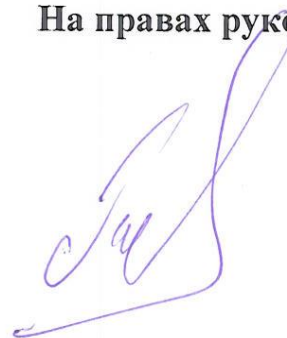


**МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ**

(Национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

**Роффе Александр Ильич**



**Математическое моделирование процессов нелинейного  
деформирования составных конструкций каркасного  
типа при комбинированных воздействиях**

**Специальность 01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела**

**Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук**

**Научный руководитель:**

**д-р техн. наук, проф. Дмитриев В.Г.**

**Москва - 2016 г.**

## Оглавление

Введение.....	5
Глава I. Математическое моделирование процессов нелинейного деформирования составных конструкций при статических и динамических воздействиях различного вида.....	15
§ 1.1. Деформированное состояние. Геометрически нелинейные соотношения модели Тимошенко для балок, пластин и панелей.....	22
§ 1.2. Напряженное состояние. Физические соотношения для балочных и панельных элементов составных конструкций из многослойных композиционных материалов и железобетона.....	25
1.2.1. Особенности деформирования конструкций из железобетона с учетом упруго-пластической работы арматуры и трещинообразования в бетоне.....	26
1.2.2. Основные соотношения деформационной теории пластичности.....	32
1.2.3. Физические соотношения для железобетонных и металлических элементов составных конструкций.....	34
1.2.4. Физические соотношения для однослойных и многослойных элементов конструкций из композитов .....	39
§ 1.3. Статика и динамика составных конструкций каркасного типа....	41
1.3.1. Вариационный принцип Лагранжа и уравнения равновесия....	41
1.3.2. Вариационный принцип Остроградского-Гамильтона и уравнения движения.....	43
§ 1.4. Формулировка граничных и начальных условий для составных конструкций каркасного типа.....	44
§ 1.5. Математическая модель для составной конструкции на амортизированном фундаменте.....	46

Глава II. Построение дискретного аналога исходной интегро-дифференциальной нелинейной начально-краевой задачи на основе вариационно-разностного метода.....	52
§ 2.1. Основные этапы вычислительного эксперимента в прикладных задачах механики деформируемого твердого тела.....	52
§ 2.2. Построение разностной схемы при расчете составных конструкций.....	56
2.2.1. Конечно-разностная аппроксимация параметров деформированного состояния элементов составной конструкции.....	58
2.2.2. Конечно-разностная аппроксимация параметров напряженного состояния элементов составной конструкций при решении упруго-пластических задач.....	59
§ 2.3. Построение конечно-разностных аналогов уравнений равновесия и движения на основе консервативных разностных схем.....	61
§ 2.4. Конечно-разностная аппроксимация граничных и начальных условий при расчете составных конструкций .....	66
2.4.1. Особенности конечно-разностной аппроксимации условий сопряжения элементов монолитных и сборных каркасных конструкций ....	66
2.4.2. Конечно-разностная аппроксимация начальных условий.....	70
§ 2.5. Конечно-разностная аппроксимация задачи для составной конструкции, установленной на амортизированной фундаментной плите.....	71
2.5.1. Построение дискретной модели начально-краевой задачи для составной конструкции на амортизированном фундаменте.....	71
2.5.2. Аппроксимация параметров сейсмических волн.....	72
Глава III. Численное решение нелинейных начально-краевых задач для составных конструкций каркасного типа.....	77
§ 3.1. Численное решение нелинейной задачи о статическом деформировании элементов составной конструкции.....	77

3.1.1. Применение квазидинамической формы метода установления для решения сеточных аналогов уравнений равновесия.....	77
3.1.2. Определение оптимальных значений параметров итерационного процесса для конструкций из железобетона и композитов.....	82
3.1.3. Ускорение сходимости квазидинамической формы метода установления при решении статических задач.....	84
§ 3.2. Численное решение конечно-разностных аналогов уравнений движения элементов составных конструкций каркасного типа.....	85
§ 3.3. Особенности построения численных решений статических и динамических задач для составной конструкции на амортизированном фундаменте.....	87
Глава IV. Исследование нелинейных процессов деформирования составных конструкций каркасного типа при комбинированных видах нагружения.....	89
§ 4.1. Исследование влияния параметров разностной схемы на сходимость и точность численных решений нелинейных начально-краевых задач.....	89
§ 4.2. Исследование влияния параметров вязко-упругих амортизаторов на деформирование и несущую способность железобетонных каркасных конструкций при сейсмических воздействиях.....	93
Выводы.....	106
Литература.....	108

## Введение

Каркасные конструкции, выполняющие несущие функции, широко используются в различных отраслях современного строительства и машиностроения: промышленные и гражданские здания и сооружения, элементы стартовых комплексов авиационных и космических систем и т.д. (рис. 1).

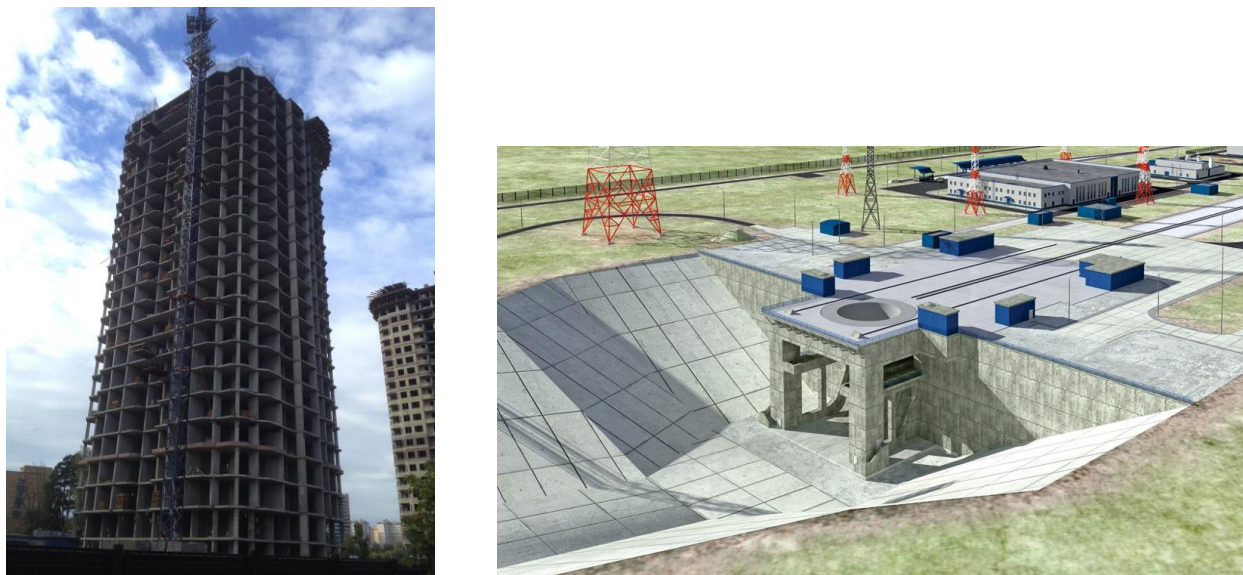


Рис. 1

В процессе использования конструкции различных видов, в том числе и каркасного типа, испытывают воздействие целого ряда статических и динамических нагрузок различного характера и природы: гравитационные нагрузки – вес несущих и ограждающих конструкций; атмосферные нагрузки – снеговые, гололедные, ветровые, волновые, температурные и др.; нагрузки, обусловленные смещением земной поверхности, в первую очередь - сейсмические; нагрузки, вызываемые чрезвычайными обстоятельствами (взрывы, пожары, различные аварийные ситуации) и др. [2,64]. Сейсмические нагрузки - один из наиболее опасных видов динамических воздействий, приводящий к непоправимым последствиям, поэтому оценка сейсмостойкости и связанная с ней проблема определения параметров прочностной надежности при воздействии сейсмических волн существующих и проектируемых каркасных конструкций является актуальной задачей и представляет научный и практический интерес.

Расчет конструкций и сооружений на воздействия сейсмических волн должен выполняться на основные и особые сочетания нагрузок с учетом сейсмических воздействий в предположении линейно-упругой работы, при этом допускается выполнение прямого динамического расчета на основе инструментальных записей ускорений основания при землетрясении, наиболее опасных для данного сооружения, а также синтезированных акселерограмм, учитывая нелинейность системы и возможность развития неупругих деформаций или локальных повреждений в элементах конструкции. Для зданий и сооружений простой геометрической формы расчетные сейсмические нагрузки принимаются действующими горизонтально. Вертикальную сейсмическую нагрузку необходимо учитывать при расчете, в частности, рам, арок, ферм, пространственных покрытий зданий и сооружений пролетом 24 и более метров [2,3,4,62].

В настоящее время при исследовании конструкций на прочностную надежность при сейсмических воздействиях наиболее часто используется спектральный метод расчета и прямые динамические методы, как численные, так и численно-аналитические [2,9,62,65,71]. В расчетных схемах спектрального метода реальные элементы конструкций заменяются сосредоточенными массами, а в математических моделях прямых динамических расчетов вводится континуальное распределение массы и массовых инерционных сил и моментов по всей расчетной области. Отмечается, что по мере разработки и развития адекватных математических моделей и методов, описывающих особенности нелинейного деформирования сложных, неоднородных несущих элементов строительных конструкций при сейсмических воздействиях, допускающих их практическую реализацию в виде пакетов программ для современных ЭВМ, роль прямых динамических расчетов будет возрастать [65,71]. В этом случае роль нелинейных динамических расчетов должна существенно возрасти, также как и роль методов расчета сооружений на акселерограммы землетрясений, так как современные вычислительные комплексы, основанные в большинстве на спектральном методе расчета, не позволяют определить реальное напряженно-деформированное состояние (НДС) элементов конструкции в расчетных схе-

мах с большим числом степеней свободы, поскольку при определении средне-квадратичного усилия теряется знак в силу отсутствия корректного подхода по определению знака усилия при анализе его вклада по каждой из форм колебаний [62,71].

При исследовании переходных процессов, возникающих в несущих строительных конструкциях при динамических воздействиях, в силу значительных массовых характеристик необходимо учитывать исходное статическое НДС, и в первую очередь, действие гравитационных сил. Следовательно, начально-краевые задачи для составных конструкций каркасного и панельного типа первоочередно представляют собой задачи о комбинированном нагружении вида (статика + динамика), или, в частном случае, статические задачи.

Несущие элементы составных конструкций каркасного и панельного типа выполняются как из традиционных материалов, таких как железобетон и металл, так и из перспективных многослойных композиционных материалов. Необходимо отметить, что железобетон, по сути является одним из первых композиционных материалов, нашедшим широкое практическое применение в строительстве и позволяющим оптимизировать конструкции по материалоемкости, эксплуатационным и технологическим требованиям. По сей день, железобетон остается основным конструктивным материалом в строительстве, что определяется его следующими свойствами: высокая прочность на сжатие и долговечность, способность твердеть и наращивать прочность под водой, стойкость к воздействию высоких температур и агрессивных сред, возможность изготовления конструкций разнообразных форм и видов и т.д.

Наряду с железобетоном все более широкое применение находят элементы каркасных конструкций из различных композитных материалов [3,55,77]. Сочетание таких характеристик, как высокая прочность и жесткость при относительно невысоком весе конструкции, позволяют достигнуть снижения материалоемкости и, как следствие, себестоимости конструкции, что зачастую является определяющим фактором при использовании композиционных материалов в различных строительных конструкциях. Использование композиционных

материалов, обладающих ярко выраженной анизотропией физико-механических свойств, вызывает необходимость разработки адекватных математических моделей и методов расчета, позволяющих учитывать особенности деформирования элементов несущих конструкций из таких материалов.

Железобетонные конструкции по способу возведения классифицируются следующим образом: монолитные, полностью возводимые на строительной площадке с применением опалубки; сборные, предварительно изготавливаемые на предприятиях стройиндустрии и затем монтируемые на месте строительства; сборно-монолитные, в которых сочетается использование сборных железобетонных элементов и монолитных конструкций [2,49,93]. После 60-х годов, в нашей стране наибольшее распространение, получили сборные конструкции. Монолитные и сборно-монолитные тонкостенные железобетонные конструкции распространены в основном в районах с повышенной сейсмической активностью. Стоит отметить, что в настоящее время все большее распространение у нас в стране начинает приобретать монолитные конструкции, которые, кстати, преимущественно возводятся за рубежом.

К интенсивно развивающимся разделам механики деформируемого твердого тела можно отнести исследования прочностной надежности составных конструкций каркасного и панельного типа, испытывающих в процессе эксплуатации воздействие статических и динамических нагрузок различного вида. При этом решение задач о комбинированном нагружении конструкций каркасного и панельного типа, рассматриваемых как составные, сопряжено со значительными трудностями. В первую очередь это связано с трудностями математического характера при практической реализации численных решений нелинейных начально-краевых задач на ЭВМ.

В настоящее время в связи с возросшей техногенной нагрузкой на здания и сооружения, а так же с повышением требований к параметрам прочностной надежности, оценкой их живучести и остаточного ресурса проблемы проектирования и конструирования строительных конструкций значительно усложняются. Это вызывает необходимость разработки адекватных расчетных моделей,



учитывающих, как физико-механические и конструктивные особенности, так и “усложняющие” факторы: нелинейности геометрического и физического типа, так как рассматриваемые особенности деформирования пространственных строительных конструкций могут быть описаны только с позиций нелинейной теории. Необходимо отметить, что как в действующих, так и в разрабатываемых нормативных документах по расчету на прочность железобетонных строительных конструкций как в нашей стране, так и за рубежом (СНиП 2.03.01.84, СНиП 10-01-93, Еврокоды 0,1,2,8) отмечается необходимость учета нелинейных эффектов в расчетных моделях и вводятся следующие основные способы идеализации поведения конструкций [4,49,62,91]:

- линейное упругое поведение;
- линейное упругое поведение с ограниченным перераспределением;
- нелинейное упругое поведение;
- пластическое поведение.

Исследование деформирования несущих элементов строительных конструкций по линейным моделям может быть проведено для расчетов по 1 и 2 предельным состояниям в рамках следующих допущений:

- в поперечных сечениях не возникает трещин;
- между напряжениями и деформациями справедливы линейные зависимости;
- используются осредненные значения модулей упругости материалов.

Для предельных состояний 2 группы следует учитывать последовательное развитие трещин. Для исследования предельных состояний по несущей способности и пригодности к нормальной эксплуатации необходимо использовать нелинейные модели, учитывающие и геометрическую нелинейность (расчет по деформированной схеме), и физическую, учитывающую нелинейное поведение материалов, чем зачастую пренебрегают. Однако полное включение в нормы нелинейных расчетов, к сожалению, пока невозможно, так как расчеты на стадии больших неупругих деформаций нуждаются в адекватных расчетных моделях [62,71].

Проведение натурального физического эксперимента для исследования параметров прочностной надежности конструкций сложной геометрии из разнородных материалов, к числу которых относятся рассматриваемые в работе составные конструкции каркасного типа, связано со значительными трудностями как их практической реализации, в том числе - высокой стоимостью таких экспериментов, то для исследования особенностей деформирования несущих элементов как машиностроительных, так и строительных конструкций в настоящее время используются методы вычислительного эксперимента. Одним из важнейших этапов вычислительного эксперимента является разработка и развитие адекватных математических моделей, построение их дискретных аналогов, а также разработка и адаптация экономичных численных методов и алгоритмов, допускающих их практическую реализацию для ЭВМ. Использование таких пакетов существенно сокращает сроки проектных работ и дает возможность оптимизировать конструкцию по широкому спектру конструкционных, технологических, эксплуатационных и экономических требований.

В связи с этим разработка и развитие адекватных математических моделей, учитывающих особенности деформирования составных конструкций каркасного типа при различных видах статического и динамического нагружения с учетом нелинейных эффектов, построение дискретных аналогов исходных континуальных задач, а также разработка экономичных численных методов решения соответствующих нелинейных сеточных уравнений представляет собой актуальную проблему, имеющую прикладной и теоретический интерес.

*Целью работы является:*

- разработка адекватных математических моделей для исследования процессов геометрически и физически нелинейного деформирования составных конструкций каркасного типа при различных видах статического и динамического нагружения, включая сейсмические воздействия;

- разработка и развитие эффективных и экономичных численных методов решения нелинейных сеточных уравнений, описывающих статическое и динамическое поведение конструкций;

- решение ряда новых, актуальных прикладных задач деформирования составных конструкций каркасного типа при статическом и динамическом нагружении различного вида с учетом нелинейных эффектов, а также конструктивных и физико-механических особенностей современных пространственных несущих конструкций.

Таким образом, рассматриваемые в диссертации проблемы являются актуальными и представляют прикладной и научный интерес. Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов (заключения) и списка литературы из 110 наименования. Объем диссертации 117 страниц, включая 49 рисунков и 7 таблиц.

**В первой главе** приводится обзор работ и анализ прикладных методов математического моделирования процессов нелинейного деформирования несущих элементов машиностроительных и строительных конструкций при статических и динамических воздействиях различного вида и природы. Формулируются цели и задачи диссертации. Разрабатываются и развиваются математические модели, позволяющие исследовать особенности процессов деформирования составных неоднородных конструкций каркасного типа при комбинированных видах нагружения с учетом геометрической и физической нелинейности. Задачи рассматриваются в плоской постановке на основе соотношений для балок, пластин и панелей, основанных на гипотезах Тимошенко. Для учета геометрической нелинейности используются соотношения квадратичной теории, а для описания упруго-пластической работы армирующих элементов в железобетонных конструкциях используются соотношения деформационной теории пластичности.

В плоской постановке рассматриваются типовые элементы составных конструкций - прямолинейные и криволинейные балки арочного типа, а также панельные и оболочечные несущие элементы, работающие в условиях плоской деформации. Излагаются основные соотношения деформационной теории пластичности с последующей адаптацией к расчету армирующих элементов в условиях одноосного напряженного состояния.. Разрабатывается математиче-

ская модель деформирования железобетонных элементов составных конструкций при различных вариантах армирования. При этом рассматриваются варианты как упругой, так и упруго-пластической работы арматуры. Учитывается возможность возникновения, развития и закрытия трещин в бетоне. Приводятся физические соотношения для однослойных и многослойных элементов составных конструкций из композиционных материалов.

Формулируются различные варианты условий сопряжения составных элементов каркасных конструкций, моделирующих как монолитное соединение элементов между собой (граничные условия жесткого защемления), так и условия сопряжения элементов сборных конструкций (граничные условия типа шарнирного закрепления).

Разрабатывается новая математическая модель для исследования влияния характеристик вязкоупругих амортизирующих элементов на процессы деформирования элементов составных конструкций при воздействии горизонтальной компоненты сейсмической волны.

**Во второй главе** осуществляется дискретизация исходной интегро-дифференциальной задачи. Для дискретизации по пространственным и временной координатам используется метод конечных разностей (МКР). При этом для построения разностных аналогов уравнений равновесия и движения элементов составных конструкций каркасного типа используется вариационно-разностный метод, что позволяет получать консервативные разностные схемы. Дифференциальные операторы аппроксимируются разностными второго порядка точности. Рассмотрены особенности конечно-разностной аппроксимации параметров напряженно-деформированного состояния элементов составных конструкций при решении упруго-пластических задач с учетом возникновения, развития и закрытия трещин в бетоне, а также особенности конечно-разностной аппроксимации условий сопряжения элементов монолитных и сборных каркасных конструкций. Разработана дискретная модель для составной конструкции на амортизированном фундаменте.

При расчете конструкций на сейсмические воздействия для общего случая, когда инструментальная сейсмограмма характеризуется функцией, имеющей сложный, высоко градиентный вид, разработана процедура аппроксимации сейсмограммы с помощью сплайн-интерполяции, позволяющей восстановить не только значения самой функции, но ее первой и второй производной. Для частного случая для моделирования сейсмического воздействия предложена методика, основанная на аппроксимации параметров сейсмических волн набором тригонометрических функций, заданных на соответствующих временных интервалах.

**В третьей главе** разрабатываются и развиваются численные методы решения нелинейных начально-краевых задач для составных конструкций каркасного типа. Для решения сеточных аналогов уравнений равновесия используется квазидинамическая форма метода установления, что позволяет построить однотипный итерационный процесс решения как линейных, так и нелинейных систем уравнений при расчете составных конструкций. Из оценки границ спектров разностных операторов в рамках линейных соотношений при соответствующих упрощениях в исходных уравнениях получены формулы для определения оптимальных значений параметров итерационного процесса, а также предложен метод ускорения сходимости итерационного процесса при решении статических задач, позволяющий существенно сокращать затраты машинного времени.

Для численного решения конечно-разностных аналогов уравнений движения элементов составных конструкций используется явная двухслойная разностная схема по времени второго порядка аппроксимации. Применение квазидинамической формы метода установления для решения статических задач в сочетании с явной схемой решения нестационарных задач приводит к единой разностной схеме для решения как статических, так и динамических задач, что позволяет без перестройки вычислительного алгоритма эффективно исследовать особенности деформирования конструкций при различных видах комбинированного нагружения.

Построены численные решения статических и динамических задач для составных конструкций на амортизированном фундаменте и предложена методика оценки оптимальных значений параметров вязко-упругих амортизирующих систем.

**Четвертая глава** посвящена исследованию нелинейных процессов деформирования составных конструкций каркасного типа при комбинированных видах нагружения. Разработанные математические модели и численные методы решения нелинейных начально-краевых задач механики составных конструкций каркасного типа были практически реализованы в прикладных программах на языке FORTRAN-IV применительно к персональным ЭВМ серии Pentium с 32-х и 64-х битовыми процессорами. Достоверность разработанных математических моделей подтверждена хорошей сходимостью и точностью численных решений в зависимости от параметров сетки при сопоставлении с известными аналитическими решениями тестовых задач.

На примере решения задачи о поэтапном нагружении заземленной железобетонной балки равномерно распределенной нагрузкой до уровня возникновения пластических деформаций в арматуре и последующей разгрузкой с определением остаточных деформаций и прогибов было проведено исследование влияния учета физической нелинейности на особенности деформирования несущих элементов каркасных конструкций.

Исследовано влияние интегральных характеристик вязкоупругих амортизирующих элементов на особенности процессов нелинейного деформирования и трещинообразования предварительно нагруженной железобетонной каркасной конструкции при динамическом воздействии, моделирующем горизонтальную компоненту сейсмической волны. Для исключения ошибок при вычислении ускорений с помощью формул численного дифференцирования, обусловленных ошибками округления и длиной разрядной сетки ЭВМ, разработана оригинальная методика применения кубической сплайн-интерполяции, позволяющая вычислять значения ускорений по аналитическим выражениям без использования процедуры численного дифференцирования.

Исследовано влияние граничных условий сопряжения элементов составной конструкции, а также параметров армирования на несущую способность составных каркасных конструкций при сейсмических воздействиях.

Результаты проведенных исследований показали, что разработанные математические модели и численные методы позволяют оптимизировать составные каркасные конструкции по прочностным и весовым характеристикам, выработать практические рекомендации по снижению материалоемкости и повышению трещиностойкости несущих элементов конструкций при сейсмических воздействиях.

**В заключении** формулируются выводы и даются рекомендации по использованию результатов, полученных на основе проведенных в диссертации исследований.

## **ГЛАВА I. Математическое моделирование процессов нелинейного деформирования составных конструкций при статических и динамических воздействиях различного вида**

Исследование процессов деформирования составных конструкций методами вычислительного эксперимента связано с необходимостью построения адекватной математической модели и разработке аналитического или численного метода решения соответствующей начально-краевой задачи. Большой вклад в развитие этой области механики деформируемого твердого тела и строительной механики внесли исследования и монографии таких ученых, как: Н.П. Абовский, Н.А. Алфутов, С.А. Амбарцумян, Л.И. Балабух, В.Л. Бидерман, В.Г. Баженов, В.В. Болотин, Н.В. Валишвили, В.В. Васильев, В.З. Власов, А.С. Вольмир, С.С. Гаврюшин, К.З. Галимов, А.Л. Гольденвейзер, А.Г. Горшков, Э.И. Григолюк, Я.М. Григоренко, А.В. Кармишин, А.В. Коровайцев, А.И. Лурье, Г.В. Москвитин, Х.М. Муштари, Ю.Н. Новичков, В.В. Новожилов, И.Ф. Образцов, П.Ф. Папкович, А.К. Перцев, Б.Е. Победря, В.А. Постнов, И.Н. Преображенский, Ю.Н. Работнов, Г.Н. Савин, А.И. Станкевич, С.И. Трушин, В.И.

Феодосьев, А.П. Филин, В.С. Чернина В.И. Шалашилин, Н.Н. Шапошников, В. Almrof, F. Brogan, A. Cassell, D. Dawe, R. Gallagher, R. Hobbs, W. Koiter, K. Meissner, K. Morgan, R. Nelson, G. Turvey, K. Washizu, O. Zienkiewicz и др.

Напряженно-деформированное состояние различных конструкций в линейной постановке исследовано уже достаточно подробно, так как для решения исходной системы дифференциальных уравнений может быть получено аналитически в замкнутом виде, или же с помощью надежных и устойчивых численно-аналитических алгоритмов [1,19,78]. Для решения сложных двумерных задач широко применяются метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ). Дальнейшее расширение класса решаемых линейных и нелинейных прикладных задач теории балок, пластин и оболочек основано на разработке и развитии высокоэффективных и экономичных численных методов. Так в конце 80-х годов прошлого века с развитием ЭВМ в практике проектирования стали широко использовать программные комплексы, реализующие конечно-элементные модели, позволяющие с единых методологических позиций рассчитывать разнообразные конструктивные схемы зданий, состоящих из стержневых и плоских элементов, сгруппированных в любых сочетаниях. В связи с этим, появилась возможность задавать сложные граничные условия с применением сложных пространственных шарниров и связей, в том числе неупругих, односторонних и т. д., при этом значительно усложнилась подготовка исходных данных и, соответственно, потребовались высокая квалификация пользователей, повышенные требования к пониманию характера работы конструкций и узлов под нагрузкой и теоретических расчетных положений, положенных в основу программных комплексов. Ошибки в формировании расчетных схем, связей и т. п., несмотря на большое количество вспомогательных руководств и инструкций, зачастую трудно выявляются, и они могут привести к аварийным ситуациям на объектах, о чем постоянно напоминают как авторы программ в руководствах, так и реальная практика проектирования и эксплуатации зданий и сооружений.



Современные программные комплексы типа "Ли́ра", "Скад" и т. п. реализуют как линейные, так и нелинейные расчеты, хотя нелинейный расчет реализуется достаточно приближенно. Строго говоря, реальные конструкции являются неконсервативными как со стороны конструктивной системы, так и со стороны самих нагрузок, и их поведение не может быть исследовано методами, основанными на принципе независимости действия сил. Помимо этого, поведение реальных материалов имеет упруго-пластический характер с проявлением деформаций ползучести, последействия и т. д., а обычно применяемые линейно упругие модели работы сечения не позволяют достаточно точно определять напряженно-деформированное состояние конструкций на ветвях разгрузки, изменения знака усилия.

Различают нелинейности двух видов - физическую (ФНЛ), связанную с нелинейным поведением материалов (нелинейность 1-го порядка), и геометрическую (ГНЛ), связанную с влиянием продольных сил в элементах каркаса на перемещения и усилия в системе (нелинейность 2-го порядка). Методы расчета могут учитывать одновременно с линейными (упругими) свойствами системы как отдельный вид нелинейности, так и их сочетание. Например, может быть выполнен геометрически нелинейный расчет упругой системы (second order linear analysis) или, наоборот, — только физически нелинейный расчет, если, например, система достаточно жесткая и учет ГНЛ увеличивает перемещения или усилия в системе не более чем на 10 % (first order nonlinear analysis).

Программы отечественной разработки, в нелинейном процессоре используют обычный итерационный расчет с учетом ФНЛ, при этом происходит не только уточнение жесткостей элементов, но и приближенный учет влияния перемещений на усилия. Из этого следует, что выполняя расчет на возрастающую нагрузку, можно строить диаграмму состояния конструкций, достаточно близко "подходить" к нагрузке, соответствующей потере устойчивости процесса деформирования, контролировать "степень нагруженности" отдельных сечений конструкций и т. д.. При этом используются упрощенные нелинейно упругие модели для учета ФНЛ и не учитываются функции продольно-поперечного из-

гиба при построении матрицы жесткости, методом расчета конечного элемента в форме метода перемещений. Выполняемый расчет сразу на всю заданную (поэтапно возрастающую) нагрузку не позволяет в отдельных случаях учесть весьма важные особенности влияния изменения геометрии стержневой системы на усилия в элементах, влияние истории нагружения на характер деформирования составной конструкции.

Многочисленные вариантные расчеты, основанные на использовании так называемого "инкрементального" — шагового метода, где усилия и перемещения вычисляются только на дополнительную порцию нагрузки (с использованием касательных жесткостей) и накапливаются суммированием с предыдущими значениями, показали, что в ряде случаев, при определенных нагрузках усилия в некоторых сечениях элементов с ростом нагрузки не только начинают уменьшаться (этот процесс позволяют "отслеживать" и обычные итерационные методы, в которых используется диаграмма деформирования бетона с ниспадающей ветвью), но и меняют знак.

В рамках линейного процессора современные программы позволяют выполнять геометрически нелинейный расчет здания (без учета ФНЛ) итерационным способом, описанным ранее. При этом предполагается, что отсутствие сходимости итерационного процесса является косвенным признаком неустойчивости здания. Такие расчеты более актуальны для высотных зданий очень большой этажности, где основное влияние оказывает геометрическая нелинейность. Помимо этого, все программы позволяют выполнить непосредственный расчет общей устойчивости здания, но при таком подходе фактически реализуется проверка устойчивости упругой системы на действие продольных усилий в сжатых элементах. Используется качественный метод теории устойчивости, при котором критическое состояние определяется появлением нулевого элемента на главной диагонали глобальной матрицы жесткости. Данный расчет служит для определения "расчетных длин" элементов, а сами величины критических нагрузок на здание и соответствующих коэффициентов запасов "по

устойчивости" для железобетонных каркасов практического смысла не имеют, так как получаемые значения нереально велики.

Для комплексного архитектурно-строительного проектирования (САПР) широко используются такие программные продукты, как Allplan, ArhiCAD, ViCADO, Revit и другие конечно-элементные модели. При этом следует учесть, что характерным недостатком конечно-элементных моделей является плохая обусловленность матриц большого порядка, при этом их практическое использование затруднено так как спектр частот сгущен.

Таким образом, математические модели и методы расчета НДС составных конструкций из неоднородных материалов (железобетон, композиты и т.д.) подразделяются на две группы: линейные и нелинейные [49,62,71]. Линейные теории и соответствующие математические модели, описывающие НДС конструкций при относительно небольших перемещениях и деформациях в рамках закона Гука, разработаны наиболее подробно и достаточно широко применяются в практике проектирования. Применение линейных моделей и методов при расчетах железобетонных конструкций по I группе предельных состояний, как правило, идет в запас прочности конструкции. Если линейные подходы используются для расчетов по II группе предельных состояний, то это приводит к недооценке фактических значений деформаций в бетоне и арматуре, а также ширины раскрытия трещин в элементах железобетонных конструкций. При проведении ответственных расчетов, оценке несущей способности пространственных железобетонных конструкций необходимо использовать нелинейные математические модели и соответствующие методы исследования НДС.

В общем случае, нелинейный характер деформирования может быть обусловлен следующими видами нелинейности: физической, при нелинейной зависимости между компонентами тензоров напряжений и деформации; геометрической, при нелинейной связи между перемещениями и деформациями; конструктивной, обусловленной возможными изменениями расчетной схемы в процессе нагружения. В.В.Новожиловым введена следующая классификация расчетных схем [67]:

- линейные физически и геометрически (ЛФ, ЛГ);
- нелинейные физически, геометрически линейные (НФ, ГЛ);
- линейные физически, геометрически нелинейные (ЛФ, ГН);
- нелинейные физически и геометрически (НФ, НГ).

В настоящей работе рассматривается четвертый случай - физически нелинейные задачи в рамках геометрически нелинейных соотношений при малых по сравнению с единицей удлинения и сдвигах. Физическая нелинейность учитывается на основе соотношений деформационной теории пластичности и используется для описания упруго-пластической работы армирующих элементов, а геометрическая нелинейность - в рамках квадратичной теории, описывающей деформирование элементов конструкций при малых удлинениях, сдвигах и поворотах элемента относительно нормали к поверхности, конечных, но малых по сравнению с максимальными линейными размерами тела перемещениях, а также конечных, но умеренных тангенциальных составляющих вектора поворота нормали [7].

Соотношения, получаемые из уравнений трехмерной теории упругости на основе гипотез Кирхгофа-Лява (модель первого приближения) и гипотез Тимошенко (модель второго приближения) в основном используют для исследования процессов деформирования балок, пластин и оболочек. Относительно толстостенные элементы конструкций при действии неплавных нагрузок, однослойные и многослойные конструкции из композиционных материалов со связующим, обладающим относительно малой сдвиговой жесткостью, возможно рассчитать с помощью уравнений теории Тимошенко (сдвиговая модель). Помимо этого, модель Тимошенко более точно описывает динамические процессы, связанные с распространением волн деформаций при действии нагрузок ударного характера.

Построение решений для начально-краевых задач, сформулированных на основе теории Тимошенко, связано со значительными трудностями математического характера, обусловленными, в первую очередь, более высоким порядком уравнений Тимошенко, их структурными особенностями, значительно

усложняющими возможность получения устойчивых численных алгоритмов, что обуславливается необходимостью больших аппаратных мощностей. Помимо этого, численные методы используемые для решения статических и динамических задач, как правило, не обладают однотипной структурой построения алгоритмов, что значительно ограничивает область прикладных исследований при решении задач о комбинированном нагружении составных конструкций.

Таким образом, обзор работ и анализ методов решения нелинейных начально-краевых задач теории балок, пластин и оболочек показывает, что определенный класс задач при сложном, комбинированном нагружении конструкций исследован недостаточно подробно, либо решение вообще отсутствует. Это относится, в первую очередь, к исследованию нелинейных процессов статического и динамического деформирования составных, неоднородных конструкций на основе уравнений теории Тимошенко. В настоящей диссертации для исследования особенностей деформирования несущих элементов составных конструкций каркасного типа, подверженных воздействию статических и динамических нагрузок различного вида, в рамках геометрически и физически нелинейных соотношений теории Тимошенко разрабатываются и развиваются адекватные математические модели, а также эффективные численные методы решения соответствующих дискретных задач, обеспечивающие построение алгоритмов численных решений статических и динамических задач на основе однотипных разностных схем. Математические модели строятся в рамках плоской задачи, что не является ограничением для развиваемых в работе методов и подходов, которые могут быть распространены для расчета составных, пространственных конструкций в трехмерной постановке.

## § 1.1. Деформированное состояние. Геометрически нелинейные соотношения модели Тимошенко для балок, пластин и панелей

В общем случае для криволинейных поверхностей вектор перемещения точки М эквидистантной поверхности определяется параметрами

$$U=U(\alpha_1,\alpha_2,z); \quad V=V(\alpha_1,\alpha_2,z); \quad W=W(\alpha_1,\alpha_2,z), \quad (1.1)$$

где  $U, V, W$  - проекции вектора полного перемещения точки по ортам ортогонального триэдра  $e_1, e_2, e_3$  (рис. 1.1);  $\alpha_1, \alpha_2$  - координаты основания нормали на координатной поверхности  $z=0$ ,  $z$  - расстояние в координатном направлении  $\alpha_3$ .

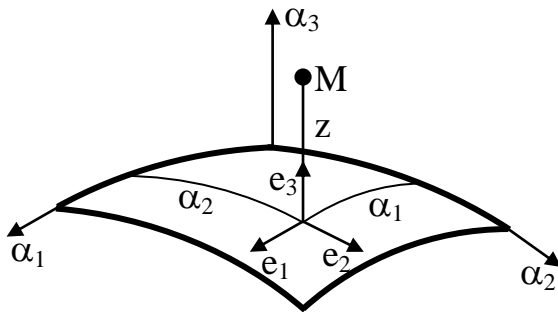


Рис. 1.1

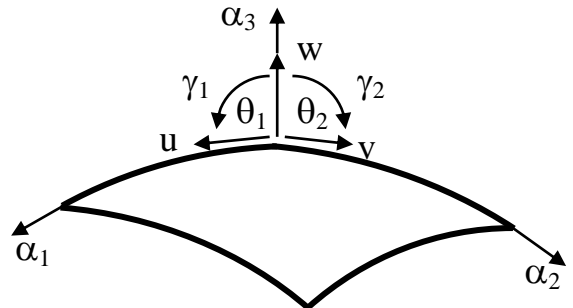


Рис. 1.2

Для кинематических параметров координатной поверхности можно ввести следующие обозначения:  $u=u(\alpha_1,\alpha_2)$ ,  $v=v(\alpha_1,\alpha_2)$ ,  $w=w(\alpha_1,\alpha_2)$  - перемещения точек координатной поверхности  $z=0$ ;  $\theta_1=\theta_1(\alpha_1,\alpha_2)$ ,  $\theta_2=\theta_2(\alpha_1,\alpha_2)$  - углы поворота в соответствии с гипотезой о "жесткой" нормали;  $\gamma_1=\gamma_1(\alpha_1,\alpha_2)$ ,  $\gamma_2=\gamma_2(\alpha_1,\alpha_2)$  - полные углы поворота нормали. Положительные направления для обобщенных перемещений  $u_k$  показаны на рис.1.2; ( $u_1=u$ ,  $u_2=v$ ,  $u_3=w$ ,  $u_4=\gamma_1$ ,  $u_5=\gamma_2$ ;  $k=1,2,\dots,5$ ).

Деформированное состояние в точке описывается тензором деформаций

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \|\varepsilon_{ij}\|, \quad (1.2)$$

где  $\varepsilon_{ii}$  - удлинения вдоль координатных осей  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ;  $\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} / 2$  - сдвиговые деформации,  $\gamma_{ij}$  - углы сдвига ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Для компонент тензора деформаций используются также обозначения:  $E_{ii} = \varepsilon_{ii}$ ,  $E_{ij} = \gamma_{ij}$ .

В рамках плоской задачи рассмотрим типовые элементы составной конструкции балочного и панельного типа (рис. 1.3).

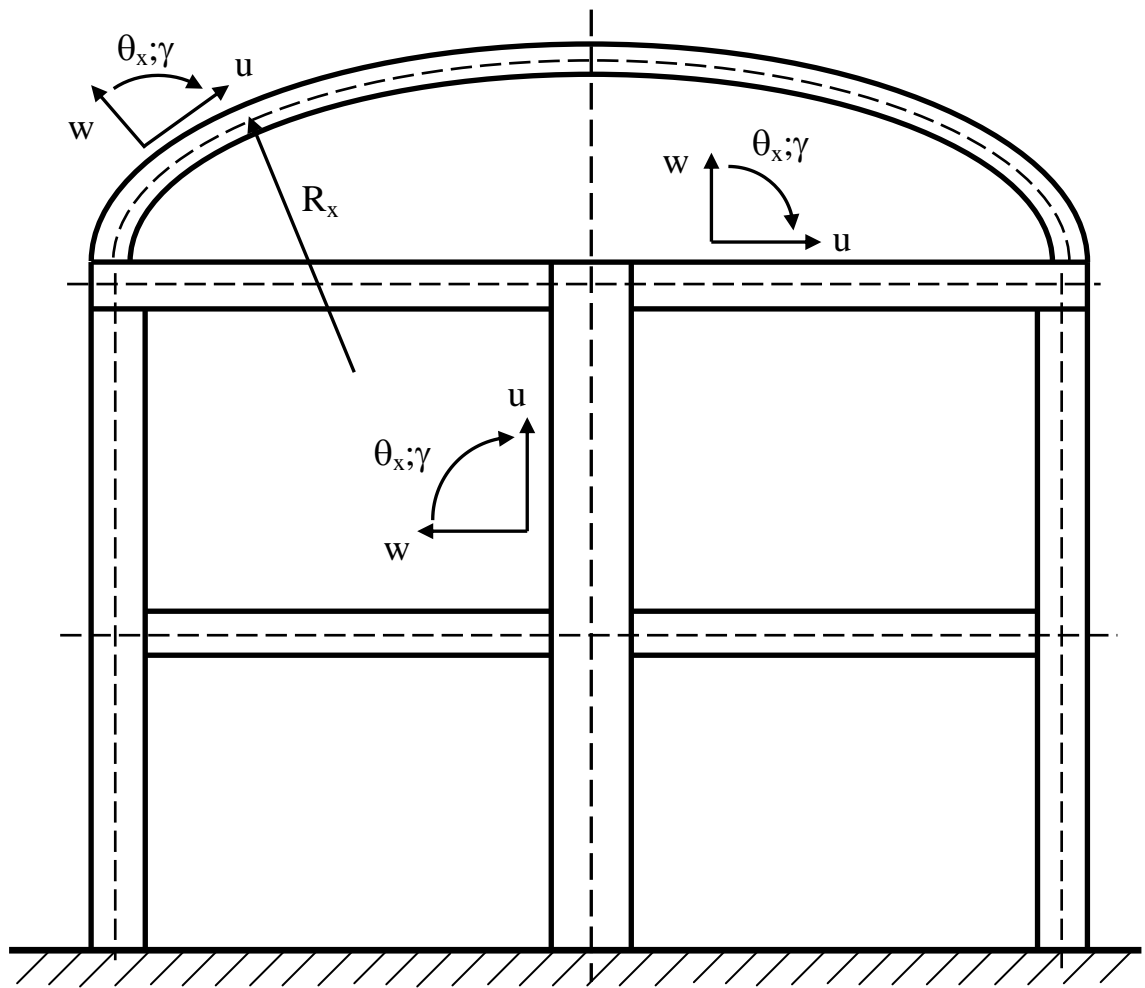


Рис. 1.3

Геометрически нелинейные выражения для компонент тангенциальной  $E_{xx}$  и трансверсальной  $E_{xz}$  и изгибной  $K_{xx}$  деформации координатной линии  $z=0$  в рамках теории среднего изгиба записываются следующим образом [12,19]:

- для криволинейной балки арочного типа, а также панельных и оболочечных несущих элементов конструкций покрытий, работающих в условиях плоской деформации (рис. 1.3)

$$\begin{aligned}
E_{xx} &= \frac{1}{R_x} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_x w + \frac{1}{2} \theta_x^2; & E_{xz} &= \gamma - \theta_x; \\
K_{xx} &= \frac{1}{R_x} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}; & \theta_x &= -\frac{1}{R_x} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + k_x u,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где  $\alpha = \alpha_2$  - криволинейная координата,  $R_x$  - радиус кривизны,  $k_x = 1/R_x$  - кривизна арки, панели. В общем случае:  $R_x = R_x(\alpha)$ .

- для прямолинейной балки (колонны, ригеля, рис. 1.3)

$$\begin{aligned}
E_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \theta_x^2; & E_{xz} &= \gamma - \theta_x; \\
K_{xx} &= \frac{\partial \gamma}{\partial x}; & \theta_x &= -\frac{\partial w}{\partial x},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где  $x = \alpha_1$  - прямолинейная координата:  $0 \leq x \leq l$ ,  $l$  - длина прямолинейного элемента составной конструкции.

В соотношениях (1.3), (1.4):  $u$  – тангенциальное перемещение,  $w$  - прогиб,  $\theta_x$  - угол поворота в соответствии с гипотезой о ”жесткой” нормали;  $\gamma$  - полный угол поворота нормали (рис. 1.2, 1.3).

В соответствии с принятыми положительными направлениями для обобщенных перемещений полный угол поворота нормали определится как

$$\gamma = E_{xz} + \theta_x, \tag{1.5}$$

где  $E_{xx}$  - угол поперечного сдвига. По толщине балки (панели) принят линейный закон распределения перемещений и деформаций

$$\begin{aligned}
U &= u + z \cdot \gamma; \\
W &= w; \\
E_{xx}(z) &= E_{xx} + z \cdot K_{xx}; \\
E_{xz}(z) &= E_{xz}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Обычно в качестве координатной принимается срединная линия балки, тогда координата  $z$  меняется в пределах:  $h/2 \leq z \leq +h/2$ , где  $h$  - высота балки.



**§ 1.2. Напряженное состояние. Физические соотношения для  
балочных и панельных элементов составных  
строительных конструкций из многослойных  
композиционных материалов и железобетона**

Напряженное состояние в точке характеризуется симметричным тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \|\sigma_{ij}\|, \quad (1.7)$$

где  $\sigma_{ii}$  - нормальные напряжения;  $\sigma_{12}=\sigma_{21}, \sigma_{13}=\sigma_{31}, \sigma_{23}=\sigma_{32}$  - касательные напряжения. Далее для касательных напряжений используются обозначения  $\tau_{ij}=\sigma_{ij}$ .

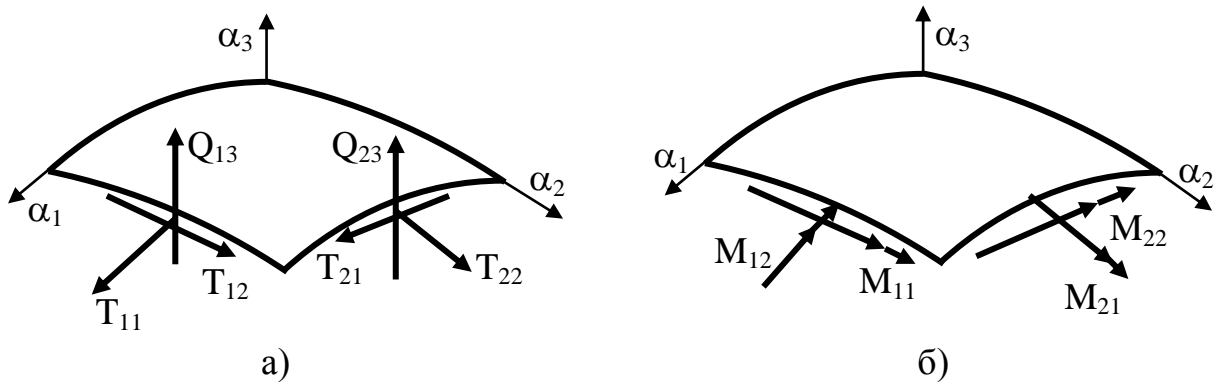


Рис. 1.4

В общем случае нелинейных двумерных краевых задач внутренние силовые факторы, приведенные к координатной поверхности (линии) элемента составной конструкции (пластины, оболочки), определяются интегрированием компонентов тензора напряжений (1.7) по толщине как

$$T_{11} = \int_h \sigma_{11}(1 + zk_2)dz; \quad T_{12} = \int_h \tau_{12}(1 + zk_2)dz; \quad Q_{13} = \int_h \tau_{13}(1 + zk_2)dz \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

$$M_{11} = \int_h \sigma_{11}(1 + zk_2)zdz; \quad M_{12} = \int_h \tau_{12}(1 + zk_2)zdz \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (1.8)$$

где  $T_{ii}=T_{ii}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $T_{ij}=T_{ij}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $Q_{i3}=Q_{i3}(\alpha_1, \alpha_2)$ , - нормальные, сдвигающие и перерезывающие силы,  $M_{ii}=M_{ii}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $M_{ij}=M_{ij}(\alpha_1, \alpha_2)$  - изгибающие и крутящие

моменты ( $i, j=1, 2$ ),  $h$  - толщина элемента,  $k_1, k_2$  - кривизны соответствующих координатных линий. Положительные направления для силовых факторов показаны на рис. 1.4.

### 1.2.1. Особенности деформирования конструкций из железобетона с учетом упруго-пластической работы арматуры и трещинообразования в бетоне

В настоящее время в строительстве широко используется железобетон, представляющий из себя комплексный материал, в котором стальные армирующие элементы (арматура) и бетон работают совместно вплоть до момента разрушения. Обусловлен этот выбор, прежде всего тем, что прочность бетона на растяжение в 10-20 раз меньше прочности на сжатие, а арматура, как раз - работает на растяжение, поэтому происходит дополнение свойств материала, в котором бетон используется для работы на сжатие, а арматура - в работе на растяжение. Марки бетона, используемые в строительстве, классифицируются по СНиП 2.03.01-84 следующим образом:

- тяжелый средней плотности  $\rho$  ( $\text{кг/м}^3$ ) свыше D2200 до D2500 (на плотных заполнителях);
- мелкозернистый средней плотности свыше D1800 (на мелких заполнителях);
- легкий плотной и поризованной структуры (на пористых заполнителях);
- ячеистый автоклавного и неавтоклавного твердения и др.

Несущие и ответственные элементы конструкций и зданий, как правило, изготавливают из бетона первой группы (тяжелый бетон со средней плотностью  $D2200 < \rho \leq D2500$ ) на цементном вяжущем и крупном плотном заполнителе из гранита, диабазы, песчаника и т.д.

Теории прочности, используемые для традиционных конструктивных материалов, к бетону не применимы [53,85,90]. Следовательно при проектировании для количественной оценки прочности бетона в железобетонной конструкции используют осредненные экспериментальные данные, такие как:

$\bar{R}$  - средний предел прочности на осевое сжатие бетонных кубиков с ребром 150 мм;

$\bar{R}_b$  - средний предел прочности на осевое сжатие эталонных бетонных призм;

$\bar{R}_{bt}$  - средний предел прочности на осевое растяжение;

$\bar{R}_d$  - динамическая прочность, определяемая повышением, взрывных, сейсмических и других динамических воздействиях малой продолжительности и характеризуемая коэффициентом динамической прочности бетона  $k_d$

$$k_d = \frac{\bar{R}_d}{\bar{R}_b}. \quad (1.9)$$

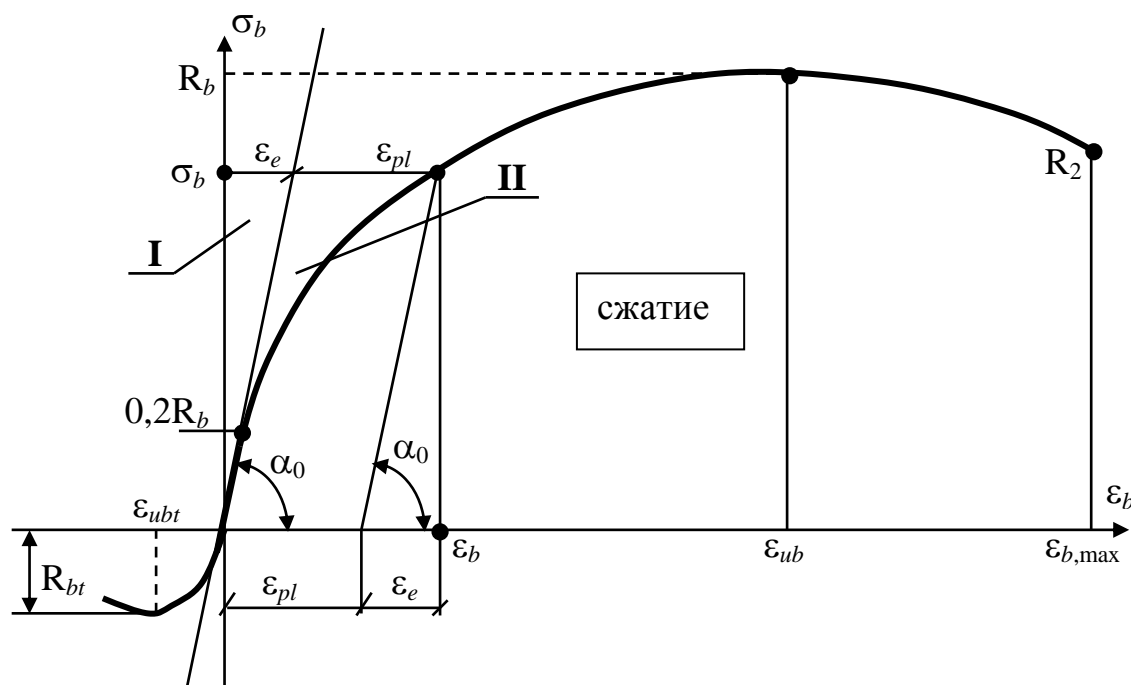


Рис. 1.5. Типичная диаграмма деформирования бетона

На рис. 1.5 показана диаграмма зависимости  $\sigma_b$ - $\epsilon_b$  бетона при сжатии и растяжении: I - область упругих деформаций  $\epsilon_e$ ; II - область пластических деформаций  $\epsilon_{pl}$ ;  $\epsilon_{ub}$  - предельная сжимаемость;  $\epsilon_{ubt}$  - предельная растяжимость;  $\epsilon_{b,max}$  - максимальная сжимаемость на нисходящей ветви диаграммы.

Согласно СНиП 2.03.01-84 по прочности на сжатие предусмотрены следующие классы тяжелого бетона: В3,5; В5; В7,5; В10; В12,5; В15; В20; В25;

В30; В35; В40; В45; В50; В55; В60. В обозначении класса бетона число после буквы В соответствует гарантированной прочности бетона на осевое сжатие в МПа с обеспеченностью 95%. Для железобетонных конструкций, работающих преимущественно на растяжение, установлены классы бетона по прочности на осевое растяжение: В<sub>t</sub>0,8; В<sub>t</sub>1,2; В<sub>t</sub>1,6; В<sub>t</sub>2; В<sub>t</sub>2,4; В<sub>t</sub>2,8; В<sub>t</sub>3,2. С повышением прочности бетона на сжатие относительная прочность при осевом растяжении уменьшается.

Упругие деформации преобладают при относительно невысоких напряжениях в диапазоне до  $\sigma_b \leq 0,5R_b$ , а при напряжениях  $\sigma_b \leq 0,2R_b$  бетон может рассматриваться как упругий материал. Для упругих деформаций бетона, начальное значение коэффициента Пуассона составляет  $\nu_b = 0,2$ . В области упругих деформаций при  $\sigma_b \leq 0,2R_b$  начальный модуль упругости бетона при сжатии  $E_b$  определяется как тангенс угла наклона касательной  $\alpha_0$  к кривой  $\sigma_b - \varepsilon_b$  (рис. 1.6). В упругопластической стадии при  $\sigma_b > 0,2R_b$  для расчета железобетонных конструкций используется средний модуль деформации или модуль упругопластичности бетона  $E'_b$ , определяемый как тангенс угла наклона  $\alpha_1$  секущей, проведенной из начала координат и заданную точку на диаграмме  $\sigma_b - \varepsilon_b$ .

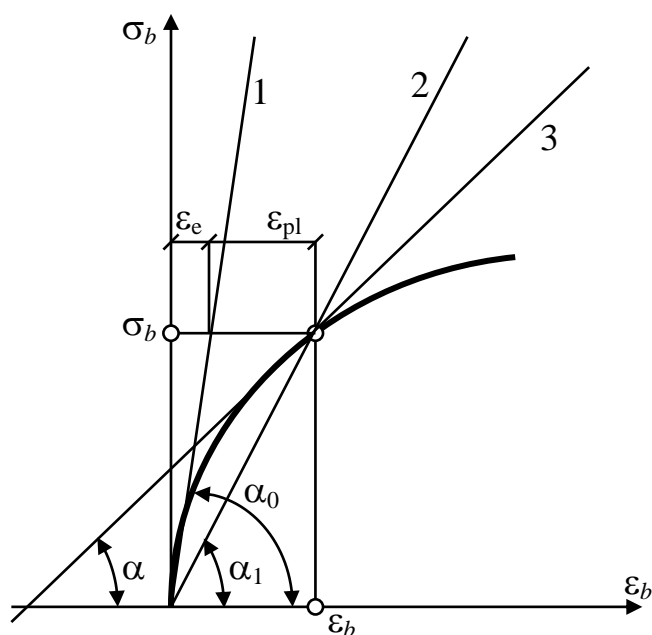


Рис. 1.6. Модуль деформации бетона:

1 – упругие деформации; 2 – секущая; 3 - касательная

Начальный модуль упругости бетона при растяжении  $E_{bt}$  принимается равным модулю упругости при сжатии:  $E_{bt} = E_b$ . Модуль сдвига бетона  $G_b$  определяется по известной формуле

$$G_b = \frac{E_b}{2(1 + \nu_b)}, \quad (1.10)$$

откуда с учетом  $\nu_b=0,2$ :  $G_b=0,42E_b$ .

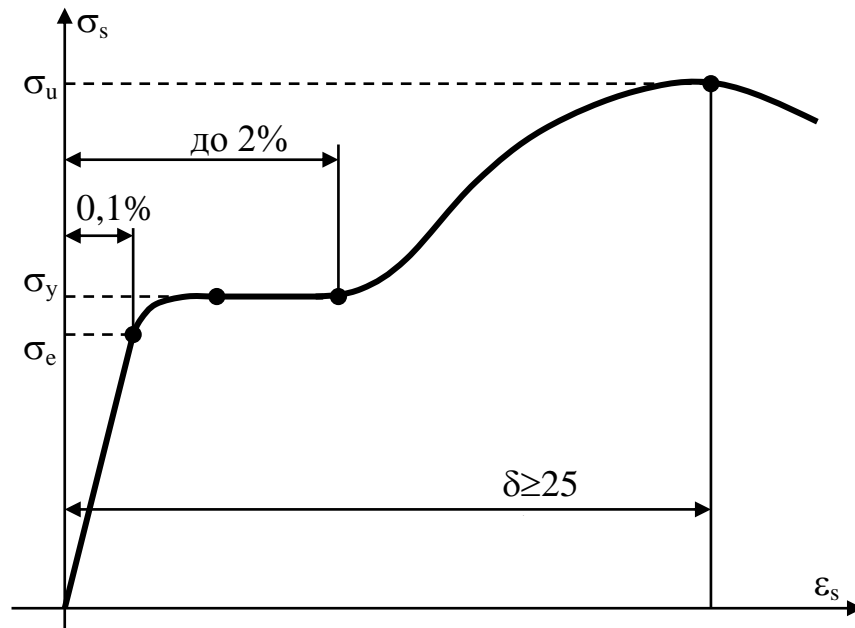


Рис. 1.7

Как было отмечено ранее, в основном в железобетонных конструкциях арматура используется для восприятия растягивающих усилий. Как правило, используют арматуру из конструкционных сталей с небольшим (до 0,65%) содержанием углерода, обусловлено это тем, что стали с большим содержанием углерода плохо свариваются.

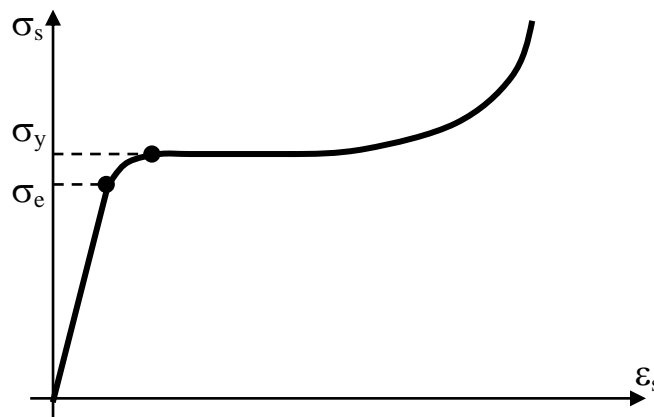


Рис. 1.8

На вышеприведенных рисунках (Рис. 1.7, 1.8) изображены характерные диаграммы деформирования малоуглеродистых сталей как при растяжении Рис.1.7, так и при сжатии – Рис.1.8. Стали применяемые для изготовления арматуры условно подразделяют на 2 вида:

- «мягкие», основной характеристикой является предел текучести  $\sigma_T = \sigma_y$ ,
- «твердые», основная гарантированная характеристика временное сопротивление разрыву  $\sigma_u$ .

Так же арматуру различают на:

- «рабочую» - площадь поперечного сечения определяется из расчета на заданные эксплуатационные нагрузки;
- «монтажную» или «распределительную», устанавливаемую по конструктивным или технологическим соображениям.

По характеристикам же, арматура делится на следующие классы:

- стержневая горячекатаная арматура: А-I; А-II; А-III;
- проволочная: В<sub>p</sub>-I (арматурная проволока).

Арматура класса А-I в основном используется в качестве монтажной, имеет гладкую цилиндрическую поверхность, а так же изготавливается из стали Ст3 со следующими характеристиками:  $\sigma_T = 230$  МПа,  $\sigma_u = 380$  МПа,  $\delta \geq 25\%$ , где  $\delta$  - полное относительное удлинение образца при разрыве.

Стержневая горячекатаная арматура других классов, так же представляет собой стальные стержни с профилированной поверхностью, предназначенной для повышения адгезии (сцепления) арматуры с бетоном и уменьшения ширины раскрытия трещин в растянутой зоне бетона (Рис. 1.9). Изготавливают арматуру класса А-II из сталей Ст5, 10ГТ, 18Г2С с характеристиками:  $\sigma_T = 300$  МПа,  $\sigma_u = 500$  МПа,  $\delta \geq 19\%$ . Для изготовления же арматуры класса А-III, используются низколегированные стали 18Г2С, 35ГС, 25Г2С с характеристиками:  $\sigma_T = 400$  МПа,  $\sigma_u = 600$  МПа,  $\delta \geq 14\%$ .

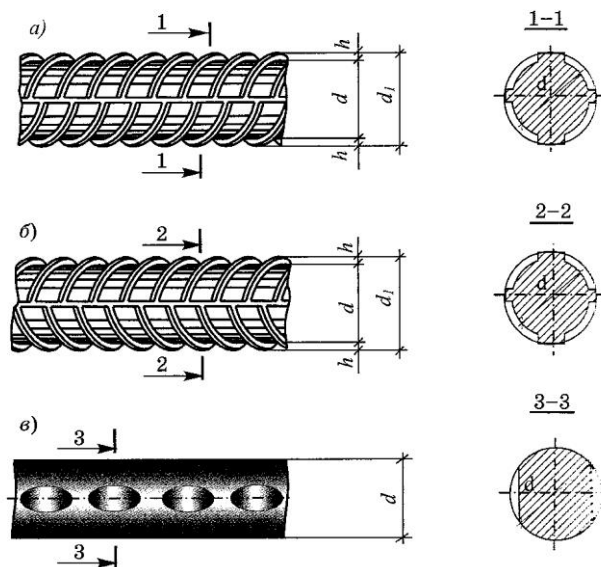


Рис. 1.9. Виды арматуры периодического профиля:

а, б – стержневая; в – проволочная

Минимальные проценты армирования  $\mu_{\min}$ , для сечений несущих элементов железобетонных конструкций по строительными нормами, установлены, в зависимости от характера работы и их гибкости, в пределах  $\mu_{\min}=(0,05\div 0,25)\%$ . Максимальный процент армирования  $\mu_{\max}$  обычно не превышает  $\mu_{\max}=(2\div 3)\%$ , обусловлен он только экономической составляющей, при этом изменение процента армирования влияет не только на несущую способность элемента, но и на характер его разрушения. Одним из основных недостатков железобетона является относительно быстрое образование трещин, обусловленное малой растяжимостью бетона, предельное значение в среднем составляет  $\varepsilon_{ubr}=15\cdot 10^{-5}$ . Поскольку до появления трещин деформации бетона  $\varepsilon_{bt}$  и арматуры  $\varepsilon_s$  в зоне их контакта равны, то трещины в бетоне возникают при напряжениях в арматуре

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s = 2 \cdot 10^5 \cdot 15 \cdot 10^{-5} = 30 \text{ МПа}, \quad (1.11)$$

и трещины в бетоне возникают при напряжениях в арматуре  $\sigma_s > 30$  МПа. Условие обеспечения трещиностойкости конструкции ограничивает возможность применения арматуры из высокопрочных сталей, т.к. высокие эксплуатационные растягивающие напряжения для таких сталей и соответствующие деформации приводят к образованию недопустимых по ширине раскрытия трещин.

### 1.2.2. Основные соотношения деформационной теории пластичности

Для учета физической нелинейности при описании процессов упруго-пластического деформирования армирующих элементов используются соотношения деформационной теории пластичности [48]. В рамках соотношений деформационной теории пластичности рассматриваемая среда полагается изотропной, а среднее напряжение  $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$  и объемная деформация  $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  связаны линейной зависимостью

$$\sigma = K\theta, \quad (1.12)$$

где

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad (1.13)$$

и где  $K$  - модуль объемного сжатия;  $E$ ,  $\nu$  - модуль упругости и коэффициент Пуассона при упругих деформациях. Изменение формы элемента среды происходит за счет деформаций сдвига, при этом девиаторы деформаций

$$D_\varepsilon = \|e_{ij}\|; \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}, \quad (1.14)$$

и напряжений

$$D_\sigma = \|s_{ij}\|; \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \quad (1.15)$$

пропорциональны;  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера.

Интенсивность деформаций  $e_i$  определяется по формуле

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)}. \quad (1.16)$$

а интенсивность напряжений  $\sigma_i$  записывается в виде

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)}. \quad (1.17)$$

Пластические деформации в элементе конструкции возникают при условии текучести Мизеса  $\sigma_i \geq \sigma_T$  ( $e_i \geq \varepsilon_T$ );  $\sigma_T, \varepsilon_T$  - предел текучести и деформация текучести при одномерной деформации растяжения - сжатия. Процесс активного



нагрузки определяется условием  $d\sigma_i > 0$  ( $de_i > 0$ ); при  $d\sigma_i < 0$  ( $de_i < 0$ ) начинается разгрузка материала, которая полагается линейно-упругой.

В пластической стадии зависимости между напряжениями и деформациями для случая плоского напряженного состояния (пластины, панели и оболочки) в области активного нагружения могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \left( K + \frac{4E_c}{9} \right) E_{11} + \left( K - \frac{2E_c}{9} \right) (E_{22} + E_{33}); \\ \sigma_{22} &= \left( K + \frac{4E_c}{9} \right) E_{22} + \left( K - \frac{2E_c}{9} \right) (E_{11} + E_{33}); \\ \tau_{12} &= E_c E_{12} / 3; \quad \tau_{13} = E_c E_{13} / 3; \quad \tau_{23} = E_c E_{23} / 3,\end{aligned}\tag{1.18}$$

где  $E_c = \sigma_i / e_i$  - секущий модуль диаграммы  $\sigma_i(e_i)$ . Деформация  $E_{33}$  определяется из условия  $\sigma_{33} = 0$  следующим образом

$$E_{33}^{уп} = -\frac{\nu}{1-\nu} (E_{11} + E_{22}); \quad E_{33}^{пл} = -\frac{9K - 2E_c}{9K + 4E_c} (E_{11} + E_{22}),\tag{1.19}$$

где  $E_{33}^{уп}$  и  $E_{33}^{пл}$  - обжатие при упругих и пластических деформациях соответственно. При разгрузке напряжения выражаются через деформации по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_{11}^* + \frac{E}{1-\nu^2} [(E_{11} - E_{11}^*) + \nu(E_{22} - E_{22}^*)]; \\ \sigma_{22} &= \sigma_{22}^* + \frac{E}{1-\nu^2} [(E_{22} - E_{22}^*) + \nu(E_{11} - E_{11}^*)]; \\ \tau_{12} &= \tau_{12}^* + G(E_{12} - E_{12}^*); \quad \tau_{13} = \tau_{13}^* + G(E_{13} - E_{13}^*); \quad \tau_{23} = \tau_{23}^* + G(E_{23} - E_{23}^*).\end{aligned}\tag{1.20}$$

Звездочкой в (1.20) отмечены напряжения и деформации в момент начала разгрузки. При использовании соотношений теории пластин и оболочек Тимошенко выражения для интенсивностей деформаций (1.16) и напряжений (1.17) приобретают вид

$$e_i = \frac{2}{3} \sqrt{E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2 - E_{11}E_{22} - E_{22}E_{33} - E_{33}E_{11} + \frac{3}{4}(E_{12}^2 + E_{13}^2 + E_{23}^2)};$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)}. \quad (1.21)$$

Для арматуры с учетом вида диаграмм деформирования малоуглеродистых сталей (рис. 1.7,1.8) зависимость  $\sigma_i(e_i)$  может быть аппроксимирована диаграммой с линейным упрочнением (рис. 1.10).

Тогда секущий модуль равен

$$E_c = \frac{\sigma_T}{e_i} + E_1 \left( 1 - \frac{\varepsilon_T}{e_i} \right), \quad (1.22)$$

где  $E_1$ - касательный модуль при  $\sigma_i > \sigma_T$  ( $e_i > \varepsilon_T$ ) (рис. 1.10).

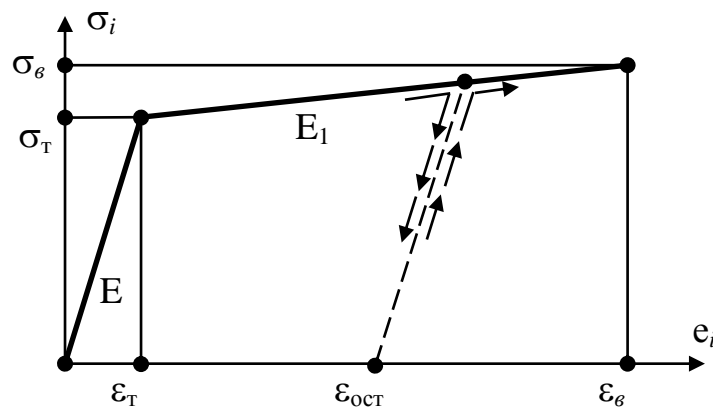


Рис. 1.10

### 1.2.3. Физические соотношения для железобетонных и металлических элементов составных конструкций

При математическом моделировании процессов деформирования несущих элементов железобетонных конструкций при различных вариантах армирования рассмотрим поперечное сечение элемента конструкции в для общего случая двустороннего армирования (рис. 1.11). Армирующие элементы рассматриваются в виде ортотропного слоя, эквивалентного по жесткости и работающего на растяжение-сжатие и поперечный сдвиг в направлении армирования и при нулевых значениях коэффициентов Пуассона [102,103]. Приведенные толщины слоев  $\Delta h_1$  и  $\Delta h_2$  для общего случая двустороннего армирования могут быть определены через значения коэффициентов армирования как

$$\Delta h_1 = \mu_1 \cdot h; \quad \Delta h_2 = \mu_2 \cdot h, \quad (1.23)$$

где  $\mu_1, \mu_2$  - коэффициенты армирования в слоях  $z < 0$  и  $z > 0$  соответственно (рис. 1.11б). Рассмотрим случай физически линейных и нелинейных задач.

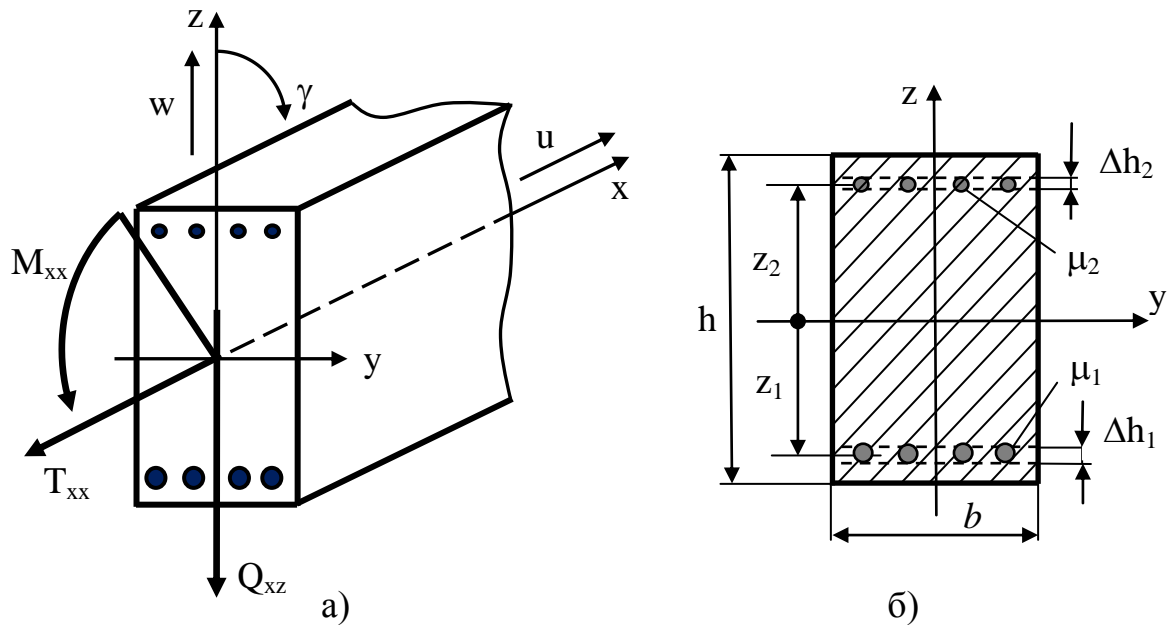


Рис. 1.11

*Упругие задачи.* Предполагается, что бетон и арматура работают в упругой стадии. Приведенные к координатной линии силовые факторы – растягивающая (сжимающая) сила  $T_{xx}$ , перерезывающая сила  $Q_{xz}$  и изгибающий момент  $M_{xx}$  выражаются через компоненты деформации как (рис. 1.11)

$$\begin{aligned} T_{xx} &= (B_b + B_a)E_{xx} + A_a K_{xx}; & M_{xx} &= (D_b + D_a)K_{xx} + A_a E_{xx}; \\ Q_{xz} &= (C_b + C_a)E_{xz}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где жесткостные коэффициенты определяются через физико-механические характеристики бетона и арматуры следующим образом

$$\begin{aligned} B_b &= E_b \cdot (bh); & C_b &= k^2 G_b \cdot (bh); & D_b &= E_b \cdot \left( \frac{bh^3}{12} \right); \\ A_a &= b \cdot \sum_{i=1}^n E_a (z_i \cdot \Delta h_i); & B_a &= b \cdot \sum_{i=1}^n E_a \cdot \Delta h_i; \\ C_a &= b \cdot \sum_{i=1}^n k^2 G_a \cdot \Delta h_i; & D_a &= b \cdot \sum_{i=1}^n E_a \left[ (z_i^2 \cdot \Delta h_i) + \frac{\Delta h_i^3}{12} \right], \end{aligned} \quad (1.25)$$

и где  $b$  - ширина балки,  $E_a, G_a$  - модули Юнга и сдвига арматуры,  $E_b, G_b$  - модули Юнга и сдвига бетона,  $z_1$  и  $z_2$  - координаты середины слоев  $\Delta h_1$  и  $\Delta h_2$  (рис. 1.11б),  $k^2 = 5/6$  - коэффициент сдвига, учитывающий параболический закон распределения поперечных касательных напряжений по толщине. В формулах (1.25)  $n=2$  - для случая двустороннего армирования и  $n=1$  - при одностороннем армировании. Положительные направления для силовых факторов показаны на рис. 1.11, 1.12.

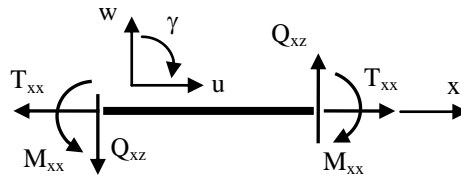


Рис. 1.12

*Упруго-пластические задачи.* В упругой стадии нормальные  $\sigma_a$  и касательные  $\tau_a$  напряжения в арматуре связаны с деформациями законом Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{a1} &= E_a \cdot E_{xx}(z_1); & \tau_{a1} &= G_a \cdot E_{xz}(z_1); \\ \sigma_{a2} &= E_a \cdot E_{xx}(z_2); & \tau_{a2} &= G_a \cdot E_{xz}(z_2), \end{aligned} \quad (1.26)$$

где  $\sigma_{a1}, \tau_{a1}$  и  $\sigma_{a2}, \tau_{a2}$  - нормальные и касательные напряжения в арматуре при  $z=z_1$  и  $z=z_2$  соответственно. Компоненты деформации  $E_{xx}(z_1), E_{xz}(z_1)$  и  $E_{xx}(z_2), E_{xz}(z_2)$  определяется по формулам (1.6) при  $z=z_1$  - для армирующего слоя  $z < 0$  и  $z=z_2$  - для слоя арматуры  $z > 0$  соответственно (рис. 1.11).

Поскольку с учетом реализуемых в процессе эксплуатации условий нагружения армирующих элементов для описания процессов деформирования отдельного элемента арматуры могут быть приняты условия одноосного напряженного состояния, то соотношения (1.18)-(1.21) соответствующим образом упрощаются и с учетом  $E_{22} = E_{33} = 0$  приобретают вид:

- в области активного нагружения  $d\sigma_i > 0$  ( $de_i > 0$ )

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sigma_{11} = \left( K + \frac{4E_c}{9} \right) E_{xx}; & \tau_a &= \tau_{13} = E_c E_{xz} / 3; \\ \sigma_{22} &= \sigma_{33} = \tau_{12} = \tau_{23} = 0; \end{aligned} \quad (1.27)$$

- при разрузке  $d\sigma_i < 0$  ( $de_i < 0$ )

$$\sigma_a = \sigma_a^* + E_a \cdot (E_{xx} - E_{xx}^*); \quad \tau_a = \tau_a^* + G_a (E_{xz} - E_{xz}^*), \quad (1.28)$$

где  $E_a, G_a$  - модули Юнга и сдвига арматуры.

Выражения для интенсивностей деформаций и напряжений (1.21) преобразуются к виду

$$e_i = \frac{2}{3} \sqrt{E_{xx}^2 + \frac{3}{4} E_{xz}^2}; \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}. \quad (1.29)$$

Нормальные  $\sigma_b^z$  и касательные  $\tau_b^z$  напряжения в слое бетона с координатой  $z$  определяются аналогично (1.26)

$$\sigma_b^z = E_b \cdot E_{xx}; \quad \tau_b^z = G_b \cdot E_{xz}, \quad (1.30)$$

где компоненты деформации  $E_{xx}, E_{xz}$  определяется по формулам (1.6) для слоя бетона с текущей координатой  $z$  (рис. 1.11). При описании процессов деформирования бетона полагается, что бетон упруго работает на сжатие, но в растянутой зоне при значениях растягивающих напряжений  $\sigma_b^z \geq R_{bt}$  в бетоне возникает трещина ( $R_{bt}$ —предел прочности бетона на растяжение). Предполагается, что если в процессе деформирования в слое бетона с координатой  $z$  происходит закрытие трещины (при смене знака компоненты деформации  $\varepsilon_{xx} \geq 0$  на деформацию сжатия  $\varepsilon_{xx} < 0$ ), то данный слой полностью включается в работу поперечного сечения балки. Повторное раскрытие трещины в процессе деформирования сечения происходит при смене знака деформации  $\varepsilon_{xx} < 0$  на  $\varepsilon_{xx} \geq 0$  и т.д.

При решении физически нелинейных задач усилия и моменты определяются после подстановки выражений для напряжений (1.26)-(1.30) в (1.8). Приведенные к координатной линии силовые факторы – растягивающая (сжимающая) сила  $T_{xx}$ , перерезывающая сила  $Q_{xz}$ , и изгибающий момент  $M_{xx}$ — определяются в результате интегрирования напряжений в бетоне и арматуре по толщине элемента конструкции  $h$  следующим образом (рис. 1.11, 1.12)

$$\begin{aligned} T_{xx} &= b \cdot \int_h (\sigma_{a1} + \sigma_{a2} + \sigma_{\sigma}^z) dz; & M_{xx} &= b \cdot \int_h (\sigma_{a1} \cdot z_1 + \sigma_{a2} \cdot z_2 + \sigma_{\sigma}^z \cdot z) dz; \\ Q_{xz} &= k^2 b \cdot \int_h (\tau_{a1} + \tau_{a2} + \tau_{\sigma}^z) dz. \end{aligned} \quad (1.31)$$

При выполнении интегрирования в (1.31) предполагается равномерное распределение деформаций и напряжений в пределах толщины приведенного слоя  $\Delta h_1(\Delta h_2)$  с учетом дискретного характера распределения напряжений  $\sigma_a$  и  $\tau_a$  по толщине  $h$ .

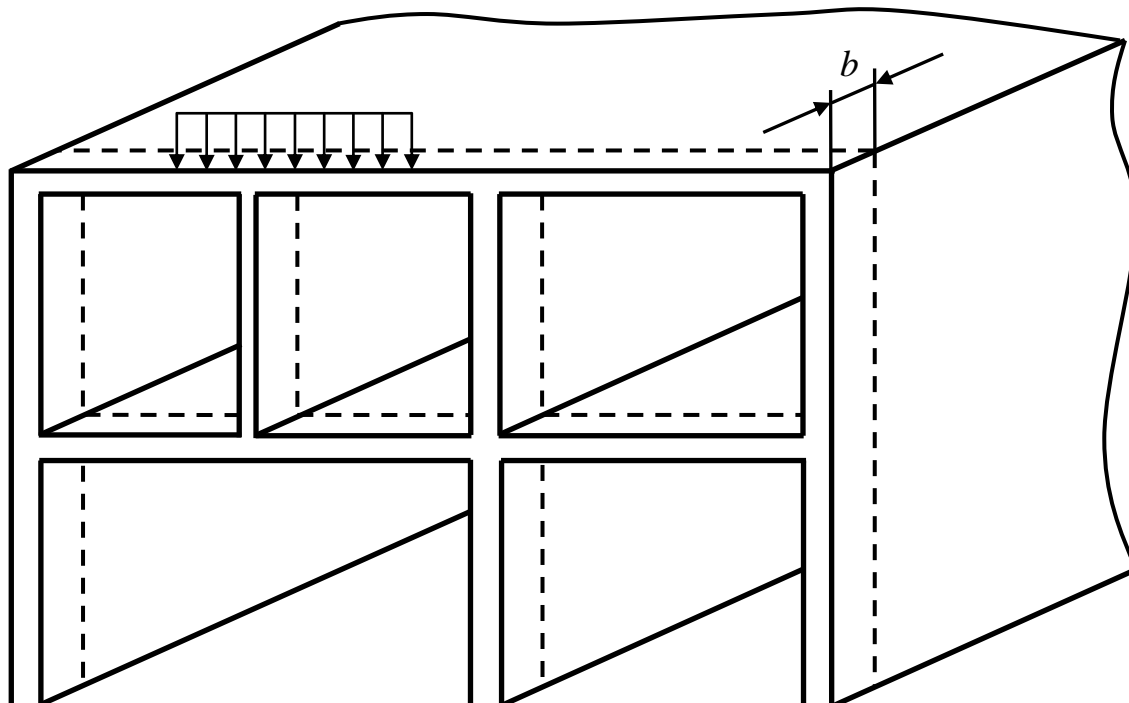


Рис. 1.13

Соотношения (1.23)-(1.31) могут быть использованы и в случае составных протяженных конструкций панельного типа, для поперечных сечений которых справедливы условия плоской деформации ( $\epsilon_{yy}=0$ ). Для таких случаев расчетная ширина полагается  $b=1$  (рис. 1.13) с заменой выражений для  $B_b$  и  $D_b$  в (1.25) на соотношения при цилиндрическом изгибе

$$B_b = \frac{E_b h}{1 - \nu_b^2}; \quad D_b = \frac{E_b h^3}{12(1 - \nu_b^2)}, \quad (1.32)$$

где  $\nu_b$  - модуль Юнга бетона. Соотношения (1.24)-(1.31) после соответствующих преобразований могут быть также использованы для расчета как упругого, так и упруго-пластического состояния составных конструкций каркасного типа, изготовленных из металлических элементов различного профиля: двутавр, труба, коробчатое сечение и т.д.

#### 1.2.4. Физические соотношения для однослойных и многослойных элементов конструкций из композитов

В современных конструкциях все более широко используются несущие элементы, изготовленные из композиционных материалов с ярко выраженной анизотропией физико-механических характеристик. В рамках рассматриваемых плоских задач для случая однослойного элемента конструкции, принимая в качестве координатной срединную поверхность (линию), можно получить следующие известные выражения для усилий и моментов

$$T_{xx} = B_{11}E_{xx}; \quad M_{xx} = D_{11}K_{xx}; \quad Q_{xz} = k^2B_{13}E_{xz}, \quad (1.33)$$

где для балочного элемента конструкции

$$B_{11} = E_1h; \quad D_{11} = \frac{E_1h^3}{12}; \quad B_{13} = G_{13}h; \quad (1.34)$$

и где  $E_1, G_{13}$  - модули Юнга и сдвига материала.

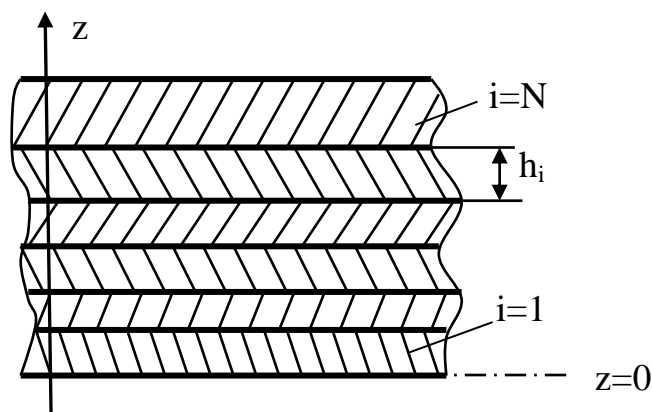


Рис. 1.14

Для многослойного элемента конструкции, собранной из  $N$  слоев различной толщины, жестко связанных между собой в единый пакет, предполагается, что слои деформируются без взаимного скольжения и отрыва, так, что для всего пакета в целом могут быть приняты гипотезы Тимошенко (рис. 1.14). Индекс "i" используется для нумерации слоев, а также обозначения расчетных параметров и физико-механических характеристик слоя ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ). В качестве координатной принимается срединная поверхность (линия), срединная поверхность любого слоя, либо одна из поверхностей контакта слоев.

Силловые факторы в многослойном элементе выражаются через компоненты деформации координатной поверхности по формулам

$$\begin{aligned} T_{xx} &= B_{11} \cdot E_{xx} + A_{11} \cdot K_{xx}; \\ M_{xx} &= D_{11} \cdot K_{xx} + A_{11} \cdot E_{xx}; \\ Q_{xz} &= C_{11} \cdot E_{xz}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Жесткостные коэффициенты  $A_{11}, B_{11}, C_{11}, D_{11}$  определяются через упругие характеристики слоев и их толщины [16]

$$\begin{aligned} B_{11} &= \sum_{i=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} E_x^{(i)} dz; \\ A_{11} &= \sum_{i=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} E_x^{(i)} z dz; \\ D_{11} &= \sum_{i=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} E_x^{(i)} z^2 dz; \\ C_{11} &= k^2 \sum_{i=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} G_{xz}^{(i)} dz, \end{aligned} \quad (1.36)$$

где  $E_x^{(i)}, G_{xz}^{(i)}$  - модули Юнга и сдвига материала  $i$ -го слоя. Полагая физико-механические характеристики материала  $i$ -го слоя неизменными в пределах слоя и отсчитывая координату  $z$  от нижней (свободной) поверхности первого слоя ( $i=1$ , рис. 1.14), формулы (1.36) можно привести к виду

$$\begin{aligned} B_{11} &= \sum_{i=1}^N E_x^{(i)} (z_i - z_{i-1}); \\ A_{11} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N E_x^{(i)} (z_i^2 - z_{i-1}^2); \\ D_{11} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N E_x^{(i)} (z_i^3 - z_{i-1}^3); \\ C_{11} &= k^2 \sum_{i=1}^N G_{xz}^{(i)} (z_i - z_{i-1}). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Формулы для железобетонного элемента конструкции (1.24),(1.25) могут быть получены из соотношений (1.35)-(1.37) как частный случай.



## § 1.3. Статика и динамика составных конструкций каркасного типа

### 1.3.1. Вариационный принцип Лагранжа и уравнения равновесия

Рассмотрим балочный элемент составной конструкции каркасного типа (рис. 1.15). Распределенная нагрузка с компонентами  $q_1=q_1(x)$ ,  $q_2=q_2(x)$ ,  $q_3=q_3(x)$  - может быть задана как по всей длине балки, так и локально. В краевых точках  $\Gamma_1$  ( $x=0$ ) и  $\Gamma_2$  ( $x=l$ ) могут быть заданы кинематические и силовые факторы: продольная сила  $T^*$ , поперечная сила  $Q^*$  и изгибающий момент  $M^*$ , а также краевые значения перемещений  $u^*$ ,  $w^*$  и угла поворота нормали  $\gamma^*$ . Положительные направления для компонент распределенной и краевой нагрузок полагаются совпадающими с положительными направлениями для обобщенных перемещений и внутренних силовых факторов (рис. 1.3, 1.12).

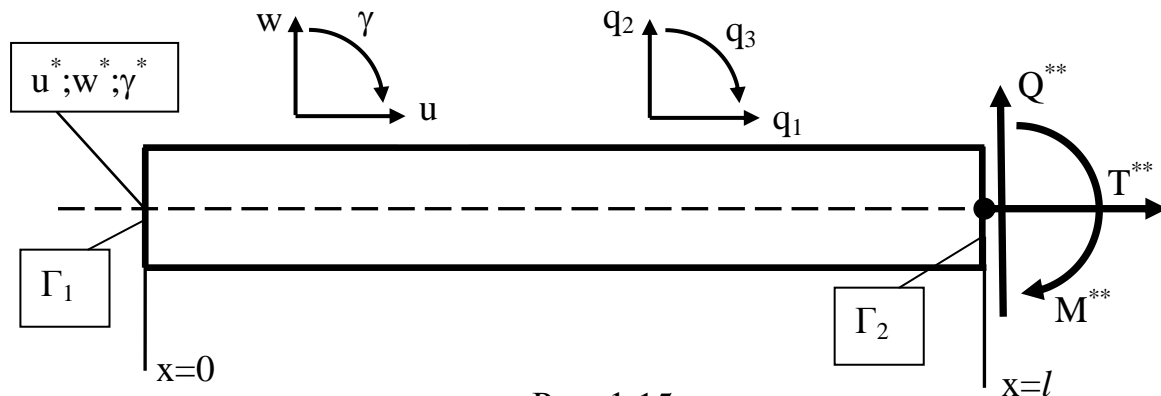


Рис. 1.15

Для получения уравнения равновесия и естественных граничных условий используется вариационный принцип Лагранжа [19]

$$\delta\mathcal{E} = \delta\Pi - \delta A = 0, \quad (1.38)$$

где  $\Pi$  - потенциальная энергия деформации,  $A$  - работа внешних сил, которая представляется в виде суммы

$$A = A_F + A_\Gamma, \quad (1.39)$$

где  $A_F$  - работа поверхностной нагрузки,  $A_\Gamma$  - работа краевой нагрузки. Выражения для  $\Pi$  и  $A_F$  записываются в виде

$$\Pi = \int_l (T_{xx} E_{xx} + M_{xx} K_{xx} + Q_{xz} E_{xz}) ds;$$

$$A_F = \int_l (q_1 u + q_2 w + q_3 \gamma) ds, \quad (1.40)$$

где для случая криволинейной балки  $ds=R_x \cdot d\alpha$ ; для случая прямолинейной балки  $ds=dx$ . Работа краевой нагрузки определяется выражениями вида

$$A_\Gamma = (T^{**} u + Q^{**} w + M^{**} \gamma) \Big|_{x=l} - (T^* u + Q^* w + M^* \gamma) \Big|_{x=0}, \quad (1.41)$$

где одной звездочкой отмечены заданные краевые нагрузки на крае  $\Gamma_1$  ( $x=0$ ), а двумя звездочками - на крае  $\Gamma_2$  ( $x=l$ ).

При независимых вариациях обобщенных перемещений в расчетной области  $0 \leq x \leq l$  и на краях  $\Gamma_1, \Gamma_2$  из вариационного уравнения (1.38) следуют уравнения равновесия, которые в дифференциальной форме записываются следующим образом:

- для криволинейной балки

$$\frac{1}{R_x} \frac{\partial T_{xx}}{\partial \alpha} + k_x \cdot Q_{xx} + q_1 = 0; \quad \frac{1}{R_x} \frac{\partial Q_{xx}}{\partial \alpha} - k_x T_{xx} + q_2 = 0;$$

$$\frac{1}{R_x} \frac{\partial M_{xx}}{\partial \alpha} - Q_{xz} + q_3 = 0; \quad (1.41)$$

- для прямолинейной балки

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + q_1 = 0; \quad \frac{\partial Q_{xx}}{\partial x} + q_2 = 0;$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_{xz} + q_3 = 0, \quad (1.42)$$

и где обобщенная перерезывающая сила  $Q_{xx}$  определяется как

$$Q_{xx} = Q_{xz} - T_{xx} \cdot \theta_x. \quad (1.43)$$

В компоненты нагрузки  $q_1, q_2, q_3$ , имеющей общий и/или локальный характер распределения  $q=q(x)$ , входят составляющие от собственного веса, веса фасадных элементов конструкции и оборудования, снеговые нагрузки, нагрузки, передаваемые от смежных элементов составной конструкции друг на друга и т.д.

Из вариационного уравнения (1.38) вытекают также статические граничные условия, которые записываются следующим образом:

- край  $\Gamma_1$ :

$$T_{xx} = T^*; \quad Q_{xx} = Q^*; \quad M_{xx} = M^*; \quad (1.44)$$

- край  $\Gamma_2$ :

$$T_{xx} = T^{**}; \quad Q_{xx} = Q^{**}; \quad M_{xx} = M^{**}. \quad (1.45)$$

### 1.3.2. Вариационный принцип Остроградского-Гамильтона и уравнения движения

Для получения уравнений движения элементов составной конструкции используется вариационное уравнение Остроградского-Гамильтона в форме

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta \Pi + \delta A) dt = 0. \quad (1.46)$$

Кинетическая энергия элемента  $K$  равна

$$K = \frac{1}{2} b \cdot \int_l (m_1 \cdot \ddot{u}^2 + m_2 \cdot \ddot{w}^2 + m_3 \cdot \gamma^2) ds, \quad (1.47)$$

где параметры массовых характеристик для железобетонных конструкций определяются как [102,103]

$$m_k = b \cdot \left[ \rho_b h + \sum_{i=1}^n \rho_a h_i \right] \quad (k = 1, 2); \quad (1.48)$$

$$m_3 = b \cdot \left[ \frac{\rho_b h^3}{12} + \sum_{i=1}^n \rho_a \cdot \left( \frac{h_i^3}{12} + z_i^2 \cdot h_i \right) \right],$$

где  $\rho_a$  - плотность арматуры,  $\rho_b$  - плотность бетона. Для многослойных элементов конструкций из композиционных материалов параметры массовых характеристик  $m_k$  определяются как

$$m_1 = m_2 = b \cdot \sum_{i=1}^N \rho_i h_i; \quad m_3 = b \cdot \sum_{i=1}^N \rho_i (J_{0i} + z_i^2 F_i), \quad (1.49)$$

где  $N$  - число слоев,  $z_i$  - расстояние от середины  $i$ -го слоя до координатной поверхности оболочки,  $J_{0i}$  и  $F_i$  - собственный момент инерции и площадь попе-

речного сечения слоя. Для случая (1.32) в формулах (1.47)-(1.49) следует положить  $b=1$ . Выражения для потенциальной энергии деформации  $\Pi$  и работы внешних сил  $A$  имеют вид (1.40),(1.41). Вытекающие из (1.46) уравнения движения в операторной форме могут быть представлены как

$$[L_x(U)]_k + q_k = m_k \ddot{u}_k, \quad (1.50)$$

где  $[L_x(U)]_k$  - соответствующие дифференциальные операторы для вектора обобщенных перемещений  $U=U(u_1, u_2, u_3)$ ,  $u_1=u$ ,  $u_2=w$ ,  $u_3=\gamma$  - обобщенные перемещения  $u_k$  ( $k=1,2,3$ ). Для динамических задач вид воздействия задается соответствующей функцией нагрузки  $q=q(x,t)$ .

Уравнения движения для модели Тимошенко, относящиеся к гиперболическому типу, описывают распространение как волн деформации координатной поверхности, так и изгибно-сдвиговых волн.

#### § 1.4. Формулировка граничных и начальных условий для составных конструкций каркасного типа

Уравнения движения (1.50), как и уравнения равновесия (1.41),(1.42), получены в проекциях на оси, связанные с недеформированной координатной системой, что позволяет легко сформулировать задачу для составной конструкции.

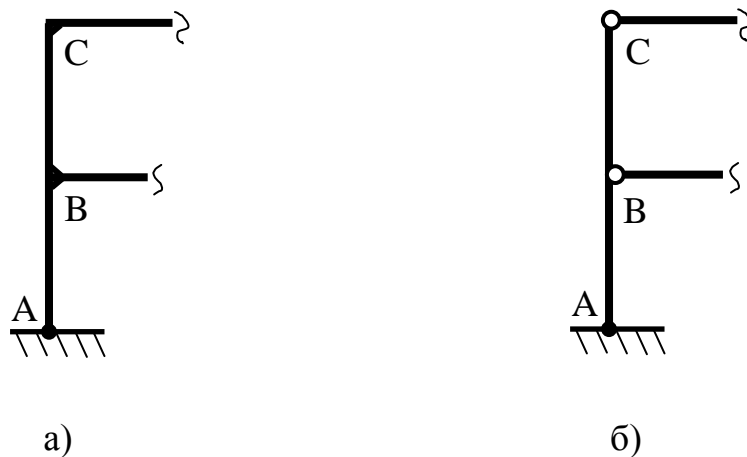


Рис. 1.16

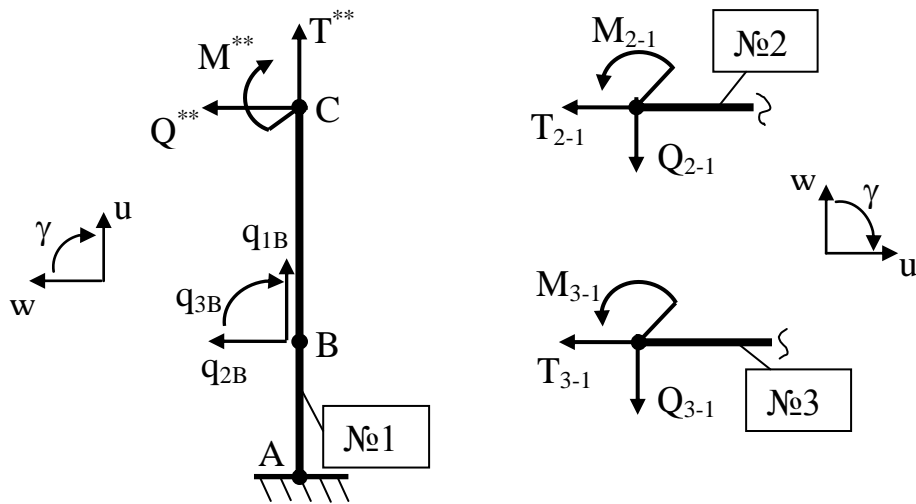


Рис. 1.17

Монолитное соединение элементов составной конструкции моделируется условиями жесткого защемления (рис. 1.16а). Граничные условия типа шарнирного закрепления могут быть использованы для моделирования условий сопряжения в точках В и С сборных конструкций (рис. 1.16б). В соответствии с принятым правилом знаков для обобщенных перемещений и силовых факторов, имеем следующие кинематические и силовые условия сопряжения (условия совместности работ) элементов №1, №2 и №3 каркасной конструкции (рис. 1.1, 1.3, 1.4, 1.11, 1.12):

т. А:

$$u_{1A} = u^*; \quad w_{1A} = w^*; \quad \gamma_{1A} = 0; \quad (1.51)$$

т. В:

- монолитная конструкция:

$$u_{3B} = -w_{1B}; \quad w_{3B} = u_{1B}; \quad \gamma_{3B} = \gamma_{1B}; \quad (1.52)$$

$$q_{1B} = \frac{Q_{3-1}}{dx}; \quad q_{2B} = -\frac{T_{3-1}}{dx}; \quad q_{3B} = \frac{M_{3-1}}{dx};$$

- сборная конструкция:

$$u_{3B} = -w_{1B}; \quad w_{3B} = u_{1B}; \quad M_{3-1} = 0; \quad (1.53)$$

$$q_{1B} = \frac{Q_{3-1}}{dx}; \quad q_{2B} = -\frac{T_{3-1}}{dx}; \quad q_{3B} = 0;$$

т. С:

- монолитная конструкция:

$$u_{2C} = -w_{1C}; \quad w_{2C} = u_{1C}; \quad \gamma_{2C} = \gamma_{1C}; \quad (1.54)$$

$$T^{**} = Q_{2-1}; \quad Q^{**} = -T_{2-1}; \quad M^{**} = M_{2-1};$$

- сборная конструкция:

$$u_{2C} = -w_{1C}; \quad w_{2C} = u_{1C}; \quad M_{2-1} = 0; \quad (1.55)$$

$$T^{**} = Q_{2-1}; \quad Q^{**} = -T_{2-1}; \quad M^{**} = 0,$$

где в соответствии с (1.43)  $Q_{3-1}$  и  $Q_{2-1}$  представляют собой обобщенные перерезывающие силы, определенные в краевых точках В и С элементов № 3 и № 2

$$Q_{3-1} = (Q_{xz} - T_{xx} \cdot \theta_x)_2^B; \quad Q_{2-1} = (Q_{xz} - T_{xx} \cdot \theta_x)_2^C, \quad (1.56)$$

и где звездочками в отмечены краевые кинематические и силовые параметры, заданные или определяемые в процессе решения.

Начальные условия ставятся для обобщенных перемещений  $u_k$  и их скоростей  $\dot{u}_k$

$$u_k|_{t=0} = u_k^0; \quad \left. \frac{\partial u_k}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{u}_k^0, \quad (1.57)$$

где  $u_k^0$ ,  $\dot{u}_k^0$  – заданные начальные значения обобщенных перемещений и их скоростей при  $t=0$ .

### **§ 1.5. Математическая модель для составной конструкции на амортизированном фундаменте**

Строительные конструкции, как правило, устанавливаются на соответствующем фундаменте – фундаментной плите. В зависимости от эксплуатационных требований фундаментные плиты могут быть либо жестко связаны с грунтом, либо через некоторую систему амортизирующих элементов (АЭ) [2,5,62,66,92]. Амортизированные строительные конструкции широко применяются в сейсмоопасных районах для снижения перегрузок, вызванных дей-

ствием сейсмических волн. На рис. 1.18-1.20 показаны варианты конструктивных исполнений некоторых АЭ [62,91].

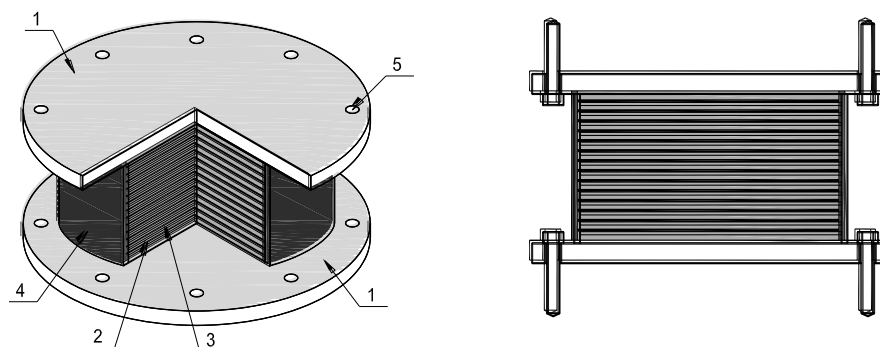


Рис. 1.18. – Эластомерная (резинометаллическая) сейсмоизолирующая опора:

1 – опорные пластины, закрепляемые к субструктуре и суперструктуре;  
 2 – листы резины; 3 – стальные пластины, расположенные между листами резины; 4 – резиновая оболочка, защищающая внутренние слои резины и металла; 5 – отверстия под анкерные болты, необходимые для закрепления опоры к субструктуре и суперструктуре

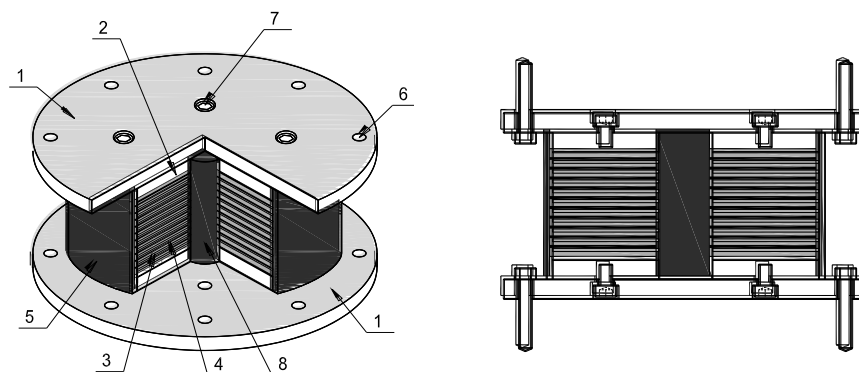


Рис. 1.19. Эластомерная (резинометаллическая) сейсмоизолирующая опора:

со свинцовым сердечником: 1 – опорные пластины, закрепляемые к субструктуре и суперструктуре; 2 – фланцевые стальные пластины;  
 3 – стальные пластины, расположенные между пластинами резины;  
 4 – пластины резины; 5 – резиновая оболочка, защищающая внутренние слои резины и металла; 6 – отверстия под анкерные болты, необходимые для закрепления опоры к субструктуре и суперструктуре; 7 – отверстия под шпонки; 8 – свинцовый сердечник

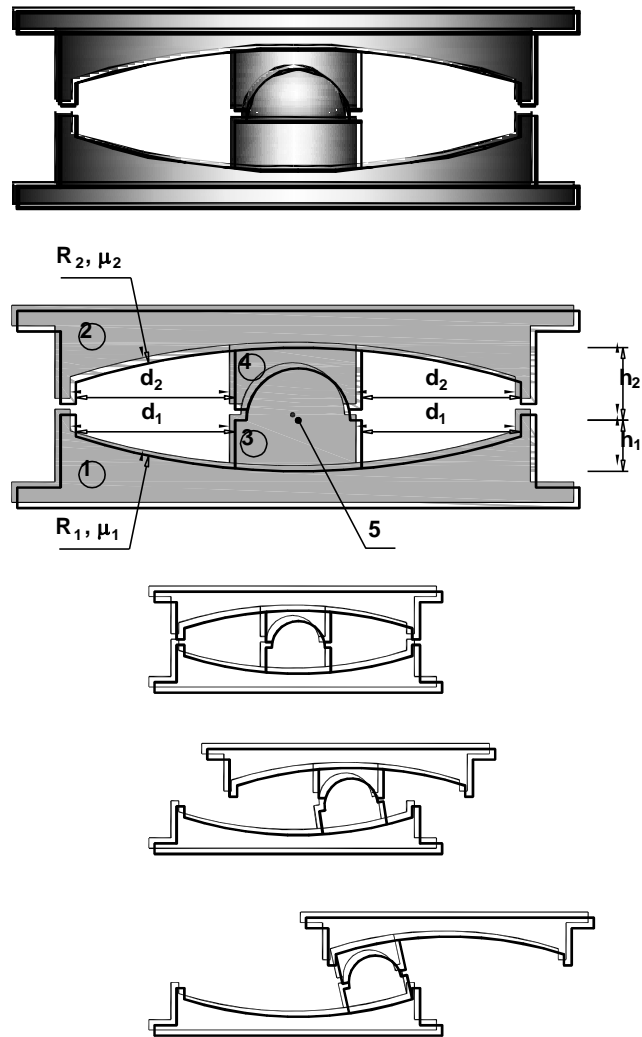


Рис. 1.20. Общий вид и схема поведения двухмятниковой опоры:  
 1 – нижняя стальная плита со сферической вогнутой поверхностью;  
 2 – верхняя стальная плита со сферической вогнутой поверхностью;  
 3 – верхний ползун со сферической вогнутой поверхностью; 4 – нижний ползун со сферической выпуклой поверхностью; 5 – точка поворота

В настоящее время для снижения сейсмических воздействий на здания и сооружения применяются различные системы сейсмоизоляции. Использование вязко-упругих систем позволяет путем подбора упругих и вязких характеристик избежать опасного сочетания спектров сейсмического воздействия и собственных частот колебаний конструкции, а также обеспечивает поглощение значительной части энергии воздействия, передаваемой на сооружение. Кроме того, демпферы вязкого трения практически не повышают общую жесткость системы. Варианты конструктивных исполнений некоторых вязко-упругих



амортизирующих систем (АС), состоящих из упругих элементов, работающих на растяжение-сжатие и сдвиг (стальные витые пружины), и демпферов вязкого трения, представлены на рис. 1.21 [72,99].

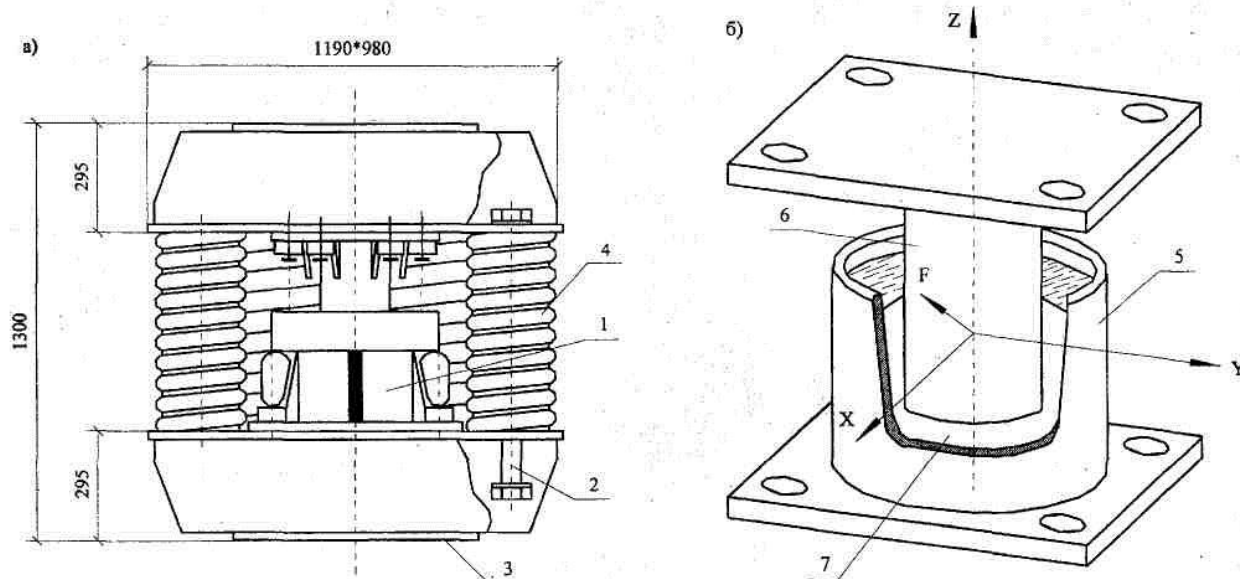


Рис. 1.21. Конструктивная схема пружинного виброизолятора системы GERB (а) и вязкого демпфера VES (б) (ФРГ):  
 1- поршневой вязкий демпфер VES; 2 – болт; 3 – опорная плита;  
 4 – пружина; 5 – корпус; 6 - поршень; 7 – вязкая жидкость

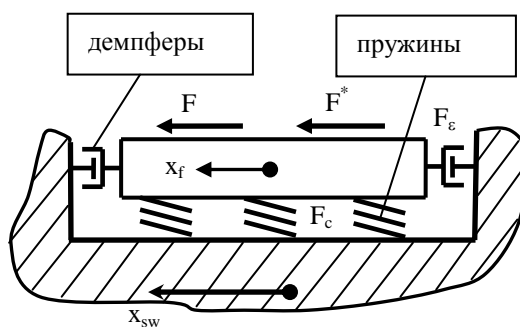


Рис. 1.22

Математическая модель для рамно-стержневой конструкции на амортизированной фундаментной плите формулируется аналогично [102,103]. Система «сооружение - фундаментная плита» рассматривается как составная конструкция с учетом их совместной работы. На рис. 1.22 показана амортизиро-

ванная фундаментная плита, установленная на упругих элементах в сочетании с демпферами вязкого трения, работающими независимо друг от друга в двух направлениях. Не теряя общности, ограничимся только случаем действия горизонтальной компоненты сейсмической волны  $x_{sw}$ . Тогда, предполагая, что движение фундаментной плиты характеризуется только перемещением  $x_f$  как жесткого целого вдоль горизонтальной оси, уравнение движения недеформируемой фундаментной плиты можно представить в виде (рис. 1.22)

$$m_f \ddot{x}_f + F_c + F_\varepsilon - (F + F^*) = 0, \quad (1.58)$$

где  $m_f$  - масса плиты,  $F^*$  - заданная нагрузка на плиту,  $F$  - реакция от опорных элементов сооружения,  $F_c$  и  $F_\varepsilon$  - упругая и вязкая составляющая реакции АС. В общем случае  $F^* = F^*(t)$ , в частном:  $F^* = \text{const}$ . В соответствии с принятым правилом знаков (рис. 1.12, 1.22)

$$F = \sum_{m=1}^M Q_{xx}^{(m)}; \quad F_c = c_z (x_f - x_{sw}); \quad F_\varepsilon = \varepsilon_v \dot{x}_f, \quad (1.59)$$

где  $M$  – число опорных элементов, связанных с фундаментной плитой,  $c_z$  и  $\varepsilon_v$  - интегральные значения упругой и вязкой компонент АС,  $x_{sw} = x_{sw}(t)$  - заданный закон перемещения основания, определяемый параметрами динамического воздействия, в частности – сейсмической волны. В опорных точках конструкции реализуются кинематические граничные условия типа (1.51), которые с учетом только горизонтального перемещения фундаментной плиты формулируются как

$$u_m = 0; \quad w_m = x_f; \quad \gamma_m = 0, \quad (1.60)$$

где  $m=1, 2, \dots, M$ . Для неамортизированного фундамента, жестко связанного с грунтом:  $w_m = x_f = x_{sw}$ .

Начальные условия при  $t=t_0=0$  с учетом предварительного статического нагружения имеют вид

$$x_f|_{t=0} = x_{f0}; \quad \dot{x}_f|_{t=0} = V_0, \quad (1.61)$$

где  $x_{f0}$  - перемещение фундаментной плиты в результате предварительного статического деформирования составной конструкции под действием собственно-

го веса и заданных нагрузок,  $V_0$  - заданное начальное значение скорости, обусловленное тем или иным видом динамического воздействия на фундамент. В частном случае:  $V_0=0$ .

Аналогичная модель для конструкции на амортизированном фундаменте может быть построена и для случая действия вертикальной составляющей сейсмической волны, а также совместного действия как вертикальной, так и горизонтальной компонент [102-104].

**ГЛАВА II. Построение дискретного аналога исходной  
интегро-дифференциальной нелинейной начально-краевой задачи  
на основе вариационно-разностного метода**

**§ 2.1. Основные этапы вычислительного эксперимента в прикладных  
задачах механики деформируемого твердого тела**

Разрешающая система исходных нелинейных дифференциальных уравнений теории Тимошенко, используемая для описания процессов деформирования составных каркасных конструкций при статических и динамических воздействиях, в рамках плоской задачи имеет шестой порядок при соответствующих граничных условиях, описывающих различные варианты сопряжения краев балочных и панельных элементов между собой. Поскольку аналитическое решение этих уравнений удастся получить только для ряда частных случаев, то в настоящее время для теоретического исследования процессов нелинейного деформирования составных конструкций широко используются методы математического моделирования с проведением на их основе многопараметрического вычислительного эксперимента (ВЭ) [61,89].

Вычислительный эксперимент включает в себя несколько этапов. На первом этапе разрабатывается физико-математическая модель конструкции. При построении физической модели учитывается, какие параметры конструкции являются определяющими в данном исследовании, а какими можно пренебречь. Физическая модель описывается с помощью математической модели - системы дифференциальных или интегральных уравнений, которые обычно выражают законы сохранения основных физических величин. Первый этап вычислительного эксперимента был реализован в предыдущей главе настоящей диссертации.

На втором этапе ВЭ путем перехода от функций непрерывных аргументов - пространственной и временной координат - к их дискретным аналогам разрабатывается дискретная модель исходной начально-краевой задачи с соот-

ветствующими шагами по пространственным и временной координатам, а также оптимальный вычислительный алгоритм, основанный на адаптации того или иного численного метода к особенностям дискретизированных уравнений и допускающий его практическую реализацию в виде пакетов прикладных программ на ЭВМ. Вычислительный алгоритм должен обеспечивать решение задачи с заданной точностью  $\delta > 0$  за конечное число действий  $n(\delta)$ . Разработанная физико-математическая модель, сформулированная в функциях от непрерывных координат, сводится к конечномерной, что связано с необходимостью преобразования дифференциальной задачи к чисто алгебраической форме, обеспечивающей возможность реализации решения на ЭВМ. Это достигается путем построения соответствующей разностной схемы (РС). При построении РС осуществляется дискретизация исходной континуальной задачи, что позволяет перейти от бесконечного множества чисел, представляющих функции непрерывных аргументов, к конечному множеству параметров как функциям дискретного аргумента. В механике деформируемого твердого тела (МДТТ) как при расчете машиностроительных, так и строительных конструкций для построения разностных схем наиболее широко используется метод конечных элементов (МКЭ) и метод конечных разностей (МКР) [7,20,21,88].

Третий и четвертый этапы заключаются в программировании вычислительного алгоритма и проведении расчетов на ЭВМ. Пятый этап - это анализ полученных численных результатов и возможное последующее уточнение физико-математической модели конструкции.

Вычислительный эксперимент, затраты на проведение которого существенно меньше затрат на натурный физический эксперимент, позволяет еще на стадии проектирования проводить оптимизацию конструкций по различным параметрам, что особенно важно для дорогостоящих крупногабаритных строительных конструкций. Кроме того, во многих случаях бывает невозможно при помощи экспериментального оборудования воспроизвести реальные условия работы составных конструкций при различных вариантах статического и динамического нагружения.

Метод конечных элементов представляет собой один из видов вариационно-разностных методов. В МКЭ аппроксимируется само решение задачи при помощи базисных функций. Дискретизация МКЭ начинается с разбиения конструкции с помощью некоторой сетки на неперекрывающиеся подобласти конечных размеров - конечные элементы (КЭ), взаимосвязанные между собой в узловых точках. Выбор формы и размеров КЭ зависит от геометрических и структурных особенностей оболочечной конструкции, при этом используемая конечно-элементная сетка должна обеспечивать простоту формы КЭ, возможно меньшую размерность и требуемую точность расчета. Точность решения задачи МКЭ в пределах каждого КЭ и, следовательно, по всей конструкции зависит от числа степеней свободы конечного элемента, равного произведению числа узловых точек на число неизвестных в каждой из точек конечно-элементной схемы. Повысить точность решения можно либо увеличением числа КЭ, либо увеличением числа узловых точек. При расчете конструкций, обладающих большими размерами и сложной геометрией, используется метод суперэлементов.

В МКР (методе сеток) область непрерывного изменения аргументов исходной континуальной задачи заменяется дискретным множеством точек, называемым сеткой или сеточной областью и наложенным определенным образом на расчетную область. Выбор типа сетки - равномерная, неравномерная, косоугольная, ортогональная простая, скрещивающаяся и т.д. - определяется спецификой решаемой задачи. Аппроксимация на сетке исходной краевой задачи приводит к системе разностных (сеточных) уравнений. Разностные аналоги уравнений равновесия (движения) элемента конструкции получаются из условия минимума разностного аналога соответствующего функционала, из условия удовлетворения сеточных функций интегральному тождеству и т.д. [88].

Как МКЭ, так и МКР обладают своими специфическими преимуществами и недостатками. Преимущества МКЭ связаны в основном с меньшей, чем в МКР, чувствительностью к форме внешней или внутренней границы элемента

конструкции, что делает МКЭ более предпочтительным при расчете нерегулярных конструкций сложной формы. Эффективность МКР связана с использованием простейших формул численного дифференцирования, а также минимального количества узлов численного интегрирования при аппроксимации соответствующих функционалов в вариационных уравнениях. В настоящей работе для дискретизации составных конструкций каркасного типа используется вариационно-разностный метод (ВРМ) в варианте метода перемещений в форме МКР.

Применение МКЭ или МКР для решения прикладных задач МДТТ приводит к системе алгебраических уравнений высокого порядка вида

$$AU - B = 0, \quad (2.1)$$

где  $U$  - искомый вектор обобщенных перемещений. Поскольку использование прямых (точных) методов для решения системы (2.1) в задачах МДТТ связано со значительными трудностями математического характера и имеет весьма ограниченную область практического приложения, то обычно используются итерационные методы, полученные на основе различных явных и неявных разностных схем. В итерационных методах решение системы (2.1) находится как предел последовательных приближений  $U^{(n)}$ :  $U^{(n)} \rightarrow U$  при  $n \rightarrow \infty$ ;  $n$  - номер приближения (итерации). Поскольку за конечное число итераций этот предел не достигается, то итерационный процесс продолжается до выполнения одного или нескольких условий вида

$$|U^{(n)} - U^{(n+1)}| < \Delta U; \quad (2.2)$$

$$\left| \frac{U^{(n)} - U^{(n+1)}}{U^{(n+1)}} \right| < \delta(U); \quad (2.3)$$

$$|AU^{(n)} - B| < \Delta R, \quad (2.4)$$

где  $\Delta U, \delta(U), \Delta R$  - заданные абсолютная, относительная погрешность и невязка уравнений (2.1). Эффективность различных численных методов обычно оцени-

вается по числу итераций  $n(\delta)$ , необходимых для удовлетворения условий (2.2)-(2.4), а также по затратам машинного времени и памяти ЭВМ.

Недостатки явных схем связаны, в основном, с зависимостью числа итераций  $n(\delta)$  от числа неизвестных  $K$ , т.к. при сгущении сетки ограничения, налагаемые критерием устойчивости, приводят к уменьшению шага по времени. Численным методам, построенным на неявных схемах, указанные недостатки не характерны, и сходимость достигается за относительно небольшое число итераций. Однако значительные трудности практической реализации вычислительных алгоритмов для сложных, нелинейных задач с разрывами полей параметров НДС существенно ограничивают область применения неявных схем [19,20].

Практическая реализация вычислительных алгоритмов, построенных на явных схемах, не вызывает таких затруднений даже для сложных, нелинейных задач [19,30]. В связи с этим для решения сеточных аналогов дифференциальных уравнений, описывающих нелинейное деформирование составных конструкций каркасного типа при различных вариантах статического и динамического нагружения, в диссертации разрабатываются эффективные и экономичные численные методы, построенные на основе явных разностных схем.

## **§ 2.2. Построение разностной схемы при расчете составных конструкций**

При численном решении нелинейной начально-краевой задачи для дискретизации по пространственной  $x$  ( $\alpha$ ) и временной  $t$  координате используется метод конечных разностей [7,88]. Для каждого элемента составной конструкции в области непрерывного изменения аргумента  $x$  (для прямолинейного элемента:  $0 \leq x \leq l$ ) и  $\alpha$  (для криволинейного элемента:  $0 \leq \alpha \leq \Lambda$ , рис. 1.3) вводится основная сетка с шагом  $\Delta x = \text{const}$  ( $\lambda_x = \text{const}$ ), узлы которой имеют целочисленные индексы  $i$ , а также вспомогательная сетка с дробными индексами  $(i \pm 1/2)$ , узлы которой лежат посередине между узлами основной (рис. 2.1).



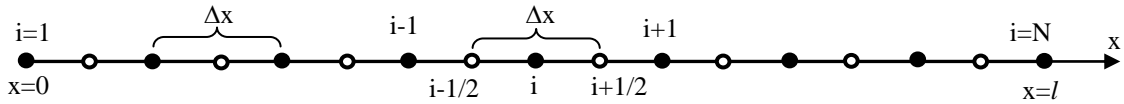


Рис. 2.1

Шаги сетки  $\Delta x$  и  $\lambda_x$  для прямолинейного и криволинейного элемента определяются как

$$\Delta x = \frac{l}{N-1}; \quad \lambda_x = \frac{\Lambda}{N-1}, \quad (2.5)$$

где  $N$  - число точек дискретизации:  $1 \leq i \leq N$ . В узлах основной сетки функциям обобщенных перемещений  $u_k(x)$ , скоростей  $\dot{u}_k(x)$  и нагрузок  $q_k(x)$  сопоставляются сеточные функции  $u_k(i)$ ,  $\dot{u}_k(i)$  и  $q_k(i)$ . С узлами вспомогательной сетки сопоставляются сеточные функции параметров НДС. Сеточные функции физико-механических характеристик элемента конструкции и нагрузок вводятся в соответствующих точках основной и вспомогательной сеток.

При использовании МКР исходные интегро-дифференциальные уравнения и граничные условия аппроксимируются разностными уравнениями, решение которых зависит от шагов сетки как от параметров. Точность аппроксимации может быть повышена либо увеличением числа точек дискретизации, либо аппроксимацией разностными операторами более высокого порядка точности. Использование аппроксимаций высокого порядка приводит к увеличению числа узлов при составлении разностного шаблона и усложнению структуры РС.

В диссертации дифференциальные операторы, входящие в соотношения (1.3)-(1.61), аппроксимируются разностными операторами второго порядка точности  $O(\Delta x^2)$  с кусочно-линейной интерполяцией функций внутри ячейки через значения  $u_k(i)$  в узлах основной сетки, что позволяет получать численные решения статических и динамических задач механики составных конструкций достаточной точности при сравнительно простых структурах разностных уравнений [102-104].

### 2.2.1. Конечно-разностная аппроксимация параметров деформированного состояния элементов составной конструкций

При конечно-разностной аппроксимации параметров деформированного состояния следует использовать следующее эмпирическое правило: *при построении РС не следует зря раскрывать скобки и пользоваться формулой дифференцирования произведения* [7]. Это позволяет избежать ненужного усложнения структуры конечно-разностных аналогов уравнений равновесия (1.41),(1.42) и движения (1.50) элементов составной конструкции. При численном решении сложных нелинейных задач в рамках соотношений теории Тимошенко наиболее эффективной является разностная схема, в которой при дискретизации функционала Лагранжа все параметры тангенциальной, изгибной и трансверсальной деформации аппроксимируются в точках вспомогательной сетки  $(i \pm 1/2)$  [30,32].

Искомые функции обобщенных перемещений аппроксимируются кусочно-линейными с интерполяцией функций внутри ячейки через значения сеточных функций  $u_k(i)$  в узлах основной сетки. Конечно-разностные аппроксимации параметров тангенциальной, изгибной и трансверсальной деформации (1.3),(1.4) для криволинейной и прямолинейной балки в точке вспомогательной сетки  $(i + 1/2)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{w_i - w_{i+1}}{\Delta x}; & E_{xx} &= \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \frac{1}{2}(\theta_x^2)_{i+1/2}; & K_{xx} &= \frac{\gamma_{i+1} - \gamma_i}{\Delta x}; \\ \theta_x &= \frac{1}{(R_x)_{i+1/2}} \frac{w_i - w_{i+1}}{\lambda_x} + (k_x)_{i+1/2} \frac{u_i + u_{i+1}}{2}; \\ E_{xx} &= \frac{1}{(R_x)_{i+1/2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{\lambda_x} + (k_x)_{i+1/2} \frac{w_i + w_{i+1}}{2} + \frac{1}{2}(\theta_x^2)_{i+1/2}; & (2.6) \\ K_{xx} &= \frac{1}{(R_x)_{i+1/2}} \frac{\gamma_{i+1} - \gamma_i}{\lambda_x}; \\ E_{xz} &= \frac{\gamma_i + \gamma_{i+1}}{2} - (\theta_x)_{i+1/2}. \end{aligned}$$

Конечно-разностные аппроксимации для компонент деформации в точках вспомогательной сетки  $(i - 1/2)$  легко получаются из (2.6) круговой перестановкой индексов. Поскольку для аппроксимации дифференциальных операторов в (1.3),(1.4) использовались центральные конечные разности с интерполяцией сеточных функций обобщенных перемещений  $u_k(i)$  из узлов основной сетки в соответствующие узлы вспомогательной, то формулы (2.6) аппроксимируют исходные дифференциальные зависимости (1.3),(1.4) со вторым порядком точности  $O(\Delta x^2)$  [7,88].

### 2.2.2. Конечно-разностная аппроксимация параметров напряженного состояния элементов составной конструкции при решении упруго-пластических задач

При аппроксимации параметров напряженного состояния балочного элемента составной конструкции нормальные и касательные напряжения  $\sigma_{xx}, \tau_{xz}$ , а также силовые факторы  $T_{xx}, Q_{xz}, M_{xx}$  - аппроксимируются в тех же точках вспомогательной сетки  $(i \pm 1/2)$ , что и соответствующие параметры деформированного состояния.

При численном решении физически нелинейных задач для определения состояния армирующих элементов (упругое, пластическое, нагрузка, разгрузка) вводятся сеточные функции интенсивности деформаций (1.29) для нижнего  $(e_i)_{a1}(i \pm 1/2)$  и верхнего  $(e_i)_{a2}(i \pm 1/2)$  слоя арматуры при  $z=z_1$  и  $z=z_2$  соответственно (рис. 1.11, 2.2). Поскольку разностная схема строится в форме метода перемещений, то условие текучести Мизеса для армирующих элементов формулируется в виде  $(e_i)_{am}(i \pm 1/2) \geq \varepsilon_T$  ( $m=1,2$ ). При вычислении напряжений в бетоне железобетонный элемент разбивается на заданное число  $L$  слоев по толщине (рис. 2.2). Толщина каждого слоя равна  $\Delta h_b = h_k / L$ , где  $h_k$  - толщина  $k$ -го элемента составной конструкции. Сеточные функции деформаций и напряжений в бетоне (1.30) соотносятся с серединой  $l$ -го слоя;  $l$  - индекс слоя:  $l=1,2, \dots, L$  (рис. 2.2). Как нормальные, так и касательные напряжения в бетоне вычисля-

ются в середине слоя в соответствии с соотношениями (1.3)-(1.6),(1.30) и полагаются постоянными в пределах толщины слоя. Если нормальные напряжения в  $l$ -ом слое бетона с координатой  $z=z_l$  превышают  $(\sigma_b^z)_l \geq R_{bt}$ , то полагается, что в слое рассматриваемого поперечного сечения балки возникла трещина. В случае закрытия трещины, что определяется по смене знака сеточных функций деформации и напряжений в  $l$ -ом слое с «плюса» (растяжение) на «минус» (сжатие), то полагается, что данный слой бетона полностью включился в работу сечения.

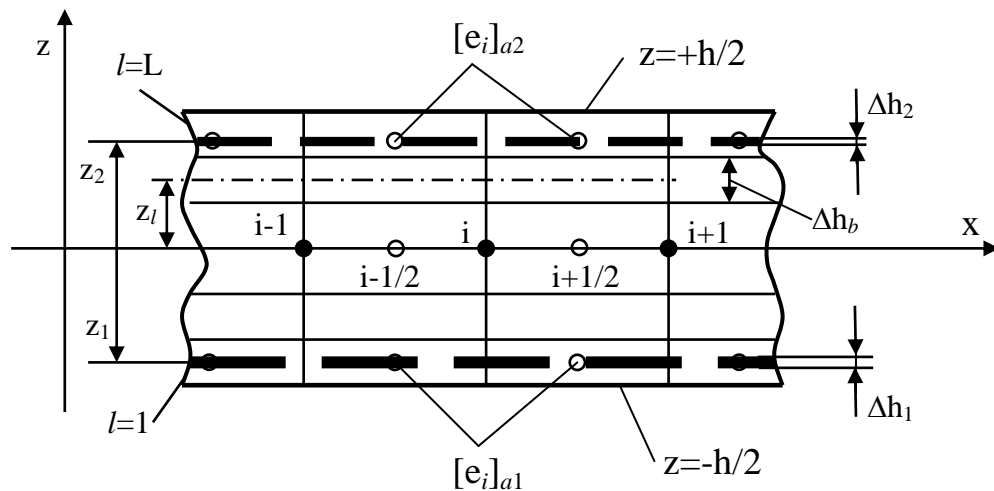


Рис. 2.2

Сеточные функции усилий и моментов в поперечном сечении  $k$ -го элемента железобетонной составной конструкции определяются в соответствии с (1.31) численным интегрированием напряжений в арматуре и бетоне по следующим формулам

$$T_{xx}(i+1/2) = b \cdot \left( \sigma_{a1} \cdot \Delta h_1 + \sigma_{a2} \cdot \Delta h_1 + \sum_{l=1}^L (\sigma_b^z)_l \cdot \Delta h_b \right)_{i+1/2}; \quad (2.7)$$

$$M_{xx}(i+1/2) = b \cdot \left( \sigma_{a1} \cdot z_1 \cdot \Delta h_1 + \sigma_{a2} \cdot z_2 \cdot \Delta h_1 + \sum_{l=1}^L (\sigma_b^z \cdot z)_l \cdot \Delta h_b \right)_{i+1/2};$$

$$Q_{xz}(i+1/2) = k^2 b \cdot \left( \tau_{a1} \cdot \Delta h_1 + \tau_{a2} \cdot \Delta h_1 + \sum_{l=1}^L (\tau_b^z)_l \cdot \Delta h_b \right)_{i+1/2},$$

где  $z_l$  - координата середины  $l$ -го слоя (рис. 2.2).

### **§ 2.3. Построение конечно-разностных аналогов уравнений равновесия и движения на основе консервативных разностных схем**

Дифференциальные уравнения равновесия элементов составной конструкции являются следствием интегральных законов сохранения (Гл. 1). Конечно-разностные аналоги уравнений равновесия, построенные на сетке с помощью соответствующего разностного шаблона должны сохранять исходную дивергентную форму уравнений и выполнять сеточные аналоги законов сохранения. В МКР для построения сеточных аналогов уравнений равновесия и движения наиболее широко используются три основных метода: метод непосредственной разностной аппроксимации, интегро-интерполяционный метод и вариационно-разностный метод (ВРМ) [1,7,88]. При использовании метода разностной аппроксимации на сетке строится соответствующий разностный шаблон, на котором исходные дифференциальные уравнения аппроксимируются разностными с неопределенными коэффициентами, зависящими от узла и шагов сетки. Однако, область применения метода разностной аппроксимации ограничена достаточно простыми случаями для уравнений с гладкими коэффициентами на односвязных областях. Требованию сохранения свойства консервативности (дивергентности) на сетке удовлетворяют консервативные разностные схемы, позволяющие выделить из всех математически допустимых численных решений разностной задачи физически правильное обобщенное решение. В диссертации для получения конечно-разностных аналогов уравнений равновесия и движения используется вариационно-разностный метод.

Исходный функционал Лагранжа (1.38) записывается в конечно-разностной форме с заменой дифференциальных выражений для компонент деформации (1.3)-(1.6) конечно-разностными второго порядка аппроксимации (2.6). Операция интегрирования заменяется суммированием по ячейкам сетки. Вариационно-разностная схема получается при варьировании дискретизиро-

ванного функционала Лагранжа (1.38), который для расчетной области элемента составной конструкции  $0 \leq x \leq l$  ( $0 \leq \alpha \leq \Lambda$ ) можно представить в виде суммы

$$\mathcal{E}_\Sigma = \sum_i (\Pi_i - A_i), \quad (2.8)$$

где  $\Pi_i$  и  $A_i$  - потенциальная энергия деформации и работа внешних сил в сеточной области на элементе  $\Delta F_i = \Delta x$  ( $\Delta F_i = R_x \lambda_x$ ). В (2.8) суммирование осуществляется по тем узловым точкам разностной схемы (РС), в которых варьируются соответствующие обобщенные перемещения  $u_k(i)$ .

Потенциальная энергия деформации  $\Pi_i$  может быть представлена в виде суммы

$$\Pi_i = \Pi_i(E_{xx}) + \Pi_i(E_{xz}) + \Pi_i(K_{xx}), \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_i(E_{xx}) &= 0,5 \cdot [(T_{xx} E_{xx} \cdot b_{11}^* \Delta F)_{i-1/2} + (T_{xx} E_{xx} \cdot b_{22}^* \Delta F)_{i+1/2}]; \\ \Pi_i(E_{xz}) &= 0,5 \cdot [(Q_{xz} E_{xz} \cdot b_{11}^* \Delta F)_{i-1/2} + (Q_{xz} E_{xz} \cdot b_{22}^* \Delta F)_{i+1/2}]; \\ \Pi_i(K_{xx}) &= 0,5 \cdot [(M_{xx} K_{xx} \cdot b_{11}^* \Delta F)_{i-1/2} + (M_{xx} K_{xx} \cdot b_{22}^* \Delta F)_{i+1/2}]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Элементарная работа краевой и поверхностной нагрузки (1.40), (1.41) в дискретной форме  $A_i$  записывается в виде

$$\begin{aligned} A_i &= [(q_1 u + q_2 w + q_3 \gamma) \cdot c^* \Delta F]_i - \\ &- [d_1^* (T^* u + Q^* w + M^* \gamma)]_{i=1} + [d_2^* (T^{**} u + Q^{**} w + M^{**} \gamma)]_{i=N}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В формулах (2.10), (2.11)  $b_{11}^*, b_{22}^*, d_1^*, d_2^*, c^*$  - весовые коэффициенты, учитывающие размеры области интегрирования при отображении соответствующей части элемента на сеточную область (рис. 2.3).

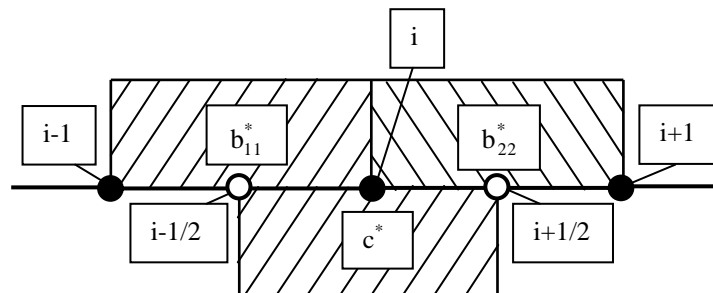


Рис. 2.3

Весовые коэффициенты  $d_1^*$  и  $d_2^*$  равны нулю при задании кинематических граничных условий на краях  $x=0$  ( $i=1$ ) и  $x=l$  ( $i=N$ ) соответственно (рис. 2.1), и равны единице - при задании граничных условий в силовой (естественной) форме. Значения коэффициентов в зависимости от области численного интегрирования лежат в диапазоне:  $0 < c^* \leq 1$ ;  $0 \leq b_{11}^* \leq 1$ ;  $0 \leq b_{22}^* \leq 1$  [43,88]. В регулярных узловых точках разностной сетки весовые коэффициенты равны единице.

Разностные аналоги уравнений равновесия (1.42), вытекающие из условий минимизации функционала (2.8)

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\Sigma}{\partial u_i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_\Sigma}{\partial w_i} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_\Sigma}{\partial \gamma_i} = 0, \quad (2.12)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{(b_{22}^* \cdot T_{xx})_{i+1/2} - (b_{11}^* \cdot T_{xx})_{i-1/2}}{h_x} + (c^* \cdot q_1)_i - d_1^* \cdot \frac{T^*}{h_x} + d_2^* \cdot \frac{T^{**}}{h_x} = 0; \\ & \frac{(b_{22}^* \cdot Q_{xx})_{i+1/2} - (b_{11}^* \cdot Q_{xx})_{i-1/2}}{h_x} + (c^* \cdot q_2)_i - d_1^* \cdot \frac{Q^*}{h_x} + d_2^* \cdot \frac{Q^{**}}{h_x} = 0; \quad (2.13) \\ & \frac{(b_{22}^* \cdot M_{xx})_{i+1/2} - (b_{11}^* \cdot M_{xx})_{i-1/2}}{h_x} - \frac{(b_{11}^* \cdot Q_{xz})_{i-1/2} + (b_{22}^* \cdot Q_{xz})_{i+1/2}}{2} + \\ & + (c^* \cdot q_3)_i - d_1^* \cdot \frac{M^*}{h_x} + d_2^* \cdot \frac{M^{**}}{h_x} = 0, \end{aligned}$$

где  $T^*, Q^*, M^*$  и  $T^{**}, Q^{**}, M^{**}$  - сеточные функции краевых нагрузок на краях  $x=0$  и  $x=l$  соответственно.

При дискретизации по временной координате  $t$  в области непрерывного изменения времени  $t \geq 0$  вводятся две равномерные сетки с постоянным шагом по времени  $\Delta t$ : основная сетка с целочисленными индексами  $n$  и слоями

$$t^{(n)} = \Delta t \cdot n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2.14)$$

а также вспомогательная сетка с дробными индексами  $(n \pm 1/2)$  и временными слоями  $t^{(n \pm 1/2)}$  (рис. 2.4).

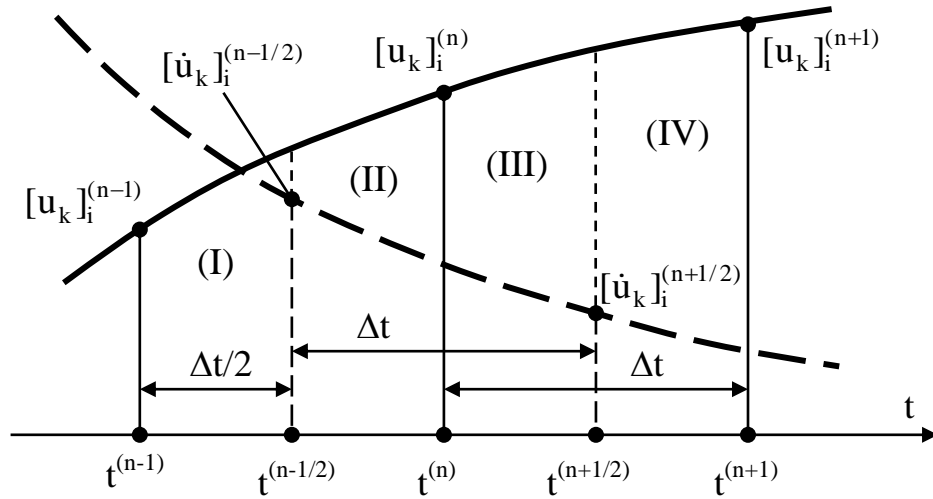


Рис. 2.4

Сеточные функции обобщенных перемещений  $u_k(i)$  соотносятся с узлами основной сетки, а сеточные функции скоростей  $\dot{u}_k(i)$  - с узлами вспомогательной. Использование скрещивающейся сетки позволяет аппроксимировать дифференциальные операторы для скоростей  $\dot{u}_k(x)$  разностными операторами второго порядка точности  $O(\Delta t^2)$  на шаге  $\Delta t$  (рис. 2.4)

$$[\dot{u}_k]_i^{(n-1/2)} = \frac{[u_k]_i^{(n)} - [u_k]_i^{(n-1)}}{\Delta t}; \quad [\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} = \frac{[u_k]_i^{(n+1)} - [u_k]_i^{(n)}}{\Delta t}. \quad (2.15)$$

Конечно-разностные аналоги уравнений движения (1.50) вытекают из вариационно-разностных уравнений, аналогичных (2.12)

$$\frac{\partial I_\Sigma}{\partial [u_k]_i^{(n)}} = 0, \quad (2.16)$$

где дискретная форма функционала  $I$  (1.46) представляется суммированием по сеточной области  $t^{(n)}$

$$I_\Sigma = \sum_n \{0,5[(f_2 K_\Sigma)^{(n-1/2)} + (f_3 K_\Sigma)^{(n+1/2)}] - (f^* \mathcal{E}_\Sigma)^{(n)}\} \Delta t, \quad (2.17)$$

и где  $\mathcal{E}_\Sigma^{(n)}$  - дискретизированный функционал Лагранжа (2.8), выраженный через значения сеточных функций обобщенных перемещений  $[u_k]_i^{(n)}$ , физико-механических характеристик и нагрузок на n-ом временном слое,  $f_1, f_2, f_3, f_4$  - весовые коэффициенты, используемые при численном интегрировании на вре-



менных подобластях (I),(II),(III),(IV) соответственно (рис. 2.4),  $f^*=(f_1+ f_2)/2$  - суммарный весовой коэффициент подобластей (II) и (III):  $0 \leq f_{1,2,3,4} \leq 1$ ;  $0 \leq f^* \leq 1$ . Кинетическая энергия  $K_\Sigma$  каждого элемента составной конструкции определяется в виде суммы

$$K_\Sigma = \sum_i \left\{ 0,5 \left[ \sum_{k=1}^3 (m_k \dot{u}_k^2)_i \right] \cdot c^* \Delta F_i \right\}. \quad (2.18)$$

После выполнения соответствующих преобразований в (2.16) конечно-разностные аналоги уравнений движения (1.50), аппроксимированные относительно узловой точки  $i$ , можно представить в операторной форме как

$$\{f^* [L_{\Delta x}(u_k; q_k)]\}_i^{(n)} = \frac{[f_{22}^* c^* m_k \dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} - [f_{11}^* c^* m_k \dot{u}_k]_i^{(n-1/2)}}{\Delta t}, \quad (2.19)$$

где через  $[L_{\Delta x}(u_k; q_k)]$  обозначены левые части разностных аналогов уравнений равновесия (2.13),  $f_{11}^*, f_{22}^*$  - весовые коэффициенты:  $f_{11}^*=(f_1+f_2)/2$ ,  $f_{22}^*=(f_3+f_4)/2$  [3,4]. Для регулярной в сеточной области  $t^{(n)}$  узловой точки с индексом  $n>0$ :  $f_{11}^*=f_{22}^*=f^*=1$ .

Уравнения (2.19) позволяют описать переходные процессы при изменении во времени не только нагрузок, но и физико-механических характеристик материалов, массовых характеристик и геометрических параметров элементов конструкций, что имеет существенное значение при расчете железобетонных каркасных конструкций с учетом процессов трещинообразования в бетоне и упруго-пластической работы арматуры.

Вариационно-разностная формулировка исходной начально-краевой задачи, описывающей процессы нелинейного деформирования составных конструкций каркасного типа при комбинированных видах воздействия, позволяет построить консервативные разностные схемы, обеспечивающих сходимость численных решений  $u_k(i)$  к точному  $u_k(x)$  при сгущении сетки [7,88].

## § 2.4. Конечно-разностная аппроксимация граничных и начальных условий при расчете составных конструкций

При конечно-разностной аппроксимации граничных (1.44),(1.45),(1.51)-(1.56) и начальных (1.57) условий также, как и при аппроксимации на сетке основных уравнений равновесия и движения, используются разностные операторы второго порядка точности [7,88].

### 2.4.1. Особенности конечно-разностной аппроксимации условий сопряжения элементов монолитных и сборных каркасных конструкций

При построении дискретных моделей для составных конструкций (рис. 1.16,1.17) полагается, что начальный ( $i=1$ ) и конечный ( $i=N$ ) узлы несущих горизонтальных элементов сопрягаются с соответствующими узлами основной сетки вертикальных элементов (рис. 2.5-2.8). Нерегулярными узловыми точками являются краевые точки типа С и Е для вертикальных элементов № 1 и № 5 (колонны), на которые в виде краевой нагрузки  $T^{**}, Q^{**}, M^{**}$  передается реакция от горизонтальных элементов № 2 и № 6 (балок).

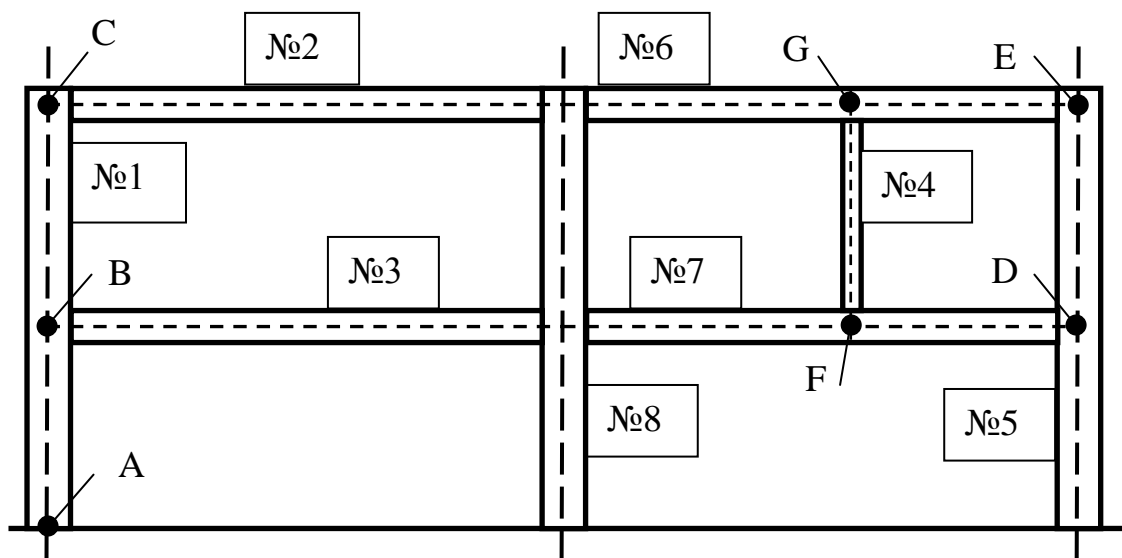


Рис. 2.5

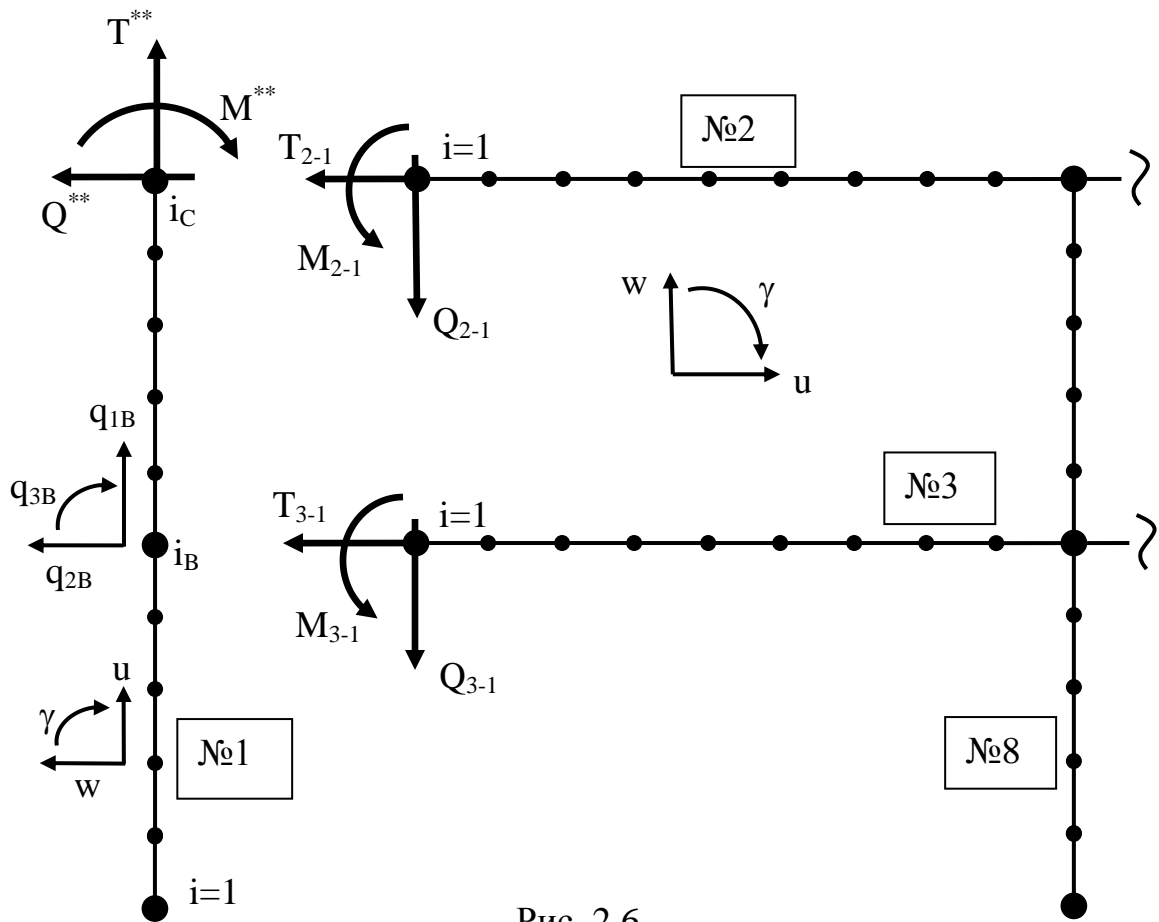


Рис. 2.6

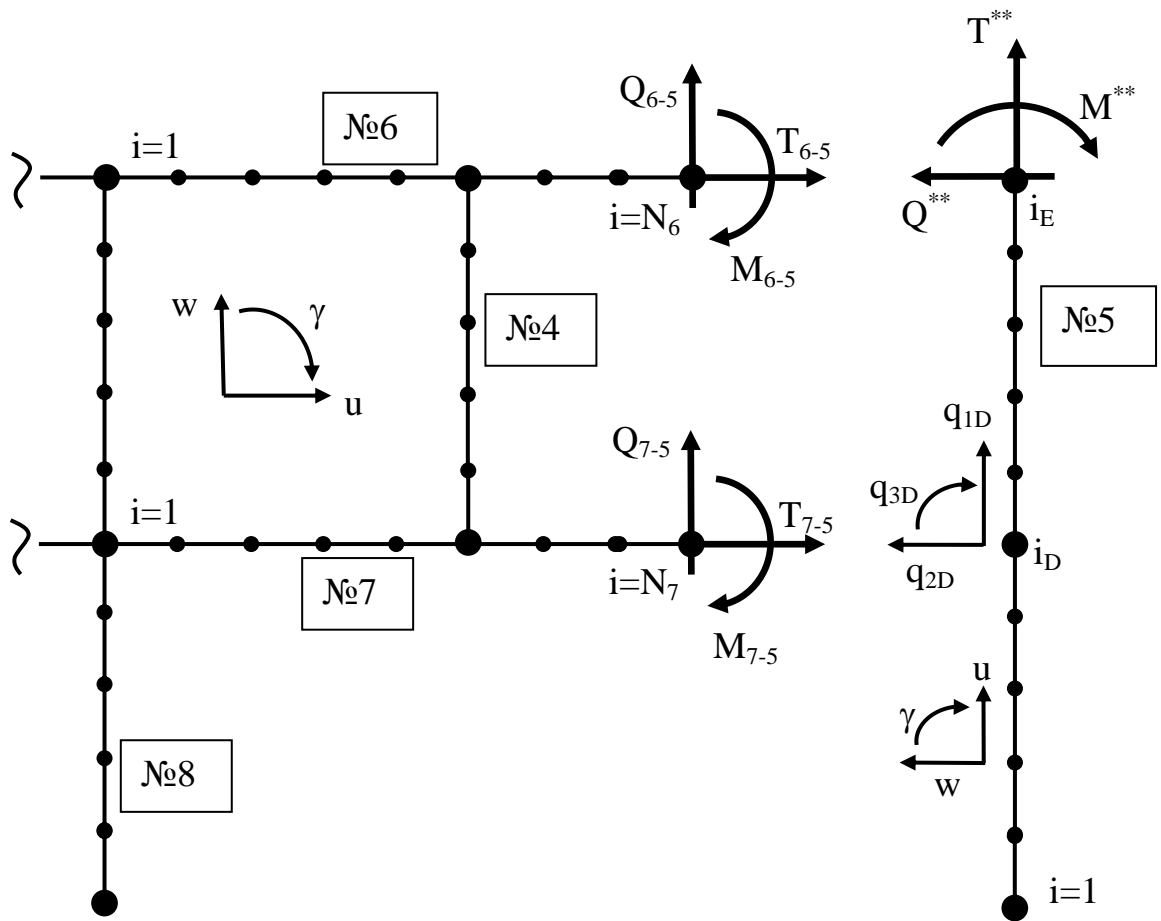


Рис. 2.7

Сеточные функции обобщенных перемещений и их скоростей в узловых точках  $i_C=N_1$  и  $i_E=N_5$  определяются из решения основных уравнений, аппроксимированных в этих узлах;  $N_1$  и  $N_5$  - число точек дискретизации на элементах № 1 и № 5 соответственно. Кинематические и силовые условия сопряжения элементов составной конструкции (1.51)-(1.56) аппроксимируются следующим образом:

- сопряжение элементов № 1, № 2 и № 3 в точках B и C (рис. 2.6)

$$\begin{aligned}
 u_{3,1} &= -w_{1,i_B}; & w_{3,1} &= u_{1,i_B}; & \gamma_{3,1} &= \gamma_{1,i_B}; \\
 q_{1B} &= \frac{Q_{3-1}}{\Delta x_1}; & q_{2B} &= -\frac{T_{3-1}}{\Delta x_1}; & q_{3B} &= \frac{M_{3-1}}{\Delta x_1}; \\
 u_{2,1} &= -w_{1,i_C}; & w_{2,1} &= u_{1,i_C}; & \gamma_{2,1} &= \gamma_{1,i_C}; \\
 T^{**} &= Q_{2-1}; & Q^{**} &= -T_{2-1}; & M^{**} &= M_{2-1};
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

- сопряжение элементов № 5, № 6 и № 7 в точках D и E (рис. 2.7)

$$\begin{aligned}
 u_{7,N_7} &= -w_{5,i_D}; & w_{7,N_7} &= u_{5,i_D}; & \gamma_{7,N_7} &= \gamma_{5,i_D}; \\
 q_{1D} &= -\frac{Q_{7-5}}{\Delta x_5}; & q_{2DB} &= \frac{T_{7-5}}{\Delta x_5}; & q_{3D} &= -\frac{M_{7-5}}{\Delta x_5}; \\
 u_{6,N_6} &= -w_{5,i_E}; & w_{6,N_6} &= u_{5,i_E}; & \gamma_{6,N_6} &= \gamma_{5,i_E}; \\
 T^{**} &= Q_{6-5}; & Q^{**} &= T_{6-5}; & M^{**} &= -M_{6-5}.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

В формулах (2.20),(2.21) двойной нижний индекс при сеточных функциях обобщенных перемещений  $u_{k,i}, w_{k,i}, \gamma_{k,i}$  используется для обозначения номера элемента (первый индекс k) и номера узловой точки, которой сопоставляется соответствующая сеточная функция (второй индекс i). Силовые факторы  $T_{k-n}, Q_{k-n}, M_{k-n}$ , передаваемые в качестве нагрузки с горизонтальных элементов на вертикальные, вычисляются в точках вспомогательной сетки  $i=1+1/2$  и  $i=N_k-1/2$  (рис. 2.6-2.8). Условия сопряжения (2.20),(2.21) сформулированы для случая монолитной конструкции (1.52),(1.54). Условия сопряжения элементов сборной конструкции (1.53),(1.55) аппроксимируются аналогично (2.20),(2.21).

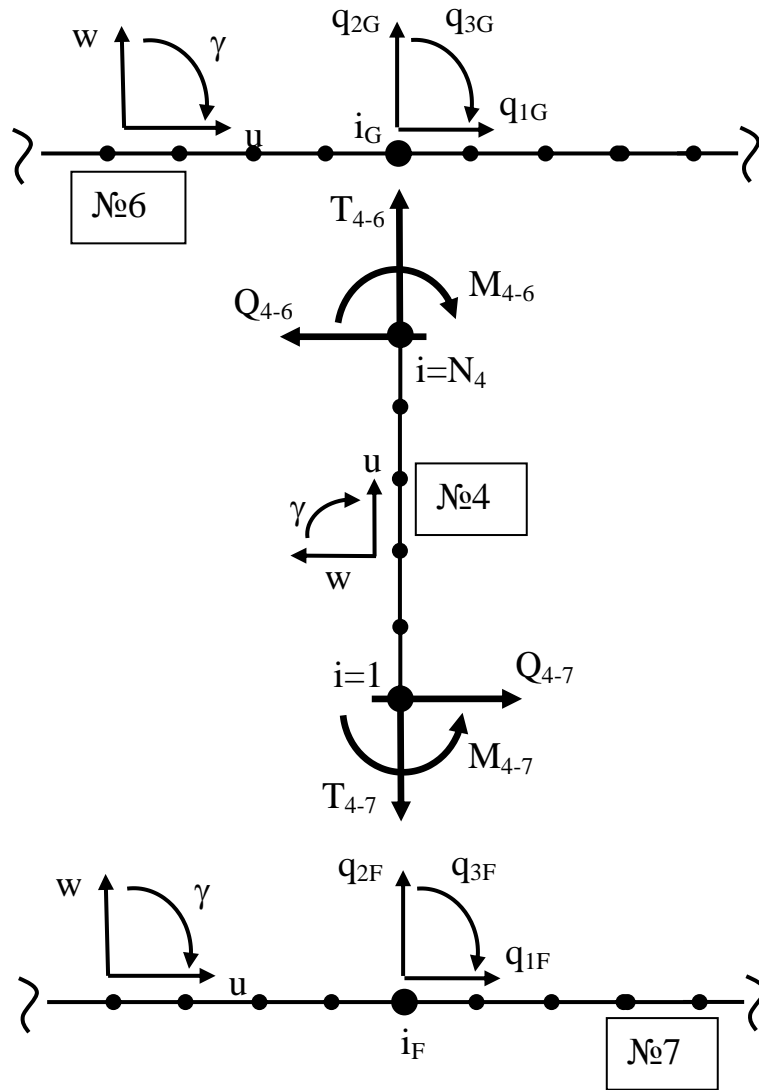


Рис. 2.8

Для случая, когда составная конструкция помимо несущих содержит самонесущие элементы типа перегородок (элемент № 4), условия сопряжения аппроксимируются следующим образом:

- сопряжение элементов № 4, № 6 и № 7 в точках F и G (рис. 2.8)

$$\begin{aligned}
 u_{4,1} &= w_{7,i_F}; & w_{4,1} &= -u_{7,i_F}; & \gamma_{4,1} &= \gamma_{7,i_F}; \\
 q_{1F} &= -\frac{Q_{4-7}}{\Delta x_7}; & q_{2F} &= \frac{T_{4-7}}{\Delta x_7}; & q_{3F} &= \frac{M_{4-7}}{\Delta x_7}; \\
 u_{4,N_4} &= w_{6,i_G}; & w_{4,N_4} &= -u_{6,i_G}; & \gamma_{4,N_4} &= \gamma_{6,i_G}; \\
 q_{1G} &= \frac{Q_{4-6}}{\Delta x_6}; & q_{2G} &= -\frac{T_{4-6}}{\Delta x_6}; & q_{3G} &= -\frac{M_{4-6}}{\Delta x_6}.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

В формулах (2.20)-(2.22) сеточные функции обобщенной перерезывающей силы  $Q_{k-n}$  вычисляются в соответствии с (1.43) в точках вспомогательной сетки ( $i \pm 1/2$ ) как

$$(Q_{k-n})_{i \pm 1/2} = [(Q_{xz} - T_{xx} \cdot \theta_x)_k]_{i \pm 1/2}. \quad (2.23)$$

Условия сопряжения несущих элементов № 2,3,6,7 и вертикального элемента № 8 (колонны), а также краевые условия (1.51) в точке контура А аппроксимируются аналогично (2.20)-(2.23).

#### 2.4.2. Конечно-разностная аппроксимация начальных условий

Конечно-разностная аппроксимация начальных условий (1.57) записывается в виде

$$u_k(i)|_{t=0} = [u_k]_i^{(0)}; \quad \dot{u}_k(i)|_{t=0} = [\dot{u}_k]_i^{(0)}, \quad (2.24)$$

где  $[u_k]_i^{(0)}, [\dot{u}_k]_i^{(0)}$  - заданные начальные значения сеточных функций обобщенных перемещений и их скоростей ( $k=1,2,3$ ). Поскольку в начальный момент времени  $t^{(0)}=0$  вариации обобщенных перемещений равны нулю, то начальный временной слой  $n=0$  полагается совпадающим с узлом основной сетки (рис. 2.9).

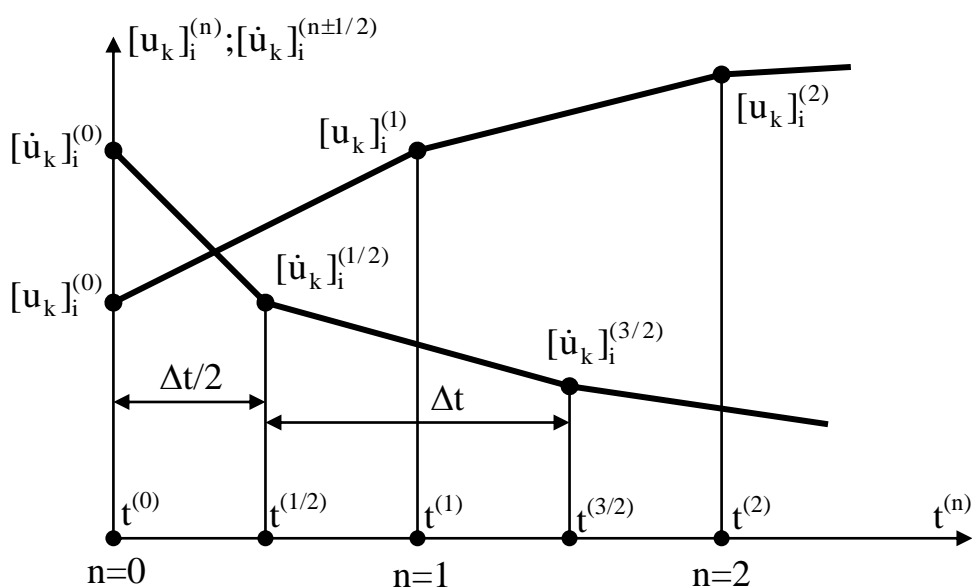


Рис. 2.9

Для начального (нерегулярного) слоя  $n=0$  весовые коэффициенты в (2.19) соответственно равны:  $f_{11}^*=0$ ;  $f_{22}^*=1$ ;  $f^*=0,5$ . Для определения сеточных функций  $[u_k]_i^{(n)}$  на временном слое  $n=1$  используется разложение в ряд Тейлора

$$[u_k]_i^{(1)} = [u_k]_i^{(0)} + \Delta t [\dot{u}_k]_i^{(0)} + \frac{\Delta t^2}{2} [\ddot{u}_k]_i^{(0)}, \quad (2.25)$$

где  $[\ddot{u}_k]_i^{(0)}$  - заданные начальные ускорения. Тогда сеточные функции обобщенных скоростей на временном слое  $t^{(1/2)}$ , определяются следующим образом

$$[\dot{u}_k]_i^{(1/2)} = [\dot{u}_k]_i^{(0)} + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{u}_k]_i^{(0)}. \quad (2.26)$$

## **§ 2.5. Конечно-разностная аппроксимация задачи для составной конструкции, установленной на амортизированной фундаментной плите**

### 2.5.1. Построение дискретной модели начально-краевой задачи для составной конструкции на амортизированном фундаменте

При конечно-разностной аппроксимации задачи о статическом и динамическом деформировании составной каркасной конструкции, установленной на фундаментной плите (1.58)-(1.61), предполагается, что опорные точки колонн, в которых реализуются граничные условия (1.60), соответствуют начальным узловым точкам разностных сеток с индексом  $i=1$  (рис. 2.5-2.8). Тогда конечно-разностные аппроксимации кинематических условий для вертикального элемента № 1 составной конструкции и фундаментной плиты (1.60) в опорной точке типа А запишутся аналогично (2.20),(2.21) как:

- сопряжение элемента № 1 и плиты в точке А (рис. 2.5-2.7)

$$u_{1A} = 0; \quad w_{1A} = x_f; \quad \gamma_{1A} = 0. \quad (2.27)$$

Реакция  $F$  от опорных элементов на фундаментную плиту (1.59) определяется в результате суммирования

$$F = \sum_{m=1}^M [Q_{xx}^{(m)}]_{i=1+1/2}, \quad (2.28)$$

где соответствии с (2.23) обобщенные поперечные силы  $Q_{xx}$  вычисляются в точках вспомогательной сетки  $i=1+1/2$ ,  $M$  – число опорных элементов, связанных с фундаментной плитой.

Начальные условия (1.61) аппроксимируются аналогично (2.24)-(2.26).

### 2.5.2. Аппроксимация параметров сейсмических волн

В настоящее время при исследовании процессов деформирования несущих элементов строительных конструкций при действии сейсмических волн в качестве параметров сейсмического воздействия используются инструментальные записи акселерограмм, велосиграмм и сейсмограмм, характеризующих соответственно зависимости от времени ускорений  $a=a(t)$ , скоростей  $v=v(t)$  и перемещений  $x=x(t)$  в волне. При этом для описания параметров сейсмических воздействий используется две группы характеристик: магнитуда  $M$ , измеряемая по шкале Рихтера и характеризующая силу землетрясения в очаге, и вторая группа, которая определяется шкалой сейсмической активности в баллах и характеризует явления на поверхности земли в эпицентре [51,63,64,66].

Таблица 2.1

Параметры	Расчетная сейсмичность, баллы			
	6	7	8	9
$x_0$ , [мм]	1,5÷3	3,1÷6	6,1÷12	12,1÷24
$v_0$ , [см/с]	3÷6	6,1÷12	12,1÷24	24,1÷48
$a_0$ , [см/с <sup>2</sup> ]	30÷60	61÷120	121÷240	241÷480

В Табл. 2.1 приведены характерные значения параметров сейсмических волн в зависимости от расчетной сейсмичности в баллах, где:  $x_0$  – максимальные смещения маятника одномаятникового сейсмометра СБМ или маятника с периодом 0,25 с в многомаятниковых приборах АИС или ИГИС;  $v_0$  – максимальные скорости колебаний грунта;  $a_0$  – максимальные ускорения грунта при



периоде 0,1 с и более [64,72]. На рис. 2.10 показаны характерные записи сейсмических воздействий, где  $\ddot{x}=a(t)$  (рис. 2.10а);  $\dot{x}=v(t)$  (рис. 2.10б);  $x=x(t)$  (рис. 2.10в).

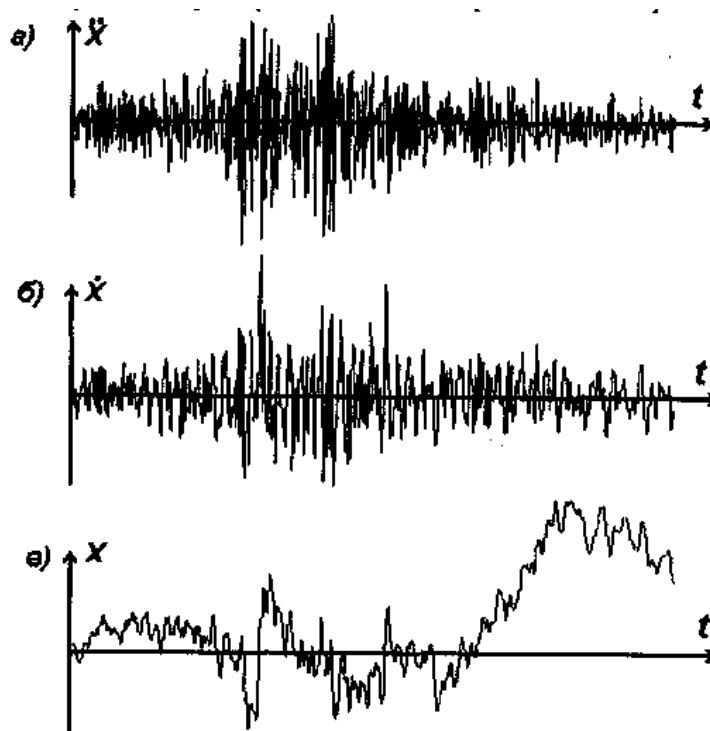


Рис. 2.10

При действии сейсмических волн возникают колебательные движения основания сооружения, приводящие к появлению инерционных сил и моментов в элементах строительных конструкций, которые, собственно, и принято называть сейсмическими нагрузками [94,95]. Таким образом, расчет составных каркасных конструкций на сейсмические воздействия определяется, наряду с учетом других видов статических и динамических нагрузок, заданием соответствующих неоднородных кинематических граничных условий в (1.51),(2.27) в опорных точках, которые могут быть приняты в виде некоторой функции  $x_{sw}=x_{sw}(t)$ , которая определяется параметрами сейсмической волны. Поскольку при задании неоднородных кинематических граничных условий в основном используются параметры обобщенных перемещений, то при численном исследовании в качестве функции  $x_{sw}(t)$  может быть использована соответствующая аппроксимация инструментальной записи сейсмограммы землетрясения. Ана-

лиз типичных сейсмограмм [62-65,91] с учетом их вероятностного характера показал, что во многих случаях инструментальная сейсмограмма может быть аппроксимирована набором тригонометрических функций, заданных на соответствующих временных интервалах  $\Delta\tau_j$  ( $j=1,2,3,\dots,k_{sw}$ ).

Таким образом, при моделировании сейсмического воздействия посредством аппроксимации инструментальной сейсмограммы набором тригонометрических функций, заданных на соответствующих временных интервалах  $\Delta\tau_j$  ( $j=1,2,3,\dots$ ), функцию  $x_{sw}$  можно представить как (рис. 2.11)

$$x_{sw} = \begin{cases} \pm X_j \sin \pi \frac{t - t_{j-1}}{\Delta\tau_j} & - \text{для } t_{j-1} \leq t \leq t_j; \\ 0 & - \text{для } t \geq t_{sw}, \end{cases} \quad (2.29)$$

где  $t_0=0$ ,  $t_{sw}=\max(t_j)$ ,  $X_j$ ,  $\Delta\tau_j=t_j-t_{j-1}$  - амплитудно-частотные характеристики аппроксимирующих функций, определяемые в соответствии с заданными параметрами инструментальной сейсмограммы [102-104].

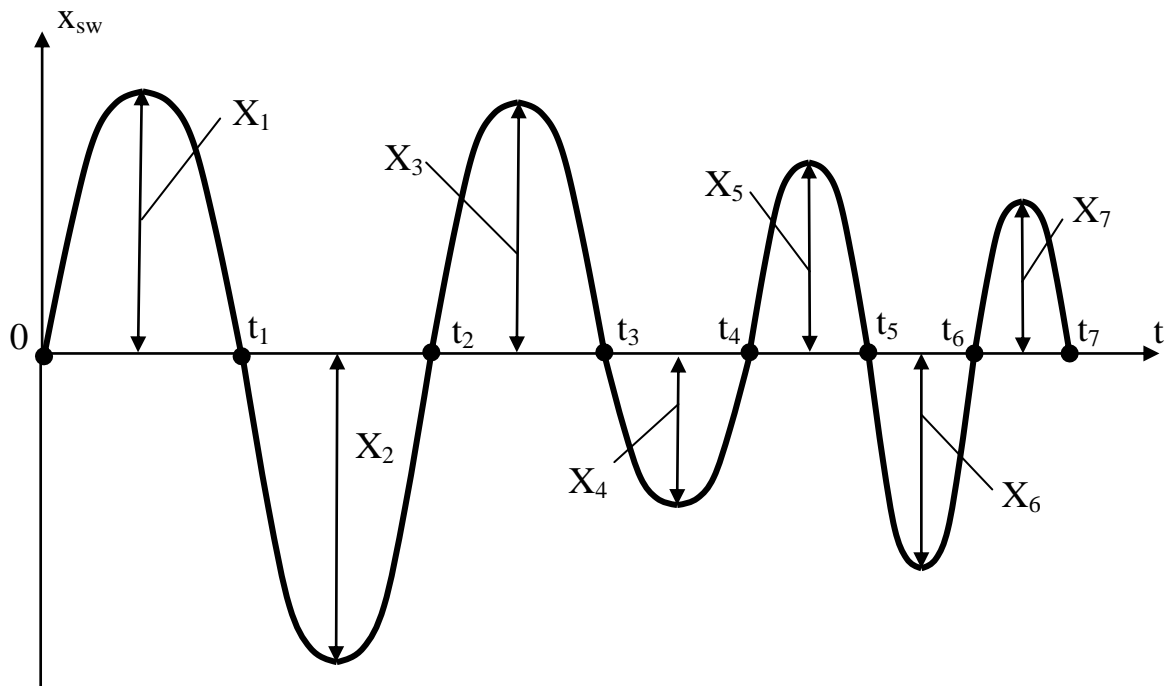


Рис. 2.11

В общем случае, когда инструментальная сейсмограмма характеризуется функцией  $x_{sw}$ , которая имеет сложный, высоко градиентный вид и не может быть аппроксимирована набором тригонометрических функций (2.29), для аппроксимации сейсмического воздействия может быть использована процедура сплайн-интерполяции, которая позволяет восстановить не только значения самой функции, но и ее первой и второй производной [7].

Кубическая сплайн-интерполяция, интерполирующая функцию  $y(x)$  в области  $x_0 \leq x \leq x_n$ , представляет собой набор полиномов третьей степени, которые для каждого  $j$ -го участка разбиения записываются в виде

$$y(x) = y_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad (2.30)$$

где  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ ,  $j=0,1,2,\dots,n$ . Шаг разбиения  $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$  в общем случае является переменным (рис. 2.12).

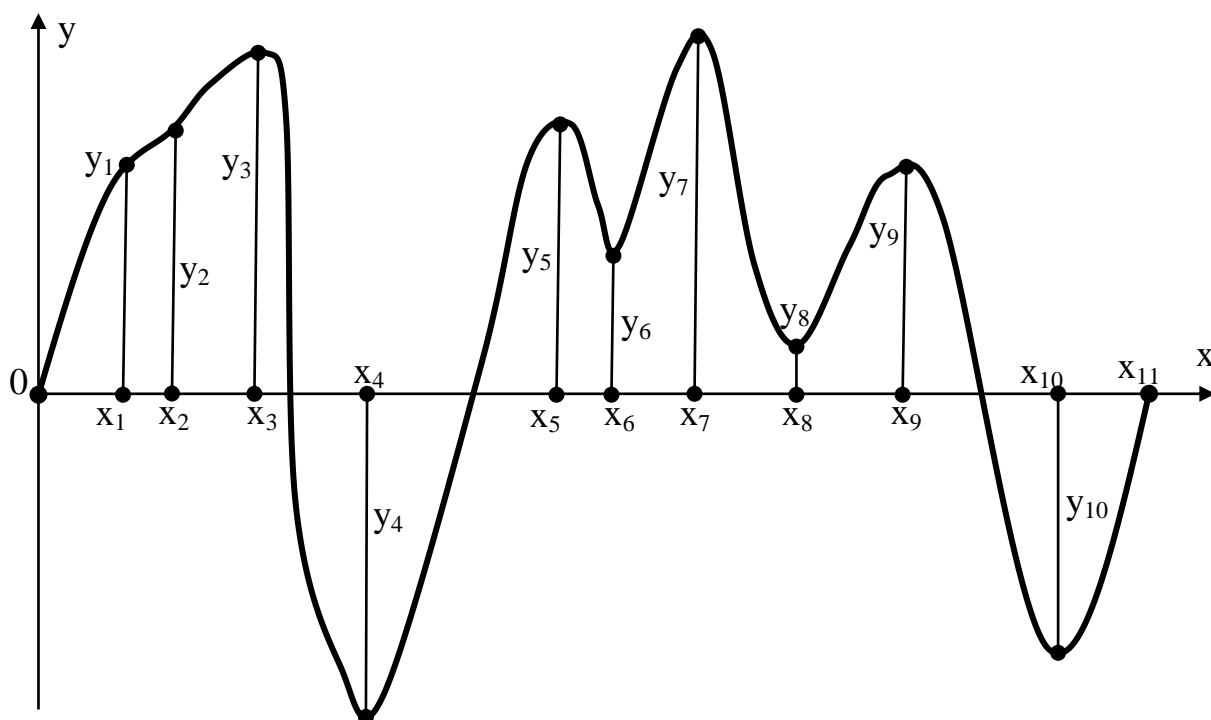


Рис. 2.12

Неизвестные коэффициенты  $b_j, c_j, d_j$  в выражении (2.30) определяются в результате решения  $4n$  уравнений, сформулированных в узлах  $x_j$  относительно самой функции, ее первой и второй производных (условия непрерывности и

гладкости функции и ее первой производной). Для определения производных функции  $y(x)$  на каждом интервале разбиения  $\Delta x_j$  достаточно продифференцировать соответствующий кубический сплайн, что дает

$$y'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2; \quad (2.31)$$

$$y''(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j).$$

Таким образом, при моделировании сейсмического воздействия в процедуре численного решения нестационарной задачи исходная инструментальная сейсмограмма может быть задана в ряде характерных точек  $t_j$ , а требуемые значения перемещений, скоростей и ускорений в сейсмической волне определяются по аналитическим выражениям (2.30), (2.31) для соответствующего временного интервала  $\Delta \tau_j$ . Следует отметить, что с математической точки зрения кубическая сплайн-функция (2.30) имеет минимально возможную кривизну, среди всех функций, интерполирующих данные точки, что является весьма важным преимуществом при аппроксимации высоко градиентных функций.

## **ГЛАВА III. Численное решение нелинейных начально-краевых задач для составных конструкций каркасного типа**

Дискретизация исходной интегро-дифференциальной задачи, описывающей деформирование составных конструкций каркасного типа при статических и динамических воздействиях в рамках модели Тимошенко, с помощью МКР приводит к системе нелинейных сеточных уравнений, содержащих в общем случае  $K$  неизвестных

$$K = \sum_{m=1}^M 3 \cdot N_m, \quad (3.1)$$

где  $M$  - число элементов составной конструкции,  $N_m$  - число точек дискретизации на  $m$ -ом элементе. Для решения статических задач, описываемых сеточными уравнениями (2.13), используется квазидинамическая форма метода установления, а для решения нестационарных уравнений (2.19) - явная двухслойная разностная схема по времени второго порядка аппроксимации (схема Эйлера) [7,8,87,88].

### **§ 3.1. Численное решение нелинейной задачи о статическом деформировании элементов составной конструкции**

#### **3.1.1. Применение квазидинамической формы метода установления для решения сеточных аналогов уравнений равновесия**

Следует отметить, что одной из первых работ, в которой для решения задач статики был применен нестационарный метод, была работа В.И. Феодосьева [128], в которой задача статической устойчивости сферического купола решалась на основе квазидинамического алгоритма. Разработанный В.И. Феодосьевым метод получил дальнейшее развитие в работах Крысько В.А [56]. В настоящей диссертации для решения статических задач механики составных конструкций каркасного типа используется квазидинамическая форма метода

установления, соответствующая оптимальному линейному итерационному процессу [7].

Идея применения метода установления (стабилизации) для решения статических задач механики деформируемого твердого тела заключается в построении некоторого нестационарного процесса, установление которого в равновесном состоянии и соответствует решению исходной статической задачи. Представим сеточные уравнения (2.13) в операторной форме, аналогичной (2.19)

$$[L_{\Delta x}(u_k; q_k)]_i = 0. \quad (3.2)$$

При использовании квазидинамической формы метода установления в сочетании с дискретизацией задачи МКР сеточные аналоги уравнений равновесия (3.2) заменяются на уравнения, совпадающие по форме с уравнениями движения элемента конструкции в вязкой среде вида

$$[L_{\Delta x}(u_k; q_k)]_i = (c^* m_k \ddot{u}_k)_i + (c^* \varepsilon_k \dot{u}_k)_i, \quad (3.3)$$

где  $\varepsilon_k(i)$ - параметры удельной вязкости искусственной среды ( $k=1,2,3$ ). Аппроксимация нестационарных уравнений (3.3) для  $i$ -го узла на сетке с шагом  $\Delta t = \text{const}$  с учетом (2.15) в виде

$$[L_{\Delta x}(u_k; q_k)]_i^{(n)} = (c^* m_k)_i \cdot \frac{[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} - [\dot{u}_k]_i^{(n-1/2)}}{\Delta t} + (c^* \varepsilon_k)_i \cdot \frac{[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} + [\dot{u}_k]_i^{(n-1/2)}}{2}, \quad (3.4)$$

позволяет построить итерационный процесс для определения скоростей  $[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}$  на временном слое  $t^{(n+1/2)}$  и сеточных функций  $[u_k]_i^{(n+1)}$  на временном слое  $t^{(n+1)}$

$$[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} = \left[ \frac{2m_k - \varepsilon_k \Delta t}{2m_k + \varepsilon_k \Delta t} \right] \cdot [\dot{u}_k]_i^{(n-1/2)} + \frac{2\Delta t \cdot [L_{\Delta x}(u_k; q_k)]_i^{(n)}}{c_i^* \cdot [2m_k + \varepsilon_k \Delta t]_i}; \quad (3.5)$$

$$[u_k]_i^{(n+1)} = [u_k]_i^{(n)} + \Delta t \cdot [\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}.$$

Из этого следует что разностная аппроксимация (3.4) нестационарных уравнений (3.3) приводит к итерационному процессу (3.5) нахождения решения исходной стационарной задачи (3.2).

В работах [7,24,86] для построения итерационного процесса решения стационарной задачи (2.1) рассматривались различные формы метода установления. Эволюционные уравнения могут быть записаны в форме метода простой итерации с учетом только производной по фиктивному времени  $\tau$  первого порядка

$$AU - B = \varepsilon \frac{dU}{d\tau}, \quad (3.6)$$

и с учетом производной по времени  $\tau$  второго порядка (квазидинамическая форма)

$$AU - B = \frac{d^2U}{d\tau^2} + \varepsilon \frac{dU}{d\tau}, \quad (3.7)$$

где  $\varepsilon > 0$  - скалярный множитель. Запись уравнений метода установления в форме (3.7) соответствует оптимальному линейному итерационному процессу, который получается при аппроксимации уравнения (3.7) на равномерной сетке с шагом  $\Delta\tau$  в форме, аналогичной (3.4), и заменой производных по времени центральными конечными разностями

$$U^{(n+1)} = \frac{4}{2 + \varepsilon\Delta\tau} U^{(n)} - \frac{2 - \varepsilon\Delta\tau}{2 + \varepsilon\Delta\tau} U^{(n-1)} + \frac{2\Delta\tau^2}{2 + \varepsilon\Delta\tau} [AU^{(n)} - B]. \quad (3.8)$$

Таким образом, если для некоторой функции  $U=U(x_k, \tau)$ , являющейся решением нестационарных уравнений (3.7), существуют пределы

$$\tilde{U}(x_k) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} U(x_k, \tau); \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial U(x_k, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad (3.9)$$

то функция  $\tilde{U} = \tilde{U}(x_k)$  является решением исходной стационарной задачи (2.1).

Оптимальные значения параметров итерационного процесса – шага по времени  $\Delta\tau$  и скалярного множителя  $\varepsilon$  - определяются из условия сходимости итерационного процесса и минимума арифметических операций  $n(\delta)$  (эконо-

мичности) для получения решения исходной стационарной задачи (2.1) с заданной точностью  $\delta$  и определяются по формулам

$$\varepsilon = 2\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}; \quad \Delta\tau = \frac{2}{\sqrt{\mu_1 + \mu_2}}, \quad (3.10)$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  - соответственно минимальное и максимальное собственные числа матрицы  $A$  [7]. Поскольку при решении практических задач на мелких сетках отношение  $\mu_2/\mu_1$  достаточно велико, то метод установления в квазидинамической форме (3.7) позволяет сократить число итераций  $n(\delta)$  примерно в  $\sqrt{\mu_2/\mu_1}$  раз по сравнению с нестационарной формой (3.6) [7,86].

Следовательно, использование метода установления (3.3) позволяет свести решение исходной нелинейной статической задачи (3.2) к решению квазидинамической (3.3), что, в свою очередь, значительно упрощает построение и реализацию вычислительного алгоритма решения статической задачи. На ЭВМ, программная реализация метода установления относительно проста. Разностный шаблон вычисления левых частей уравнений равновесия (3.2) строится в соответствии с используемой ВРС, а далее, по формулам (3.5) организуется послойный цикл вычисления сеточных функций скоростей и перемещений для узловых точек удовлетворяющих соответствующие уравнения равновесия сетки. Процесс отсчета начинается с момента времени  $t^{(0)}=0$  при первоначальном (в частном случае - нулевом) приближении для перемещений и нулевых значениях скоростей. Первый шаг ( $n=1$ ) итерационного процесса выполняется в соответствии с (2.24)-(2.26). После удовлетворения заданным граничным условиям и условиям сопряжения элементов составной конструкции шаг итерационного процесса заканчивается.

Когда характерные значения параметров НДС перестают меняться в пределах заданной точности, а максимальные погрешности в удовлетворении уравнений равновесия, определяемые в соответствии с (2.2)-(2.4) по величине невязки уравнений равновесия (3.2), становятся меньше некоторой наперед за-



данной величины  $\delta$ , итерационный процесс считается выполненным до достижения заданной степени установления процесса.

Для программной реализации метода на ЭВМ достаточно описать только массивы перемещений и скоростей, которые обновляются на последующих временных слоях  $t^{(n+1/2)}$  и  $t^{(n+1)}$  по формулам (3.5) в результате пошагового интегрирования уравнений (3.3), как следствие, при использовании метода установления нет необходимости формировать и хранить в памяти ЭВМ матрицу коэффициентов  $[L_{\Delta x}(u_k; q_k)]_i$ . Для контроля сходимости итерационного процесса и оценки погрешности полученного решения необходимо предусмотреть вывод на печать в процессе счета из одной или нескольких характерных узловых точек ряда параметров НДС элементов конструкции - усилий, моментов, перемещений и скоростей, а также максимальных и средних (по всем узлам) погрешностей в удовлетворении уравнений равновесия, максимальных и средних перемещений и соответствующих скоростей.

Построить единый итерационный процесс для решения как линейных, так и нелинейных краевых задач, позволяет метод установления. Опытным путем установлено что использование метода установления позволяет достичь высокую эффективность и экономичность в отношении затрат машинного времени [28-43,74-75,81,102-105,108]. Форма уравнений (3.8) соответствует физической модели эволюционного процесса с диссипацией энергии и установлением в стационарном состоянии, что является важным фактором, поскольку для нелинейных задач, в отличие от линейных [97], в большинстве случаев метод не опирается на доказательства сходимости и единственности решения. Помимо этого, к самокоррекции метода приводит введение демпфирующих членов  $\epsilon_k$  [7,30,32].

В зарубежной литературе при использовании метода, аналогичного рассматриваемой здесь форме метода установления, используется термин “динамическая релаксация” (dynamic relaxation), хотя авторы и оговариваются, что данный термин не вполне корректен [81,105,108].

### 3.1.2. Определение оптимальных значений параметров итерационного процесса для конструкций из железобетона и композитов

Параметры итерационного процесса - удельные вязкости среды  $\varepsilon_k(i)$  и шаг по времени  $\Delta t$  - определяются из условия ускорения сходимости и устойчивости разностной схемы по формулам (3.10). С учетом структуры уравнений (3.3) формулы (3.10) запишутся в виде [30,32,103]

$$\varepsilon_k = 2a_{\varepsilon,(k)} \sqrt{\frac{m_k \mu_{1,(k)} \mu_{2,(k)}}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}; \quad \Delta t_k = 2a_{t,(k)} \sqrt{\frac{m_k}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}, \quad (3.11)$$

где

$$\mu_{1,(k)} = \min_i [\mu_{1,(k)}]_i; \quad \mu_{2,(k)} = \max_i [\mu_{2,(k)}]_i, \quad (3.12)$$

и где  $\mu_{1,(k)}$  и  $\mu_{2,(k)}$  - наименьшие и наибольшие собственные числа для соответствующих разностных операторов в уравнениях (3.2);  $a_{\varepsilon,(k)}$  и  $a_{t,(k)}$  - близкие к единице поправочные коэффициенты. Шаг по времени  $\Delta t$  для всей РС в целом определяется из условия вида

$$\Delta t = \min_k \Delta t_k. \quad (3.13)$$

Для задач с особенностями и неоднородностями и не линейных задач точное определение границ спектров разностных операторов связано со значительными математическими трудностями, то  $\mu_{1,(k)}$  и  $\mu_{2,(k)}$  оцениваются в рамках линейных соотношений при соответствующих упрощениях в исходных уравнениях. Оценочные формулы для  $\mu_{1,(k)}$  и  $\mu_{2,(k)}$ , полученные в рамках упрощенных линеаризованных соотношений, с учетом физических соотношений (1.25),(1.34) запишутся следующим образом [102-104]:

- конструкции из железобетона:

$$\begin{aligned} \mu_{1,(1)} &= 4 \cdot \left( \frac{B_b + B_a}{\Delta x^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi \Delta x}{2 l} \right); & \mu_{1,(2)} &= 16 \cdot \left( \frac{D_b + D_a}{\Delta x^4} \sin^4 \frac{\pi \Delta x}{2 l} \right); \\ \mu_{1,(3)} &= 4 \cdot \left( \frac{D_b + D_a}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\pi \Delta x}{2 l} \right); \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\mu_{2,(1)} = 4 \cdot \left( \frac{B_b + B_a}{\Delta x^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi \Delta x}{2 l} \right); \quad \mu_{2,(2)} = 16 \cdot \left( \frac{D_b + D_a}{\Delta x^4} \cos^4 \frac{\pi \Delta x}{2 l} \right);$$

$$\mu_{2,(3)} = 4 \cdot \left( \frac{D_b + D_a}{\Delta x^2} \cos^2 \frac{\pi \Delta x}{2 l} \right);$$

- конструкции из композитов:

$$\mu_{1,(1)} = 4 \cdot \left( \frac{B_{11}}{\Delta x^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi \Delta x}{2 l} \right); \quad \mu_{1,(2)} = 16 \cdot \left( \frac{D_{11}}{\Delta x^4} \sin^4 \frac{\pi \Delta x}{2 l} \right);$$

$$\mu_{1,(3)} = 4 \cdot \left( \frac{D_{11}}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\pi \Delta x}{2 l} \right); \quad (3.15)$$

$$\mu_{2,(1)} = 4 \cdot \left( \frac{B_{11}}{\Delta x^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi \Delta x}{2 l} \right); \quad \mu_{2,(2)} = 16 \cdot \left( \frac{D_{11}}{\Delta x^4} \cos^4 \frac{\pi \Delta x}{2 l} \right);$$

$$\mu_{2,(3)} = 4 \cdot \left( \frac{D_{11}}{\Delta x^2} \cos^2 \frac{\pi \Delta x}{2 l} \right).$$

Оптимальные значения параметров итерационного процесса определяются в результате пробных пусков на ЭВМ. Для удовлетворения условия устойчивости ЭВМ, критическая величина шага по времени  $\Delta t$  существенно зависит от параметров сетки и слабо - от граничных условий, в свою очередь, параметры искусственной вязкости  $\varepsilon_k$ , наоборот существенно зависят от граничных условий и слабо от параметров сетки. Это позволяет производить пробные расчеты на крупной сетке при исследовании особенностей деформирования сложных неоднородных конструкций для определения оптимальных значений  $\varepsilon_k$ .

Поскольку для линеаризованных сеточных уравнений (3.2) можно получить оценку границ спектра собственных чисел в виде

$$0 < \mu_1 \leq \mu_n \leq \mu_2, \quad (3.16)$$

где  $\mu_1 = \mu_{\min}$ ,  $\mu_2 = \mu_{\max}$  - минимальное и максимальное собственные числа сеточного оператора, то матрица конечно-разностной системы уравнений положительно определена и имеет определитель, отличный от нуля [7,88].

### 3.1.3. Ускорение сходимости квазидинамической формы метода установления при решении статических задач

Используемая для решения квазидинамических уравнений (3.3) явная разностная схема по времени является условно устойчивой. Для оптимизации и сокращения затрат машинного времени принятая в расчете величина шага по времени  $\Delta t$  должна быть близкой к критическому значению  $\Delta t$ . Для нелинейных уравнений величина  $\Delta t$  меньше, чем для линейной задачи, причем снижение  $\Delta t$  тем существенней, чем больше вклад нелинейных членов в решение. При счете на установление, интерес представляет только конечный результат, а промежуточные решения не имеют смысла. Именно поэтому итерационный параметр  $\Delta t$  для обеспечения минимального числа итераций может принимать относительно большие значения, удовлетворяя при этом условию устойчивости ЭВМ. Используемая в итерационном процессе решения статической задачи (3.2) величина плотности  $\rho$  не имеет такого строгого физического смысла, как для динамических задач (2.19), и параметры  $m_k$  могут быть приняты из удобства расчета, а также для повышения критического значения  $\Delta t$ .

Представим нестационарные уравнения (3.3) в виде

$$[L_{\Delta x}(u_k; q_k)]_i = (c^* m_k^* \ddot{u}_k)_i + (c^* \varepsilon_k \dot{u}_k)_i, \quad (3.17)$$

где  $m_k^* = a_k m_k$ . Отфильтровать высокочастотные составляющие погрешности и существенно повысить критическое значение  $\Delta t$  для всей ЭВМ, оптимизировав затраты машинного времени, позволяет использование коэффициентов  $a_k \geq 1$ . Формулы (3.5), (3.11) преобразуются с учетом (3.17) путем замены  $m_k$  на  $m_k^*$ . Значения коэффициентов  $a_k$  могут быть оценены из условия  $\Delta t_k = \Delta t_{\max}$  как

$$a_k = \left( \frac{\Delta t_{\max}}{\Delta t_k} \right)^2, \quad (3.18)$$

где шаги  $\Delta t_k$  определяются в соответствии с (3.11)-(3.16). Ввод коэффициентов  $a_k$  можно трактовать как введение фиктивных плотностей  $\rho_k = a_k \rho$ . При этом число итераций  $n_k(\delta)$  не зависит от  $m_k$  [7].

### **§ 3.2. Численное решение конечно-разностных аналогов уравнений движения элементов составных конструкций**

Конечно-разностные аналоги уравнений движения оболочки (1.50) имеют вид (2.19), аналогичный эволюционным уравнениям (3.3)

$$\{f^* [L_{\Delta x}(u_k; q_k)]\}_i^{(n)} = \frac{[f_{22}^* c^* m_k \dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} - [f_{11}^* c^* m_k \dot{u}_k]_i^{(n-1/2)}}{\Delta t}, \quad (3.19)$$

На основе явной двухслойной разностной схемы по времени, однотипной с (3.5) может быть построено численное решение уравнений движения элемента конструкции (3.19)

$$\begin{aligned} [\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} &= \frac{[f_{11}^* c^* m_k]_i^{(n-1/2)}}{[f_{22}^* c^* m_k]_i^{(n+1/2)}} [\dot{u}_k]_i^{(n-1/2)} + \frac{\Delta t \{f^* [L_{\Delta x}(u_k; q_k)]\}_i^{(n)}}{[f_{22}^* c^* m_k]_i^{(n+1/2)}}; \\ [u_k]_i^{(n+1)} &= [u_k]_i^{(n)} + \Delta t [\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

С учетом конечно-разностной аппроксимации начальных условий (2.24)-(2.26) преобразуются формулы (3.20) для  $n=1$ .

Работа сил внешнего и внутреннего трения, обуславливается динамическими процессам в оболочечных элементах строительных конструкциях происходящих с диссипацией энергии. Степень затухания колебаний обычно оценивается величиной логарифмического декремента колебаний  $\delta$  [6]. Для сооружений логарифмический декремент колебаний определяется из эксперимента.

В задачах динамики параметры искусственной вязкости  $\varepsilon_k$ , при соответствующих значениях в нестационарных уравнениях (3.3)-(3.5) могут быть использованы для интегрального учета диссипации энергии. Для определения зависимости между  $\varepsilon_k$  (параметр искусственной вязкости) и  $\delta$  (величина логарифмического декремента колебаний) [6].

рифмического декремента колебаний) рассмотрим задачу о колебаниях одно-массовой системы, которая описывается уравнением вида

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (3.21)$$

где  $x$  - обобщенное перемещение,  $2n=\varepsilon/m$ ,  $\omega^2=c/m$ ,  $m$  - параметр массы,  $\varepsilon$  - коэффициент вязкого сопротивления, параметр  $c>0$ . Для “малого” сопротивления ( $n<\omega$ ), когда колебания носят затухающий характер,  $\delta$  определяется как

$$\delta = n\tau_1, \quad (3.22)$$

где  $\tau_1$  - период затухающих колебаний:  $\tau_1=\tau[1+(\delta/2\pi)^2]^{1/2}$ ,  $\tau$  - период свободных колебаний:  $\tau=2\pi/\omega$ . Приближенно полагая  $\tau_1\cong\tau$ , из (3.22) можно получить оценку для динамической вязкости  $\varepsilon_{\text{дин}}$

$$\varepsilon_{\text{дин}} = 2\delta \frac{m}{\tau}. \quad (3.23)$$

Для случая  $n=\omega$  (предельное апериодическое движения), который является оптимальным с точки зрения решения статической задачи при использовании квазидинамической формы эволюционных уравнений в методе установления, параметр искусственной вязкости  $\varepsilon_{\text{ст}}$  определяется как

$$\varepsilon_{\text{ст}} = 4\pi \frac{m}{\tau}. \quad (3.24)$$

Тогда

$$\varepsilon_{\text{дин}} = \varepsilon_{\text{ст}} \frac{\delta}{2\pi}. \quad (3.25)$$

Следовательно, с учетом (3.11),(3.25), для нестационарных задач параметры искусственной вязкости  $\varepsilon_k$ , соответствующие заданному значению  $\delta_k$ , могут быть оценены как

$$\varepsilon_k = a_{\varepsilon,(k)} \frac{\delta_k}{\pi} \sqrt{\frac{m_k \mu_{1,(k)} \mu_{2,(k)}}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}, \quad (3.26)$$

где  $a_{\varepsilon,(k)}$  - близкие к единице поправочные коэффициенты.

Из сравнения формул (3.20) и (3.5) получается, что принятая квазидинамическая форма эволюционных уравнений (3.3) в методе установления приводит к однотипной разностной схеме для решения и статических и динамиче-

ских задач. Это позволяет за счет изменения соответствующих параметров ЭВМ, без перестройки вычислительного алгоритма, эффективно исследовать геометрически нелинейное НДС конструкций при различных вариантах статических и динамических нагрузений. Особенно это важно при исследовании процессов деформирования несущих элементов конструкций в силу необходимости учета исходного статического НДС, со значительными массовыми характеристиками самих конструкций.

### **§ 3.3. Особенности построения численных решений статических и динамических задач для составных конструкций на амортизированном фундаменте**

Уравнение движения амортизированной фундаментной плиты с учетом реакции от опорных элементов сооружения  $F$ , заданной нагрузки на плиту  $F^*$ , а также интегральных значений упругой  $F_c$  и вязкой  $F_v$  компонент реакции вязкоупругих амортизирующих элементов (рис. 1.21), записывается в виде

$$m_f \ddot{x}_f + F_c + F_v - (F + F^*) = 0. \quad (3.27)$$

При построении численных решений статических и динамических задач для конструкций каркасного типа, установленных на амортизированной фундаментной плите, аппроксимация уравнения (3.27) на временной сетке  $t^{(n)}$  с постоянным шагом  $\Delta t$  с учетом (1.59)

$$m_f \frac{\dot{x}_f^{(n+1/2)} - \dot{x}_f^{(n-1/2)}}{\Delta t} + \varepsilon_v \frac{\dot{x}_f^{(n-1/2)} + \dot{x}_f^{(n+1/2)}}{2} + (F_c - F - F^*)^{(n)} = 0, \quad (3.28)$$

позволяет определить скорости  $\dot{x}_f^{(n+1/2)}$  на временном слое  $t^{(n+1/2)}$

$$\dot{x}_f^{(n+1/2)} = \frac{2m_f - \Delta t \cdot \varepsilon_v}{2m_f + \Delta t \cdot \varepsilon_v} \cdot \dot{x}_f^{(n-1/2)} + \frac{2\Delta t \cdot (F^* + F - F_c)^{(n)}}{2m_f + \Delta t \cdot \varepsilon_v}, \quad (3.29)$$

и далее путем интегрирования – перемещения  $x_f^{(n+1)}$  на временном слое  $t^{(n+1)}$

$$x_f^{(n+1)} = x_f^{(n)} + \Delta t \cdot \dot{x}_f^{(n+1/2)}, \quad (3.30)$$

при начальных условиях (1.61). Сопоставляя (3.27)-(3.30) с (3.3)-(3.5),(3.20)-(3.26), нетрудно заметить, что при значениях параметра вязкости  $\varepsilon_v$  в составляющей реакции  $F_\varepsilon$  (1.59), соотношения (3.27)-(3.30) также позволяют построить однотипные разностные схемы для численных решений динамических и статических (по методу установления) задач для составных конструкций каркасного типа. Интегральное значение жесткости  $c_z$  может быть определено по заданной величине осадки  $\Delta h_z$  упругих элементов под действием собственного веса конструкции  $P_f$

$$c_z = \frac{P_f}{\Delta h_z}, \quad (3.31)$$

или по заданному соотношению  $k_f$  между частотой  $f_f$  свободных колебаний амортизированной фундаментной плиты и преобладающей частотой  $f_{sw}$  сейсмической волны [102-104]

$$k_f = \frac{f_f}{f_{sw}}; \quad f_f = \frac{1}{T_f}; \quad T_f = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m_f}{c_z}}. \quad (3.32)$$

Тогда

$$c_z = 4\pi^2 \cdot k_f^2 \cdot f_{sw}^2 \cdot m_f = k_f^2 \cdot \frac{4\pi^2 \cdot m_f}{T_{sw}^2}. \quad (3.33)$$

Интегральное значение вязкой компоненты  $\varepsilon_v$  может быть определено по отношению к величине вязкости для случая предельного аperiodического движения амортизированного фундамента

$$\varepsilon_v = 2 \cdot k_\varepsilon \sqrt{c_z m_f}, \quad (3.34)$$

где  $k_\varepsilon \geq 0$  – корректирующий коэффициент. Значение  $k_\varepsilon = 1$  соответствует случаю предельного аperiodического движения [6].



## ГЛАВА IV. Исследование нелинейных процессов деформирования составных конструкций каркасного типа при комбинированных видах нагружения

Разработанные математические модели и численные методы решения нелинейных начально-краевых задач механики составных конструкций каркасного типа были практически реализованы в виде пакетов прикладных программ на языке FORTRAN-IV применительно к персональным ЭВМ серии Pentium с 32-х и 64-х битовыми процессорами. В настоящей главе представлены результаты исследований, проведенных методами вычислительного эксперимента, особенностей процессов нелинейного деформирования рассматриваемых конструкций при различных вариантах статического и динамического нагружения.

### § 4.1. Исследование влияния параметров разностной схемы на сходимость и точность численных решений нелинейных начально-краевых задач

Для исследования сходимости и точности результатов численных решений, полученных на основе разработанных вариационно-разностных схем, были проведены исследования сходимости параметров НДС шарнирно закрепленной (рис. 4.1а) и защемленной (рис. 4.1б) по краям  $x=0;l$  изотропной балки под действием равномерно распределенной нагрузки  $q$  в зависимости от числа точек дискретизации  $N$ .



Рис. 4.1

В качестве нагрузки рассматривался собственный вес балки. Изгибающие моменты  $M$  и прогибы  $w$  на краях  $x=0;l$  и в середине балки  $x=l/2$ , полученные на основе аналитических решений в рамках модели Кирхгоффа-Лява, определяются по формулам:

- *защемление краев*  $x=0;l$ :

$$M|_{x=0} = M|_{x=l} = -\frac{ql^2}{12}; \quad M|_{x=l/2} = \frac{ql^2}{24}; \quad w|_{x=l/2} = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EJ}; \quad (4.1)$$

- *шарнирное закрепление краев*  $x=0;l$ :

$$M|_{x=0} = M|_{x=l} = 0; \quad M|_{x=l/2} = \frac{ql^2}{8}; \quad w|_{x=l/2} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}. \quad (4.2)$$

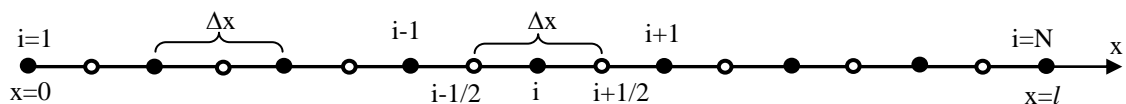


Рис. 4.2

При построении разностной схемы полагалось, что края балки  $x=0;l$  относятся с узлами вспомогательной сетки  $i=1+1/2$  и  $i=N-1/2$  соответственно (рис. 4.2). Тогда шаги сетки  $\Delta x_N$  определяются как

$$\Delta x_N = \frac{l}{N-2}. \quad (4.3)$$

Исследования проводились для числа узлов  $N$ , последовательно равном  $N=8;14;20;26$ , так, что шаги сетки  $\Delta x_N$  уменьшались по сравнению с начальным значением  $\Delta x_N = \Delta x_8$  в 2,3 и 4 раза. Результаты исследований представлены в Табл. 4.1 (защемленная балка) и Табл. 4.2 (шарнирно закрепленная балка). Полученные результаты показывают хорошую сходимость и корреляцию численных решений, полученных на основе разработанных ВРС и численных методов, при сгущении сетки. Некоторое превышение значений прогибов  $w_N$  по сравнению с аналитическими решениями (4.1),(4.2) объясняется учетом дефор-

маций поперечного сдвига в исходных соотношениях для конечно-разностной модели, что соответствует известным аналитическим оценкам [10,16].

Таблица 4.1

N	8	14	20	26
$\Delta x_N/\Delta x_8$	1	1/2	1/3	1/4
$\Delta x/l$	0,167	0,083	0,056	0,042
$w_N/w _{x=l/2}$	-1,011	-1,096	-1,111	-1,117
$M_N(x=l/2)/M _{x=0}$	-0,528	-0,507	-0,503	-0,502
$M_N(x=0)/M _{x=0}$	0,972	0,993	0,997	0,998

Таблица 4.2

N	8	14	20	26
$\Delta x_N/\Delta x_8$	1	1/2	1/3	1/4
$\Delta x/l$	0,167	0,083	0,056	0,042
$w_N/w _{x=l/2}$	-0,987	-1,07	-1,026	-1,029
$M_N(x=l/2)/M _{x=0}$	-1	-1	-1	-1

Для исследования влияния учета физической нелинейности на особенности деформирования несущих элементов каркасных конструкций при пластическом деформировании армирующих элементов была рассмотрена задача о поэтапном нагружении заземленной железобетонной балки равномерно распределенной нагрузкой (рис. 4.1б) до уровня возникновения пластических деформаций в арматуре и последующем полном снятии внешней нагрузки. Геометрические параметры балки:  $l/h=15$ ;  $h/b=2$ . Железобетонная балка изготовлена из бетона класса В25 с арматурой класса А400 при значениях коэффициентов армирования  $\mu_1=1,5\%$   $\mu_2=1\%$  (рис. 1.11). Для арматуры зависимость  $\sigma_i(\epsilon_i)$  аппроксимировалась диаграммой с линейным упрочнением с параметрами:  $\epsilon_T=0,0015$ ;  $E_1=0,06E$  (рис. 1.10). Нагрузка прилагалась в 3 этапа. На первом этапе (упругая стадия) в качестве нагрузки рассматривался собственный вес бал-

ки, моделируемый распределенной нагрузкой интенсивностью  $q_g$ . На втором этапе (упруго-пластическая стадия) помимо собственного веса балка догружалась распределенной нагрузкой интенсивностью  $q=50q_g$ . На 3-ем этапе внешняя нагрузка полагалась  $q=0$ , т.е. балка разгружалась до исходного состояния при нагружении собственным весом, но при наличии остаточных деформаций.

Результаты исследований представлены на рис. 4.3, где показаны эпюры прогибов  $w$  балки для 1-го этапа нагружения (кривая 1) и 3-го этапа (остаточные прогибы, кривая 2). Безразмерные прогибы  $w^*$  нормировались по отношению к аналитическому значению (4.1).

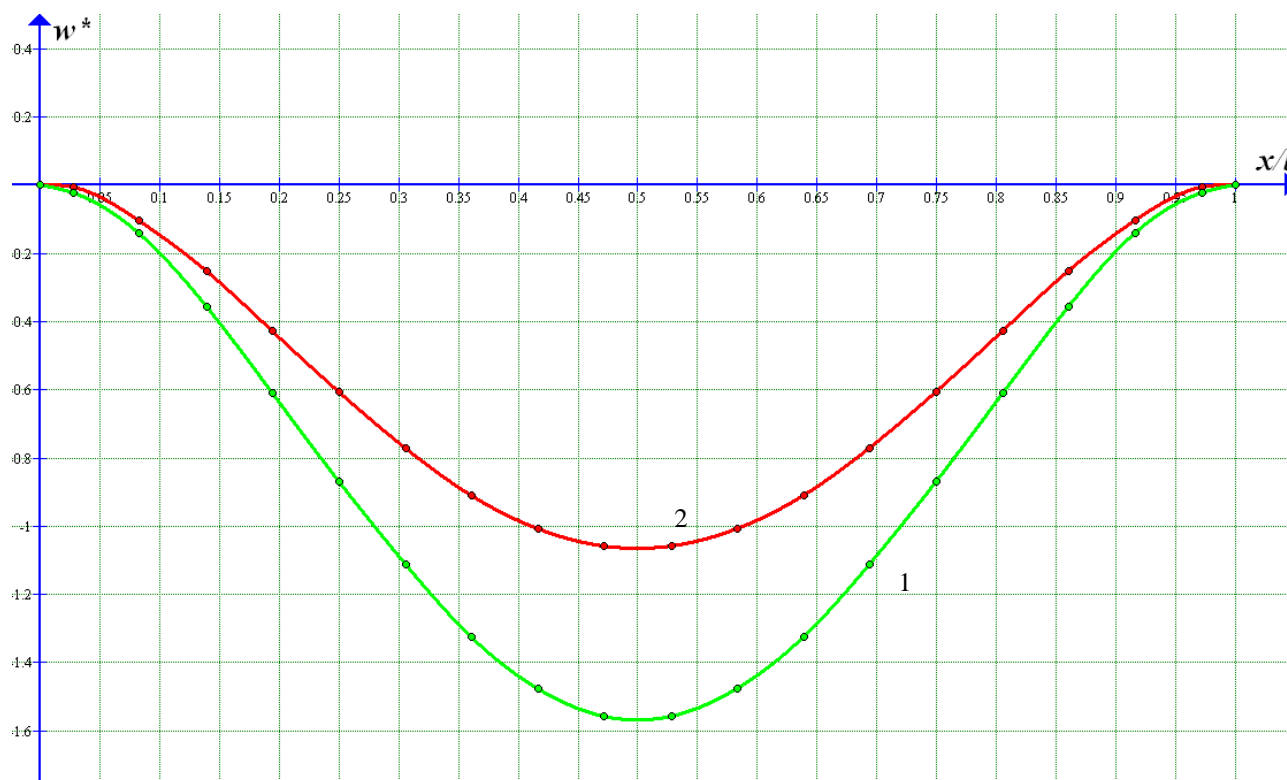


Рис. 4.3

Таким образом, результаты проведенных исследований показали хорошую сходимость и корреляцию численных решений с известными аналитическими решениями, а также высокую эффективность развитой квазидинамической формы метода установления при решении геометрически и физически нелинейных задач, позволяющей на основе однотипной разностной схемы и вычислительного алгоритма получать оценку остаточных деформаций и перемещений в несущих элементах составных каркасных конструкций.

**§ 4.2. Исследование влияния параметров вязко-упругих  
амортизаторов на деформирование и несущую способность  
железобетонных каркасных конструкций  
при сейсмических воздействиях**

На основе разработанных и развитых математических моделей и численных методов решения нелинейных начально-краевых задач было проведено исследование влияния интегральных характеристик вязкоупругих амортизирующих элементов (АЭ) на особенности процессов нелинейного деформирования и трещинообразования предварительно нагруженной железобетонной каркасной конструкции при динамическом воздействии, моделирующем горизонтальную компоненту сейсмической волны. Исследования проводились на ЭВМ с 32-х битовым процессором Intel-7 с помощью пакетов программ, вычислительные процедуры в которых реализованы на языке FORTRAN-IV.

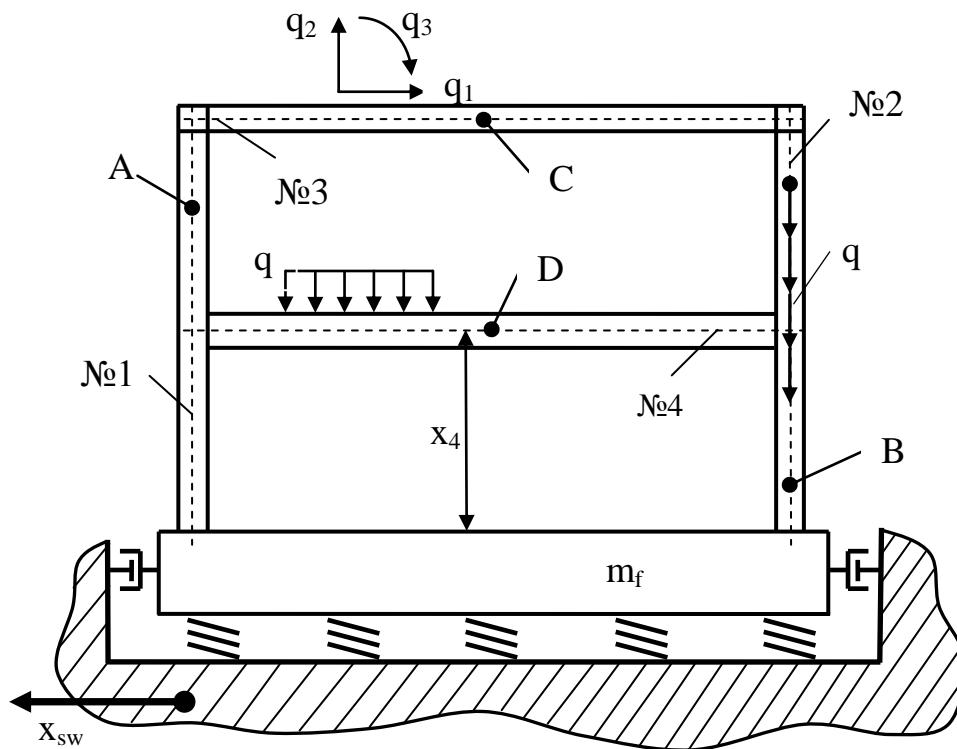


Рис. 4.4

Рассматривалась монолитная конструкция балочного типа, установленная на фундаментной плите толщиной  $h_f$ , состоящая из 4 элементов со следую-

щими геометрическими характеристиками (рис. 4.4):  $l_1=l_2=l_3=l_4$ ;  $h_1=h_2=h_3=h_4$ ;  $l_1=10 \cdot h_1$ ;  $h_1=1,5 \cdot b$ ;  $x_4=0,5 \cdot l_1$ , где  $l_m$  и  $h_m$  – длина и толщина  $m$ -го элемента конструкции соответственно ( $m=1,2,3,4$ ). Железобетонная строительная конструкция выполнена из бетона класса В25 с арматурой класса А400 [2,93]. Значения коэффициентов армирования  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , принятые в соответствии с рекомендациями нормативных документов [90], приведены в Табл. 4.3.

Таблица 4.3

№	1	2	3	4
$\mu_2$ [%]	2,5	2,5	1	1
$\mu_1$ [%]	2,5	2,5	1,5	1,5

В качестве статической нагрузки рассматривался собственный вес элементов составной конструкции. Соотношение массы фундаментной плиты  $m_f$  и каркасной конструкции  $m_{ks}$  принималось равным  $m_f=3 \cdot m_{ks}$ . В качестве динамического воздействия рассматривается действие горизонтальной компоненты сейсмической волны на фундаментную плиту, которая может быть жестко связана с грунтом, либо установлена на системе вязкоупругих АЭ (рис. 4.4).

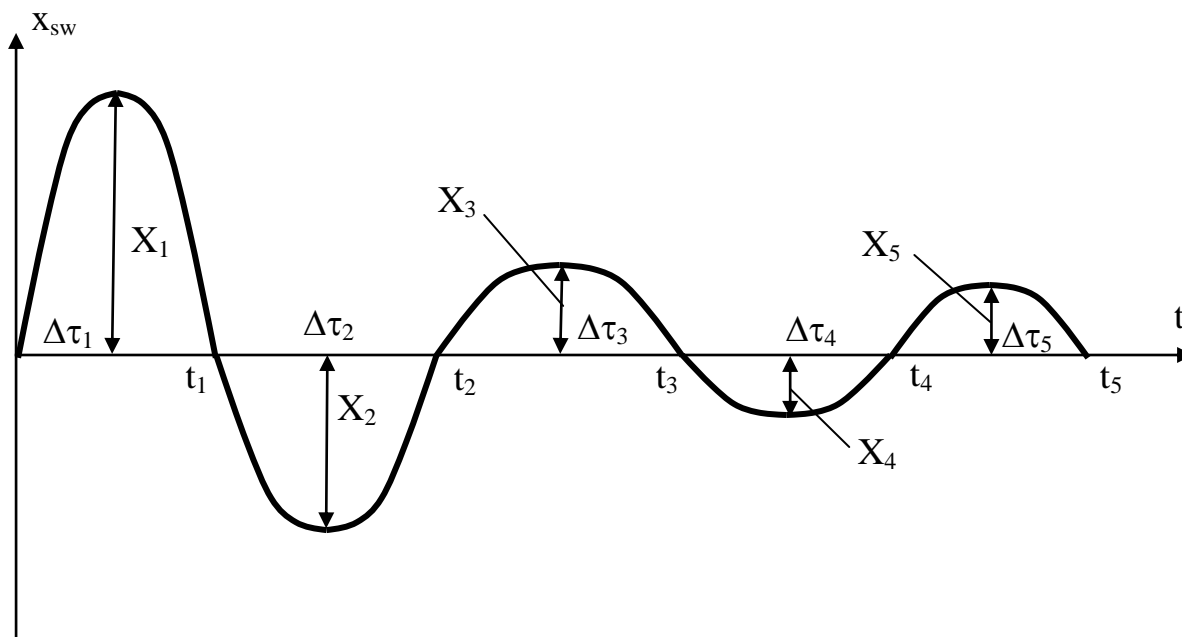


Рис. 4.5

Сейсмическое воздействие моделировалось аппроксимацией инструментальной сейсмограммы набором тригонометрических функций, заданных на соответствующих временных интервалах  $\Delta\tau_j$  ( $j=1,2,3,\dots$ ) [4,5]

$$x_{sw} = \begin{cases} \pm X_j \sin \pi \frac{t - t_{j-1}}{\Delta\tau_j} & - \text{для } t_{j-1} \leq t \leq t_j; \\ 0 & - \text{для } t \geq t_{sw}, \end{cases} \quad (4.4)$$

где  $t_0=0$ ,  $t_{sw}=\max(t_j)$ ,  $X_j$ ,  $\Delta\tau_j=t_j-t_{j-1}$ - амплитудно-частотные характеристики аппроксимирующих функций, определяемые в соответствии с заданными параметрами инструментальной сейсмограммы [63]. При проведении исследований использовалась аппроксимированная сейсмограмма из 5 полуволн синусоид с параметрами:  $X_2=0,7 \cdot X_1$ ;  $X_3=0,14 \cdot X_1$ ;  $X_4=0,04 \cdot X_1$ ;  $X_5=0,1 \cdot X_1$ ;  $\Delta\tau_2=\Delta\tau_1$ ;  $\Delta\tau_3=1,5 \cdot \Delta\tau_1$ ;  $\Delta\tau_4=1,2 \cdot \Delta\tau_1$ ;  $\Delta\tau_5=0,7 \cdot \Delta\tau_1$  (рис. 4.5).

В соответствии с (3.31)-(3.33) интегральное значение  $c_z$  упругой компоненты АЭ в (20) определялось по заданному соотношению  $k_f$  между частотой  $f_f$  свободных колебаний амортизированной фундаментной плиты и характерной (несущей) частотой  $f_{sw}$  сейсмической волны по формулам

$$c_z = 4\pi^2 \cdot k_f^2 \cdot f_{sw}^2 \cdot m_f = k_f^2 \cdot \frac{4\pi^2 \cdot m_f}{T_{sw}^2}, \quad (4.5)$$

где

$$k_f = \frac{f_f}{f_{sw}}; \quad f_f = \frac{1}{T_f}; \quad T_f = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m_f}{c_z}}. \quad (4.6)$$

Интегральное значение вязкой компоненты  $\varepsilon_v$  вычислялось по отношению к величине вязкости для случая предельного аperiodического движения амортизированного фундамента

$$\varepsilon_v = 2 \cdot k_\varepsilon \sqrt{c_z m_f}, \quad (4.7)$$

где  $k_\varepsilon \geq 0$  – корректирующий коэффициент.

Число точек дискретизации для элементов каркасной конструкции принималось равным:  $N_1=N_2=27$ ;  $N_3=N_4=25$ . Статическая задача о деформировании

составной железобетонной конструкции под действием собственного веса решалась методом установления (3.3)-(3.5). Результаты решения сеточных уравнений (3.2) использовались в качестве начальных условий (2.24) при исследовании волновых процессов в конструкции при сейсмическом воздействии. Интересно отметить, что если при решении статической задачи методом установления устойчивость разностной схемы обеспечивалась при значении поправочного коэффициента  $a_{t,(k)}$  в (3.11), равном  $a_{t,(k)}=0,75$ , то для динамических задач устойчивость схемы обеспечивалась при  $a_{t,(k)}=0,2$ . Влияние параметров вязкоупругих АЭ на процессы деформирования каркасной железобетонной конструкции исследовались для трех расчетных случаев: а) фундаментная плита жестко связана с грунтом ( $x_f=x_{sw}$ ); б) фундаментная плита установлена на упругих АЭ ( $k_\varepsilon=0$ ;  $k_f>0$ ); в) фундаментная плита установлена на вязкоупругих АЭ ( $k_\varepsilon>0$ ;  $k_f>0$ ).

Таблица 4.4

$a_{\max}$	$X_{\max}$	$f_{sw}$ [Гц]	$t^*/t_{sw}$	$t^*/t_2$
0,1·g	13,87	2,38	0,58	1,55
0,2·g	10,61	3,85	0,55	1,5
0,3·g	8,69	5,21	0,88	2,6
0,4·g	8,56	6,06	1,53	3,95

Результаты исследований представлены в Табл.4.4 и на рис. 4.6-4.10. В Табл.4.4 показана зависимость максимального смещения в волне  $X_{\max}=X_1$ , при котором наступало разрушение неамортизированной каркасной конструкции, от максимального ускорения  $a_{\max}$  сейсмического воздействия. Безразмерное смещение  $X_{\max}$  определялось по отношению  $X_1$  к прогибу  $w_3$  шарнирно опертой балки длиной  $l=l_3$  под действием собственного веса, характеризуемого равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$

$$X_{\max} = \frac{X_1}{w_3}; \quad w_3 = \frac{5}{384} \frac{q \cdot l^4}{D}, \quad (4.8)$$

где



$$D = b \cdot \left[ \frac{E_b h^3}{12} + E_a \cdot \left( \Delta h_1 \cdot z_1^2 + \frac{\Delta h_1^3}{12} + \Delta h_2 \cdot z_2^2 + \frac{\Delta h_2^3}{12} \right) \right]. \quad (4.9)$$

Момент времени  $t=t^*$  определяет момент начала разрушения конструкции. Для всего рассматриваемого диапазона ускорений  $a_{\max}=(0,1 \div 0,4) \cdot g$  разрушение начиналось с балки №4 и характеризовалось появлением сплошных (по поперечному сечению) трещин в бетоне по длине балки с последующим возникновением и быстрым развитием значительных пластических деформаций в арматуре, приводящим к исчерпанию несущей способности конструкции.

На рис. 4.6-4.10 показаны результаты исследования волновых процессов в элементах составной железобетонной конструкции при воздействии горизонтальной компоненты сейсмической волны с параметрами:  $a_{\max}=0,4 \cdot g$ ;  $X_{\max}=8,53$ . Кривые 1 соответствуют варианту неамортизированной конструкции, кривые 2 – упругим АЭ с параметрами  $k_f=0,8$ ;  $k_\varepsilon=0$ , и кривые 3 – вязкоупругим АЭ с параметрами  $k_f=0,8$ ;  $k_\varepsilon=1$ ;  $\tau=t/t_{sw}$  – безразмерное время. На рис. 4.6 показаны ускорения фундаментной плиты  $a_f$ , а на рис. 4.7,4.8 – тангенциальные ускорения  $a_3=\ddot{u}_C$  и  $a_4=\ddot{u}_D$  в серединах пролетов балок № 3 и № 4 соответственно (точки С и D, рис.4.4). Поведение нормальных ускорений  $a_1=\ddot{w}_A$  и  $a_2=\ddot{w}_B$  в точках колонн А и В с координатами  $x_A=0,77 \cdot l_1$ ,  $x_B=0,27 \cdot l_2$  показаны на рис. 4.9,4.10.

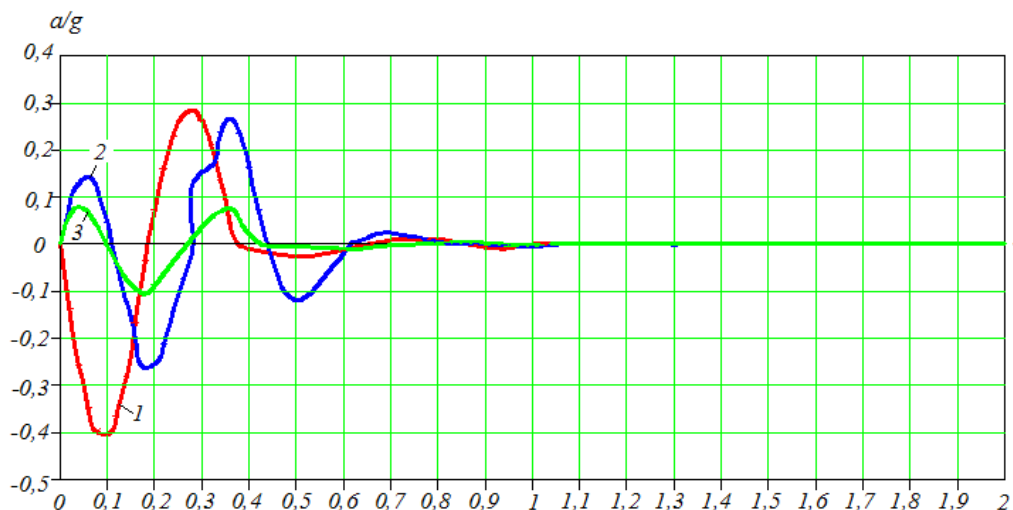


Рис. 4.6. Горизонтальные ускорения  $a_f$  фундаментной плиты

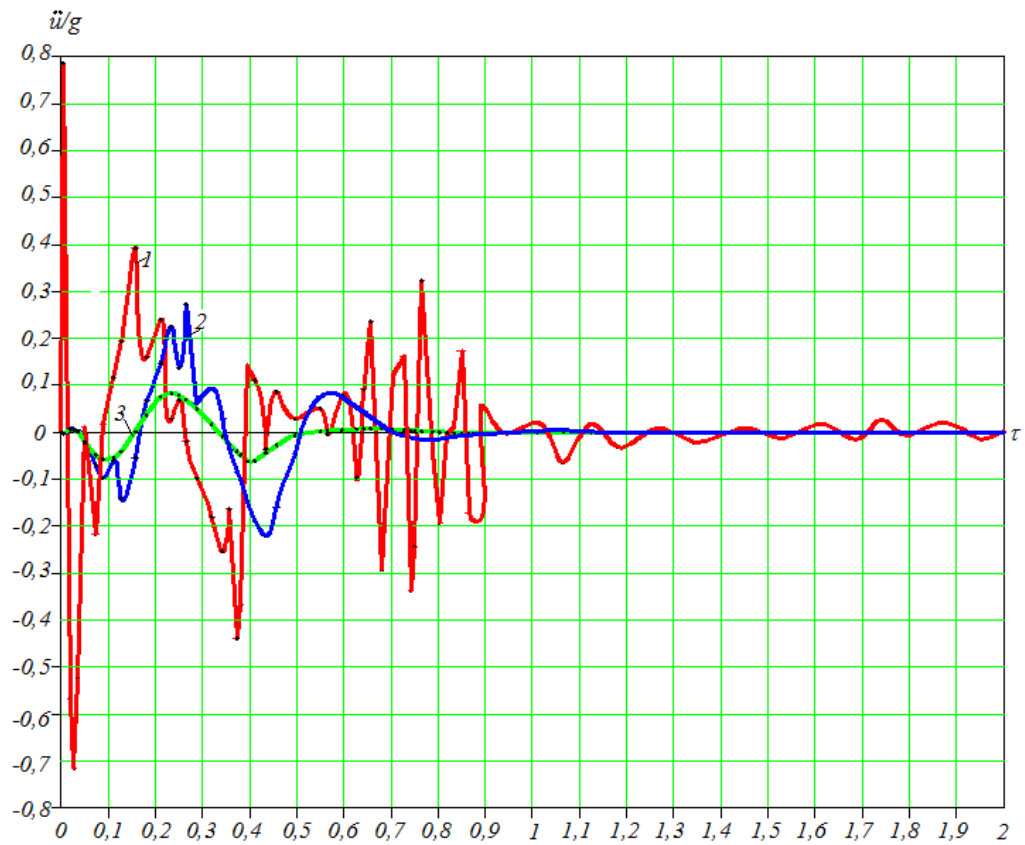


Рис. 4.7. Тангенциальные ускорения  $\ddot{u}_C$  в т. С балки № 3

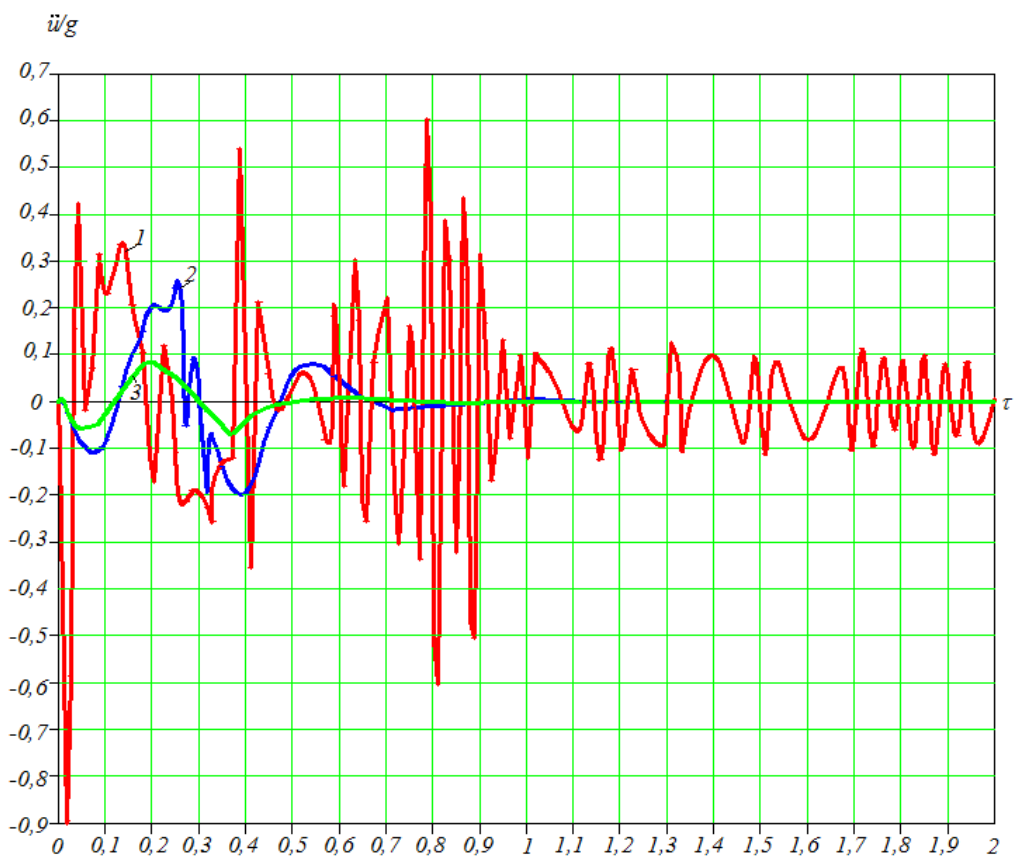


Рис. 4.8. Тангенциальные ускорения  $\ddot{u}_D$  в т. D балки № 4

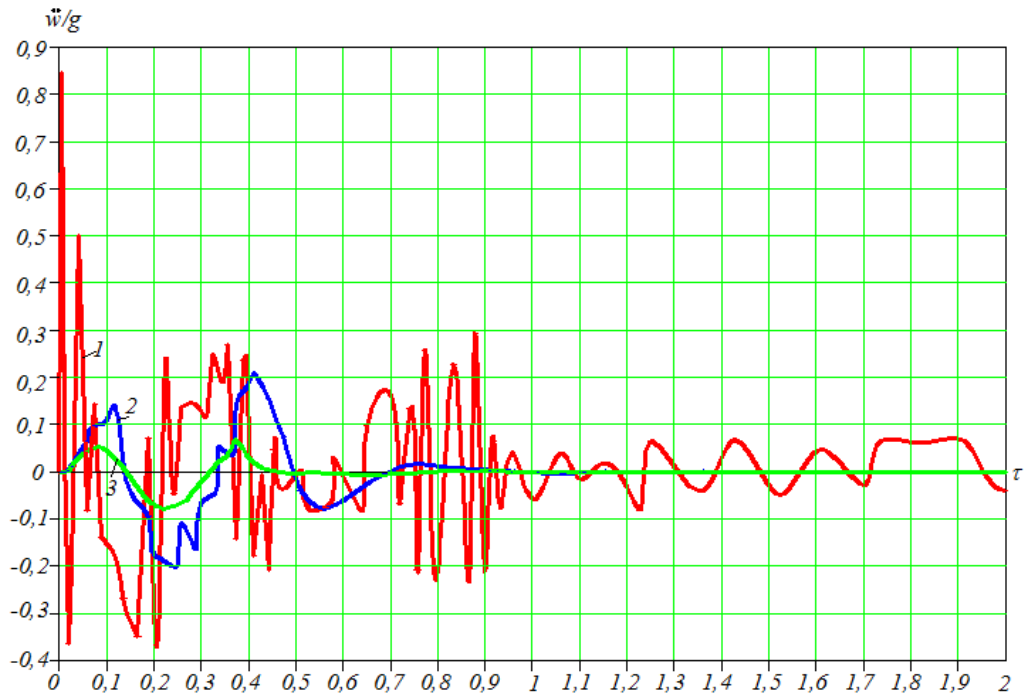


Рис. 4.9. Нормальные ускорения  $\ddot{w}_A$  в точке А колонны №1

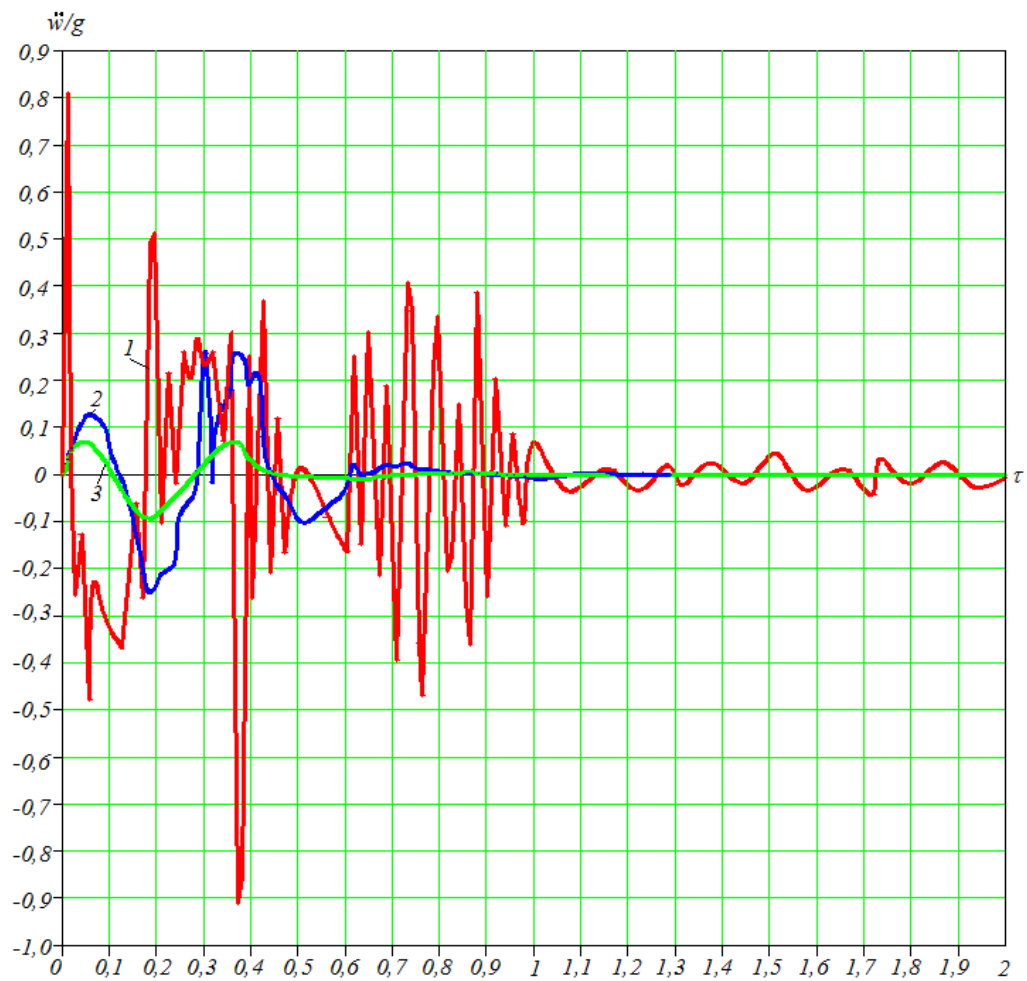


Рис. 4.10. Нормальные ускорения  $\ddot{w}_B$  в точке В колонны №2

Результаты вычислительного эксперимента позволили установить, что использование только упругих АЭ (без вязкой компоненты) не всегда приводит к повышению несущей способности конструкций. Так, например, если при воздействии сейсмической волны с параметрами  $a_{\max}=0,4 \cdot g$  и  $X_{\max}=8,53$  неамортизированная железобетонная конструкция сохраняла свою несущую способность, то расчеты для упругих АЭ при значениях параметра  $k_f$  в (4.5), равных  $k_f=0,8; 1; 1,33; 2; 4$ , показали, что несущая способность конструкции повышается только при  $0 < k_f < 1$ . Для всего рассмотренного диапазона характеристик упругих амортизаторов  $k_f \geq 1$  развитие волновых процессов в результате взаимодействия элементов составной системы «фундаментная плита – каркасная конструкция», обусловленного совместным действием сейсмической волны и статической нагрузки, приводило к разрушению конструкции. Использование вязкоупругих амортизаторов с параметром  $k_\varepsilon=1$  в (4.7) повышало несущую способность каркасной конструкции для всех  $k_f \geq 1$ , за исключением случая  $k_f=4$ , для которого оптимальное значение составило  $k_\varepsilon=1,5$ .

При вычислении ускорений с помощью формул численного дифференцирования возникают проблемы, обусловленные особенностями машинной арифметики. Поскольку использование скрещивающейся сетки позволяет построить вычислительный алгоритм на основе явной двухслойной разностной схемы второго порядка точности  $O(\Delta t^2)$ , то значения ускорений могут быть определены с помощью центральных конечных разностей на шаге  $\Delta t$  с использованием аппроксимаций, аналогичных (2.15) (рис. 2.4). В связи с тем, что устойчивость разностных схем для рассматриваемого типа жестких уравнений обеспечивается при значениях шага по времени порядка  $\Delta t=(10^{-7} \div 10^{-8})$  с, ошибки округления приводят к потере точности при вычислении ускорений. Для получения корректных результатов при вычислении ускорений использовалась процедура сплайн-интерполяции (2.30),(2.31), описанная в разделе 2.5.2. Сеточные функции скоростей, полученные в процессе решения нестационарной задачи, аппроксимируются на заданных временных интервалах с помощью кубической сплайн-интерполяции, что позволяет далее вычислять значения уско-

рений по аналитическим выражениям (2.31) без использования процедуры численного дифференцирования.

Как показали результаты проведенных исследований, использование вязкоупругих АЭ позволяет существенно, более чем в 10 раз, снизить пиковые значения ускорений на элементах каркасной конструкции, возникающие в начальный момент воздействия. Это соответствует результатам экспериментальных и теоретических исследований, проведенных, в частности, в Японии и Германии, которые показали, что за счет демпфирования сейсмическую нагрузку можно снизить более чем в 2 раза [3,5,62,94,107,110]. Кроме того, если неамортизированная конструкция разрушалась при относительно небольших значениях максимальных смещений в сейсмической волне (Табл.4. 4), то амортизация системой вязкоупругих АЭ с интегральными параметрами  $k_f=0,8$ ;  $k_\varepsilon=1$  обеспечивала несущую способность без возникновения трещин в бетоне и максимальных напряжений в арматуре, не превышающих  $\sigma_{\max} < 0,2\sigma_T$ , даже при воздействии сейсмической волны с параметрами  $a_{\max}=0,4 \cdot g$ ;  $X_{\max}=155,1$  ( $X_1=0,05$  м),  $f_{sw}=1,42$  Гц, что соответствует уровню сейсмичности 9 баллов [63,64]. Как показывают результаты экспериментальных наблюдений, характерные периоды сейсмических воздействий, соответствующие максимальным ускорениям основания, лежат в диапазоне коротковолнового спектра  $T=(0,1 \div 0,5)$  с при частотах колебаний от  $f_{sw}=10$  Гц до  $f_{sw}=2$  Гц [3,66].

Для исследования влияния граничных условий сопряжения элементов составной конструкции на ее несущую способность при сейсмических воздействиях были проведены расчеты для случая сборной конструкции, когда граничные условия сопряжения горизонтальных и вертикальных элементов описываются моделируются условиями типа шарнирного закрепления (1.53),(1.55). Рассматривалась неамортизированная составная конструкция (рис. 4.4) при воздействии горизонтальной компоненты сейсмической волны с максимальным ускорением  $a_{\max}=0,4 \cdot g$  при различных значениях максимального смещения грунта  $X_{\max}$ . Результаты исследования для сейсмического воздействия с параметрами  $a_{\max}=0,4 \cdot g$ ;  $X_{\max}=8,53$  представлены на рис. 4.11-4.14, где сопоставлены

результаты исследований для случая монолитной (кривые 2) и сборной (кривые 3) составной конструкции. Кривые 1 на рис. 4.11-4.14 соответствуют заданным ускорениям в сейсмической волне.

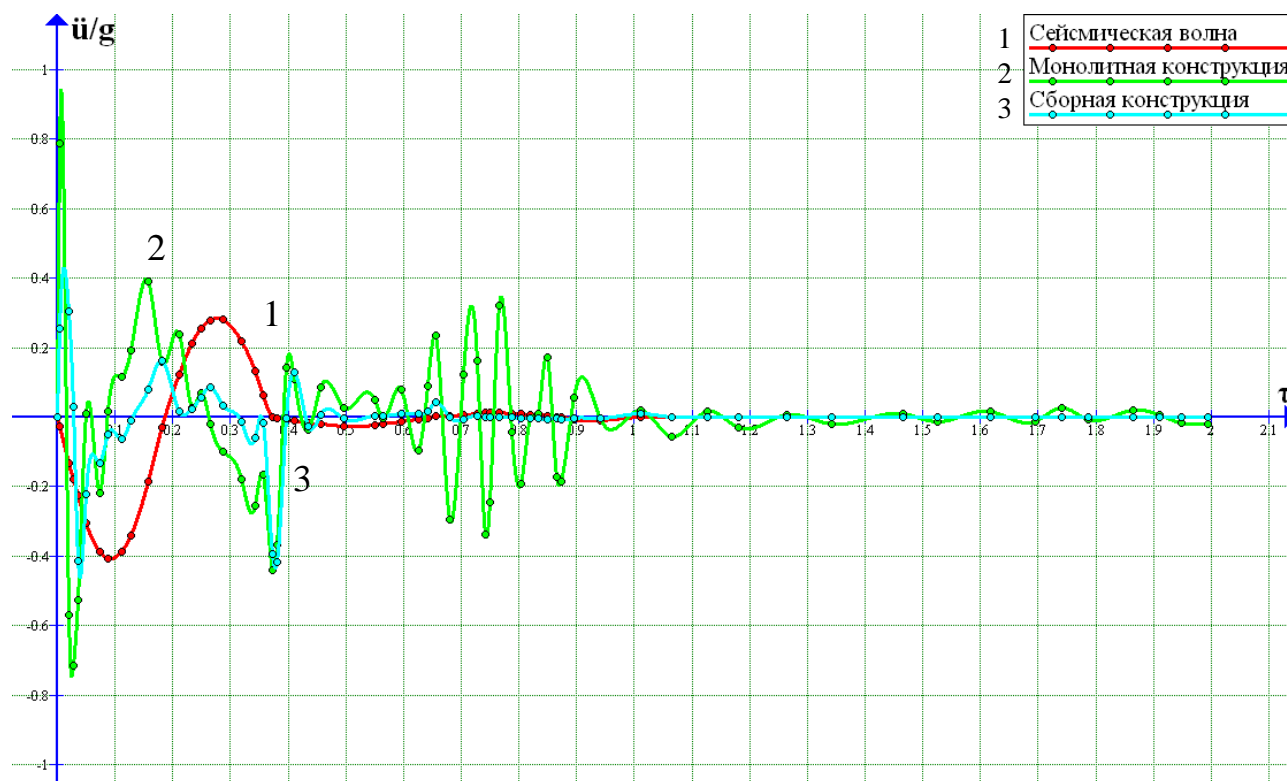


Рис. 4.11. Тангенциальные ускорения  $\ddot{u}_C$  в т. С

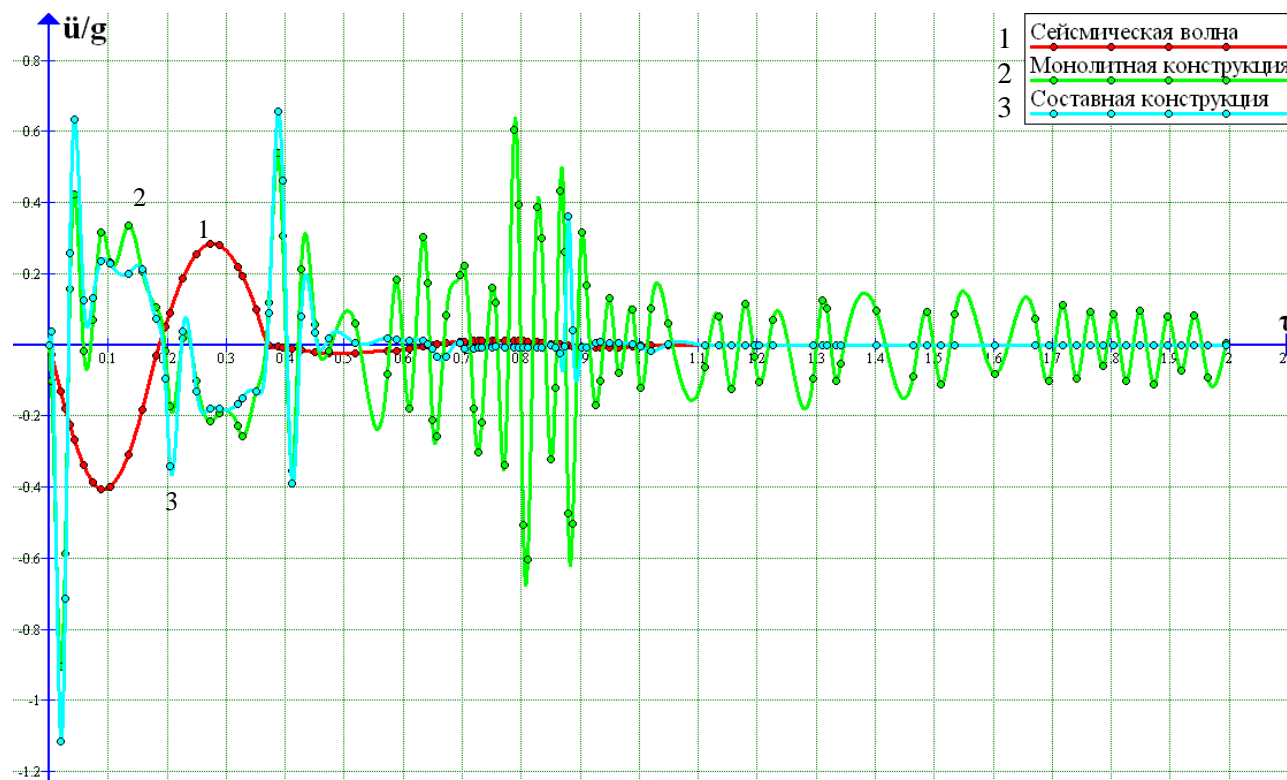


Рис. 4.12. Тангенциальные ускорения  $\ddot{u}_D$  в т. D

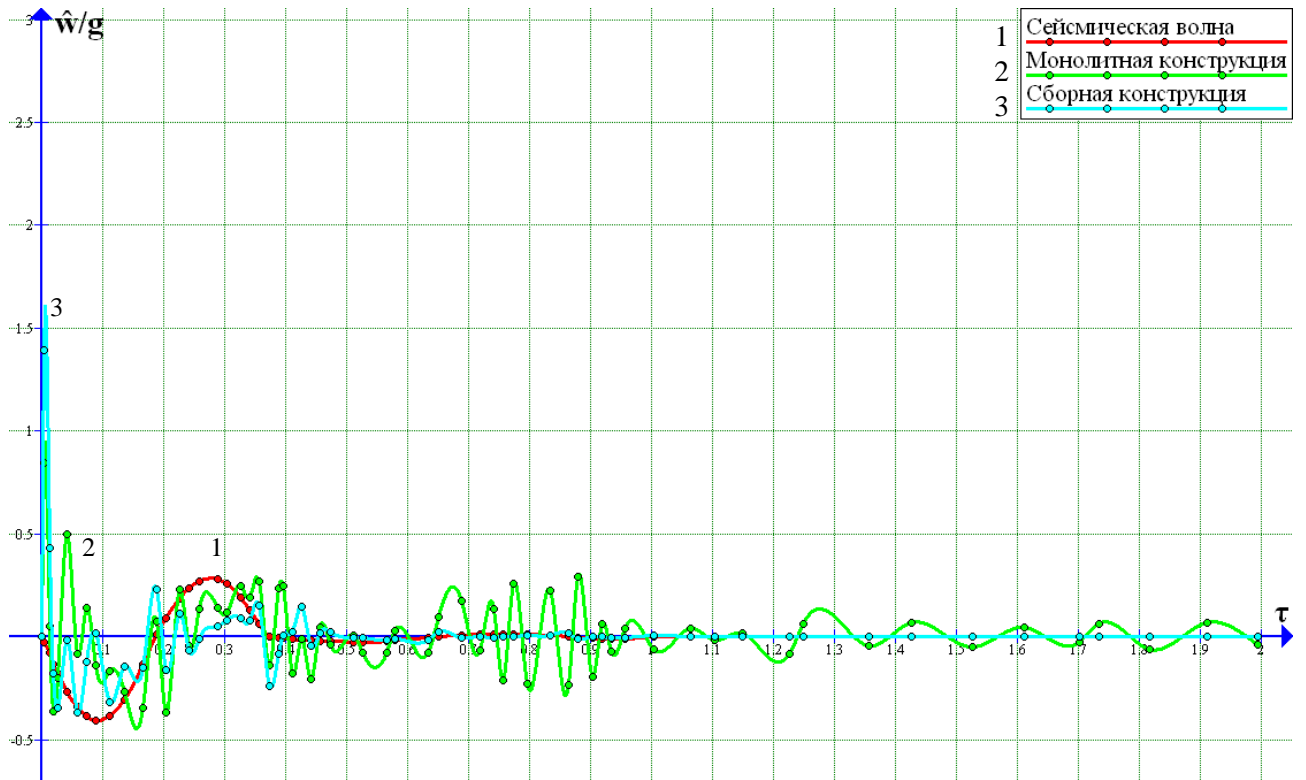


Рис. 4.13. Нормальные ускорения  $\ddot{w}_A$  в точке А

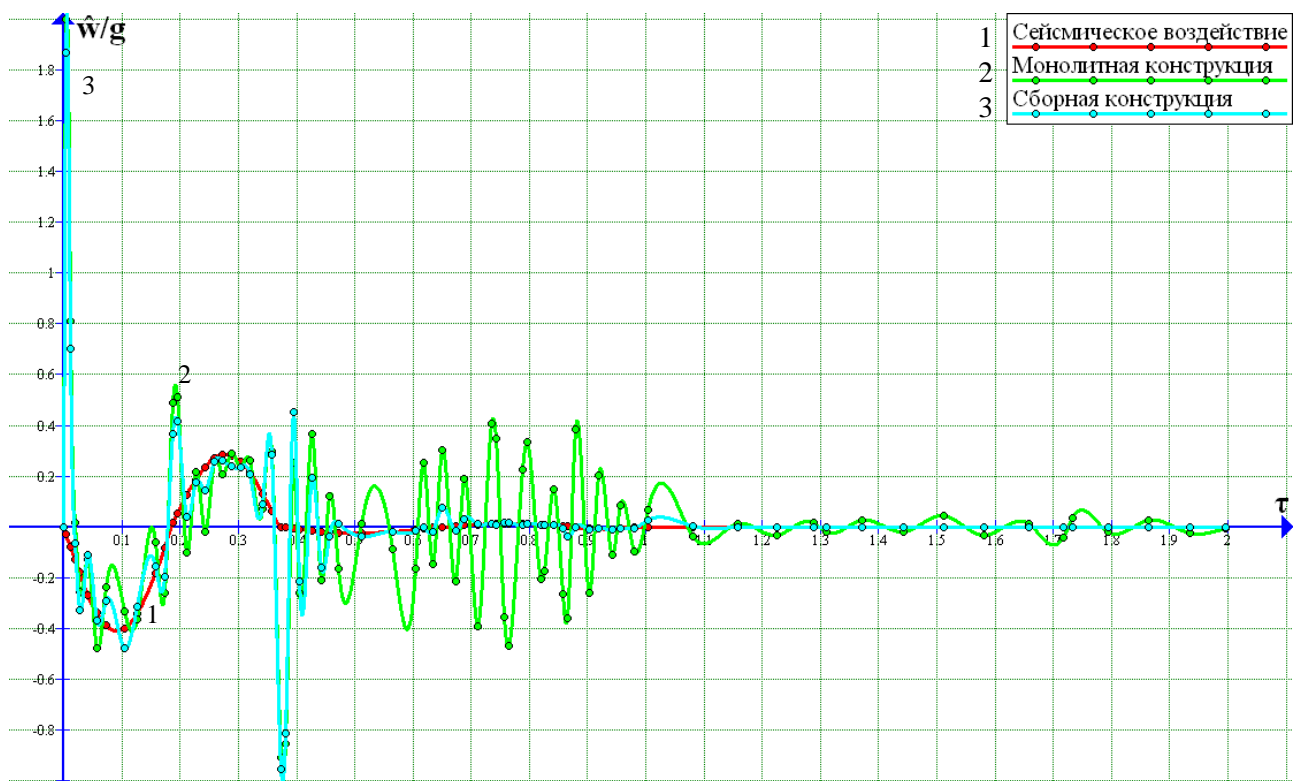


Рис. 4.14. Нормальные ускорения  $\ddot{w}_B$  в точке В

В Табл. 4.5 представлены значения максимальных горизонтальных ускорений в точках составной конструкции А,В (вертикальные элементы: нормальные ускорения  $\ddot{w}_{\max}$ ) и С,Д (горизонтальные элементы: тангенциальные ускорения  $\ddot{u}_{\max}$ ), а также моменты времени  $\tau$ , соответствующие максимальным ускорениям; МК - монолитная конструкция, СК - сборная конструкция.

Таблица 4.5

	т. А		т. В		т. С		т. Д	
	$\ddot{w}_{\max}$	$\tau$	$\ddot{w}_{\max}$	$\tau$	$\ddot{u}_{\max}$	$\tau$	$\ddot{u}_{\max}$	$\tau$
МК	0,845	0,004	2,0	0,004	0,787	0,004	-0,906	0,019
СК	1,391	0,004	1,87	0,004	-0,498	0,042	-1,114	0,019

Как показали результаты проведенного вычислительного эксперимента, условия сопряжения несущих элементов составной конструкции каркасного типа существенно влияют на параметры переходных процессов и несущую способность конструкции в целом. При этом максимальное смещение в волне  $X_{\max}$ , соответствующее началу разрушения составной конструкции, для сборной конструкции возросло по сравнению с монолитным вариантом более чем в 14 раз:  $X_{\max}=8,56$  - для монолитной конструкции и  $X_{\max}=124,39$  - для сборной. Как и в случае монолитной конструкции, разрушение начиналось с горизонтального элемента № 4. Таким образом, увеличение числа степеней свободы составной конструкции приводит к повышению ее несущей способности в целом.

Для исследования влияния параметров армирования  $\mu_1$  и  $\mu_2$  на несущую способность составных каркасных конструкций при сейсмических воздействиях были проведены исследования для монолитной неамортизированной конструкции с параметрами армирования, увеличенными в 2 раза по сравнению с исходными значениями  $\mu_1, \mu_2$  (Табл. 4.3), рекомендуемыми нормативными документами [90]. Принятые значения коэффициентов армирования  $\mu_1, \mu_2$  приведены в Табл. 4.6.



Таблица 4.6

№	1	2	3	4
$\mu_2$ [%]	5	5	2	2
$\mu_1$ [%]	5	5	3	3

Исследования проводились для случая действия горизонтальной компоненты сейсмической волны с максимальным ускорением  $a_{\max}=0,4 \cdot g$  при различных значениях максимального смещения грунта  $X_{\max}$ . Результаты проведенных исследований показали, что увеличение коэффициентов армирования позволило повысить значение  $X_{\max}$ , соответствующее моменту начала разрушения, до величины  $X_{\max}=18,6$ , что более чем в 2 раза превышает значение  $X_{\max}=8,56$ , полученное при исходных значениях  $\mu_1, \mu_2$  (Табл. 4.3). Однако, значение максимального смещения в волне  $X_{\max}=124,39$  для сборной конструкции с исходными нормативными значениями коэффициентов армирования  $\mu_1, \mu_2$  значительно превышает величину  $X_{\max}=18,6$  для монолитной конструкции с повышенными значениями  $\mu_1, \mu_2$ , т.е. использование методов оптимального проектирования и конструирования позволяет существенно снизить материалоемкость составных конструкций каркасного типа при строительстве в сейсмоопасных районах.

Таким образом, результаты проведенных исследований показали, что разработанные математические модели и численные методы позволяют оптимизировать составные каркасные конструкции по прочностным и весовым характеристикам, выработать практические рекомендации по снижению материалоемкости и повышению трещиностойкости несущих элементов конструкций при сейсмических воздействиях. Предложенные параметры  $k_f, k_\varepsilon$  в (3.32), (3.33) позволяют определять оптимальные значения интегральных характеристик вязкоупругих АЭ, обеспечивающих несущую способность железобетонных каркасных монолитных конструкций при действии горизонтальной компоненты сейсмической волны значительной интенсивности.

## Выводы

1. Разработаны и развиты адекватные математические модели и экономичные вычислительные алгоритмы, позволяющие на основе одноступенчатых схем исследовать особенности геометрически и физически нелинейного деформирования составных неоднородных конструкций каркасного типа при воздействии статических и динамических нагрузок различного вида.

2. Для железобетонных элементов составных конструкций в рамках балочной модели Тимошенко и соотношений деформационной теории пластичности построены математические модели, учитывающие возможность возникновения, развития и закрытия трещин в бетоне, а также упруго-пластическую работу армирующих элементов.

3. Рассмотрены различные математические формулировки вариантов сопряжения горизонтальных и вертикальных элементов составных конструкций, моделирующие монолитные и сборные конструкции.

4. В рамках плоской задачи построена новая математическая модель для исследования процессов деформирования каркасных конструкций, установленных, в общем случае, на амортизированной фундаментной плите, при нестационарном воздействии, моделирующем горизонтальную компоненту сейсмической волны, и разработаны практические критерии для определения интегральных значений параметров вязко-упругих амортизаторов.

5. Для общего случая аппроксимации инструментальной сейсмограммы разработана методика, основанная на использовании кубической сплайн-интерполяции. Показано, что в частных случаях инструментальная сейсмограмма может быть аппроксимирована с помощью тригонометрических функций, определенных на соответствующих временных интервалах, при выделении преобладающей частоты сейсмического воздействия.

6. Адаптация квазидинамической форма метода установления в сочетании с явной разностной схемой второго порядка аппроксимации позволила построить одноступенчатую разностную схему для решения как стационарных, так и

нестационарных задач, что позволяет получать оценку остаточной несущей способности конструкций при решении задач с учетом геометрической и физической нелинейности.

7. Достоверность и обоснованность разработанных математических моделей, консервативных разностных схем и численных методов решения соответствующих нелинейных сеточных уравнений основывается на использовании фундаментальных законов механики деформируемого твердого тела, вариационно-разностного метода построения дискретной задачи и подтверждается практической сходимостью численных решений при их сопоставлении с известными аналитическими решениями тестовых задач.

8. Проведено исследование влияния условий сопряжения элементов составной конструкции, а также параметров армирования на процессы деформирования составных каркасных конструкций при сейсмических воздействиях и установлено, что несущая способность может быть повышена реализацией условий сопряжения с большим числом степеней свободы (сборные конструкции) без увеличения параметров армирования.

9. Результаты исследования влияния параметров вязко-упругих амортизирующих элементов на несущую способность и трещиностойкость составной железобетонной конструкции при совместном действии горизонтальной компоненты сейсмической волны и статической нагрузки показали, что использование вязкоупругих амортизаторов позволяет более чем в 10 раз снизить пиковые значения ускорений на элементах каркасной конструкции.

10. Результаты проведенных исследований показали, что разработанные математические модели и численные методы решения нелинейных статических и динамических задач позволяют оптимизировать составные каркасные конструкции по прочностным и весовым характеристикам и выработать практические рекомендации по снижению их материалоемкости.

## Литература

1. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. - М.: Наука, 1978. - 288 с.
2. Айзенберг Я.М., Кодыш Э.Н., Никитин И.К., Смирнов В.И., Трекин Н.Н. Сейсмостойкие многоэтажные здания с железобетонным каркасом - Москва: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2012. – 264 с.
3. Актуальные проблемы исследований по теории сооружений: Сборник научных статей в двух частях. Часть 1/ ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. – Москва: ОАО «ЦПП», 2009. – 327 с.
4. Алмазов В.О. Проектирование железобетонных конструкций по ЕВРОНОРМАМ. Научное издание. - М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов. 2007. – 216 с.
5. Антисейсмические опоры системы GAPEC (Франция). Сейсмостойкое строительство. – М.: ЦИНИС Госстроя СССР, вып. 1, 1980.
6. Бабаков И.М. Теория колебаний. - М.: Наука, 1968. - 560 с.
7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Физматлит. Лаборатория Базовых Знаний, 2001. - 632 с.
8. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. В 2-х томах. - М.: Гос. изд. физ-мат. лит. 1959. Т.1 - 464 с., 1962. Т. 2 - 640 с.
9. Безделев В.В. Анализ сооружений на сейсмические воздействия по уточненным расчетным схемам. – Изв. Вузов. Строительство, 1993. № 11-12.
10. Биргер И.А. Стержни, пластинки, оболочки. - М.: Физматлит, 1992. - 392 с.
11. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. - Рига: Зинатне, 1987. - 295 с.
12. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. - М.: Машиностроение, 1980. - 375 с.
13. Болдышев А.М., Мальганов А.И., Плевков В.С. Расчет и проектирование железобетонных конструкций при статических и кратковременных динами-

- ческих воздействиях. – Томск: Изд-во Томск. Межотраслевого ЦНТИ, 1994. – 164 с.
14. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. - М.: Машиностроение, 1976. - 278 с.
15. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. - М.: Мир, 1987. - 542 с.
16. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. - М.: Машиностроение, 1988. - 272 с.
17. Васильков Г.В., Буйко З.В. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. - СПб.: Издательство "Лань", 2013. - 256 с.
18. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем.-М.: Наука, 1967.-984 с.
19. Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т. Статика и динамика сложных структур: Прикладные многоуровневые методы исследований. - М.: Машиностроение, 1989. - 248 с.
20. Гаврюшин С.С., Коровайцев А.В. Методы расчета элементов конструкций на ЭВМ. - М.: Изд-во ВЗПИ, 1991. - 159 с.
21. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. - М.: Мир, 1984. - 428 с.
22. Галустов К.З. Развитие нелинейной теории ползучести бетона и расчет железобетонных конструкций. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2006. – 248 с.
23. Гаскин В.В., Снитко А.Н., Соболев В.И. Динамика и сейсмостойкость зданий и сооружений. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1992. – Ч. 1: Многоэтажные здания. – 216 с. Ч. 2.
24. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. - М.: Наука, 1973. - 400 с.
25. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. - М.: Наука, 1988. - 232 с.
26. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. - Киев: Вища школа, 1983. - 286 с.

27. Гузь А.Н., Сторожук Е.А., Чернышенко И.С. Физически и геометрически нелинейные задачи статики тонкостенных многосвязных оболочек. - Прикл. механика. 2003, 39, №6, с. 63-73.
28. Дмитриев В.Г., Преображенский И.Н. Деформирование гибких оболочек с вырезами. - Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1988, № 1, с. 177-184.
29. Дмитриев В.Г., Преображенский И.Н. Волновые процессы в предварительно нагруженных гибких оболочках. - В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Вып. 23. Изд-во Казанского университета, 1991, с. 85-92.
30. Дмитриев В.Г. Вариационно-разностные схемы в нелинейной механике оболочек. - Мат. IV Международного семинара "Технологические проблемы прочности". Подольск. МГОУ, 1997, с. 57 - 67.
31. Дмитриев В.Г., Судьин А.А., Спиридонов В.П. Математическое моделирование процессов нелинейного деформирования неоднородных строительных конструкций при сейсмических воздействиях. – Мат. XIII Межд. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Москва-Ярополец, 2007, с. 135 - 144.
32. Дмитриев В.Г., Жаворонок С.И., Коровин Е.К., Москвитин Г.В. Оптимальные вычислительные технологии в математическом моделировании нелинейных задач механики деформируемого твердого тела. – Инженерная физика, 2008, № 6, с. 2 – 5.
33. Дмитриев В.Г., Коровин Е.К., Роффе А.И., Судьин А.А. Исследование особенностей реакции монолитных и сборных строительных конструкций каркасного типа на сейсмические воздействия методами вычислительного эксперимента. – Мат. XVIII Межд. семинара "Технологические проблемы прочности". Подольск. МГОУ, 2011, с. 19 - 31.
34. Дмитриев В.Г., Роффе А.И., Судьин А.А. Математическое моделирование процессов статического и динамического деформирования железобетонных каркасных конструкций с учетом трещинообразования. – Мат. XVIII Межд.

- симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Том 1. Москва-Ярополец. 2012. - с. 77.
35. Дмитриев В.Г., Роффе А.И., Судьин А.А. Исследование процессов особенностей статического и динамического деформирования железобетонных строительных конструкций с учетом упруго-пластической работы арматуры. – Мат. XIX Межд. семинара "Технологические проблемы прочности". Подольск. МГОУ, 2012, с. 37 - 44.
36. Дмитриев В.Г., Роффе А.И., Судьин А.А. Исследование влияния краевых условий на деформирование и несущую способность строительных каркасных конструкций при сейсмических воздействиях. - Мат. IXX Межд. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Том 1. Москва-Ярополец. 2013. - с. 84-86.
37. Дмитриев В.Г., Роффе А.И., Судьин А.А. Учет влияния вариантов кинематических и силовых условий сопряжения перегородок и колонн на несущую способность и деформирование монолитных и сборных железобетонных конструкций каркасного типа при сейсмических воздействиях. – Мат. XX Межд. семинара "Технологические проблемы прочности". Подольск. МГОУ, 2013, с. 28 - 34.
38. Дмитриев В.Г., Болтунова М.А., Роффе А.И., Судьин А.А. Особенности математического моделирования переходных процессов в железобетонных строительных конструкциях купольного и каркасного типа при сейсмических воздействиях. - Мат. XX Межд. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Том 1. Москва. 2014. - с. 73-75.
39. Дмитриев В.Г., Роффе А.И., Судьин А.А. Определение оптимальных значений параметров вязкоупругих амортизаторов сейсмозащищенных зданий и сооружений. – Мат. XXI Межд. семинара "Технологические проблемы прочности". Подольск. МГОУ, 2014, с. 159 - 166.

40. Дмитриев В.Г., Егорова О.В., Рабинский Л.Н., Роффе А.И. Особенности построения консервативных разностных схем в нелинейных задачах механики многосвязных оболочек из композиционных материалов. - Механика композиционных материалов и конструкций, 2014, том 20, № 3, с. 364 - 374.
41. Дмитриев В.Г., Болтунова М.А., Роффе А.И. Исследование особенностей процессов деформирования многосвязных железобетонных конструкций покрытий при сейсмических воздействиях методами вычислительного эксперимента. - Сб. трудов II Межд. научно-техн. конференции «Инновационные технологии в развитии строительства, машин и механизмов для строительства и коммунального хозяйства, текущего содержания и ремонта железнодорожного пути» в 2 т. / Смоленский филиал МИИТ. Смоленск. Том 1. 2014. - с. 82-91.
42. Дмитриев В.Г., Роффе А.И., Судьин А.А. Построение численных решений геометрически и физически нелинейных начально-краевых задач механики неоднородных конструкций на основе вариационно-разностного метода. – Мат. XXII Межд. семинара "Технологические проблемы прочности". Подольск. МГОУ, 2015, с. 126 - 142.
43. Дмитриев В.Г., Егорова О.В., Рабинский Л.Н., Роффе А.И. Особенности конечно-разностной аппроксимации граничных условий сопряжения элементов составных конструкций при численном решении нелинейных начально-краевых задач. - Труды МАИ, выпуск № 82, 2015, с. 1-21.
44. Евстифеев В.Г. Железобетонные конструкции (расчет и конструирование). – СПб.: Иван Федоров, 2005. – 192 с.
45. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций)ю - М.М6 Издательство АСВ, 2008. - 336 с.
46. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности. - М.: Высш. школа, 1990. - 368 с.
47. Инженерные конструкции / В.Н. Голосов, В.В. Ермолов, Н.В. Лебедева и др. - М.: «Архитектура-С», 2007. - 408 с.



- 48.Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во МГУ, 1990. - 310 с.
- 49.Казачек В.Г., Шилов А.Е., Коршун Е.Л. Особенности расчета железобетонных каркасных зданий с учетом требований действующих норм республики Беларусь. - Строительная наука и техника, № 5, 2010, с. 25 - 30.
- 50.Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. - 512 с.
- 51.Карапетян Б.К., Карапетян Н.К. Сейсмические воздействия на здания и сооружения. – М.: Наука, 1978. – 159 с.
- 52.Каюк Я.Ф. Геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек. - Киев: Наук. думка, 1987. - 208 с.
- 53.Колчунов В.И., Пятикрестовский К.П., Ключева Н.В. Пространственные конструкции покрытий. – М.: Изд-во АСВ, 2008. - 352 с.
- 54.Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений: Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
- 55.Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др. - М.: Машиностроение, 1990. - 512 с.
- 56.Крысько В.А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. - Саратов. 1976. - 214 с.
- 57.Лебедева Н.В. Фермы, арки, тонкостенные пространственные конструкции. – М.: «Архитектура – С». 2006. – 120 с.
- 58.Майборода В.П., Кравчук А.С., Холин Н.Н. Скоростное деформирование конструкционных материалов. - М.: Машиностроение, 1986. - 264 с.
- 59.Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. - М.: Машиностроение, 1975. - 387 с.
- 60.Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1989. - 608 с.
- 61.Методы динамических расчетов и испытаний тонкостенных конструкций / А.В. Кармишин, А.И. Жуков, В.Г. Колосов и др. - М.: Машиностроение, 1990. - 288 с.
- 62.Мкртычев О.В., Джинчвелашвили Г.А. Проблемы учета нелинейностей в теории сейсмостойкости. – Москва: МГСУ, 2012. – 192 с.

63. Мкртычев О.В., Юрьев Р.В. Моделирование случайных акселерограмм и нелинейный расчет строительных конструкций. – Москва: МГСУ, 2012. – 87 с.
64. Нагрузки и воздействия на здания и сооружения / В.Н. Гордеев, А.И. Лантух-Лященко, В.А. Пашинский, А.В. Перельмутер, С.Ф. Пичугин. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2006. – 482 с.
65. Назаров Ю.П. Аналитические основы расчета сооружений на сейсмические воздействия. - М.: Наука, 2010. - 468 с.
66. Николаенко Н.А., Назаров Ю.П. Динамика и сейсмостойкость сооружений. – М.: Стройиздат, 1988. – 312 с.
67. Новожилов В.В. Вопросы механики сплошной среды. - Л.: Судостроение, 1989. - 400 с.
68. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. - М.: Высшая школа, 1985. - 392 с.
69. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. - Киев: Наук. думка, 1973. - 248 с.
70. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин: (Нестационарные задачи). - Л.: Судостроение, 1987. - 316 с.
71. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.
72. Плевков В.С., Мальганов А.И., Балдин И.В. Железобетонные и каменные конструкции сейсмостойких зданий и сооружений. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2006. – 290 с.
73. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 366 с.
74. Преображенский И.Н., Дмитриев В.Г. Расчет составных композитных оболочечных конструкций при статических и динамических воздействиях. - Машиностроение, 1989, № 2, с. 50-55.

- 75.Преображенский И.Н., Дмитриев В.Г. Вычислительный эксперимент в механике машиностроительных конструкций. - Проблемы машиностроения и автоматизации, 1992, № 2, с. 64-68.
- 76.Приказчиков В.Г. Интегро-интерполяционный метод построения разностных уравнений в задачах колебаний пластины. - Ученые записки ЦАГИ, 1973, IV, № 4, с. 73-76.
- 77.Проблемы расчета пространственных конструкций. – Межвузовский сборник научных трудов. М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева. 1980. – 190 с.
- 78.Пространственные конструкции в Красноярском крае: Сб. научн. трудов - Красноярск, № 17, 1985. - 213 с.
- 79.Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трех томах. - М: Машиностроение, 1968. Том 1. - 832 с.
- 80.Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела.- М.: Наука, 1988.- 712 с.
- 81.Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ.- Л.: Судостроение, 1974. В 2-х т. Т.1 - 308 с. Т.2 - 312 с.
- 82.Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник / В.И. Мяченков, В.П. Мальцев, В.П. Майборода и др. - М.: Машиностроение, 1989. -520 с.
- 83.Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. - М: Мир, 1972. - 418 с.
- 84.Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1998. – 532 с.
- 85.Руководство по проектированию железобетонных пространственных покрытий и перекрытий. – М.: Стройиздат, 1979. – 421 с.
- 86.Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений.- М.: Наука, 1978. - 592 с.
- 87.Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989. - 432с.
- 88.Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989. - 616 с.

89. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
90. СНиП 52-01-2003. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения.
91. СНиП II -7-81\*. Строительство в сейсмических районах.
92. Сейсмоизоляция и адаптивные системы сейсмозащиты / Айзенберг Я.М. и др. – М.: Наука, 1983. – 140 с.
93. Сетков В.И., Сербин Е.П. Строительные конструкции: Расчет и проектирование. – М.: ИНФРА-М, 2007. – 448 с.
94. Современное состояние теории сейсмостойкости и сейсмостойкие сооружения / Баркан Д.Д. и др. – М.: Стройиздат, 1973 – 280 с.
95. Синицин А. П. Практические методы расчета сооружений на сейсмические нагрузки. – М.: Стройиздат, 1987. – 234 с.
96. Сопротивление материалов и теория сооружений. – Республиканский межведомственный научно-технический сборник. Выпуск 50. Киев: «Будівельник». 1987. – 112 с.
97. Тараканов С.И. О сходимости метода “динамическая релаксация” в задачах нагружения упругих оболочек вращения. - Вестник МГУ: Мат. мех. № 5, 1984, с. 90-93.
98. Феодосьев В.И. Об одном способе решения задач устойчивости деформируемых систем. - Прикл. математика и механика, 1963, **27**, № 2, с. 256-275.
99. Харланов В.Л. Численное исследование высоковязких демпферов в элементах сейсмоизоляции. – Строительная механика и расчет сооружений, 2006, № 3, с. 35 - 38.
100. Чернов Ю.Т. Прикладные методы динамики сооружений (метод “нормальных» форм и его приложения). – М.: Изд-во АСВ, 2001. – 80 с.
101. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). – М.: Эдиторал УРСС, 1999. – 224 с.

- 102.Dmitriev V.G., Sudyin A.A. Deformation of reinforced concrete spherical dome with cutouts on the damped foundation beds. – Int. Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2009. (1&2), № 5, pp. 13-22.
- 103.Dmitriev V.G. Mathematical Modelling of Non-Linear Deformation Process for Frame-Type Building Structures Under Seismic Loads. – Int. Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2012. Volume 8, Issue 2, pp. 13-29.
- 104.Dmitriev V.G., Roffe A.I. Study how viscoelastic damper parameters impact deformation and load-bearing capacity of frame-type reinforced concrete structures under seismic loads. – Int. Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2015. Volume 11, Issue 1, pp. 104-114.
- 105.Frieze P.A., Hobbs R.E., Dowling P.J. Application of dynamic relaxation to the large deflection elasto-plastic analysis of plates. - Computers & Structures, 1978, v. 8, № 2, pp. 301-310.
- 106.Nelson R.Bauld, James G. Goree, Lih-Shyng Tzeng. A comparison of finite-difference and finite-element methods for calculating free edge stresses in composites. - Computers & Structures, 1985, v.20, № 5, pp. 897-914.
- 107.Tassios M.P. Redesign, repair and strengthening of buildings in seismic regions, II seminar in construction in seismic regions. Economic Commission for Europe // Lisbon, Portugal, 1981.
- 108.Tong Pin. An adaptive dynamic relaxation method for static problems. - Comput. Mech. '86: Theory and Appl. Proc. Int. Conf., Tokyo, 1986, v. 1, pp. II/89-II/101.
- 109.Turvey G.J., Der Avanessian N.G.V. Elastic large deflection of circular plates using graded finite-differences. - Comput. & Struct. 1986, v. 23, № 6, pp. 763-774.
- 110.Wolf I.P., Oberhuber P. Effects of horizontally propagating waves on the response of structures with soft first storey. // Earthquake Engineering and Structural Dynamic, 1981, v.9, №1, p.1 – 21.