

На правах рукописи



Коровайцева Екатерина Анатольевна

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ
ИЗ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ**

Специальность: 1.1.8. – «Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2024 г.

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»

Официальные оппоненты:

Сорокин Федор Дмитриевич

доктор технических наук, доцент,
профессор кафедры «Прикладная механика»
ФГБОУ ВО «Московский государственный
технический университет им. Н.Э. Баумана»;

Бережной Дмитрий Валерьевич

доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры «Теоретическая
механика» ФГАОУ ВО «Казанский
(Приволжский) федеральный университет»;

Шутов Алексей Валерьевич

доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник лаборатории
механики композитов ФГБУН «Институт
гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО
РАН».

Ведущая организация:

**ФГБОУ ВО «Казанский государственный
энергетический университет», г. Казань**

Защита диссертации состоится 17 апреля 2024 г. в 15 часов 00 мин.
на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при ФГБОУ ВО «Московский
авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по
адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ
ВО МАИ (НИУ) по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4 и на
сайте https://mai.ru/events/defence/doctor/?ELEMENT_ID=177586

Автореферат разослан _____ 2024 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета 24.2.327.07



Д.О. Сердюк

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В настоящее время оболочечные конструкции из гиперупругих материалов находят широкое применение в различных отраслях машиностроения и приборостроения. Так, в космической технике эластичные оболочечные конструкции, способные функционировать в большом диапазоне перемещений, поворотов и деформаций, используются в качестве скафандров космонавтов, тормозных устройств для спускаемых космических аппаратов, исполнительных элементов приборов и аппаратуры. Мягкие оболочки являются основными элементами воздухоплавательных конструкций и воздухоопорных сооружений. При создании устройств активно развивающейся в последние годы мягкой робототехники применяются оболочечные элементы из высокоэластичных материалов различных типов. Среди современных областей применения оболочек из высокоэластичных материалов следует также отметить «умную» электронику, гибкую электронику, создание протезов внутренних органов и электронной кожи.

Проектирование перечисленных устройств и элементов конструкций требует проведения научно-исследовательских работ по численному анализу их напряженно-деформированного состояния в предполагаемых условиях функционирования, включая исследование зависимости эксплуатационных характеристик будущего изделия от его проектируемых геометрических или физических параметров. Сложность таких задач обусловлена их геометрической и физической нелинейностью. В известной литературе приводятся лишь результаты решения отдельных задач для конкретной формы меридиана, типа материала, вида нагружения и закрепления оболочки. При этом авторы, как правило, избегают использования коммерческих программных комплексов, ориентируясь на самостоятельную математическую формулировку задачи, разработку и реализацию алгоритма ее решения. Несмотря на способность рассматриваемых высокоэластичных материалов работать при деформациях, существенно превышающих 100%, в весьма ограниченном числе публикаций представлены результаты расчетов высокоэластичных конструкций,

иллюстрирующие указанную способность. Кроме того, существующие постановки задач динамического деформирования конструкций из высокоэластичных материалов, несмотря на обилие публикаций последних лет по данной теме, характеризуются однотипностью вследствие сложности рассматриваемой проблемы.

Очевидно, указанная ограниченность математических постановок и областей применимости методов решения задач деформирования мягкооболочечных конструкций замедляет развитие отраслей машиностроения и приборостроения, в которых востребовано моделирование поведения оболочек из гиперупругих материалов, функционирующих при больших перемещениях и деформациях.

Цель работы. Целью работы является разработка и развитие математических моделей и методов решения задач деформирования тонкостенных оболочек вращения из гиперупругих материалов при произвольных перемещениях и деформациях.

Научную новизну работы составляют следующие результаты:

1. Получение разрешающих соотношений, описывающих поведение тонкостенных оболочек вращения из гиперупругих материалов как при осесимметричном, так и при неосесимметричном статическом и динамическом нагружении в виде, адаптированном для формулировки алгоритмов решения задач.

2. Разработка систематизации одномерных краевых задач механики тонкостенных конструкций, основанной на обобщении их математических постановок.

3. Адаптация алгоритмов решения нелинейных многоточечных неразветвленных краевых и начально-краевых задач, основанных на развитии метода дифференцирования по параметру, к задачам деформирования оболочек из гиперупругих материалов с учетом особенностей соответствующих систем уравнений.

4. Решение комплекса новых задач осесимметричного статического деформирования оболочек вращения из высокоэластичных материалов, в том числе с использованием соотношений моментной теории оболочек. Используемые алгоритмы позволили впервые получить значения меридиональных и окружных деформаций порядка 2000%, а поперечных деформаций, близких к -100%, в численном расчете, а также исследовать напряженно-деформированное состояние оболочек с локальным утонением из высокоэластичных материалов при глубоком закритическом поведении.

5. Решение комплекса новых задач динамического деформирования оболочек из высокоэластичных материалов при больших деформациях и перемещениях, в том числе с использованием соотношений моментной теории оболочек. Впервые при решении нелинейной начально-краевой задачи деформирования оболочки получены значения поперечных деформаций, превышающие по абсолютной величине 90%, без необходимости введения искусственного демпфирования в физические соотношения.

6. Разработка и применение метода автоматической сегментации для повышения точности решения рассматриваемых задач.

7. Формулировка условий, позволяющих оценить однозначность продолжения решения задачи о деформировании оболочки из гиперупругого материала в процессе построения численного решения.

Практическая значимость работы. Предложенные в работе постановки задач, алгоритмы их решения и разработанные комплексы программ могут быть использованы для решения широкого круга прикладных задач осесимметричного статического и динамического деформирования оболочек из высокоэластичных материалов при больших перемещениях и деформациях.

Методы исследования. Решение поставленных в работе физически и геометрически нелинейных задач осесимметричного статического деформирования мягких оболочек основывается на использовании метода непрерывного продолжения по параметру. При решении задач динамики применяется метод прямых, позволяющий свести начально-краевую задачу к краевой, решаемой с

использованием метода непрерывного продолжения по параметру последовательно на каждом шаге по времени. Сформулированы алгоритмы, учитывающие особенности используемых разрешающих систем уравнений, и разработаны комплексы программ, реализующие указанные алгоритмы.

На защиту выносятся:

- математическая постановка задач статического и динамического деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов;
- классификация одномерных краевых задач механики тонкостенных конструкций;
- алгоритмы численного решения задач осесимметричного статического и динамического деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов при больших перемещениях и деформациях;
- метод автоматической сегментации интервала интегрирования краевой задачи;
- критерий оценки однозначности продолжения решения по параметру в процессе проведения вычислений в рамках реализации разработанных в диссертации алгоритмов;
- результаты решений новых задач нелинейного осесимметричного статического и динамического деформирования оболочек из высокоэластичных материалов при больших перемещениях и деформациях.

Достоверность результатов обеспечивается проведением тестовых расчетов, позволяющих сравнить построенное численное решение с аналитическим, а при отсутствии аналитического решения – анализом сходимости результатов, использованием предложенных в работе методов повышения точности решения разрешающих систем уравнений, проверкой предложенных в работе критериев однозначности продолжения решения, либо проведением расчетов по разным системам уравнений.

Апробация работы. Основные результаты, полученные при выполнении диссертационной работы, докладывались и обсуждались на:

- XXV-XXIX Международных симпозиумах «Динамические и

технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова (Москва, 2019-2023 гг.);

- Ежегодной Всероссийской конференции молодых ученых-механиков (Сочи, 2020-2023 гг.);

- 25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (Milano, Italy, 2021 г.);

- XIV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (Алушта, 2022 г.);

- XII Международной научно-практической конференции, посвященной 160-летию Белорусской железной дороги (Гомель, 2022 г.);

- Ежегодных научных конференциях «Ломоносовские чтения» (г. Москва, 2020-2023);

- XXIII Зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 2023 г.);

- XIII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Санкт-Петербург, 2023 г.);

- Научном семинаре "Механика макро- и нано-структур" (Новосибирск, 2023 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 29 научных работ, в том числе 12 научных статей в изданиях, рекомендованных ВАК Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, из них 5 в изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования WoS и SCOPUS, а также получено 3 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего 219 наименований. Общий объем работы составляет 290 страниц, включая 169 рисунков и 13 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении проведён обзор трактовок понятия мягкой оболочки и сформулировано определение указанного понятия, принятое для использования в

диссертации. Обоснована актуальность темы, сформулирована цель исследования, научная новизна и практическая ценность работы, изложено содержание работы по главам.

В первой главе приведен обзор известных исследований поведения оболочек при больших перемещениях и деформациях. Развитие общей теории нелинейного деформирования тонкостенных конструкций связано с именами таких ученых, как И.Г. Бубнов, С.П. Тимошенко, Х.М. Муштари, К.З. Галимов, В.В. Новожилов, В.Н. Паймушин и др., а среди зарубежных авторов – Т. Karman, R.S. Rivlin, A.E. Green, W. Zerna, J.E. Adkins, A. Libai и др. Подчеркнуто, что теория мягких оболочек как частный случай общей теории оболочек получила наибольшее развитие исключительно в работах отечественных исследователей - Х.А. Рахматулина, С.А. Алексеева, А.С. Григорьева, В.М. Гордеева, В.Л. Бидермана, В.И. Усюкина, В.Э. Магулы, Б.И. Друзя, К.Ф. Черныха, С.М. Кылытчанова, В.В. Риделя, Б.В. Гулина и др. Приведен обзор существующих методов исследования задач статического и динамического деформирования мягкооболочечных конструкций. Отмечено различие работ отечественных и зарубежных исследователей, заключающееся в ориентации первых на решение конкретных прикладных задач – как правило, парашютостроения и судостроения. При этом разрабатываются модели исследуемой конструкции, учитывающие ее специфические свойства или условия работы, а деформации в абсолютном большинстве работ предполагаются малыми. Для зарубежных авторов характерно не только отсутствие прикладной направленности рассматриваемых задач, но и анализ больших деформаций уже в первых работах, относящихся к 50-м годам XX века. Однако последнее оказалось возможным благодаря упрощенной постановке задачи, не присущей отечественным авторам.

На основании проведенного обзора работ формулируются задачи диссертации.

Во второй главе представлен основанный на использовании вариационных принципов вывод разрешающих соотношений теории мягких оболочек при больших деформациях в виде, удобном для последующего приведения

математической постановки задачи к форме, необходимой для разработки вычислительных алгоритмов. В рамках гипотез Кирхгофа-Лява построены уравнения как неосесимметричного, так и осесимметричного статического деформирования мягких оболочек вращения при произвольных перемещениях и деформациях. Сформулированы уравнения технической теории мягких оболочек в удобной для последующей алгоритмизации их решения форме. Уравнения динамического деформирования построены лишь для рассматриваемого в диссертации случая осесимметричного нагружения мягких оболочек вращения при больших деформациях и в безразмерной форме имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{dT_{1x}}{dS} &= \alpha T_{2y} + \beta T_{1z} - p \mathcal{G}_1 (1 + e_2) \gamma R + \gamma h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{dT_{1z}}{dS} &= -\beta T_{1x} - \delta T_{2y} + p (1 + \varepsilon_1) (1 + e_2) \gamma R - \gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{du}{dS} &= \chi \varepsilon_1 - \beta w; & \frac{dw}{dS} &= -\chi \mathcal{G}_1 + \beta u; \\ e_2 &= \chi (\alpha u + \delta w) / \gamma; \\ T_{1x} &= T_1^* (1 + \varepsilon_1) \frac{\gamma}{\chi}; \quad T_{2y} = T_2^* (1 + e_2) \chi; \quad T_{1z} = T_1^* \mathcal{G}_1 \frac{\gamma}{\chi}; \\ T_1^* &= T_1 \frac{1 + e_2}{1 + e_1}; \quad T_2^* = T_2 \frac{1 + e_1}{1 + e_2}; \\ T_1 (1 + e_1) (1 + e_2) \frac{\gamma}{\chi} &= T_{1x} (1 + \varepsilon_1) + T_{1z} \mathcal{G}_1; \\ T_1 &= T_1(e_1, e_2); \quad T_2 = T_2(e_1, e_2).\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения коэффициентов

$$\alpha = \frac{1}{A_1} \frac{dA_2}{dS}; \quad \beta = \frac{A_1}{R_1}; \quad \gamma = A_1 A_2; \quad \delta = \frac{A_2}{R_2}; \quad \chi = A_1,$$

где A_1, A_2 - коэффициенты Ляме, R_1, R_2 - радиусы кривизны недеформированной срединной поверхности оболочки.

Физические соотношения в безразмерной форме, связывающие истинные

усилия T_1, T_2 с удлинениями e_1, e_2 , в случае двухосного напряженного состояния сформулированы для следующих моделей упругих потенциалов материала оболочки:

1) неогуковский

$$T_1 = 2C_0 h \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \left[1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \cdot \lambda_2^2} \right]; \quad 1 \Leftrightarrow 2,$$

2) Муни-Ривлина

$$T_1 = 2h \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} \right) [C_{10} + C_{01} \cdot \lambda_2^2]; \quad 1 \Leftrightarrow 2,$$

3) Йео

$$T_1 = 2h \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} \right) \cdot [C_1 + 2C_2 \cdot (I_T - 3) + 3C_3 \cdot (I_T - 3)^2]; \quad 1 \Leftrightarrow 2,$$

где кратности удлинений $\lambda_i = 1 + e_i; i = 1, 2; \quad I_T = \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \lambda_1^2 + \lambda_2^2;$

$C_0, C_{10}, C_{01}, C_1, C_2, C_3$ - физические постоянные материалов.

В третьей главе предложена систематизация одномерных физически и геометрически нелинейных краевых задач деформирования тонкостенных конструкций. Обоснована необходимость введения систематизации, связанная с одной из задач диссертации, заключающейся в разработке вычислительных алгоритмов, применимых для решения максимально широкого круга задач статического и динамического деформирования осесимметричных оболочек вращения из высокоэластичных материалов. Систематизация позволяет выделить лишь шесть единых математических формулировок, характерных для любой из указанных задач, независимо от формы меридиана оболочки вращения, свойств материала, условий нагружения или закрепления, и, как следствие, минимизировать круг разрабатываемых вычислительных алгоритмов.

Приведем формы краевых задач с дополнительными алгебраическими соотношениями как наиболее характерные для рассматриваемых проблем деформирования оболочек из гиперупругих материалов. При этом, хотя

поведение оболочек из таких материалов описывается нелинейными соотношениями, в представленной систематизации учитываются и линейные краевые задачи, возникающие при формулировке промежуточных этапов вычислительных алгоритмов:

1) линейная краевая задача (каноническая форма I) с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{A}(x, \boldsymbol{\mu})\mathbf{y} + \mathbf{C}(x, \boldsymbol{\mu})\mathbf{z} + \mathbf{q}(x, \boldsymbol{\mu}), \quad (1)$$

$$\mathbf{D}(x, \boldsymbol{\mu})\mathbf{y} + \mathbf{E}(x, \boldsymbol{\mu})\mathbf{z} + \mathbf{d}(x, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\mathbf{B}_1(x_1, \boldsymbol{\mu}_1)\mathbf{y}_1 + \mathbf{G}_1(x_1, \boldsymbol{\mu}_1)\mathbf{z}_1 + \mathbf{b}_1(x_1, \boldsymbol{\mu}_1) = \mathbf{0}, \quad 1 \rightleftharpoons 2. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{y}(x, \boldsymbol{\mu})$ – вектор-функция разрешающих переменных задачи, $\mathbf{z}(x, \boldsymbol{\mu})$ – вектор-функция дополнительных переменных, т.е. переменных, которые не входят под знак производной в дифференциальных уравнениях задачи (1), а рассчитываются по соотношениям линейной алгебры (2), $\mathbf{q}(x, \boldsymbol{\mu})$ – вектор-функция заданных обобщенных распределенных нагрузок, $\boldsymbol{\mu}(x)$, $\boldsymbol{\mu}_1$, $\boldsymbol{\mu}_2$ – вектор-функция и вектора исходных значений параметров задачи, 1 и 2 – индексы значений переменных и аргумента в начальной и конечной точках интервала решения краевой задачи, (3) – граничные условия задачи.

2) линейная многоточечная неразветвленная краевая задача (каноническая форма II) с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \mathbf{A}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i)\mathbf{y}_i + \mathbf{C}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i)\mathbf{z}_i + \mathbf{q}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i), \quad i \in [1, N],$$

$$\mathbf{D}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i)\mathbf{y}_i + \mathbf{E}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i)\mathbf{z}_i + \mathbf{d}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{B}_1(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1})\mathbf{y}_{1,1} + \mathbf{G}_1(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1})\mathbf{z}_{1,1} + \mathbf{b}_1(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}) = \mathbf{0}, \quad 1,1 \rightleftharpoons N,2, \quad (4)$$

$$\mathbf{y}_j(x_{j,2}) = \mathbf{y}_{j+1}(x_{j+1,1}) + \mathbf{C}_{j+1}(x_{j+1,1}, \boldsymbol{\mu}_{j+1,1}), \quad j \in [1, N-1]. \quad (5)$$

Здесь N – число сегментов краевой задачи, (4) – граничные условия, (5) – условия сопряжения сегментов краевой задачи.

3) линейная многоточечная разветвленная краевая задача (каноническая форма III) с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \mathbf{A}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{y}_i + \mathbf{C}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{z}_i + \mathbf{q}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i), \quad i \in [1, N],$$

$$\mathbf{D}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{y}_i + \mathbf{E}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i) \mathbf{z}_i + \mathbf{d}_i(x_i, \boldsymbol{\mu}_i) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{B}_j(x_{j,1}, \boldsymbol{\mu}_{j,1}) \mathbf{y}_{j,1} + \mathbf{G}_j(x_{j,1}, \boldsymbol{\mu}_{j,1}) \mathbf{z}_{j,1} + \mathbf{b}_j(x_{j,1}, \boldsymbol{\mu}_{j,1}) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

$$\mathbf{H}_j(x_{j,1}) \mathbf{y}_{j,1} + \mathbf{H}_m(x_{m,2}) \mathbf{y}_{m,2} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

$$\mathbf{H}_j(x_{j,1}) \mathbf{y}_{j,1} + \mathbf{H}_m(x_{m,1}) \mathbf{y}_{m,1} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

$$\mathbf{H}_j(x_{j,2}) \mathbf{y}_{j,2} + \mathbf{H}_m(x_{m,2}) \mathbf{y}_{m,2} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

$$\sum_{m=1}^l \mathbf{H}_m(x_{m,1}) \mathbf{y}_{m,1} + \sum_{n=1}^p \mathbf{H}_n(x_{n,2}) \mathbf{y}_{n,2} + \mathbf{k}_q(x_q, \boldsymbol{\mu}_q) = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Здесь вне знаков суммирования значения индексов j , m , l , p , q определяются топологией конкретной краевой задачи и могут быть любыми из диапазона $[1, N]$. Условия (6) являются граничными, (7)-(9) – условия неразрывности обобщенных перемещений, (10) – условия равновесия внутренних узлов конструкции.

Для нелинейных задач дополнительные соотношения как в дифференциальных уравнениях, так и в граничных условиях заменяются на нелинейные функциональные соотношения:

1) нелинейная краевая задача (каноническая форма IV) с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}, \alpha),$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}, \alpha) = \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{\psi}_1(x_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1, \boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{q}_1, \alpha) = \mathbf{0}, \quad 1 \Leftrightarrow 2.$$

Здесь \mathbf{f} – вектор-функция из правых частей разрешающей системы уравнений, $\boldsymbol{\varphi}$ – вектор-функция нелинейных дополнительных алгебраических соотношений, $\boldsymbol{\psi}_1$, $\boldsymbol{\psi}_2$ – вектор-функции заданных граничных условий, α – параметр нагрузки, вводимый при использовании метода непрерывного продолжения по параметру решения нелинейной краевой задачи.

2) нелинейная многоточечная неразветвленная краевая задача (каноническая форма V) с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i, \alpha), \quad i \in [1, N], \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_i(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i, \alpha) = \mathbf{0}, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_1(x_{1,1}, \mathbf{y}_{1,1}, \mathbf{z}_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}, \mathbf{q}_{1,1}, \alpha) = \mathbf{0}, \quad 1, 1 \rightleftharpoons N, 2, \quad (13)$$

$$\mathbf{y}_{j,2}(x_{j,2}) = \mathbf{y}_{j+1,1}(x_{j+1,1}) + \mathbf{C}_{j+1}(x_{j+1,1}, \boldsymbol{\mu}_{j+1,1}), \quad j \in [1, N-1]. \quad (14)$$

Здесь условия (13) являются граничными, а (14) – условия сопряжения сегментов краевой задачи.

3) нелинейная многоточечная разветвленная краевая задача (каноническая форма VI) с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i, \alpha), \quad i \in [1, N],$$

$$\boldsymbol{\Phi}_i(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i, \alpha) = \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{\Psi}_j(x_{j,1}, \mathbf{y}_{j,1}, \mathbf{z}_{j,1}, \boldsymbol{\mu}_{j,1}, \mathbf{q}_{j,1}, \alpha) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{H}_j(x_{j,1})\mathbf{y}_{j,1} + \mathbf{H}_m(x_{m,1})\mathbf{y}_{m,1} = \mathbf{0}, \quad (15)$$

$$\mathbf{H}_j(x_{j,1})\mathbf{y}_{j,1} + \mathbf{H}_m(x_{m,2})\mathbf{y}_{m,2} = \mathbf{0}, \quad (16)$$

$$\mathbf{H}_j(x_{j,2})\mathbf{y}_{j,2} + \mathbf{H}_m(x_{m,2})\mathbf{y}_{m,2} = \mathbf{0}, \quad (17)$$

$$\sum_{m=1}^l \mathbf{H}_m(x_{m,1})\mathbf{y}_{m,1} + \sum_{n=1}^p \mathbf{H}_n(x_{n,2})\mathbf{y}_{n,2} + \mathbf{C}_q(x_q)\mathbf{a}_q(x_q, \boldsymbol{\mu}_q)\alpha = \mathbf{0}. \quad (18)$$

Здесь смысл соотношений (15)-(18) аналогичен смыслу условий (7)-(10).

Для приведения сформулированных во второй главе диссертации соотношений теории мягких оболочек при больших деформациях к одной из предложенных канонических форм введены вектор разрешающих переменных

$\mathbf{y} = \{T_{1x}; T_{1z}; u; w\}^T$ и вектор дополнительных переменных

$\mathbf{z} = \{\varepsilon_1; e_1; e_2; \mathcal{Q}_1; T_{2y}; T_1^*; T_2^*; T_1; T_2\}^T$. Также введена функция из двух компонент

заданных обобщенных распределенных нагрузок

$\mathbf{q} = \{p\mathcal{Q}_1(1+e_2); p(1+\varepsilon_1)(1+e_2)\}^T$ и вектор исходных данных

$\boldsymbol{\mu} = \{\alpha; \beta; \chi; \delta; \gamma; R; C_1; \dots; C_N\}^T$, где $C_1; \dots; C_N$ - физические постоянные материала, число которых определяется рассматриваемой моделью материала.

Тогда уравнения осесимметричного статического деформирования оболочек вращения из высокоэластичных материалов запишутся в виде

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q});$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) = \mathbf{0}.$$

Здесь

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) = \begin{cases} \alpha T_{2y} + \beta T_{1z} - f_1^* \gamma R \\ -\beta T_{1x} - \delta T_{2y} + f_3^* \gamma R \\ \chi \varepsilon_1 - \beta w \\ -\chi \mathcal{Q}_1 + \beta u \end{cases},$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} -e_2 + \chi(\alpha u + \delta w) / \gamma \\ T_1(1+e_1)(1+e_2) \frac{\gamma}{\chi} - T_{1x}(1+\varepsilon_1) - T_{1z} \mathcal{Q}_1 \\ T_1^*(1+\varepsilon_1) \frac{\gamma}{\chi} - T_{1x} \\ T_2^*(1+e_2) \chi - T_{2y} \\ T_1^* \mathcal{Q}_1 \frac{\gamma}{\chi} - T_{1z} \\ T_1(1+e_2) - T_1^*(1+e_1) \\ T_2(1+e_1) - T_2^*(1+e_2) \\ \frac{\partial T_1}{\partial e_1} e_1 + \frac{\partial T_1}{\partial e_2} e_2 - T_1 \\ \frac{\partial T_2}{\partial e_1} e_1 + \frac{\partial T_2}{\partial e_2} e_2 - T_2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, разрешающие уравнения теории мягких оболочек при больших деформациях приводятся к канонической форме IV с дополнительными алгебраическими соотношениями. При этом при рассмотрении составной неразветвленной оболочки или при использовании метода сегментации в случае

плохой обусловленности задачи для записи разрешающих соотношений необходимо использовать каноническую форму V нелинейной многоточечной неразветвленной краевой задачи с дополнительными алгебраическими соотношениями.

При рассмотрении задач динамики уравнения движения также приводятся к виду канонической формы IV с дополнительными алгебраическими соотношениями, а в правую часть дифференциального уравнения вводится вектор сил инерции:

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) + \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t^2},$$

где \mathbf{M} – матрица масс.

Аналогично задачам статики, при рассмотрении составной неразветвленной оболочки, уравнения движения сводятся к виду канонической формы V с дополнительными алгебраическими соотношениями, а матрица масс \mathbf{M}_i составляется для каждого сегмента.

Таким образом, многообразие формулировок рассматриваемых в работе задач деформирования оболочек вращения из гиперупругих материалов сводится лишь к двум формам нелинейных краевых задач с дополнительными алгебраическими соотношениями. Для последующей формулировки вычислительного алгоритма выбрана каноническая форма V с дополнительными алгебраическими соотношениями как наиболее полно учитывающая особенности рассматриваемых в работе задач.

Четвертая глава посвящена исследованию задач осесимметричного статического деформирования тонкостенных оболочек вращения из гиперупругих материалов с использованием вычислительного алгоритма, основанного на развитии метода дифференцирования по параметру. При этом в соотношениях нелинейных краевых задач внешняя нагрузка задается соотношением $\mathbf{q}^* = \alpha \mathbf{q}$, где $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, \boldsymbol{\mu})$ считается заданной нагрузкой или её распределением, а α – либо заданным параметром нагрузки при продолжении

решения нелинейной краевой задачи по параметру нагрузки, либо искомым значением параметра нагрузки при продолжении решения по некоторому другому параметру T . Путем дифференцирования по выбранному параметру продолжения уравнения V формы нелинейной краевой задачи с дополнительными соотношениями приводятся к квазилинейной канонической форме II относительно скоростей разрешающих переменных $\dot{\mathbf{y}}_i = \frac{d\mathbf{y}_i}{dT}$:

$$\frac{d\dot{\mathbf{y}}_i}{dx_i} = \mathbf{A}_i^*(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i, \alpha) \dot{\mathbf{y}}_i + \mathbf{a}_i^*(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i) \dot{\alpha} \quad (19)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{B}_1^*(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}) \dot{\mathbf{y}}_{1,1} + \mathbf{b}_{1,1}^*(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}) \dot{\alpha} = \mathbf{0}, \quad x_{1,1} \rightleftharpoons x_{N,2} \quad (20)$$

и условиями сопряжения сегментов

$$\dot{\mathbf{y}}_j(x_{j,2}) = \dot{\mathbf{y}}_{j+1}(x_{j+1,1}) + \dot{\alpha} \mathbf{d}_{j+1}(x_{j+1,1}, \boldsymbol{\mu}_{j+1,1}); \quad j \in [1, N-1]. \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i^*(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i, \alpha) &= \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{y}_i} - \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_i}{\partial \mathbf{y}_i}, \\ \mathbf{a}_i^*(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i) &= \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{q}_i - \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_i}{\partial \mathbf{z}_i} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{q}_i, \\ \mathbf{B}_1^*(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}) &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{y}_1} \right)_1 - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_1}{\partial \mathbf{y}_1} \right)_1, \\ \mathbf{b}_1^*(x_{1,1}, \boldsymbol{\mu}_{1,1}) &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right)_1 \mathbf{q}_{1,1} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}_1}{\partial \mathbf{z}_1} \right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right)_1 \mathbf{q}_{1,1}. \end{aligned}$$

Таким образом, минимально необходимый круг алгоритмов решения нелинейных задач осесимметричного деформирования оболочек вращения из высокоэластичных материалов связан лишь с двумя введенными каноническими формами – V и II.

Для решения квазилинейной краевой задачи (19)-(21) используются метод начальных параметров и метод ортогонализации С.К. Годунова. Замыкание разрешающей системы линейных алгебраических уравнений метода ортогонализации обеспечивается соотношениями, связывающими параметр продолжения решения T с компонентами векторов разрешающих переменных \mathbf{y}_j и параметра нагрузки α . В работе рассмотрены два варианта назначения параметра T – основанный на подходе В.И. Валишвили, при котором в качестве параметра продолжения выбирается j -тая компонента вектора разрешающих переменных в начале N -го сегмента $T = y_{N,1}^{(j)}$, или модифицирующий подход В.И. Шалашилина в соответствии с соотношением $T = \mathbf{y}_{N,1}^T \dot{\mathbf{y}}_{N,1} + \alpha \dot{\alpha}$. Определенные в результате решения квазилинейной краевой задачи значения скоростей по параметру $\dot{\mathbf{y}}_i, \dot{\mathbf{z}}_i, \dot{\alpha}$ используются на следующем этапе алгоритма при формировании начальных задач по расчету самих значений $\mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}_{i,j}}{dT} &= \dot{\mathbf{y}}_{i,j}(\mathbf{y}_{i,j}, x_{i,j}, T), & i \in [1, N], j \in [1, N_i] \\ \frac{d\mathbf{z}_{i,j}}{dT} &= \dot{\mathbf{z}}_{i,j}(\mathbf{y}_{i,j}, x_{i,j}, T), \\ \frac{d\alpha}{dT} &= \dot{\alpha}(\mathbf{y}_{i,j}, T). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь индекс i соответствует номеру сегмента краевой задачи, j - номеру точки $x_{i,j}$ на i -том сегменте.

Для решения нелинейной начальной задачи (22) с функциями правых частей, представленными на дискретной сетке переменного шага, используются неявные многошаговые схемы интегрирования.

Совместное решение взаимосвязанных квазилинейной краевой (19)-(21) и нелинейной начальной (22) задач проводится методом последовательных приближений на каждом шаге по параметру T . Для оценки сходимости итерационного процесса на k -том шаге выбрана относительная погрешность

определения векторов разрешающих переменных $\mathbf{y}_{i,1}^{(K,M)}$ на M -той и $(M - 1)$ -ой итерациях:

$$\delta_i = \frac{\|\mathbf{y}_{i,1}^{(K,M)} - \mathbf{y}_{i,1}^{(K,M-1)}\|}{\|\mathbf{y}_{i,1}^{(K,M)}\|}, \quad i \in [1, N],$$

где символом $\|\cdot\|$ обозначена чебышевская норма вектора. В зависимости от скорости сходимости процесса коррекции выбирается величина шага по параметру T .

Сложность реализации описанного алгоритма связана с вырожденностью матрицы $\partial\Phi/\partial\mathbf{z}$ системы разрешающих уравнений деформирования мягких оболочек. Поэтому на первых шагах по параметру продолжения решения проводится регуляризация системы, заключающаяся в использовании уравнений технической теории мягких оболочек, не имеющих указанной особенности.

Для исследования описанного алгоритма решения задачи статического деформирования оболочки вращения из гиперупругого материала использована тестовая задача о раздувании полусферической оболочки из неогуковского материала с различными условиями закрепления края. Указанная задача имеет аналитическое решение при закреплении края подвижным шарниром. Исследовано влияние на результат численного решения задачи таких параметров алгоритма, как величина начального и максимально допустимого шагов по параметру продолжения решения, выбора формы самого параметра, способа расчета предварительного напряженного состояния, числа шагов по параметру, на которых проводится регуляризация решения, а также исходных данных задачи. При построении решения удалось впервые получить значения удлинений оболочки $e_1 \approx e_2 = 1.2 \cdot 10^8$ с точностью 5%, причем последовавшая потеря устойчивости счета обусловлена не недостатками вычислительного алгоритма, а особенностями машинной арифметики.

Описанные тестовые расчеты показали, что при решении физически и геометрически нелинейной задачи раздувания мягкой оболочки при больших деформациях необходимо исследовать поведение решения в широком диапазоне

изменения возможных параметров алгоритма, а при отсутствии аналитического решения показателем достоверности получаемых результатов может являться их повторяемость при различных величинах назначаемых параметров.

Для внесения большей определенности и обоснованности в процесс назначения величин параметров вычислительного алгоритма в работе предложен метод автоматической сегментации формируемой на одном из этапов алгоритма квазилинейной краевой задачи (19)-(21), заключающийся в проверке выполнения условия ортогональности нормированных интегральных матриц $\mathbf{M}(x)$, $\mathbf{N}(x)$ исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений (19) при любом значении аргумента интегрирования x_i :

$$\left\| \mathbf{M}_i^T(x_i) \mathbf{N}_i(x_i) - \mathbf{E} \right\| \leq \delta. \quad (23)$$

Здесь \mathbf{E} – единичная матрица, δ – принятое допустимое значение нормы неортогональности матриц $\mathbf{M}(x)$, $\mathbf{N}(x)$, символом $\| \|$ обозначена первая норма матрицы.

Проверка указанного условия осуществляется на этапе препроцессирования задачи. Для этого в каждой точке интервала интегрирования вычисляются нормированные интегральные матрицы исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи $\mathbf{M}(x)$ и $\mathbf{N}(x)$ при начальных условиях $\mathbf{M}(x_0) = \mathbf{E}$, $\mathbf{N}(x_0) = \mathbf{E}$ и определяется первая норма произведения этих матриц. Если в какой-либо точке интервала интегрирования эта норма отличается от единицы на величину, большую некоторой заданной вычислителем погрешности δ , то эта точка считается концом текущего сегмента интервала интегрирования. Тогда следующая точка интервала считается началом нового сегмента, начальные значения матриц $\mathbf{M}(x)$ и $\mathbf{N}(x)$ в этой точке снова задаются равными единичной матрице, и продолжается их вычисление по прежней системе дифференциальных уравнений, расчет первой нормы их произведения и контроль отклонения этой нормы от единицы.

Таким образом, число условий сопряжения сегментов в случае изначальной постановки задачи как многоточечной неразветвленной (каноническая форма II) увеличивается, а каноническая форма I переходит в каноническую форму II с автоматически определяемым числом сегментов.

На рисунке 1 показан график, демонстрирующий зависимость первой нормы произведения $\Delta = \left\| \mathbf{M}_i^T(x_i) \mathbf{N}_i(x_i) \right\|$ фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений от координаты точки меридиана для имеющей аналитическое решение задачи о раздувании равномерно распределенным по меридиану давлением цилиндра из материала Муни-Ривлина, закрепленного на торцах скользящей заделкой. Длина цилиндра $L_0 = 2R_0$, где R_0 - радиус недеформированного цилиндра, параметры материала Муни-Ривлина $C_{10} = 1.097$, $C_{01} = 0.00784$, отношение радиуса к толщине недеформированного цилиндра $R_0/h_0 = 100$. Допустимая погрешность расчета нормы Δ принята равной $\delta = 5\%$.

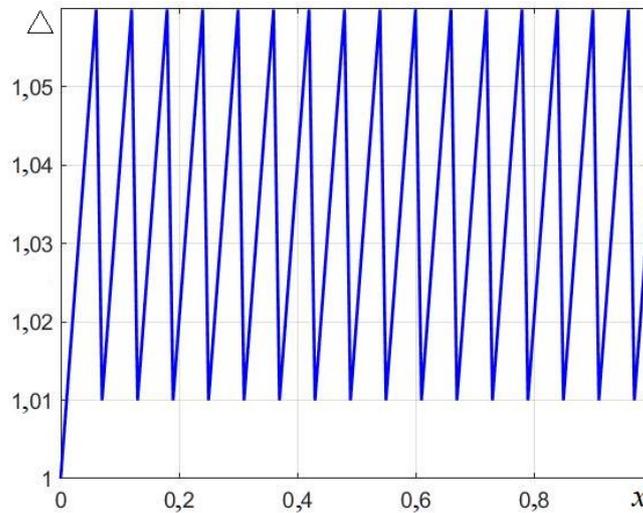


Рис. 1. Зависимость первой нормы произведения фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений Δ от координаты точки меридиана при выполнении автоматической сегментации интервала интегрирования

Полученное рекомендуемое число сегментов, на которые следует разбить интервал интегрирования, составляет $N_{segm}=17$. Сравнение результатов решения задачи при отсутствии сегментации меридиана оболочки, при произвольно назначаемом и при определяемом на основании условия (23) числе сегментов показало, что в последнем случае точность решения задачи является наилучшей при наивысшей скорости сходимости итерационных процессов вычислительного алгоритма.

Применение предложенного метода автоматической сегментации к задаче раздувания полусферы из неогуковского материала показало, что, вследствие наличия сингулярных коэффициентов в матрице Якоби системы разрешающих уравнений на интервале интегрирования задачи, в достаточно большой окрестности полюса полусферы условие, используемое в качестве критерия разбиения оболочки на сегменты, нарушается в каждой точке меридиана. В результате число сегментов, определяемое с использованием метода автоматической сегментации, оказывается достаточно велико, что может приводить к увеличению времени счета. Вместе с этим численные эксперименты показали, что в отсутствие сегментации или при недостаточном количестве сегментов вычисления сопровождаются потерей устойчивости счета. Поэтому для использования предложенного метода автоматической сегментации на этапе препроцессирования задачи было предложено назначить число сегментов разбиения интервала интегрирования на основании использования метода автоматической сегментации применительно к оболочке вращения, имеющей ту же длину меридиана, параметр тонкостенности и свойства материала, что и рассматриваемая сферическая оболочка, но иной формы меридиана, исключая появление сингулярных элементов в матрице Якоби системы уравнений, т.е. к цилиндру. В этом случае точность решения задачи и скорость сходимости итерационных процессов оказались сопоставимыми со случаем использования предложенного метода сегментации непосредственно к сферической форме меридиана оболочки, но существенно уменьшилось время счета.

В качестве одного из способов оценки качества получаемого численного результата в работе предложен критерий однозначности решения задач деформирования оболочек из гиперупругих материалов методом непрерывного продолжения по параметру. Критерий основан на исследовании непрерывности вектора правых частей системы квазилинейных дифференциальных уравнений (19) по переменным x , y , α , а также анализе определителя и ранга расширенной \bar{J} и исходной J матриц Якоби системы алгебраических уравнений метода ортогонализации, являющегося одним из этапов используемого алгоритма решения нелинейной краевой задачи статического деформирования мягкой оболочки. При этом, так как получение строгого нуля или бесконечности в вычислениях невозможно, в качестве величины, оцениваемой как бесконечная, после проведения вычислительных экспериментов назначена величина $K_{\max} = 10^{14} \div 10^{16}$, при оценке равенства нулю определителя матрицы нулевым считается значение $K_{\max} \leq 10^{-6} \div 10^{-4}$, а сравнение величин компонент матрицы, необходимое для определения числа линейно независимых строк, проводится с точностью до четырех значащих цифр.

Применение предложенного критерия было протестировано на примере решения задачи о раздувании сферической оболочки из неогукковского материала равномерно распределенным по меридиану давлением при тех значениях параметров вычислительного алгоритма, выбор которых приводит к потере устойчивости счета либо к получению некорректного решения. Постоянный контроль выполнения условий описанного критерия в процессе вычислений показал, что в указанных случаях потере устойчивости счета предшествует превышение величиной одной из компонент вектора правых частей системы дифференциальных уравнений (19) величины K_{\max} , что соответствует нарушению условий, связанных с определенностью функции правых частей системы.

С использованием вышеописанных способов контроля качества численного решения при реализации сформулированного в работе алгоритма

решена задача сравнения поведения мягких оболочек канонических форм меридиана (полусфера, круговой цилиндр и тор) при раздувании равномерно распределенным давлением в предположении одинаковых условий закрепления, свойств материала (неогуковская модель) и площади боковой поверхности.

На рисунке 2 представлены диаграммы нагружения оболочек в виде зависимостей раздувающего оболочку давления от относительного изменения площади поверхности оболочки F : $\Delta F = (F - F_0)/F_0$, где F_0 - площадь поверхности недеформированной оболочки. На рисунках цифрами обозначены: 1 – полусфера; 2 – цилиндр; 3 – тор.

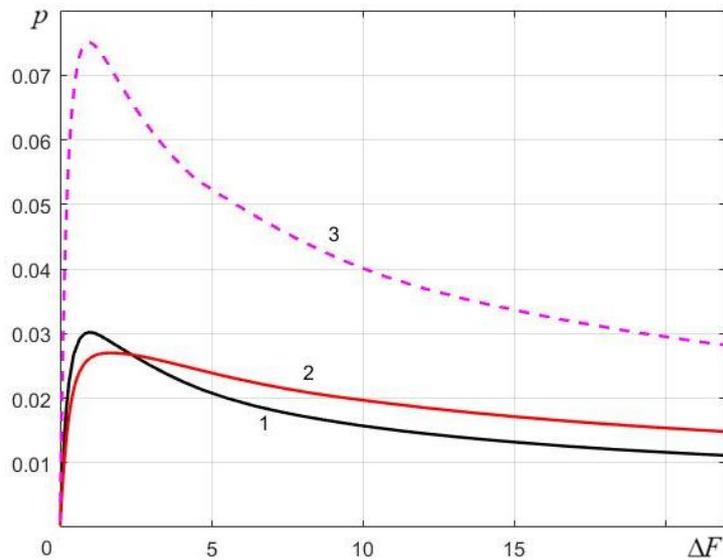


Рис. 2. Диаграммы нагружения оболочек
(1 – полусфера; 2 – цилиндр; 3 – тор)

На рисунке 3, а-б показаны графики распределения меридиональных и окружных деформаций по меридиану рассматриваемых оболочек в закритическом состоянии при величине давления $p = 0.0178$. Графики иллюстрируют понятие «больших» деформаций для оболочек из высокоэластичных материалов, характеризующее величины порядка сотен и тысяч процентов.

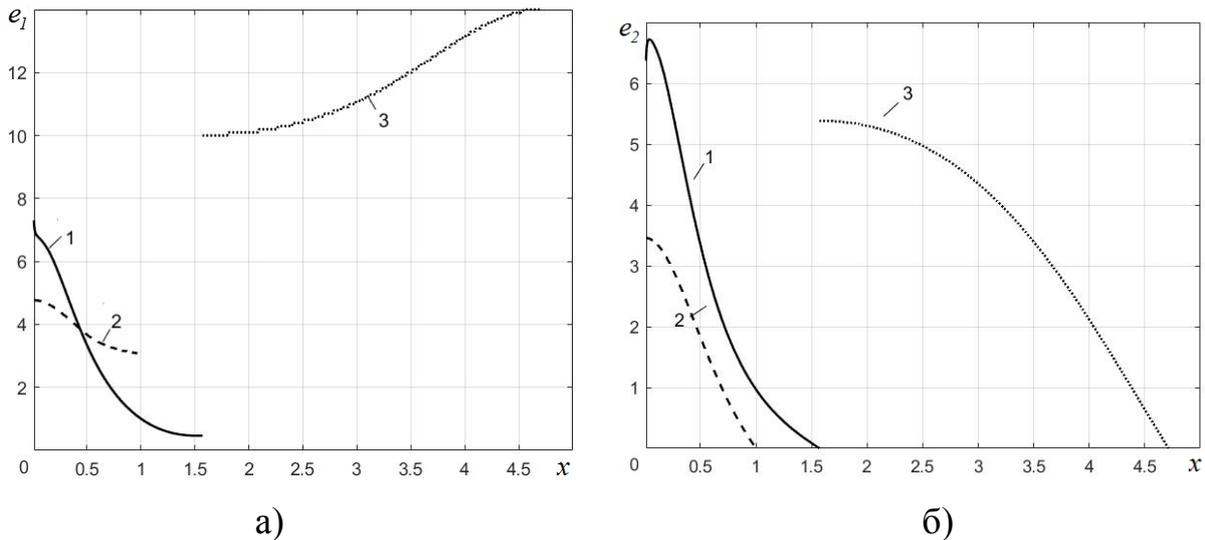


Рис. 3. Распределение по меридиану меридиональных (а) и окружных (б) деформаций в закритическом состоянии при величине давления $p = 0.0178$

Также в работе рассмотрена задача моделирования локального выпучивания меридиана высокоэластичной цилиндрической оболочки, условия нагружения и закрепления которой на начальном этапе деформирования обеспечивают однородное напряженно-деформированное состояние. Для определения типа потери устойчивости (образование «пузыря» или образование шейки), а также исследования процесса глубокого закритического деформирования для различных моделей упругого потенциала материала в работе предложено для оболочки, длина которой до деформации составляет $L_0 = 2R_0$, ввести локальное изменение толщины центрального участка длиной $L_c = 0.1R_0$ по закону $h_c = [0.995 - 0.005 \cos(\pi x/0.05)]h_0$, где в связи с симметрией нагружения и закрепления координата x отсчитывается от центрального сечения цилиндра. При этом толщина остальной части оболочки составляет $h_0 = 0.01R_0$. Оболочка нагружена внутренним давлением, а на торцах приложена растягивающая сила, величина которой соответствует силе давления в меридиональном направлении. На рисунке 4 представлена диаграмма деформирования оболочки из неогуковского материала в координатах «давление – относительное изменение объема внутренней полости оболочки». Кривые 1 и

2 описывают поведение оболочки постоянной и переменной толщины соответственно.

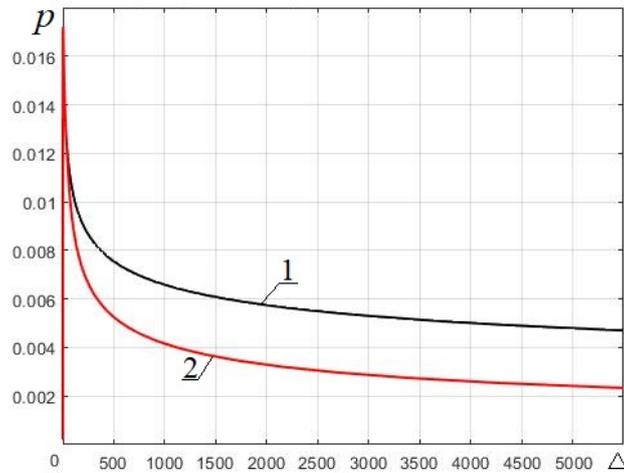


Рис. 4. Диаграмма «давление – относительное изменение объема внутренней полости цилиндра» для случая неогнуковского материала

Очевидно принципиальное отличие закритического деформирования оболочки с местным утонением от деформирования оболочки постоянной толщины. Различия также прослеживаются и в характере распределения компонент напряженно-деформированного состояния по всему меридиану. При этом меридиан оболочки с местным утонением выпучивается на большей части длины.

Для диаграммы «нагрузка-относительное изменение объема внутренней полости» цилиндра из материала Муни-Ривлина (рисунок 5) оказалось характерным наличие верхнего и нижнего критического давления, более выраженное для случая деформирования цилиндра с местным утонением (кривая 2 рисунка 5).

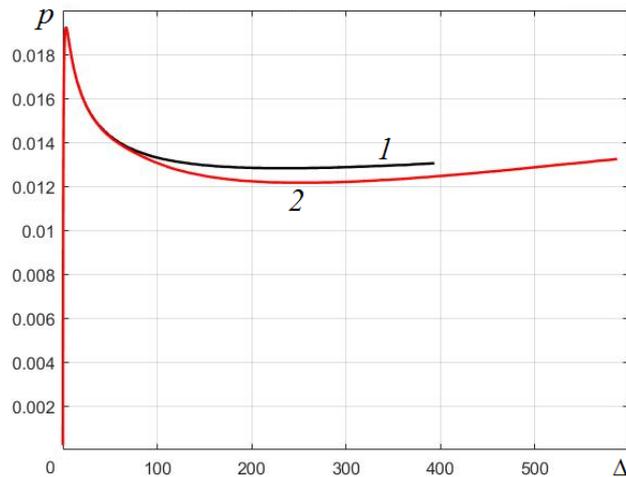


Рис. 5. Диаграмма «давление – относительное изменение объема внутренней полости цилиндра» для материала Муни-Ривлина

Принципиальным отличием характера деформирования цилиндра из материала Муни-Ривлина с местным утонением стенки является отсутствие выпучивания меридиана в закритической области. При этом до достижения нагрузкой нижнего критического значения происходит увеличение длины меридиана оболочки, а при превышении этого значения длина начинает уменьшаться. Распределение ряда компонент напряженно-деформированного состояния по меридиану становится более равномерным по сравнению со случаем деформирования цилиндра из неогукковского материала, при этом неравномерность распределения на участке локального утонения становится ярче выраженной.

Для случая раздувания цилиндра, изготовленного из материала Йео, наличие местного утонения не влияет на характер диаграммы «нагрузка – относительное изменение объема» (рисунок 6) и практически не влияет на характер напряженно-деформированного состояния. Распределение всех его компонент по меридиану остается равномерным во всей закритической области деформирования, несущественно изменяясь лишь на участке утонения для функций усилий, а также меридиональных и поперечных деформаций. Меридиан оболочки с локальным утонением остается прямым.

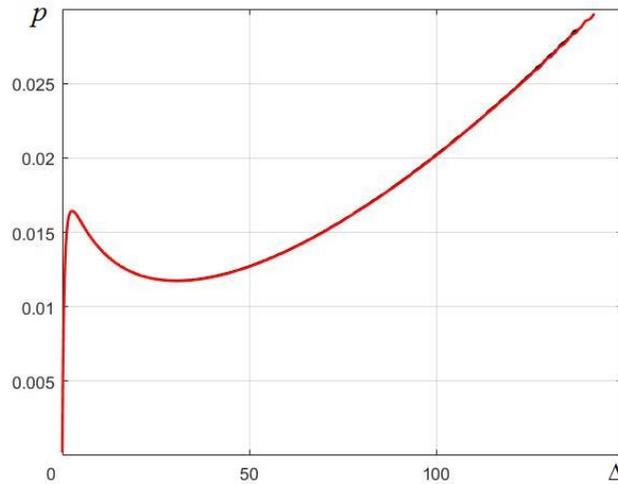


Рис.6. Диаграмма «давление – относительное изменение объема внутренней полости цилиндра» для материала Йео

Для решения задачи о раздувании цилиндрической оболочки кусочно-постоянной толщины из неогуковского материала в работе впервые использована система уравнений моментной теории, сформированная для случая конечных перемещений и деформаций на основании модифицированной модели Кирхгофа-Лява. Показано, что применение указанной системы уравнений позволяет уточнить напряженное состояние оболочки в области скачкообразного изменения геометрии и в окрестности торцев. В частности, существенным преимуществом использования соотношений, основанных на моментной теории оболочек, является возможность получения отрицательных значений напряжений без необходимости перехода к иным физическим соотношениям. Однако решение задачи на основании уравнений моментной теории оболочек при больших перемещениях и деформациях может сопровождаться существенными вычислительными сложностями в связи с ухудшением обусловленности задачи.

Рассматриваемый в диссертации алгоритм решения задач деформирования оболочек из гиперупругих материалов, основанный на методе непрерывного продолжения по параметру, может быть использован для решения задач исследования влияния параметров исходных данных на поведение оболочек. При этом вместо параметра продолжения решения T , выбираемого исходя из

условий однозначности продолжения и в общем случае не имеющего физического смысла, для дифференцирования разрешающих соотношений рассматриваемой задачи может быть выбран любой из параметров исходных задачи.

В качестве примера решена задача исследования влияния соотношения параметров материала Муни-Ривлина $\beta = \frac{C_{01}}{C_{10}}$ на максимальные значения компонент напряженно-деформированного состояния оболочек канонических форм меридиана (сфера, цилиндр, тор, конус) при одном и том же значении внутреннего давления. Установлено, что изменение величины β в рассмотренном диапазоне влияет на указанные характеристики лишь для сферической и цилиндрической оболочек. При этом анализ распределения компонент напряженно-деформированного состояния по меридиану оболочек показал, что влияние увеличения параметра β наиболее выражено в области, удаленной от закрепленного торца.

Методика параметрического анализа, основанная на алгоритме метода непрерывного продолжения по параметру, также была использована в работе для исследования влияния радиуса заделанной по торцам раздуваемой равномерно распределенным по меридиану давлением цилиндрической оболочки из неогуковского материала на характеристики ее напряженно-деформированного состояния. Было выявлено наличие экстремума для зависимостей максимальных окружных деформаций, напряжений и усилий от радиуса оболочки в рассмотренном диапазоне его изменения при фиксированном значении нагрузки.

Пятая глава посвящена исследованию задач осесимметричного динамического деформирования тонкостенных оболочек вращения из гиперупругих материалов. Для формулирования алгоритма решения указанного класса задач используется система уравнений динамического деформирования мягкой оболочки вращения в канонической форме V

$$\frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial x_i} = \mathbf{f}_i(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i) + \mathbf{M}_i \frac{\partial^2 \mathbf{y}_i}{\partial t^2}, \quad i \in [1, N] \quad (24)$$

с дополнительными алгебраическими соотношениями

$$\Phi_i(x_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{q}_i) = \mathbf{0}, \quad (25)$$

начальными условиями

$$\mathbf{y}(x, 0) = \mathbf{y}_0; \quad \mathbf{y}'(x, 0) = \mathbf{y}_0', \quad (26)$$

условиями сопряжения сегментов

$$\mathbf{y}_j(x_{j,2}) = \mathbf{y}_{j+1}(x_{j+1,1}) + \mathbf{d}_{j+1}(x_{j+1,1}, \boldsymbol{\mu}_{j+1,1}); \quad j \in [1, N-1] \quad (27)$$

и граничными условиями

$$\Psi_1(x_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}, t) = \mathbf{0}, \quad 1 \rightleftharpoons 2. \quad (28)$$

При построении алгоритма решения задачи (24)-(28) нагрузка, действующая на деформируемый элемент, представляется суммой заданных

поверхностных и инерционных нагрузок $\mathbf{q}_i^*(x, t) = \mathbf{q}_i(x, t) + \mathbf{M}_i \frac{\partial^2 \mathbf{y}_i}{\partial t^2}$ и

записывается в виде $\mathbf{q}_i^{**}(x, t) = \alpha \mathbf{q}_i^*(x, t)$, где, как и в случае решения статической задачи, α - параметр нагрузки. Для решения модифицированной таким образом начально-краевой задачи (24)-(28) применяется метод прямых. С использованием m -точечной аппроксимации вектора ускорений для момента

времени $t = t_k$ вида $\left. \frac{\partial^2 \mathbf{y}_i}{\partial t^2} \right|_{t=t_k} = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{y}_{m+1-j}$ начально-краевая задача сводится к

последовательности нелинейных краевых задач типа (11)-(14), решение которых проводится на каждом временном слое по сформулированному в четвертой главе работы алгоритму в диапазоне изменения параметра нагрузки $\alpha \in [0; 1]$.

Описанный алгоритм решения динамической задачи протестирован на примере решения задачи нагружения плоского консольно закрепленного стержня из линейно упругого материала внезапно приложенной нормальной равномерно распределенной нагрузкой. Рассмотрены трехточечная и четырехточечная аппроксимации вектора ускорений. Отмечено уменьшение амплитуды колебаний конца консоли со временем при использовании слишком большого шага по времени, наиболее выраженное для случая трехточечной

аппроксимации. При этом, как показала практика вычислений, существует некоторое минимально допустимое для расчетов значение шага по времени, определяемое в результате численного эксперимента. Выбор меньшего значения приводит к потере устойчивости счета, что является следствием ухудшения обусловленности матрицы Якоби системы уравнений нелинейных краевых задач, формируемых в рамках разработанного алгоритма. Однако величины шагов по времени, при которых было получено решение задачи, оказались достаточными для определения периода колебаний консоли с приемлемой точностью.

Аналогичные особенности вычислительного алгоритма были выявлены при решении задачи о раздувании внезапно приложенным равномерно распределенным давлением величиной $p = 0.02$ тонкостенной сферической оболочки из неогуковского материала для соотношения радиуса и толщины в недеформированном состоянии $R_0/h_0 = 100$. Указанная задача имеет аналитическое решение в виде формул, связывающих период и амплитуду радиальных колебаний оболочки с давлением, соотношением R_0/h_0 и параметром материала.

При реализации вышеописанного алгоритма решения задачи динамики необходимо учесть особенности расчета мягких оболочек, выявленные в четвертой главе диссертации. В частности, необходимо задать малое предварительное давление, действующее на оболочку в начальный момент времени, и выполнить регуляризацию системы уравнений движения оболочки.

На рисунке 7 показана зависимость прогиба оболочки от времени для значений шагов по времени $\Delta t = 0.5, 0.25, 0.125, 0.08$ при четырехточечной аппроксимации ускорения.

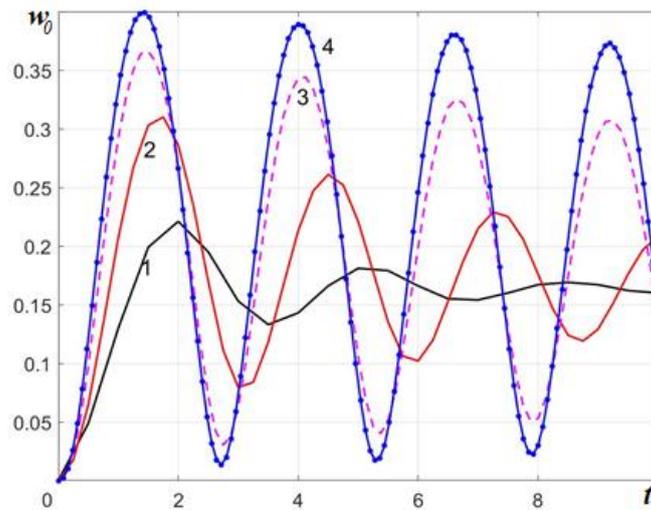


Рис. 7. Зависимость прогиба раздуваемой постоянным давлением сферической оболочки из неогуковского материала от времени при четырехточечной аппроксимации ускорения: 1 — $\Delta t = 0.5$; 2 — $\Delta t = 0.25$; 3 — $\Delta t = 0.125$; 4 — $\Delta t = 0.08$

Провести расчеты при значении шага $\Delta t < 0.08$ оказалось невозможным вследствие потери устойчивости счета. При $\Delta t = 0.08$ погрешность расчета амплитуды радиальных колебаний сферической оболочки составила 2.5%, а периода колебаний - 8.9%.

Задача о раздувании сферической оболочки внезапно приложенным равномерно распределенным давлением была также решена для случаев упругих потенциалов высокоэластичных материалов Муни-Ривлина и Йео. Установлено, что затухание колебаний, обусловленное погрешностью, вносимой аппроксимацией ускорения в рассматриваемом алгоритме решения задач динамики, может быть существенно снижено в случае анализа колебаний с достаточно большим периодом. На рисунке 8 представлена подтверждающая указанный тезис зависимость прогиба сферической оболочки из материала Муни-Ривлина при соотношении параметров материала $C_{01}/C_{10} = 0.18$ от времени. При этом погрешность определения периода колебаний оболочки составила 2.9%.

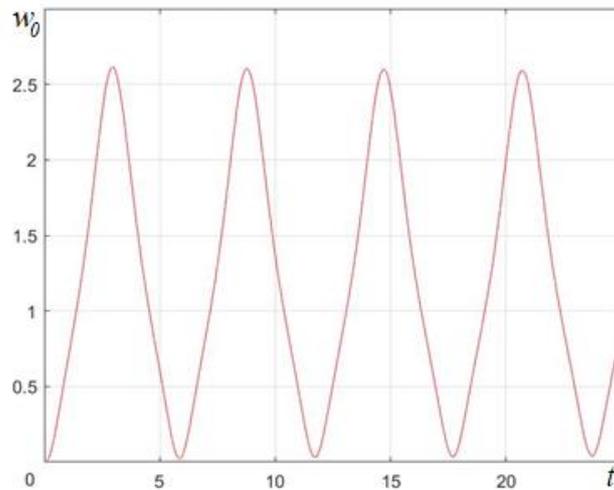


Рис. 8. Зависимость прогиба сферической оболочки из материала Муни-Ривлина от времени

Так как решение задач динамического деформирования мягких оболочек, очевидно, сопровождается большими вычислительными сложностями, для повышения точности решения предлагается использование разработанного в четвертой главе диссертации метода автоматической сегментации. В рамках описанного алгоритма решения задачи динамики указанный метод реализуется в начале первого шага по времени перед построением решения нелинейной краевой задачи, формируемой в результате применения метода прямых к соотношениям (24)-(28).

Для исследования влияния автоматической сегментации меридиана оболочки на результаты расчетов решена задача о раздувании равномерно распределенным внезапно приложенным давлением цилиндра длиной $L_0 = 2R_0$, где R_0 - радиус недеформированного цилиндра, из материала Муни-Ривлина при соотношении параметров материала $C_{01}/C_{10} = 0.18$. Отношение радиуса к толщине недеформированного цилиндра $R_0/h_0 = 100$, величина давления $p = 0.02$. На рисунке 9 показан график, демонстрирующий результаты использования метода автоматической сегментации при допустимой норме неортогональности фундаментальных матриц (23) $\delta = 5\%$ для шага по времени $\Delta t = 0.25$.

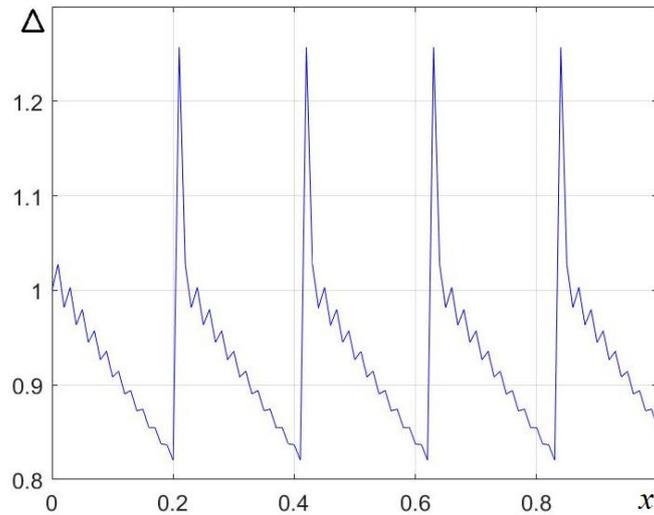


Рис. 9. Зависимость первой нормы произведения фундаментальных матриц исходной и сопряженной систем дифференциальных уравнений Δ от координаты точки меридиана при выполнении автоматической сегментации интервала интегрирования

В таблице 1 приведены значения погрешности δ_T расчета периода колебаний цилиндра, в таблице 2 – значения погрешности δ_A расчета амплитуды колебаний для различных вариантов сегментации меридиана оболочки (N_{segm} – произвольно назначаемое число сегментов). Черточки в таблицах соответствуют случаям, когда получение результата оказалось невозможным вследствие потери устойчивости счета.

Таблица 1. Погрешность δ_T расчета периода T колебаний цилиндра, %

Δt	$N_{segm}=20$	Автоматическая сегментация	$N_{segm}=2$
0.25	17.6	19.2	23.7
0.125	6.36	1.9	-

Таблица 2. Погрешность δ_A расчета амплитуды A колебаний цилиндра, %

Δt	$N_{segm}=20$	Автоматическая сегментация	$N_{segm}=2$
0.25	4.15	2.93	20.9
0.125	1.97	0.65	-

Как следует из анализа представленных в таблицах 1, 2 результатов, при использовании автоматической сегментации удалось получить минимальные значения погрешности расчета при оптимальном значении шага по времени.

Применение метода автоматической сегментации к решению задачи о раздувании внезапно приложенным давлением сферической оболочки сопряжено с описанными в четвертой главе сложностями, связанными с наличием сингулярных элементов в матрице Якоби разрешающей системы уравнений в полюсе оболочки. Поэтому при решении соответствующей тестовой задачи для случая неогукковского материала был использован предложенный в четвертой главе подход, связанный с использованием метода автоматической сегментации применительно к цилиндрической оболочке, имеющей ту же длину меридиана, параметр тонкостенности и свойства материала, что и рассматриваемая сферическая оболочка. Результаты решения задачи динамического раздувания сферической оболочки показали, что указанный способ сегментации обеспечивает наилучшее сочетание таких характеристик, как точность определения периода и амплитуды колебаний, а также скорость сходимости итерационных процессов, среди всех рассмотренных вариантов сегментации меридиана, включая произвольно назначаемые.

Для уточнения используемого в ряде аналитических исследований динамики раздувания высокоэластичной сферической оболочки понятия критического давления в диссертации решена задача о нагружении линейно возрастающим давлением сферической оболочки при соотношении $R_0/h_0 = 100$ из материалов трех типов – неогукковского, Муни-Ривлина при соотношении параметров $C_{01}/C_{10} = 0.00715$ и Йео при соотношении параметров $C_2/C_1 = 0.00858$; $C_3/C_1 = 0.000216$. Давление изменяется во времени по закону $p = \gamma t$, где $\gamma = 2.5 \cdot 10^{-3}$. Постановка данной задачи возможна не только как начально-краевой, но и как задачи Коши. На рисунке 10 представлена диаграмма «нагрузка – прогиб» для рассматриваемого случая динамического нагружения оболочки из неогукковского материала (кривая 1 соответствует расчетам с шагом

по времени $\Delta t = 0.25$ по сформулированным в данной работе соотношениям и алгоритмам, кривая 2 – решению задачи как задачи Коши с использованием функции `ode45` среды Matlab, реализующей метод Рунге-Кутты 4 порядка точности) и для случая статического нагружения (кривая 3).

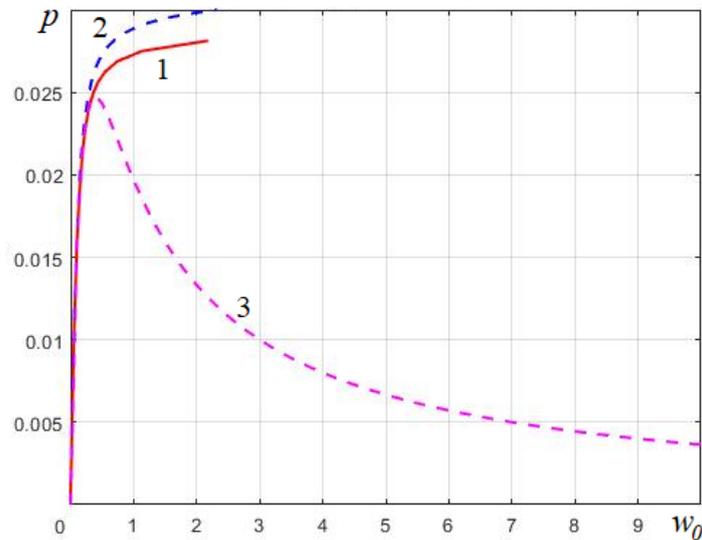


Рис. 10. Диаграмма «нагрузка – прогиб» для случаев динамического (кривые 1-2) и статического (3) нагружения сферической оболочки из неогукковского материала

При проведении расчетов динамического раздувания сферической оболочки по сформулированным в работе соотношениям и алгоритмам итерационный процесс переставал сходиться при значении нагрузки $p = 0.0281$, а при решении задачи Коши - при значении $p = 0.032$. Графики на рисунке 10 демонстрируют хорошее совпадение результатов вычислений, а также совпадение кривых для случаев статического и динамического деформирования до значения нагрузки, приблизительно соответствующего критическому значению нагрузки при статическом нагружении. Перед наступлением момента отсутствия сходимости итерационных процессов значение поперечной деформации достигает $e_3 = 83\%$, т.е. не является предельно допустимым (стремящимся к 100%). Анализ величин напряжений для данной задачи не является принципиальным, т.к. материалы рассматриваемых моделей не имеют

характеристик, определяющих разрушение. Таким образом, утверждение ряда исследователей о разрушении рассматриваемой оболочки при значениях динамически приложенной нагрузки, превышающих «критические», является некорректным, а с точки зрения механики полученные результаты можно объяснить физической недопустимостью воздействия нагрузок определенной величины на оболочку из рассматриваемого материала и недостаточной корректностью самой модели материала.

Вышеизложенные выводы справедливы и для иных скоростей роста нагрузки γ . При этом с увеличением γ увеличивается также величина давления, при котором итерационный процесс реализуемого алгоритма перестает сходиться.

Аналогичные результаты были получены при исследовании поведения сферической оболочки из материала Муни-Ривлина.

На рисунке 11 представлена диаграмма «нагрузка-прогиб» для случаев решения данной задачи как начально-краевой по представленному в работе алгоритму с шагом по времени $\Delta t = 0.125$ (кривая 1) и как начальной (кривая 2). Кривая 3 соответствует решению задачи о статическом раздувании рассматриваемой оболочки. Закон изменения нагрузки имеет вид $p(t) = 2 \cdot 10^{-2} t$.

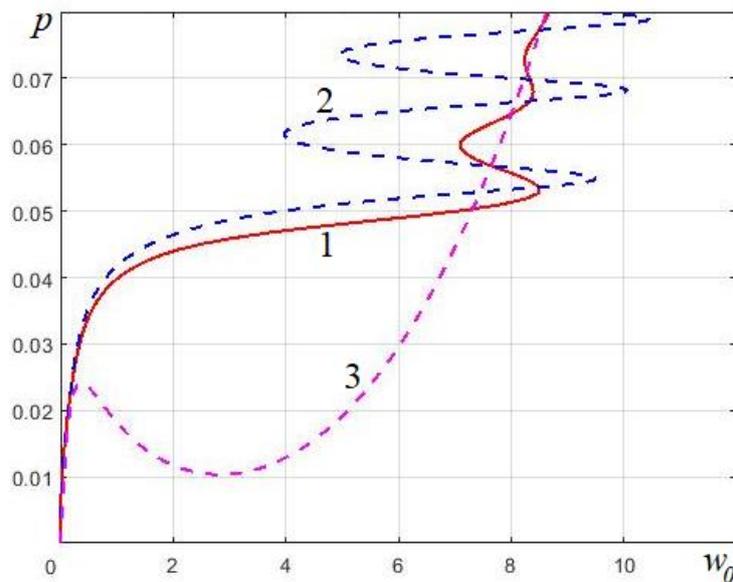


Рис. 11. Диаграмма «нагрузка-прогиб» для случаев динамического (кривые 1-2) и статического (3) нагружения оболочки

Представленные графики впервые иллюстрируют явление динамического хлопка мягкой оболочки, сопровождающегося переходом с одной на другую ветвь диаграммы, соответствующей случаю устойчивого статического деформирования, и последующими колебаниями. Анализируя рисунок 11, можно заключить, что результаты расчета самого процесса хлопка двумя рассматриваемыми способами хорошо согласуются, однако при решении начально-краевой задачи по представленному в диссертации алгоритму колебания, возникающие после хлопка, затухают к статическому решению, в то время как при решении задачи Коши ярко выраженного затухания таких колебаний не наблюдается. Очевидно, подобная особенность алгоритма аналогична отмеченной ранее и связана с явлением численного демпфирования. Однако, по-видимому, именно благодаря указанной особенности впервые оказалось возможным решение рассматриваемой задачи при задании непрерывно возрастающего во времени раздувающего оболочку давления без искусственного введения демпфирования в физические соотношения, описывающие поведение материала.

По окончании процесса хлопка значение поперечной деформации составляет $e_3 \approx -97\%$ и остается практически постоянным (рисунок 12).

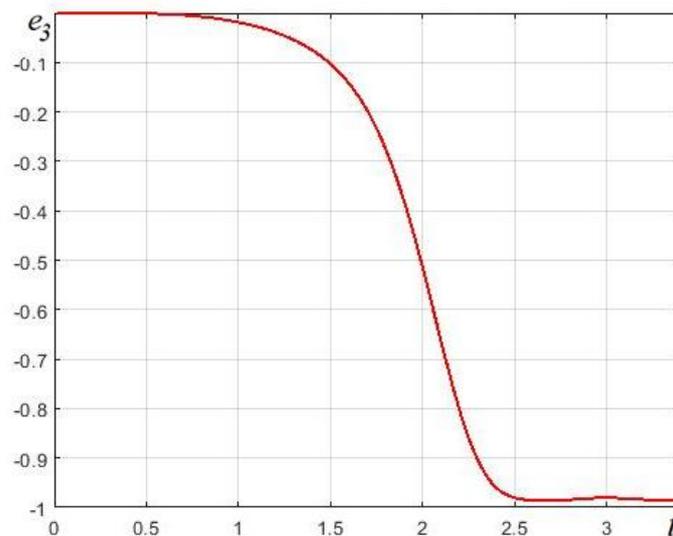


Рис. 12. Зависимость поперечной деформации сферической оболочки из материала Йео от времени

С увеличением параметра γ значение нагрузки, при которой происходит хлопок, также увеличивается.

В рамках тестирования системы уравнений моментной теории оболочек, основанной на использовании модифицированной гипотезы Кирхгофа-Лява, в работе впервые решена задача о раздувании закрепленной на торцах неподвижным шарниром цилиндрической оболочки из неогуковского материала гармонически изменяющимся во времени давлением. При этом расчеты проводились по соотношениям как безмоментной, так и моментной теории. Длина оболочки принята равной $L_0 = 10R_0$, толщина $h_0 = 0.02R_0$. Внутреннее давление изменяется во времени по закону $p = 0.015 + 0.005 \sin(0.25t)$.

На рисунке 13 представлена зависимость «нагрузка – прогиб центрального сечения цилиндра».

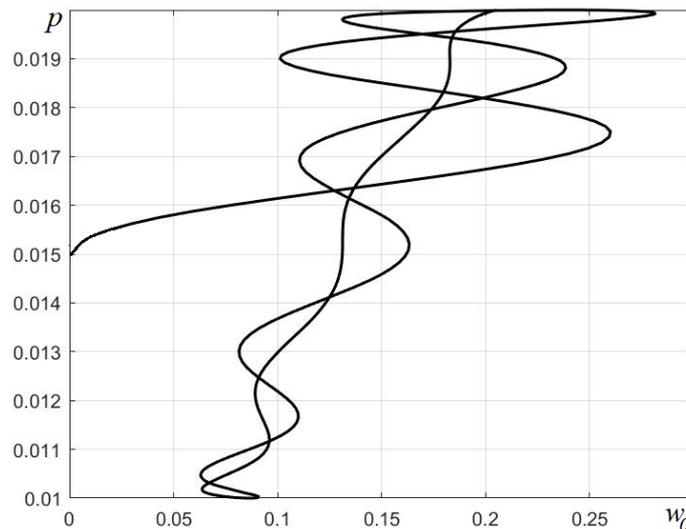


Рис. 13. Диаграмма «нагрузка – прогиб центрального сечения цилиндра»

На рисунке 14, а-б показаны соответственно зависимости от времени прогиба и поперечной деформации в центральном сечении цилиндра (красными кривыми) и в сечении $x = 4.95$ (координата x отсчитывается от центрального сечения цилиндра), в котором изгибающие моменты достигают максимальных величин за весь рассматриваемый временной интервал (синими кривыми). Сплошными и штриховыми линиями обозначены графики, полученные по результатам расчетов с использованием моментной и безмоментной теории

соответственно. На всех графиках наблюдается переходный процесс отклика оболочки на внешнее воздействие, при этом в центральном сечении цилиндра отклик проявляется более интенсивно. По прошествии времени, соответствующего периоду колебаний внешней нагрузки, процесс колебаний оболочки становится установившимся.

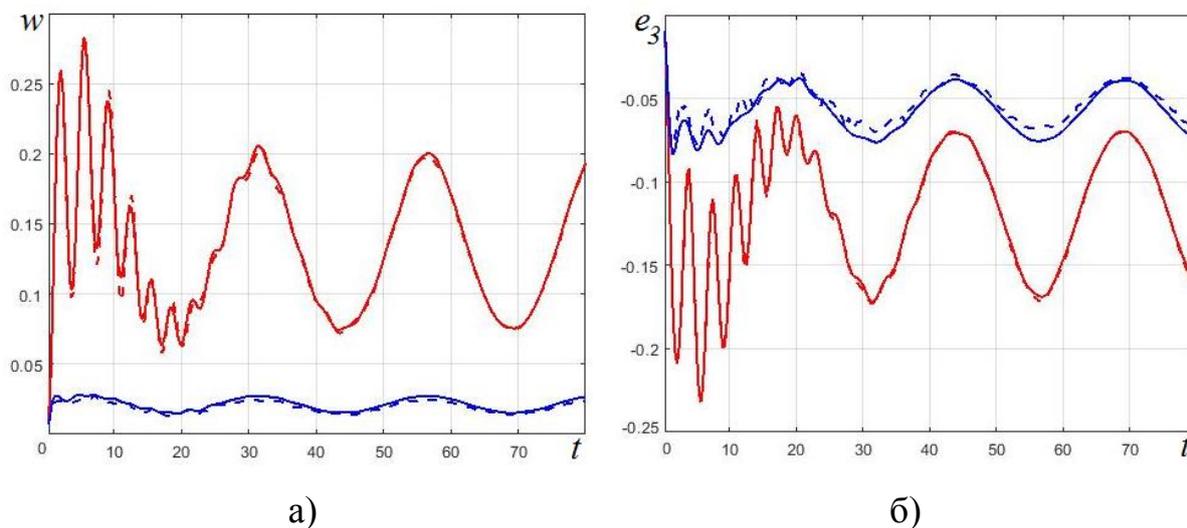


Рис. 14. Зависимость от времени а) прогибов; б) поперечных деформаций (сплошная линия – центральное сечение цилиндра, штриховая линия – сечение с максимальным меридиональным моментом)

Расчеты по соотношениям моментной теории позволили выявить возникновение нулевых и сжимающих напряжений на внутренней поверхности оболочки в начальный момент времени, причем соответствующие вычисления не сопровождались какими-либо затруднениями, характерными в подобных случаях для расчетов по уравнениям безмоментной теории. На рисунке 15 представлены кривая, характеризующая зависимость меридиональных напряжений в сечении с максимальным меридиональным моментом на внутренней поверхности оболочки (сплошная линия), и аналогичная кривая, построенная по результатам, полученным с использованием соотношений безмоментной теории (штриховая линия, соответствующая графику напряжений для срединной поверхности в случае расчетов по соотношениям моментной теории).

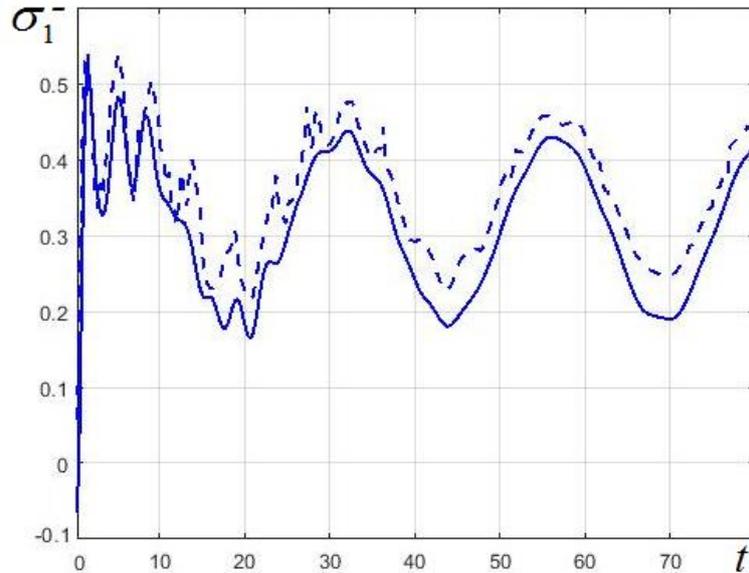


Рис. 15. Зависимость от времени меридиональных напряжений в сечении с максимальным меридиональным моментом

Исследование распределения компонент напряженно-деформированного состояния по меридиану цилиндра в разные моменты времени показало, что для начального этапа переходного процесса характерно более интенсивное их изменение по меридиану, а их абсолютные величины при максимальном значении давления $p=0.02$ выше значений, достигаемых при том же значении давления по окончании переходного процесса. На рисунке 16 приведено распределение поперечных деформаций, типичное и для иных компонент напряженно-деформированного состояния цилиндра, в моменты времени $t_1 = 6.3$; $t_2 = 31.5$; $t_3 = 56.4$, соответствующие максимальному значению раздувающего оболочку давления $p=0.02$.

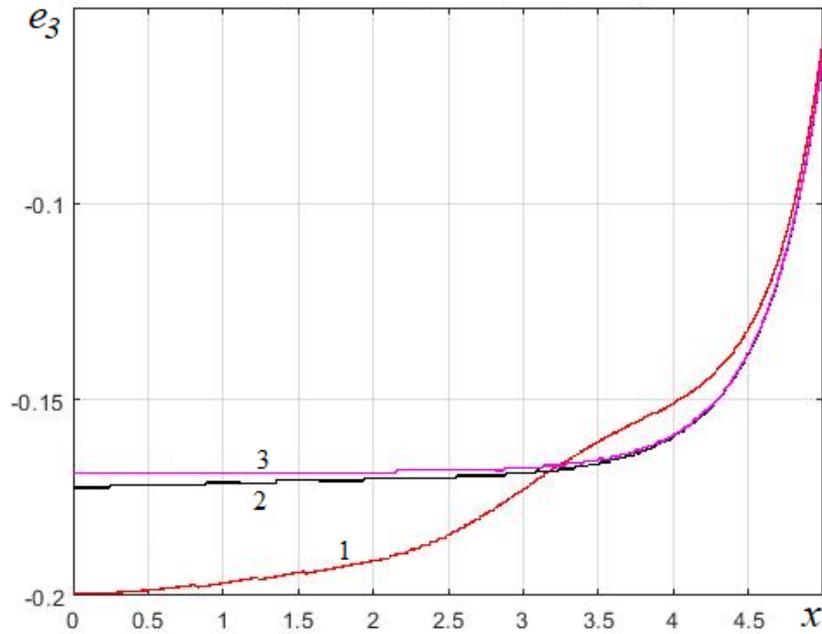


Рис. 16. Распределение поперечных деформаций для цилиндра при значениях давления $p = 0.02$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. В рамках гипотез Кирхгофа-Лява впервые разработаны корректные математические модели, позволяющие исследовать процессы деформирования тонкостенных оболочек вращения из гиперупругих материалов при осесимметричном статическом и динамическом нагружении при произвольной форме меридиана и любых условиях закрепления оболочки.

2. Разработана и развита систематизация одномерных краевых задач механики тонкостенных конструкций, позволяющая минимизировать круг рассматриваемых в работе задач на основании единства их математической формулировки и сформировать базу постановок задач для разработки вычислительных алгоритмов широкой области применения.

3. Разработанные математические модели практически реализованы в форме алгоритмов, основанных на развитии метода дифференцирования по параметру, и в комплексах программ, позволяющих проводить исследования осесимметричного статического и динамического деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов при перемещениях, в несколько раз

превышающих первоначальный характерный размер оболочки, и поперечных деформациях, близких к -100%, с единовременным анализом свойств решаемых систем уравнений.

4. Сформулирован критерий оценки однозначности продолжения решения по параметру в рамках реализации алгоритма решения нелинейных краевых и начально-краевых задач деформирования мягких оболочек. Использование предложенного критерия позволяет исследовать причины потери устойчивости счета, возникающей при решении рассматриваемого в работе класса задач.

5. Исследованы особенности реализации разработанных вычислительных алгоритмов, связанные как с произвольностью величин исследуемых перемещений и деформаций, так и со свойствами самих алгоритмов. Выработаны рекомендации по назначению параметров вычислительного алгоритма для рассматриваемого в работе класса задач.

6. Разработан метод автоматической сегментации интервала интегрирования краевой задачи, направленный на минимизацию необоснованных действий вычислителя при назначении параметров вычислительного алгоритма. Показано, что использование указанного метода при решении как статических, так и динамических задач деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов позволяет повысить точность решения и скорость сходимости итерационных процессов реализованных в работе вычислительных алгоритмов.

7. Разработан и развит теоретический подход к исследованию особенностей процесса потери устойчивости раздуваемой равномерным давлением цилиндрической оболочки из высокоэластичных материалов различных типов.

8. Впервые установлено явление динамического хлопка сферической оболочки из высокоэластичного материала при ее нагружении линейно возрастающим давлением.

9. На основании разработанных математических моделей и алгоритмов впервые исследована задача динамического раздувания оболочки из высокоэластичного материала под действием гармонически изменяющегося давления при неравномерном распределении компонент напряженно-деформированного состояния по меридиану оболочки, в том числе с использованием соотношений моментной теории оболочек.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах из перечня ВАК:

1. Коровайцева Е.А. Об обеспечении точности решения задач модального анализа // Труды МАИ. – 2018. – № 101. – URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=96401>
2. Коровайцева Е.А. Смешанные уравнения теории мягких оболочек // Труды МАИ. – 2019. – № 108. – URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109235>
3. Коровайцева Е.А. О некоторых особенностях решения задач статики мягких оболочек вращения при больших деформациях // Труды МАИ. – 2020. – Т. 114. – URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=118881>
4. Коровайцева Е.А. Систематизация одномерных краевых задач механики деформируемого твердого тела // Труды МАИ. – 2020. – Т. 110. – URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=112827>
5. Коровайцева Е.А. Использование метода автоматической сегментации в решении задач статики мягких оболочек вращения при больших перемещениях и деформациях // Труды МАИ. – 2021. – № 121. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=162638>
6. Коровайцева Е.А. Сравнительный анализ статического деформирования мягких оболочек канонических форм меридиана при раздувании // Труды МАИ. – 2022. – № 123. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=165315>
7. Коровайцева Е.А. Исследование влияния локального утонения на закритическое поведение цилиндрической оболочки из гиперупругого материала

// Труды МАИ. – 2023. – № 131. – URL:
<https://trudymai.ru/published.php?ID=175912>

Статьи в журналах, индексируемых Scopus или WoS:

1. Коровайцева Е. А. Исследование особенностей решения задач нестационарной динамики мягких оболочек из высокоэластичных материалов // Проблемы прочности и пластичности. — 2021. — Т. 83, № 2. — С. 151–159.
2. Коровайцева Е. А. Об использовании метода автоматической сегментации в решении нелинейных начально-краевых задач механики мягкооболочечных конструкций // Проблемы прочности и пластичности. – 2021. – Т. 83, № 4. – С. 5–13.
3. Коровайцева Е. А. Применение метода дифференцирования по параметру в решении нелинейных задач стационарной динамики осесимметричных мягких оболочек // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. — 2021. — Т. 25, № 3. — С. 556–570.
4. Коровайцева Е.А. К обоснованию однозначности продолжения решения задач о деформировании мягких оболочек методом дифференцирования по параметру // Проблемы прочности и пластичности. – 2022. – том 84, №. 3. – С. 343-350.
5. Коровайцева Е.А. Об исследовании влияния параметров исходных данных на деформирование мягких оболочек вращения // Проблемы прочности и пластичности. – 2023. – том 85, №. 2. – С. 5-13.

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ

1. Свид. 2020610907 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа расчета нелинейного поведения неразветвленных тонкостенных конструкций при произвольных перемещениях, поворотах и деформациях. / Е.А. Коровайцева; заявитель и правообладатель Е.А. Коровайцева (RU) – № 2019666107; заявл. 05.12.19; опубл. 21.01.20.
2. Свид. 2022613529 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа расчета нелинейного динамического поведения осесимметричных мягких оболочек при больших

деформациях. / Е.А. Коровайцева; заявитель и правообладатель Е.А. Коровайцева (RU) – № 2022613028; заявл. 27.02.22; опубл. 14.03.22.

3. Свид. 2022614200 Российская Федерация. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа параметрического анализа процесса статического деформирования мягких оболочек вращения из высокоэластичных материалов. / Е.А. Коровайцева; заявитель и правообладатель Е.А. Коровайцева (RU) – № 2022613364; заявл. 04.03.22; опубл. 17.03.22.