

На правах рукописи



КАРАВАЕВ ЮРИЙ ЛЕОНИДОВИЧ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ  
ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ  
НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С КАЧЕНИЕМ

Специальность 01.02.01 — Теоретическая механика

**Автореферат**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Ижевск — 2015 год

Работа выполнена на кафедре «Мехатронные системы» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова».

Научный руководитель: **Килин Александр Александрович**, доктор физико-математических наук, доцент, декан физико-энергетического факультета Удмуртского государственного университета

Официальные оппоненты: **Иванов Александр Павлович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Московского физико-технического института (государственного университета)

**Буров Александр Анатольевич**, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник федерального государственного бюджетного учреждения науки Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики Уральского отделения РАН

Защита состоится «19» июня 2015 г. в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д212.125.14 при Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Отзыв на автореферат, заверенный печатью организации, просим направлять по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

Автореферат разослан 16 апреля 2015 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
к. ф. -м. н., доцент



В. Ю. Гидаспов

## Общая характеристика работы

### Актуальность работы

Современный интерес к теоретическим и экспериментальным исследованиям систем с качением вызван активным развитием робототехники, прежде всего мобильных роботов, предназначенных для эксплуатации как на поверхности Земли, так и в условиях других планет. Для исследования подобных систем используются уравнения движения в различных формах (Эйлера-Лагранжа, Чаплыгина, Воронца, Аппеля, Маджи и др.). Теоретические основы исследования систем с качением в неголономной постановке изложены в работах как российских так и зарубежных авторов, которые включают описание классических и новых неголономных систем. Отдельно следует отметить работы посвящённые исследованию неголономных моделей мобильных колесных роботов, к которым относятся самая простая и распространённая модель мобильного робота только с двумя приводными колесами, с одним или двумя рулевыми колесами, мобильные роботы с роликонесущими колесами (или омниколесами). Это работы Д. Е. Охочимского, Ю.Г. Мартыненко, Я.В. Татарина, А.А. Зобовой, С.Ф. Бурдакова, И.В. Мирошника, Р.Э. Стельмакова, А.В. Борисова, И. С. Мамаева, А.А. Килина и других.

Большую популярность в последние годы, особенно у зарубежных авторов, приобретают исследования различных конструкций сферических роботов. Наиболее полные обзорные работы этого класса неголономных систем с качением представлены в работах А.В. Борисова, И. С. Мамаева, А.А. Килина, М.Свинина, А.Хальме, Р. Чейза, А. Панди, Родри Армура, Ю. Винсента и других. Исследования в этом направлении являются наиболее актуальными, так как сферическое колесо в будущем является потенциальной заменой классического колеса. Это существенно повысит маневренность и управляемость мобильных роботов, а следовательно и степень их внедрения в различные сферы жизни. Разработка и внедрение неголономных движителей, на базе шаровых приводов, неголономных манипуляторов требует развития соответствующих нелинейных моделей управления или адаптации существующих моделей движения колесных систем.

Практическая реализация алгоритмов управления системами с качением является сложной задачей, так как для её решения нет универсального подхода, и, как правило, разработке системы управления предшествует теоретический анализ движения, позволяющий подобрать рабочие режимы, соответствующие стационарным движениям неголономной системы, оценить их устойчивость и способы стабилизации. С другой стороны, в

мобильной робототехнике наличие неголономных связей, ограничивающих возможные перемещения, как правило, обусловлено отсутствием дополнительных приводных элементов. При современном развитии микропроцессорной техники разработка специальной «неголономной» системы управления является более дешевым вариантом, чем введение новых конструктивных и приводных элементов, исключающих неголономность системы, если это технически возможно. Данное обстоятельство особенно актуально для автономных мобильных систем, испытывающих в абсолютном большинстве случаев проблемы с обеспечением энергией.

В работе представлены исследования двух систем с качением. Первая - сферический робот с внутренней омниколесной платформой, разработанный в рамках сотрудничества Лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения (ФГБОУ ВПО «УдГУ») и НУЛ «Мобильные системы» кафедры «Мехатронные системы» (ФГБОУ ВПО «ИжГТУ имени М.Т. Калашникова»). Исследование и разработка сферического робота имеют явную практическую значимость. Однако, без соответствующих теоретических моделей, описывающих движение подобных систем, в независимости от конструкции, реализовать алгоритмы управления для достижения заданной точности на практике не представляется возможным.

Вторая система является классической в неголономной механике - однородный диск, катящийся (с проскальзыванием) по горизонтальной поверхности (в зарубежной литературе его часто называют диск Эйлера). Анализ качения диска по горизонтальной поверхности посвящено большое количество работ, в том числе и экспериментальных. Однако, вопрос о поведении диска в момент остановки остаётся открытым, что делает все существующие теоретические модели его движения неполными, а задачу экспериментального исследования момента остановки актуальной, так как существующие гипотезы поведения диска в момент остановки (а также основанные на данных гипотезах теоретические модели), представленные в работах как отечественных так и зарубежных учёных, противоречивы. Отметим, что вопрос о падении диска Эйлера является основным при изучении динамики и управления робота-колеса.

## **Цель работы**

Целью диссертационной работы является исследование динамических систем с качением, используя сочетание аналитических, численных и экспериментальных методов. Экспериментальные методы подразумевают разработку и создание натуральных образцов рассматриваемых систем, а также

экспериментальных установок и методик определения параметров их движения.

### **Методы исследования**

Для решения поставленных в рамках диссертации задач предполагается использовать аналитические и численные методы теории динамических систем, теории устойчивости. Для проведения экспериментальных исследований качения диска по горизонтальной поверхности разработаны методики, позволяющие определить наличие потери контакта катящегося диска от поверхности и даже зафиксировать ее длительность. Для исследования звука, сопровождающего качение диска, использовались такие методы спектрального анализа как быстрое преобразование Фурье и вейвлет-преобразование. При проведении экспериментальных исследований движения сфероробота использовались современные технологии захвата движения (Motion Capture). Обработка результатов экспериментов проводилась с использованием программного комплекса Matlab.

Алгебраические преобразования, в том числе вывод уравнений, описывающих динамику, анализ устойчивости выполнялись с помощью пакета программ Maple v.15. Программное обеспечение для управления сферороботом разрабатывалось на языке Си для микроконтроллеров серии STM32F303 с ядром Cortex-M4 в среде Keil uVision4. Пользовательский интерфейс для управления сферороботом разработан на языке C# в среде MS Visual Studio 2010.

### **Научная новизна и основные результаты**

Разработана новая конструкция сферического робота, приводящегося в движение внутренней омниколесной платформой, и обладающая повышенной маневренностью. Построены кинематическая и динамическая модели движения разработанной конструкции сфероробота, проведен анализ устойчивости частных решений. Проведены экспериментальные исследования разработанных математических моделей, на основе которых сделана оценка возможности их использования для управления движением сферического робота с внутренней омниколесной платформой. Разработан алгоритм планирования траектории движения для идеального случая абсолютно сбалансированной и симметричной внутренней омниколесной платформы, а также с учётом возможного смещения центра масс. Разработана экспериментальная методика определения смещения центра масс для несбалансированной омниколесной платформы, приводящей в движение сферическую оболочку. Доказано, что в общем случае траекторией движения сфероробо-

та с внутренней омниколесной платформой при постоянных управляющих воздействиях является окружность.

В области исследования движения катящегося диска по горизонтальной поверхности разработана методика, позволяющая обнаружить отрыв диска от поверхности перед остановкой. Экспериментальное подтверждение наличия отрыва диска от поверхности перед остановкой получено впервые, что позволило также выдвинуть гипотезы дальнейшего теоретического исследования данного явления. Проведённые исследования звуковых колебаний, сопровождающих качение диска, с использованием спектральных преобразований хорошо коррелируют с результатами исследований по определению отрывов диска.

**Положения и результаты, выносимые на защиту.** На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- 1) Конструкция сферического робота с внутренней омниколесной платформой.
- 2) Кинематическая модель движения сфероробота с внутренней омниколесной платформой, а также границы её применимости.
- 3) Алгоритм планирования траектории движения на базе кинематической модели для сфероробота с внутренней омниколесной платформой.
- 4) Методика определения смещения центра масс для омниколесной платформы сфероробота.
- 5) Динамическая модель движения сфероробота с внутренней омниколесной платформой.
- 6) Алгоритм управления сферическим роботом с использованием базовых маневров (гейтов).
- 7) Экспериментальная методика определения отрыва катящегося диска от горизонтальной поверхности перед остановкой, а также экспериментальное подтверждение наличия микроотрывов катящегося диска от поверхности, сопровождающих его движение.

### **Аргументированность, обоснованность и достоверность диссертации**

Достоверность и обоснованность результатов обеспечивается использованием фундаментальных векторных преобразований, законов сохранения, а также результатами натуральных экспериментов. Разработанные математические модели основываются на классических утверждениях и теоремах и не противоречат известным результатам. Для проведения экспериментальных исследований использовались современные измерительные комплексы, прошедшие поверку.

## **Теоретическая и практическая ценность**

Конструкция разработанного сферического робота с внутренней омниколесной платформой обладает повышенной маневренностью и простотой управления по сравнению с другими конструкциями сферических роботов. Разработанные математические модели движения могут использоваться для управления сферороботом подобной конструкции в реальных условиях, их адекватность подтверждена экспериментальными исследованиями. С другой стороны сфероробот с внутренней омниколесной платформой является примером сложной неавтономной динамической системы, на основе которой можно проводить как моделирование, так и экспериментальные исследования, дополняя или упрощая существующую конструкцию, что делает его наглядным лабораторным комплексом, который можно внедрять в учебный процесс для изучения алгоритмов управления, разработки моделей движения, а также в рамках более прикладных дисциплин связанных с мехатроникой и робототехникой.

Разработанная методика для определения отрыва катящегося диска от поверхности впервые позволила однозначно подтвердить наличие отрыва диска от поверхности перед его остановкой, поставив под сомнения гипотезы об отсутствии потери контакта диска с поверхностью. В настоящее время отсутствует полное теоретическое обоснование данного явления, что будет являться толчком для дальнейших как теоретических, так и экспериментальных исследований.

## **Апробация результатов**

Основные результаты работы обсуждались на семинарах Института компьютерных исследований ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет», кафедры «Мехатронные системы» ФГБОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова». Кроме того результаты исследований, изложенные в диссертации докладывались на российских и международных конференциях:

- PUTAM Symposium « From Mechanical to Biological Systems - an Integrated Approach », 05–10 июня 2012, г. Ижевск, РФ
- Fourth International Conference «Geometry, Dynamics, Integrable System» – GDIS 2013, 10–14 июня 2013, г. Ижевск, РФ
- Международная конференция «Нелинейная динамика и её приложения», 15 - 18 октября 2013, г. Ярославль, РФ
- Fourth forum of young researchers. In framework of international forum «EDUCATION QUALITY – 2014», 23 апреля 2014, г. Ижевск, РФ.

- XI Международная научно-техническая конференция «Вибрация-2014. Вибрационные технологии, мехатроника и управляемые машины», 14-16 мая 2014, г. Курск, ЮЗГУ, РФ.

## **Публикации**

Результаты диссертации отражены в 8 научных публикациях, 7 из которых опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК, включая 2 публикации, опубликованных в журналах Web of Science. Список приведен в конце автореферата.

## **Личный вклад**

Постановки задач, обсуждение и интерпретация результатов проводились совместно с научным руководителем и соавторами работ. Автором разработаны математические модели, экспериментальные установки, изготовлены натурные образцы, проведены натурные и численные эксперименты, разработано программное обеспечение для обработки экспериментальных данных и управления сферическим роботом.

## **Объем и структура работы**

Диссертация изложена на 106 страницах и состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы (119 наименований).

## **Содержание диссертации**

В **первой** главе проводится анализ конструкций существующих сферических роботов, являющихся примерами активно развивающихся в настоящее время систем с качением. Сферические роботы обладают значительными преимуществами по сравнению с традиционными колесными или ходящими роботами: защищенность системы управления и конструктивных элементов робота от механических воздействий или неблагоприятных условий внешней окружающей среды (так как они расположены внутри герметичной оболочки); подвижность внутренних приводных механизмов не зависит от условий поверхности, по которой движется сферическая оболочка; омнаправленность, то есть способность двигаться в любом направлении, без дополнительных маневров; меньшая сила давления на поверхность, что позволяет двигаться сферороботу по сыпучим материалам, снегу и воде. Одним из перспективных направлений разработки сферических роботов является их потенциальная возможность перемещаться в условия других



планет, а также из одной среды в другую, например по воде и по суше, существенно расширяя область использования мобильных роботов.

Существует более двух десятков различных вариантов конструкций сферических роботов, для которых разработаны математические модели управления, а также экспериментальные образцы. Однако, в рамках теоретических исследований авторы, чаще всего, ограничиваются рассмотрением только кинематических уравнений, а динамические модели используются для описания идеализированных систем, ввиду их сложности. Поэтому в работах, посвящённых экспериментальным исследованиям движения сферических роботов, отклонения реальных траекторий движения от теоретических достигали 50%.

В данной работе проводятся исследования сферического робота с внутренней омниколесной платформой, разработанного в лаборатории Нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения. Конструкция данного сфероробота представляет собой полую сферическую оболочку, внутри которой перемещается платформа с тремя омниколесами. На рисунке 1 представлены 3D модель и фото экспериментального образца.

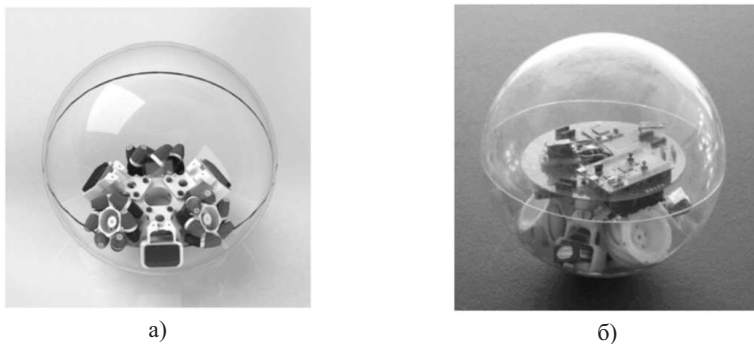


Рис. 1. Трёхмерная (а) и реальная (б) модель сфероробота с внутренней омниколесной платформой

Для описания движения сфероробота введены три системы координат. Первая  $OXYZ$  - неподвижная, с осями  $\alpha, \beta, \gamma$ , вторая  $Cx'y'z'$  - подвижная, жёстко связанная со сферической оболочкой с осями  $\xi, \eta, \zeta$ , и третья  $Cxyz$  - подвижная жёстко связанная с омниколесной платформой с осями  $e_1, e_2, e_3$  (см. рис. 2а). При этом конструкция подвижной платформы описывается следующими постоянными (в системе координат  $Cxyz$ ) векторами:  $r_i$  - радиус - векторы центров омниколес,  $n_i$  - единичные векторы,

направленные вдоль осей вращения омниколес,  $\alpha_i$  - единичные векторы, задающие направления осей вращения роликов каждого колеса в точках контакта с оболочкой (см. рис. 2b), и  $r_m$  - задаёт положение центра масс подвижной платформы с омниколесами.

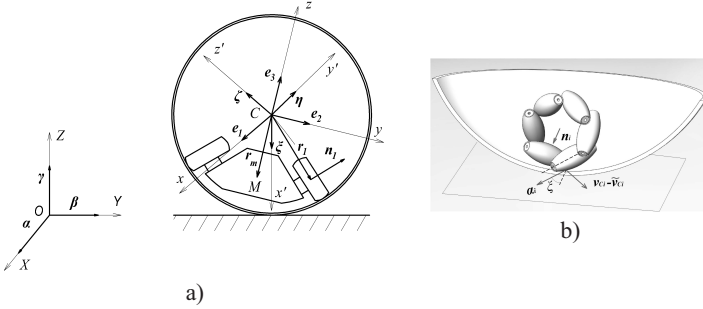


Рис. 2. (a) - Схема сфероробота, (b) - модель омниколеса в сферической оболочке

Положение системы задаётся координатами центра сферической оболочки в неподвижной системе координат  $r = (x, y, 0)$ , углами поворота колес  $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  и двумя матрицами, задающими ориентацию в пространстве платформы и сферической оболочки

$$\mathbf{Q} = (\alpha, \beta, \gamma), \quad \mathbf{S} = (\xi, \eta, \zeta). \quad (1)$$

Все вектора записаны в проекциях на оси системы координат  $Cxyz$  жёстко связанной с платформой. Таким образом конфигурационно пространство рассматриваемой системы представляет собой произведение  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^3 \times SO(3) \times SO(3)$ . В данных координатах движение сферической оболочки и платформы описывается следующими кинематическими соотношениями

$$\dot{r} = \mathbf{Q}^T v, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \tilde{\omega} \mathbf{Q}, \quad \dot{\mathbf{S}} = (\tilde{\omega} - \tilde{\Omega}) \mathbf{S}, \quad (2)$$

где  $v$  — скорость центра сферы (в проекциях на оси системы  $Cxyz$ ), а матрицы  $\tilde{\omega}$  и  $\tilde{\Omega}$  выражаются через компоненты абсолютных угловых скоростей подвижной платформы  $\omega$  и сферической оболочки  $\Omega$ .

Задача управления сферороботом рассматривается в следующей постановке: необходимо определить управляющее воздействие, реализующее движение по заданной траектории  $x(t), y(t)$  при  $t \in [0, T]$ , с заранее заданной зависимостью от времени проекции угловой скорости сферической оболочки на вертикаль  $\Omega_\gamma(t)$  при известных начальных ориентациях  $\alpha(0), \beta(0), \gamma(0)$  и угловой скорости платформы  $\omega(0)$ .

В рамках кинематической модели в качестве управляющих воздействий приняты угловые скорости вращения омниколес  $\dot{\chi}_i$ , которые выражаются из неголономных связей, наложенных на систему. Непроскальзыванию сферической оболочки относительно плоскости соответствует связь

$$F = \mathbf{v} - R_0 \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость центра сферы (в проекциях на оси системы  $Cxyz$ ), а непроскальзыванию колес относительно сферической оболочки

$$G_i = \dot{\chi}_i + \frac{R_0}{(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i) R_w} (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{s}_i) = 0. \quad (4)$$

где  $\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\alpha}_i$ . Зависимость управляющих воздействий от заданной траектории  $(\mathbf{r}_c(t), \Omega_\gamma(t))$  и переменных рассматриваемой системы  $(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\omega})$  запишется в виде

$$\dot{\chi}_i = \frac{1}{R_w} \frac{(\mathbf{s}_i, \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{Q} \dot{\mathbf{r}}_c + R_0 \Omega_\gamma \boldsymbol{\gamma} - R_0 \boldsymbol{\omega})}{(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)}. \quad (5)$$

При допущении, что при движении сфероробота центр масс платформы всегда находится в наинижем положении, получим

$$\dot{\chi}_i = \frac{1}{R_w} \frac{(\mathbf{Q}_m^T \mathbf{s}_i, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{Q}_\psi^T \dot{\mathbf{r}}_c + R_0 (\Omega_\gamma - \omega_\gamma) \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{Q}_m$  — матрица определяющая положение центра масс платформы с омниколесами в подвижной системе координат, через постоянные углы нутации и собственного вращения  $\theta = \theta_m$ ,  $\varphi = \varphi_m$ , а  $\mathbf{Q}_\psi$  — матрица, соответствующая вращению подвижной платформы вокруг вертикали на угол прецессии  $\psi$ , причём  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_m \mathbf{Q}_\psi$ . Угловая скорость  $\omega_\gamma$  является свободным параметром, то есть в рамках кинематической модели можно реализовать движение вдоль заданной траектории с точностью до произвольного вращения платформы вокруг вертикали  $\omega_\gamma(t)$ . На практике при движении сфероробота вращение сферической оболочки относительно вертикали отсутствует, поэтому в дальнейшем используется модель «резинового» тела, то есть  $\Omega_\gamma = 0$ .

На основе разработанной кинематической модели доказывается следующее утверждение: при постоянных управляющих воздействиях  $\boldsymbol{\chi}^* = \text{const}$  сфероробот равномерно движется по окружности, радиус которой  $\rho$  задаётся выражением

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_0} \frac{(\hat{\omega}, \mathbf{r}_m)}{\sqrt{\hat{\omega}^2 r_m^2 - (\hat{\omega}, \mathbf{r}_m)^2}} \quad (7)$$

и зависит только от соотношения управляющих воздействий  $\chi_i/\chi_j$ .

В соответствии с данным утверждением движение по прямой ( $\rho = \infty$ ) возможно в случае  $\omega = 0$ , то есть без изменения ориентации платформы.

$$\dot{\chi}_i = \frac{(\mathbf{Q}_m^T \mathbf{s}_i \times \mathbf{e}_3, \mathbf{Q}_\psi \mathbf{V})}{R_w(\mathbf{s}_i, \mathbf{n}_i)}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{V} = (v \cos(\delta), v \sin(\delta), 0)$ ,  $v$  — скорость сфероробота по прямой, направленная под углом  $\delta$  к оси  $OX$ .

Для вычисления управляющих воздействий (6), (8) необходимо знать положение центра масс платформы. Используя кинематическую модель, вычисление смещения центра масс платформы сводится к экспериментальному определению радиусов кривизны траектории сфероробота при постоянных управляющих воздействиях. Радиусы окружностей, по которым движется сфероробот при постоянных управлениях связаны с радиус-вектором центра масс соотношением (7). Причём данные соотношения зависят только от направления смещения (углов  $\varphi_m, \theta_m$ ), и не зависят от величины смещения. Следовательно, системы двух уравнений типа (7) для различных управляющих воздействий достаточно для того, чтобы определить направление смещения центра масс подвижной платформы. Таким образом, проведя два эксперимента по движению сфероробота с разными постоянными управляющими воздействиями, и измерив радиусы окружностей, по которым при этом движется сфероробот, можно вычислить направления смещения центра масс (углы  $\varphi_m, \theta_m$ ). Для разработанного экспериментального образца данные значения составили

$$\varphi_m = 1.521 \pm 0.018, \quad \theta_m = 0.0535 \pm 0.0075. \quad (9)$$

**Вторая** глава посвящена исследованию динамики сфероробота с внутренней омниколесной платформой. Динамические уравнения движения записываются в форме уравнений в квазискоростях с неопределёнными множителями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial w_i} \right) = \sum_{r,k} c_{ri}^k w_r \frac{\partial L}{\partial w_k} + \nu^i(L) + \sum_j \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial w_i}, \quad i = 1, \dots, s. \quad (10)$$

где  $\mathbf{w} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, v_1, v_2, v_3)$  - вектор квазискоростей,  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$  - соответствующие им векторные

поля, а  $c_{r_i}^k$  структурные константы,  $\lambda$  - неопределенные множители,  $F$  - связи наложенные на систему. Объединив данные уравнения с уравнениями движения колес, получим

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{I} + \mathbf{J}_{ss} - \mathbf{J}_{ns} - \mathbf{J}_{sn})\dot{\omega} + (\mathbf{J}_{ns} - \mathbf{J}_{ss} + mR_0((\gamma, \mathbf{r}_m) - \gamma \otimes \mathbf{r}_m))\dot{\Omega} = \\
& - \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{s}_i K_i - \omega \times \mathbf{I}\omega + (\mathbf{J}_{ns}(\Omega - \omega)) \times \omega - \\
& - mR_0 \mathbf{r}_m \times (\gamma \times (\Omega \times \omega)) - mg(\mathbf{r}_m \times \gamma) \\
& (\mathbf{J}_{sn} - \mathbf{J}_{ss} + mR_0((\mathbf{r}_m, \gamma) - \mathbf{r}_m \otimes \gamma))\dot{\omega} + \\
& + (I_0 + \mathbf{J}_{ss} + (m + m_0)R_0^2(\gamma^2 - \gamma \otimes \gamma))\dot{\Omega} = \\
& - (m + m_0)R_0^2 \gamma \times (\gamma \times (\Omega \times \omega)) - mR_0(\gamma \times (\omega \times (\omega \times \mathbf{r}_m))) - \\
& - I_0 \omega \times \Omega + \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{s}_i K_i
\end{aligned} \tag{11}$$

где введены обозначения  $\mathbf{J}_{ss} = \sum_{i=1}^3 j k_i^2 (\mathbf{s}_i \otimes \mathbf{s}_i)$ ,  $\mathbf{J}_{sn} = \sum_{i=1}^3 j k_i (\mathbf{s}_i \otimes \mathbf{n}_i)$ ,  $\mathbf{J}_{ns} = \sum_{i=1}^3 j k_i (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{s}_i)$ ,  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_p + \sum_{i=1}^3 \mathbf{I}_i$  - тензор инерции подвижной платформы с омниколесами относительно центра сферы,  $j$  - осевой момент инерции колес. Вместе с уравнением Пуассона

$$\dot{\gamma} = \gamma \times \omega \tag{12}$$

уравнения (11) образуют замкнутую приведённую систему уравнений.

Данная система допускает два первых интеграла движения

$$\gamma^2 = 1, \quad (\mathbf{M}, \gamma) = M_\gamma = \text{const}, \tag{13}$$

где вектор  $\mathbf{M}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{J}_{ns} + mR_0((\gamma, \mathbf{r}_m) - \mathbf{r}_m \otimes \gamma))\omega + \\
& (I_0 + \mathbf{J}_{ns} + mR_0((\gamma, \mathbf{r}_m) - \gamma \otimes \mathbf{r}_m) + (m + m_0)R_0^2(1 - \gamma \otimes \gamma))\Omega.
\end{aligned} \tag{14}$$

В случае свободного движения ( $\mathbf{K} = 0$ ) к интегралам (13) добавляется интеграл энергии

$$\begin{aligned}
\varepsilon = & \frac{1}{2}(m + m_0)R_0^2(\Omega \times \gamma)^2 + \frac{1}{2}I_0\Omega^2 + \frac{1}{2}(\omega, \mathbf{I}\omega) + mR_0(\Omega \times \gamma, \omega \times \mathbf{r}_m) + \\
& + (\Omega - \omega, \mathbf{J}_{sn}\omega) + \frac{1}{2}(\Omega - \omega, \mathbf{J}_{ss}(\Omega - \omega)) + mg(\mathbf{r}_m, \gamma).
\end{aligned} \tag{15}$$

Неподвижные точки рассматриваемой системы определяются условиями  $\dot{\Omega} = 0$ ,  $\dot{\omega} = 0$ ,  $\mathbf{K} = 0$ . В этом случае система (11), (12) имеет следующие решения.

1. Два трёхпараметрических семейства неподвижных точек.

$$\omega = 0, \quad \Omega = \Omega_0, \quad \gamma = \pm \frac{\mathbf{r}_m}{|\mathbf{r}_m|}. \quad (16)$$

Данному решению соответствуют такие движения сфероробота, при которых центр масс платформы располагается в наинизшей (наивысшей) возможной точке, её ориентация не изменяется со временем, сферическая оболочка вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega_0$ , а центр сфероробота либо остаётся на месте (при  $\Omega_0 \parallel \gamma$ ), либо движется прямолинейно (при  $\Omega_0 \not\parallel \gamma$ ).

2. Двухпараметрическое семейство неподвижных точек, задаваемое соотношениями

$$\begin{aligned} \omega &= \omega\gamma, \quad \Omega = \omega C_1 \gamma - \omega \frac{mR_0}{J_0} \mathbf{r}_m, \\ \gamma &= -\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{r}_m \times (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}_m \times \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})}{1 - (\mathbf{r}_m, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}_m)}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{J_0}{m^2 R_0^2} (\mathbf{I} + (C_1 - 1)\mathbf{J}_{\text{ns}} - C_2), \quad \mathbf{b} = \frac{J_0}{m^2 R_0^2} \left( mR_0 C_1 - \frac{mg}{\omega^2} - \frac{R_0}{J_0} \mathbf{J}_{\text{ns}} \right) \mathbf{r}_m,$$

$J_0 = I_0 + (m + m_0)R_0^2$ , а  $C_1, C_2$  и  $\omega$  являются параметрами семейства, два из которых можно считать независимыми, а третий вычислять из условия  $\gamma^2 = 1$ . При этом независимые параметры можно выразить через значения интегралов движения  $M_\gamma, \mathcal{E}$ .

Исследование устойчивости в линейном приближении проводится для наиболее распространённого на практике движения по прямой с постоянной скоростью. Для этого система (11, 12) линеаризуется вблизи решения (16)

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{B}\mathbf{z}, \quad (18)$$

где  $\mathbf{z} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \Omega_1 - \Omega_{01}, \Omega_2 - \Omega_{02}, \Omega_3 - \Omega_{03}, \gamma_1 - \gamma_{01}, \gamma_2 - \gamma_{02}, \gamma_3 - \gamma_{03})$  - отклонение от рассматриваемого решения. Корни характеристического уравнения системы (18)

$$\det(\mu\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0 \quad (19)$$

получены в численном виде, по причине сложности рассматриваемой системы. Если решения (16) параметризованы как

$$\omega_0 = (0, 0, 0), \Omega_0 = (-\Omega_0 \sin(\delta), \Omega_0 \cos(\delta), 0), \gamma_0 = (0, 0, 1), \quad (20)$$

то характеристическое уравнение имеет вид

$$\mu^5 \cdot (\mu^2 + 204.2205)(\mu^2 + 0.00829 \cdot \Omega_0^2 + 204.2205) = 0. \quad (21)$$

Как видно из (21), собственные числа характеристического уравнения не зависят от угла  $\delta$ , т.е. от направления движения. Кроме того, они не имеют положительной вещественной части вне зависимости от величины  $\Omega_0$ . Это позволяет говорить об отсутствии экспоненциальной неустойчивости данного решения. Наличие нулевых собственных чисел говорит о том, что для решения вопроса об устойчивости в полной нелинейной постановке необходимо провести разложение системы (11) до более высоких порядков.

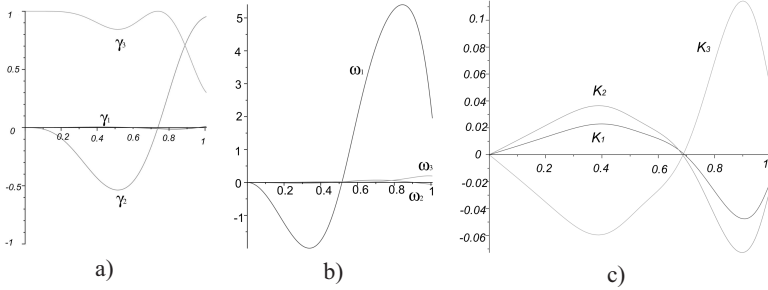


Рис. 3. Зависимости а)  $\gamma(t)$ , б)  $\omega(t)$  и в)  $K(t)$  при движении сфероробота по траектории (24).

Управление сферороботом в рамках динамической модели заключается в следующем. Представим угловую скорость  $\Omega$  в виде

$$\Omega = \Omega_\alpha(t)\alpha + \Omega_\beta(t)\beta + \Omega_\gamma(t)\gamma, \quad (22)$$

где  $\Omega_\gamma(t)$  известная функция времени, а  $\Omega_\alpha(t), \Omega_\beta(t)$  выражаются с помощью уравнения связи (3) и первого из кинематических уравнений (2) следующим образом

$$\Omega_\alpha(t) = \frac{\dot{y}(t)}{R_0}, \quad \Omega_\beta(t) = \frac{\dot{x}(t)}{R_0}. \quad (23)$$

Используя полученные зависимости в уравнениях (11), (12) можно получить численное решение данной системы относительно  $\omega(t), \gamma(t), \Omega(t)$ , из которых вычисляются управляющие воздействия  $K(t)$ . Пример численного решения для траектории заданной в виде (24) представлен на рисунке 3

$$x(t) = 0, \quad y(t) = -\frac{\sin(2\pi t)}{20\pi} + \frac{t}{10}, \quad \Omega_\gamma = 0, \quad t \in [0, 1] \quad (24)$$

Как видно из представленных графиков в конечной точке угловая скорость подвижной платформы  $\omega$ , а также компоненты вектора  $\gamma_1, \gamma_2$  не равны нулю. Следовательно, после того как сфероробот проедет по прямой в соответствии с управлениями, изображенными на рисунке 3с, он не остановится, а продолжит свободное движение (в общем случае хаотическое).

В качестве одного из способов устранения данных недостатков предложен алгоритм управления при помощи гейтов. Данный способ заключается в вычислении управляющих воздействий, при которых сфероробот в начальный и конечный момент времени заведомо движется по какому либо стационарному решению (в частном случае стоит). Однако, в этом случае траектория движения сфероробота заранее не определена, а задача управления сводится к подбору маневра, при котором получающаяся траектория движения сфероробота удовлетворяет необходимым требованиям.

В качестве примера рассмотрены управления сферороботом, реализующие разгон из состояния покоя и поворот во время движения по прямой. Вектор  $\gamma$ , задающий маневр (гейт), представим в виде

$$\gamma(t) = (\sin \theta(t) \cos \varphi(t) \quad \sin \theta(t) \sin \varphi(t) \quad \cos \theta(t)), \quad (25)$$

где углы Эйлера  $\varphi(t), \theta(t)$  определяют ориентацию подвижной платформы во время маневра. Зависимости  $\varphi(t), \theta(t), \omega_\gamma(t)$  для двух маневров выберем из условия стационарности движения в моменты начала и конца маневра

$$\theta(t) = \theta_{max} \sin^2(\pi t), \quad \varphi(t) = \varphi_0 = 0, \quad \omega_\gamma(t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (26)$$

где  $\theta_{max}$  при численных расчётах будем принимать равным  $\theta_{max} = 0.2$ . Отличие указанных двух маневров заключается только в разных начальных условиях. Разгону из состояния покоя соответствуют начальные условия

$$\Omega_0 = 0, \quad \alpha_0 = (1, 0, 0), \quad \beta_0 = (0, 1, 0), \quad (27)$$

а повороту при начальном движении по прямой соответствуют начальные условия

$$\Omega_0 = (-1, 0, 0), \quad \alpha_0 = (1, 0, 0), \quad \beta_0 = (0, 1, 0). \quad (28)$$

Результаты численного решения системы уравнений для маневра (26) с начальными условиями (27) и (28) изображены на рис. 4 и 5 соответственно.

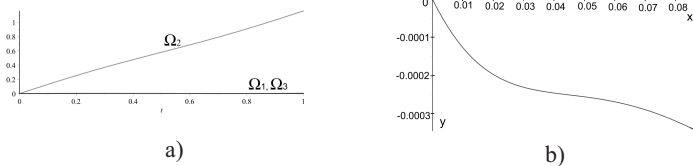


Рис. 4. Угловая скорость  $\Omega(t)$  (а) и траектория движения  $y(x)$  (б) сфероробота при разгоне в соответствии с начальными условиями (27).



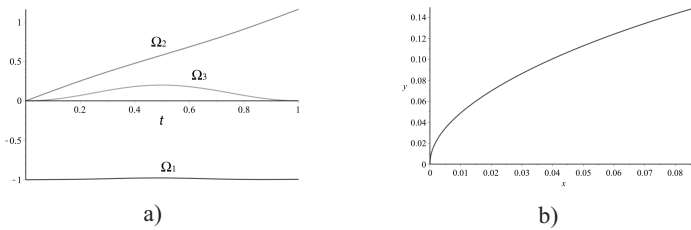


Рис. 5. Угловая скорость  $\Omega(t)$  (a) и траектория движения  $y(x)$  (b) сфероробота при повороте в соответствии с начальными условиями (28).

Как видно из рис. 4 в силу отсутствия осевой симметрии конструкции омниколесной платформы, изменение  $\gamma(t)$  в вертикальной плоскости на сфере Пуассона ( $\varphi = const$ ) приводит к криволинейному движению сфероробота, хотя и довольно близкому к прямой. Это отличает данную систему от сфероробота с маятником Лагранжа, где подобные управления приводят к чисто прямолинейному движению.

В третьей главе приведены результаты экспериментальных исследований движения сфероробота с внутренней омниколесной платформой. Цель экспериментальных исследований заключалась в определении координат сфероробота в процессе движения и их сравнение с заданными. Координаты и ориентация сферического робота определялись с помощью системы захвата движения фирмы Vicon. Все эксперименты

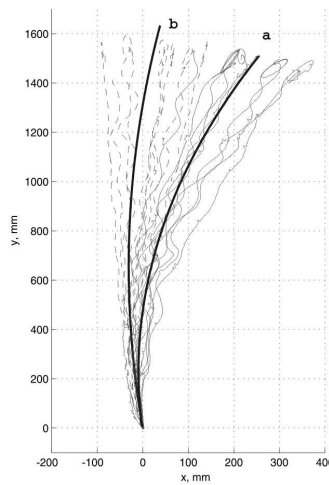


Рис. 6. Траектории сфероробота при управлениях, рассчитанных для прямолинейного движения: **a** - без учёта смещения центра масс, **b** - с учётом смещения центра масс

проводились для управляющих воздействий, рассчитанных в рамках кинематической модели. Приведены результаты экспериментального определения смещения центра масс подвижной платформы, а также экспериментальная проверка полученных значений. Влияние смещения центра масс оказалось существенным (см. рис. 6), поэтому для последующих экспериментов управляющие воздействия рассчитывались с учётом полученного смещения центра масс.

Проведены экспериментальные исследования движения сфероробота по прямой при различных скоростях, с постоянными управляющими воздействиями, а также по окружности с сохранением ориентации подвижной платформы. Типовые траектории с управляющими воздействиями, рассчитанными для траектории, заданной в виде прямой, приведены на рисунке 6, а на рисунках 7 приведены полученные зависимости радиуса кривизны траектории от скорости со среднеквадратичными отклонениями, рассчитанными по десяти экспериментам. На рис. 8а, приведены типовые траекто-

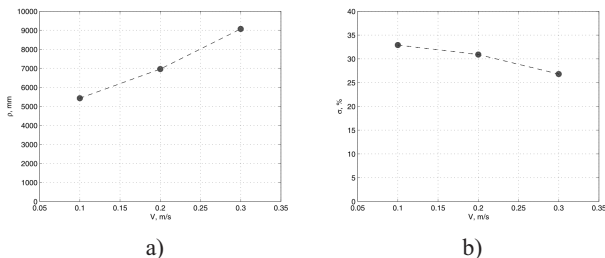


Рис. 7. а) Зависимость радиуса кривизны траектории от скорости движения при  $\delta = 0$ . б) Зависимость среднеквадратичного отклонения радиуса кривизны траектории от скорости движения при  $\delta = 0$ .

рии с постоянными управляющими воздействиями  $\dot{\chi}_1 = -14.28\kappa$ ,  $\dot{\chi}_2 = 28.57\kappa$ ,  $\dot{\chi}_3 = 57.14\kappa$ ,  $\kappa = 1.5$ , а на рис. 8б зависимость радиуса кривизны траектории от скорости с доверительным интервалом. Толстой линией показана траектория построенная по среднему радиусу кривизны, вычисленного по десяти экспериментам с одинаковыми условиями. Подобные результаты представлены на рисунках 8с, 8д для траектории заданной в виде окружности с сохранением ориентации подвижной платформы.

Полученные результаты подтверждают адекватность разработанных теоретических моделей, а также возможность их использования для управления реальным сферическим роботом.

В **четвертой** главе приведены результаты экспериментальных исследе-

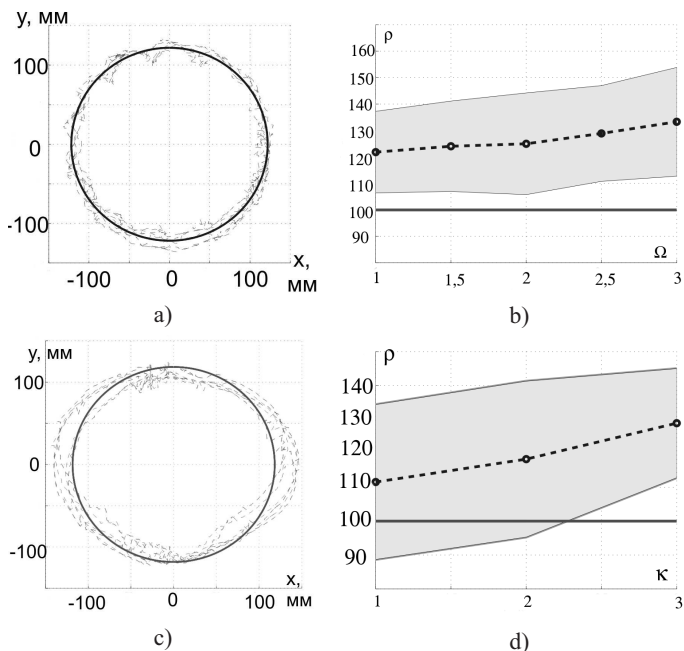


Рис. 8. Движение с постоянными управляющими воздействиями а) типовые траектории сфероробота, б) зависимость радиуса кривизны от скорости. Движением по окружности с сохранением ориентации подвижной платформы в) типовые траектории, д) зависимость радиуса кривизны от скорости.

дований более простой системы с качением, представляющей собой диск, катящийся по горизонтальной плоскости, и являющийся упрощённой моделью робота—колеса. Представлены две экспериментальные методики исследования финальной стадии качения диска перед его остановкой. Первая - более простая, не требующая технически сложного оборудования, но позволяющая обнаружить наличие отрыва диска от поверхности в момент его остановки. Вторая методика позволяет не только определить наличие отрыва, но и зафиксировать его продолжительность. Её основная идея в создании электрического контура, в который входят металлический диск, проводящее основание (поверхность) и измерительный прибор (осциллограф). В процессе качения диска по поверхности контур остается замкнутым, а в момент отрыва происходит его разрыв, что фиксируется с помо-

щью осциллографа. Одновременно производилась запись звуковых колебаний, сопровождающих качение диска. В диссертационной работе приводится описание экспериментальной установки и результаты экспериментов для дисков с различными массами и изготовленными из стали и алюминия. На рисунке 9 представлена типовая осциллограмма, соответствующая последним 5 секундам качения диска, и результат вейвлет-преобразования акустических колебаний. В ходе проведения экспериментальных исследо-

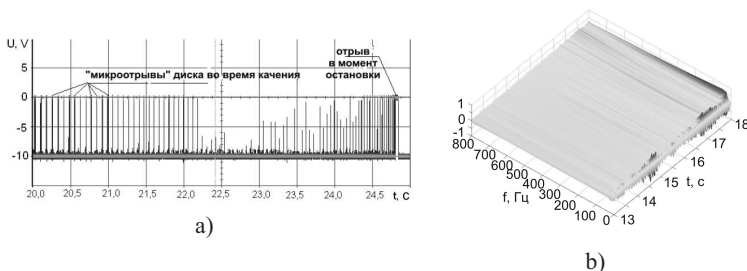


Рис. 9. Последние 5 с движения (а) - осциллограмма , (б) - результат вейвлет преобразования

ваний обнаружен ряд особенностей, характеризующих движение диска, и имеющих неожиданный характер:

- 1) При проведении опытов обнаружено, что диск отрывается не только в момент остановки, но и во время движения, однако, время отрыва существенно меньше (до 0,7 мс). Частота и длительность «микроотрывов» малопредсказуемы и имеют вероятностный характер.
- 2) Анализ звуковых колебаний сопровождающих качение диска с помощью Фурье и вейвлет - преобразований показал наличие в сигнале большого количества гармоник, характерных ударным импульсам, особенно в момент остановки диска.
- 3) Чистота поверхности, по которой движется диск, а также качество обработки поверхностей вносят существенный вклад в характер движения диска, хотя время отрыва диска в момент его остановки остается прежним, и зависит только от массы и размеров диска.

## Основные результаты и выводы

- 1) Разработана конструкция сферического робота с внутренней омниколесной платформой. Изготовлен экспериментальный образец.
- 2) Разработана кинематическая модель движения сферического робота с внутренней омниколесной платформой и алгоритм планирования траектории на её основе.
- 3) Доказано, что траекторией движения сфероробота с внутренней омниколесной платформой при постоянных неравных угловых скоростях вращения омниколес является окружность.
- 4) Исследовано влияние смещения центра масс подвижной платформы на траекторию движения сферического робота.
- 5) Разработана методика определения положения центра масс внутренней омниколесной платформы сферического робота на основе экспериментальных данных и определено положение центра масс для натурного образца.
- 6) Получены уравнения динамики движения сферического робота с внутренней омниколесной платформой.
- 7) Найдены неподвижные точки и проведен анализ устойчивости стационарных решений приведенной системы, описывающей движение сфероробота с внутренней омниколесной платформой. Показано, что отсутствует экспоненциальная неустойчивость при равномерном движении по прямой, при сохранении подвижной платформой горизонтального положения.
- 8) На основе динамической модели движения сфероробота разработан алгоритм расчёта управляющих воздействий (моментов, приложенных к омниколесам), реализующих движение по заданной траектории. Результаты численного моделирования показали, что недостатком данного алгоритма является то, что после завершения качения вдоль заданной траектории (и отключения управления) сфероробот продолжает свободное движение, которое в общем случае является хаотическим.
- 9) Для исключения указанного недостатка разработан численный алгоритм построения элементарных маневров (гейтов), позволяющих переходить с одного стационарного движения на другое. Данный алгоритм проиллюстрирован на примере разгона сфероробота и поворота при начальном движении по прямой.
- 10) Проведены экспериментальные исследования движения сфероробота с внутренней омниколесной платформой по траекториям заданным в

виде прямой и окружности, подтверждающие разработанные теоретические модели.

- 11) Проведены экспериментальные исследования качения однородного диска по горизонтальной плоскости на специально разработанных экспериментальных установках, позволивших подтвердить наличие отрыва диска от поверхности перед его остановкой. Продолжительность отрыва катящегося диска от горизонтальной поверхности перед его остановкой зависит от массы диска, и не зависит от параметров его движения. В процессе проведения экспериментальных исследований обнаружены «микроотрывы» диска от горизонтальной поверхности во время движения. Их характер и количество определяется качеством обработки взаимодействующих поверхностей. Зафиксированы продолжительности «микроотрывов»

### **Публикации автора по теме диссертации**

Основные результаты диссертации опубликованные в журналах входящих Web of Science:

- 1) Borisov A. V., Mamaev I. S., Karavaev Y. L. On the loss of contact of the Euler disk // *Nonlinear Dynamics*, 2015. - V. 79 (4). - pp. 2287-2294. DOI 10.1007/s11071-014-1811-5.
- 2) Karavaev Y. L., Kilin A. A. The Dynamic and Control of a Spherical Robot with an Internal Omniwheel Platform // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015. - V. 21 (2). - pp. 134-152.

в журналах из перечня ВАК:

- 1) Караваев Ю.Л., Трефилов С. А. Дискретный алгоритм управления по отклонению мобильным роботом с омниколесами // *Нелинейная Динамика*, 2013. - Том 9 (1). - С. 91-100.
- 2) Борисов А.В., Мамаев И.С., Караваев Ю.Л. Об отрыве диска Эйлера // *Нелинейная Динамика*, 2013. - Том 9 (3). - С. 499-506.
- 3) Килин А.А., Караваев Ю.Л., Клековкин А.В. Кинематическая модель управления высокоманевренным мобильным сферороботом с внутренней омниколесной платформой // *Нелинейная Динамика*, 2014. - Том 10 (1). - С. 113-126.
- 4) Килин А.А., Караваев Ю.Л. Кинематическая модель управления сферороботом с внутренней динамически несимметричной омниколесной платформой // *Нелинейная Динамика*, 2014. - Том 10(4). - С. 497-511.
- 5) Караваев Ю.Л., Килин А.А. Динамика сфероробота с внутренней омниколесной платформой // *Нелинейная Динамика*, 2015. - Том 11 (1). - С. 187-204.

в других изданиях:

- 1) Karavaev Y., Trefilov S. A. A deviation based discrete control algorithm for a mobile omnidirectional robot // The Proceeding of IUTAM Symposium, Izhevsk 5-10 June 2012, p. 223-236.
- 2) Kilin A. A., Karavaev Y. L., Klekovkin A. V. The Kinematic Control Model for a Highly Maneuverable Mobile Spherical Robot with an Internal Omniwheel Platform // Nonlinear Dynamics and Mobile Robotics, 2014. - V. 2 (2). - pp. 173-187.
- 3) А.В. Борисов, А. А. Килин, Ю. Л. Каравасв, А. В. Клековкин, Управление сферороботом с внутренней омниколесной платформой // Сборник статей XI Международной научно-технической конференции "Вибрация-2014. Вибрационные технологии, мехатроника и управляемые машины". Курск, ЮЗГУ. С. 322-327.

