 1013-1019.
143. Артюхин Е.А., Иванов Г.А., Ненарокомов А.В. Определение комплекса теплофизических характеристик материалов по данным нестационарных измерений температуры // ТВТ. 1993. Т. 31. № 2. С. 235-238.
144. Михалев А.М., Резник С.В. Метод определения теплофизических свойств ортотропных материалов на основе решения двумерной обратной задачи теплопроводности // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 483-491.
145. Маврин С.В. Модификация итерационного алгоритма решения обратной задачи теплопроводности // ИФЖ. 1995. Т. 68. №3. С. 494-499.
146. Борухов В.Т., Тимошпольский В.И. Функциональная идентификация градиентными методами нелинейного коэффициента теплопроводности. I. Сопряженные операторы // ИФЖ. 2005. Т. 78. №4. С. 68-74.
147. Борухов В.Т., Тимошпольский В.И., Заяц Г.М., Цурко В.А. Функциональная идентификация градиентными методами нелинейного коэффициента теплопроводности. II. Численное моделирование // ИФЖ. 2005. Т. 78. №4. С. 75-81.
148. Воскобойников Ю.Е., Бронников А.В. Нелинейный регуляризирующий алгоритм решения одного класса обратных задач теплопроводности // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 464-471.
149. Романовский М.Р. Применение априорной информации для обеспечения идентифицируемости математической модели // ИФЖ. 1989. Т. 56. №5. С. 814-819.
150. Мацевитый Ю.М., Мултановский А.В. Решение многопараметрических обратных задач теплопроводности // ИФЖ. 1991. Т. 60. №1. С. 136-144.
151. Мацевитый Ю.М., Мултановский А.В. Одновременная идентификация теплофизических характеристик сверхтвердых материалов // ТВТ. 1990. Т. 28. № 5. С. 924-929.
152. Мацевитый Ю.М., Мултановский А.В., Тимченко В.М. Моделирование тепловых процессов и идентификация локальных параметров теплообмена с помощью адаптивного итерационного фильтра // ТВТ. 1992. Т. 30. № 1. С. 82-91.
153. Лискер И.С. Вариационные методы экспериментального исследования теплофизических свойств и термического анализа различных объектов // ИФЖ. 2001. Т. 74. №2. С. 119-126.
154. Зверев В.Г., Назаренко В.А., Теплоухов А.В. Идентификация теплофизических характеристик материалов // ИФЖ. 2010. Т. 83. №3. С. 614-621.

155. Зверев В.Г., Назаренко В.А., Теплоухов А.В. Определение теплофизических характеристик материалов при тепловом воздействии постоянной мощности // Теплофизика и аэромеханика. 2011. №3. С. 493-502.
156. Дилигенская А.Н., Рапопорт Э.Я. Аналитические методы параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности с внутренним тепловыделением // ИФЖ. 2014. Т. 87. №5. С. 1082-1089.
157. Rapoport E.Ya., Pleshivtseva Yu.E. Models and Methods of Semi-Infinite Optimization Inverse Heat-Conduction Problems // Heat Transfer Research. 2006. V. 37. N. 3. P. 221-232.
158. Дилигенская А.Н., Рапопорт Э.Я. Метод минимаксной оптимизации в коэффициентной обратной задаче теплопроводности. // ИФЖ. 2016. Т. 89. №4. С. 1007-1012.
159. Pilipenko N. Parametric Identification of Differential-Difference Heat Transfer Models in Non-Stationary Thermal Measurements // Heat Transfer Research. 2008. V. 39. N. 4. P. 317-326.
160. Xunliang Liu, Lijun Gu, Zhi Wen. A numerical strategy of identifying the shape of a two-dimensional thermal boundary with known temperature // Heat Transfer Research. 2016. V. 47. N. 3. P. 219-229.
161. Алифанов О.М., Черепанов В.В. Математическое моделирование высокопористых волокнистых материалов и определение их физических свойств // ТВТ. 2009. Т. 47. № 3. С. 463-472.
162. Алифанов О.М., Черепанов В.В. Идентификация моделей и прогноз физических свойств высокопористых теплозащитных материалов // ИФЖ. 2010. Т. 83. №4. С. 720-732.
163. Алифанов О.М., Будник С.А., Ненарокомов А.В., Черепанов В.В. Экспериментально-теоретическое исследование процессов теплообмена в высокопористых материалах // Тепловые процессы в технике. 2011. Т. 3. №2. С. 53-65.
164. Гришин А.М., Кузин А.Я., Сеницын С.П., Ярославцев Н.А. О решении обратных задач механики реагирующих сред // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 459-464.
165. Алифанов О.М., Черепанов В.В., Моржухина А.В. Математическое моделирование ультрапористых неметаллических сетчатых материалов // ИФЖ. 2015. Т. 88. №1. С. 122-132.
166. Алифанов О.М., Черепанов В.В., Моржухина А.В. Комплексное исследование физических свойств сетчатого стеклоуглерода // ИФЖ. 2015. Т. 88. №1. С. 133-144.
167. Черепанов В.В. Идентификация возможности расширенных имитационных моделей ультрапористых теплозащитных материалов // Тепловые процессы в технике. 2014. №6. С. 254-268.
168. Кузнецова Е.Л. Решение обратных задач теплопроводности для получения характеристик анизотропных материалов // ТВТ. 2011. Т. 49. № 6. С. 912-917.

169. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Методология решения обратных коэффициентных задач по определению нелинейных теплофизических характеристик анизотропных тел // ТВТ. 2013. Т. 51. № 6. С. 875-883.
170. Вабищевич П.Н., Денисенко А.Ю. Численное решение стационарной коэффициентной ОЗТ для слоистых сред // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 509-513.
171. Артюхин Е.А., Мамолов В.А., Ненарокомов А.В. Оценка влияния усадки на эффективный коэффициент теплопроводности стеклопластика // ИФЖ. 1989. Т. 56. №6. С. 1001-1007.
172. Гончаров И.В., Маков В.Л. Решение обратной задачи по определению трех характеристик волокнистого композита // ИФЖ. 1990. Т. 58. №3. С. 493-499.
173. Ведь В.Е., Иванов В.А., Лушпенко С.Ф. Мацевитый Ю.М. Определение теплопроводности керамических материалов с помощью решения обратной задачи теплопроводности // ИФЖ. 1991. Т. 61. №5. С. 816-822.
174. Янковский А.П. Идентификация структур армирования композитных конструкций на основе результатов теплофизических экспериментов об установившихся колебаниях температуры // ИФЖ. 2011. Т. 84. №2. С. 324-333.
175. Алифанов О.М., Будник С.А., Ненарокомов А.В., Нетелев А.В. Идентификация математических моделей теплопереноса в разлагающихся материалах // Тепловые процессы в технике. Т. 3. 2011. №8. С. 338-347.
176. Будник С.А., Моржухина А.В., Ненарокомов А.В., Нетелев А.В. Идентификация термокинетических параметров разрушающихся теплозащитных материалов методом обратных задач // Тепловые процессы в технике. 2016. №12. С. 542-549.
177. Гребенников А.И. Идентификация теплопроводных структур микромасштаба методом обобщенных лучей // Тепловые процессы в технике. 2013. №8. С. 361-365.
178. Grebennikov A. General ray method for identification of thermostatic source distribution in plane region // Тепловые процессы в технике. 2014. №10. С. 467-468.
179. Зуев А.В., Просунцов П.В., Майорова И.А. Расчетно-экспериментальное исследование процессов теплопереноса в высокопористых волокнистых теплоизоляционных материалах // Тепловые процессы в технике. 2014. №9. С. 410-419.
180. Nenarokomov A.V., Titov D.M. Study of Radiative and Conductive Heat Transfer by the Inverse Problem Method // Heat Transfer Research. 2006. V. 37. N. 3. P. 189-198.
181. Резник С.В., Просунцов П.В., Денисов О.В., Петров Н.М., Ли В. Расчетно-экспериментальная методика определения теплопроводности композиционного материала корпуса наноспутника // Вестник Российского

университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2017. Т. 18. № 3. С. 345-352.

182. Liqiang Zhang, Luoxing Li. An inverse heat conduction model for determining casting/chill interfacial heat transfer coefficient // Heat Transfer Research. 2015. V. 46. N. 8. P. 735-749.

183. Sluzalec Andrzej. Identification in stochastic thermodiffusion problems // Heat Transfer Research. 2017. V. 48. N. 1. P. 1-8.

184. Баранов В.Л., Засядько А.А., Фролов Г.А. Интегрально-дифференциальный метод решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности // ИФЖ. 2010. Т. 83. №1. С. 54-63.

185. Белоногов Е.К. Постановки и методы решения обратных задач радиационного теплообмена. Об устойчивости решений задач оптимизации параметров излучательных нагревательных устройств // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 491-502.

186. Колесников П.М. Обратные задачи теплообмена излучением в полидисперсных средах // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 503-509.

187. Леонов А.С., Русин С.П. О решении обратной задачи определения температуры по спектру теплового излучения нагретых тел // Теплофизика и аэромеханика. 2001. №3. С. 475-486.

188. Миронов Р.А., Забежайлов М.О., Русин М.Ю., Черепанов В.В., Бородай С.П. Расчетно-экспериментальное определение температурной зависимости спектральных и интегральных коэффициентов излучения кварцевой керамики различной пористости // ТВТ. 2016. Т. 54. № 5. С. 724-732.

189. Алифанов О.М., Черепанов В.В., Зайцева А.В., Бобошина С.Б. Моделирование переноса излучения в теплозащитных материалах с высоким спектральным альбедо рассеяния // Тепловые процессы в технике. 2012. Т. 4. №9. С. 418-424.

190. Bin Liu, Yuan Yuan, Hong-Liang Yi, Shi-Kui Dong, HePing Tan. Radiative heat transfer in a multilayer semitransparent scattering medium using the Pn-approximation method // Heat Transfer Research. 2012. V. 43. N. 7. P. 591-614.

191. Шумаков Н.В., Елагин И.В., Мешков Б.Б., Яковлев П.П. Обратные задачи теплопроводности и калориметрия прозрачных тел // ИФЖ. 1989. Т. 56. №5. С. 811-814.

192. Коляно Ю.М., Иваник Е.Г., Олийнык Д.И. Нагрев полупространства источником тепла в форме прямоугольной рамы // ИФЖ. 1989. Т. 57. №2. С. 322-326.

193. Lazuchenkov N.M., Lazuchenkov D.N. Analytical Solution of the Problem of Heat Conduction of a Semi-Bounded Body with an Envelope and Its Application to Control and Identification of Heat Transfer Processes // Heat Transfer Research. 2006. V. 37. N. 2. P. 183-189.

194. Antonio Campo, Salah Chikh. On the Paradox about the Propagation of Thermal Energy Speed in a Semi-Infinite Body Heated by a Forced Convective Flow // Heat Transfer Research. 2007. V. 38. N. 6. P. 565-572.
195. Мацевитый Ю.М., Цаканян О.С., Курская Н.М., Кошевая Н.А. Идентификация локальных термических контактных сопротивлений путем решения обратных задач теплопроводности // ИФЖ. 2002. Т. 75. №2. С. 139-142.
196. Ким Л.В. Определение контактного термического сопротивления из решения ОЗТ // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 423-427.
197. Артюхин Е.А., Ненарокомов А.В., Трянин А.П., Утенков С.А., Яковлев В.В. Идентификация контактных термических сопротивлений в твэлах ядерных реакторов. 2. Обработка экспериментальных данных // ИФЖ. 1992. Т. 63. №1. С. 114-121.
198. Старостин Н.П., Кондаков А.С. Тепловая диагностика трения в цилиндрических сопряжениях. I. Алгоритм итерационного решения граничной обратной задачи // ИФЖ. 2001. Т. 74. №2. С. 13-17.
199. Бахышев Ш.М. Одномерные обратные задачи термоупругости // ИФЖ. 1993. Т. 65. №1. С. 98-104.
200. Тихонов А.Н., Акименко В.В., Кальнер В.Д., Гласко В.Б., Кальнер Ю.В., Кулик Н.И. О планировании некоторого физического эксперимента по определению параметров материала математическими методами // ИФЖ. 1991. Т. 61. №2. С. 181-186.
201. Будник С.А., Ненарокомов А.В., Просунцов П.В., Титов Д.М. Идентификация математических моделей термоупругости. 1. Анализ и постановка задачи // Тепловые процессы в технике. 2017. №3. С. 118-125.
202. Просунцов П.В., Будник С.А., Ненарокомов А.В., Титов Д.М. Идентификация математических моделей термоупругости. 2. Алгоритм и вычислительный эксперимент // Тепловые процессы в технике. 2017. №10. С. 456-462.
203. Алексеев А.К. К решению одной обратной ретроспективной задачи конвекции // ТВТ. 1999. Т. 37. № 4. С. 582-588.
204. Дилигенская А.Н. Решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности на основе параметрической оптимизации, ТВТ, 2018. Т. 56. № 3. С. 399-406.
205. Викулов А.Г., Ненарокомов А.В. Идентификация тепловых связей в математических моделях космических систем // Тепловые процессы в технике. 2014. №6. С. 274-282.
206. Кузнецов В.Е. Упрощение решения дифференциального уравнения теплового баланса путем преобразование его в алгебраическое уравнение применительно к математическим моделям с сосредоточенными параметрами // Тепловые процессы в технике. 2017. №1. С. 13-18.
207. Зыбин Е.Ю., Рябченко В.Н., Зубов Н.Е., Микрин Е.А. О неединственности решения задачи терминального управления // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 10. С. 25.

208. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Об одном подходе к идентификации дискретной системы на основе матричных делителей нуля // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Приборостроение. 2017. № 3. С. 20-32.
209. Микрин Е.А., Зубов Н.Е., Рябченко В.Н., Ефанов Д.Е., Поклад М.Н. Идентификация дискретной системы на основе матричных делителей нуля // Автоматизация. Современные технологии. 2017. Т. 71. № 6. С. 269-274.
210. Балаковский С.Л. Идентификация параметров эквивалентных тепловых схем электродвигателей в нестационарном режиме // ИФЖ. 1989. Т. 56. №4. С. 657-662.
211. Мошинский А.И., Маркова А.В., Рубцова Л.Н., Сорокин В.В., Ганин П.Г. Использование уравнений идентификации модели типа «черный ящик» в случае неустойчивости // ИФЖ. 2016. Т. 89. №6. С. 1365-1374.
212. Викулов А.Г., Ненарокомов А.В. Экстремальный метод идентификации тепловых математических моделей с сосредоточенными параметрами // Тепловые процессы в технике. 2015. №7. С. 307-317.
213. Викулов А.Г., Ненарокомов А.В. Вариационный метод идентификации тепловых математических моделей с сосредоточенными параметрами // Тепловые процессы в технике. 2016. №5. С. 214-226.
214. Викулов А.Г., Ненарокомов А.В. Идентификация редуцированной модели экранно-вакуумной тепловой изоляции // Тепловые процессы в технике. 2016. №11. С. 488-499.
215. Behrooz Abbasi Souraki, Assareh N., Omidi M. Effect of internal heat generation on the applicability of different lumped models with unsteady one-dimensional conduction // Heat Transfer Research. 2014. V. 45. N. 8. P. 767-793.
216. Семена Н.П., Сербинов Д.В. Математическая интерпретация теплового эксперимента, имитирующего условия космического пространства // Тепловые процессы в технике. 2016. №9. С. 423-431.
217. Семена Н.П. Определение ориентации космического аппарата на основе анализа поля температуры его внешней поверхности // Теплофизика и аэромеханика. 2009. №1. С. 135-147.
218. Бердник В.В., Мухамедяров Р.Д. Применение метода нейронных сетей для решения обратной задачи теплопереноса // ТВТ. 2003. Т. 41. № 6. С. 942-947.
219. Валюхов С.Г., Кретинин А.В., Стогней О.В. Использование нейросетевой аппроксимации для прогнозирование микротвердости нанокompозитных покрытий // ИФЖ. 2014. Т. 87. №2. С. 445-453.
220. Попов С.А., Истратов А.Ю., Погодин А.В. Разработка нейросетевой системы прогнозирования тепловых режимов космического аппарата. В сб.: Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук Материалы III научно-практической всероссийской конференции (школы-семинара) молодых ученых, 2017. С. 482-486.

221. Истратов А.Ю., Погодин А.В., Хоменко И.И., Привезенцев А.С. Прогнозирование тепловых режимов оборудования космического аппарата // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2017. № 4. С. 68-75.
222. Савкин Л.В., Дмитриев В.Г., Федоров Е.А. Многослойные персептроны в бортовых системах космической техники: аппаратные подходы на базе ПЛИС FPGA. В сб.: 13-я конференция молодых учёных «Фундаментальные и прикладные космические исследования сборник трудов. Сер. «Механика, управление и информатика» Институт космических исследований РАН. Под ред. А.М. Садовского, 2016. С. 96-106.
223. Савкин Л.В., Дмитриев В.Г., Федоров Е.А., Филатов В.И., Гусенков П.А. Нейрорегуляторы в бортовых системах космических аппаратов // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 4. С. 31-39.
224. Балаковский С.Л. Решение обратных задач теплообмена двухмодельным методом // ИФЖ. 1989. Т. 57. №3. С. 500-503.
225. Алексахин А.А., Ена С.В. Влияние погрешностей в измерении температур на точность определения граничных условий теплообмена // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 400-403.
226. Алифанов О.М., Ненарокомов А.В. Влияние различных факторов на точность решения параметризованной обратной задачи теплопроводности // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 441-445.
227. Батура Н.И., Степень неустойчивости численных решений обратных задач теплопроводности и погрешность экспериментальных данных // ИФЖ. 1989. Т. 56. №3. С. 448-450.
228. Колесников А.В., Палешкин А.В., Мамедова К.И. Методика оценки влияния погрешностей моделирования внешних тепловых нагрузок на тепловое состояние космического аппарата // Тепловые процессы в технике. 2015. №9. С. 417-422.
229. Алифанов О.М., Черепанов В.В., Моржухина А.В. Высокоточный численный метод для верификации данных экспериментального исследования теплового состояния образцов // Тепловые процессы в технике. 2014. №12. С. 560-566.
230. Михайловский К.В., Резник С.В. Влияние внедренных измерительных датчиков на температурное и напряженно-деформированное состояния деталей из углерод-керамического композиционного материала // Тепловые процессы в технике. 2014. № 7. С. 324-328.
231. Боровкова Т.В., Товстоног В.А., Елисеев В.Н. Оценка точности измерения температуры термомпарами при различных способах из размещения в объекте испытания // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 7 (19). С. 19-27.
232. Анучин С.А., Ланин А.В., Просунцов П.В., Кордо М.Н., Забежайлов М.О., Русин М.Ю. Влияние способа заделки поверхностных термопар на погрешность определения температуры при испытаниях керамических материалов на установках радиационного нагрева // ИФЖ. 2018. Т. 91. № 3. С. 628-636.

233. Товстоног В.А., Боровкова Т.В., Елисеев В.Н. Анализ погрешностей измерения тепловых потоков при испытаниях конструкций, нагреваемых излучением // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 7 (19). С. 22-32.

234. Пат. 66039 Российская Федерация, МПК G01K 7/02. Датчик теплового потока [Текст] / Викулов Д. Г., Викулов А. Г., Меснянкин С. Ю.; заявитель и патентообладатель Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (RU). – № 2007114611/22; заявл. 17.04.2007 ; опубл. 27.08.2007, Бюл. № 24. – 2 с. : ил.

235. Попов В.Д., Никифорова М.Ю., Хамидуллина Н.М. Исследование точности измерения термодатчиков DS18B20 при воздействии низкоинтенсивного ионизирующего излучения // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Физика радиационного воздействия на радиоэлектронную аппаратуру. 2011. № 2. С. 29-32.

236. Викулов А.Г., Викулов Д.Г. Электронная проводимость контактов твердых тел. – Saarbrücken, Germany: Lambert Academic Publishing, 2012. 170 с.

237. Викулов А.Г. Использование микроскопических свойств вещества для термодинамического анализа тепловых процессов. Труды XVI Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках». 21-25 мая 2007 г., Санкт-Петербург. Т. 2. – М.: Издательский дом МЭИ. 2007. С. 231-236.

238. Vikulov A.G. Use of the microscopic properties of a substance for a thermodynamic analysis of thermal processes // Heat Transfer Research. 2008. Vol. 39. No. 8. P. 671-684.

239. Викулов А.Г., Викулов Д.Г. Проблемы локального определения температуры в тепловых расчетах наносистем. Труды V Российской национальной конференции по теплообмену: В 8 томах. Т. 8. Теплопроводность и теплоизоляция. – М.: Издательский дом МЭИ, 2010, с. 49-53.

240. Меснянкин С.Ю., Викулов А.Г., Викулов Д.Г. Современный взгляд на проблемы теплового контактирования твердых тел // Успехи физических наук. 2009. Т. 179. №9. С. 945-970.

238>241. Mesnyankin S.Yu., Vikulov D.G., Vikulov D.G. Solid-solid thermal contact problems: current understanding // Physics – Uspekhi (Advances in Physical Sciences). 2009. Vol. 52. No. 9. P. 891-914.

242. Викулов А.Г. Взаимосвязь теплообмена и электрических явлений в контакте. XI Туполевские чтения: Всероссийская (с международным участием) молодежная научная конференция. Казань. 8-10 октября 2003 года: Тезисы докладов. Т. 1. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2003. С. 121.

243. Викулов А.Г., Меснянкин С.Ю. Теплопроводность в идеальном контакте твердых тел. Труды IV Российской национальной конференции по теплообмену: В 8 томах. Т. 7. Радиационный и сложный теплообмен.

Теплопроводность и теплоизоляция. – М.: Издательский дом МЭИ, 2006. С. 179-182.

244. Викулов А.Г., Викулов Д.Г. Применение свойств тесных контактов для теплового регулирования в космических энергетических установках. Труды XVI Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках». 21-25 мая 2007 г., Санкт-Петербург. Т. 2. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. С. 237-238.

245. Викулов А.Г., Викулов Д.Г., Меснянкин С.Ю. Контактный теплообмен в космических энергетических установках. Труды VI международной конференции «Авиация и космонавтика – 2007». 1-4 октября 2007 г. Москва. М.: Изд-во МАИ, 2007. С. 99.

246. Викулов А.Г. Контактная теплопроводность твердых тел и ее применение для термического регулирования в космических энергетических установках. Дисс. ... канд. техн. наук. – М.: МАИ, 200., 127 с

247. Викулов А.Г. Контактная теплопроводность твердых тел и ее применение для термического регулирования в космических энергетических установках. Автореферат дисс. ... канд. техн. наук. – М.: МАИ, 2007, 30 с.: ил., табл.

248. Викулов А.Г., Викулов Д.Г. VI Минский международный форум по тепло- и массообмену "MIF 2008", Минск, 19-23 мая 2008 г. Электронная статья.

249. Викулов А.Г., Викулов Д.Г., Меснянкин С.Ю. Электротепловая аналогия в контакте металлов. Труды XVII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в аэрокосмических технологиях». 25-29 мая 2009 г., г. Жуковский. Т. 1. – М.: Издательский дом МЭИ, 2009. С. 123-127.

250. Викулов А.Г., Викулов Д.Г. Модель единичного теплового канала и ее применение для тепловых и электрических расчетов реальных соединений. Часть 1 // Тепловые процессы в технике. 2010. Т. 2, №3, с. 118-128.

251. Викулов А.Г., Викулов Д.Г. Модель единичного теплового канала и ее применение для тепловых и электрических расчетов реальных соединений. Часть 2 // Тепловые процессы в технике. 2010. Т. 2, №4, с. 169-179.

252. Викулов А.Г., Викулов Д.Г. Модель единичного теплового канала и ее применение для тепловых и электрических расчетов реальных соединений. Часть 3 // Тепловые процессы в технике. 2010. Т. 2, №5, с. 211-217.

253. Викулов А.Г., Викулов Д.Г., Меснянкин С.Ю. Метод обобщенных сопротивлений для комплексного исследования тепловых процессов // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17. № 4. С. 184-191.

254. Викулов А.Г. Определение толщины поверхностных пленок посредством электрических измерений в контакте металлов // Вестник Московского авиационного института. 2007. Т. 14. № 2. С. 47-52.
255. Викулов А.Г., Викулов Д.Г., Меснянкин С.Ю. Влияние поверхностных пленок на тепловую и электрическую проводимость в контакте металлов. Труды V Российской национальной конференции по теплообмену: В 8 томах. Т. 8. Теплопроводность и теплоизоляция. – М.: Издательский дом МЭИ, 2010. С. 54-59.
256. Викулов А.Г., Викулов Д.Г. Влияние поверхностных нанопленок на электрическую и тепловую проводимость контактов металлов // Инженерная физика. 2011. №10. С. 26-41.
257. Викулов А.Г., Викулов Д.Г., Меснянкин С.Ю., Фельдман А.Ю. Экспериментальное исследование электронной проводимости контакта алюминиевых материалов при наличии поверхностных нанопленок // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. № 1. С. 39-47.
258. Vikulov A.G., Vikulov D.G., Mesnyankin S.Yu., and Fel'dman A. Yu. An Experimental Study of Electron Conduction of the Contact of Aluminum Materials in the Presence of Surface Nanofilms // High Temperature. Vol. 53. No. 1. 2015. P. 36-44.
259. Шлыков Ю.П., Ганин Е.А. Контактный теплообмен. – М.: Госэнергоиздат, 1963. 144 с.
260. Cooper M.G., Mikic B.B., Yovanovich M.M. Thermal contact conductance // Int. J. Heat Mass Transfer. 1969. V. 12. P. 279-300.
261. Bahrami M., Culham J.R., Yovanovich M.M. Modeling thermal contact resistance: a scale analysis approach // Journal of heat transfer. December 2004. V. 126. P. 896-906.
262. Bahrami M., Culham J.R., and Yovanovich M.M. Thermal contact resistance of nonconforming rough surfaces, part 2: thermal model // Journal of thermophysics and heat transfer. April-June 2004. V. 18. N. 2. P. 218-227.
263. Меснянкин С.Ю. Методы расчета и регулирования контактных термических сопротивлений // Тепловое проектирование систем. Сборник научных трудов. – М: МАИ, 1990. С. 78-86.
264. Викулов А. Г., Ненарокомов А. В. Уточненное решение вариационной задачи идентификации математических моделей теплообмена с сосредоточенными параметрами // Теплофизика высоких температур. 2018. Т. 56. № 6. 1-24.
265. Викулов А.Г. Оценка точности тепловых моделей космических аппаратов по результатам тепловых вакуумных испытаний // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2016. № 5. С. 38-42.
266. Романов В.Н., Комаров В.В. Теория измерений. Анализ и обработка экспериментальных данных: Учеб. пособие.– СПб.: СЗТУ, 2003. 112 с.
267. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Учебник для вузов. Изд. 5-е, стереотипное. – М.: Наука, 1977. 734 с.

268. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука. 1980. 288 с.
269. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа: Пер. с англ. – М.: Радио и связь. 1987. – 400 с.
270. Викулов А.Г., Кузнецов В.Е. Валидация тепловой модели составной части космического аппарата. Сборник трудов V международного межотраслевого молодежного научно-технического форума «Молодежь и будущее авиации и космонавтики». Москва, 2013 г. Электронная статья.
271. Nenarokomov A. V., Vikulov A. G., Kraynova I. V. et al. Heat transfer mathematical model of satellite based on thermal tests and inverse problems technique. Proc. 13th European Conf. on Spacecraft Structures, Materials & Environmental Testing, Braunschweig, Germany, 1–4 April 2014 (ESA SP-727, June 2014). E. Pub.
272. Викулов А.Г., Ненарокомов А.В. Параметрическая идентификация математических моделей теплообмена в космических аппаратах // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92. № 1. С. 32-45.