

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. Н. Э. БАУМАНА  
(МГТУ им. Н. Э. БАУМАНА)

На правах рукописи



**Нгуен Зуй Хунг**

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ  
ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО ПОЛОСТИ С ЖИДКОСТЬЮ И  
ЗАБОРНЫМИ УСТРОЙСТВАМИ**

Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

к.ф-м.н, доцент

Темнов Александр Николаевич

Москва - 2016

## Оглавление

Оглавление .....	2
ВВЕДЕНИЕ .....	4
Глава 1. Обзор литературных источников и конструкции современных заборных устройств.....	7
1.1. Обзор литературы .....	7
1.2. Заборные устройства и капиллярные системы отбора жидкости.....	12
1.3. Локальные КСОЖ .....	15
1.4. Тотальные КСОЖ .....	17
1.5. Упрощённые модели ЗУ и КСОЖ.....	20
Глава 2. Малые движения тяжелой жидкости в осесимметричных полостях с заборным устройством и внутрибаковыми элементами .....	24
2.1. Постановка задачи .....	24
2.2. Постановка краевой задачи для потенциала скоростей .....	28
2.3. Малые движения жидкости в сферической полости.....	29
2.4. Малые движения жидкого топлива в емкостях с двумя концентрическими сферами.....	43
2.5. Колебания жидкости в сферических полостях с внутренними устройствами .....	51
Глава 3. Малые движения жидкости в осесимметричных полостях с заборным устройством в условиях микрогравитации.....	66
3.1. Построение свободной осесимметричной поверхности равновесия в невозмущенном состоянии $\Gamma_0$ .....	66
3.2. Малые движения жидкости в осесимметричной полости с заборным устройством в условиях микрогравитации .....	72
3.3. Постановка краевой задачи для потенциала скоростей.....	75
3.4. Малые движения жидкости в сферической полости с заборным устройством – сферическая поверхность слива.....	76
3.5. Малые движения жидкости в сферической полости с заборным устройством – плоская поверхность слива.....	86

Глава 4. Малые движения твердого тела с осесимметричной полостью, имеющей заборные устройства и частично наполненной идеальной несжимаемой жидкостью .....	92
4.1. Постановка задачи .....	92
4.2. Малые движения жидкости в подвижной полости .....	94
4.3. Краевая задача для потенциала абсолютных скоростей.....	96
4.4. Потенциал абсолютных скоростей.....	97
4.5. Вывод уравнений для обобщенных координат.....	98
4.6. Уравнения движения твердого тела с полостью, содержащей жидкость	100
4.7. Вывод уравнений движения твердого тела с полостью, содержащей жидкость, в обобщенных координатах.....	103
4.8. Закон баланса энергии .....	105
4.9. Колебания физического маятника со сферической полостью, имеющей заборное устройство и частично наполненной жидкостью.....	109
4.10. Системы уравнений возмущенного движения твердого тела с полостью, имеющей ЗУ и наполненной жидкостью, в условиях микрогравитации.....	125
4.11. Колебания физического маятника, имеющего сферическую полость с плоской поверхностью ЗУ, в условиях микрогравитации.....	128
4.12. Колебания физического маятника, имеющего сферическую полость со сферической поверхностью заборного устройства, в условиях микрогравитации.....	138
Вывод и заключение .....	145
Литература .....	147

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность проблемы.** Задача динамики твердых тел, имеющих полости наполненные жидкостью, является классической задачей механики. В настоящее время актуальность рассматриваемой задачи подчеркивается возросшими требованиями к транспортировке полезных грузов и вынуждает создателей ракетно-космической техники предлагать новые конструкции заборных устройств (ЗУ) ракет-носителей (РН), разгонных блоков и космических аппаратов (КА). Однако влияние новых конструкций топливных отсеков, наполненных жидкостью, на динамику механических систем твердое тело-жидкость является по существу мало изученным.

**Целью диссертационной работы** является создание математических моделей динамики твердого тела с полостью, частично наполненной жидкостью, взаимодействующей с заборными устройствами и внутрибаковыми элементами. Для достижения указанной цели:

- Разработаны упрощенные конструктивные схемы опорожнения топливных баков, учитывающих влияние ЗУ на динамику жидкого наполнителя.
- Поставлены новые краевые задачи о колебаниях идеальной жидкости в осесимметричных полостях произвольной формы, с производной по времени от потенциала скорости в граничных условиях, как на свободной поверхности, так и на поверхности слива.
- Разработана методика решения поставленных задач для баков осесимметричной формы.
- Разработаны математические модели динамики твердого тела с полостью, частично наполненной жидкостью, взаимодействующей с заборными устройствами и внутрибаковыми элементами.

- Составлены вычислительные программы с использованием пакета Matlab для вычисления динамических характеристик жидкости и твердого тела с жидкостью для сосудов сферической формы.

**Метод исследования.** При решении задач, возникших в ходе выполнения диссертационной работы, использовались различные вычислительные и математические методы: вариационный метод, метод конечных элементов, метод Рунге – Кутты, метод разделения переменных и метод обобщенных потенциалов.

**Научную новизну диссертационной работы** имеют следующие результаты:

- Разработана математическая модель малых движений тяжелой идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей неподвижную осесимметричную полость с заборным устройством.
- Разработаны методики вычисления собственных частот и форм волн тяжелой идеальной несжимаемой жидкости в сферических полостях при наличии внутрибаковых элементов.
- Разработана математическая модель малых движений жидкости, частично заполняющей неподвижную осесимметричную полость с заборным устройством, в условиях микрогравитации.
- Исследованы малые колебания жидкости, частично заполняющей подвижную осесимметричную полость с заборными устройствами, в условиях макро и микрогравитации.
- Исследованы динамические характеристики твердого тела с жидкостью и заборными устройствами в условиях макро и микрогравитации.

**Практическая ценность.** Результаты диссертации могут быть использованы при исследовании управляемого движения проектируемых разгонных блоков, КА и РН, а так же в учебных процессах студентов, обучающихся по направлениям ракетно-космической техники.

**Достоверность полученных результатов** следует из сравнения с известными аналитическими и численными решениями, полученными для идеальной жидкости.

**Структура и объем диссертации.** Результаты исследований изложены на 156 страницах машинописного текста, иллюстрированного 75 рисунками и 16 таблицами. Диссертация состоит из введения, 4 глав с краткими выводами по каждой главе, заключения, списка публикаций и литературы.

**Апробация работы:** основные результаты диссертационной работы доложены на международных научных конференциях, в том числе:

1. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Российский Национальный комитет по теоретической и прикладной механике, (г. Казань, август 2015г).
2. 50-е научные чтения памяти К.Э. Циолковского, Министерство культуры Российской Федерации, (г. Калуга, сентябрь 2015г).
3. XL академические чтения по космонавтике «Королёвские чтения 2016», сборник научных докладов, МГТУ им. Н. Э. Баумана, (г. Москва, январь 2016г).
4. Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященная 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева, МГТУ им. Н. Э. Баумана, (г. Москва, май 2016г).

**Публикации:** список научных трудов по диссертационной работе составляет 8 публикаций, в том числе 4 публикации, в рецензируемых научных изданиях и журналах из перечня ВАК.

## **Глава 1. Обзор литературных источников и конструкции современных заборных устройств**

### **1.1. Обзор литературы**

В соответствии с темой диссертации, все работы, относящиеся к движению тел с полостями, частично или полностью наполненных жидкостью, разделим условно на две группы: работы по движению тел с полостями не имеющих внутрибаковых элементов (ВБЭ), заборных устройств (ЗУ) и работы в которых оценивается влияние ВБЭ и ЗУ на динамику самой жидкости и твердого тела с жидкостью.

К первой группе следует отнести работы, фактически ставшие классическими и известными многим ученым, занимающимися подобными проблемами. Это, прежде всего работа Н. Е. Жуковского [24], [25] и предшествующее этой работе сочинение по математике и физике Г. Стокса [92]. Дальнейшее развитие этих работ было продолжено в трудах Слудского [74], Хафа [88], Четаева [78], Румянцева [48]. Развитие авиации и космонавтики с 1950-е по 1980-е года дало новый всплеск работам, посвященным динамике тел с полостями, частично заполненными жидкостью. Здесь отметим работы Л. И. Балабуха [6], Г. С. Нариманова [51], [52], Б. И. Рабиновича [69], [70], Д. Е. Охоцимского [61], С.Л. Соболева [75], Ф. Л. Черноусько [1], [82], Н. Н. Моисеева [47], [49], К. С. Колесникова [31], [32], Д. Н. Копачевского [35-37], Л. В. Докучаева [20-22], И. А. Луковского [43], Ф. Н. Шклярчука [79], [80]. Работы этих ученых, и их непосредственное участие в различных конференциях, симпозиумах сформировали советскую школу динамики тел с полостями, заполненными жидкостью.

Книга [4] посвящена математическому изучению поведения жидкости в условиях полной или частичной невесомости, которые реализуются при космических полетах, когда силы поверхностного натяжения и самогравитации порождают специфические эффекты. В книге изучаются формы равновесных

состояний жидкости, условия устойчивости этих состояний и характер их распада (ветвления) при потере устойчивости; частоты и формы малых колебаний идеальной и вязкой жидкости, условия возникновения и формы самогравитационной и термокапиллярной конвекции.

Работа Копачевского [35] посвящена общей постановкой задачи о малых колебаниях идеальной жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения, в частично заполненном неподвижном сосуде в слабом силовом поле. В статьях Копачевского [36], [37] получены частоты и формы малых собственных колебаний идеальной жидкости в прямоугольном канале и в цилиндрическом сосуде в условиях, близких к невесомости.

В диссертации Газиева [14] рассмотрены задачи статики, устойчивости и малых колебаний гидросистемы «жидкость – баротропный газ» в условиях, близких к невесомости. Были получены условия и граница области устойчивости гидросистемы как в общем, так и в частных случаях. Изучены спектральные задачи сопряжения в цилиндрическом контейнере как с горизонтальной, так и произвольной границе сопряжения и построен проекционный метод решения этих задач, основанного на вариационном подходе.

Из современных работ, получивших признание в конце прошлого века и начала текущего столетия, можно отметить работы А. А. Пожалостина [66], [67], В. Е. Левина [42], И. Б. Богоряда [10], [11], Ю. Г. Балакирева [7], А. Г. Петрова [65].

Одним из первых результатов, где было исследовано влияние внутренних перегородок в жидкости на движение твердого тела является результат Н. Е. Жуковского [24]. Рассматривая задачу о движении цилиндрической полости с жидкостью, разделенный на перегородки он показал, что если полость в форме круглого цилиндра разделить непроницаемыми перегородками на две, четыре или восемь равных частей, то момент инерции эквивалентного (по

определению Н.Е. Жуковского) тела составит соответственно 0.6211, 0.7904, 0.9017 от момента инерции затвердевшей жидкости. Прогресс в освоении космоса поставил перед создателями ракетно-космической техники ряд проблем, связанных с демпфированием колебаний жидкого топлива и влияние возникших колебаний на стабилизируемость всей ракеты-носителя (РН) и космического летательного аппарата (КЛА). Этой проблеме посвящены работы Б. Е. Рабиновича [70], Л. В. Докучаева [21], [22] и Г. Н. Микишева [44-46], которые впервые получили приближенные аналитические решения гидродинамических задач о движении жидкости в полостях с радиальными или поперечными перегородками, частично перекрывающими поперечное сечение топливного бака.

В работе И. Б. Богоряда [11] рассмотрены вопросы движения вязкой жидкости, частично заполняющей сосуд. При постановке задачи главное внимание уделяется формулировке граничных условий на твердой стенке, учитывающих реальные процессы в пристеночной зоне и зоне трехфазного контакта жидкость – газ – твердая стенка.

Другой значимой работой, относящейся к этой проблеме, является докторская диссертация В. А. Бужинского [13].

В. А. Бужинский перенес методы теории трещин механики деформируемого твердого тела в области гидродинамики для рассмотрения колебаний пластин в несжимаемой маловязкой жидкости. Автор предложил новую, приближенную модель движения несжимаемой маловязкой жидкости, предназначенную для определения сил сопротивления, действующих на тела с острыми кромками при их чисто колебательном движении. На основе этой модели В. А. Бужинский построил полуэмпирическую асимптотическую теорию вихревого сопротивления.

В работах [90], [93] представлены результаты численного и экспериментального моделирования движения жидкости со свободной

поверхностью в движущемся по гармоническому закону прямоугольном сосуде, имеющим вертикальные перегородки. Показано хорошее согласование численных расчетов с экспериментом. Получена зависимость собственной частоты колебаний от высоты центральной перегородки и исследовано влияние количества перегородок на затухание волн. Показано, что для двух вертикальных перегородок, расположенных симметрично относительно центра, затухание волн максимально, когда расстояние между ними  $0,2L$ , где  $L$  - длина области.

Численному моделированию движения твердого тела, имеющего полость целиком заполненной жидкостью, посвящены работы А. Ю. Боталова [12]. Были получены картины течения жидкости в колеблющейся полости, имеющей различные конфигурации перегородок. Показано, что изменение геометрии перегородок приводит к изменению резонансных частот колебаний тела.

Работы [33] и [34] посвящены исследованию колебаний идеальной несжимаемой жидкости в круговом цилиндрическом баке, разделенных мембранами, перпендикулярными к оси цилиндра. Получено решение гидродинамической задачи и приведено частотное уравнение.

Работа [62] посвящена исследованию колебаний несжимаемой жидкости, вытекающей из сосуда произвольной формы, при отсутствии свободной поверхности жидкости. Показано, что в рассматриваемом случае на поверхности слива возникает апериодический волновой режим движений жидкости с дискретным спектром.

В работе [23] показано, что в жидкости, частично заполняющей неподвижный бак произвольной формы и находящейся в условиях перераспределения, могут сосуществовать как затухающие колебания, так и апериодические режимы движения.

Исследованию условий применимости различных внутрибаковых устройств, таких как капиллярные фазоразделители (КФР) и их испытанию в наземных условиях посвящены работы В. Б. Сапожникова [38], [39], [71].

В работе [39] посвящены теоретическим основам разработки и экспериментальной отработки капиллярных заборных устройств с минимальными остатками топлива.

В работе [40] рассмотрена проблема об обеспечении многократного запуска жидкостных ракетных двигателей КЛА и разгонных блоков в условиях, близких к невесомости.

В работе [71] показано, что наземные испытания должны базироваться на аппарате маломасштабного физического моделирования с применением методов теории подобия гидродинамических процессов и анализа размерностей.

В работах [38], [63] создана математическая модель функционирования КЗУ торового топливного бака, учитывающую наличие газожидкостной смеси в КЗУ в конце опорожнения бака.

В статье [39] исследована методика модельной отработки капиллярных заборных устройств торовых топливных баков с минимальными остатками топлива, учитывающую влияние вибрации на их работоспособность.

Статья [64] посвящена основным положениям расчетно - экспериментального метода проектирования КЗУ торовых топливных баков.

В статьях Клишева [28], [29] созданы экспериментально – теоретические методы и средства исследования влияния подвижности жидкого топлива в баках КА на его проектные динамические характеристики в условиях невесомости и малых перегрузок, при закрутке и стационарном вращения аппарата.

## Вывод по обзору литературы

Из приведенного обзора литературы следует, что достаточно полно к настоящему времени изложены вопросы динамики жидкости и динамики тела с жидкостью в условиях полного или частичного заполнения жидкостью полостей твердого тела. В имеющейся литературе влияние промежуточных мембран, перфорированных перегородок, заборных устройств, на динамику жидкости и твердого тела с жидкостью исследовано только для полостей цилиндрической формы. Таким образом, в настоящее время отсутствуют какие-либо методы расчета влияния системы отбора жидкости на динамику как самой жидкости, заполняющей полость твердого тела, так и влияние поведения жидкости на динамику тела с жидкостью.

*Разработка метода расчета динамики жидкого топлива и динамических характеристик твердого тела с жидкостью с учетом возможных дополнительных элементов, вносимых в конструкцию топливного бака, для обеспечения надежного отбора жидкости, представляется важной проблемой и является предметом диссертационной работы.*

### 1.2. Заборные устройства и капиллярные системы отбора жидкости

Внутрибаковые перегородки, создающие дополнительное демпфирование колебаний жидкости, не являются единственными внутрибаковыми элементами. Для обеспечения надежной работы топливной системы в баках современных ракет – носителей устанавливаются различные устройства, такие как, датчики уровня жидкости, агрегаты, обеспечивающие заправку и слив компонентов, воронкогасители, промежуточные перфорированные днища, коллекторы и заборное устройство. На рис. 1.1 представлены сферический топливный бак гипотетического ускорителя верхней ступени. Как видно из рис.1.1 топливный бак имеет заборное устройство, состоящего из промежуточной перфорированной пластины, которое не только исключает закручивание потока жидкости, но и обеспечивает равномерное опускание

уровня компонентов. Последнее достигается посредством выбора соответствующей геометрии устройства и закона распределения отверстия по площади пластины.

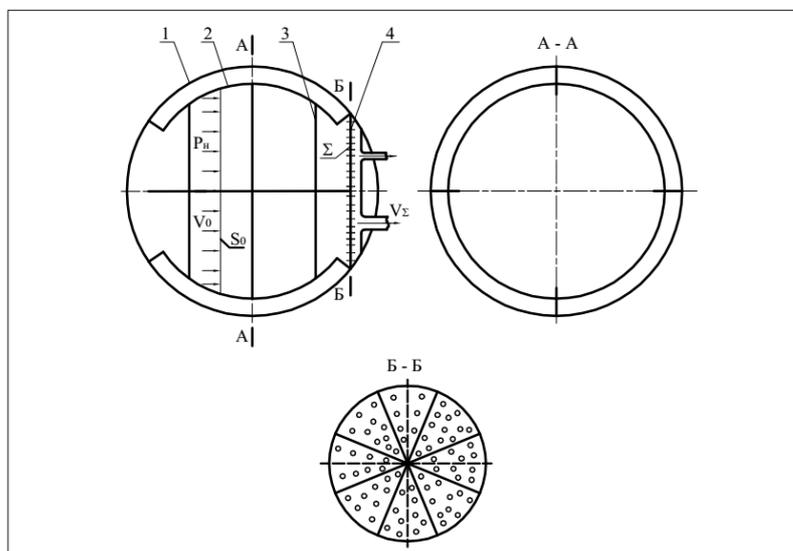


Рис. 1.1. Топливный отсек с ВБЭ

1- поверхность топливного отсека; 2 – радиальные ребра; 3 – кольцевые ребра; 4 – верхняя пластина ЗУ,  $\Sigma$  - поверхность слива.

Заборное устройство (ЗУ) является одним из основных устройств топливной системы ракет-носителей, разгонных блоков, и КЛА.

Основными требованиями, предъявляемыми к ЗУ, являются [8]:

1. Малая масса, простота конструкции. Заборное устройство должно быть технологичным в изготовлении и удобным при монтаже в топливном баке.

2. Высокая экономичность заборного устройства, т. е. заборное устройство должно обеспечивать максимальную выборку компонента из бака при минимальных потерях давления. Степень вырабатывания топлива зависит от характеристик системы забора компонентов топлива.

3. Равномерное понижение уровня компонента топлива в баке обеспечивается конструктивным выполнением заборного устройства, так как неравномерное понижение компонента топлива может приводить к

преждевременному прорыву газа в сливной трубопровод и к значительному увеличению гидравлических остатков.

4. Бескавитационная работа системы слива. Кавитация на заборном устройстве приводит к срыву нормальной работы системы питания и к увеличению остатков незабора компонента топлива в баке ракеты.

Системы подачи топлива ракеты-носители, разгонных блоков и КЛА должны обеспечить подвод жидких компонентов без газовых фаз, нарушающих сплошность топливного потока. Возросшие требования к надежности и точности выведения полезных нагрузок в заданную точку пространства, вынуждает создателей ракетно-космической техники находить новые решения и предлагать новые конструкции заборных устройств в топливных баках ракет-носителей и систем забора топлива в топливных баках разгонных блоков и КЛА. К системе забора и подачи топлива разгонных блоков и КЛА предъявляются более жёсткие требования, связанные с необходимостью многократного включения всех двигателей или части двигателей, как в условиях невесомости, так и условиях отрицательных и боковых перегрузок, а также случаях импульсного режима работы двигателей. Все выше перечисленные условия накладывают дополнительные требования к топливной системе разгонных блоков и КЛА:

- 1) обеспечивать управление положением топлива и разделение жидкой и газообразной сред в баках;
- 2) обеспечивать постоянный контакт всего компонента или его части с заборным устройством бака при любых направлениях перегрузок;
- 3) предотвращать попадание газа в заборное устройство при запуске и во время работы двигательной установки.

Из всех устройств, имеющихся в настоящее время, и удовлетворяющих выше указанным требованиям, наиболее перспективными являются капиллярные системы отбора жидкости (КСОЖ), которые обладают простотой

конструкции, обусловленной отсутствием движущихся частей, требующих внешних источников энергии.

В настоящее время существуют два основных видов КСОЖ:

- 1) с удержанием части топлива в районе заборного устройства – локальные КСОЖ;
- 2) со стабилизацией основной массы топлива при любом положении КЛА – тотальные КСОЖ.

### **1.3. Локальные КСОЖ [5]**

Локальные КСОЖ (рис.1.2) входят в виде составных частей в топливные системы жидкостной ракетной двигательной установки (ЖРДУ), которые используются как основные движители в разгонных ракетных блоках и системах орбитального маневрирования (СОМ) космических кораблей. Их главным функциональным назначением является обеспечение запуска маршевого ракетного двигателя в условиях космического полета. Во время работы система последовательно решает ряд задач. При пассивном режиме компонент должен удерживаться в накопителе. Предельное значение неблагоприятных ускорений, возникающих вследствие аэродинамического торможения и во время работы двигателей реактивной системы управления практически всегда меньше уровня  $10^{-2}g$ . Это значение определяется работой реактивной системы управления. В большинстве случаев центр масс находящегося в баках топлива не совпадает с центром масс КЛА, поэтому его угловые перемещения в процессе ориентации и других маневров вызывают линейные ускорения, которые обуславливают возникновение инерционных сил, влияющих на положение жидкости. При запуске маршевого ЖРД локальные КСОЖ обеспечивают подачу к нему компонентов. Такие двигатели могут создавать ускорения до  $10g$ . Промежуточное днище или верхняя часть накопителя вместе с закрепленными на них капиллярными разделителями фаз должны противостоять удару осаждающей жидкости. На маршевом режиме, т.

е. в период работы двигателя, требуется обеспечить в зависимости от фазы полета заполнение накопителя за минимальный промежуток времени или опорожнение бака с предельно малыми остатками топлива.

В современных КЛА объем функций, выполняемых локальной КСОЖ, возрастает. Например, накопитель маршевой ЖРДУ должен дополнительно питать двигатели реактивной системы управления и (или) системы орбитального маневрирования. Причем ускорения, возникающие при работе этих систем, как правило, не достигают уровня, необходимого для заполнения накопителя. Очевидно, что одно промежуточное днище с закрепленными на нем удерживающими экранами не в состоянии выполнить все упомянутые функции и решить полный комплекс задач, входящих в понятие работоспособность. Поэтому реальные конструкции локальных КСОЖ отличаются от приведенной на рис.1.2. Они намного сложнее и состоят из многих подсистем и элементов. Необходимо указать, что исторически этот вид КСОЖ появился первым, что объясняется прежде всего малой эффективностью ранее разработанных способов и схем, обеспечивающих запуск маршевого двигателя в условиях микрогравитации, и относительной простотой решаемой задачи.

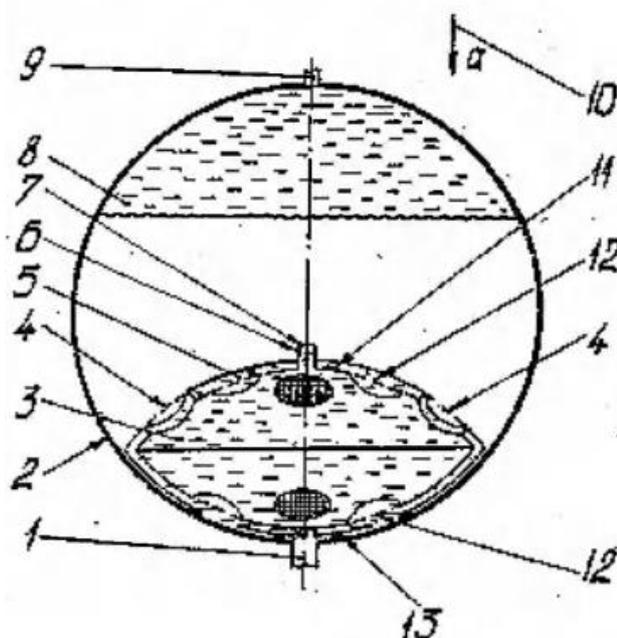


Рис. 1.2. Конструктивная схема локальной КСОЖ:

1 - топливная магистраль; 2 - оболочка бака; 3 - накопитель; 4 - закрытое окно капиллярного фазоразделительного экрана (КФЭ), предназначенное для заполнения накопителя (удерживающий КФЭ); 5 - канал для отбора жидкости из накопителя; 6 – дренажный патрубок накопителя; 7 - дренажный КФЭ; 8 - газожидкостная полость бака; 9 - патрубок для подачи газа наддува; 10 - направление ускорения КЛА; 11 - стенка заборного канала; 12 - закрытое КФЭ окно, предназначенное для отбора жидкости из накопителя; 13 - элемент, предназначенный для удержания жидкости в зоне заборного отверстия бака

#### 1.4. Тотальные КСОЖ [5]

Отличительной особенностью обстановки, в которой функционируют тотальные КСОЖ, является то, что уровни вероятности нахождения жидкости в любой зоне бака примерно одинаковы. Во время работы таких систем ускорения могут достигать высоких значений ( $1\text{м/с}^2$  и более). К этим КСОЖ не предъявляется требование по обеспечению минимального изменения положения центра масс жидкости, что обусловлено двумя причинами.

1. В настоящее время сфера использования таких систем ограничена двигательными установками реактивной системы управления КЛА. Как правило, масса топлива в этих ЖРДУ составляет незначительную часть от общей массы КЛА, поэтому переливания и плескания жидкости в баках ЖРДУ реактивной системы управления мало влияют на положение центра масс всего аппарата. Практически для большинства реальных КЛА габарит бака ЖРДУ реактивной системы управления не превышает 1м. Это ограничивает массу жидкости в баке и возможное изменение положения ее центра масс.

2. Реализация конструкции, способной влиять на положение центра масс жидкости при значительных ускорениях сталкивается с большими технологическими трудностями. Они вытекают из необходимости создания объемной проницаемой структуры с заданным весьма малым характерным размером.

В баковых устройствах данного типа, также как и в рассмотренных ранее локальных КСОЖ основным функциональным элементом служит капиллярный фазоразделитель. Он выполняется в виде тонкого экрана расчленяющего внутренний объем бака на две полости. Жидкостная полость представляет собой совокупность заборных элементов, соединяющих их магистрали и сервисные трубопроводы. Данная конструкция является тотальным капиллярным заборным устройством (КЗУ). Наиболее часто заборные элементы имеют вид каналов с проницаемыми стенками, облицованными тканой металлической сеткой. Основным принципом, формирующим общий облик таких систем, является более или менее равномерное распределение заборных каналов по периферии всего внутреннего пространства бака. В отличие от накопителя объем тотального КЗУ стараются свести к минимуму. Это объясняется тем, что гарантировано извлечь из внутренней полости заборного устройства только жидкость весьма затруднительно.

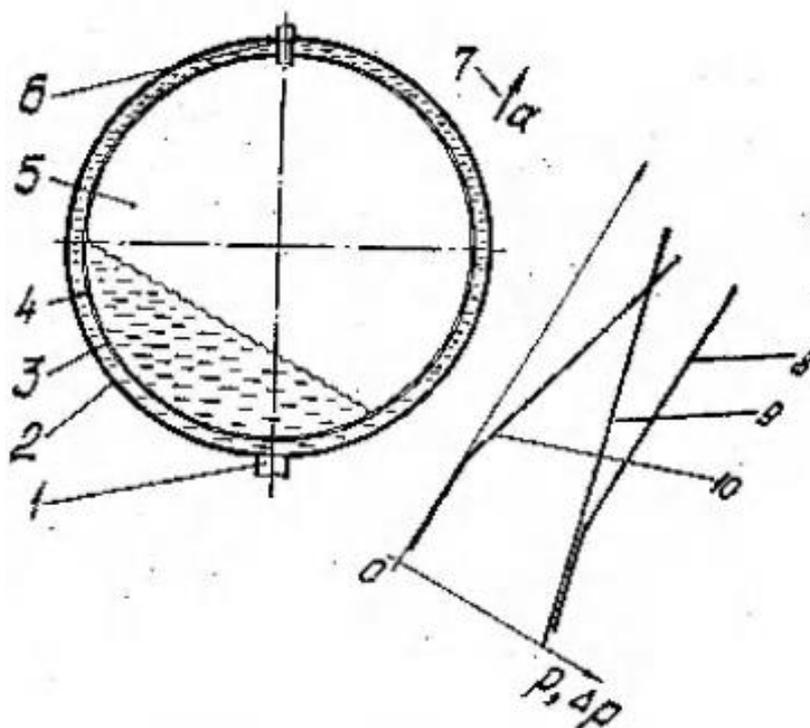


Рис. 1.3. Функционирование тотальной КСОЖ с одним заборным каналом в удерживающем режиме:

1 - топливная магистраль; 2 - оболочка бака; 3 - жидкостная полость бака (внутренняя полость КЗУ); 4 - удерживающий КФЭ; 5 - газожидкостная полость бака; 6 - патрубок для подачи газа наддува; 7 - направление ускорения КЛА; 8 - распределение гидростатического давления в газожидкостной полости бака ( $p_r$ ); 9 - распределение гидростатического давления в жидкостной полости бака ( $p_{ж}$ ); 10 - разность давлений на КФЭ ( $\Delta p_s = p_r - p_{ж}$ ).

Примером наиболее простой тотальной КСОЖ может служить конструктивная схема бака с одним заборным каналом (рис.1.3). Он представляет собой зазор, образованный КФЭ из гидрофильного материала и оболочкой бака. По форме КФЭ выполнен подобным оболочке. Максимальная простота этой схемы позволяет достаточно наглядно проиллюстрировать все важнейшие для данного объекта режимы работы.

В условиях микрогравитации или во время действия направленных в разные стороны ускорений находящаяся в основной полости бака жидкость контактирует с КФЭ. Возникающая разность давлений между полостями

вызывает течение жидкости в заборный канал, откуда ее отбирают и направляют в двигатель. Для таких систем работоспособность фазоразделителя определяется его капиллярной удерживающей способностью, так как КФЭ в любых случаях имеет не равную нулю высоту направления вектора ускорения. Также следует отметить, что в основном, фазоразделителями для данных конструкций могут являться пористые проницаемые материалы, для которых не наблюдалось явление потери устойчивости мениска.

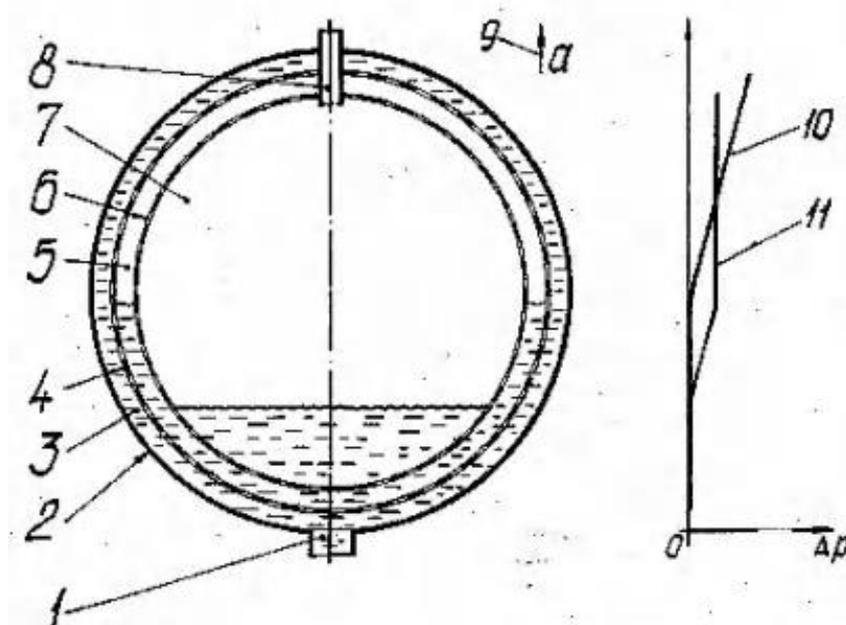


Рис. 1.4. Конструктивная схема тотальной КСОЖ с двуслойным КФЭ:

1 — топливная магистраль; 2 — оболочка бака; 3 — внешний заборный канал; 4 — внешний КФЭ; 5 — внутренний заборный канал; 6 — внутренний КФЭ; 7 — газожидкостная полость бака; 8 — патрубок для подачи газа наддува; 9 — направление ускорения КЛА; 10 — перепад гидростатических давлений на внешнем КФЭ; 11 — перепад гидростатических давлений на внутреннем КФЭ

### 1.5. Упрощённые модели ЗУ и КСОЖ

Из анализа конструкций ЗУ и КСОЖ следует вывод, что в большинстве случаев можно в этих конструкциях выделить некоторую поверхность (плоскость) экрана, отделяющего часть жидкого топлива, непосредственно контактирующего с топливом, находящегося в магистрали (заборной трубе), от

остальной части жидкого топлива, соприкасающегося с газовой фазой. В случаях, если рассматриваемая поверхность экрана (поверхность слива) разделяет жидкую фазу топлива от газовой, то поверхность слива является одновременно поверхностью фазоразделителя. Конструкцию подобного фазоразделительного экрана ЗУ обычно выполняют из тканых металлических сеток, либо из пористых материалов, либо из сплошного металла, в котором могут быть сделаны отверстия или каналы очень малого диаметра.

Подобные конструкции в курсах гидромеханики обычно рассматривают как местные сопротивления, имеющие конечную величину значения коэффициента гидравлического сопротивления -  $\zeta$ .

Как показывают эксперименты, и имеющиеся в литературе сведения коэффициент гидравлического сопротивления  $\zeta$  при течении жидкости через рассматриваемые конструкции зависит не только от вязкости и скорости жидкости, но и от многих других факторов, таких как:

а) в случае сплошного металла с отверстиями - от марки металла и технологии выполнения отверстий, их количества и размеров;

б) в случае пористых материалов - от вида материала, технологии изготовления, размеров и извилистости микроканалов;

в) в случае тканых металлических сеток - от материала и диаметра проволоки, количества проволоки на единицу длины сетки, структуры плетения сетки.

Имеющиеся практика используемых конструкций показала отсутствие гарантий, что конструкции, изготовленные по одним и тем же параметрам, будут иметь одинаковое значение гидравлического сопротивления. Поэтому при использовании подобных конструкций ЗУ становится обязательным экспериментальное определение коэффициента гидравлического сопротивления.

Подходящей простой гидродинамической моделью для исследования динамики подобных конструкций может являться модель жесткого фазоразделителя нулевой толщины – поверхности слива, но с учётом дополнительных степеней свободы для жидкости, обусловленных проницаемостью фазоразделителя. Как показано Ламбом [49], при движении сплошных сред в полостях, ограниченных твердыми телами, в случае, когда в твердых телах имеются каналы, через которые жидкость может совершать движения, независимые от движения твердых тел, для описания движения всей системы «твердые тела с каналами - сплошные среды» дополнительно к обобщенным координатам и скоростям, характеризующим движения твердых тел, добавляются удельные объемы и расходы сред, прошедших сквозь каналы. В соответствии с этим для описания движения жидкости, обусловленного проницаемостью разделителя фаз, используют в качестве обобщенной координаты объем жидкости, протекающей через единицу его поверхности.

С этой целью будем рассматривать фазоразделитель как местное сопротивление, и введём упрощённую схему топливного отсека с заборным устройством (рис. 1.5) в виде поверхности слива, а также понятие средней скорости  $V_{\Sigma}$  на поверхности слива, связанной с расходом жидкости, проходящей через каналы ЗУ при помощи формулы

$$V_{\Sigma} = \frac{1}{F_{\phi p}} \sum_{i=1}^N \int_{F_i} V_{i\Sigma} dF_i,$$

где  $V_{i\Sigma}$  - распределение скорости в отверстиях фазоразделителя, а  $F_{\phi p}$  - полная площадь поверхности слива  $\Sigma$ .

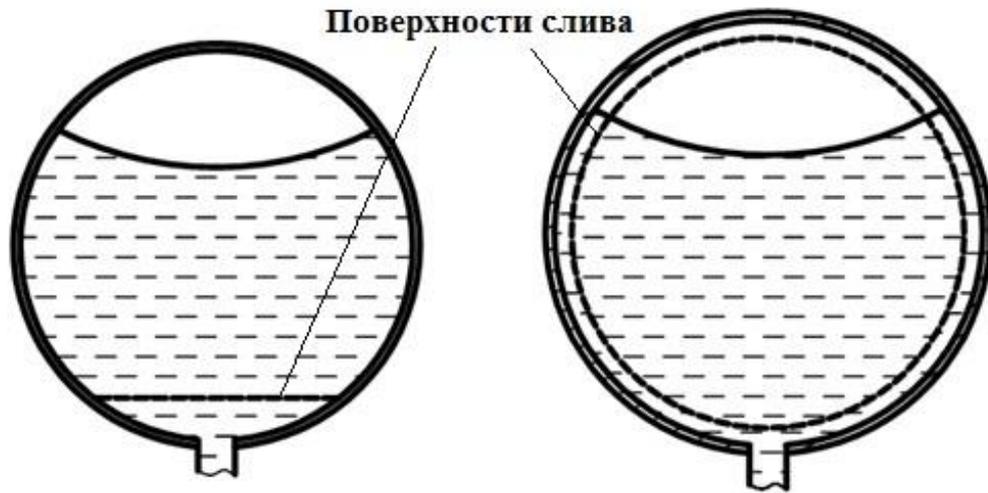


Рис. 1.5. Упрощённая схема топливного отсека с ЗУ в условиях микрогравитации

Перепад давления на поверхности слива  $\Sigma$  тогда запишется в виде известной формулы для потери давления на местном сопротивлении [32]

$$p_{\Sigma+} - p_{\Sigma-} = \zeta \rho \frac{(\vec{V}_{\Sigma})^2}{2} ,$$

где  $p_{\Sigma+}$ ,  $p_{\Sigma-}$  - соответственно давления жидкости перед поверхностью слива и за поверхностью,  $\rho$  - плотность жидкости.

## **Глава 2. Малые движения тяжелой жидкости в осесимметричных полостях с заборным устройством и внутрибаковыми элементами**

Во второй главе представлено решение задач о собственных движениях жидкости в осесимметричных полостях, с граничными условиями на свободной поверхности, условиями непротекания на смачиваемых поверхностях и дополнительными динамическими условиями на поверхности с сопротивлением – поверхности слива. Особое внимание уделено нахождению собственных значений и частот уравнений колебаний возмущенного движения жидкости с учетом диссипации на поверхности слива. Приведены примеры о собственных колебаниях жидкости в сферических полостях с заборным устройством и внутрибаковыми элементами (ВБЭ).

### **2.1. Постановка задачи**

Пусть идеальная несжимаемая жидкость, частично заполняющая неподвижный бак осесимметричной формы, вытекает через заборные устройства и может совершать малые движения (рис. 2.1).

За невозмущённое состояние примем установившееся движение жидкости, характеризующееся скоростью опускания  $V_{0\Gamma}$  невозмущённой свободной поверхности  $\Gamma_0$  и скоростью  $V_{0\Sigma}$  на поверхности слива  $\Sigma$ . Под поверхностью слива  $\Sigma$  подразумевается условная поверхность в районе нижнего днища, где расположены заборное устройство. Полагаем, что в невозмущенном движении свободная поверхность  $\Gamma_0$  и поверхность слива  $\Sigma$  перпендикулярны вектору  $\vec{g}$  интенсивности внешнего поля массовых сил.

Рассматриваемую задачу будем изучать в неподвижной системе координат  $Oxuz$  с началом на поверхности слива (см. рис.2.1).

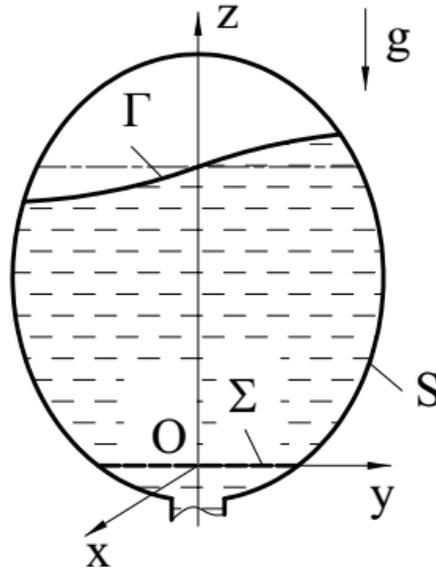


Рис. 2.1. Малые движения жидкого топлива в осесимметричной полости

Уравнением установившегося движения жидкости будет служить уравнение Эйлера

$$\vec{V}^{(0)} \cdot \nabla \vec{V}^{(0)} = -\frac{1}{\rho} \nabla p_0 - \nabla \Pi_0, \quad (2.1)$$

где  $\vec{V}^{(0)}$  - скорость невозмущенного движения частиц жидкости,  $p_0$  и  $\Pi_0$  - давление и потенциал массовой силы в невозмущенном состоянии.

Перепады давления на свободной поверхности  $\Gamma_0$  и поверхности слива  $\Sigma$  в невозмущенном состоянии запишутся в виде

$$p_{\Gamma_0} - p_a = 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \quad (2.2)$$

$$p_{\Sigma+} - p_{\Sigma-} = \zeta \rho \frac{(\vec{V}_{\Sigma}^{(0)})^2}{2} \quad \text{на } \Sigma, \quad (2.3)$$

где  $p_{\Gamma_0} = p_a = cont$  - давления на свободной поверхности и давления наддува,  $p_{\Sigma+}$ ,  $p_{\Sigma-}$  - соответственно давления жидкости перед поверхностью слива и за поверхностью,  $\zeta$  - коэффициент гидравлического сопротивления ЗУ, отнесённый к скорости  $\vec{V}_{\Sigma}^{(0)}$  на поверхности слива.

Рассмотрим малые колебания жидкости близкие к состоянию невозмущённого движения. Предположим, что в возмущённом движении поле смещений и поле скоростей частиц жидкости приобретает малые отклонения

$\vec{w}(x, y, z, t)$ ,  $\vec{V}(x, y, z, t)$  от их невозмущённых значений. Будем считать малые отклонения величинами первого порядка малости. Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости и выше, имеем

$$\vec{V} = \dot{\vec{w}}, \vec{V}_{oa} = \vec{V}^{(0)} + \vec{V}. \quad (2.4)$$

Здесь  $\vec{V}_{oa}$  - абсолютная скорость частиц жидкости в возмущённом состоянии.

Уравнение возмущённой свободной поверхности жидкости  $\Gamma$  при малых колебаниях запишется в виде

$$z = h + \xi(x, y, t), \quad h(t) = h_0 - \int_0^t V_{o\Gamma} dt, \quad (2.5)$$

где  $\xi(x, y, t) = \vec{w}_\Gamma(x, y, h, t) \cdot \vec{n}_\Gamma$  - проекция вектора смещений частиц свободной поверхности относительно невозмущённой поверхности  $\Gamma_0$  ( $z = h$ ) на ось  $Oz$ ,  $\vec{n}_\Gamma$  - внешние нормали к поверхности  $\Gamma_0$ ,  $h_0$  - начальная глубина жидкости, отсчитываемая от начала системы координат  $O$ .

Примем, что в состоянии возмущённого движения жидкости потенциал  $\Pi$  и давление  $p$  состоят из двух слагаемых

$$\begin{aligned} \Pi(x, y, z, t) &= \Pi_0(x, y, z) + \Delta\Pi(x, y, z, t), \\ p(x, y, z, t) &= p_0(x, y, z) + \Delta p(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\Pi_0$ ,  $p_0$  - отвечают состоянию равновесия в (2.1), а  $\Delta\Pi$ ,  $\Delta p$  - отклонения, отвечающие возмущённому состоянию.

Отклонения потенциала массовой силы и перепадов давлений на поверхностях  $\Gamma$  и  $\Sigma$  в возмущённом состоянии принимают вид

$$\Delta\Pi = \rho g \xi = \rho g \vec{w}_\Gamma \cdot \vec{n}_\Gamma \text{ на } \Gamma, \quad (2.7)$$

$$\Delta\Pi = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (2.8)$$

$$\Delta p_\Sigma = -\zeta \rho \vec{V}^{(0)}(0) \cdot \vec{V}_\Sigma = \gamma \rho \vec{V}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma \text{ на } \Sigma, \quad (2.9)$$

где  $\rho = const$  - плотность жидкости,  $\vec{n}_\Sigma$  внешние нормали к поверхности  $\Sigma$ ,  $\gamma$  - обобщённый коэффициент сопротивления поверхности слива  $\gamma = \zeta V^{(0)}(0)$ .

Возмущенное движение жидкости в баке можно описать уравнением

$$\frac{\partial \vec{V}_{oa}}{\partial t} + \vec{V}_{oa} \cdot \nabla \vec{V}_{oa} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Pi. \quad (2.10)$$

Предполагаем возмущенное движение жидкости потенциальным, т.е.  $\nabla \times \vec{V}_{oa} = 0$ . Преобразуем уравнение (2.10), воспользовавшись известным соотношением векторного анализа

$$\nabla \left( \frac{1}{2} \vec{V}^2 \right) = \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}). \quad (2.11)$$

Тогда вместо (2.10) можно записать

$$\frac{\partial \vec{V}_{oa}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} \vec{V}_{oa}^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Pi. \quad (2.12)$$

Поставляя выражения (2.4) и (2.6) в уравнение (2.12), пренебрегая слагаемыми второго порядка малости и выше, получаем для возмущённого состояния уравнение движения жидкости

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla (\vec{V}^{(0)} \cdot \vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \nabla (\Delta p) - \nabla (\Delta \Pi). \quad (2.13)$$

Для полной постановки начальной краевой задачи о возмущенном движении жидкости необходимо дополнить уравнение (2.13) уравнением неразрывности

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (2.14)$$

условием непротекания через смачиваемую поверхность  $S$  и начальными условиями

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } S, \quad \vec{w}(x, y, z, 0) = \vec{w}^0(x, y, z), \quad \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}(x, y, z, 0) = \vec{V}^0(x, y, z) \text{ при } t = 0. \quad (2.15)$$

Проинтегрировав уравнение неразрывности по объёму, занимаемому жидкостью, для любого момента времени  $t$ , получим дополнительное интегральное условие  $\int_{\Gamma_0} \vec{V} \cdot \vec{n}_\Gamma d\Gamma = -\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n}_\Sigma d\Sigma$ , которому должны подчиняться поле скоростей в рассматриваемой задаче.

## 2.2. Постановка краевой задачи для потенциала скоростей

Введем потенциал скорости – функцию  $\Phi(x, y, z, t)$ , который при малых движениях связан с полем смещений  $\vec{w}(x, y, z, t)$  и полем скоростей  $\vec{V}(x, y, z, t)$  очевидными формулами

$$\vec{w}(x, y, z, t) = \int \nabla \Phi(x, y, z, t) dt, \quad \vec{V}(x, y, z, t) = \nabla \Phi(x, y, z, t). \quad (2.16)$$

Подставив выражения (2.16) в уравнение (2.13), получим линейризованный интеграл Коши-Лагранжа, выраженный через потенциал скоростей

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \Delta p + \Delta \Pi = c(t), \quad (2.17)$$

где  $c(t)$  – произвольная функция времени. Не ограничивая общности, функцию  $c(t)$  можно считать равной нулю [49].

Из уравнения (2.17), используя выражения (2.7), получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_{\Gamma}^{(0)} \cdot \nabla \Phi + g \vec{w}_{\Gamma} \cdot \vec{n}_{\Gamma} = 0 \text{ на } \Gamma_0. \quad (2.18)$$

Аналогично, поставив выражения (2.8) и (2.9) в (2.17), получил граничное условие на поверхности слива  $\Sigma$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_{\Sigma}^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \gamma \frac{\partial \vec{w}_{\Sigma}}{\partial t} \cdot \vec{n}_{\Sigma} = 0. \quad (2.19)$$

Используя уравнение неразрывности (2.14), условие непротекания, начальные условия (2.15), получаем эволюционную задачу для определения потенциала  $\Phi(x, y, z, t)$

$$\Delta \Phi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ на } S,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_{\Gamma}^{(0)} \cdot \nabla \Phi + g \vec{w}_{\Gamma} \cdot \vec{n}_{\Gamma} = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_{\Sigma}^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \gamma \frac{\partial \vec{w}_{\Sigma}}{\partial t} \cdot \vec{n}_{\Sigma} = 0 \text{ на } \Sigma,$$

$$\vec{w}_{\Gamma} = \vec{w}_{\Gamma}^0, \quad \vec{w}_{\Sigma} = \vec{w}_{\Sigma}^0, \quad \frac{\partial \vec{w}_{\Gamma}}{\partial t} = \vec{V}_{\Gamma}^0, \quad \frac{\partial \vec{w}_{\Sigma}}{\partial t} = \vec{V}_{\Sigma}^0 \text{ при } t = 0,$$

где  $\vec{w}_\Gamma = \int_t \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, h, t) dt$ ,  $\dot{w}_\Sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, 0, t)$  - смещение и скорость частиц жидкости на поверхностях  $\Gamma_0$  и  $\Sigma$ , соответственно,  $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$  - производная по внешней нормали к поверхности  $S$ ,  $\vec{w}_\Gamma^0, \vec{w}_\Sigma^0, \vec{V}_\Gamma^0, \vec{V}_\Sigma^0$  - начальные значения смещения и скорости частиц жидкости.

### 2.3. Малые движения жидкости в сферической полости

В качестве примера рассмотрим задачу о движениях жидкости, вытекающей через заборные устройства из сферической ёмкости с радиусом  $R_0$ . Начало системы координат  $O$  выберем в центре сферы (рис. 2.2).

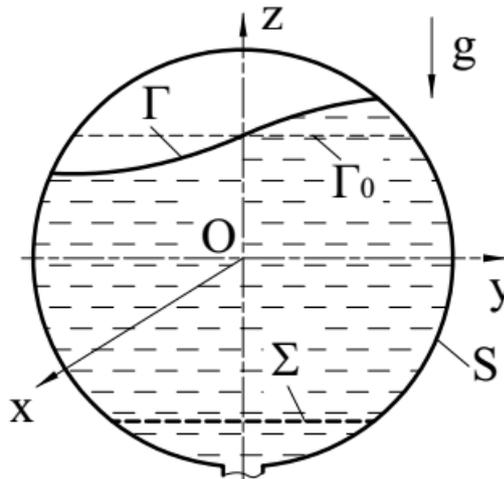


Рис. 2.2. Малые движения жидкости в сферической полости

Введем обозначения:  $h$  - расстояние от центра бака до свободной поверхности,  $r_0 = \sqrt{R_0^2 - h^2}$  - радиус свободной поверхности,  $h_\Sigma$  - расстояние от центра бака до поверхности слива,  $r_\Sigma = \sqrt{R_0^2 - h_\Sigma^2}$  - радиус поверхности слива,  $\theta_0 = \arccos\left(\frac{h}{R_0}\right)$  и  $\theta_\Sigma = \arccos\left(\frac{h_\Sigma}{R_0}\right)$ .

Задача для определения потенциала скоростей  $\Phi(x, y, z, t)$

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{в } \tau,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} V_{0\Gamma} + g \int \frac{\partial \Phi}{\partial z} dt = 0 \quad \text{на } \Gamma_0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} V_{0\Sigma} - \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = 0 \text{ на } S,$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi^{(0)}(x, y, z) \text{ при } t = 0.$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{R_0}, \bar{r}_0 = \frac{r_0}{R_0}, \bar{r}_\Sigma = \frac{r_\Sigma}{R_0}, \bar{h} = \frac{h}{R_0}, \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\sqrt{gR_0}}, \bar{V}_{0\Gamma} = \frac{V_{0\Gamma}}{\sqrt{gR_0}}, \\ \bar{V}_{0\Sigma} &= \frac{V_{0\Sigma}}{\sqrt{gR_0}}, \bar{G} = \frac{V_{0\Gamma} r_0^2}{R_0^2 \sqrt{gR_0}}, \bar{t} = \frac{t}{\sqrt{R_0/g}}, \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\sqrt{g/R_0}}, \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{R_0 \sqrt{gR_0}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь  $\Omega$  - комплексная частота волновых движений жидкости,  $\bar{G}$  - безразмерный расход топлива. Далее знак «-» над безразмерными переменными будем опускать.

Используя сферические координаты  $(R, \theta, \eta)$  и цилиндрические координаты  $(r, \eta, z)$ , перепишем задачу (2.21) в безразмерной форме

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= 0 \text{ в } \tau, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} V_{0\Gamma} + \int \frac{\partial \Phi}{\partial z} dt &= 0 \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} V_{0\Sigma} - \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial R} &= 0 \text{ на } S, \\ \Phi(r, \eta, z, t) &= \Phi^{(0)}(r, \eta, z) \text{ при } t = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Будем искать функцию  $\Phi(r, \eta, z, t)$  в сумме двух функций

$$\Phi(r, \eta, z, t) = \Phi^{(1)}(r, \eta, z, t) + \Phi^{(2)}(r, \eta, z, t). \quad (2.24)$$

Представим функции  $\Phi^{(1)}(r, \eta, z, t)$ ,  $\Phi^{(2)}(r, \eta, z, t)$  в виде рядов

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(r, \eta, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m^{(1)}(r, \eta, z) \cdot \dot{s}_m(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m^{(1)}(r, z) \cdot H_m(\eta) \cdot \dot{s}_m(t), \\ \Phi^{(2)}(r, \eta, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m^{(2)}(r, \eta, z) \cdot \dot{p}_m(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m^{(2)}(r, z) \cdot H_m(\eta) \cdot \dot{p}_m(t), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$H_m(\eta) = \begin{cases} \sin(m\eta) \\ \cos(m\eta) \end{cases}, \quad (2.26)$$

собственные функции  $\Phi_m^{(1)}(r, \eta, z)$  и  $\Phi_m^{(2)}(r, \eta, z)$  определяемые из спектральных задач на собственные значения

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_m^{(1)} = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi_m^{(1)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S \cup \Sigma, \\ \frac{\partial\Phi_m^{(1)}}{\partial z} = \lambda_m^{(1)}\Phi_m^{(1)} \text{ на } \Gamma_0 \text{ и } \left. \frac{\partial\Phi_m^{(1)}(r, \eta, z)}{\partial z} \right|_{\substack{r=r_0 \\ \eta=\pi/2m \\ z=h}} = 1 \text{ на } \Gamma_0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$\lambda_m^{(1)}$  - собственное значение задачи (2.27),

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_m^{(2)} = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi_m^{(2)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S \cup \Gamma_0, \\ \frac{\partial\Phi_m^{(2)}}{\partial n} = \lambda_m^{(2)}\Phi_m^{(2)} \text{ на } \Sigma, \quad \left. \frac{\partial\Phi_m^{(2)}(r, \eta, z)}{\partial z} \right|_{\substack{r=r_\Sigma \\ \eta=\pi/2m \\ z=h_\Sigma}} = 1 \text{ на } \Sigma, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$\lambda_m^{(2)}$  - собственное значение задачи (2.28), а  $s_m(t)$  и  $p_m(t)$  - обобщенные координаты волновых движений жидкости на свободной поверхности и поверхности слива.

Запишем эквивалентные вариационные формулировки спектральных задач (2.27) и (2.28) [44], [49]. Найти минимум функционалов:

$$J_{(1)}(\Phi_m^{(1)}) = \int_{\tau} (\nabla\Phi_m^{(1)})^2 d\tau - \lambda_m^{(1)} \int_{\Gamma_0} (\Phi_m^{(1)})^2 d\Gamma, \quad (2.29)$$

$$J_{(2)}(\Phi_m^{(2)}) = \int_{\tau} (\nabla\Phi_m^{(2)})^2 d\tau - \lambda_m^{(2)} \int_{\Sigma} (\Phi_m^{(2)})^2 d\Sigma. \quad (2.30)$$

Воспользуемся в дальнейшем методом Ритца. Приближенные решения вариационных задач (2.29) и (2.30) будем искать в виде

$$\Phi_m^{(1)}(r, \eta, z) = \varphi_m^{(1)}(r, z) H_m(\eta) = \sum_{k=1}^M a_{mk} U_{mk}(r, z) H_m(\eta), \quad (2.31)$$

$$\Phi_m^{(2)}(r, \eta, z) = \varphi_m^{(2)}(r, z) H_m(\eta) = \sum_{k=1}^M b_{mk} U_{mk}(r, z) H_m(\eta), \quad (2.32)$$

где  $M$  - порядок приближения решений.

В качестве координатных функций пусть будут функции  $U_{mk} = R^k P_k^{(m)}(\cos\theta)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,  $P_k^{(m)}(\cos\theta)$  - присоединенные функции Лежандра степени  $m$ .

Необходимые условия стационарности функционалов (2.29) и (2.30) приводят к двум системам линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^M a_{ml} (p_{mkl}^{(1)} - \lambda_m^{(1)} q_{mkl}^{(1)}) &= 0, \\ \sum_{l=1}^M b_{ml} (p_{mkl}^{(2)} - \lambda_m^{(2)} q_{mkl}^{(2)}) &= 0, \quad (k = 1, 2, \dots, M), \end{aligned} \quad (2.33)$$

относительно постоянных  $a_{ml}, b_{ml}$ , соответственно. Здесь

$$\begin{aligned} p_{mkl}^{(1)} &= \int_{\Gamma_0} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} d\Gamma + \int_S U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} dS + \int_{\Sigma} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} d\Sigma = \int_0^{r_0} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial z} r dr + \\ &+ \int_{\theta_0}^{\theta_{\Sigma}} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial R} \sin\theta d\theta - \int_0^{r_{\Sigma}} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial z} r dr, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$q_{mkl}^{(1)} = \int_0^{r_0} U_{mk} U_{ml} r dr, \quad p_{mkl}^{(2)} = p_{mkl}^{(1)}, \quad q_{mkl}^{(2)} = \int_0^{r_{\Sigma}} U_{mk} U_{ml} r dr.$$

Нетривиальные решения двух систем уравнений (2.33) возможно только в том случае, когда

$$\begin{aligned} |p_{mkl}^{(1)} - \lambda_m^{(1)} q_{mkl}^{(1)}|_{k,l=1}^M &= 0, \\ |p_{mkl}^{(2)} - \lambda_m^{(2)} q_{mkl}^{(2)}|_{k,l=1}^M &= 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.35)$$

Решение первого (второго) уравнения (2.35) определяет  $M$  положительных чисел  $\lambda_{mn}^{(1)}$  ( $\lambda_{mn}^{(2)}$ ),  $n = 1, 2, \dots, M$ . Каждому значению  $\lambda_{mn}^{(1)}$  ( $\lambda_{mn}^{(2)}$ ) соответствует решение первой (второй) системы (2.33), которое дает нам вектора  $\{a_{mnk}\}_{k=1}^M$  ( $\{b_{mnk}\}_{k=1}^M$ ). С учетом условий нормировки получим решения вариационных задач (2.29) и (2.30)

$$\Phi_m^{(1)}(r, \eta, z) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}^{(1)}(r, z) \right) H_m(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^M a_{mnk} U_{mk}(r, z)}{\sum_{k=1}^M a_{mnk} \left( \frac{\partial U_{mk}(r, z)}{\partial z} \right)_{\substack{r=r_0 \\ z=h}}} H_m(\eta),$$

$$\Phi_m^{(2)}(r, \eta, z) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}^{(2)}(r, z) \right) H_m(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^M b_{mnk} U_{mk}(r, z)}{\sum_{k=1}^M a_{mnk} \left( \frac{\partial U_{mk}(r, z)}{\partial z} \right)_{\substack{r=r_0 \\ z=h}}} H_m(\eta), \quad (2.36)$$

$m = 0, 1, 2, \dots$

Тогда из формул (2.25) следуем

$$\Phi^{(1)}(r, \eta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}^{(1)}(r, z) H_m(\eta) \dot{s}_{mn}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^M a_{mnk} U_{mk}(r, z)}{\sum_{k=1}^M a_{mnk} \left( \frac{\partial U_{mk}(r, z)}{\partial z} \right)_{\substack{r=r_0 \\ z=h}}} H_m(\eta) \dot{s}_{mn}(t),$$

$$\Phi^{(2)}(r, \eta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}^{(2)}(r, z) H_m(\eta) \dot{p}_{mn}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^M b_{mnk} U_{mk}(r, z)}{\sum_{k=1}^M a_{mnk} \left( \frac{\partial U_{mk}(r, z)}{\partial z} \right)_{\substack{r=r_0 \\ z=h}}} H_m(\eta) \dot{p}_{mn}(t). \quad (2.37)$$

Поставив полученные выражения (2.37) в граничные условия системы (2.23), получим

$$\Phi_{mn}^{(1)} \ddot{s}_{mn} + \Phi_{mn}^{(2)} \ddot{p}_{mn} - V_{0\Gamma} \left( \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial h} + \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial z} \right) \dot{s}_{mn} - V_{0\Gamma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial h} \dot{p}_{mn} + \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial z} s_{mn} = 0, \quad (2.38)$$

$$\Phi_{mn}^{(1)} \ddot{s}_{mn} + \Phi_{mn}^{(2)} \ddot{p}_{mn} - V_{0\Gamma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial h} \dot{s}_{mn} - \left( V_{0\Gamma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial h} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z} \right) \dot{p}_{mn} = 0.$$

Умножим первое уравнение (2.38) на  $\left( \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}(r, \eta, z)}{\partial z} \right)$ , а второе уравнение (2.38) на  $\left( \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}(r, \eta, z)}{\partial z} \right)$  и проинтегрируем по поверхностям  $\Gamma_0$  и  $\Sigma$ , соответственно. В результате получим систему уравнений

$$\mu_{mn}^{(1s)} \ddot{s}_{mn} + \mu_{mn}^{(1p)} \ddot{p}_{mn} + V_{0\Gamma} \delta_{mn}^{(1)} \dot{s}_{mn} + V_{0\Gamma} \varepsilon_{mn}^{(1)} \dot{p}_{mn} + c_{mn} s_{mn} = 0,$$

$$\mu_{mn}^{(2p)} \ddot{p}_{mn} + \mu_{mn}^{(2s)} \ddot{s}_{mn} + V_{0\Gamma} \varepsilon_{mn}^{(2)} \dot{s}_{mn} + [V_{0\Gamma} \delta_{mn}^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_{mn}^{(2)}] \dot{p}_{mn} = 0, \quad (2.39)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

ГДЕ

$$\begin{aligned} \mu_{mn}^{(1s)} &= \int_{\Gamma} \Phi_{mn}^{(1)} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial z} d\Gamma = \pi \int_0^{r_0} \varphi_{mn}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} r dr, \\ \mu_{mn}^{(1p)} &= \int_{\Gamma} \Phi_{mn}^{(2)} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial z} d\Gamma = \pi \int_0^{r_0} \varphi_{mn}^{(2)} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} r dr, \\ \delta_{mn}^{(1)} &= - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial h} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial z} \right) d\Gamma = -\pi \int_0^{r_0} \left( \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial h} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} \right) r dr, \quad (2.40) \\ \varepsilon_{mn}^{(1)} &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial h} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial z} d\Gamma = -\pi \int_0^{r_0} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial h} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} r dr, \\ c_{mn} &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial z} d\Gamma = \pi \int_0^{r_0} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} r dr, \\ \mu_{mn}^{(2s)} &= \int_{\Sigma} \Phi_{mn}^{(1)} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z} d\Sigma = \pi \int_0^{r_{\Sigma}} \varphi_{mn}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial z} r dr = \mu_{mn}^{(1p)}, \\ \mu_{mn}^{(2p)} &= \int_{\Sigma} \Phi_{mn}^{(2)} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z} d\Sigma = \pi \int_0^{r_{\Sigma}} \varphi_{mn}^{(2)} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial z} r dr, \\ \varepsilon_{mn}^{(2)} &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial h} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z} d\Sigma = -\pi \int_0^{r_{\Sigma}} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial h} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial z} r dr = \varepsilon_{mn}^{(1)}, \quad (2.41) \\ \delta_{mn}^{(2)} &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial h} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z} d\Sigma = -\pi \int_0^{r_{\Sigma}} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial h} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial z} r dr, \\ \sigma_{mn}^{(2)} &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z} d\Sigma = -\pi \int_0^{r_{\Sigma}} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial z} r dr. \end{aligned}$$

Для определения собственных частот рассматриваемой механической системы положим обобщенные координаты в виде

$$s_{mn} = A_{(s)mn} e^{\Omega t}, \quad p_{mn} = A_{(p)mn} e^{\Omega t}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.42)$$

Здесь  $A_{(s)mn}$  и  $A_{(p)mn}$  - амплитуды колебаний.

Заменив выражения (2.42) в уравнениях для обобщенных координат (2.39),  
имеем

$$\begin{bmatrix} \mu_{mn}^{(1s)}\Omega^2 + V_{0\Gamma}\delta_{mn}^{(1)}\Omega + c_{mn} & \mu_{mn}^{(1p)}\Omega^2 + \varepsilon_{mn}^{(1)}\Omega \\ \mu_{mn}^{(2s)}\Omega^2 + V_{0\Gamma}\varepsilon_{mn}^{(2)}\Omega & \mu_{mn}^{(2p)}\Omega^2 + [V_{0\Gamma}\delta_{mn}^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma)\sigma_{mn}^{(2)}]\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{(s)mn} \\ A_{(p)mn} \end{bmatrix} = 0, \quad (2.43)$$

$m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$

Характеристическое уравнение системы (2.43) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \mu_{mn}^{(1s)}\Omega^2 + V_{0\Gamma}\delta_{mn}^{(1)}\Omega + c_{mn} & \mu_{mn}^{(1p)}\Omega^2 + \varepsilon_{mn}^{(1)}\Omega \\ \mu_{mn}^{(2s)}\Omega^2 + V_{0\Gamma}\varepsilon_{mn}^{(2)}\Omega & \mu_{mn}^{(2p)}\Omega^2 + [V_{0\Gamma}\delta_{mn}^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma)\sigma_{mn}^{(2)}]\Omega \end{vmatrix} = 0, \quad (2.44)$$

Уравнение (2.44) имеет две ветви решений: ветвь действительных корней  $\Omega_1$ , ветвь комплексно-сопряженных корней  $\Omega_{1,2}$  и число  $\Omega = 0$ , которому отвечает собственный вектор  $(0, 1)^T$ , не представляющий интереса в дальнейшем.

Отношение двух амплитуд обобщенных координат определено по формулам

$$\frac{A_{(p)mn}}{A_{(s)mn}} = \frac{\mu_{mn}^{(1s)}\Omega^2 + V_{0\Gamma}\delta_{mn}^{(1)}\Omega + c_{mn}}{\mu_{mn}^{(1p)}\Omega^2 + \varepsilon_{mn}^{(1)}\Omega}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.45)$$

Результаты численного решения уравнения (2.44) при  $h_\Sigma = 0,86$  ( $r_\Sigma = 0,5$ ),  $m = 1, n = 1, M = 10$  и разных значениях коэффициента проводимости  $\beta = \gamma^{-1}$  приведены в табл. 2.1-2.3.

**Таблица 2.1.** Собственные числа волновых движений жидкости в сферической полости при расходе жидкости  $G = 0,005$  и  $\beta = \gamma^{-1} = 0,2$

$h$	$\Omega_1$	$\Omega_{2,3}$
-0,6	-38,3150	-0,0063 ± 1,0210i
-0,5	-36,5070	-0,0023 ± 1,0652i
-0,4	-35,5562	-0,0031 ± 1,1016i
-0,3	-35,0271	-0,0038 ± 1,1357i
-0,2	-34,6767	-0,0039 ± 1,1699i

-0,1	-34,4044	-0,0038 ± 1,2055i
0	-34,1948	-0,0038 ± 1,2397i
0,1	-33,9682	-0,0037 ± 1,2857i
0,2	-33,7842	-0,0035 ± 1,3326i
0,3	-33,6185	-0,0034 ± 1,3864i
0,4	-33,4711	-0,0034 ± 1,4504i
0,5	-33,3428	-0,0040 ± 1,5294i
0,6	-33,2325	-0,0047 ± 1,6285i
0,7	-33,1374	-0,0042 ± 1,7597i

**Таблица 2.2.** Собственные числа волновых движений жидкости в сферической полости при различных расходах жидкости и  $\beta = \gamma^{-1} = 0,2$

$h$	$\beta = \gamma^{-1}$	$G$	$\Omega_1$	$\Omega_{2,3}$
-0,3	0	0	----	±1,1356i
	0,2	0,002	-29,0168	-0,0035 ± 1,1357i
		0,003	-31,0203	-0,0036 ± 1,1357i
		0,005	-35,0271	-0,0038 ± 1,1357i
		0,008	-41,0371	-0,0042 + 1,1357i
-0,1	0	0	----	±1,2054i
	0,2	0,002	-28,5004	-0,0025 ± 1,2055i
		0,003	-30,4684	-0,0030 ± 1,2055i
		0,005	-34,4044	-0,0038 ± 1,2055i
		0,008	-40,3083	-0,0052 ± 1,2055i
0,2	0	0	----	±1,3326i
	0,2	0,002	-27,9857	-0,0018 ± 1,3326i
		0,003	-29,9185	-0,0024 + 1,3326i
		0,005	-33,7842	-0,0035 ± 1,3326i
		0,008	-39,5825	-0,0053 ± 1,3326i

**Таблица 2.3.** Собственные числа волновых движений жидкости в сферической полости при расходе жидкости  $G = 0,005$

$h$	$\beta = \gamma^{-1}$	$\Omega_1$	$\Omega_{2,3}$
-0,3	0,5	-20,0136	-0,0056 ± 1,1359i
	0,4	-22,5161	-0,0051 ± 1,1359i
	0,3	-26,6867	-0,0045 ± 1,1358i
	0,2	-35,0271	-0,0038 ± 1,1357i
	0,1	-60,0456	-0,0028 ± 1,1357i
	0,05	-110,0700	-0,0021 ± 1,1356i
0,2	0,5	-19,3105	-0,0039 ± 1,3327i
	0,4	-21,7229	-0,0038 ± 1,3326i
	0,3	-25,7434	-0,0037 ± 1,3326i
	0,2	-33,7842	-0,0035 ± 1,3326i
	0,1	-57,9060	-0,0033 ± 1,3326i
	0,05	-106,1492	-0,0032 ± 1,3325i

Действительные корни уравнения (2.44)  $\Omega_1$  отвечают аperiодическому движению жидкости, а комплексные значения  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  отвечают затухающим колебаниям жидкости.

На рис. 2.3-2.10 представлены изменения  $\Omega_1$ , действительной части и мнимой частей  $\Omega_{2,3}$  от глубины жидкости  $h$ , коэффициента сопротивления  $\gamma$  ( $\beta = \gamma^{-1}$ ) и безразмерного расхода  $G$ . На рис.2.11 показаны формы колебаний жидкости на свободной поверхности и поверхности слива.

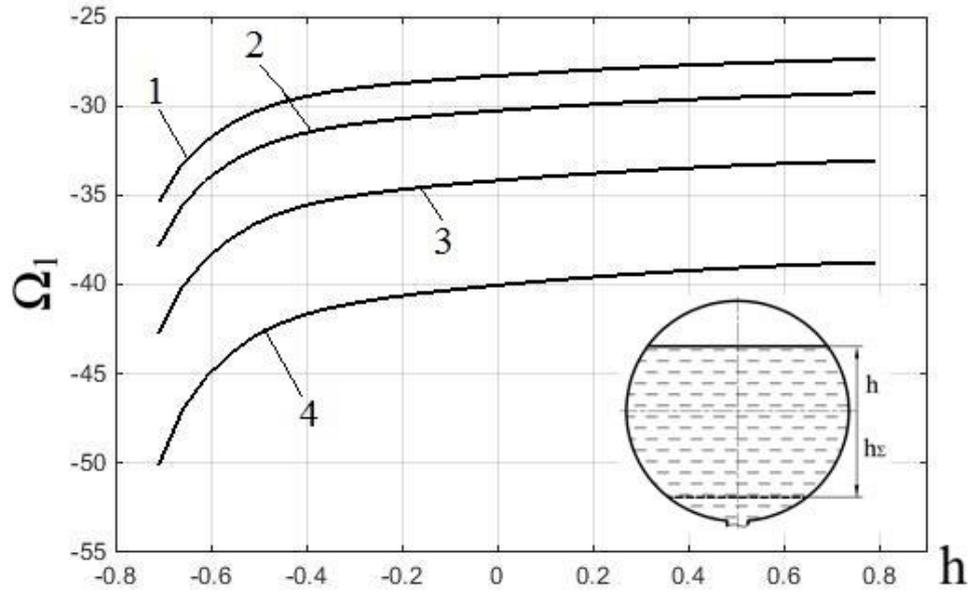


Рис. 2.3. Зависимости  $\Omega_1$ , отвечающие аперiodическому движению жидкости, от глубины жидкости  $h$  при  $\beta = 0,2$ :

1 -  $G = 0,002$ ; 2 -  $G = 0,003$ ; 3 -  $G = 0,005$ ; 4 -  $G = 0,008$

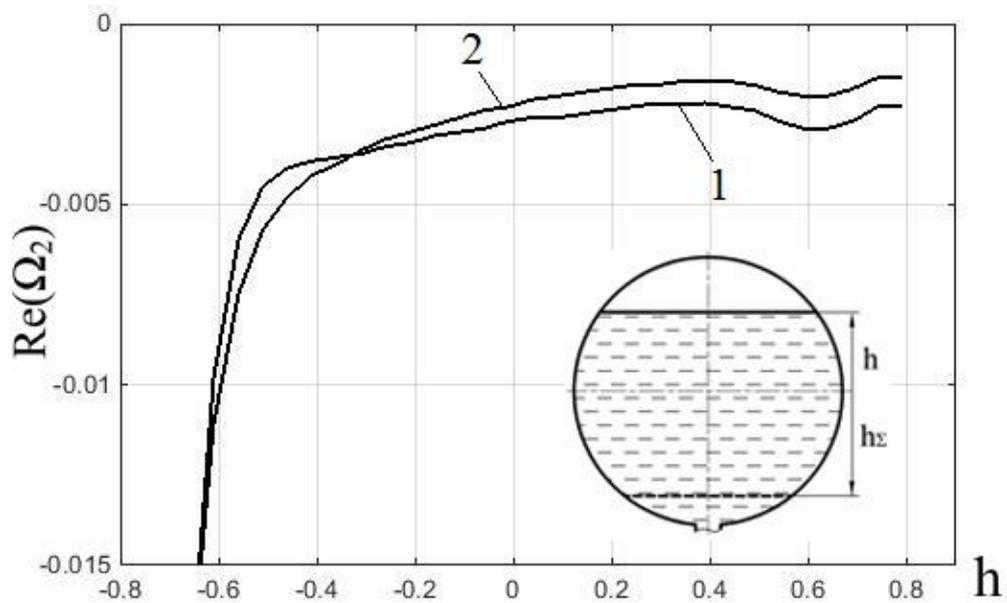


Рис. 2.4. Зависимости действительной части  $\Omega_2$ , отвечающие затухающим колебаниям жидкости, от глубины жидкости  $h$  при  $\beta = 0,2$ :

1 -  $G = 0,002$ ; 2 -  $G = 0,003$

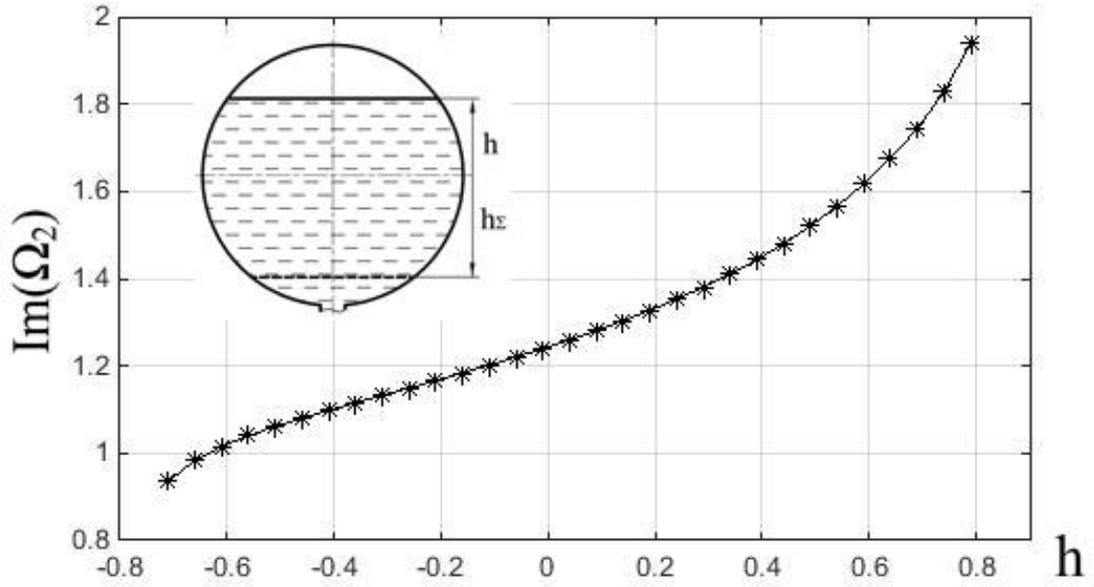


Рис. 2.5. Зависимости частоты затухающих колебаний (мнимой части  $\Omega_2$ ) от глубины жидкости  $h$  при  $\beta = 0,2$ :  
 «сплошная» -  $G = 0,002$ ; «\* \* \*» -  $G = 0,008$

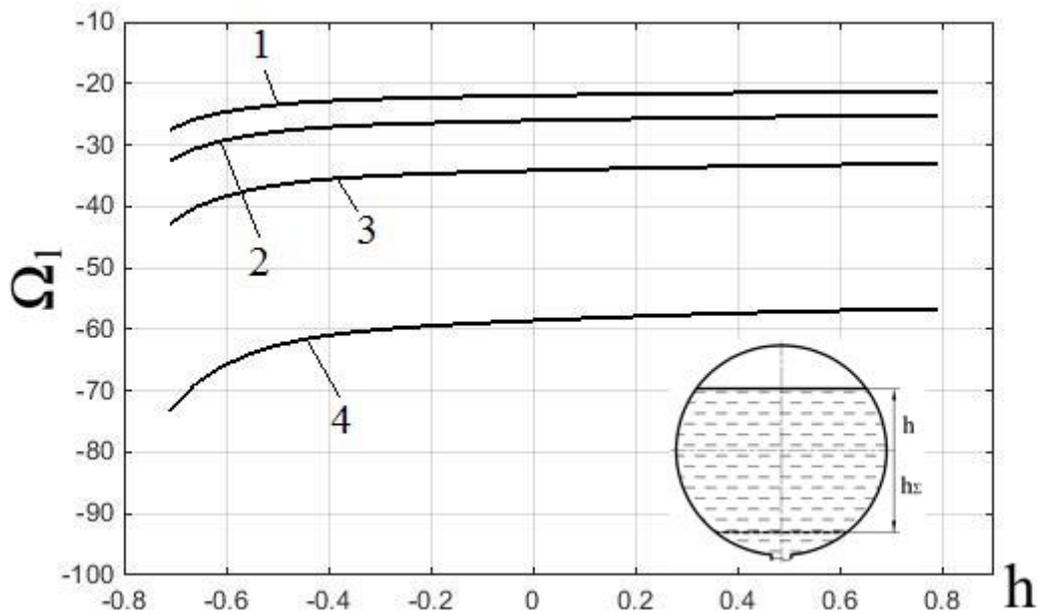


Рис. 2.6. Зависимости  $\Omega_1$ , отвечающие аperiodическому движению жидкости, от глубины жидкости  $h$  при  $G = 0,005$ :  
 1 -  $\beta = 0,4$ ; 2 -  $\beta = 0,3$ ; 3 -  $\beta = 0,2$ ; 4 -  $\beta = 0,1$

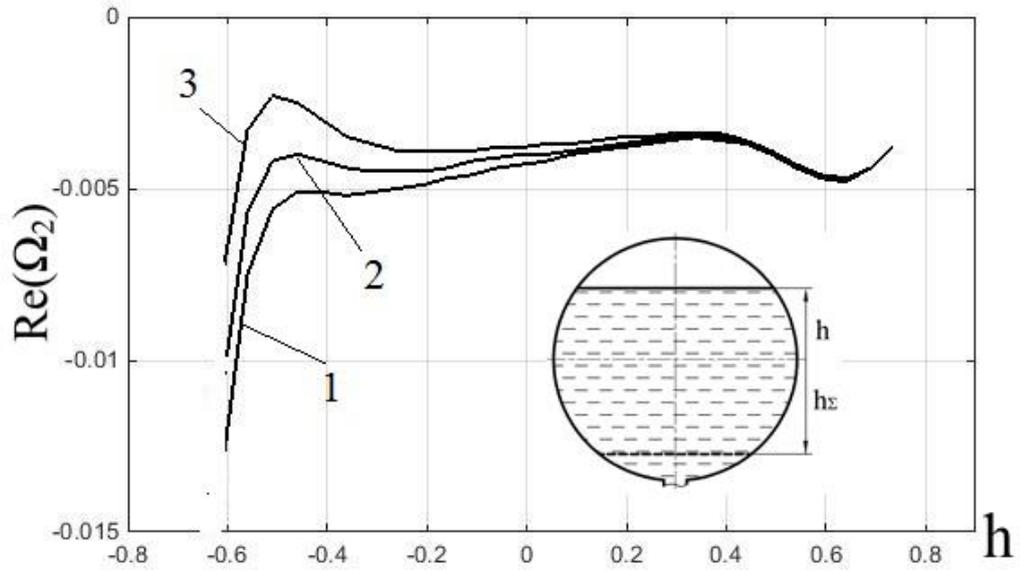


Рис. 2.7. Зависимости действительной части  $\Omega_2$ , отвечающие затухающим колебаниям жидкости, от глубины жидкости  $h$  при  $G = 0,005$  :

1 -  $\beta = 0,4$ ; 2 -  $\beta = 0,3$ ; 3 -  $\beta = 0,2$

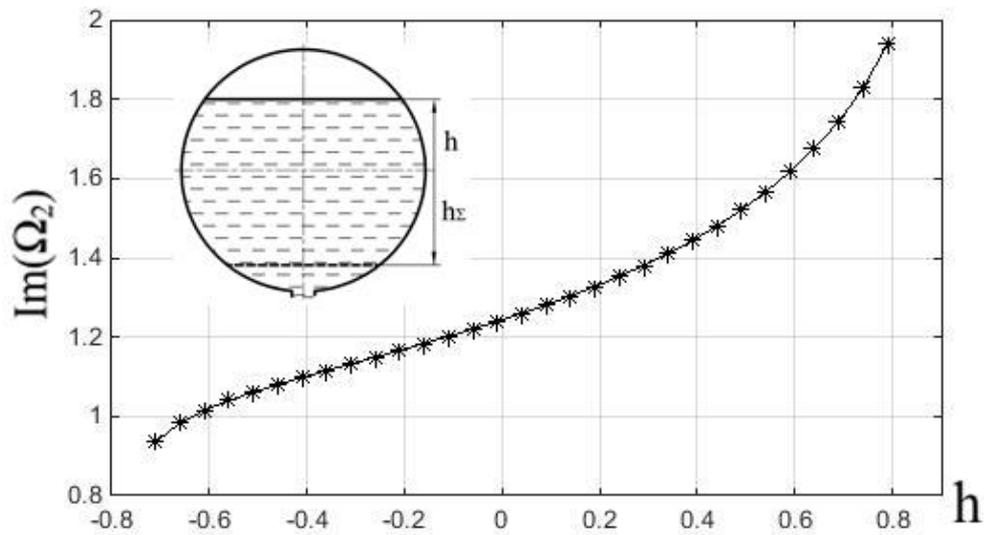


Рис. 2.8. Зависимости частоты затухающих колебаний (мнимой части  $\Omega_2$ ) от

глубины жидкости  $h$  при  $G = 0,005$  :

«сплошная» -  $\beta = 0,5$ ; «\* \* \*» -  $\beta = 0,05$

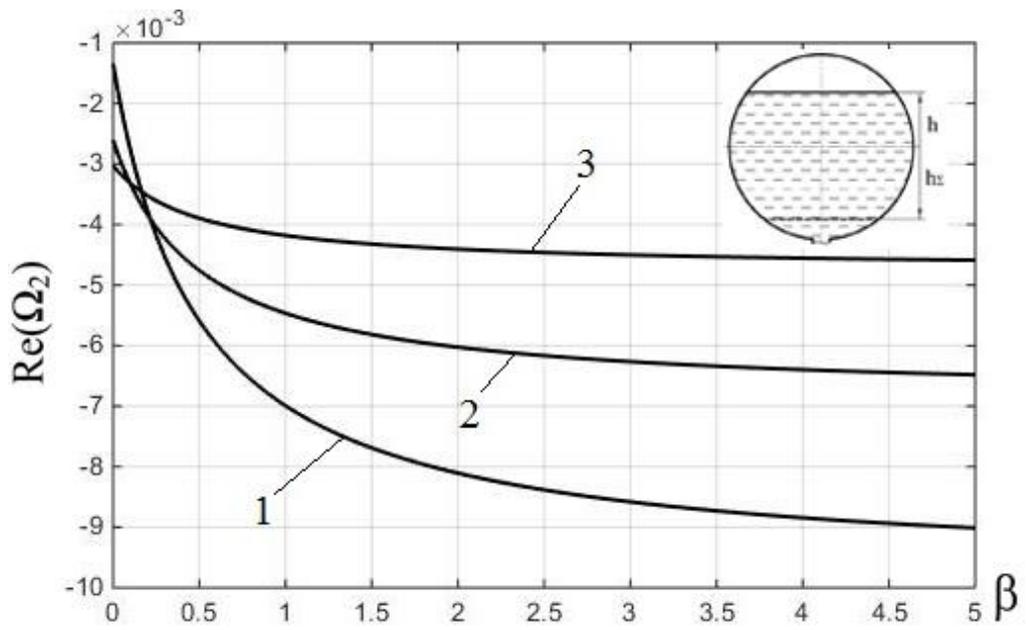


Рис. 2.9. Зависимости действительной части  $\Omega_2$ , отвечающие затухающим колебаниям жидкости, от  $\beta$  при  $G = 0,005$ :

1 -  $h = -0,3$ ; 2 -  $h = -0,1$ ; 3 -  $h = 0,2$

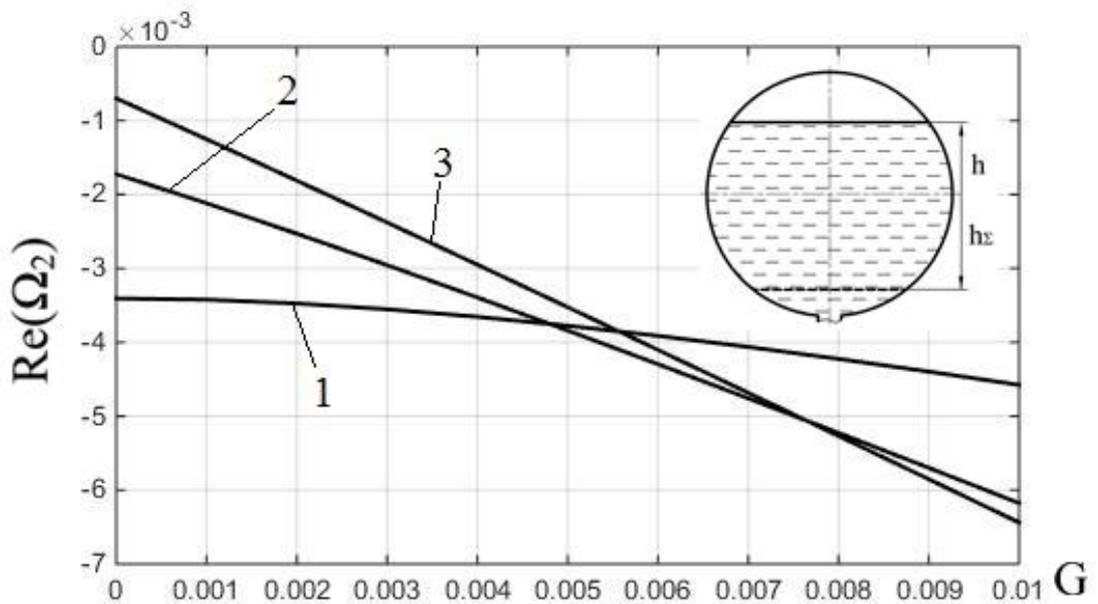


Рис. 2.10. Зависимости действительной части  $\Omega_2$ , отвечающие затухающим колебаниям жидкости, от  $G$  при  $\beta = 0,2$ :

1 -  $h = -0,3$ ; 2 -  $h = -0,1$ ; 3 -  $h = 0,2$

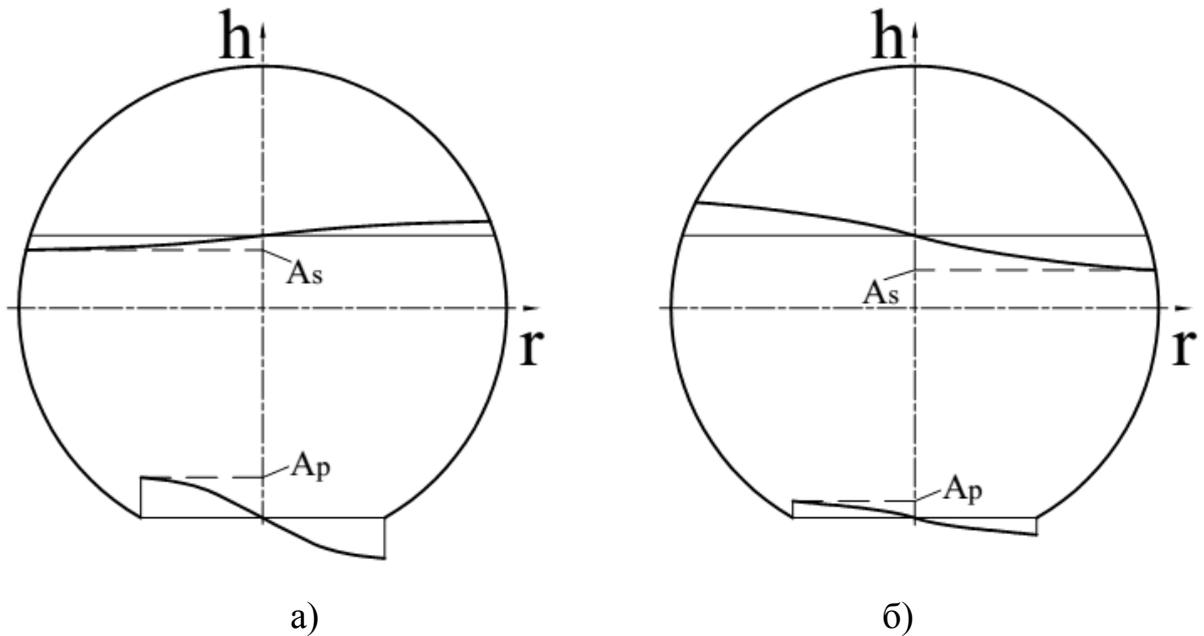


Рис. 2.11. Формы колебаний жидкости в сферическом сосуде при  $h = 0,2$ ;  $r_{\Sigma} = 0,5$ ;  $G = 0,005$ ;  $\beta = 0,2$ :  $\Omega_1 = -33,7842$  (а) и  $\Omega_{2,3} = -0,0035 \pm 1,3326i$  (б)

Сравним величину демпфирования (декремент)  $\delta_{m1}$  колебаний жидкости вследствие наличия ЗУ с соответствующим демпфированием колебаний из-за вязкости. Чтобы получить представление, используем результаты приближенного решения задачи о колебаниях вязкой жидкости в сфере с радиусом  $R_0$  [44], и результаты приближенного решения задачи о колебаниях идеальной жидкости, вытекающей из цилиндра с радиусом  $R_0$  [49]. Результаты составляют демпфирование одноузловой формы ( $m = 1, n = 1$ ). При численном расчете демпфирования из-за вязкости принимались  $R_0 = 1\text{ м}$ ,  $g = 9,81\text{ м/с}^2$ , кинематическая вязкость воды  $\nu = 10^{-6}\text{ м}^2/\text{с}$ , а вследствие вытекания – радиус поверхности слива  $r_{0\Sigma} = 0,5\text{ м}$ , средняя скорость опускания свободной поверхности  $V_{0Г} = 0,03\text{ м/с}$ , коэффициент сопротивления поверхности слива  $\gamma = 15\text{ м/с}$ . Результаты вычислений сведены в следующей таблице.

**Таблица 2.4.** Значения декремента колебаний жидкости для разных случаев

	$\delta_{11}$ при $\bar{h}_1 = 0,3$	$\delta_{11}$ при $\bar{h}_1 = 1$
Вязкая жидкость в сфере [44]	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$
Идеальная жидкость, вытекающая из цилиндра [49]	$3,5 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$
Идеальная жидкость, вытекающая из сферы через ЗУ	$2,7 \cdot 10^{-1}$	$3,4 \cdot 10^{-2}$

Замечание:  $\bar{h}_1$  обозначена безразмерная глубина жидкости, отчитываемая от днища бака.

Отсюда видно, что демпфирование колебаний жидкости, вытекающей из сферы через ЗУ примерно на порядок больше демпфирования колебаний жидкости, вытекающей из цилиндра или вследствие учета вязкости жидкости в пограничном слое на поверхности сферы.

#### 2.4. Малые движения жидкого топлива в емкостях с двумя концентрическими сферами

Рассмотрим задачу о собственных движениях жидкости, заполняющей емкость между двумя концентрическими сферами с радиусами  $R_{01}$ ,  $R_0$  и вытекающей через заборное устройство при наличии свободной поверхности (рис.2.12).

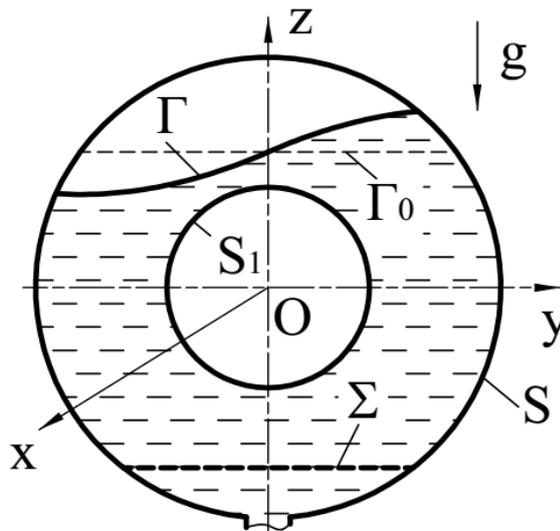


Рис. 2.12. Малые движения жидкого топлива в емкостях с двумя концентрическими сферами

Введем дополнительные обозначения:  $S_1$  - смачиваемая жидкостью поверхность внутренней сферы,

$$r_{01} = \begin{cases} \sqrt{R_{01}^2 - h^2} & \text{если } |h| < R_{01} \\ 0 & \text{если } |h| \geq R_{01} \end{cases}, \theta_{01} = \begin{cases} 0 & \text{если } h \geq R_{01} \\ \arccos\left(\frac{h}{R_{01}}\right) & \text{если } |h| < R_{01} \\ \pi & \text{если } h \leq -R_{01} \end{cases}. \quad (2.46)$$

В этом случае коэффициенты двух систем линейных уравнений (2.33), относительно неизвестных постоянных  $a_{ml}, b_{ml}$ , определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 p_{mkl}^{(1)} &= \int_{\Gamma_0} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} d\Gamma + \int_S U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} dS + \int_{\Sigma} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} d\Sigma + \int_{S_1} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} dS_1 = \\
 &= \int_{r_{01}}^{r_0} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial z} r dr + \int_{\theta_0}^{\theta_{\Sigma}} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial R} \sin \theta d\theta - \int_0^{r_{\Sigma}} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial z} r dr - \\
 &- \int_{\theta_{01}}^{\pi} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial R} R_{01}^2 \sin \theta d\theta, \\
 q_{mkl}^{(1)} &= \int_{r_{01}}^{r_0} U_{mk} U_{ml} r dr, \quad p_{mkl}^{(2)} = p_{mkl}^{(1)}, \quad q_{mkl}^{(2)} = \int_0^{r_{\Sigma}} U_{mk} U_{ml} r dr,
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

а гидродинамические коэффициенты в (2.39) вычисляются через интегралы

$$\begin{aligned}
 \mu_{mn}^{(1s)} &= \pi \int_{r_{01}}^{r_0} \varphi_{mn}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} r dr, \quad \mu_{mn}^{(1p)} = \pi \int_{r_{01}}^{r_0} \varphi_{mn}^{(2)} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} r dr, \\
 \delta_{mn}^{(1)} &= -\pi \int_{r_{01}}^{r_0} \left( \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial h} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} \right) r dr, \\
 \varepsilon_{mn}^{(1)} &= -\pi \int_{r_{01}}^{r_0} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial h} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} r dr, \quad c_{mn} = \pi \int_{r_{01}}^{r_0} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} r dr,
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

$\mu_{mn}^{(2s)}, \mu_{mn}^{(2p)}, \varepsilon_{mn}^{(2)}, \delta_{mn}^{(2)}, \sigma_{mn}^{(2)}$   $m=0,1,2,\dots, k=1,2,\dots, M, l=1,2,\dots, M$  определены по (2.41).

Результаты численного решения уравнения (2.44) при  $R_{01} = 0,4, h_{\Sigma} = 0,86 (r_{\Sigma} = 0,5), m=1, n=1, M=10$  приведены в табл. 2.5-2.7.

**Таблица 2.5.** Собственные числа волновых движений жидкости в сферической полости при безразмерном расходе жидкости  $G = 0,005; \beta = \gamma^{-1} = 0,2$

$h$	$\Omega_1$	$\Omega_{2,3}$
-0,6	-27,2443	-0,0482 ± 0,9391i
-0,5	-24,0000	-0,0231 ± 1,0204i
-0,4	-22,4600	-0,0130 ± 1,0731i
-0,3	-21,5063	-0,0093 ± 1,1161i

-0,2	-20,8733	-0,0078 ± 1,1560i
-0,1	-20,4455	-0,0069 ± 1,1958i
0	-20,1760	-0,0063 ± 1,2328i
0,1	-19,9434	-0,0057 ± 1,2812i
0,2	-19,7929	-0,0051 ± 1,3297i
0,3	-19,6811	-0,0046 ± 1,3844i
0,4	-19,5974	-0,0043 ± 1,4489i
0,5	-19,5359	-0,0045 ± 1,5282i
0,6	-19,4924	-0,0050 ± 1,6278i
0,7	-19,4628	-0,0045 ± 1,7594i

**Таблица 2.6.** Собственные числа волновых движений жидкости в сферической полости при различных безразмерных расходах жидкости

$h$	$\beta = \gamma^{-1}$	$G$	$\Omega_1$	$\Omega_{2,3}$
-0,3	0	0	----	±1,2715i
	0,2	0,002	-21,4667	-0,0089 ± 1,1161i
		0,003	-21,4799	-0,0091 ± 1,1161i
		0,005	-21,5063	-0,0093 ± 1,1161i
		0,008	-21,5458	-0,0097 ± 1,1162i
-0,1	0	0	----	±1,2688i
	0,2	0,002	-20,4047	-0,0054 + 1,1957i
		0,003	-20,4183	-0,0059 ± 1,1958i
		0,005	-20,4455	-0,0069 ± 1,1958i
		0,008	-20,4863	-0,0084 ± 1,1958i
0,2	0	0	----	±1,3557i
	0,002	-19,7507	-0,0031 ± 1,3297i	
	0,003	-19,7648	-0,0038 ± 1,3297i	

	0,2	0,005	-19,7929	-0,0051 ± 1,3297i
		0,008	-19,8351	-0,0071 ± 1,3297i

**Таблица 2.7.** Собственные числа волновых движений жидкости в сферической полости при безразмерном расходе жидкости  $G = 0,005$

$h$	$\beta = \gamma^{-1}$	$\Omega_1$	$\Omega_{2,3}$
-0,3	0,5	-8,6064	-0,0219 ± 1,1184i
	0,4	-10,7605	-0,0178 ± 1,1175i
	0,3	-14,3452	-0,0136 ± 1,1167i
	0,2	-21,5063	-0,0093 ± 1,1161i
	0,1	-42,9725	-0,0050 ± 1,1158i
	0,05	-85,8922	-0,0029 ± 1,1157i
0,2	0,5	-7,9522	-0,0076 ± 1,3303i
	0,4	-9,9264	-0,0068 ± 1,3301i
	0,3	-13,2158	-0,0060 ± 1,3299i
	0,2	-19,7929	-0,0051 ± 1,3297i
	0,1	-39,5208	-0,0042 ± 1,3296i
	0,05	-78,9739	-0,0038 ± 1,3296i

На рис. 2.13-2.19 представлены зависимости действительного корня  $\Omega_1$ , зависимости действительной части и мнимой части комплексно-сопряженных корней  $\Omega_{2,3}$  от глубины жидкости  $h$ , коэффициента сопротивления  $\gamma$  ( $\beta = \gamma^{-1}$ ) и безразмерного расхода  $G$ . Для лучшего понимания результатов расчёта модельных задач на рис. 2.20 приведено расположение значений  $\Omega_k$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) при  $m = 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  на комплексной плоскости.

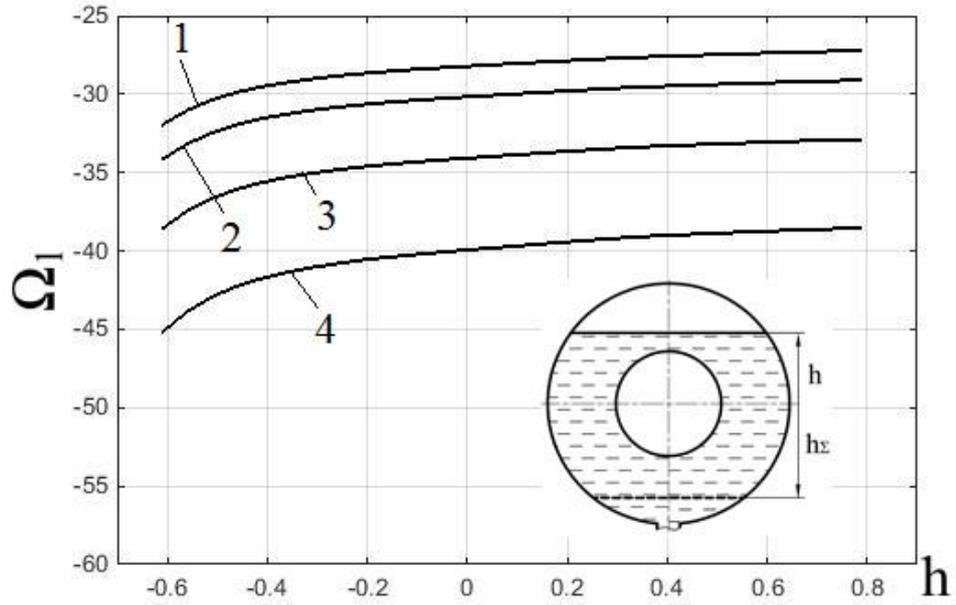


Рис. 2.13. Зависимости  $\Omega_1$ , отвечающие аperiodическому движению жидкости, от глубины жидкости  $h$  при  $\beta = 0,2$ :

1 -  $G = 0,002$ ; 2 -  $G = 0,003$ ; 3 -  $G = 0,005$ ; 4 -  $G = 0,008$

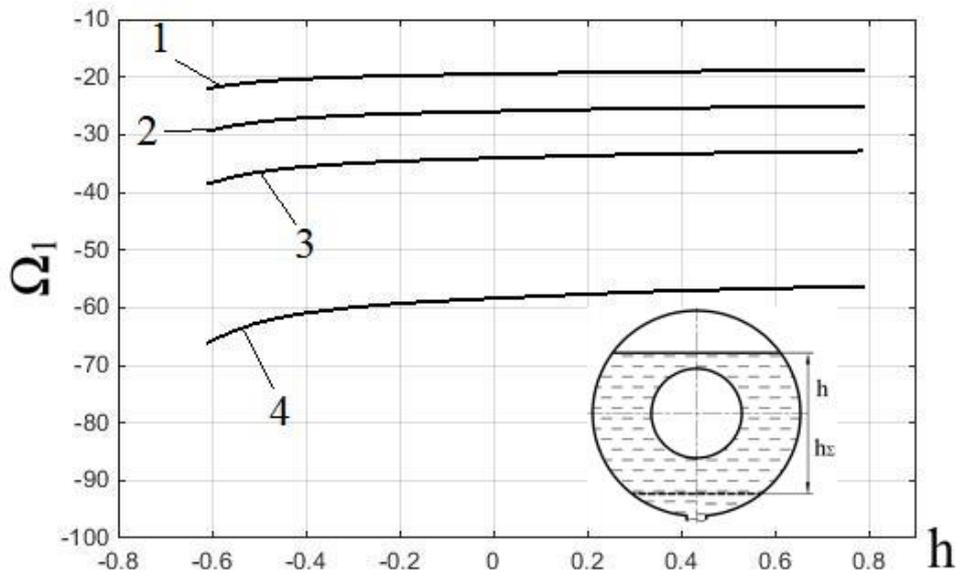


Рис. 2.14. Зависимости  $\Omega_1$ , отвечающие аperiodическому движению жидкости, от глубины жидкости  $h$  при  $G = 0,005$ :

1 -  $\beta = 0,5$ ; 2 -  $\beta = 0,3$ ; 3 -  $\beta = 0,2$ ; 4 -  $\beta = 0,1$

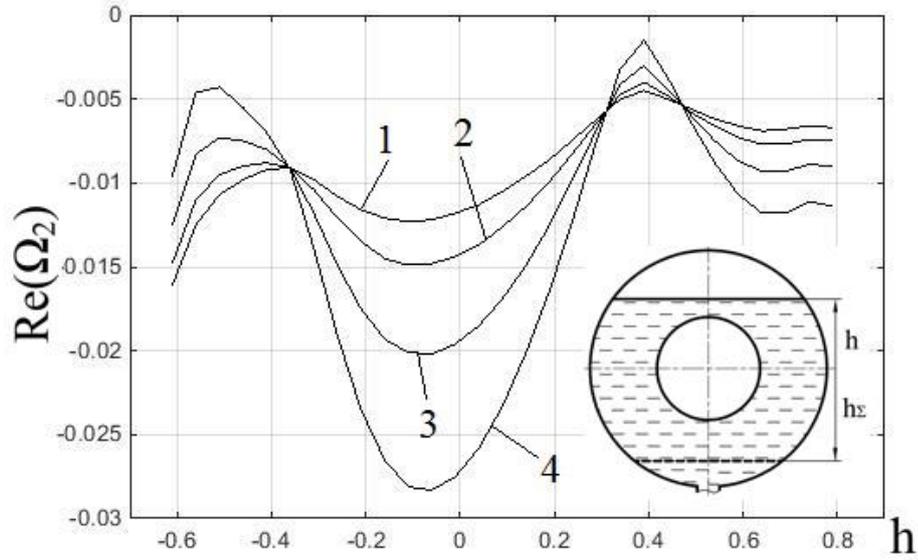


Рис. 2.15. Зависимости действительной части  $\Omega_2$ , отвечающие затухающим колебаниям жидкости, от глубины жидкости  $h$  при  $\beta = 0,2$  :  
 1 -  $G = 0,002$  ; 2 -  $G = 0,003$  ; 3 -  $G = 0,005$  ; 4-  $G = 0,008$

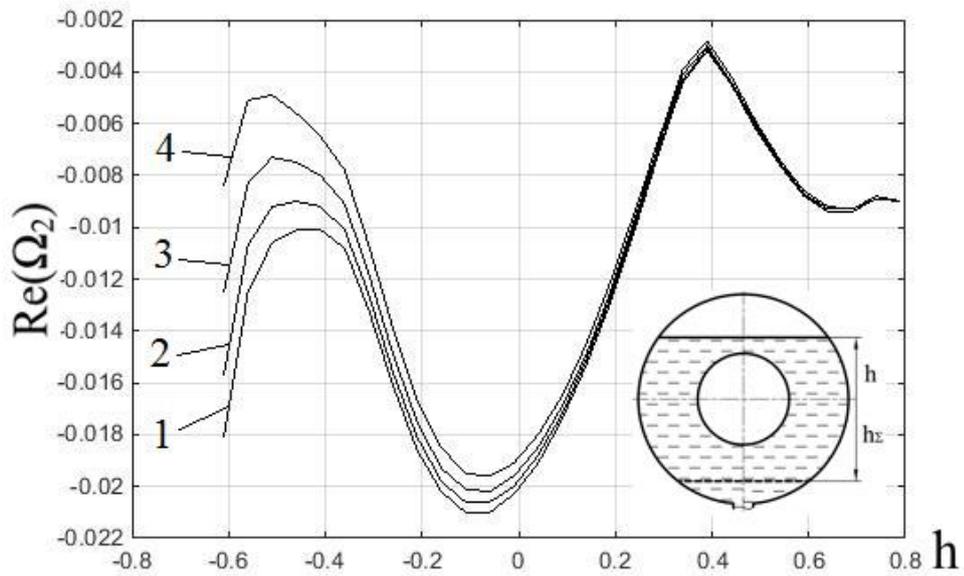


Рис. 2.16. Зависимости действительной части  $\Omega_2$ , отвечающие затухающим колебаниям жидкости, от глубины жидкости  $h$  при  $G = 0,005$  :  
 1 -  $\beta = 0,4$  ; 2 -  $\beta = 0,3$  ; 3 -  $\beta = 0,2$  ; 4 -  $\beta = 0,1$

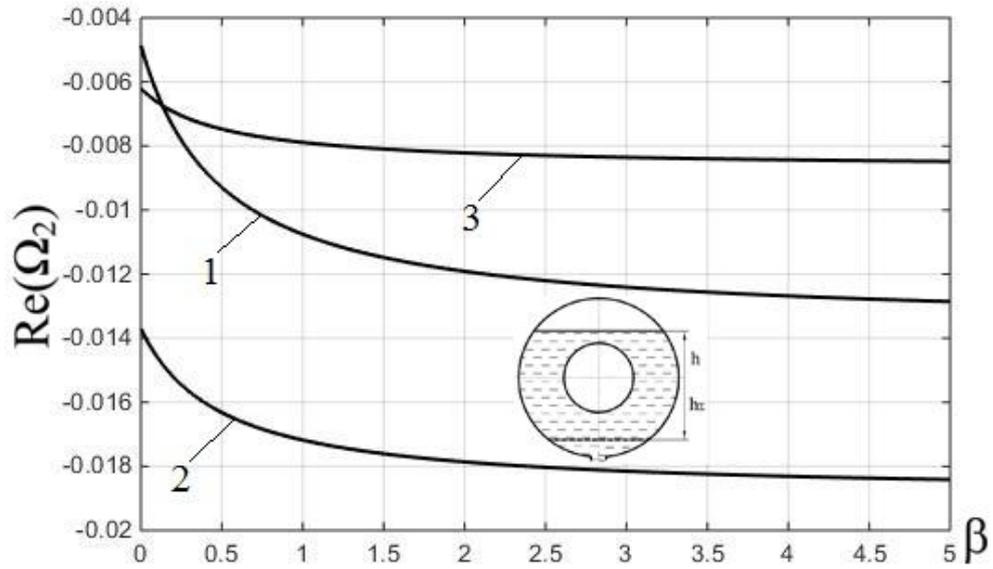


Рис. 2.17. Зависимости действительной части  $\Omega_2$ , отвечающие затухающим колебаниям жидкости, от  $\beta$  при  $G = 0,005$ :

1:  $h = -0,3$ ; 2:  $h = -0,1$ ; 3:  $h = 0,2$

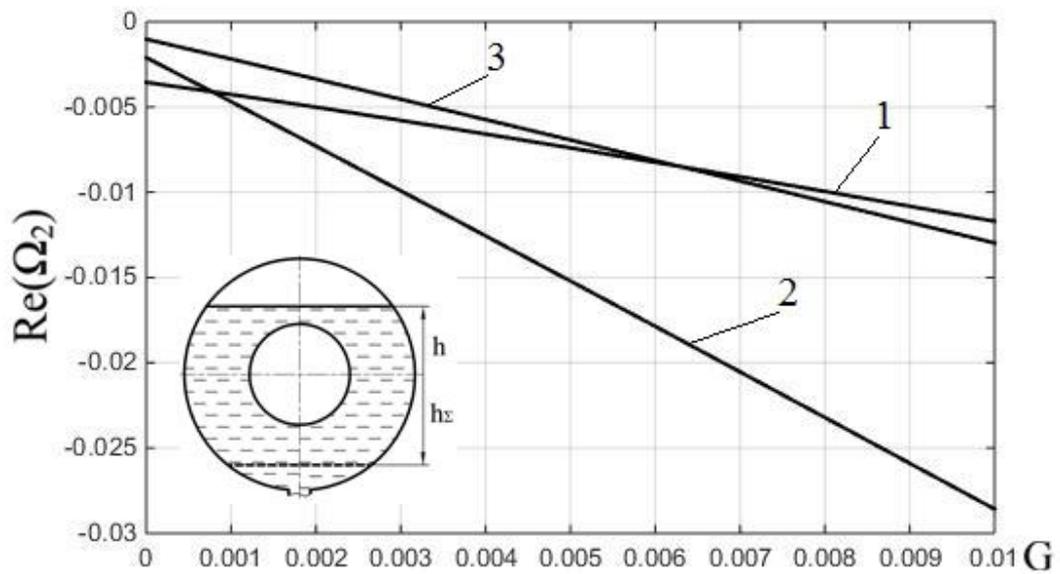


Рис. 2.18. Зависимости действительной части  $\Omega_2$ , отвечающие затухающим колебаниям жидкости, от  $G$  при  $\beta = 0,2$ :

1:  $h = -0,3$ ; 2:  $h = -0,1$ ; 3:  $h = 0,2$

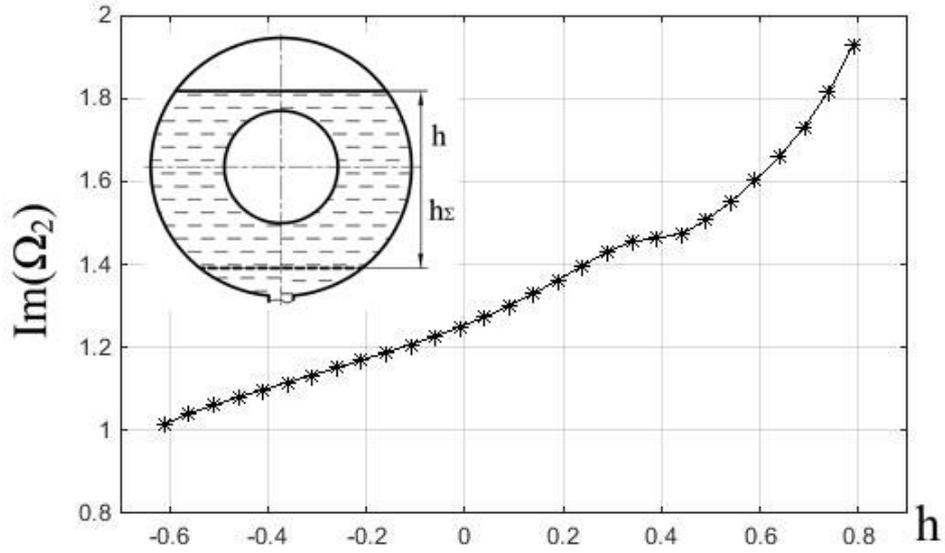


Рис. 2.19. Зависимости частоты затухающих колебаний (мнимой части  $\Omega_2$ ) от глубины жидкости  $h$  при  $\beta = 0,2$ :  
«сплошная» -  $G = 0,002$ ; «\* \* \*» -  $G = 0,008$

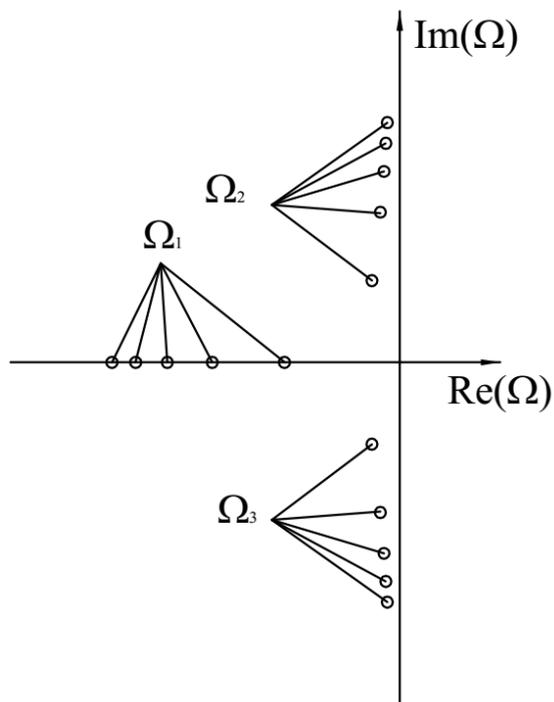


Рис. 2.20. Расположение собственных чисел на комплексной плоскости

## 2.5. Колебания жидкости в сферических полостях с внутренними устройствами

В данном пункте рассмотрим задачу о собственных колебаниях жидкости со свободной поверхностью в неподвижном сферическом баке, содержащим внутренние твёрдые шаровые баллоны. Решение задачи основано на вариационной формулировке, численно реализованной с помощью метода Ритца и метода конечных элементов.

### Постановка задач

Рассмотрим две задачи о малых колебаниях идеальной несжимаемой жидкости в жесткой сфере радиуса  $R_0$ . В первой задаче жидкость находится в области между двумя сферами радиусов  $R_0$  и  $R_{02}$  (рис. 2.21а), а в второй задаче жидкость находится в сфере, содержащей внутренние неподвижные шар-баллоны радиусов  $R_{03}$  (рис. 2.21б). Введем систему координат  $Oxuz$  с началом в геометрическом центре сфер. Глубину жидкости  $h$  и расстояние  $H_2$  будем отсчитывать, как показано на рисунках.

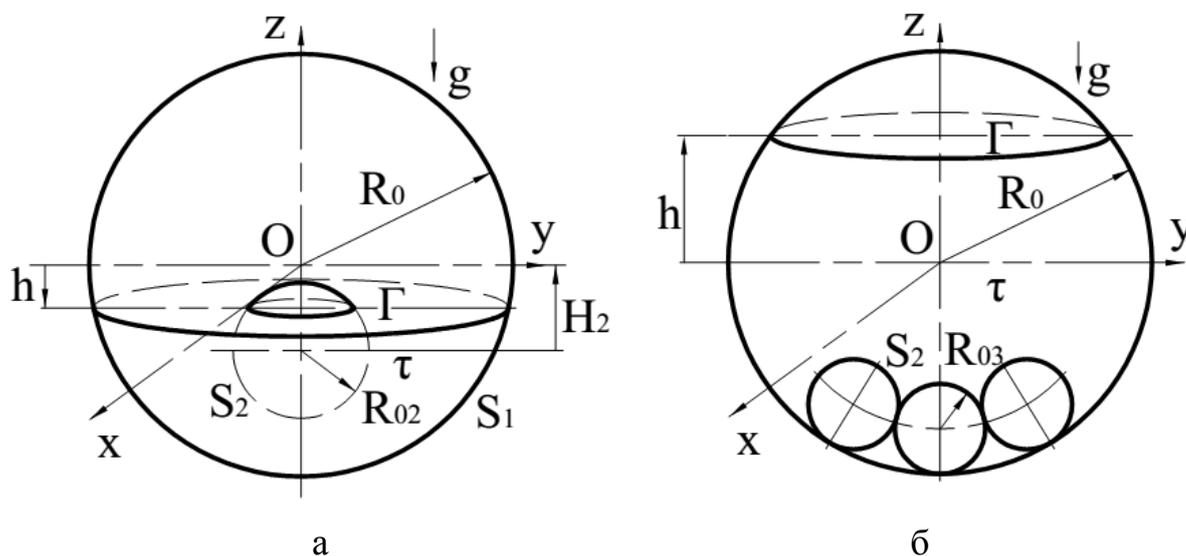


Рис. 2.21. Основные обозначения и системы координаты

В общем случае сводится к задаче о нахождении потенциала скоростей  $\Phi(x, y, z, t)$

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad (2.49)$$

где  $\tau$  - область, заполненная жидкостью,  $S$  - смачиваемые поверхности,  $\Gamma_0$  - свободная поверхность,  $n$  – вектор внешней нормали к поверхности  $S$ ,  $g$  - ускорение силы тяжести.

Введем безразмерные переменные

$$\bar{z} = \frac{z}{R_0}, \bar{R}_{02} = \frac{R_{02}}{R_0}, \bar{R}_{03} = \frac{R_{03}}{R_0}, \bar{h} = \frac{h}{R_0}, \bar{H}_2 = \frac{H_2}{R_0}, \bar{t} = \frac{t}{\sqrt{R_0/g}}, \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{R_0 \sqrt{gR_0}}, \quad (2.50)$$

сферическую систему координаты  $(R, \theta, \eta)$  и цилиндрическую систему координат  $(r, \eta, z)$ .

Перепишем задачу (2.49) в безразмерном виде

$$\Delta \bar{\Phi} = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} = 0 \text{ на } \Gamma_0. \quad (2.51)$$

Дальше знак «-» над безразмерными переменными будем опускать.

$$\text{Пусть } \Phi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z) \cdot \exp(i\omega t), \quad (2.52)$$

где  $\omega$  - безразмерная частота колебаний.

Спектральная задача для определения потенциала  $\Phi(x, y, z)$

$$\Delta \Phi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \lambda \cdot \Phi \text{ на } \Gamma_0, \quad (2.53)$$

где  $\lambda = \omega^2$  - собственное число.

Эквивалентная вариационная формулировка спектральной задачи (2.53): найти минимум функционала [65]

$$J(\Phi) = \int_{\tau} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi d\tau - \lambda \int_{\Gamma_0} \Phi \cdot \Phi dS = \int_{\tau} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) dx dy dz - \lambda \int_{\Gamma_0} \Phi \Phi dx dy. \quad (2.54)$$

Будем искать решение вариационной задачи (2.54) в виде

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(R, \theta) \cdot H_m(\eta), \quad (2.55)$$

$$H_m(\eta) = \begin{cases} \sin(m\eta) \\ \cos(m\eta) \end{cases}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

### Решение первой задач методом Рунца

Подставляя выражение (2.55) в (2.54), функционал для задачи (а) можно выписать следующим образом

$$\begin{aligned}
 J(\varphi_m) = & h^2 \int_{\theta_{2\Gamma}}^{\theta_0} \varphi_{m\Gamma} A_\Gamma \varphi_m \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} d\theta + \int_{\theta_0}^{\pi} \varphi_{mS_1} \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial R} \right)_{S_1} \sin\theta d\theta + \\
 & + R_2 \int_{\theta_{H2}}^{\theta_{1S}} \varphi_{mS_{21}} \left( \cos(\theta + \theta_{21}) \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial R} \right)_{S_{21}} - \frac{\sin(\theta + \theta_{21})}{r_{21}} \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial \theta} \right)_{S_{21}} \right) \left( \cos\theta \frac{dr_{21}}{d\theta} - r_{21} \sin\theta \right) d\theta - \\
 & - R_2 \int_{\theta_{2S}}^{\pi} \varphi_{mS_{22}} \left( \cos(\theta + \theta_{22}) \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial R} \right)_{S_{22}} - \frac{\sin(\theta + \theta_{22})}{r_{22}} \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial \theta} \right)_{S_{22}} \right) \left( \cos\theta \frac{dr_{22}}{d\theta} - r_{22} \sin\theta \right) d\theta - \\
 & - \lambda_m h^2 \int_{\theta_{2\Gamma}}^{\theta_0} \varphi_{m\Gamma}^2 \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} d\theta,
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\text{где } \theta_0 = \arccos(h), \theta_{2\Gamma} = \begin{cases} \pi & \text{если } 0 > h \geq -H_2 + R_2 \text{ или } h \leq -H_2 - R_2 \\ \theta_h & \text{если } -H_2 + R_2 > h \geq -H_2 - R_2 \\ 0 & \text{если } h > 0 \end{cases},$$

$$\theta_{1S} = \begin{cases} \pi & \text{если } h \geq -H_2 + R_2 \\ \theta_h & \text{если } -H_2 + R_2 > h > -H_2, \\ \theta_H & \text{если } h \leq -H_2 \end{cases}, \theta_{2S} = \begin{cases} \theta_H & \text{если } h \geq -H_{21} \\ \theta_h & \text{если } -H_{21} > h > -H_2 - R_2, \\ \pi & \text{если } h \leq -H_2 - R_2 \end{cases},$$

$$\theta_h = \pi - \arccos \left[ \frac{-h}{\sqrt{h^2 + l^2}} \right], \quad l = \sqrt{R_2^2 - (H_2 + h)^2}, \quad \theta_{H2} = \pi - \arccos \left( \frac{\sqrt{H_2^2 - R_2^2}}{H_2} \right),$$

$$H_{21} = H_2 - R_2 \sin\theta_{H2}, \quad r_{21} = -H_2 \cos\theta - \sqrt{R_2^2 - H_2^2 \sin^2\theta}, \quad r_{22} = -H_2 \cos\theta + \sqrt{R_2^2 - H_2^2 \sin^2\theta},$$

$$\theta_{21} = \arccos \left( \frac{-H_2 - r_{21} \cos\theta}{R_2} \right), \quad \theta_{22} = \arccos \left( \frac{-H_2 - r_{22} \cos\theta}{R_2} \right), \quad \text{оператор}$$

$$A_\Gamma = \left( \frac{\partial}{\partial R} - \frac{\sin\theta}{h} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad \varphi_{m\Gamma} \text{ означает, что в выражении для } \varphi_m \text{ надо положить}$$

$$R = \frac{h}{\cos\theta}, \quad \text{а } \varphi_{mS_1}, \varphi_{mS_{21}}, \varphi_{mS_{22}} \text{ означает, что } R = 1, R = r_{21}, R = r_{22},$$

соответственно.

Представим функцию  $\varphi_m(r, \theta)$  в виде

$$\varphi_m(\mathbf{R}, \theta) = \sum_{k=1}^M a_{mk} U_{mk}, \quad (2.57)$$

где  $M$  - порядок приближения решений.

Подставляя ряд (2.57) в функционал (2.56) получим

$$J(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mM}) = \sum_{k,l=1}^M p_{mkl} a_{mk} a_{ml} - \lambda_m \sum_{k,l=1}^M q_{mkl} a_{mk} a_{ml}. \quad (2.58)$$

Из условий экстремума функционалов  $J$  получаем характеристические уравнения для определения собственных значений

$$|p_{mkl} - \lambda_m q_{mkl}|_{k,l=1}^M = 0. \quad (2.59)$$

Решение уравнения (2.59) определяет  $M$  положительных чисел  $\lambda_{mn}$ ,  $n = 1, 2, \dots, M$ . Каждому значению  $\lambda_{mn}$  соответствует вектор  $\{a_{mnk}\}_{k=1}^M$ .

### **Решение задач методом конечных элементов**

Подставив выражения (2.55) в выражение (2.54), получим функционал  $J(\varphi_m)$  в цилиндрической системе координат

$$J(\varphi_m) = \iint_{S_\tau} \left( \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2} \varphi_m \cdot \varphi_m + \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right) r dr dz - \lambda_m \int_{L_0} \varphi_m \cdot \varphi_m r dr. \quad (2.60)$$

где  $S_\tau$  - главное меридианное сечение,  $L_0$  - линия пересечения главного меридианного сечения со свободной поверхностью.

Дальше в место  $\varphi_m$  и  $\lambda_m$  будут написаны сокращенно  $\varphi$  и  $\lambda$ .

Разбив область решения  $S_\tau$  на ряд треугольных областей – конечных элементов (КЭ), мы получаем возможность переписать интегралы в виде суммы интегралов по отдельным областям

$$J(\varphi) = \sum_{N_{KЭ}} \iint_{S_{KЭ}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2} \varphi \cdot \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) r dr dz - \lambda \sum_{N_{KЭ}} \int_{L_{KЭ}} \varphi \cdot \varphi r dr. \quad (2.61)$$

Применим КЭ с 9 степенями свободы (рис. 2.22)

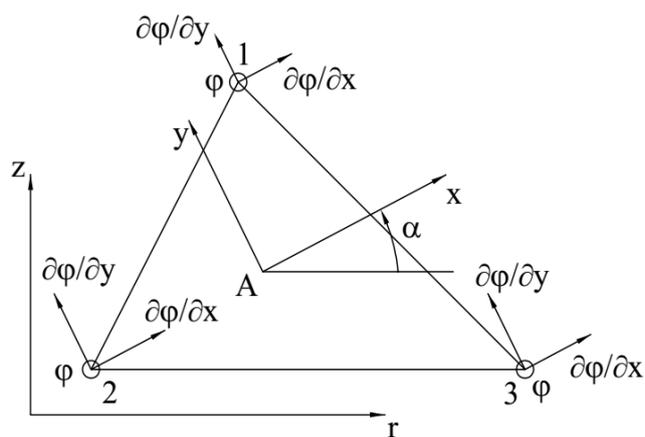


Рис.2.22. КЭ с 9-ю степенями свободы

### Геометрические характеристики КЭ

- координаты  $(r, z)$  вершин в глобальной системе координат;
- глобальные координаты  $(r_A, z_A)$  точки отсчета локальных координат КЭ (вычисляются как координаты центра тяжести треугольника  $A$ );
- локальные координаты  $(x, y)$  вершин КЭ.

Формулы перехода от глобальных координат к локальным приведены в следующей таблице

Глобальные координаты	$(r, z)$
Начало отсчета локальных координат	$r_A = (r_1 + r_2 + r_3) / 3$ $z_A = (z_1 + z_2 + z_3) / 3$
Переход к локальным координатам	$x = (r - r_A) \cos \alpha + (z - z_A) \sin \alpha$ $y = -(r - r_A) \sin \alpha + (z - z_A) \cos \alpha$
Переход глобальным координатам	$r = x \cos \alpha - y \sin \alpha + r_A$ $z = x \sin \alpha + y \cos \alpha + z_A$
Частные производные	$\partial / \partial r = \cos \alpha (\partial / \partial x) - \sin \alpha (\partial / \partial y)$ $\partial / \partial z = \sin \alpha (\partial / \partial x) + \cos \alpha (\partial / \partial y)$

где  $\alpha = 15^\circ$  - угол наклона локальной системе координат относительно глобальной системе координат.

Девять узловых параметров (степеней свободы) КЭ: 3 значения потенциала  $\varphi$  в вершинах КЭ и 6 значений производных  $d\varphi/dx, d\varphi/dy$  в вершинах КЭ.

В каждой точке КЭ значение потенциала определим как

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^9 u_i f_i(x, y) = (U)_{(1 \times 9)} \{f\}_{(9 \times 1)}. \quad (2.62)$$

Здесь  $u_i$  - значения обобщенных координат КЭ,  $f_i(x, y)$  - функции формы в точке с локальными координатами  $(x, y)$ .

Базисная функция  $f_i(x, y)$  должна удовлетворять условию  $0 \leq f_i(x, y) \leq 1$  и принимать значение 1 только в точке соответствующей степени свободы «i», а в точках соответствующих остальным степеням свободы обращаться в 0, т.е.

$$f_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}. \quad (2.63)$$

В качестве базисных функций примем полином четвертой степени

$$\begin{aligned} f_i(x, y) = & C_{i1} + C_{i2} \cdot x + C_{i3} \cdot y + C_{i4} \cdot x \cdot y + C_{i5} \cdot x^2 + C_{i6} \cdot y^2 + \\ & + C_{i7} \cdot x \cdot y^2 + C_{i8} \cdot x^2 \cdot y + C_{i9} \cdot x^2 \cdot y^2 = (C)_{i(1 \times 9)} \cdot \{X(x, y)\}_{(9 \times 1)}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Из условий (2.63) имеем выражение для определения значений  $C_{ij}$  для каждого конкретного КЭ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(9 \times 9)} = \begin{bmatrix} (C)_{1(1 \times 9)} \\ (C)_{2(1 \times 9)} \\ \dots \\ (C)_{9(1 \times 9)} \end{bmatrix}_{(9 \times 9)} \cdot [X]_{(9 \times 9)}, \quad (2.65)$$

где матрица  $[X]_{(9 \times 9)}$  представлена форме

$$[X]_{(9 \times 9)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & x_2 & 1 & 0 & x_3 & 1 & 0 \\ y_1 & 0 & 1 & y_2 & 0 & 1 & y_3 & 0 & 1 \\ x_1 y_1 & y_1 & x_1 & x_2 y_2 & y_2 & x_2 & x_3 y_3 & y_3 & x_3 \\ x_1^2 & 2x_1 & 0 & x_2^2 & 2x_2 & 0 & x_3^2 & 2x_3 & 0 \\ y_1^2 & 0 & 2y_1 & y_2^2 & 0 & 2y_2 & y_3^2 & 0 & 2y_3 \\ x_1 y_1^2 & y_1^2 & 2x_1 y_1 & x_2 y_2^2 & y_2^2 & 2x_2 y_2 & x_3 y_3^2 & y_3^2 & 2x_3 y_3 \\ x_1^2 y_1 & 2x_1 y_1 & x_1^2 & x_2^2 y_2 & 2x_2 y_2 & x_2^2 & x_3^2 y_3 & 2x_3 y_3 & x_3^2 \\ x_1^2 y_1^2 & 2x_1 y_1^2 & 2x_1^2 y_1 & x_2^2 y_2^2 & 2x_2 y_2^2 & 2x_2^2 y_2 & x_3^2 y_3^2 & 2x_3 y_3^2 & 2x_3^2 y_3 \end{bmatrix}_{(9 \times 9)}$$

Откуда

$$[C]_{(9 \times 9)} = [X]_{(9 \times 9)}^{-1}. \quad (2.66)$$

Итак, потенциал скоростей в любой точке КЭ можно вычислить как

$$\varphi(x, y) = (U)_{(1 \times 9)} [C]_{(9 \times 9)} \{X(x, y)\}_{(9 \times 1)}. \quad (2.67)$$

Теперь можно записать каждый из элементов сумм в уравнении (2.61) с учетом соотношений (2.67) и произвести некоторые операции над матрицами и интегрирование

$$\begin{aligned} & \iint_{S_{KЭ}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2} \varphi \cdot \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) r dr dz = \\ & = \iint_{S_{KЭ}} \left( \left( (U)[C] \frac{\partial \{X\}}{\partial r} \right) \cdot \left( (U)[C] \frac{\partial \{X\}}{\partial r} \right)^T + \right. \\ & \quad \left. + \frac{m^2}{r^2} \left( (U)[C] \{X\} \right) \cdot \left( (U)[C] \{X\} \right)^T + \left( (U)[C] \frac{\partial \{X\}}{\partial z} \right) \cdot \left( (U)[C] \frac{\partial \{X\}}{\partial z} \right)^T \right) r dr dz = \\ & = (U)[C] \left[ \iint_{S_{KЭ}} \left( \frac{\partial \{X\}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \{X\}^T}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2} \{X\} \cdot \{X\}^T + \frac{\partial \{X\}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \{X\}^T}{\partial z} \right) r dr dz \right] [C]^T \{U\} = \\ & = (U)_{(1 \times 9)} [K_{KЭ}]_{(9 \times 9)} \{U\}_{(9 \times 1)}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\int_{\Gamma_{KЭ}} \varphi \cdot \varphi r dr = \int_{\Gamma_{KЭ}} ((U)[C]\{X\}) \cdot ((U)[C]\{X\})^T r dr =$$

$$= (U)[C] \left( \int_{\Gamma_{KЭ}} \{X\} \cdot \{X\}^T r dr \right) [C]^T \{U\} = (U)_{(1 \times 9)} [M_{KЭ}^{(\Gamma)}]_{(9 \times 9)} \{U\}_{(9 \times 1)}, \quad (2.69)$$

где

$$[K_{KЭ}] = [C] \left[ \iint_{S_{KЭ}} \left( \frac{\partial \{X\}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \{X\}^T}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2} \{X\} \cdot \{X\}^T + \frac{\partial \{X\}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \{X\}^T}{\partial z} \right) r dr dz \right] [C]^T \quad (2.70)$$

- матрица «жесткости» КЭ, а

$$[M_{KЭ}^{(\Gamma)}] = [C] \left( \int_{\Gamma_{KЭ}} \{X\} \cdot \{X\}^T r dr \right) [C]^T \quad (2.71)$$

- матрица «масс» КЭ.

Для демонстрации процесса составления глобальной матрицы «жесткости» [K] (аналогично для глобальной матрицы «масс» [M]) рассмотрим случай разбиения области решения  $S_r$  на три элемента (рис. 2.23).

В этом случае глобальная нумерация узлов: (1 2 3 4 5), а глобальная нумерация обобщенных степеней свободы: (1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15).

Матрица «жесткости» n\_го КЭ имеет вид  $K^{(n)} = [k_{ij}^{(n)}]_{i,j=1}^9$ .

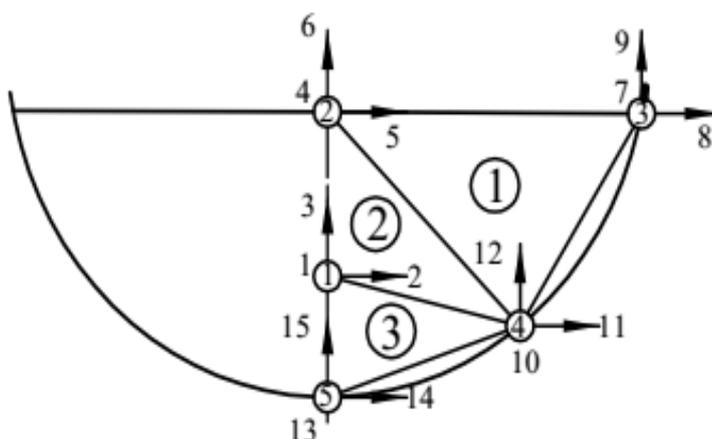


Рис. 2.23. Глобальная нумерация обобщенных степеней свободы системы

Тогда глобальная матрица жесткости системы [K] по данным глобальным нумерациям принимает вид

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$k_{11}^{(2)} + k_{77}^{(3)}$	$k_{12}^{(2)} + k_{78}^{(3)}$	$k_{13}^{(2)} + k_{79}^{(3)}$	$k_{17}^{(2)}$	$k_{18}^{(2)}$	$k_{19}^{(2)}$	0	0
2	$k_{21}^{(2)} + k_{87}^{(3)}$	$k_{22}^{(2)} + k_{88}^{(3)}$	$k_{23}^{(2)} + k_{89}^{(3)}$	$k_{27}^{(2)}$	$k_{28}^{(2)}$	$k_{29}^{(2)}$	0	0
3	$k_{31}^{(2)} + k_{97}^{(3)}$	$k_{32}^{(2)} + k_{98}^{(3)}$	$k_{33}^{(2)} + k_{99}^{(3)}$	$k_{37}^{(2)}$	$k_{38}^{(2)}$	$k_{39}^{(2)}$	0	0
4	$k_{71}^{(2)}$	$k_{72}^{(2)}$	$k_{73}^{(2)}$	$k_{11}^{(1)} + k_{77}^{(2)}$	$k_{12}^{(1)} + k_{78}^{(2)}$	$k_{13}^{(1)} + k_{79}^{(2)}$	$k_{17}^{(1)}$	$k_{18}^{(1)}$
5	$k_{81}^{(2)}$	$k_{82}^{(2)}$	$k_{83}^{(2)}$	$k_{21}^{(1)} + k_{87}^{(2)}$	$k_{22}^{(1)} + k_{88}^{(2)}$	$k_{23}^{(1)} + k_{89}^{(2)}$	$k_{27}^{(1)}$	$k_{28}^{(1)}$
6	$k_{91}^{(2)}$	$k_{92}^{(2)}$	$k_{93}^{(2)}$	$k_{31}^{(1)} + k_{97}^{(2)}$	$k_{32}^{(1)} + k_{98}^{(2)}$	$k_{33}^{(1)} + k_{99}^{(2)}$	$k_{37}^{(1)}$	$k_{38}^{(1)}$
7	0	0	0	$k_{71}^{(1)}$	$k_{72}^{(1)}$	$k_{73}^{(1)}$	$k_{77}^{(1)}$	$k_{78}^{(1)}$
$[K] = 8$	0	0	0	$k_{81}^{(1)}$	$k_{82}^{(1)}$	$k_{83}^{(1)}$	$k_{87}^{(1)}$	$k_{88}^{(1)}$
9	0	0	0	$k_{91}^{(1)}$	$k_{92}^{(1)}$	$k_{93}^{(1)}$	$k_{97}^{(1)}$	$k_{98}^{(1)}$
10	$k_{41}^{(2)} + k_{47}^{(3)}$	$k_{42}^{(2)} + k_{48}^{(3)}$	$k_{43}^{(2)} + k_{49}^{(3)}$	$k_{41}^{(1)} + k_{47}^{(2)}$	$k_{42}^{(1)} + k_{48}^{(2)}$	$k_{43}^{(1)} + k_{49}^{(2)}$	$k_{47}^{(1)}$	$k_{48}^{(1)}$
11	$k_{51}^{(2)} + k_{57}^{(3)}$	$k_{52}^{(2)} + k_{58}^{(3)}$	$k_{53}^{(2)} + k_{59}^{(3)}$	$k_{51}^{(1)} + k_{57}^{(2)}$	$k_{52}^{(1)} + k_{58}^{(2)}$	$k_{53}^{(1)} + k_{59}^{(2)}$	$k_{57}^{(1)}$	$k_{58}^{(1)}$
12	$k_{61}^{(2)} + k_{67}^{(3)}$	$k_{62}^{(2)} + k_{68}^{(3)}$	$k_{63}^{(2)} + k_{69}^{(3)}$	$k_{61}^{(1)} + k_{67}^{(2)}$	$k_{62}^{(1)} + k_{68}^{(2)}$	$k_{63}^{(1)} + k_{69}^{(2)}$	$k_{67}^{(1)}$	$k_{68}^{(1)}$
13	$k_{17}^{(3)}$	$k_{18}^{(3)}$	$k_{18}^{(3)}$	0	0	0	0	0
14	$k_{27}^{(3)}$	$k_{28}^{(3)}$	$k_{29}^{(3)}$	0	0	0	0	0
15	$k_{37}^{(3)}$	$k_{38}^{(3)}$	$k_{39}^{(3)}$	0	0	0	0	0

9	10	11	12	13	14	15	
0	$k_{14}^{(2)} + k_{74}^{(3)}$	$k_{15}^{(2)} + k_{75}^{(3)}$	$k_{16}^{(2)} + k_{76}^{(3)}$	$k_{71}^{(3)}$	$k_{72}^{(3)}$	$k_{73}^{(3)}$	1
0	$k_{24}^{(2)} + k_{84}^{(3)}$	$k_{25}^{(2)} + k_{85}^{(3)}$	$k_{26}^{(2)} + k_{86}^{(3)}$	$k_{81}^{(3)}$	$k_{82}^{(3)}$	$k_{83}^{(3)}$	2
0	$k_{34}^{(2)} + k_{94}^{(3)}$	$k_{35}^{(2)} + k_{95}^{(3)}$	$k_{36}^{(2)} + k_{96}^{(3)}$	$k_{91}^{(3)}$	$k_{92}^{(3)}$	$k_{93}^{(3)}$	3
$k_{19}^{(1)}$	$k_{14}^{(1)} + k_{74}^{(2)}$	$k_{15}^{(1)} + k_{75}^{(2)}$	$k_{16}^{(1)} + k_{76}^{(2)}$	0	0	0	4
$k_{29}^{(1)}$	$k_{24}^{(1)} + k_{84}^{(2)}$	$k_{25}^{(1)} + k_{85}^{(2)}$	$k_{26}^{(1)} + k_{86}^{(2)}$	0	0	0	5
$k_{39}^{(1)}$	$k_{34}^{(1)} + k_{94}^{(2)}$	$k_{35}^{(1)} + k_{95}^{(2)}$	$k_{36}^{(1)} + k_{96}^{(2)}$	0	0	0	6
$k_{79}^{(1)}$	$k_{74}^{(1)}$	$k_{75}^{(1)}$	$k_{76}^{(1)}$	0	0	0	7
$k_{89}^{(1)}$	$k_{84}^{(1)}$	$k_{85}^{(1)}$	$k_{86}^{(1)}$	0	0	0	8
$k_{99}^{(1)}$	$k_{94}^{(1)}$	$k_{95}^{(1)}$	$k_{96}^{(1)}$	0	0	0	9
$k_{49}^{(1)}$	$k_{44}^{(1)} + k_{44}^{(2)} + k_{44}^{(3)}$	$k_{45}^{(1)} + k_{45}^{(2)} + k_{45}^{(3)}$	$k_{46}^{(1)} + k_{46}^{(2)} + k_{46}^{(3)}$	$k_{41}^{(3)}$	$k_{42}^{(3)}$	$k_{43}^{(3)}$	10
$k_{59}^{(1)}$	$k_{54}^{(1)} + k_{54}^{(2)} + k_{54}^{(3)}$	$k_{55}^{(1)} + k_{55}^{(2)} + k_{55}^{(3)}$	$k_{56}^{(1)} + k_{56}^{(2)} + k_{56}^{(3)}$	$k_{51}^{(3)}$	$k_{52}^{(3)}$	$k_{53}^{(3)}$	11
$k_{69}^{(1)}$	$k_{64}^{(1)} + k_{64}^{(2)} + k_{64}^{(3)}$	$k_{65}^{(1)} + k_{65}^{(2)} + k_{65}^{(3)}$	$k_{66}^{(1)} + k_{66}^{(2)} + k_{66}^{(3)}$	$k_{61}^{(3)}$	$k_{62}^{(3)}$	$k_{63}^{(3)}$	12
0	$k_{14}^{(3)}$	$k_{15}^{(3)}$	$k_{16}^{(3)}$	$k_{11}^{(3)}$	$k_{12}^{(3)}$	$k_{13}^{(3)}$	13
0	$k_{24}^{(3)}$	$k_{25}^{(3)}$	$k_{26}^{(3)}$	$k_{21}^{(3)}$	$k_{22}^{(3)}$	$k_{23}^{(3)}$	14
0	$k_{34}^{(3)}$	$k_{35}^{(3)}$	$k_{36}^{(3)}$	$k_{31}^{(3)}$	$k_{32}^{(3)}$	$k_{33}^{(3)}$	15

С учетом полученных глобальных матриц и условия стационарности функционала (2.61) приводят к системе линейных уравнений

$$([K] - \lambda \cdot [M])\{U\} = 0. \quad (2.72)$$

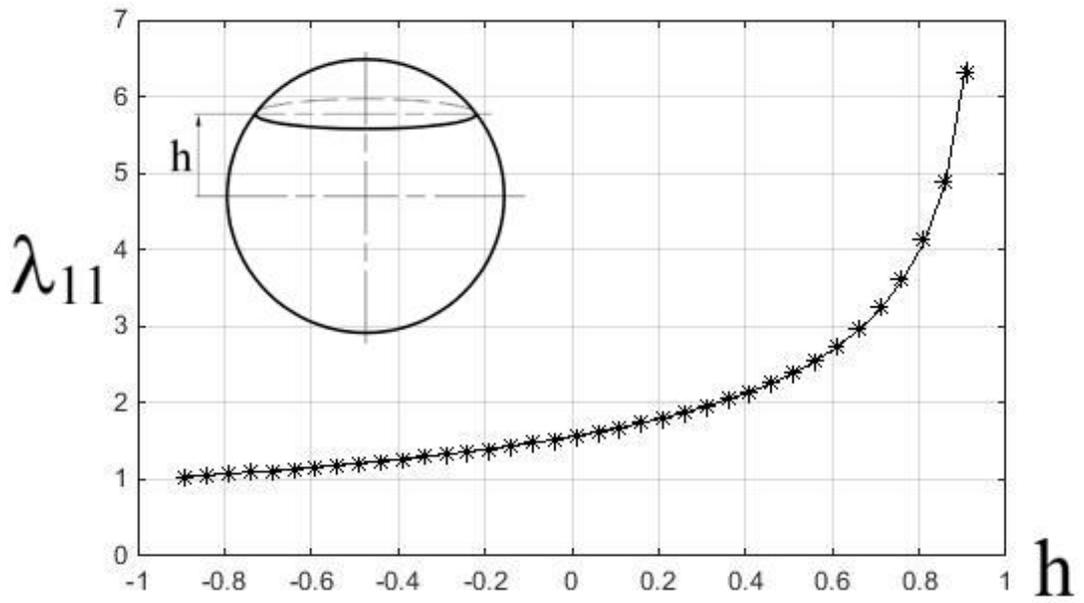
Характеристическое уравнение системы (2.72) имеет вид

$$\| [K] - \lambda \cdot [M] \| = 0. \quad (2.73)$$

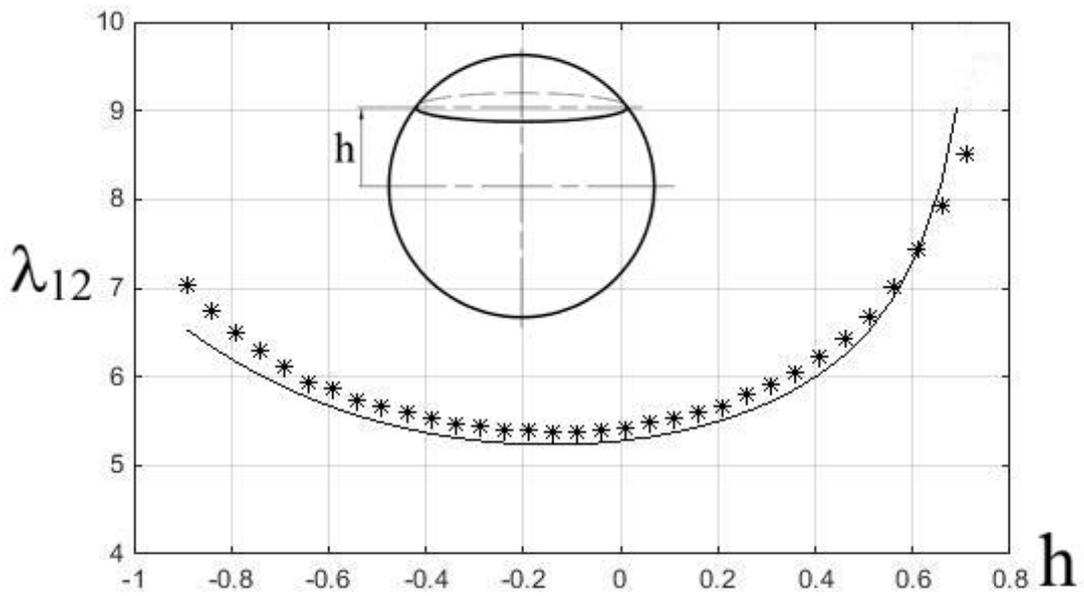
Решая уравнение (2.73) численным методом, получим спектр дискретных собственных значений  $\lambda_{mn}$  и соответственные им собственные векторы  $\{V\}_{mn}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

### ***Сравнение результатов расчета***

Для проверки точности МКЭ по сравнению с методом Ритца представлены результаты расчета собственных значений первого ( $n = 1$ ) и второго ( $n = 2$ ) тона неосесимметричных колебаний жидкости ( $m = 1$ ) в гладкой сферической полости в зависимости от глубины жидкости  $h$  на рис. 2.24а и рис. 2.24б. На рис. 2.24а очевидно, что собственные значения первого тона, полученные МКЭ (линия «\* \* \*») практически совпадают с результатами методом Ритца (сплошная линия), которые приведены в работе [49]. Результаты численного решения задач приведены в табл. 2.8-2.9.



а)



б)

Рис. 2.24. Зависимости собственных значений первого  $\lambda_{11}$  (а) и второго тона  $\lambda_{12}$  (б) несимметричных колебаний жидкости в гладкой сферической полости от глубины жидкости: «сплошная» - методом Ритца, «\* \* \*» - МКЭ

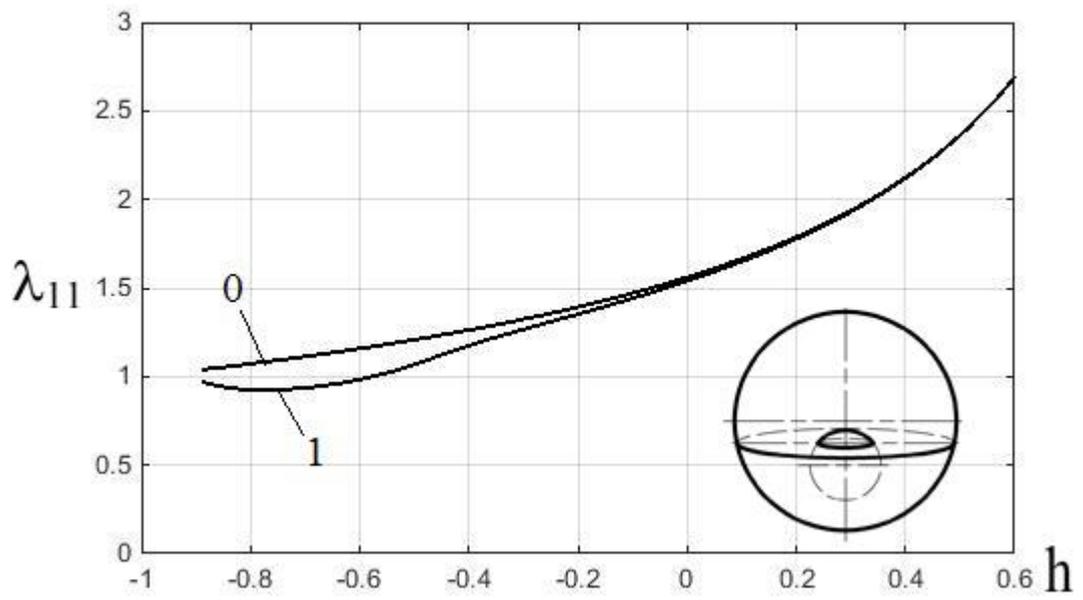
**Таблица 2.8.** Собственные значения первого и второго тона колебаний жидкости в области между двумя сферами

h	H <sub>2</sub>	R <sub>02</sub>	Метод Рунца		МКЭ		МКЭ	
			$\lambda_{11}^{(p)}$	$\lambda_{11}^{(p)}$	$\lambda_{11}^{(кэ)}$	$\lambda_{12}^{(кэ)}$	$\lambda_{11(0)}^{(кэ)}$	$\lambda_{12(0)}^{(кэ)}$
-0,7	0,9	0,1	1,0968	5,8503	1,0883	5,8917	1,1121	5,9754
-0,4	0,8	0,2	1,2274	5,3241	1,2112	5,3431	1,2621	5,4068
-0,3	0,5	0,3	1,1650	4,6851	1,1090	4,4746	1,3233	5,3199
-0,4	0,4	0,2	1,2287	5,2279	1,2194	5,2476	1,2621	5,4068
0,1	0	0,1	1,6576	5,2977	1,6565	5,3885	1,6649	5,3976
-0,1	0	0,2	1,4627	5,2189	1,4615	5,3581	1,4705	5,2738

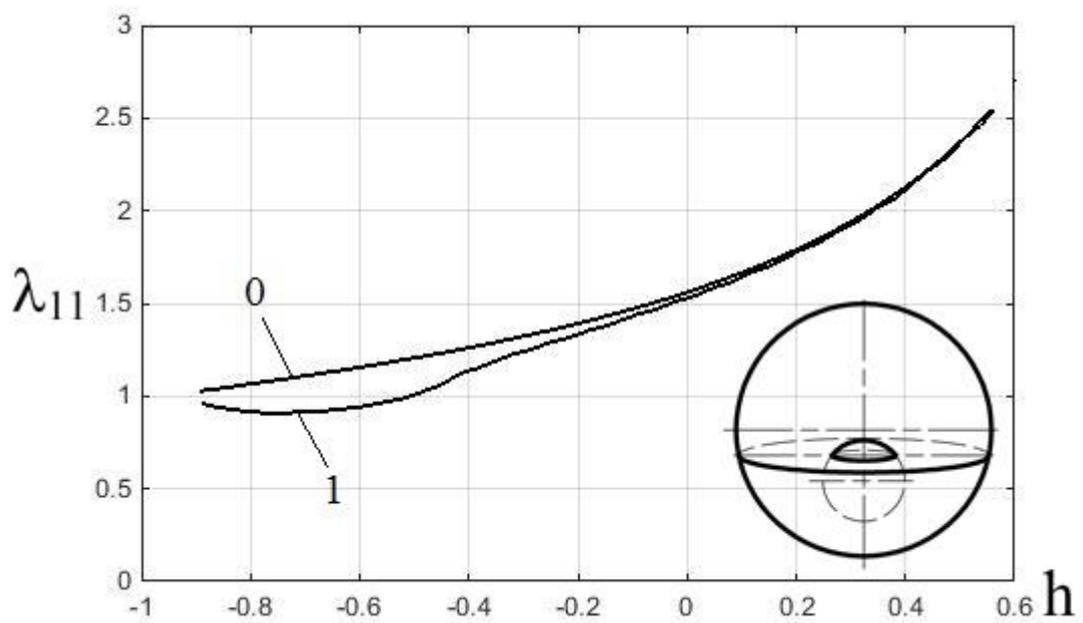
**Таблица 2.9.** Собственные значения первого и второго тона колебаний жидкости в сферической емкости с внутренними шар-баллонами

h	R <sub>03</sub>	$\lambda_{11}^{(кэ)}$	$\lambda_{12}^{(кэ)}$	$\lambda_{11(0)}^{(кэ)}$	$\lambda_{12(0)}^{(кэ)}$
0,4	0,1	1,0295	5,5167	1,1575	5,7254
0,4	0,15	0,6590	4,0410		
1,0	0,1	1,5477	5,3115	1,5603	5,3135
1,0	0,2	1,4113	5,2979		
1,0	0,3	0,7648	4,2200		
1,3	0,1	1,9332	5,7374	1,9385	5,7380
1,3	0,2	1,8758	5,7384		
1,3	0,3	1,5629	5,6832		

*Замечание: В двух крайних столбцах табл. 2.7-2.8 даны собственные значения первого и второго тона колебаний идеальной жидкости в сферическом баке с гладкой стенкой, полученные МКЭ.*

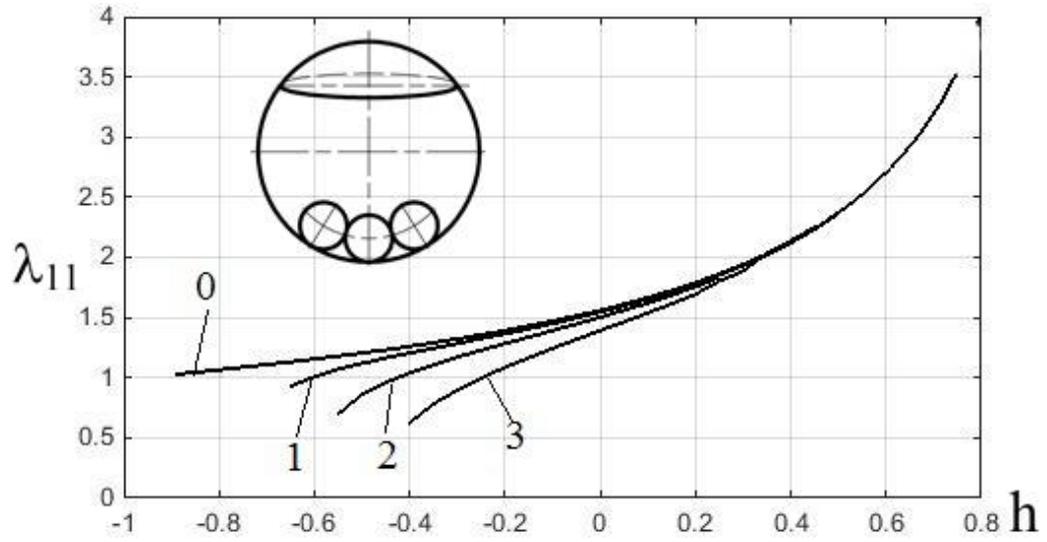


а)

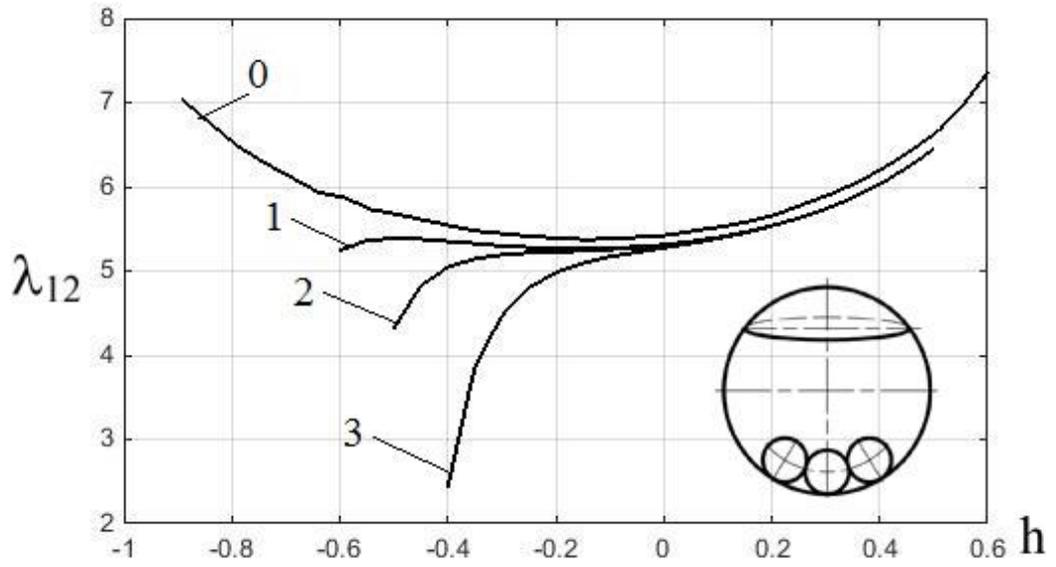


б)

Рис. 2.25. Зависимости собственных значений первого  $\lambda_{11}^{(p)}$  (а) и  $\lambda_{11}^{(кз)}$  (б) от глубины жидкости при  $H_2 = 0,6$ : 0 –  $R_{02} = 0$ ; 1 –  $R_{02} = 0,3$



а)



б)

Рис. 2.26. Зависимости собственных значений первого  $\lambda_{11}^{(кз)}$  (а) и второго тона  $\lambda_{12}^{(кз)}$  (б) от глубины жидкости: 0 –  $R_{03} = 0$ ; 1 –  $R_{03} = 0,1$ ; 2 –  $R_{03} = 0,15$ ; 3 –  $R_{03} = 0,2$

## Выводы к главе 2

Малые движения жидкости, частично заполняющей бак и вытекающей через ЗУ, обладают движениями, качественно отличающимися от малых колебаний жидкости при условии непротекания. Малые движения несжимаемой жидкости, протекающей через ЗУ, обладают двумя ветвями собственных значений: дискретным множеством вещественных чисел, и дискретным множеством комплексно-сопряженных чисел, расположенных вблизи мнимой оси. Случаю отрицательных вещественных корней отвечают апериодические движения жидкого топлива. Случаю комплексных корней с отрицательной вещественной частью отвечают затухающие колебания жидкого топлива на свободной поверхности и поверхности слива.

При увеличении расхода и постоянстве обобщенного коэффициента сопротивления коэффициент затухания монотонно увеличивается по модулю. При постоянстве расхода и уменьшении обобщенного коэффициента сопротивления коэффициент затухания стремится к некоторому постоянному значению.

При наличии ВБЭ таких как пусковые баки или шар-баллоны собственные частоты заметно уменьшаются при глубине жидкости меньше половины заполнения.

### **Глава 3. Малые движения жидкости в осесимметричных полостях с заборным устройством в условиях микрогравитации**

Условиями микрогравитации называем условия, при которых полет КЛА происходит по инерции и газовая подушка может размещаться симметрично у верхнего днища. Подобные условия можно называть идеальными. В действительности возможно и другие положения газовой подушки в виде газового пузыря или группы пузырей, расположенных не в центральной части верхнего днища. Одной из причин такого поведения газовой подушки может являться разность температур верхнего и нижнего днища ( $5-6^0\text{C}$ ), вследствие близкого расположения двигательной установки.

В третьей главе представлено решение статической задачи о равновесном положении свободной поверхности и задачи о собственных движениях жидкости в сферических полостях, с граничными условиями на свободной поверхности в слабых гравитационных полях, условиями непротекания на смачиваемых поверхностях и дополнительными динамическими условиями на поверхности с сопротивлением – поверхности слива.

#### **3.1. Построение свободной осесимметричной поверхности равновесия в невозмущенном состоянии $\Gamma_0$**

В этом пункте представлена система уравнений свободной осесимметричной поверхности равновесия жидкости, частично заполняющей сферическую полость, в невозмущенном состоянии при действии слабой гравитационной силы и силы поверхностного натяжения жидкости. Эта система уравнений решена численным методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Введем цилиндрические системы координат  $O r \eta z$  и  $O_1 r_1 \eta_1 z_1$ , начала  $O$  и  $O_1$ , которые находятся в центре бака и в точке пересечения осесимметричной свободной поверхности  $\Gamma_0$  с продольной осью симметрии бака, и будем предполагать, что жидкость во все время находится ниже поверхности  $\Gamma_0$  (рис. 3.1).

Координаты связаны по соотношениям

$$r = r_1, \quad \eta = \eta_1, \quad z = z_{(O_1)} + z_1, \quad (3.1)$$

где  $z_{(O_1)}$  - координата  $O_1$  в СК  $O\eta z$ .

В качестве криволинейных координат на поверхности  $\Gamma_0$  выберем цилиндрическую координату  $\eta$  и длину дуги  $s$ , отсчитываемой от точки  $O_1$  вдоль сечения поверхности  $\Gamma$  полуплоскостью  $\eta = \text{const}$  (рис. 3.1).

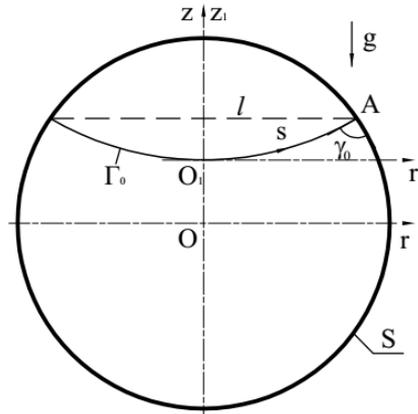


Рис. 3.1. Построение свободной осесимметричной поверхности равновесия

Тогда уравнение осесимметричной поверхности  $\Gamma_0$  в параметрической форме

$$r_1 = r_1(s); \quad z_1 = z_1(s) \quad (3.2)$$

удовлетворяет следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений [4]

$$r_1'' = -z_1' \left( b \cdot z_1 + q - \frac{z_1'}{r_1} \right), \quad z_1'' = r_1' \left( b \cdot z_1 + q - \frac{z_1'}{r_1} \right), \quad 0 \leq s \leq s_A, \quad (3.3)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по  $s$ ,  $r_1'^2 + z_1'^2 = 1$ ,  $b = \rho g \sigma^{-1}$ ,  $q$  - произвольная постоянная,  $\rho$  - плотность жидкости,  $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения. Начальные условия для системы (3.3) имеют вид

$$r_1(0) = 0, \quad r_1'(0) = 1, \quad z_1(0) = 0, \quad z_1'(0) = 0. \quad (3.4)$$

Выбрав в качестве характерного размера радиус  $R_0$  сферического бака и переходя в уравнениях (3.3) к безразмерным переменным (которые мы будем обозначать прежними буквами), получим систему уравнений

$$r_1'' = -z_1' \left( Bo \cdot z_1 + q - \frac{z_1'}{r_1} \right), \quad z_1'' = r_1' \left( Bo \cdot z_1 + q - \frac{z_1'}{r_1} \right), \quad 0 \leq s \leq s_A, \quad (3.5)$$

и начальных условий (3.4). Здесь  $Bo = bR_0^2 = \rho g R_0^2 \sigma^{-1}$  - число Бонда, которое равно отношению гравитационных сил к силам поверхностного натяжения.

Система уравнений (3.5) с начальными условиями (3.4) имеет двухпараметрическое семейство решений (параметрами служат числа  $Bo$  и  $q$ ). Если  $Bo = 0$  (состояние невесомости), то интегральными кривыми системы (3.5) являются окружности радиуса  $R_r = 2|q|^{-1}$ , которые касаются оси  $O_1 r_1$  в начале координат  $O_1$ . В этом случае поверхность  $\Gamma_0$  является частью поверхности сферы. Если же  $q = 0$ , то для любого  $Bo$  решение системы уравнений (3.5) с начальными условиями (3.4) тривиально

$$z_1(s) = 0, \quad r_1(s) = s. \quad (3.6)$$

Этот случай соответствует плоской поверхности  $\Gamma_0$ .

В общем случае при заданных значениях  $Bo$  и  $q$  заметим, что уравнения системы (3.5) имеют особенность в точке  $s = 0$  ( $r = 0$ ), следовательно, интегрировать их непосредственно невозможно (но для решения эта точка является регулярной, т.е. оно в этой точке особенности не имеет). Поэтому для численного исследования, мы находим аналитическое решение систему уравнений (3.5) с начальными условиями (3.4) в виде асимптотических разложений в степенной ряд в достаточно малой окрестности особой точки методом неопределенных коэффициентов [14]

$$\begin{aligned} r_1 &= s - \frac{1}{24} q^2 s^3 + \left( \frac{1}{1920} q^4 - \frac{1}{160} Bo \cdot q^2 \right) s^5 + \\ &+ \left( -\frac{1}{322560} q^6 + \frac{1}{4480} Bo \cdot q^4 - \frac{5}{10752} Bo^2 q^2 \right) s^7, \\ z_1 &= \frac{1}{4} q \cdot s^2 + \left( -\frac{1}{192} q^3 + \frac{1}{64} Bo \cdot q \right) s^4 + \\ &+ \left( \frac{1}{23040} q^5 - \frac{1}{720} Bo \cdot q^3 + \frac{1}{2304} Bo^2 q \right) s^6. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Продифференцируем соотношения (3.7) и получим выражения для первых производных решений в достаточно малой окрестности нуля

$$\begin{aligned}
 r_1' &= 1 - \frac{1}{8}q^2s^2 + \left( \frac{1}{384}q^4 - \frac{1}{32}Bo \cdot q^2 \right) s^4 + \\
 &+ 7 \left( -\frac{1}{322560}q^6 + \frac{1}{4480}Bo \cdot q^4 - \frac{5}{10752}Bo^2q^2 \right) s^6, \\
 z_1' &= \frac{1}{2}q \cdot s + \left( -\frac{1}{48}q^3 + \frac{1}{16}Bo \cdot q \right) s^3 + \\
 &+ 6 \left( \frac{1}{23040}q^5 - \frac{1}{720}Bo \cdot q^3 + \frac{1}{2304}Bo^2q \right) s^5.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Подставим достаточно малое значение  $s = \tau$  в выражения (3.7), (3.8) и выберем полученные значения в качестве новых начальных условий для системы уравнений (3.5)

$$r_{1\tau} = r_1(\tau), \quad r_{1\tau}' = r_1'(\tau), \quad z_{1\tau} = z_1(\tau), \quad z_{1\tau}' = z_1'(\tau). \tag{3.9}$$

Мы решим систему уравнений (3.5) с начальными условиями (3.9) численным методом Рунге-Кутты четвертого порядка по шагу  $ds$  с верхней границей  $r_A^2 + z_A^2 = 1$ .

### ***Определение объема, центра масс жидкости относительно центра бака***

Объем жидкости, заполненной в баке, определен по интегральной формуле

$$V_0 = \int_0^{2\pi} d\eta \int_{-1}^{z_{(A)}} dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r dr - \int_0^{2\pi} d\eta \int_{z_{(O)}}^{z_{(A)}} dz \int_0^{r(z)} r dr = V_{01} - V_{02}, \tag{3.10}$$

где

$$V_{01} = \int_0^{2\pi} d\eta \int_{-1}^{z_{(A)}} dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r dr = \pi \left( z_{(A)} + 1 - \frac{z_{(A)}^3 + 1}{3} \right), \tag{3.11}$$

$$V_{02} = \int_0^{2\pi} d\eta \int_{z_{(O)}}^{z_{(A)}} dz \int_0^{r(z)} r dr = \pi \int_{z_{(O)}}^{z_{(A)}} r^2(z) dz = \pi \int_0^{s_A} r^2(s) z'(s) ds, \tag{3.12}$$

т.к.  $dz = z'(s)ds$ ,  $z_{(O)} = z(0)$ ,  $z_{(A)} = z(s_A)$ .

Статический момент жидкости, заполненной в баке, относительно плоскости  $z = 0$ , определен по интегральной формуле

$$S_O = \int_0^{2\pi} d\eta \int_{-1}^{z_{(A)}} z dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r dr - \int_0^{2\pi} d\eta \int_{z_{(O)}}^{z_{(A)}} z dz \int_0^{r(z)} r dr = S_O^{(1)} - S_O^{(2)}, \quad (3.13)$$

$$S_O^{(1)} = \int_0^{2\pi} d\eta \int_{-1}^{z_{(A)}} z dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r dr = \pi \left( \frac{z_{(A)}^2 - 1}{2} - \frac{z_{(A)}^4 - 1}{4} \right), \quad (3.14)$$

$$S_O^{(2)} = \int_0^{2\pi} d\eta \int_{z_{(O)}}^{z_{(A)}} z dz \int_0^{r(z)} r dr = \pi \int_{z_{(O)}}^{z_{(A)}} r^2(z) z dz = \pi \int_0^{s_A} r^2(s) z(s) z'(s) ds. \quad (3.15)$$

Координата центра масса жидкости определена по отношению

$$z_c = \frac{S_O}{V_0} = \frac{\left( \frac{z_{(A)}^2 - 1}{2} - \frac{z_{(A)}^4 - 1}{4} \right) - \int_0^{s_A} r^2(s) z(s) z'(s) ds}{\left( z_{(A)} + 1 - \frac{z_{(A)}^3 + 1}{3} \right) - \int_0^{s_A} r^2(s) z'(s) ds}. \quad (3.16)$$

Относительный объем жидкости к объему бака

$$V = \frac{V_0}{V_{\text{бак}}} = \frac{\pi \left[ \left( z_{(A)} + 1 - \frac{z_{(A)}^3 + 1}{3} \right) - \int_0^{s_A} r^2(s) z'(s) ds \right]}{\frac{4}{3} \pi} = \frac{3}{4} \left[ \left( z_{(A)} + 1 - \frac{z_{(A)}^3 + 1}{3} \right) - \int_0^{s_A} r^2(s) z'(s) ds \right]. \quad (3.17)$$

Введем следующие обозначения:  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\theta$  - углы наклона касательных  $\Gamma$  и  $S$  в точке  $A$  и радиуса  $OA$  к горизонтали, соответственно.

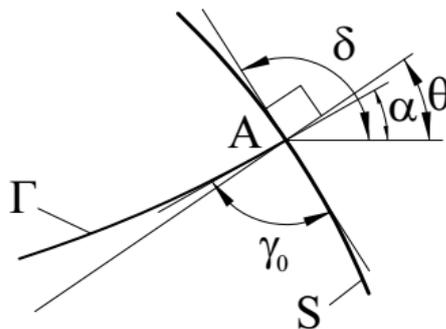


Рис. 3.2. Определение угла смачивания

Определим угол смачивания в нескольких случаях

$$1) \text{ Если } r'_A \geq 0: \alpha = \text{artag}\left(\frac{z'_A}{r'_A}\right), \theta = \text{artag}\left(\frac{z_A}{r_A}\right)$$

$$\begin{cases} \delta = \frac{\pi}{2} + \theta \\ \delta = \gamma_0 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \gamma_0 = \frac{\pi}{2} + \theta - \alpha = \frac{\pi}{2} + \text{artag}\left(\frac{z_A}{r_A}\right) - \text{artag}\left(\frac{z'_A}{r'_A}\right) \quad (\text{рис. 3.3}). \quad (3.18)$$

$$2) \text{ Если } r'_A < 0: \alpha = \pi + \text{artag}\left(\frac{z'_A}{r'_A}\right), \theta = \text{artag}\left(\frac{z_A}{r_A}\right)$$

$$\begin{cases} \delta = \frac{\pi}{2} + \theta \\ \delta = \gamma_0 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \gamma_0 = \frac{\pi}{2} + \theta - \alpha = -\frac{\pi}{2} + \text{artag}\left(\frac{z_A}{r_A}\right) - \text{artag}\left(\frac{z'_A}{r'_A}\right). \quad (3.19)$$

На рис. 3.3 представлены формы свободной поверхности воды в стальном сферическом баке (угол смачивания  $\gamma_0 = 80^\circ$ ).

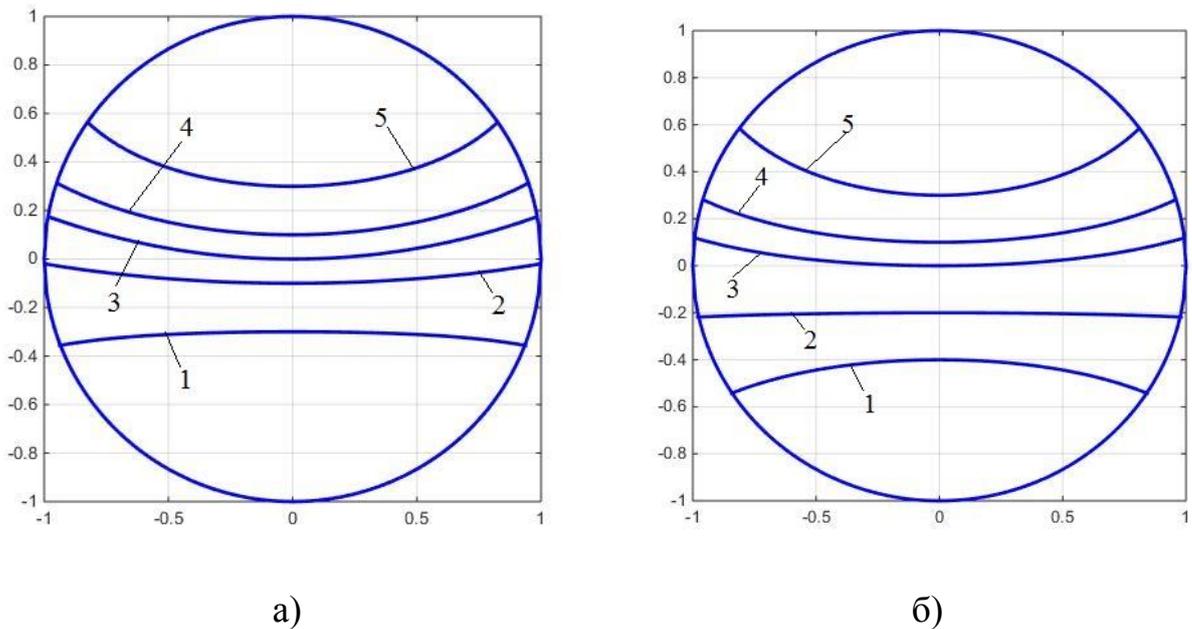


Рис. 3.3. Поверхности равновесия

а) 1 -  $V = 0,2655$ ,  $Bo = 10$ ; 2 -  $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; 3 -  $V = 0,5656$ ,  $Bo = 0$ ; 4 -  $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; 5 -  $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$

б)  $Bo = 4$ : 1 -  $V = 0,1736$ ; 2 -  $V = 0,3460$ ; 3 -  $V = 0,5410$ ; 4 -  $V = 0,6373$ ; 5 -  $V = 0,8105$

### 3.2. Малые движения жидкости в осесимметричной полости с заборным устройством в условиях микрогравитации

Будем рассматривать малые движения идеальной несжимаемой жидкости, частично заполненной в неподвижной полости осесимметричной формы и вытекающей через заборное устройство, при действии слабых гравитационных сил и сил поверхностного натяжения (рис. 3.4).

За невозмущённое состояние примем установившееся движение жидкости, характеризуемое скоростью опускания  $V_{0\Gamma}$  невозмущённой свободной поверхности  $\Gamma_0$  и скоростью  $V_{0\Sigma}$  на поверхности слива  $\Sigma$ . Полагаем, что вектор  $\vec{g}$  интенсивности гравитационной силы направлен вдоль оси симметрии полости.

Рассматриваемую задачу будем изучать в неподвижной системе координат  $Oxyz$  с началом на оси вращения полости,  $Oz$  - ось симметрии полости.

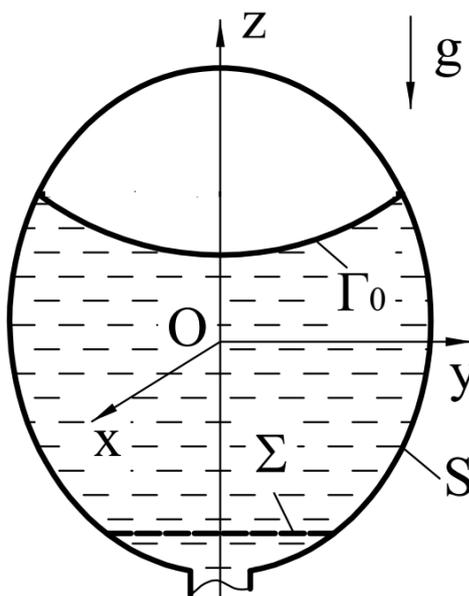


Рис. 3.4. Малые движения жидкости в осесимметричной полости с ЗУ

Уравнением установившегося движения жидкости будет служить уравнение Эйлера

$$\vec{V}^{(0)} \cdot \nabla \vec{V}^{(0)} = -\frac{1}{\rho} \nabla p_0 - \nabla \Pi_0, \quad (3.20)$$

где  $\vec{V}^{(0)}$  - скорость установившегося движения частиц жидкости,  $\Pi_0$  и  $p_0$  - потенциал массовых сил и давление в невозмущенном состоянии.

Перепады давления на свободной поверхности  $\Gamma_0$  и поверхности слива  $\Sigma$  в невозмущенном состоянии запишутся в виде

$$p_{\Gamma_0} - p_a = -2\sigma H \quad \text{на } \Gamma_0, \quad (3.21)$$

$$p_{\Sigma^+} - p_{\Sigma^-} = \zeta \rho \frac{(V_{\Sigma}^{(0)})^2}{2} \quad \text{на } \Sigma, \quad (3.22)$$

где  $p_{\Gamma_0}, p_a = cont$  - давления под и над свободной поверхностью,  $p_{\Sigma^+}, p_{\Sigma^-}$  - соответственно давления жидкости перед поверхностью слива и за поверхностью,  $H = \frac{(k_1 + k_2)}{2}$  - средняя кривизна поверхности  $\Gamma_0$ ,  $k_1$  и  $k_2$  - главные кривизны поверхности  $\Gamma_0$ , причем  $k_1$  - кривизна линии пересечения  $\Gamma_0$  с плоскостью  $(r, z)$ ,  $\zeta$  - коэффициент гидравлического сопротивления ЗУ, отнесённый к скорости  $\vec{V}_{\Sigma}^{(0)}$ ,  $\vec{V}_{\Sigma}^{(0)} - \vec{V}^{(0)}$  на поверхности слива.

Рассмотрим малые колебания жидкости, близкие к состоянию невозмущённого движения. Предположим, что в возмущённом движении поле смещений, поле скоростей частиц жидкости приобретает малые отклонения  $\vec{w}(x, y, z, t), \vec{V}(x, y, z, t)$  от их невозмущённых значений. Будем считать малые отклонения величинами первого порядка малости. Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости и выше, имеем

$$\vec{V} = \dot{\vec{w}}, \quad \vec{V}_{oa} = \vec{V}^{(0)} + \vec{V}. \quad (3.23)$$

Здесь  $\vec{V}_{oa}$  - абсолютная скорость частиц жидкости в возмущённом состоянии.

В окрестности равновесной поверхности  $\Gamma_0$  введем криволинейную систему координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  так, чтобы поверхность  $\Gamma_0$  имела уравнение  $\xi_3 = 0$  а координатные линии  $\xi_3$  были при  $\xi_3 = 0$  направлены по нормали к

поверхности  $\Gamma_0$ . Тогда возмущенная свободная поверхность  $\Gamma$  жидкости будет иметь уравнение

$$\xi_3 = N(\xi_1, \xi_2, t), \quad (3.24)$$

где  $N$  - отклонение  $\Gamma$  от  $\Gamma_0$  по нормали.

Примем, что в состоянии возмущённого движения жидкости потенциал массовых сил  $\Pi$  и давление  $p$  состоят из двух слагаемых

$$\begin{aligned} \Pi(x, y, z, t) &= \Pi_0(x, y, z) + \delta\Pi(x, y, z, t), \\ p(x, y, z, t) &= p_0(x, y, z) + \delta p(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (3.25)$$

где  $\Pi_0$ ,  $p_0$  - отвечают состоянию равновесия в (3.20), а  $\delta\Pi$ ,  $\delta p$  - вариации, отвечающие возмущенному состоянию.

Вариации перепадов давлений на поверхностях  $\Gamma$  и  $\Sigma$  в возмущенном состоянии принимают вид

$$\delta p_\Gamma = \delta(-2\sigma H) = -\sigma \cdot \delta(k_1 + k_2) \text{ на } \Gamma, \quad (3.26)$$

$$\delta p_\Sigma = \zeta \rho \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \vec{V} = \gamma \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_\Sigma \text{ на } \Sigma, \quad (3.27)$$

где  $\vec{n}_\Sigma$  внешние нормали к поверхности  $\Sigma$ ,  $\gamma$  - обобщённый коэффициент сопротивления поверхности слива  $\gamma = \zeta V^{(0)}(0)$ .

Возмущенное движение жидкости в баке можно описать уравнением

$$\frac{\partial \vec{V}_{oa}}{\partial t} + \vec{V}_{oa} \cdot \nabla \vec{V}_{oa} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Pi. \quad (3.28)$$

Предполагаем возмущенное движение жидкости потенциальным т.е.  $\nabla \times \vec{V}_{oa} = 0$ . Преобразуем уравнение (3.28), воспользовавшись известным соотношением векторного анализа

$$\nabla \left( \frac{1}{2} \vec{V}^2 \right) = \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}). \quad (3.29)$$

Тогда вместо (3.28) можно записать

$$\frac{\partial \vec{V}_{oa}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} \vec{V}_{oa}^2 \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Pi. \quad (3.30)$$

Поставляя выражения (3.25) в (3.30), пренебрегая слагаемые второго порядка малости и выше, получаем для возмущённого состояния уравнение движения жидкости

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla(\vec{V}^{(0)} \cdot \vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \delta p - \nabla \delta \Pi. \quad (3.31)$$

### 3.3. Постановка краевой задачи для потенциала скоростей

Введем потенциал возмущенной скорости – функцию  $\Phi(x, y, z, t)$ . При малых движениях жидкости имеем

$$\vec{w}(x, y, z, t) = \int \nabla \Phi(x, y, z, t) dt, \quad \vec{V}(x, y, z, t) = \nabla \Phi(x, y, z, t). \quad (3.32)$$

Подставив выражения (3.32) в уравнение (3.31), получим линейризованный интеграл Коши-Лагранжа, выраженный через потенциал скоростей

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \delta p + \delta \Pi = c(t), \quad (3.33)$$

где  $c(t)$  - произвольная функция времени. Не ограничивая общность, функцию  $c(t)$  можно считать равной нулю.

Из уравнения (3.33), используя выражение (3.26), получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_{\Gamma}^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \delta \left( \Pi - \frac{\sigma}{\rho} (k_1 + k_2) \right) = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad (3.34)$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_{\Gamma}^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \frac{\sigma}{\rho} \delta \left( \frac{\rho}{\sigma} \Pi - k_1 - k_2 \right) = 0 \text{ на } \Gamma_0. \quad (3.35)$$

Воспользовавшись известным соотношением на  $\Gamma_0$  [4]

$$\delta \left( \frac{\rho}{\sigma} \Pi - k_1 - k_2 \right) = \frac{\rho}{\sigma} \frac{\partial \Pi}{\partial n} N - (k_1^2 + k_2^2) N - \Delta_{\Gamma} N, \quad (3.36)$$

имели граничное условие в возмущенном состоянии на поверхности  $\Gamma_0$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_{\Gamma}^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \frac{\sigma}{\rho} (aN - \Delta_{\Gamma} N) = 0, \quad (3.37)$$

где  $a = \left( \frac{\rho}{\sigma} \frac{\partial \Pi}{\partial n_\Gamma} - k_1^2 - k_2^2 \right) N$ ,  $\Delta_\Gamma$  - оператор Лапласа – Бельтрами на  $\Gamma_0$ .

Аналогично, поставив выражение (3.27) в (3.33), получил граничное условие на поверхности слива  $\Sigma$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \gamma \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \cdot \vec{n}_\Sigma = 0. \quad (3.38)$$

Используя уравнение неразрывности, условие непротекания, краевое условие за линии контакта, начальные условия и получаем эволюционную задачу для потенциала  $\Phi$

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Gamma^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \frac{\sigma}{\rho} (aN - \Delta_\Gamma N) &= 0 \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial N}{\partial \nu} + \mu N &= 0 \text{ на } l, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \gamma \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \cdot \vec{n}_\Sigma &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \vec{w}_\Gamma &= \vec{w}_\Gamma^0, \quad \vec{w}_\Sigma = \vec{w}_\Sigma^0, \quad \frac{\partial \vec{w}_\Gamma}{\partial t} = \vec{V}_\Gamma^0, \quad \frac{\partial \vec{w}_\Sigma}{\partial t} = \vec{V}_\Sigma^0 \text{ при } t = 0, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где  $\mu = \frac{k_1 \cos \gamma_0 - k}{\sin \gamma_0}$ ,  $\frac{\partial}{\partial n}$  - производная по внешней нормали к области заполнения жидкостью  $\tau$ ,  $l$  - линия пересечения  $\Gamma_0$  с стенкой бака,  $n$  - внешняя нормаль к  $\Gamma_0 + S$ ,  $\nu$  - внешняя нормаль к контуру  $l$  в плоскости, касательной к  $\Gamma_0$ ,  $k$  - кривизна меридионального сечения бака,  $\vec{w}_\Gamma^0$ ,  $\vec{w}_\Sigma^0$ ,  $\vec{V}_\Gamma^0$ ,  $\vec{V}_\Sigma^0$  - начальные значения смещения и скорости частиц жидкости.

#### 3.4. Малые движения жидкости в сферической полости с заборным устройством – сферическая поверхность слива

В качестве примера рассмотрим задачу о собственных движениях жидкости, вытекающей через заборные устройства из сферической полости с

радиусом  $R_0$  при наличии свободной поверхности, в условиях микрогравитации. Поверхность слива  $\Sigma$  представляет собой полную смачиваемую сферическую поверхность, имитирующую тотальную КСОЖ, упрощенная схема которой приведена в пункте 1.5 (рис. 3.5). Начало системы  $Oxuz$  выбрано в центре сферы.

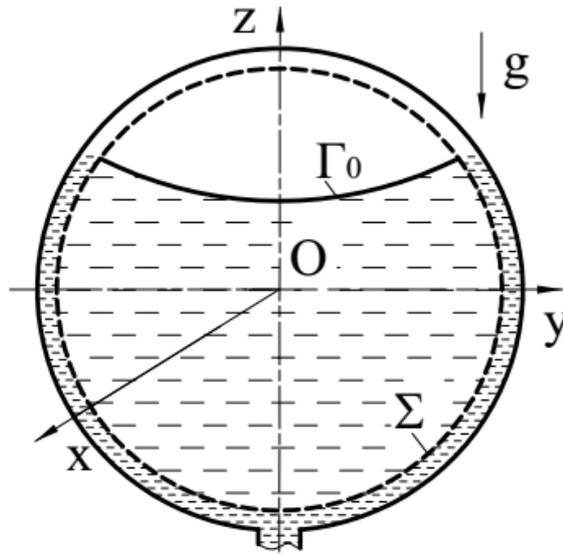


Рис. 3.5. Малые движения жидкости в сферической полости с ЗУ

Задача для определения потенциала скоростей  $\Phi(x, y, z, t)$  в том случае запишется в виде

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в } \tau,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Gamma} \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Gamma} + \frac{\sigma}{\rho} \left[ a \int_t \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Gamma} dt - \Delta_\Gamma \int_t \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Gamma} dt \right] = 0 \text{ на } \Gamma_0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + V_{0\Sigma} \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Sigma} + \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Sigma} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial\Phi}{\partial n} + \mu \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } l,$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi^0(x, y, z, t) \text{ при } t = 0.$$

Введем безразмерные переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{R_0}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\sqrt{\sigma/\rho R_0}}, \quad \bar{V}_{0\Gamma} = \frac{V_{0\Gamma}}{\sqrt{\sigma/\rho R_0}}, \quad \bar{V}_{0\Sigma} = \frac{V_{0\Sigma}}{\sqrt{\sigma/\rho R_0}},$$

$$\bar{a} = aR_0^2, \bar{t} = \frac{t}{\sqrt{\rho R_0^3 / \sigma}}, \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\sqrt{\sigma / \rho R_0^3}}, \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{\sqrt{\sigma R_0 / \rho}}, \bar{G} = \frac{V_{0\Gamma} r_A^2}{R_0^2 \sqrt{\sigma / \rho R_0}}. \quad (3.41)$$

цилиндрическую и сферическую системы координат  $(r, \eta, z)$  и  $(R, \theta, \eta)$ .

Здесь  $\Omega$  - комплексная частота волновых движений жидкости,  $\bar{G}$  - безразмерный расход топлива. Далее знак «-» над безразмерными переменными будем опускать.

Перепишем систему (3.40) в безразмерном виде

$$\Delta \Phi = 0 \text{ в } \tau,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - V_{0\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial n_\Gamma} + \left[ a \int_i \frac{\partial \Phi}{\partial n_\Gamma} dt - \Delta_\Gamma \int_i \frac{\partial \Phi}{\partial n_\Gamma} dt \right] = 0 \text{ на } \Gamma_0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + V_{0\Sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial R} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } l,$$

$$\Phi(r, \eta, z, t) = \Phi^{(0)}(r, \eta, z, t) \text{ при } t = 0.$$

Потенциал скорости  $\Phi(r, \eta, z, t)$  будем искать в виде суммы двух функций

$$\Phi(r, \eta, z, t) = \Phi^{(1)}(r, \eta, z, t) + \Phi^{(2)}(r, \eta, z, t), \quad (3.43)$$

где

$$\Phi^{(1)}(r, \eta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m^{(1)}(r, \eta, z, t), \quad \Phi^{(2)}(r, \eta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m^{(2)}(r, \eta, z, t), \quad (3.44)$$

а функции  $\Phi_m^{(1)}(r, \eta, z, t)$ ,  $\Phi_m^{(2)}(r, \eta, z, t)$  представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_m^{(1)}(r, \eta, z, t) &= \Phi_m^{(1)}(r, \eta, z) \dot{s}(t) = \varphi_m^{(1)}(r, z) H_m(\eta) \dot{s}_m(t), \\ \Phi_m^{(2)}(r, \eta, z, t) &= \Phi_m^{(2)}(r, \eta, z) \dot{p}(t) = \varphi_m^{(2)}(r, z) H_m(\eta) \dot{p}_m(t). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Здесь функцию  $H_m(\eta)$  имеет вид (2.26), собственные функции  $\Phi_m^{(1)}(r, \eta, z)$  и  $\Phi_m^{(2)}(r, \eta, z)$  определяемые из спектральных задач на собственные значения

$$1) \Delta \Phi_m^{(1)} = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial \Phi_m^{(1)}}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma,$$

$$\frac{\partial \Phi_m^{(1)}}{\partial n} = \lambda_m^{(1)} B_m^{-1} \Phi_m^{(1)} \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial \Phi_m^{(1)}}{\partial n} + \mu \frac{\partial \Phi_m^{(1)}}{\partial n} = 0 \text{ на } l, \quad (3.46)$$

где  $\lambda_m^{(1)}$  - собственное значение задачи (3.46),  $B_m^{-1}$  - оператор, обратный к неограниченному самосопряженному оператору потенциальной энергии  $B_m$  [37],

$$2) \Delta \Phi_m^{(2)} = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial \Phi_m^{(2)}}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial \Phi_m^{(2)}}{\partial n} = \lambda_m^{(2)} \Phi_m^{(2)} \text{ на } \Sigma, \quad (3.47)$$

где  $\lambda_m^{(2)}$  - собственное значение задачи (3.47), а  $s_m(t)$  и  $p_m(t)$  - обобщенные координаты волновых движений жидкости на свободной поверхности и поверхности слива,  $m = 0, 1, 2, \dots$

Эквивалентные вариационные формулировки спектральных задач (3.46) и (3.47): найти минимум функционалов

$$J_{(1)}(\Phi_m^{(1)}) = \int_{\tau} (\nabla \Phi_m^{(1)})^2 d\tau - \lambda_m^{(1)} \int_{\Gamma_0} (B_m^{-1} \Phi_m^{(1)}) \Phi_m^{(1)} d\Gamma, \quad (3.48)$$

$$J_{(2)}(\Phi_m^{(2)}) = \int_{\tau} (\nabla \Phi_m^{(2)})^2 d\tau - \lambda_m^{(2)} \int_{\Sigma} (\Phi_m^{(2)})^2 d\Sigma. \quad (3.49)$$

Приближенные решения вариационных задач (3.48) и (3.49) найдены методом Ритца в виде

$$\Phi_m^{(1)}(r, \eta, z) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}^{(1)}(r, z) \right) H_m(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^M a_{mnk} U_{mk}(r, z)}{\sum_{k=1}^M a_{mnk} \left( \frac{\partial U_{mk}(r, z)}{\partial n_{\Gamma}} \right)_{\substack{r=r_A \\ z=z_A}}} H_m(\eta), \quad (3.50)$$

$$\Phi_m^{(2)}(r, \eta, z) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}^{(2)}(r, z) \right) H_m(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^M b_{mnk} U_{mk}(r, z)}{\sum_{k=1}^M a_{mnk} \left( \frac{\partial U_{mk}(r, z)}{\partial n_{\Gamma}} \right)_{\substack{r=r_A \\ z=z_A}}} H_m(\eta), \quad (3.51)$$

где  $U_{mk} = R^k P_k^{(m)}(\cos\theta)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,  $P_k^{(m)}(\cos\theta)$  - присоединенные функции Лежандра степени  $m$ ,  $\{a_{mk}\}_{k=1}^M$ ,  $\{b_{mk}\}_{k=1}^M$  - собственные векторы двух системы линейных уравнений

$$\sum_{l=1}^M a_{ml} \left( p_{mkl}^{(1)} - \lambda_m^{(1)} q_{mkl}^{(1)} \right) = 0, \quad (3.52)$$

$$\sum_{l=1}^M b_{ml} \left( p_{mkl}^{(2)} - \lambda_m^{(2)} q_{mkl}^{(2)} \right) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, M)$$

соответственно. Здесь

$$p_{mkl}^{(1)} = \int_{\Gamma_0} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Sigma} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} d\Sigma = \int_0^{s_A} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} r ds + \int_{\theta_0}^{\pi} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} \sin \theta d\theta,$$

$$q_{mkl}^{(1)} = \int_0^{s_A} (B_m^{-1} U_{mk}) U_{ml} r ds, \quad p_{mkl}^{(2)} = p_{mkl}^{(1)}, \quad q_{mkl}^{(2)} = \int_{\theta_0}^{\pi} U_{mk} U_{ml} \sin \theta d\theta, \quad (3.53)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad l = 1, 2, \dots, M,$$

$$\text{где } \theta_0 = \arccos \left( \frac{z_A}{R_0} \right).$$

Окончательно, имеем

$$\Phi^{(1)}(r, \eta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}^{(1)}(r, z) H_m(\eta) \dot{s}_{mn}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^M a_{mnk} U_{mk}(r, z)}{\sum_{k=1}^M a_{mnk} \left( \frac{\partial U_{mk}(r, z)}{\partial n_{\Gamma}} \right)_{r=r_A, z=z_A}} H_m(\eta) \dot{s}_{mn}(t)$$

$$\Phi^{(2)}(r, \eta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}^{(2)}(r, z) H_m(\eta) \dot{p}_{mn}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^M b_{mnk} U_{mk}(r, z)}{\sum_{k=1}^M a_{mnk} \left( \frac{\partial U_{mk}(r, z)}{\partial n_{\Gamma}} \right)_{r=r_A, z=z_A}} H_m(\eta) \dot{p}_{mn}(t) \quad (3.54)$$

Поставив (3.54) в первое и второе граничные условия системы (3.42),

получим

$$\Phi_{mn}^{(1)} \ddot{s}_{mn} + \Phi_{mn}^{(2)} \ddot{p}_{mn} - V_{0\Gamma} \left( \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial z_A} + \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \right) \dot{s}_{mn} - V_{0\Gamma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z_A} \dot{p}_{mn} +$$

$$+ \left[ a \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} H_m - \Delta_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \right] s_{mn} = 0, \quad (3.55)$$

$$\Phi_{mn}^{(1)} \ddot{s}_{mn} + \Phi_{mn}^{(2)} \ddot{p}_{mn} - V_{0\Gamma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial z_A} \dot{s}_{mn} - \left( V_{0\Gamma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z_A} - (V_{0\Sigma} + \gamma) \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial R} \right) \dot{p}_{mn} = 0.$$

Умножим первое уравнение (3.55) на  $\left(\Phi_{mn}^{(1)}(r, \eta, z) / \partial n_{\Gamma_0}\right)$ , а второе уравнение (3.55) на  $\left(\Phi_{mn}^{(2)}(r, \eta, z) / \partial R\right)$  и проинтегрируем по поверхностям  $\Gamma_0$  и  $\Sigma$ ,

соответственно. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \mu_{mn}^{(1s)} \ddot{s}_{mn} + \mu_{mn}^{(1p)} \ddot{p}_{mn} + V_{0\Gamma} \delta_{mn}^{(1)} \dot{s}_{mn} + V_{0\Gamma} \varepsilon_{mn}^{(1)} \dot{p}_{mn} + c_{mn} s_{mn} &= 0, \\ \mu_{mn}^{(2p)} \ddot{p}_{mn} + \mu_{mn}^{(2s)} \ddot{s}_{mn} + V_{0\Gamma} \varepsilon_{mn}^{(2)} \dot{s}_{mn} + [V_{0\Gamma} \delta_{mn}^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_{mn}^{(1)}] \dot{p}_{mn} &= 0, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{mn}^{(1s)} &= \int_{\Gamma} \Phi_{mn}^{(1)} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} d\Gamma = \pi \int_0^{s_A} \varphi_{mn}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} r ds, \\ \mu_{mn}^{(1p)} &= \int_{\Gamma} \Phi_{mn}^{(2)} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} d\Gamma = \pi \int_0^{s_A} \varphi_{mn}^{(2)} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} r ds, \\ \delta_{mn}^{(1)} &= - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial z_A} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} + \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \right) d\Gamma = - \pi \int_0^{s_A} \left( \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z_A} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} + \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \right) r ds, \\ \varepsilon_{mn}^{(1)} &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z_A} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} d\Gamma = - \pi \int_0^{r_0} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial z_A} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} r dr, \\ c_{mn} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{s_A} \left( a \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} - \Delta_{\Gamma} \left( \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \right) \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \right) r ds d\eta = \mu_{mn}^{(1s)} \lambda_{mn}^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \mu_{mn}^{(2s)} &= \int_{\Sigma} \Phi_{mn}^{(1)} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial R} d\Sigma = \pi \int_{\theta_0}^{\pi} \varphi_{mn}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial R} \sin \theta d\theta = \mu_{mn}^{(1p)}, \\ \mu_{mn}^{(2p)} &= \int_{\Sigma} \Phi_{mn}^{(2)} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial R} d\Sigma = \pi \int_{\theta_0}^{\pi} \varphi_{mn}^{(2)} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial R} \sin \theta d\theta, \\ \varepsilon_{mn}^{(2)} &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial z_A} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial R} d\Sigma = - \pi \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z_A} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial R} \sin \theta d\theta = \varepsilon_{mn}^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\delta_{mn}^{(2)} = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z_A} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial R} d\Sigma = - \pi \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial z_A} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial R} \sin \theta d\theta,$$

$$\sigma_{mn}^{(2)} = \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial R} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial R} d\Sigma = \pi \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial R} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial R} \sin \theta d\theta.$$

Для определения собственных частот рассматриваемой механической системы положим обобщенные координаты в виде

$$s_{mn} = A_{(s)mn} e^{\Omega t}, \quad p_{mn} = A_{(p)mn} e^{\Omega t}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.58)$$

Заменив выражения (3.58) в уравнения для обобщенных координат (3.56), имеем систему

$$\begin{bmatrix} \mu_{mn}^{(1s)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \delta_{mn}^{(1)} \Omega + c_{mn} & \mu_{mn}^{(1p)} \Omega^2 + \varepsilon_{mn}^{(1)} \Omega \\ \mu_{mn}^{(2s)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \varepsilon_{mn}^{(2)} \Omega & \mu_{mn}^{(2p)} \Omega^2 + [V_{0\Gamma} \delta_{mn}^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_{mn}^{(2)}] \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{(s)mn} \\ A_{(p)mn} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.59)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Характеристическое уравнение системы (3.59) имеет вид

$$\begin{vmatrix} \mu_{mn}^{(1s)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \delta_{mn}^{(1)} \Omega + c_{mn} & \mu_{mn}^{(1p)} \Omega^2 + \varepsilon_{mn}^{(1)} \Omega \\ \mu_{mn}^{(2s)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \varepsilon_{mn}^{(2)} \Omega & \mu_{mn}^{(2p)} \Omega^2 + [V_{0\Gamma} \delta_{mn}^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_{mn}^{(2)}] \Omega \end{vmatrix} = 0, \quad (3.60)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Уравнение (3.60) имеет две ветви решений: действительные корни  $\Omega_1$  и ветвь комплексно сопряженных корней  $\Omega_{2,3}$ .

Отношение двух амплитуд обобщенных координат определено по формулам

$$\frac{A_{(p)mn}}{A_{(s)mn}} = \frac{\mu_{mn}^{(1s)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \delta_{mn}^{(1)} \Omega + c_{mn}}{\mu_{mn}^{(1p)} \Omega^2 + \varepsilon_{mn}^{(1)} \Omega}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.61)$$

Результаты численного решения уравнения (3.60) при  $m=1$ ,  $n=1$ ,  $M=10$  приведены в табл. 3.1 – 3.2.

**Таблица 3.1.** Собственные числа волновых движений жидкости в сферической полости при различных безразмерных расходах жидкости и  $Bo = 2$ ,  $V = 0,6511$

G	$\beta = \gamma^{-1}$	$\Omega_1$	$\Omega_{2,3}$
0	0	-----	$\pm 1,9176i$
0,01	0,5	-7,6711	$-0,1710 \pm 2,4082i$
0,02	0,5	-7,7382	$-0,1726 \pm 2,4056i$
0,04	0,5	-7,8720	$-0,1762 \pm 2,4004i$
0,06	0,5	-8,0051	$-0,1801 \pm 2,3954i$
0,08	0,5	-8,1374	$-0,1843 \pm 2,3907i$
0,1	0,5	-8,2690	$-0,1889 \pm 2,3861i$

**Таблица 3.2.** Собственные числа волновых движений жидкости в сферической полости при безразмерном расходе жидкости  $G = 0,02$ ,  $\beta = \gamma^{-1} = 0,5$

V	$\Omega_1$		$\Omega_{2,3}$	
	при $Bo = 1$	при $Bo = 4$	при $Bo = 1$	при $Bo = 4$
0,1736	-13,4764	-41,3323	$-0,1328 \pm 1,3105i$	$-0,5438 \pm 2,5911i$
0,3460	-10,5909	-22,0441	$-0,1128 \pm 1,3721i$	$-0,4527 \pm 2,7451i$
0,5410	-9,3393	-8,9031	$-0,0977 \pm 1,5639i$	$-0,3542 \pm 3,1845i$
0,6373	-8,0988	-7,6092	$-0,0939 \pm 1,6727i$	$-0,3158 \pm 3,4028i$
0,8105	-6,3333	-6,2285	$-0,0672 \pm 2,0462i$	$-0,1891 \pm 3,8862i$

На рис. 3.6 – 3.10 представлены изменения корней  $\Omega_1$  и  $\Omega_{2,3}$  в зависимости от расхода G и коэффициента  $\beta = \gamma^{-1}$ .

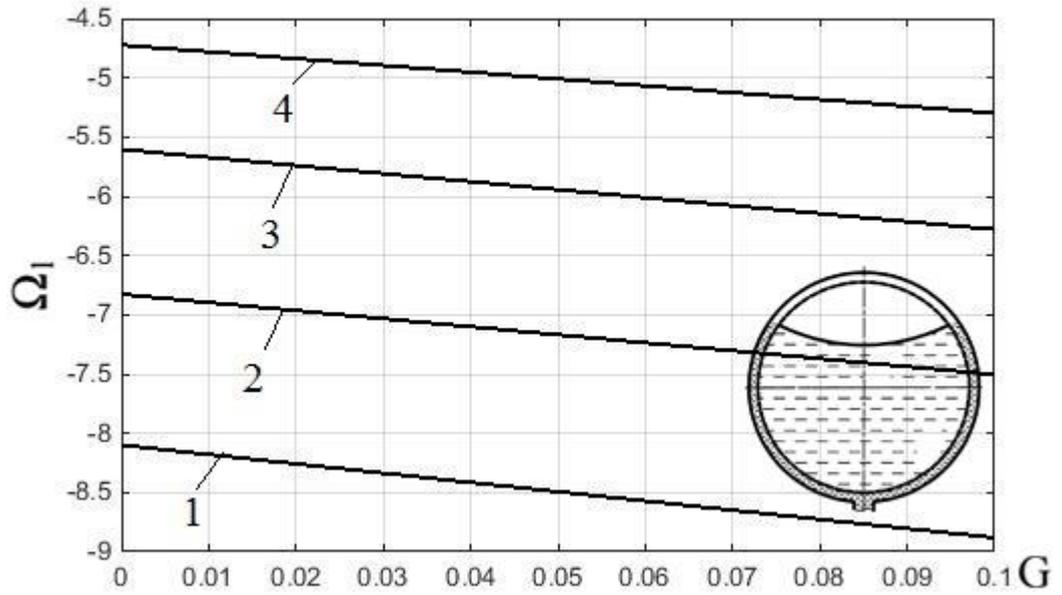


Рис.3.6. Зависимости  $\Omega_1$  от  $G$  при  $\beta = 0,2$ :

1- $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; 2- $V = 0,5659$ ,  $Bo = 0,1$ ; 3- $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; 4-  
 $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$

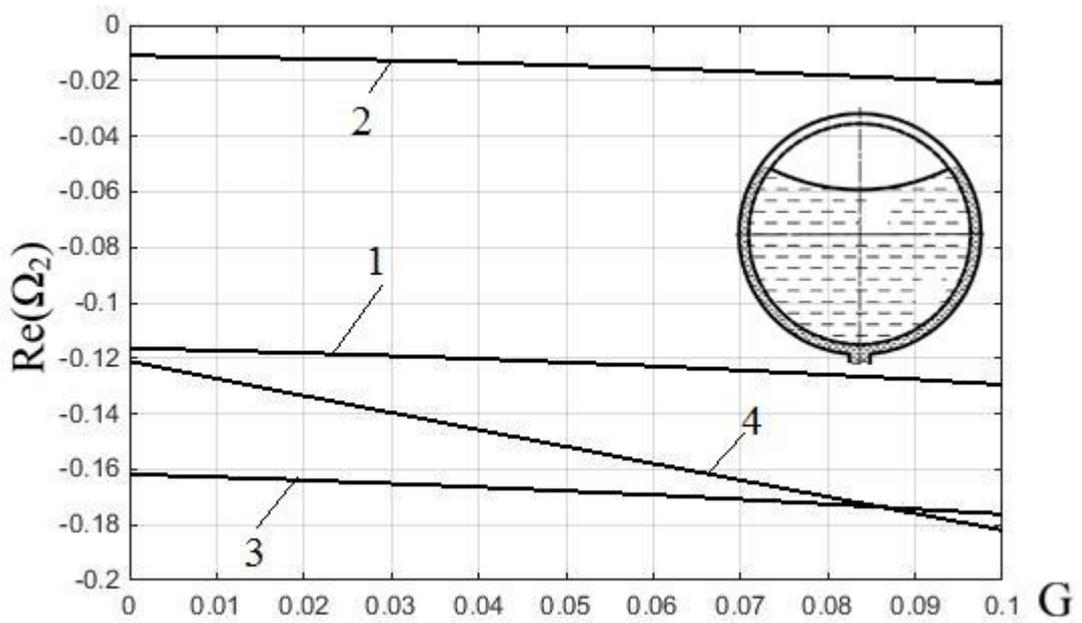


Рис.3.7. Зависимости действительной части  $\Omega_2$  от  $G$  при  $\beta = 0,2$ :

1- $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; 2- $V = 0,5659$ ,  $Bo = 0,1$ ; 3- $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; 4-  
 $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$

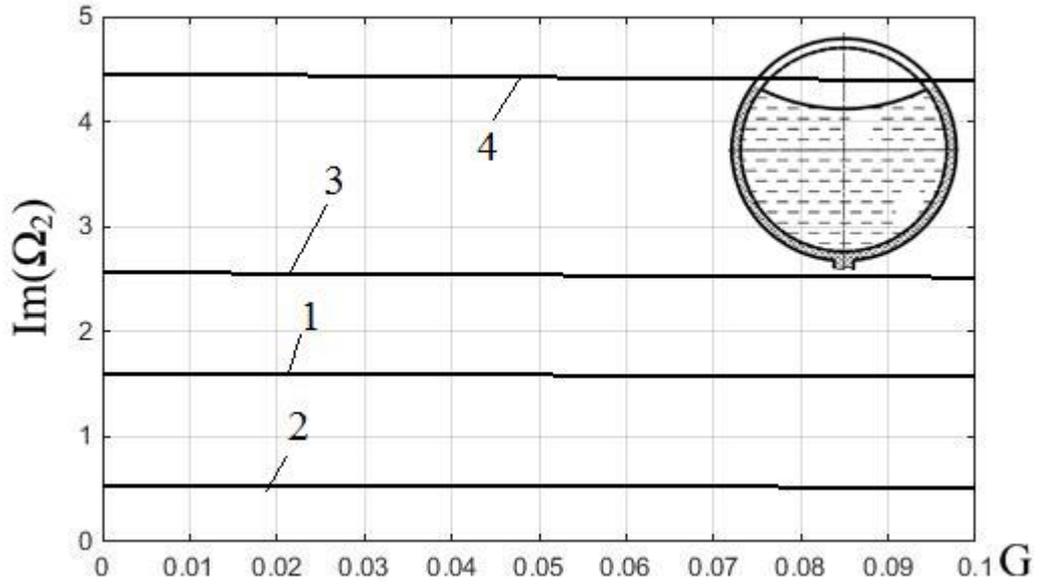


Рис.3.8. Зависимости мнимой части  $\Omega_2$  от  $G$  при  $\beta = 0,2$ :

1- $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; 2- $V = 0,5659$ ,  $Bo = 0,1$ ; 3- $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; 4-  
 $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$

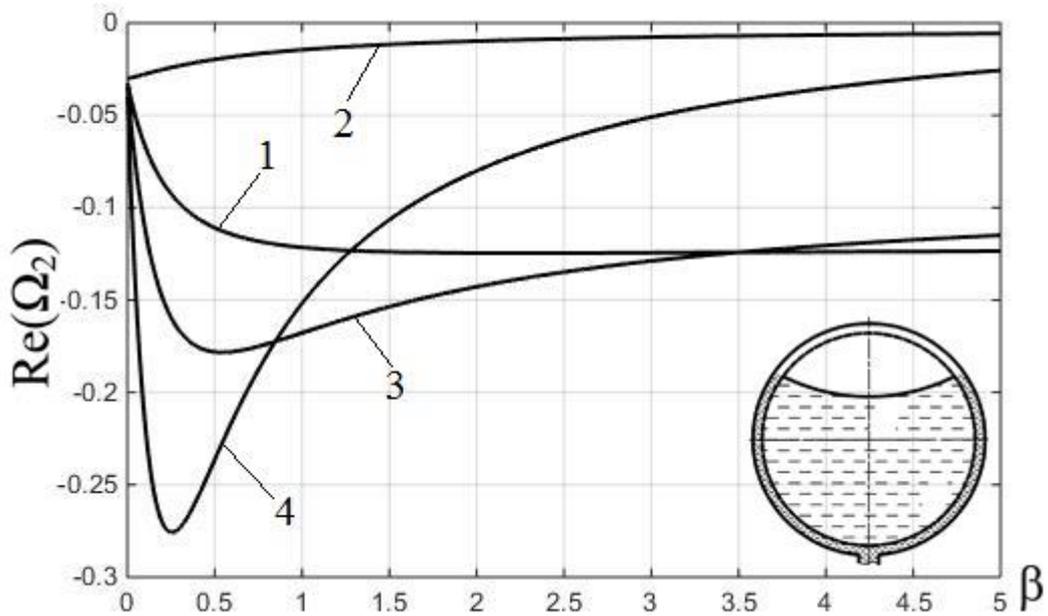


Рис.3.9. Зависимости действительной части  $\Omega_2$  от  $\beta$  при  $G = 0,05$ :

1- $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; 2- $V = 0,5659$ ,  $Bo = 0,1$ ; 3- $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; 4-  
 $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$

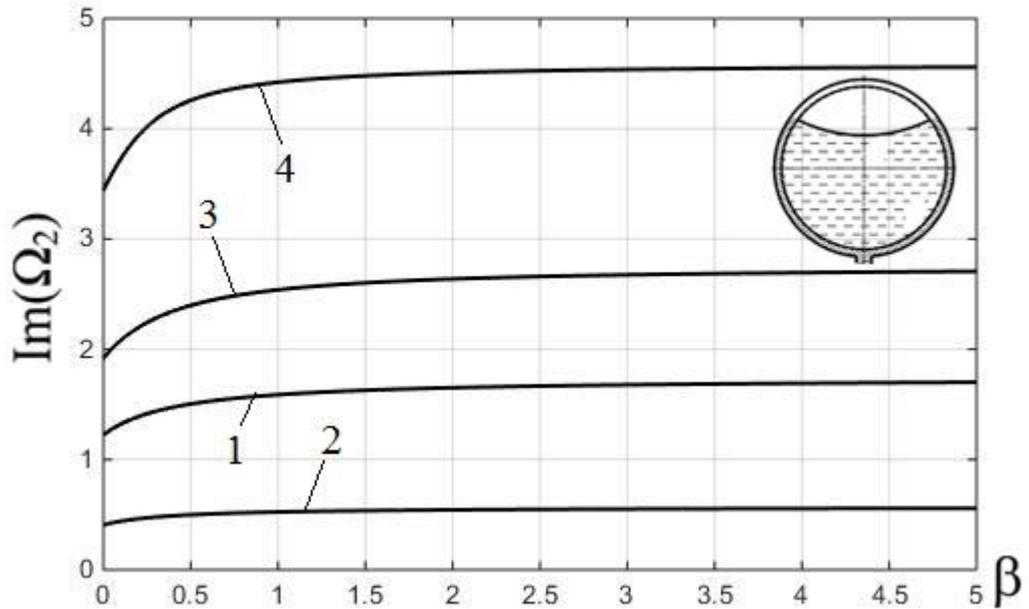


Рис.3.10. Зависимости мнимой части  $\Omega_2$  от  $\beta$  при  $G = 0,05$

1- $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; 2- $V = 0,5659$ ,  $Bo = 0,1$ ; 3- $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; 4-  
 $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$

### 3.5. Малые движения жидкости в сферической полости с заборным устройством – плоская поверхность слива

Рассмотрим случай, когда поверхность слива  $\Sigma$  является плоской, имитирующей локальную КСОЖ, упрощенная схема которой приведена в пункте 1.5 (Рис.3.11).

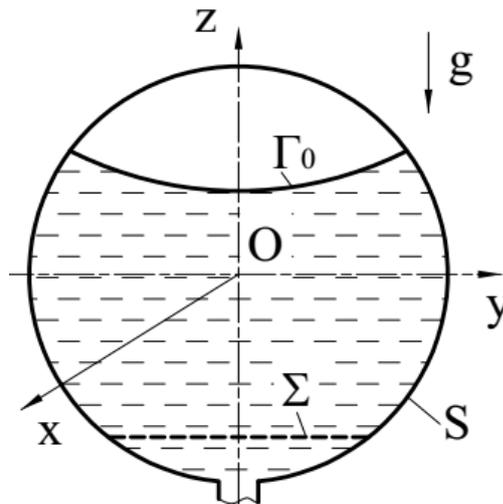


Рис. 3.11. Малые движения жидкости в сферической полости с ЗУ

Введем обозначения:  $h_\Sigma$  - расстояние от центра бака до поверхности слива,

$$r_\Sigma = \sqrt{R_0^2 - h_\Sigma^2} \quad - \quad \text{радиус поверхности слива,} \quad \theta_0 = \arccos\left(\frac{z_A}{R_0}\right) \quad \text{и}$$

$$\theta_\Sigma = \arccos\left(\frac{h_\Sigma}{R_0}\right).$$

Безразмерная форма краевой задачи для определения потенциала скоростей имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Gamma} \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Gamma} + \left[ a \int_t \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Gamma} dt - \Delta_\Gamma \int_t \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Gamma} dt \right] &= 0 \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Sigma} \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial\Phi}{\partial n} + \mu \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= 0 \text{ на } l, \\ \Phi(r, \eta, z, t) &= \Phi^{(0)}(r, \eta, z, t) \text{ при } t = 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

В этом случае составляющие потенциалы  $\Phi^{(1)}(r, \eta, z, t)$ ,  $\Phi^{(2)}(r, \eta, z, t)$  также найдены по формулам (3.54). Постоянные  $a_{ml}, b_{ml}$  - значения собственных векторов систем линейных уравнений (3.52) с коэффициентами

$$\begin{aligned} p_{mkl}^{(1)} &= \int_{\Gamma_0} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} d\Gamma + \int_S U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} dS + \int_\Sigma U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} d\Sigma = \\ &= \int_0^{s_A} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} r ds + \int_{\theta_0}^{\theta_\Sigma} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial n} \sin \theta d\theta - \int_0^{r_\Sigma} U_{mk} \frac{\partial U_{ml}}{\partial z} r dr, \\ q_{mkl}^{(1)} &= \int_0^{s_A} (B_m^{-1} U_{mk}) U_{ml} r ds, \quad p_{mkl}^{(2)} = p_{mkl}^{(1)}, \quad q_{mkl}^{(2)} = \int_0^{r_\Sigma} U_{mk} U_{ml} r dr, \\ m &= 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad l = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.63)$$

Гидродинамические коэффициенты  $\mu_{mn}^{(1s)}$ ,  $\mu_{mn}^{(1p)}$ ,  $\delta_{mn}^{(1)}$ ,  $\varepsilon_{mn}^{(1)}$ ,  $c_{mn}$  в уравнениях (3.56) для обобщенных координат определяются как в (3.57), а остальные вычисляются по следующим интегралам

$$\begin{aligned}
\mu_{mn}^{(2s)} &= \int_{\Sigma} \Phi_{mn}^{(1)} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z} d\Sigma = \pi \int_0^{r_{\Sigma}} \varphi_{mn}^{(1)} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial z} r dr = \mu_{mn}^{(1p)}, \\
\mu_{mn}^{(2p)} &= \int_{\Sigma} \Phi_{mn}^{(2)} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z} d\Sigma = \pi \int_0^{r_{\Sigma}} \varphi_{mn}^{(2)} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial z} r dr, \\
\varepsilon_{mn}^{(2)} &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(1)}}{\partial z_A} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z} d\Sigma = - \pi \int_0^{r_{\Sigma}} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z_A} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial z} r dr = \varepsilon_{mn}^{(1)}, \\
\delta_{mn}^{(2)} &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z_A} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z} d\Sigma = - \pi \int_0^{r_{\Sigma}} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial z_A} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial z} r dr, \\
\sigma_{mn}^{(2)} &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_{mn}^{(2)}}{\partial z} d\Sigma = - \pi \int_0^{r_{\Sigma}} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial z} r dr, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, 3, \dots)
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Результаты численного решения характеристического уравнения (3.60) для этого случая при  $h_{\Sigma} = 0,86$  ( $r_{\Sigma} = 0,5$ ),  $m = 1$ ,  $n = 1$ ,  $M = 10$  приведены в табл. 3.3 – 3.4.

**Таблица 3.3.** Собственные числа волновых движений жидкости в сферической полости при различных безразмерных расходах жидкости и  $Bo = 5$ ,  $V = 0,8124$

G	$\beta = \gamma^{-1}$	$\Omega_1$	$\Omega_{2,3}$
0	0	-----	$\pm 3,4385i$
0,01	0,5	-9,8324	$-0,0142 \pm 3,4447i$
0,02	0,5	-10,1691	$-0,0258 \pm 3,4444i$
0,04	0,5	-10,8426	$-0,0489 \pm 3,4439i$
0,06	0,5	-11,5161	$-0,0721 \pm 3,4432i$
0,08	0,5	-12,1896	$-0,0954 \pm 3,4423i$
0,1	0,5	-12,8631	$-0,1186 \pm 3,4414i$

**Таблица 3.4.** Собственные числа волновых движений жидкости в сферической полости при безразмерном расходе жидкости  $G = 0,02$ ,  $\beta = \gamma^{-1} = 0,5$

V	$\Omega_1$		$\Omega_{2,3}$	
	при $Bo = 1$	при $Bo = 4$	при $Bo = 1$	при $Bo = 4$
0,1736	-10,7425	-10,5736	$-0,0197 \pm 1,1697i$	$-0,0660 \pm 2,3762i$
0,3460	-10,1879	-10,1649	$-0,0097 \pm 1,1936i$	$-0,0231 \pm 2,3880i$

0,5410	-10,0585	-10,0517	$-0,0149 \pm 1,2714i$	$-0,0205 \pm 2,5345i$
0,6373	-10,0594	-10,0541	$-0,0152 \pm 1,3519i$	$-0,0198 \pm 2,6735i$
0,8105	-10,2178	-10,1885	$-0,0256 \pm 1,6790i$	$-0,0259 \pm 3,1461i$

На рис. 3.12 – 3.15 представлены изменения корней  $\Omega_1$  и  $\Omega_{2,3}$  в зависимости от расхода  $G$  и коэффициента  $\beta = \gamma^{-1}$ .

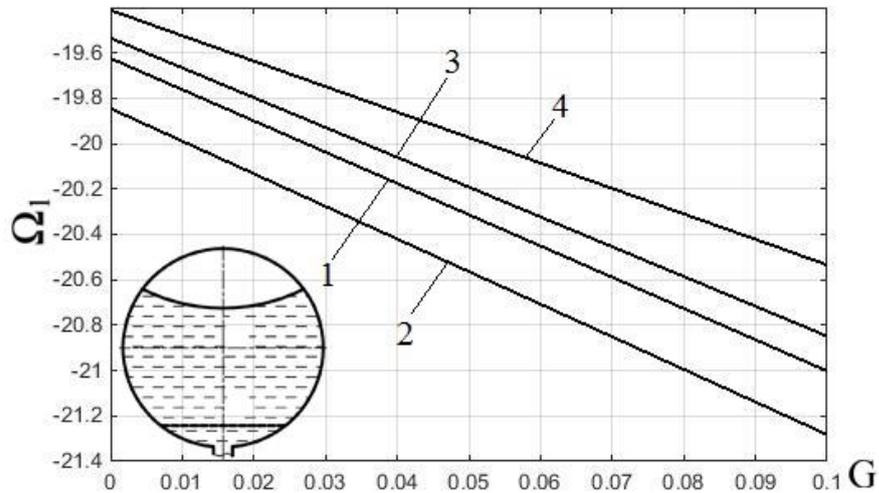


Рис. 3.12. Зависимости действительного корня  $\Omega_1$  от  $G$  при  $\beta = 0,2$ :  
 1- $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; 2- $V = 0,5659$ ,  $Bo = 0,1$ ; 3- $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; 4-  
 $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$

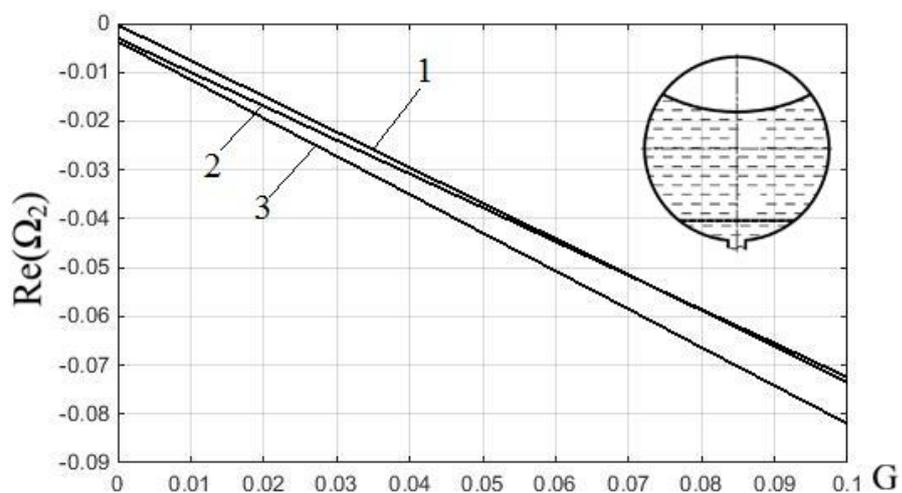


Рис. 3.13. Зависимости действительной части  $\Omega_2$  от  $G$  при  $\beta = 0,2$ :  
 1 -  $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; 2 -  $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; 3 -  $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$

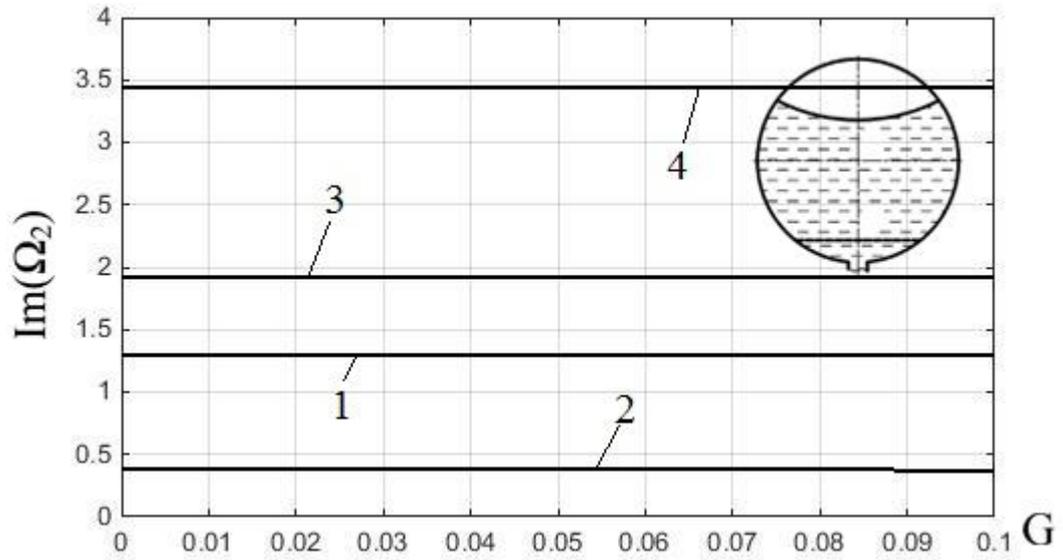


Рис. 3.14. Зависимости мнимой части  $\Omega_2$  от  $G$  при  $\beta = 0,2$ :

1- $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; 2- $V = 0,5659$ ,  $Bo = 0,1$ ; 3- $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; 4-  
 $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$

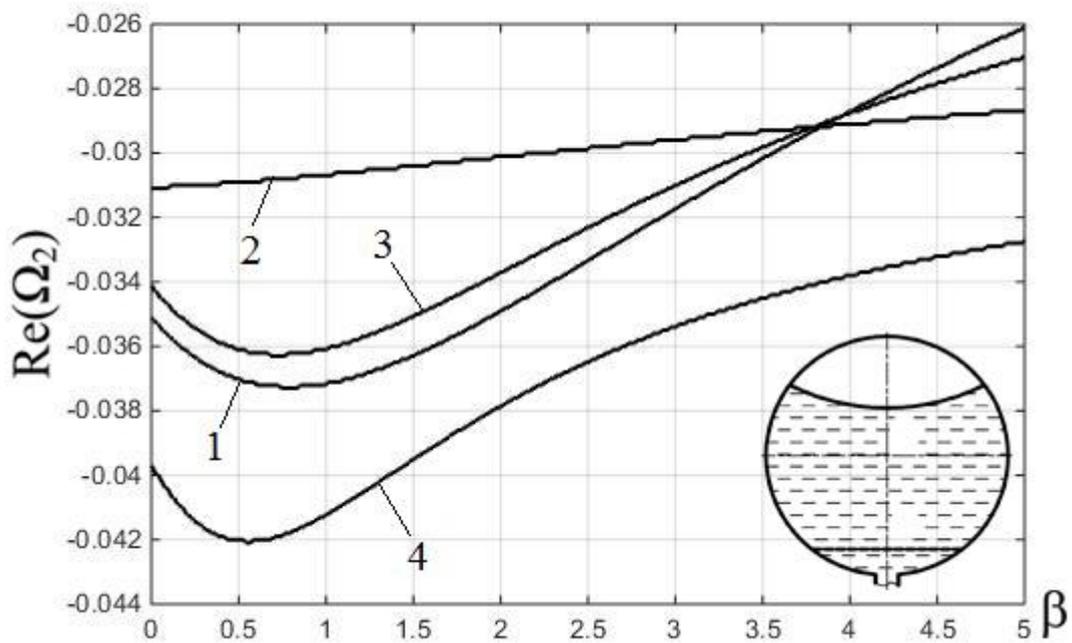


Рис. 3.15. Зависимости действительной части  $\Omega_2$  от  $\beta$  при  $G = 0,05$ :

1- $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; 2- $V = 0,5659$ ,  $Bo = 0,1$ ; 3- $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; 4-  
 $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$

### Вывод к главе 3

В главе 3 приведены постановка и решения статической задачи о равновесном положении свободной поверхности жидкости в условиях микрогравитации. Исследования малых движений жидкости показали, что спектр колебаний жидкости, частично заполняющей осесимметричную полость, состоит из двух множеств: множество действительных чисел меньше нуля, которому отвечают постоянные времени аperiodических волновых движения жидкости, и множество комплексно-сопряженных чисел, которым отвечают комплексные частоты затухающих волновых движений жидкости.

Выполненные численные расчеты показали, что значения коэффициентов демпфирования колебаний в условиях микрогравитации (малые числа Бонда) значительно превышает коэффициенты демпфирования в условиях больших чисел Бонда. Причем коэффициенты демпфирования колебаний тотальных КСОЖ имеет больше значения, чем коэффициенты демпфирования локальных.

При увеличении расхода и постоянстве обобщенного коэффициента сопротивления собственные числа, характеризующие аperiodические процессы и коэффициент затухания монотонно увеличиваются по модули. При постоянстве расхода и уменьшении обобщенного коэффициента сопротивления коэффициент затухания не изменяется монотонно и имеет максимальное значение при некоторых значениях коэффициента сопротивления.

**Глава 4. Малые движения твердого тела с осесимметричной полостью, имеющей заборные устройства и частично наполненной идеальной несжимаемой жидкостью**

**4.1. Постановка задачи**

Рассмотрим движущееся твердое тело с полостью осесимметричной конфигурации, частично наполненной идеальной несжимаемой жидкостью, вытекающей через заборные устройства. Движение жидкости будем рассматривать относительно связанной системы координат  $O_2x_2y_2z_2$ , ось  $O_2z_2$  совместим с осью симметрии полости.

Кроме этой системы координат, введем в рассмотрение неподвижную систему координат  $O_1x_1y_1z_1$ , с началом в произвольной точке  $O_1$  (рис. 4.1).

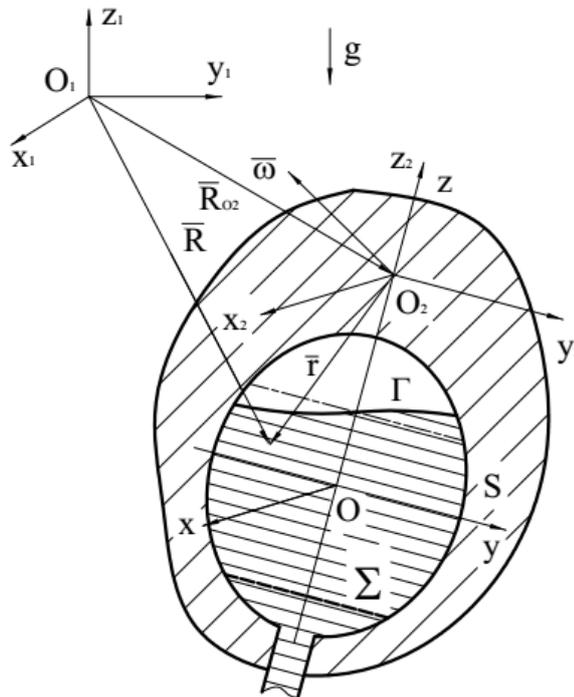


Рис. 4.1. Движение твердого тела с осесимметричной полостью, заполненной несжимаемой жидкостью

За невозмущенное состояние примем состояние покоя тела и установившееся движение жидкости, характеризующееся средней скоростью

опускания  $V_{0\Gamma}$  невозмущённой свободной поверхности  $\Gamma_0$  и средней скоростью  $V_{0\Sigma}$  на поверхности слива  $\Sigma$ .

Возмущенное движение тела с жидкостью будем характеризовать вектором малого поступательного движения  $\vec{u}(t)$  полюса  $O_2$  относительно системы  $O_1x_1y_1z_1$  и вектором малого поворота  $\vec{\mathcal{G}}(t)$  системы  $O_2x_2y_2z_2$  (тела) вокруг точки  $O_2$ .

$$\vec{u}(t) = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i, \quad \vec{\mathcal{G}}(t) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{G}_i \vec{e}_i, \quad (4.1)$$

где  $\vec{e}_i$  - орты осей системы  $O_1x_1y_1z_1$ .

Введенные системы координат позволяют нам рассматривать движение жидкости по отношению к системе координат  $O_2x_2y_2z_2$ , как относительное, а по отношению к системе  $O_1x_1y_1z_1$  как абсолютное. Обозначим через  $\vec{R} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$  радиус-вектор произвольной точки, отложенный от точки  $O_1$ , через  $\vec{r} = x_2\vec{e}'_1 + y_2\vec{e}'_2 + z_2\vec{e}'_3$  радиус-вектор в связанной системе координат  $O_2x_2y_2z_2$ . Векторы  $\vec{e}'_i$  орты осей системы  $O_2x_2y_2z_2$ .

При возмущенном движении твердого тела на начальное состояние жидкости накладываются дополнительные возмущения, которые разовьют в жидкости добавочные силы инерции, влияющие на движение рассматриваемой механической системы тело-жидкость. Возмущенное движение твердого тела и жидкости представим как малые отклонения от невозмущённого состояния, т.е. в возмущённом движении поля абсолютных и относительных смещений, поля абсолютных и относительных скоростей частиц жидкости приобретают малые отклонения  $\vec{w}, \vec{w}_r, \vec{V}, \vec{V}_r$  от их невозмущённых значений. Их будем считать величинами первого порядка малости. Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости и выше, имеем  $\vec{V} = \dot{\vec{w}}, \vec{V}_r = \dot{\vec{w}}_r$ .

## 4.2. Малые движения жидкости в подвижной полости

Для удобного рассмотрения малых движений жидкости, вытекающей через заборные устройства, введем вторую связанную систему координат  $Oxuz$ , с началом  $O$ , находящим на оси  $O_2z_2$ . Проблема малых движений жидкости может быть описана уравнениями гидродинамики, линеаризованными вблизи невозмущённого состояния.

Основной закон гидростатики и уравнение Бернулли для перепада давления на поверхности слива  $\Sigma$  в системе координат  $Oxuz$  в невозмущенном состоянии запишутся в виде

$$p^0(z) = p_a - g\rho(z - h), \quad (4.2)$$

$$\Delta p_\Sigma^0 = p_{\Sigma+}^0 - p_{\Sigma-}^0 = \zeta\rho \frac{(V_\Sigma^{(0)})^2}{2}, \quad (4.3)$$

где  $\vec{V}^{(0)}$  - скорость установившегося движения частиц жидкости,  $V_\Sigma^{(0)}$  - значение  $\vec{V}^{(0)}$  на поверхности слива,  $\zeta$  - коэффициент гидравлического сопротивления ЗУ, отнесённый к скорости  $V_\Sigma^{(0)}$ ,  $h(t)$  - расстояние от точки  $O$  до свободной поверхности,  $p_a = const$  - давление наддува,  $p_{\Sigma+}^0$ ,  $p_{\Sigma-}^0$  - соответственно давления жидкости перед поверхностью слива и за поверхностью.

Перепад давления на заборном устройстве в возмущенном движении принимает вид

$$\Delta p_\Sigma^0 + \Delta p_\Sigma = \zeta\rho \frac{(V_\Sigma^{(0)} + V_\Sigma)^2}{2} \text{ при } z = h_\Sigma, \quad (4.4)$$

Линеаризуя условия (4.4), получаем

$$\Delta p_\Sigma = \gamma\rho \cdot \vec{V}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma \text{ при } z = h_\Sigma, \quad (4.5)$$

где  $\vec{n}_\Sigma$  внешние нормали к поверхности  $\Sigma$ ,  $\gamma$  - обобщённый коэффициент сопротивления поверхности слива  $\gamma = \zeta V_\Sigma^{(0)}$ .

Возмущенное движение жидкости можно описать уравнением в подвижной системе координат

$$\frac{\partial \vec{V}_a}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} \vec{V}_a^2 - \vec{V}_a \cdot \vec{V}_e \right) - \vec{V}_a \times \nabla \times \vec{V}_a = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Pi. \quad (4.6)$$

Предполагаем возмущенное движение жидкости потенциальным ( $\nabla \times \vec{V}_a = 0$ ). Тогда вместо (4.6) можно записать

$$\frac{\partial \vec{V}_a}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} \vec{V}_a^2 - \vec{V}_a \cdot \vec{V}_e \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Pi. \quad (4.7)$$

Имеем соотношения

$$\vec{V}_a = \vec{V}^{(0)} + \vec{V}; \quad \vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \dot{\vec{u}} + \dot{\vec{g}} \times \vec{r} + \vec{V}_r. \quad (4.8)$$

Здесь  $\vec{V}_e$  - отклонение переносной скорости жидкости от невозмущённого состояния.

Поставив соотношение (4.8) в уравнение (4.7), получим для возмущённого состояния уравнение движения жидкости

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left[ \vec{V}^{(0)} \cdot (\vec{V} - \vec{V}_e) + \frac{1}{2} \vec{V}^2 - \vec{V} \cdot \vec{V}_e \right] + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Pi = 0. \quad (4.9)$$

Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости и выше, будем иметь уравнение движения жидкости в линеаризованном виде

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left[ \vec{V}^{(0)} \cdot (\vec{V} - \vec{V}_e) \right] + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Pi = 0. \quad (4.10)$$

Возмущенное движение жидкости необходимо дополнить уравнением неразрывности  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ , условием непротекания через смачиваемую поверхность  $S$  в виде  $\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{V}_e \cdot \vec{n}$  и начальными условиями  $\vec{w}(x, y, z, 0) = \vec{w}^0(x, y, z)$ ,  $\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}(x, y, z, 0) = \vec{V}^0(x, y, z)$ .

Проинтегрировав уравнение неразрывности по объёму, занимаемому жидкостью, для любого момента времени  $t$ , получим дополнительное интегральное условие  $-\int_{\Gamma_0} \vec{V}_r \cdot \vec{n}_1 d\Gamma = \int_{\Sigma} \vec{V}_r \cdot \vec{n}_\Sigma d\Sigma$ , которому должны подчиняться поле скоростей в рассматриваемой задаче.

### 4.3. Краевая задача для потенциала абсолютных скоростей

Введем потенциал абсолютной скорости – функцию  $\Phi(x, y, z, t)$ , который при малых движениях связан с полем смещений  $\vec{w}(x, y, z, t)$  и полем скоростей  $\vec{V}(x, y, z, t)$  очевидными формулами

$$\vec{w}(x, y, z, t) = \int \nabla \Phi(x, y, z, t) dt, \quad \vec{V}(x, y, z, t) = \nabla \Phi(x, y, z, t). \quad (4.11)$$

Подставив выражения (4.11) в уравнение (4.10), получим линейризованный интеграл Коши-Лагранжа, выраженный через потенциал скоростей

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} p + \Pi - \vec{V}^{(0)} \cdot \vec{V}_e = c(t), \quad (4.12)$$

где  $c(t)$  – произвольная функция времени. Не ограничивая общности, функцию  $c(t)$  можно считать равной нулю.

Уравнение возмущённой свободной поверхности жидкости при малых колебаниях запишется в виде

$$z = h + \xi(x, y, t), \quad h(t) = h_0 - \int_0^t V_\Gamma^{(0)} dt, \quad (4.13)$$

где  $\xi(x, y, t) = \vec{w}_\Gamma(x, y, h, t) \cdot \vec{n}_\Gamma$  – проекция вектора смещений частиц свободной поверхности на ось  $O_1x_1$ ;  $h_0$  – глубина жидкости в начальный момент времени.

Из уравнения (4.12), используя выражения (4.2) и принимая во внимание что, давление на свободной поверхности  $p = p_a$ , получим граничное условие на поверхности  $\Gamma_0$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Gamma^{(0)} \cdot \nabla \Phi + g \vec{w}_\Gamma \cdot \vec{n}_\Gamma - \vec{V}_\Gamma^{(0)} \cdot \vec{V}_e = 0. \quad (4.14)$$

Аналогично, поставив выражение (4.5) в (4.12), получим граничное условие на поверхности  $\Sigma$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \gamma \frac{\partial \vec{w}_\Sigma}{\partial t} \cdot \vec{n}_\Sigma - \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \vec{V}_e = 0. \quad (4.15)$$

Используя уравнение неразрывности, условие непротекания, начальные условия, получаем постановку эволюционной задачи для потенциала  $\Phi(x, y, z, t)$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}} &= \left[ \dot{\vec{u}} + (\dot{\vec{g}} \times \vec{r}) \right] \cdot \vec{n} \text{ на } S, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Gamma^{(0)} \cdot \nabla\Phi + g\vec{w}_\Gamma \cdot \vec{n}_\Gamma - \vec{V}_\Gamma^{(0)} \cdot \vec{V}_e &= 0 \text{ на } \Gamma, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \nabla\Phi + \gamma \cdot \frac{\partial\vec{w}_\Sigma}{\partial t} \cdot \vec{n}_\Sigma - \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \vec{V}_e &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \vec{w}_\Gamma = \vec{w}_\Gamma^0, \quad \vec{w}_\Sigma = \vec{w}_\Sigma^0, \quad \frac{\partial\vec{w}_\Gamma}{\partial t} = \vec{V}_\Gamma^0, \quad \frac{\partial\vec{w}_\Sigma}{\partial t} = \vec{V}_\Sigma^0 &\text{ при } t = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где  $\vec{w} = \int_i \frac{\partial\Phi}{\partial z} (x, y, z, t) dt$ ,  $\dot{\vec{w}} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} (x, y, z, t)$  - абсолютные смещение и скорость частиц жидкости,  $\frac{\partial}{\partial n}$  - производная по внешней нормали к поверхности  $S$ .

#### 4.4. Потенциал абсолютных скоростей

Потенциал абсолютной скорости разыскиваем в виде

$$\Phi(x, y, z, t) = \dot{\vec{u}} \cdot \vec{r} + \dot{\vec{g}} \cdot \vec{\Psi}(x, y, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(1)}(x, y, z) \dot{s}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(2)}(x, y, z) \dot{p}_n(t), \quad (4.17)$$

где  $\vec{\Psi}(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 \Psi_i(x, y, z) \vec{e}_i$  - неизвестная, подлежащая определению векторная функция,  $\Phi_n^{(1)}(x, y, z)$ ,  $\Phi_n^{(2)}(x, y, z)$  - собственные функции, определяемые из задач на собственные значения

$$\Delta\Phi_n^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_n^{(1)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S \cup \Sigma, \quad \frac{\partial\Phi_n^{(1)}}{\partial n} = \lambda_n^{(1)}\Phi_n^{(1)} \text{ на } \Gamma_0, \quad (4.18)$$

$$\Delta\Phi_n^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_n^{(2)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S \cup \Gamma_0, \quad \frac{\partial\Phi_n^{(2)}}{\partial n} = \lambda_n^{(2)}\Phi_n^{(2)} \text{ на } \Sigma, \quad (4.19)$$

$s_n(t)$ ,  $p_n(t)$  - неизвестные функции времени, имеющие смысл обобщенных координат, характеризующих движение свободной поверхности жидкости и перепад давления на поверхности слива.

Для случая определения  $\Psi_i(x, y, z)$  с использованием граничного условия типа «жесткой» («примороженной») крышки, имеем краевые задачи

$$\Delta\Psi_i = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Psi_i}{\partial\vec{n}} = \vec{e}_i(\vec{r} \times \vec{n}) \text{ на } S \cup \Gamma_0 \cup \Sigma, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.20)$$

Поле выбора условия (4.20) для функции  $\bar{\Psi}(x, y, z)$ , единичные потенциалы  $\Psi_i(x, y, z)$  оказываются потенциалами эквивалентных твёрдых тел, определённых Н. Е. Жуковским [24], [25] для полостей различной формы и полностью заполненных однородной жидкостью. В настоящее время для полостей сложной формы, имеющих внутри баковые элементы, разработаны различные вычислительные методы определения потенциалов Н. Е. Жуковского [47], [48].

#### 4.5. Вывод уравнений для обобщенных координат

Подставим в условия на свободной поверхности и на поверхности слива задачи (4.16) выражение  $\Phi(x, y, z, t)$  в виде (4.17). В результате получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \Phi_n^{(1)} \ddot{s}_n + \Phi_n^{(2)} \ddot{p}_n + V_{\Gamma}^{(0)} \left( \frac{\partial\Phi_n^{(1)}}{\partial h} + \frac{\partial\Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma}} \right) \dot{s}_n + V_{\Gamma}^{(0)} \frac{\partial\Phi_n^{(2)}}{\partial h} \dot{p}_n + g \frac{\partial\Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma}} s_n \right) + \ddot{\vec{u}} \cdot \vec{r} + \bar{\Psi} \ddot{\vec{g}} + g \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial n_{\Gamma}} \vec{g} = 0, \quad (4.21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \Phi_n^{(1)} \ddot{s}_n + \Phi_n^{(2)} \ddot{p}_n + V_{\Gamma}^{(0)} \frac{\partial\Phi_n^{(1)}}{\partial h} \dot{s}_n + \left( V_{\Gamma}^{(0)} \frac{\partial\Phi_n^{(2)}}{\partial h} + (-V_{\Sigma}^{(0)} + \gamma) \frac{\partial\Phi_n^{(2)}}{\partial n_{\Sigma}} \right) \dot{p}_n \right) + \ddot{\vec{u}} \cdot \vec{r} + \dot{\vec{u}} \cdot \gamma \vec{n}_{\Sigma} + \bar{\Psi} \ddot{\vec{g}} + \dot{\vec{g}} \gamma \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial n_{\Sigma}} = 0. \quad (4.22)$$

Умножим (4.21) на  $\rho \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_\Gamma}$ , (4.22) на  $\rho \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_\Sigma}$  и проинтегрируем по площади невозмущённой свободной поверхности  $\Gamma_0$  и поверхности слива. После интегрирования получим уравнения для обобщенных координат  $s_n(t)$ ,  $p_n(t)$ , которые могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \mu_n^{(1s)} \ddot{s}_n + V_\Gamma^{(0)} \delta_n^{(1)} \dot{s}_n + c_n s_n + \mu_n^{(1p)} \ddot{p}_n + V_\Gamma^{(0)} \varepsilon_n^{(1)} \dot{p}_n + \bar{\lambda}_n^{(1)} \ddot{u} + \bar{\lambda}_{0n}^{(1)} \ddot{\mathcal{G}} + \bar{\lambda}_{1n}^{(1)} \dot{\mathcal{G}} = 0, \\ \mu_n^{(2p)} \ddot{p}_n + \left[ V_\Gamma^{(0)} \delta_n^{(2)} + (-V_\Sigma^{(0)} + \gamma) \sigma_n^{(2)} \right] \dot{p}_n + \mu_n^{(2s)} \ddot{s}_n + V_\Gamma^{(0)} \varepsilon_n^{(2)} \dot{s}_n + \bar{\lambda}_n^{(2)} \ddot{u} + \\ + \gamma \bar{\lambda}_n^* \dot{u} + \bar{\lambda}_{0n}^{(2)} \ddot{\mathcal{G}} + \gamma \bar{\lambda}_{1n}^{(2)} \dot{\mathcal{G}} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.23)$$

Для инерционных коэффициентов, имеем следующие выражения

$$\begin{aligned} \mu_n^{(1s)} = \rho \int_\Gamma \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_\Gamma} \Phi_n^{(1)} d\Gamma, \quad \mu_n^{(1p)} = \rho \int_\Gamma \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_\Gamma} \Phi_n^{(2)} d\Gamma, \\ \mu_n^{(2p)} = \rho \int_\Sigma \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_\Sigma} \Phi_n^{(2)} d\Sigma, \quad \mu_n^{(2s)} = \rho \int_\Sigma \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_\Sigma} \Phi_n^{(1)} d\Sigma = \mu_n^{(1p)}, \\ \bar{\lambda}_n^{(1)} = \rho \int_\Gamma \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_\Gamma} \bar{r} d\Gamma, \quad \bar{\lambda}_n^{(2)} = \rho \int_\Sigma \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_\Sigma} \bar{r} d\Sigma. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Далее используя формулу Грина и граничные условия для  $\bar{\Psi}$ ,  $\Phi_n^{(1)}$ ,  $\Phi_n^{(2)}$ ,

имеем

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{0n}^{(1)} = \rho \int_\Gamma \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_\Gamma} \bar{\Psi} d\Gamma = \rho \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n} \bar{\Psi} dS = \rho \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \Phi_n^{(1)} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial n} dS = \\ = \rho \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \Phi_n^{(1)} (\bar{r} \times \bar{n}) dS, \\ \bar{\lambda}_{0n}^{(2)} = \rho \int_\Sigma \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_\Sigma} \bar{\Psi} d\Sigma = \rho \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n} \bar{\Psi} dS = \rho \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \Phi_n^{(2)} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial n} dS = \\ = \rho \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \Phi_n^{(2)} (\bar{r} \times \bar{n}) dS. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Для  $\bar{\lambda}_{1n}^{(1)}$ ,  $c_n$  получим

$$\begin{aligned}\vec{\lambda}_{1n}^{(1)} &= \rho g \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial n_{\Gamma}} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma}} d\Gamma = \rho g \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma}} (\vec{r} \times \vec{n}_{\Gamma}) d\Gamma, \\ c_n &= \rho g \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma}} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma}} d\Gamma.\end{aligned}\quad (4.26)$$

Далее для коэффициентов демпфирования, имеем

$$\begin{aligned}\delta_n^{(1)} &= \rho \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial h} + \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma}} \right) \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma}} d\Gamma, \quad \varepsilon_n^{(1)} = \rho \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial h} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma}} d\Gamma, \\ \delta_n^{(2)} &= \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial h} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_{\Sigma}} d\Sigma, \quad \sigma_n^{(2)} = \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_{\Sigma}} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_{\Sigma}} d\Sigma, \\ \varepsilon_n^{(2)} &= \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_{\Sigma}} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial h} d\Sigma, \quad \vec{\lambda}_{1n}^{(2)} = \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_{\Sigma}} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial n_{\Sigma}} d\Sigma = \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_{\Sigma}} (\vec{r} \times \vec{n}_{\Sigma}) d\Sigma, \\ \vec{\lambda}_n^* &= \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_{\Sigma}} \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma.\end{aligned}\quad (4.27)$$

#### 4.6. Уравнения движения твердого тела с полостью, содержащей жидкость

Для составления уравнений движения воспользуемся теоремами об изменении количества движения и об изменении момента количества движения твёрдого тела

$$\frac{d\vec{Q}_1}{dt} = \vec{F}^{(e)} + \vec{F}, \quad (4.28)$$

$$\frac{d\vec{K}_{1O_2}}{dt} = \vec{M}^{(e)} + m_1 \vec{r}_{1c} \times \delta \vec{g} + m_2 \vec{r}_{2c} \times \delta \vec{g} + m_2 (\delta \vec{r}_{2c} \times \vec{g}) - m_1 \vec{r}_{1c} \times \ddot{u} + \vec{M}, \quad (4.29)$$

где  $\vec{Q}_1$ ,  $\vec{K}_{1O_2}$  - количество абсолютного движения твёрдого тела и его момент количества движения относительно точки  $O_2$ ,  $m_1$  и  $m_2$  - массы тела и жидкости,  $\vec{r}_{1c}$  и  $\vec{r}_{2c}$  - радиус-векторы центров масс тела и «затвердевшей» жидкости,  $\delta \vec{g}$  и  $\delta \vec{r}_{2c}$  - отклонения интенсивности  $\vec{g}$  и радиуса  $\vec{r}_{2c}$  в невозмущенном состоянии,  $\vec{F}^{(e)}$  - главный вектор всех внешних сил приложенных к телу,  $\vec{M}^{(e)}$  - главный момент

всех внешних сил относительно полюса,  $\vec{F}$ ,  $\vec{M}$  - главные векторы и главные моменты относительно полюса сил давлений жидкости.

Выражение для  $\vec{F}$  и  $\vec{M}$  получим, используя уравнения гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f}, \quad (4.30)$$

и выражение для перепада давления на поверхности слива в возмущенном состоянии (4.5). Здесь  $\vec{V} = \dot{\vec{u}} + \dot{\vec{g}} \times \vec{r} + \vec{V}_r$  - вектор абсолютной скорости частиц жидкости,  $\vec{f}$  - вектор интенсивности поля внешних сил.

Во введенных обозначениях выражения для  $\vec{F}$  и  $\vec{M}$  примут вид

$$\vec{F} = -\rho \int_{\tau} \frac{d\vec{V}}{dt} d\tau - \gamma \rho \int_{\Sigma} \vec{V}_{\Sigma} d\Sigma, \quad (4.31)$$

$$\vec{M} = -\rho \int_{\tau} \vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt} d\tau - \gamma \rho \int_{\Sigma} \vec{r} \times \vec{V}_{\Sigma} d\Sigma. \quad (4.32)$$

Используя формулу Бура, запишем выражение  $d\vec{V}/dt$  в подвижной системе координат

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{u}} + \dot{\vec{g}} \times \vec{r} + \vec{V}_r \right) = \ddot{\vec{u}} + \frac{d\dot{\vec{g}}}{dt} \times \vec{r} + \dot{\vec{g}} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{V}_r}{dt} = \ddot{\vec{u}} + \ddot{\vec{g}} \times \vec{r} + \\ &+ \dot{\vec{g}} \times \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \dot{\vec{g}} \times \vec{r} \right) + \frac{\partial \vec{V}_r}{\partial t} + \dot{\vec{g}} \times \vec{V}_r, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{\vec{u}} + \ddot{\vec{g}} \times \vec{r} + \dot{\vec{g}} \times \left( \vec{V}_r + \dot{\vec{g}} \times \vec{r} \right) + \frac{\partial \vec{V}_r}{\partial t} + \dot{\vec{g}} \times \vec{V}_r.$$

Пренебрегая малые величины 2-го порядка, имеем

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{\vec{u}} + \ddot{\vec{g}} \times \vec{r} + \frac{\partial \vec{V}_r}{\partial t}. \quad (4.34)$$

Поставив (4.34) в (4.31) и (4.32) получим

$$\vec{F} = -\rho \int_{\tau} \left( \ddot{\vec{u}} + \ddot{\vec{g}} \times \vec{r} + \frac{\partial \vec{V}_r}{\partial t} \right) d\tau - \gamma \rho \int_{\Sigma} \vec{V}_{\Sigma} d\Sigma = -m_2 \ddot{\vec{u}} - \rho \int_{\tau} \ddot{\vec{g}} \times \vec{r} d\tau -$$

$$-\rho \int_{\tau} \frac{\partial \vec{V}_r}{\partial t} d\tau - \gamma \rho \int_{\Sigma} \dot{\vec{u}} d\Sigma - \gamma \rho \int_{\Sigma} \dot{\vec{\mathcal{G}}} \times \vec{r} d\Sigma - \gamma \rho \int_{\Sigma} \vec{V}_{r\Sigma} d\Sigma, \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \vec{M} = & -\rho \int_{\tau} \vec{r} \times \left( \ddot{\vec{u}} + \ddot{\vec{\mathcal{G}}} \times \vec{r} + \frac{\partial \vec{V}_r}{\partial t} \right) d\tau - \gamma \rho \int_{\Sigma} \vec{r} \times \vec{V}_{r\Sigma} d\Sigma = -m_2 \vec{r}_{2c} \times \ddot{\vec{u}} - \\ & -\rho \int_{\tau} \vec{r} \times \left( \ddot{\vec{\mathcal{G}}} \times \vec{r} \right) d\tau - \rho \int_{\tau} \vec{r} \times \frac{\partial \vec{V}_r}{\partial t} d\tau - \gamma \rho \int_{\Sigma} (\vec{r} \times \dot{\vec{u}}) d\Sigma - \gamma \rho \int_{\Sigma} \vec{r} \times \left( \dot{\vec{\mathcal{G}}} \times \vec{r} \right) d\Sigma - \\ & -\gamma \rho \int_{\Sigma} \vec{r} \times \vec{V}_{r\Sigma} d\Sigma. \end{aligned} \quad (4.36)$$

С другой стороны имеем соотношения

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left( m_1 \dot{\vec{u}} + \dot{\vec{\mathcal{G}}} \times m_1 \vec{r}_{1c} \right) = m_1 \ddot{\vec{u}} + \ddot{\vec{\mathcal{G}}} \times m_1 \vec{r}_{1c}, \quad (4.37)$$

$$\frac{d\vec{K}_{1O_2}}{dt} = J_1 \ddot{\vec{\mathcal{G}}}, \quad (4.38)$$

где  $J_1$  - тензор момента инерции твердого тела относительно полюса  $O_2$ , а

$$m_1 \vec{r}_{1c} \times \delta \vec{g} + m_2 \vec{r}_{2c} \times \delta \vec{g} = m \vec{r}_c \times \delta \vec{g} = m g \vec{r}_c \times (\vec{\mathcal{G}} \times \vec{e}_3), \quad (4.39)$$

$$m_2 \delta \vec{r}_{2c} \times \vec{g} = -\rho g \int_{\Gamma_0} (\vec{r} \times \vec{e}_3) \xi_r d\Gamma_0, \quad (4.40)$$

где  $\xi_r = \vec{w}_{r\Gamma} \vec{n}_{\Gamma} = \vec{w}_{r\Gamma} \vec{e}_3$  - проекция относительного смещения свободной поверхности на оси  $Oz$ .

Подставив полученные выражения (4.35) - (4.40) в уравнения (4.28) и (4.29), получил уравнения малого движения системы «тело + жидкость», записанные в подвижной системе координат

$$m \ddot{\vec{u}} + \gamma \rho \int_{\Sigma} \dot{\vec{u}} d\Sigma + m \ddot{\vec{\mathcal{G}}} \times \vec{r}_c + \gamma \rho \int_{\Sigma} \dot{\vec{\mathcal{G}}} \times \vec{r} d\Sigma + \rho \int_{\tau} \frac{\partial \vec{V}_r}{\partial t} d\tau + \gamma \rho \int_{\Sigma} \vec{V}_{r\Sigma} d\Sigma = \vec{F}^{(e)}, \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\vec{\mathcal{G}}} + \rho \int_{\tau} \vec{r} \times \left( \ddot{\vec{\mathcal{G}}} \times \vec{r} \right) d\tau + \gamma \rho \int_{\Sigma} \vec{r} \times \left( \dot{\vec{\mathcal{G}}} \times \vec{r} \right) d\Sigma - m g \vec{r}_c \times (\vec{\mathcal{G}} \times \vec{e}_3) + m \vec{r}_c \times \ddot{\vec{u}} + \\ + \gamma \rho \int_{\Sigma} (\vec{r} \times \dot{\vec{u}}) d\Sigma + \rho \int_{\tau} \vec{r} \times \frac{\partial \vec{V}_r}{\partial t} d\tau + \gamma \rho \int_{\Sigma} \vec{r} \times \vec{V}_{r\Sigma} d\Sigma + \rho g \int_{\Gamma} (\vec{r} \times \vec{e}_3) \xi_r d\Gamma_0 = \vec{M}^{(e)}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

где  $m = m_1 + m_2$ ,  $\vec{r}_c = (m_1 \vec{r}_{1c} + m_2 \vec{r}_{2c})/m$ .

#### 4.7. Вывод уравнений движения твердого тела с полостью, содержащей жидкость, в обобщенных координатах

Теперь, используя понятие потенциала абсолютной скорости жидкости (4.17), запишем уравнения движения твердого тела (4.41) и (4.42) в обобщенных координатах.

Используя граничное условие типа «жесткой» («примороженной») крышки при определении функции  $\bar{\Psi}$ , запишем относительную скорость жидкости в виде

$$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_e = \nabla(\dot{\mathcal{G}} \cdot \bar{\Psi}) + \nabla \left( \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(1)} \dot{s}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(2)} \dot{p}_n(t) \right) - \left( \dot{\mathcal{G}} \times \vec{r} \right). \quad (4.43)$$

Далее, используя выражение (4.43), формулу Гаусса-Остроградского, формулу Грина и граничные условия для  $\bar{\Psi}$ ,  $\Phi_n^{(1)}$ ,  $\Phi_n^{(2)}$ , выполним следующие громоздкие, но несложные преобразования

$$1) \rho \int_{\tau} \frac{\partial \vec{V}_r}{\partial t} d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{s}_n \left( \rho \int_{\tau} \nabla \Phi_n^{(1)} d\tau \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \left( \rho \int_{\tau} \nabla \Phi_n^{(2)} d\tau \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_n^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_n^{(2)} \ddot{p}_n, \quad (4.44)$$

т. к.

$$\int_{\tau} \nabla \Phi_n^{(1)} d\tau = \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \Phi_n^{(1)} \vec{n} dS = \rho \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \vec{r} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n} dS = \rho \oint_{\Gamma} \vec{r} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n} dS,$$

$$\int_{\tau} \nabla \Phi_n^{(2)} d\tau = \rho \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \Phi_n^{(2)} \vec{n} dS = \rho \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \vec{r} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n} dS = \rho \oint_{\Sigma} \vec{r} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n} dS,$$

$$2) \gamma \rho \int_{\Sigma} \dot{u} d\Sigma = \dot{u} (\gamma \beta_0), \quad (4.45)$$

$$3) m \ddot{\mathcal{G}} \times \vec{r}_c = L \ddot{\mathcal{G}}, \quad (4.46)$$

где тензор  $L = \begin{bmatrix} 0 & L_z & -L_y \\ -L_z & 0 & L_x \\ L_y & -L_x & 0 \end{bmatrix}$ , в котором  $L_x = mx_{2c}$ ,  $L_y = my_{2c}$ ,  $L_z = mz_{2c}$  -

проекции вектора статического момента системы «тело + затвердевшая жидкость» на осях,

$$4) \gamma \rho \int_{\Sigma} \dot{\vec{g}} \times \vec{r} d\Sigma = \gamma \lambda_0 \cdot \dot{\vec{g}}, \quad (4.47)$$

где тензор  $\lambda_0 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{0z} & -\lambda_{0y} \\ -\lambda_{0z} & 0 & \lambda_{0x} \\ \lambda_{0y} & -\lambda_{0x} & 0 \end{bmatrix}$ , в котором  $\lambda_{0x} = \int_{\Sigma} x_2 d\Sigma$ ,  $\lambda_{0y} = \int_{\Sigma} y_2 d\Sigma$ ,

$$\lambda_{0z} = \int_{\Sigma} z_2 d\Sigma,$$

$$5) \gamma \rho \int_{\Sigma} \vec{V}_{r\Sigma} d\Sigma = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \dot{p}_n \left( \rho \int_{\Sigma} \nabla \Phi_n^{(2)} d\Sigma \right) = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \dot{p}_n \left( \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_{\Sigma}} \vec{n}_{\Sigma} d\Sigma \right) = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_n^* \dot{p}_n, \quad (4.48)$$

$$6) \rho \int_{\tau} \vec{r} \times (\ddot{\vec{g}} \times \vec{r}) d\tau = \rho \sum_{i=1}^3 \ddot{g}_i \int_{\tau} \vec{r} \times \nabla \Psi_i d\tau = \rho \sum_{i=1}^3 \ddot{g}_i \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} (\vec{r} \times \vec{n}) \Psi_i dS =$$

$$= \rho \sum_{i=1}^3 \ddot{g}_i \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \vec{n}} \Psi_i dS = \rho \sum_{i=1}^3 \ddot{g}_i \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{n}} \Psi_i dS = J_2 \ddot{\vec{g}}, \quad (4.49)$$

где тензор  $J_2 = [J_{2ji}]_{i,j=1}^3$ , элементы  $J_{2ji} = \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \vec{n}} \Psi_i dS$  - моменты инерции присоединенной массы жидкости ( $i = j = 1, 2, 3$ ), и центробежные моменты этих масс ( $i \neq j$ ).

$$7) \rho \int_{\tau} \vec{r} \times \frac{\partial \vec{V}_r}{\partial t} d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{s}_n \int_{\tau} \vec{r} \times \nabla \Phi_n^{(1)} d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \int_{\tau} \vec{r} \times \nabla \Phi_n^{(2)} d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{0n}^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{0n}^{(2)} \ddot{p}_n, \quad (4.50)$$

Г. К.

$$\int_{\tau} \vec{r} \times \nabla \Phi_n^{(1)} d\tau = \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} (\vec{r} \times \vec{n}) \Phi_n^{(1)} dS, \quad \int_{\tau} \vec{r} \times \nabla \Phi_n^{(2)} d\tau = \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} (\vec{r} \times \vec{n}) \Phi_n^{(2)} dS,$$

$$8) \gamma \rho \int_{\Sigma} (\vec{r} \times \dot{\vec{u}}) d\Sigma = \gamma \bar{\lambda}_0 \dot{\vec{u}}, \quad (4.51)$$

где тензор  $\bar{\lambda}_0 = -\lambda_0$  - сопряженный с антисимметричным тензором  $\lambda_0$ ,

$$9) \gamma \rho \int_{\Sigma} \vec{r} \times (\dot{\vec{g}} \times \vec{r}) d\Sigma = \gamma \beta \cdot \dot{\vec{g}}, \quad (4.52)$$

где тензор  $\beta = \begin{bmatrix} \beta_x & -\beta_{xy} & -\beta_{zx} \\ -\beta_{xy} & \beta_y & -\beta_{yz} \\ -\beta_{zx} & -\beta_{yz} & \beta_z \end{bmatrix}$ ,  $\beta_x = \rho \int_{\Sigma} (y_2^2 + z_2^2) d\Sigma$ ,  $\beta_y = \rho \int_{\Sigma} (x_2^2 + z_2^2) d\Sigma$ ,

$$\beta_z = \rho \int_{\Sigma} (x_2^2 + y_2^2) d\Sigma, \beta_{xy} = \rho \int_{\Sigma} x_2 y_2 d\Sigma, \beta_{yz} = \rho \int_{\Sigma} y_2 z_2 d\Sigma, \beta_{zx} = \rho \int_{\Sigma} z_2 x_2 d\Sigma,$$

$$10) m \vec{r}_c \times \ddot{\vec{u}} = \bar{L} \ddot{\vec{u}}, \quad (4.53)$$

где тензор  $\bar{L} = -L$  - сопряженный с антисимметричным тензором  $L$ ,

$$11) mg \vec{r}_c \times (\vec{\mathcal{G}} \times \vec{e}_3) = L^* \vec{\mathcal{G}}, \quad (4.54)$$

где тензор  $L^* = \begin{bmatrix} L_z & 0 & 0 \\ 0 & L_z & 0 \\ -L_x & -L_y & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$12) \gamma \rho \int_{\Sigma} (\vec{r} \times \vec{V}_r) d\Sigma = \gamma \rho \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{\Sigma} (\vec{r} \times \vec{n}) \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n} d\Sigma \right) \dot{p}_n = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{1n}^{(2)} \dot{p}_n, \quad (4.55)$$

$$13) \rho g \int_{\Gamma} (\vec{r} \times \vec{e}_3) \xi_r d\Gamma = \rho g \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{\Gamma} (\vec{r} \times \vec{n}) \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n} d\Gamma \right) s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{1n}^{(1)} s_n. \quad (4.56)$$

Поставляя (4.44) – (4.56) в уравнения (4.41) и (4.42) получим систему уравнений

$$m \ddot{\vec{u}} + \gamma \beta_0 \dot{\vec{u}} + L \ddot{\vec{\mathcal{G}}} + \gamma \lambda_0 \dot{\vec{\mathcal{G}}} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_n^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_n^{(2)} \ddot{p}_n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_n^* \dot{p}_n = \vec{F}^{(e)}, \quad (4.57)$$

$$(J_1 + J_2) \ddot{\vec{\mathcal{G}}} + \gamma \beta \dot{\vec{\mathcal{G}}} - L^* \vec{\mathcal{G}} + \bar{L} \ddot{\vec{u}} + \gamma \bar{\lambda}_0 \dot{\vec{u}} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{0n}^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{1n}^{(1)} s_n + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{0n}^{(2)} \ddot{p}_n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{1n}^{(2)} \dot{p}_n = \vec{M}^{(e)}. \quad (4.58)$$

#### 4.8. Закон баланса энергии

Замкнутая система уравнений возмущенного движения системы «тело + жидкость», состоящая из уравнений (4.23), (4.57) и (4.58), имеет вид

$$m \ddot{\vec{u}} + \gamma \beta_0 \dot{\vec{u}} + L \ddot{\vec{\mathcal{G}}} + \gamma \lambda_0 \dot{\vec{\mathcal{G}}} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_n^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_n^{(2)} \ddot{p}_n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_n^* \dot{p}_n = \vec{F}^{(e)},$$

$$\begin{aligned}
& (J_1 + J_2) \ddot{\bar{\mathcal{G}}} + \gamma \beta \dot{\bar{\mathcal{G}}} - L^* \bar{\mathcal{G}} + \bar{L} \ddot{\bar{u}} + \gamma \bar{\lambda}_0 \dot{\bar{u}} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}_{0n}^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}_{1n}^{(1)} s_n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}_{0n}^{(1)} \ddot{p}_n + \\
& + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}_{1n}^{(2)} \dot{p}_n = \bar{M}^{(e)}, \\
& \mu_n^{(1s)} \ddot{s}_n + V_{\Gamma}^{(0)} \delta_n^{(1)} \dot{s}_n + c_n s_n + \mu_n^{(1p)} \ddot{p}_n + V_{\Gamma}^{(0)} \varepsilon_n^{(1)} \dot{p}_n + \bar{\lambda}_n^{(1)} \ddot{\bar{u}} + \bar{\lambda}_{0n}^{(1)} \ddot{\bar{\mathcal{G}}} + \bar{\lambda}_{1n}^{(1)} \dot{\bar{\mathcal{G}}} = 0, \quad (4.59) \\
& \mu_n^{(2p)} \ddot{p}_n + \left[ V_{\Gamma}^{(0)} \delta_n^{(2)} + (-V_{\Sigma}^{(0)} + \gamma) \sigma_n^{(2)} \right] \dot{p}_n + \mu_n^{(2s)} \ddot{s}_n + V_{\Gamma}^{(0)} \varepsilon_n^{(2)} \dot{s}_n + \bar{\lambda}_n^{(2)} \ddot{\bar{u}} + \\
& + \gamma \bar{\lambda}_n^* \dot{\bar{u}} + \bar{\lambda}_{0n}^{(2)} \ddot{\bar{\mathcal{G}}} + \gamma \bar{\lambda}_{1n}^{(2)} \dot{\bar{\mathcal{G}}} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

Система (4.59) запишется в следующем матричном виде

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m & L & \bar{\lambda}_1^{(1)} & \bar{\lambda}_2^{(1)} & \dots & \bar{\lambda}_1^{(2)} & \bar{\lambda}_2^{(2)} & \dots \\ \bar{L} & J_1 + J_2 & \bar{\lambda}_{01}^{(1)} & \bar{\lambda}_{02}^{(1)} & \dots & \bar{\lambda}_{01}^{(2)} & \bar{\lambda}_{02}^{(2)} & \dots \\ \bar{\lambda}_1^{(1)} & \bar{\lambda}_{01}^{(1)} & \mu_1^{(1s)} & 0 & \dots & \mu_1^{(1p)} & 0 & \dots \\ \bar{\lambda}_2^{(1)} & \bar{\lambda}_{02}^{(1)} & 0 & \mu_2^{(1s)} & \dots & 0 & \mu_2^{(1p)} & \dots \\ \dots & \dots \\ \bar{\lambda}_1^{(2)} & \bar{\lambda}_{01}^{(2)} & \mu_1^{(2s)} & 0 & \dots & \mu_1^{(2p)} & 0 & \dots \\ \bar{\lambda}_2^{(2)} & \bar{\lambda}_{02}^{(2)} & 0 & \mu_2^{(2s)} & \dots & 0 & \mu_2^{(2p)} & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{u}} \\ \ddot{\bar{\mathcal{G}}} \\ \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \\ \dots \\ \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \\ \dots \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -L^* & \bar{\lambda}_{11}^{(1)} & \bar{\lambda}_{12}^{(1)} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \bar{\lambda}_{11}^{(1)} & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \bar{\lambda}_{12}^{(1)} & 0 & c_2 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\mathcal{G}} \\ s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ p_1 \\ p_2 \\ \dots \end{bmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \begin{array}{cccccc}
\gamma\beta_0 & \gamma\lambda_0 & 0 & 0 & \dots & \gamma\vec{\lambda}_1^* & \gamma\vec{\lambda}_2^* & \dots \\
\gamma\vec{\lambda}_0 & \gamma\beta & 0 & 0 & \dots & \gamma\vec{\lambda}_{11}^{(2)} & \gamma\vec{\lambda}_{12}^{(2)} & \dots \\
0 & 0 & V_\Gamma^{(0)}\delta_1^{(1)} & 0 & \dots & V_\Gamma^{(0)}\varepsilon_1^{(1)} & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & V_\Gamma^{(0)}\delta_2^{(1)} & \dots & 0 & V_\Gamma^{(0)}\varepsilon_2^{(1)} & \dots \\
\dots & \dots \\
\gamma\vec{\lambda}_1^* & \gamma\vec{\lambda}_{11}^{(2)} & V_\Gamma^{(0)}\varepsilon_1^{(2)} & 0 & \dots & V_\Gamma^{(0)}\delta_1^{(2)} - (V_\Sigma^{(0)} - \gamma)\sigma_1^{(2)} & 0 & \dots \\
\gamma\vec{\lambda}_2^* & \gamma\vec{\lambda}_{12}^{(2)} & 0 & V_\Gamma^{(0)}\varepsilon_2^{(2)} & \dots & 0 & V_\Gamma^{(0)}\delta_2^{(2)} - (V_\Sigma^{(0)} - \gamma)\sigma_2^{(2)} & \dots \\
\dots & \dots
\end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{u}} \\ \dot{\vec{g}} \\ \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dots \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dots \end{array} \right\} \\
& + \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}^{(e)} \\ \vec{M}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{array} \right\}, \tag{4.60}
\end{aligned}$$

$$M \cdot \ddot{U} + C \cdot U = -B \cdot \dot{U} + L. \tag{4.61}$$

Здесь

$$M = \left[ \begin{array}{cccccc}
m & L & \vec{\lambda}_1^{(1)} & \vec{\lambda}_2^{(1)} & \dots & \vec{\lambda}_1^{(2)} & \vec{\lambda}_2^{(2)} & \dots \\
\vec{L} & J_1 + J_2 & \vec{\lambda}_{01}^{(1)} & \vec{\lambda}_{02}^{(1)} & \dots & \vec{\lambda}_{01}^{(2)} & \vec{\lambda}_{02}^{(2)} & \dots \\
\vec{\lambda}_1^{(1)} & \vec{\lambda}_{01}^{(1)} & \mu_1^{(1s)} & 0 & \dots & \mu_1^{(1p)} & 0 & \dots \\
\vec{\lambda}_2^{(1)} & \vec{\lambda}_{02}^{(1)} & 0 & \mu_2^{(1s)} & \dots & 0 & \mu_2^{(1p)} & \dots \\
\dots & \dots \\
\vec{\lambda}_1^{(2)} & \vec{\lambda}_{01}^{(2)} & \mu_1^{(2s)} & 0 & \dots & \mu_1^{(2p)} & 0 & \dots \\
\vec{\lambda}_2^{(2)} & \vec{\lambda}_{02}^{(2)} & 0 & \mu_2^{(2s)} & \dots & 0 & \mu_2^{(2p)} & \dots \\
\dots & \dots
\end{array} \right] - \text{тензор масс системы,}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -L^* & \vec{\lambda}_{11}^{(1)} & \vec{\lambda}_{12}^{(1)} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \vec{\lambda}_{11}^{(1)} & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \vec{\lambda}_{12}^{(1)} & 0 & c_2 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} - \text{тензор жесткости системы,}$$

$$B = \begin{bmatrix} \gamma\beta_0 & \gamma\lambda_0 & 0 & 0 & \dots & \gamma\vec{\lambda}_1^* & \gamma\vec{\lambda}_2^* & \dots \\ \gamma\vec{\lambda}_0 & \gamma\beta & 0 & 0 & \dots & \gamma\vec{\lambda}_{11}^{(2)} & \gamma\vec{\lambda}_{12}^{(2)} & \dots \\ 0 & 0 & V_\Gamma^{(0)}\delta_1^{(1)} & 0 & \dots & V_\Gamma^{(0)}\varepsilon_1^{(1)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & V_\Gamma^{(0)}\delta_2^{(1)} & \dots & 0 & V_\Gamma^{(0)}\varepsilon_2^{(1)} & \dots \\ \dots & \dots \\ \gamma\vec{\lambda}_1^* & \gamma\vec{\lambda}_{11}^{(2)} & V_\Gamma^{(0)}\varepsilon_1^{(2)} & 0 & \dots & V_\Gamma^{(0)}\delta_1^{(2)} - (V_\Sigma^{(0)} - \gamma)\sigma_1^{(2)} & 0 & \dots \\ \gamma\vec{\lambda}_2^* & \gamma\vec{\lambda}_{12}^{(2)} & 0 & V_\Gamma^{(0)}\varepsilon_2^{(2)} & \dots & 0 & V_\Gamma^{(0)}\delta_2^{(2)} - (V_\Sigma^{(0)} - \gamma)\sigma_2^{(2)} & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} -$$

тензор диссипации,  $U = (\vec{u} \quad \vec{g} \quad s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad p_1 \quad p_2 \quad \dots)^T$  - вектор обобщенных координат,  $L^{(e)} = (\vec{F}^{(e)} \quad \vec{M}^{(e)} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots)^T$  - вектор главных внешних возмущений.

Умножив уравнение (4.61) на вектор  $\dot{U}$  и выполнив несложные преобразования, получим уравнение баланса энергии системы «тело + жидкость»

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = -2\Phi + N^{(e)}, \quad (4.62)$$

где  $T = \frac{1}{2}M \cdot \dot{U}^2$ ,  $\Pi = \frac{1}{2}C \cdot U^2$ ,  $\Phi = \frac{1}{2}B \cdot \dot{U}^2$  - кинетическая и потенциальная энергии и диссипативная функция системы,  $N^{(e)} = L^{(e)} \cdot \dot{U}$  - мощность внешних возмущений.

#### 4.9. Колебания физического маятника со сферической полостью, имеющей заборное устройство и частично наполненной жидкостью

В качестве примера рассмотрим задачу о колебаниях сферического бака, вращающегося вокруг оси  $O_1x_1$ , с полостью, частично заполненной жидкостью, вытекающей через заборные устройства из бака (рис. 4.2).

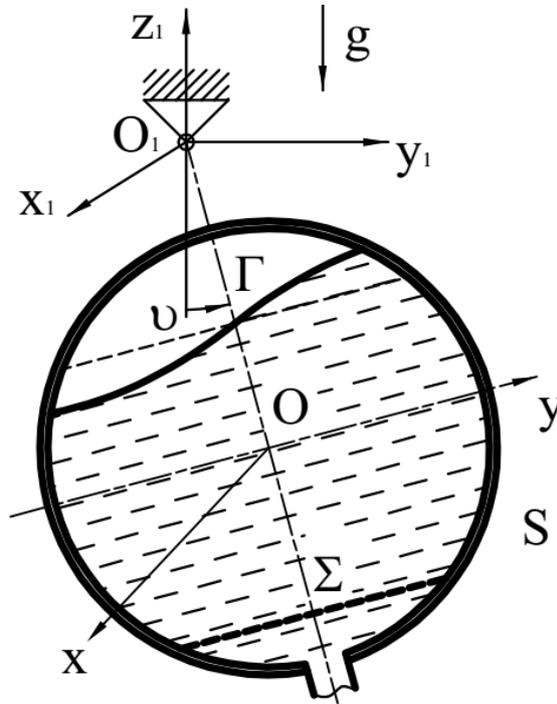


Рис. 4.2. Колебания физического маятника, имеющего сферическую полость с заборным устройством и жидкостью

В этом случае  $\vec{u} = 0$ ,  $\vec{\mathcal{G}}(t) = \mathcal{G}(t) \cdot \vec{e}_1$  и введем связанную систему координат  $Oxyz$  с началом в центре сферы.

Формулировка эволюционной задачи для потенциала абсолютной скорости имеет вид

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \dot{\mathcal{G}}(\vec{e}_1 \times \vec{r}) \cdot \vec{n} \text{ на } S,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Gamma} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial z} + g \int \frac{\partial\Phi}{\partial z} dt + V_{0\Gamma} \cdot V_{ez} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Sigma} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial z} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \cdot V_{ez} = 0 \text{ на } \Sigma,$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi^0 \text{ при } t = 0,$$

т.к.  $\vec{V}_\Gamma^{(0)} = -V_{0\Gamma}\vec{e}_3$ ,  $\vec{V}_\Sigma^{(0)} = -V_{0\Sigma}\vec{e}_3$ , а  $V_{ez}$  - проекция вектора  $\vec{V}_e$  на ось  $Oz$ .

Перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{R_0}, \quad \bar{r}_0 = \frac{r_0}{R_0}, \quad \bar{r}_\Sigma = \frac{r_\Sigma}{R_0}, \quad \bar{L} = \frac{L}{R_0}, \quad \bar{h} = \frac{h}{R_0}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\sqrt{gR_0}}, \quad \bar{G} = \frac{V_{0\Gamma}r_0^2}{R_0^2\sqrt{gR_0}}, \\ \bar{V}_{0\Gamma} &= \frac{V_{0\Gamma}}{\sqrt{gR_0}}, \quad \bar{V}_{0\Sigma} = \frac{V_{0\Sigma}}{\sqrt{gR_0}}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\sqrt{R_0/g}}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\sqrt{g/R_0}}, \quad \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{R_0\sqrt{gR_0}}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

где  $R_0$  - радиус бака,  $h$  - расстояние от центра бака до свободной поверхности,  $r_0$  - радиус свободной поверхности,  $h_\Sigma$  - координатное расстояние от центра бака до поверхности слива,  $r_\Sigma$  - радиус поверхности слива,  $L$  - координатное расстояние  $OO_1$ ,  $\Omega$  - комплексная частота волновых движений жидкости,  $\bar{G}$  - безразмерный расход топлива. Дальше знак «-» над безразмерными переменными будем опускать.

Используя цилиндрические координаты  $r, \eta, z$  и сферические координаты  $R, \theta, \eta$  с началом в центре сферы, получим задачу для определения потенциала абсолютных скоростей  $\Phi(r, \eta, z, t)$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial R} = \dot{g}L \sin\theta \sin\eta \text{ на } S, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Gamma} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \int \frac{\partial\Phi}{\partial z} dt + V_{0\Gamma} \cdot V_{ez} &= 0 \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Sigma} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial z} + (\gamma + V_{0\Sigma}) \cdot V_{ez} &= 0 \text{ на } \Sigma, \\ \Phi(r, \eta, z, t) &= \Phi^{(0)} \text{ при } t = 0. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Из формулы (4.17) имеем

$$\Phi(r, \eta, z, t) = \dot{g}(t) \cdot \Psi_1(r, \eta, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(1)}(r, \eta, z) \dot{s}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(2)}(r, \eta, z) \dot{p}_n(t), \quad (4.66)$$

Краевая задача для нахождения потенциала  $\Psi_1(r, \eta, z)$  запишется в виде

$$\Delta\Psi_1 = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial R} = L \cdot \sin\theta \sin\eta \text{ на } S, \quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial z} = r \sin\eta \text{ на } \Gamma_0 \cup \Sigma \quad (4.67)$$

Задачи на собственные значения для потенциалов  $\Phi_n^{(1)}(r, \eta, z)$ ,  $\Phi_n^{(2)}(r, \eta, z)$  будут

$$\Delta\Phi_n^{(1)} = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi_n^{(1)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S \cup \Sigma, \quad \frac{\partial\Phi_n^{(1)}}{\partial n} = \lambda_n^{(1)}\Phi_n^{(1)} \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial\Phi_n^{(1)}(r_0, \frac{\pi}{2}, h)}{\partial z} = 1, \quad (4.68)$$

$$\Delta\Phi_n^{(2)} = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi_n^{(2)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S \cup \Gamma_0, \quad \frac{\partial\Phi_n^{(2)}}{\partial n} = \lambda_n^{(2)}\Phi_n^{(2)} \text{ на } \Sigma, \\ \frac{\partial\Phi_n^{(2)}(r_\Sigma, \frac{\pi}{2}, h_\Sigma)}{\partial z} = 1. \quad (4.69)$$

Здесь последние условия в (4.68) и (4.69) – условия нормировки.

Решаем задачу (4.67) вариационным методом. Согласно вариационной формулировке требуется найти минимум функционала [44]

$$J(\Psi_1) = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\nabla\Psi_1)^2 d\tau - \int_{\Gamma} \Psi_1 \frac{\partial\Psi_1}{\partial z} d\Gamma - \int_S \Psi_1 \frac{\partial\Psi_1}{\partial R} dS + \int_{\Sigma} \Psi_1 \frac{\partial\Psi_1}{\partial z} d\Sigma. \quad (4.70)$$

Пусть приближенное решение ищется в виде

$$\Psi_1(r, \eta, z) = \psi(r, z) \cdot \mathbf{H}(\eta) = \sum_{k=1}^M c_k U_k(r, z) \cdot \mathbf{H}(\eta), \quad (4.71)$$

где  $c_k$  - неизвестные постоянные,  $M$  - порядок приближения решений, функции  $U_k = R^k P_k^{(1)}(\cos\theta)$ , и  $\mathbf{H}(\eta) = \sin(\eta)$  (или  $\cos(\eta)$ ).

Поставив выражение (4.71) в функционал (4.70), из условия минимума функции  $J(\Psi_1)$  получаем систему уравнений для определения коэффициентов  $c_k$

$$\sum_{l=1}^M D_{kl} c_l = d_k, \quad k = 1, \dots, M, \quad (4.72)$$

или в матричном виде

$$D \cdot c = d. \quad (4.73)$$

Здесь

$$D = [D_{kl}]_{k,l=1}^M, \quad d = \{d_k\}_{k=1}^M, \quad c = \{c_k\}_{k=1}^M,$$

$$D_{kl} = \pi \left( \int_0^{r_0} U_{k\Gamma} \left( \frac{\partial U_l}{\partial z} \right)_{\Gamma} r dr + \int_{\theta_0}^{\theta_{\Sigma}} U_{kS} \left( \frac{\partial U_l}{\partial R} \right)_S \sin \theta d\theta - \int_0^{r_{\Sigma}} U_{k\Sigma} \left( \frac{\partial U_l}{\partial z} \right)_{\Sigma} r dr \right), \quad (4.74)$$

$$d_k = \pi \left( \int_0^{r_0} U_{k\Gamma} r^2 dr + L \int_{\theta_0}^{\theta_{\Sigma}} U_{kS} \sin^2 \theta d\theta - \int_0^{r_{\Sigma}} U_{k\Sigma} r^2 dr \right).$$

Из уравнения (4.73) получим

$$c = D^{-1} \cdot d. \quad (4.75)$$

Решения задач (4.68) и (4.69), аналогично в пункте 2.3, найдены в виде

$$\Phi_n^{(1)}(r, \eta, z) = \varphi_n^{(1)}(r, z) \mathbf{H}(\eta) = \frac{\sum_{k=1}^M a_{nk} U_k(r, z)}{\sum_{k=1}^M a_{nk} \left( \frac{\partial U_k(r, z)}{\partial z} \right)_{r=r_0, z=h}} \mathbf{H}(\eta), \quad (4.76)$$

$$\Phi_n^{(2)}(r, \eta, z) = \varphi_n^{(2)}(r, z) \mathbf{H}(\eta) = \frac{\sum_{k=1}^M b_{nk} U_k(r, z)}{\sum_{k=1}^M a_{nk} \left( \frac{\partial U_k(r, z)}{\partial z} \right)_{r=r_0, z=h}} \mathbf{H}(\eta).$$

Уравнение вращения системы «бак – жидкость» вокруг оси  $O_1 x_1$ , имеет вид

$$(J_1 + J_2) \ddot{\vartheta} + \gamma \beta \dot{\vartheta} - mgz_{1c} \vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(1)} s_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(2)} \ddot{p}_n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(2)} \dot{p}_n = M^{(e)} = M^{(e)}. \quad (4.77)$$

Введем безразмерные коэффициенты

$$\bar{J} = \frac{J}{\rho R_0^5}, \quad \bar{\lambda}_{0n}^{(1)} = \frac{\lambda_{0n}^{(1)}}{\rho R_0^5}, \quad \bar{\lambda}_{0n}^{(2)} = \frac{\lambda_{0n}^{(2)}}{\rho R_0^5}, \quad \bar{\lambda}_{1n}^{(1)} = \frac{\lambda_{1n}^{(1)}}{\rho g R_0^4}, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{\rho R_0^4}, \quad (4.78)$$

$$\bar{\lambda}_{1n}^{(2)} = \frac{\lambda_{1n}^{(2)}}{\rho R_0^4 \sqrt{g R_0}}, \quad \bar{m} = \frac{m}{\rho R_0^3}, \quad \bar{z}_c = \frac{z_c}{R_0}, \quad \bar{M}^{(e)} = \frac{M^{(e)}}{\rho g R_0^4}.$$

Дальше знак «-» над безразмерными коэффициентами также будем опускать.

Тогда все гидродинамические коэффициенты определяются по следующим формулам

$$J_2 = \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \vec{e}_1 \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) \Psi_1 dS = \pi \left[ \int_0^{r_0} \psi_{\Gamma_0} r^2 dr + L \int_{\theta_0}^{\theta_\Sigma} \psi_S \sin^2 \theta d\theta - \int_0^{r_\Sigma} \psi_\Sigma r^2 dr \right], \quad (4.79)$$

$$\beta = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_\Sigma} (r^2 \sin^2 \eta + z_{1\Sigma}^2) r d\eta dr = \pi \left( \frac{r_\Sigma^4}{4} + (h_\Sigma - L)^2 r_\Sigma^2 \right), \quad (4.80)$$

$$m = \pi \left( h - h_\Sigma - \frac{h^3 - h_\Sigma^3}{3} \right), \quad z_{1c} = -L + \frac{3(h + h_\Sigma)(2 - h^2 - h_\Sigma^2)}{4(3 - h^2 - hh_\Sigma - h_\Sigma^2)}, \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{0n}^{(1)} &= \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \Phi_n^{(1)} (\vec{r} \times \vec{n}) \cdot \vec{e}_1 dS = \\ &= \pi \left[ \int_0^{r_0} (\varphi_n^{(1)})_{\Gamma_0} r^2 dr + L \int_{\theta_0}^{\theta_\Sigma} (\varphi_n^{(1)})_S \sin^2 \theta d\theta - \int_0^{r_\Sigma} (\varphi_n^{(1)})_\Sigma r^2 dr \right], \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{0n}^{(2)} &= \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \Phi_n^{(2)} (\vec{r} \times \vec{n}) \cdot \vec{e}_1 dS = \\ &= \pi \left[ \int_0^{r_0} (\varphi_n^{(2)})_{\Gamma_0} r^2 dr + L \int_{\theta_0}^{\theta_\Sigma} (\varphi_n^{(2)})_S \sin^2 \theta d\theta - \int_0^{r_\Sigma} (\varphi_n^{(2)})_\Sigma r^2 dr \right], \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\lambda_{1n}^{(1)} = \int_\Gamma \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_\Gamma} (\vec{r} \times \vec{n}_\Gamma) \cdot \vec{e}_1 d\Gamma = \pi \int_0^{r_0} \left( \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial z} \right)_{\Gamma_0} r^2 dr, \quad (4.84)$$

$$\lambda_{1n}^{(2)} = \int_\Sigma \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_\Gamma} (\vec{r} \times \vec{n}_\Sigma) \cdot \vec{e}_1 dS = \pi \int_0^{r_\Sigma} \left( \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z} \right)_\Sigma r^2 dr. \quad (4.85)$$

С учетом формул (4.79) - (4.85) уравнение (4.77) запишется в форме

$$\begin{aligned} (J_1 + J_2) \ddot{\mathcal{G}} + \gamma \beta \dot{\mathcal{G}} - m z_{1c} \mathcal{G} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(1)} \dot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(2)} \ddot{p}_n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(2)} \dot{p}_n = \\ = M^{(e)} \end{aligned} \quad (4.86)$$

На рис. 4.3 – 4.5 представлены изменения присоединенного момента инерции жидкости  $J_2$  и коэффициентов  $\lambda_{01}^{(1)}$  и  $\lambda_{11}^{(1)}$ ,  $\lambda_{01}^{(2)}$  и  $\lambda_{11}^{(2)}$  от глубины жидкости  $h$  при  $h_\Sigma = 0,86$  ( $r_\Sigma \approx 0,5$ ).

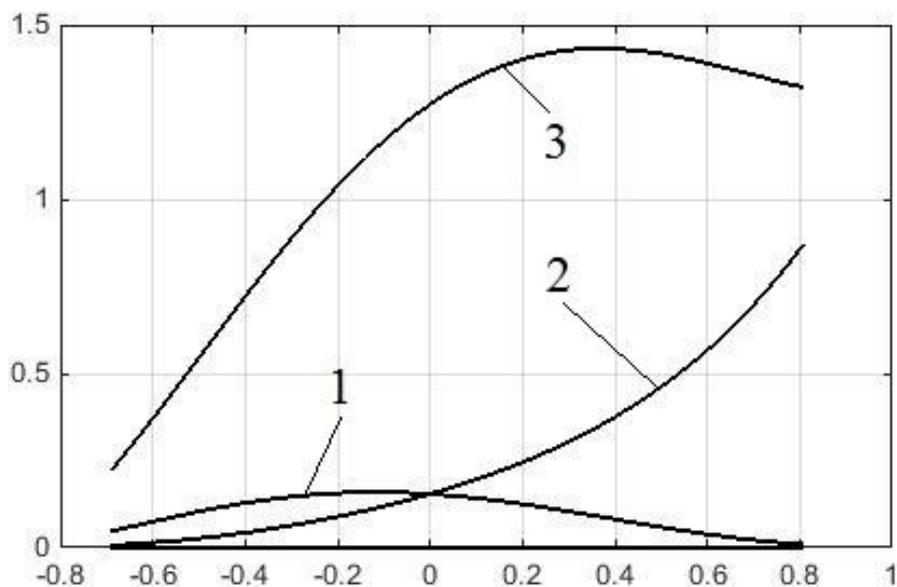


Рис. 4.3. Изменение присоединенного момента инерции жидкости  $J_2$  от глубины жидкости  $h$

1 – относительно центра бака; 2 - относительно свободной поверхности; 3 – относительно полюса  $O_1$  при  $L=1$

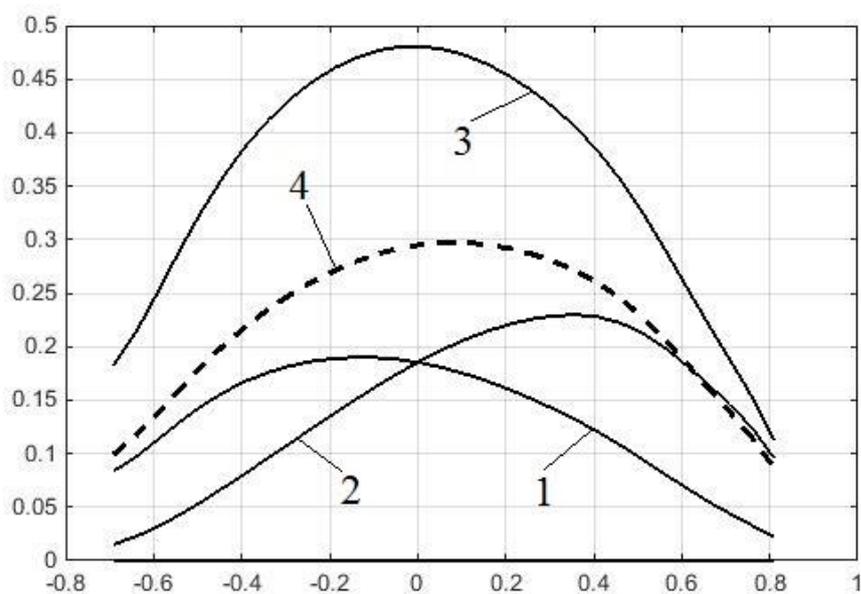


Рис. 4.4. Изменение коэффициентов  $\lambda_{01}^{(1)}$  и  $\lambda_{11}^{(1)}$  от глубины жидкости  $h$

1 –  $\lambda_{01}^{(1)}$  относительно центра бака; 2 -  $\lambda_{01}^{(1)}$  относительно свободной поверхности; 3 –  $\lambda_{11}^{(1)}$  относительно полюса  $O_1$  при  $L=1$ ; 4 -  $\lambda_{11}^{(1)}$

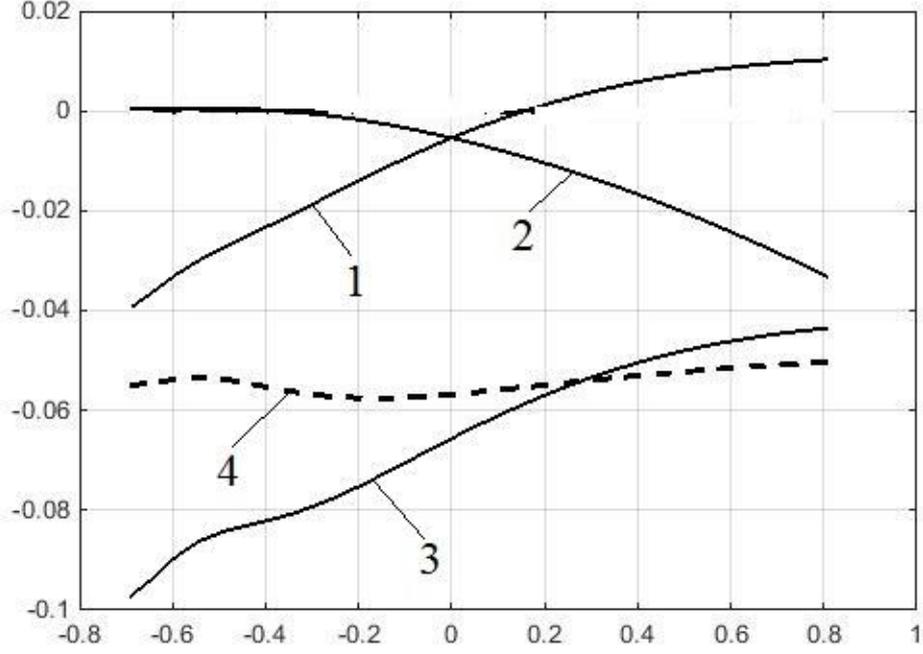


Рис. 4.5. Изменение коэффициентов  $\lambda_{01}^{(2)}$  и  $\lambda_{11}^{(2)}$  от глубины жидкости  $h$   
 1 –  $\lambda_{01}^{(2)}$  относительно центра бака; 2 –  $\lambda_{01}^{(2)}$  относительно свободной поверхности; 3 –  $\lambda_{01}^{(2)}$  относительно полюса  $O_1$  при  $L=1$ ; 4 –  $\lambda_{11}^{(2)}$

Уравнения движения жидкости в подвижной сферической полости имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_n^{(1s)} \ddot{s}_n + V_{0\Gamma} \delta_n^{(1)} \dot{s}_n + c_n s_n + \mu_n^{(1p)} \ddot{p}_n + V_{0\Gamma} \varepsilon_n^{(1)} \dot{p}_n + \lambda_{0n}^{(1)} \ddot{g} + \lambda_{1n}^{(1)} \dot{g} = 0, \\ \mu_n^{(2p)} \ddot{p}_n + [V_{0\Gamma} \delta_n^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_n^{(2)}] \dot{p}_n + \mu_n^{(2s)} \ddot{s}_n + V_{0\Gamma} \varepsilon_n^{(2)} \dot{s}_n + \lambda_{0n}^{(2)} \ddot{g} + \gamma \lambda_{1n}^{(2)} \dot{g} = 0, \end{aligned} \quad (4.87)$$

( $n=1, 2, 3, \dots$ ).

где коэффициенты системы (4.87) будут

$$\begin{aligned} \mu_n^{(1s)} &= \pi \int_0^{r_0} \varphi_n^{(1)} \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial z} r dr, \quad \mu_n^{(1p)} = \pi \int_0^{r_0} \varphi_n^{(2)} \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial z} r dr, \\ \mu_n^{(2p)} &= \pi \int_0^{r_\Sigma} \varphi_n^{(2)} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z} r dr, \quad \mu_n^{(2s)} = \pi \int_0^{r_\Sigma} \varphi_n^{(1)} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z} r dr = \mu_n^{(1p)}, \\ \delta_n^{(1)} &= -\pi \int_0^{r_0} \left( \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial h} \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial z} \right) r dr, \\ \varepsilon_n^{(1)} &= -\pi \int_0^{r_0} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(2)}}{\partial h} \frac{\partial \varphi_{mn}^{(1)}}{\partial z} r dr, \quad \varepsilon_n^{(2)} = -\pi \int_0^{r_\Sigma} \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial h} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z} r dr, \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\delta_n^{(2)} = -\pi \int_0^{r_{\Sigma}} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial h} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z} r dr, \quad \sigma_n^{(2)} = -\pi \int_0^{r_{\Sigma}} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z} dr,$$

$$c_n = \pi \int_0^{r_0} \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial z} r dr.$$

Уравнения (4.86) и (4.87) образуют в совокупности замкнутую систему уравнений возмущенного движения физического маятника со сферической полостью, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, вытекающей через заборные устройства.

Рассмотрим собственное движение рассматриваемой механической системы т.е.  $M^{(e)} = 0$ . Замкнутая система уравнений возмущенного движения системы «тело + жидкость» имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_n^{(1s)} \ddot{s}_n + V_{0\Gamma} \delta_n^{(1)} \dot{s}_n + c_n s_n + \mu_n^{(1p)} \ddot{p}_n + V_{0\Gamma} \varepsilon_n^{(1)} \dot{p}_n + \lambda_{0n}^{(1)} \ddot{\mathcal{G}} + \lambda_{1n}^{(1)} \dot{\mathcal{G}} &= 0, \\ \mu_n^{(2p)} \ddot{p}_n + [V_{0\Gamma} \delta_n^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_n^{(2)}] \dot{p}_n + \mu_n^{(2s)} \ddot{s}_n + V_{0\Gamma} \varepsilon_n^{(2)} \dot{s}_n + \lambda_{0n}^{(2)} \ddot{\mathcal{G}} + \gamma \lambda_{1n}^{(2)} \dot{\mathcal{G}} &= 0, \\ (J_1 + J_2) \ddot{\mathcal{G}} + \gamma \beta \dot{\mathcal{G}} - m z_{1c} \mathcal{G} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(1)} \dot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(2)} \ddot{p}_n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(2)} \dot{p}_n &= \\ = 0. \end{aligned} \quad (4.89)$$

С учетом только главного тона ( $n=1$ ), положим  $s_1 = s_1^0 e^{i\Omega t}$ ,  $p_1 = p_1^0 e^{i\Omega t}$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 e^{i\Omega t}$ . Из системы уравнений (4.89), получим

$$\begin{bmatrix} \mu_1^{(1s)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \delta_1^{(1)} \Omega + c_1 & \mu_1^{(1p)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \varepsilon_1^{(1)} \Omega & \lambda_{01}^{(1)} \Omega^2 + \lambda_{11}^{(1)} \\ \mu_1^{(2s)} \Omega^2 + V_{0\Gamma} \varepsilon_1^{(2)} \Omega & \mu_1^{(2p)} \Omega^2 + \\ & + [V_{0\Gamma} \delta_1^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \sigma_1^{(2)}] \Omega & \lambda_{0n}^{(2)} \Omega^2 + \gamma \lambda_{1n}^{(2)} \Omega \\ \lambda_{01}^{(1)} \Omega^2 + \lambda_{11}^{(1)} & \lambda_{01}^{(2)} \Omega^2 + \gamma \lambda_{11}^{(2)} \Omega & (J_1 + J_2) \Omega^2 + \\ & & + \gamma \beta \Omega - m z_{1c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1^0 \\ p_1^0 \\ \mathcal{G}^0 \end{bmatrix} = 0, \quad (4.90)$$

где  $[s_1^0 \quad p_1^0 \quad \mathcal{G}^0]^T$  - собственный вектор амплитуд.

Характеристическое уравнение системы (4.90) запишется в виде

$$F(\Omega) = \begin{vmatrix} \mu_1^{(1s)}\Omega^2 + V_{0Г}\delta_1^{(1)}\Omega + c_1 & \mu_1^{(1p)}\Omega^2 + V_{0Г}\varepsilon_1^{(1)}\Omega & \lambda_{01}^{(1)}\Omega^2 + \lambda_{11}^{(1)} \\ \mu_1^{(2s)}\Omega^2 + V_{0Г}\varepsilon_1^{(2)}\Omega & \mu_1^{(2p)}\Omega^2 + \\ + [V_{0Г}\delta_1^{(2)} + (V_{0\Sigma} + \gamma)\sigma_1^{(2)}]\Omega & \lambda_{0n}^{(2)}\Omega^2 + \gamma\lambda_{1n}^{(2)}\Omega \\ \lambda_{01}^{(1)}\Omega^2 + \lambda_{11}^{(1)} & \lambda_{01}^{(2)}\Omega^2 + \gamma\lambda_{11}^{(2)} & (J_1 + J_2)\Omega^2 + \\ & & + \gamma\beta\Omega - mz_{1c} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.91)$$

При численном расчете считаем бак тонкостенным и следовательно его массой и моментом инерции будем пренебрегать ( $m_1 \approx 0$ ,  $J_1 \approx 0$ ). Результаты численного решения уравнения (4.91) при  $L = 1$ ,  $h_\Sigma = 0,86$  ( $r_\Sigma \approx 0,5$ ),  $m = 1$ ,  $n = 1$ ,  $M = 10$  приведены в табл.4.1-4.2.

**Таблица 4.1.** Собственные числа движений системы «тело + жидкость» при

$$G = 0,005; \beta = \gamma^{-1} = 1$$

$h$	$\Omega_1$	$\Omega_{2,3}$	$\Omega_{4,5}$
-0,6	-17,5773	-0,1295 ± 3,4551i	-0,0158 ± 0,7501i
-0,5	-15,6896	-0,0505 ± 3,3434i	-0,0112 ± 0,7612i
-0,4	-15,2558	-0,0612 ± 3,1010i	-0,0089 ± 0,7731i
-0,3	-15,1749	-0,0605 ± 2,8680i	-0,0075 ± 0,7858i
-0,2	-15,1660	-0,0520 ± 2,6677i	-0,0066 ± 0,7995i
-0,1	-15,1553	-0,0429 ± 2,4994i	-0,0058 ± 0,8286i
0	-15,1316	-0,0357 ± 2,3712i	-0,0058 ± 0,8286i
0,1	-15,0862	-0,0286 ± 2,2401i	-0,0057 ± 0,8474i
0,2	-15,0345	-0,0232 ± 2,1421i	-0,0056 ± 0,8659i
0,3	-14,9780	-0,0187 ± 2,0630i	-0,0057 ± 0,8855i
0,4	-14,9214	-0,0153 ± 2,0036i	-0,0059 ± 0,9064i
0,5	-14,8684	-0,0132 ± 1,9668i	-0,0062 ± 0,9281i
0,6	-14,8203	-0,0115 ± 1,9570i	-0,0067 ± 0,9500i
0,7	-14,7777	-0,0084 ± 1,9860i	-0,0071 ± 0,9706i

**Таблица 4.2.** Собственные числа движений системы «тело + жидкость» при

$$\beta = \gamma^{-1} = 0,1$$

$h$	$\gamma^{-1}$	$G$	$\Omega_1$	$\Omega_{2,3}$	$\Omega_{4,5}$
-0,3	0	0	----	$\pm 1,1356i$	$\pm 0,7870i$
	0,1	0,002	-54,0361	$-0,0021 \pm 1,1357i$	$-0,0020 \pm 0,7870i$
		0,003	-56,0393	$-0,0023 \pm 1,1357i$	$-0,0030 \pm 0,7870i$
		0,005	-60,0456	$-0,0028 \pm 1,1357i$	$-0,0050 \pm 0,7870i$
		0,008	-66,0552	$-0,0034 \pm 1,1357i$	$-0,0081 \pm 0,7870i$
-0,1	0	0	----	$\pm 1,2054i$	$\pm 0,8168i$
	0,1	0,002	-53,0694	$-0,0018 \pm 1,2055i$	$-0,0019 \pm 0,8168i$
		0,003	-55,0373	$-0,0023 \pm 1,2055i$	$-0,0029 \pm 0,8168i$
		0,005	-58,9731	$-0,0033 \pm 1,2055i$	$-0,0049 \pm 0,8168i$
		0,008	-64,8767	$-0,0048 \pm 1,2055i$	$-0,0078 \pm 0,8168i$
0,2	0	0	----	$\pm 1,3325i$	$\pm 0,8704i$
	0,1	0,002	-52,1077	$-0,0015 \pm 1,3326i$	$-0,0020 \pm 0,8703i$
		0,003	-54,0405	$-0,0021 \pm 1,3326i$	$-0,0030 \pm 0,8703i$
		0,005	-57,9060	$-0,0033 \pm 1,3326i$	$-0,0051 \pm 0,8703i$
		0,008	-63,7043	$-0,0051 \pm 1,3326i$	$-0,0081 \pm 0,8702i$

На рис. 4.6-4.17 представлены изменения действительного корня  $\Omega_1$ , действительной части и мнимой частей комплексно-сопряженных корней  $\Omega_{2,3}$ ,  $\Omega_{4,5}$  характеристического уравнения (4.91) от глубины жидкости  $h$ , коэффициента сопротивления  $\gamma$  ( $\beta = \gamma^{-1}$ ) и расхода  $G$ .

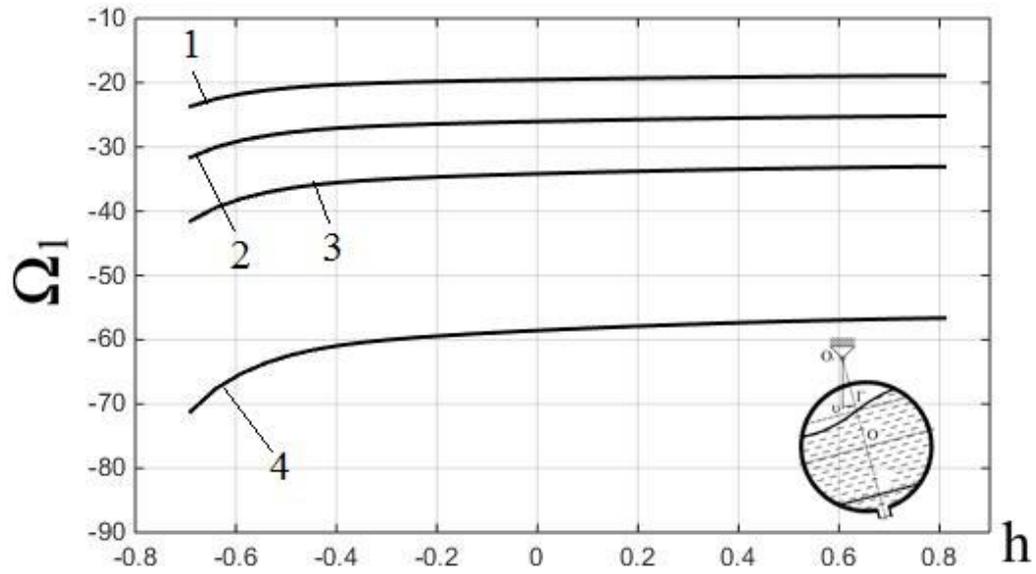


Рис. 4.6. Зависимости  $\Omega_1$ , отвечающие аperiodическому движению «тело + жидкость», от глубины жидкости  $h$  при  $G = 0,005$ :

1 -  $\beta = 0,5$ ; 2 -  $\beta = 0,3$ ; 3 -  $\beta = 0,2$ ; 4 -  $\beta = 0,1$

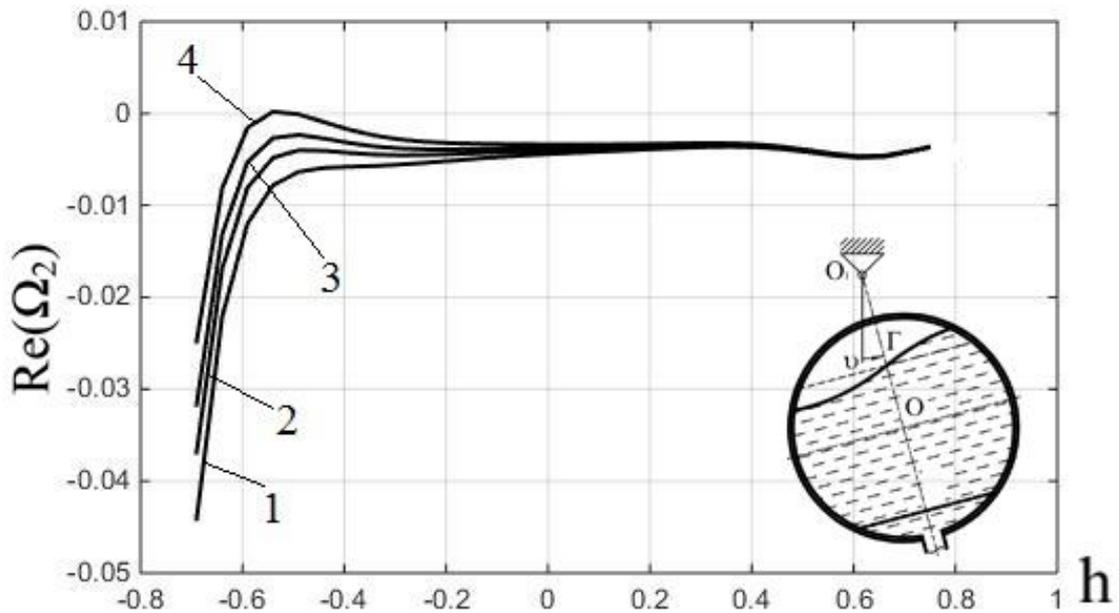


Рис. 4.7. Зависимости действительной части  $\Omega_2$ , отвечающие затухающим колебаниям «тело + жидкость», от глубины жидкости  $h$  при  $G = 0,005$ :

1 -  $\beta = 0,5$ ; 2 -  $\beta = 0,3$ ; 3 -  $\beta = 0,2$ ; 4 -  $\beta = 0,1$

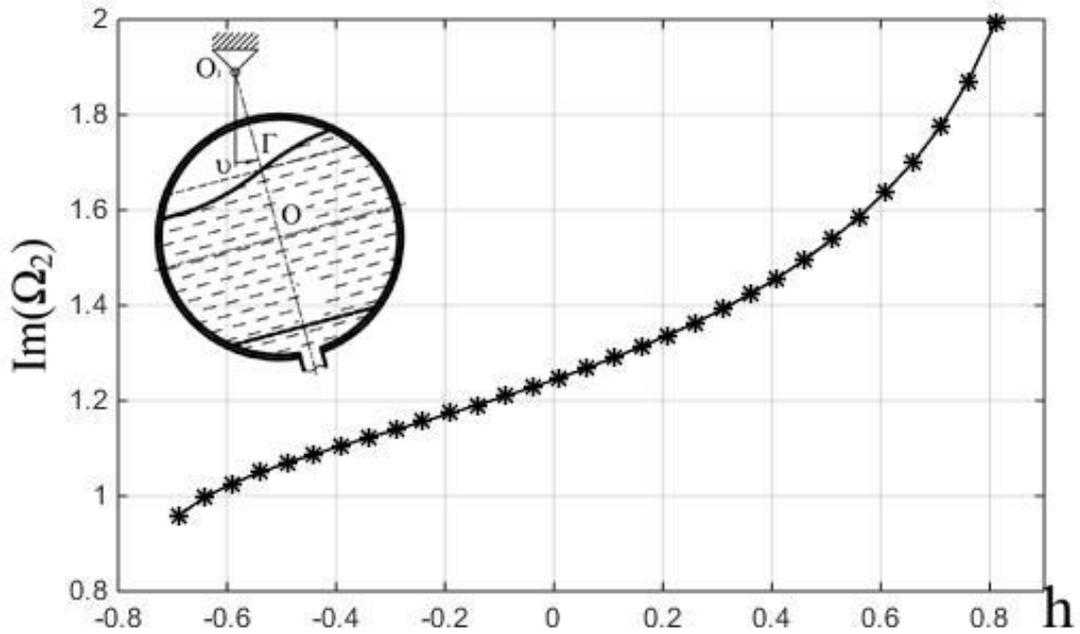


Рис. 4.8. Зависимости частоты затухающих колебаний (мнимой части  $\Omega_2$ ) от глубины жидкости  $h$  при  $G = 0,005$ :  
 «сплошная» -  $\beta = 0,5$ ; «\* \* \*» -  $\beta = 0,1$

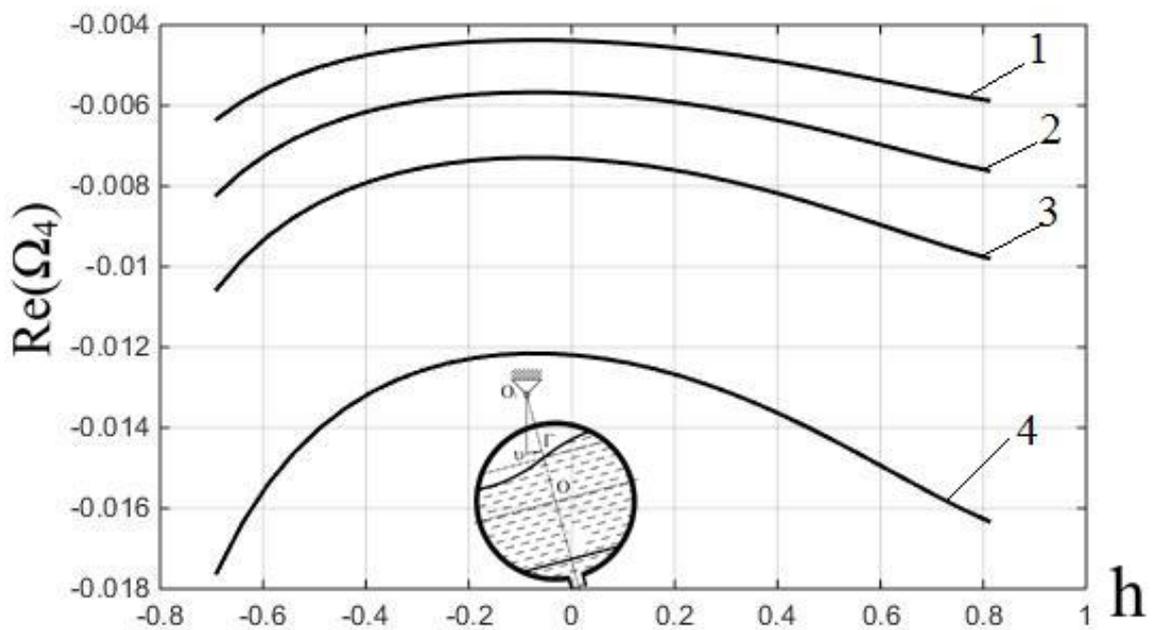


Рис. 4.9. Зависимости действительной части  $\Omega_4$ , отвечающие затухающим колебаниям «тело + жидкость», от глубины жидкости  $h$  при  $G = 0,005$ :  
 1 -  $\beta = 0,5$ ; 2 -  $\beta = 0,3$ ; 3 -  $\beta = 0,2$ ; 4 -  $\beta = 0,1$

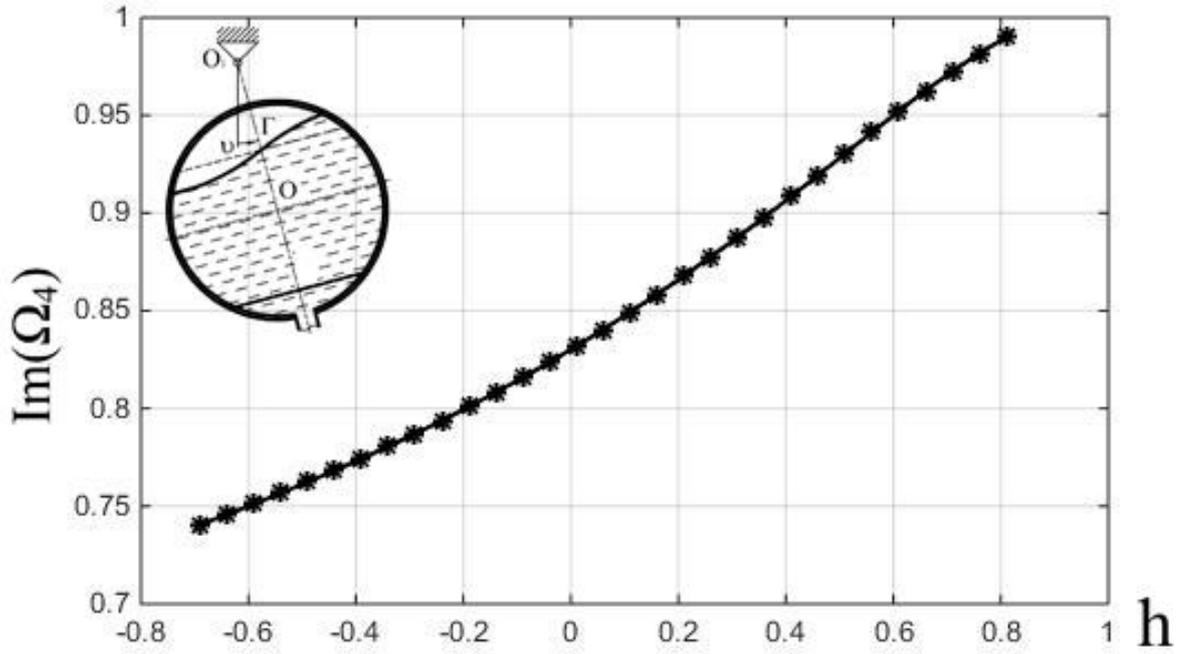


Рис. 4.10. Зависимости частоты затухающих колебаний (мнимой части  $\Omega_4$ ) от

глубины жидкости  $h$  при  $G = 0,005$ :

«сплошная» -  $\beta = 0,5$ ; «\* \* \*» -  $\beta = 0,1$

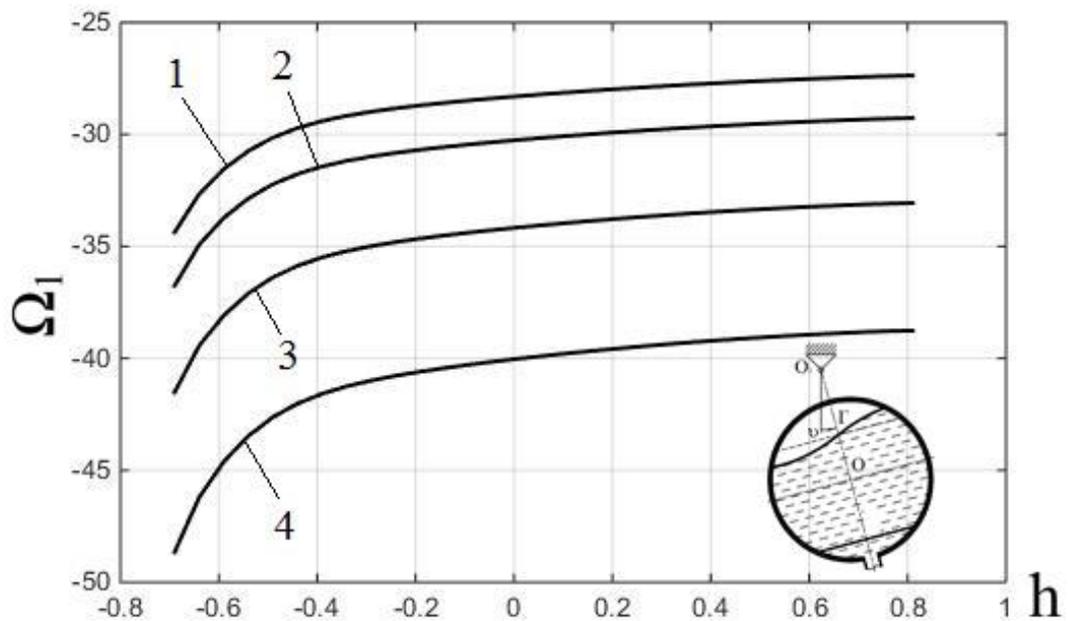


Рис. 4.11. Зависимости  $\Omega_1$ , отвечающие аperiodическому движению «тело +

жидкость», от глубины жидкости  $h$  при  $\beta = 0,2$ :

1 -  $G = 0,002$ ; 2 -  $G = 0,003$ ; 3 -  $G = 0,005$ ; 4 -  $G = 0,008$

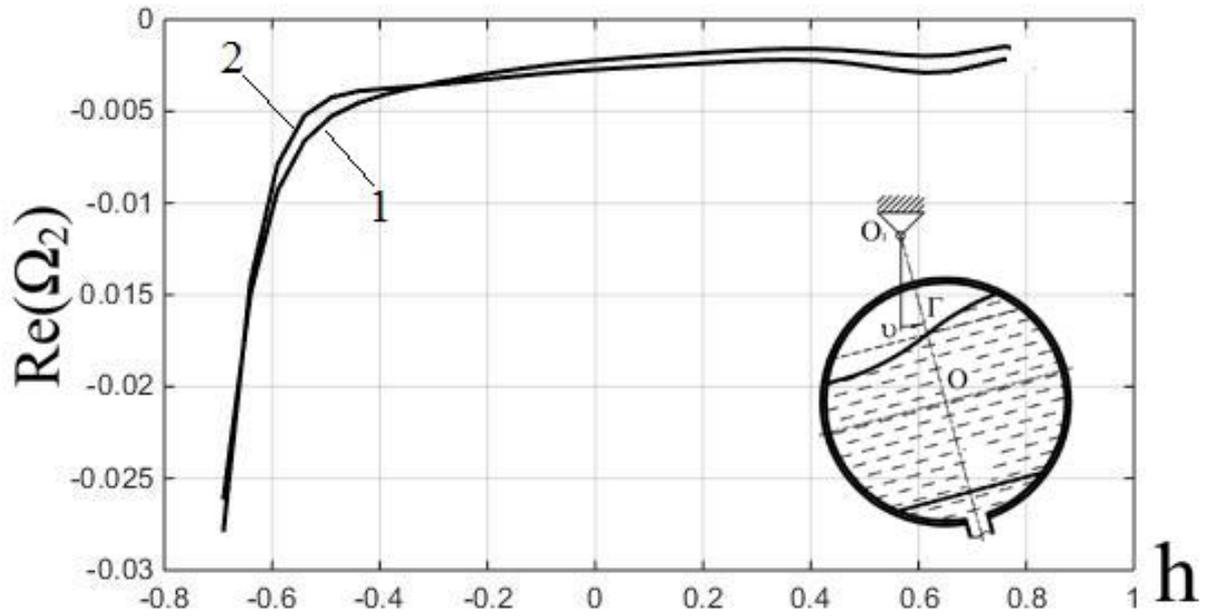


Рис. 4.12. Зависимости действительной части  $\Omega_2$ , отвечающие затухающим колебаниям «тело + жидкость», от глубины жидкости  $h$  при  $\beta = 0,2$ :

1 -  $G = 0,002$ ; 2 -  $G = 0,003$

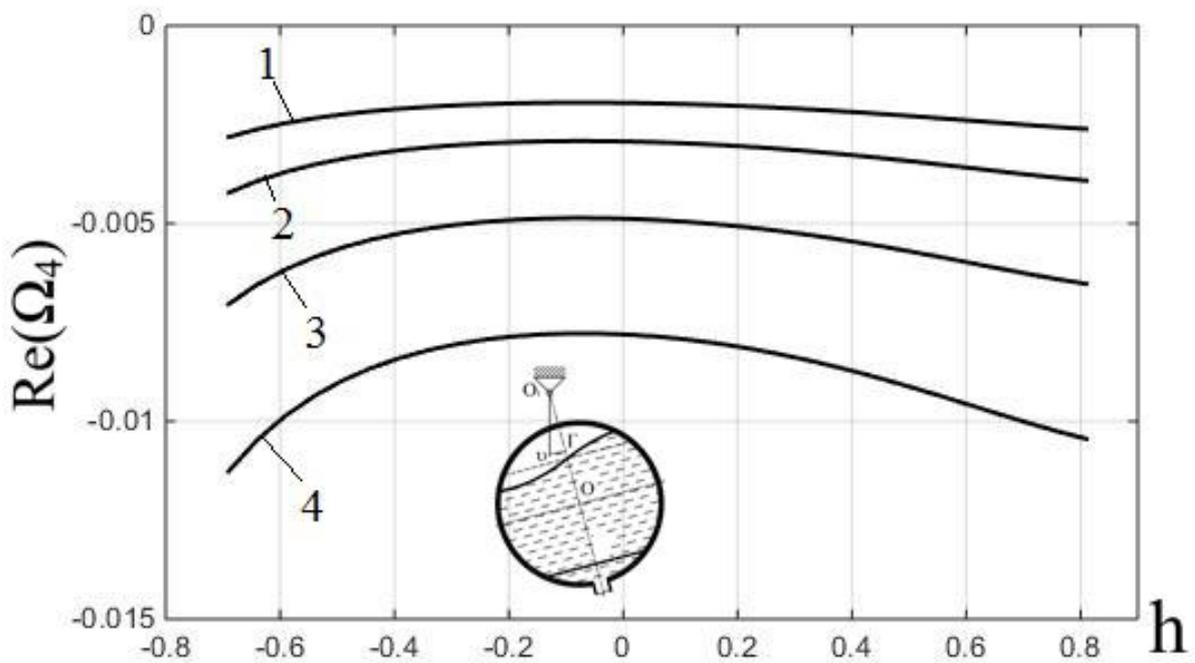


Рис. 4.13. Зависимости действительной части  $\Omega_4$ , отвечающие затухающим колебаниям «тело + жидкость», от глубины жидкости  $h$  при  $\beta = 0,2$ :

1 -  $G = 0,002$ ; 2 -  $G = 0,003$ ; 3 -  $G = 0,005$ ; 4 -  $G = 0,008$

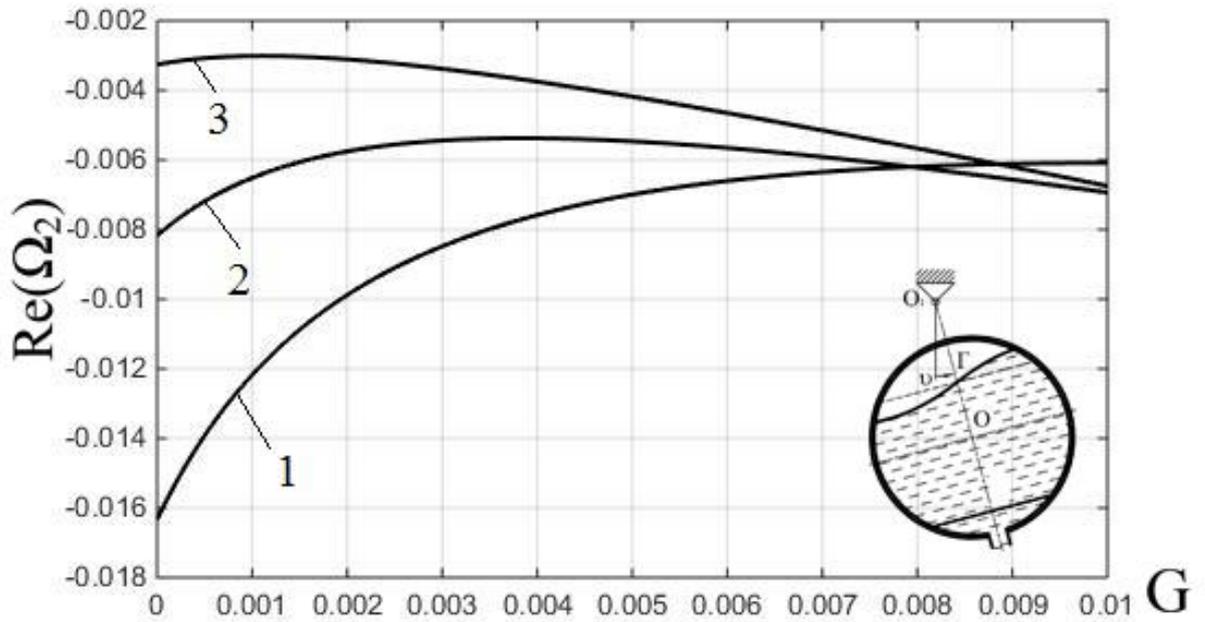


Рис. 4.14. Зависимости действительной части  $\Omega_2$ , отвечающие затухающим колебаниям «тело + жидкость», от  $G$  при  $\beta = 1$ :

1:  $h = -0,3$ ; 2:  $h = -0,1$ ; 3:  $h = 0,2$

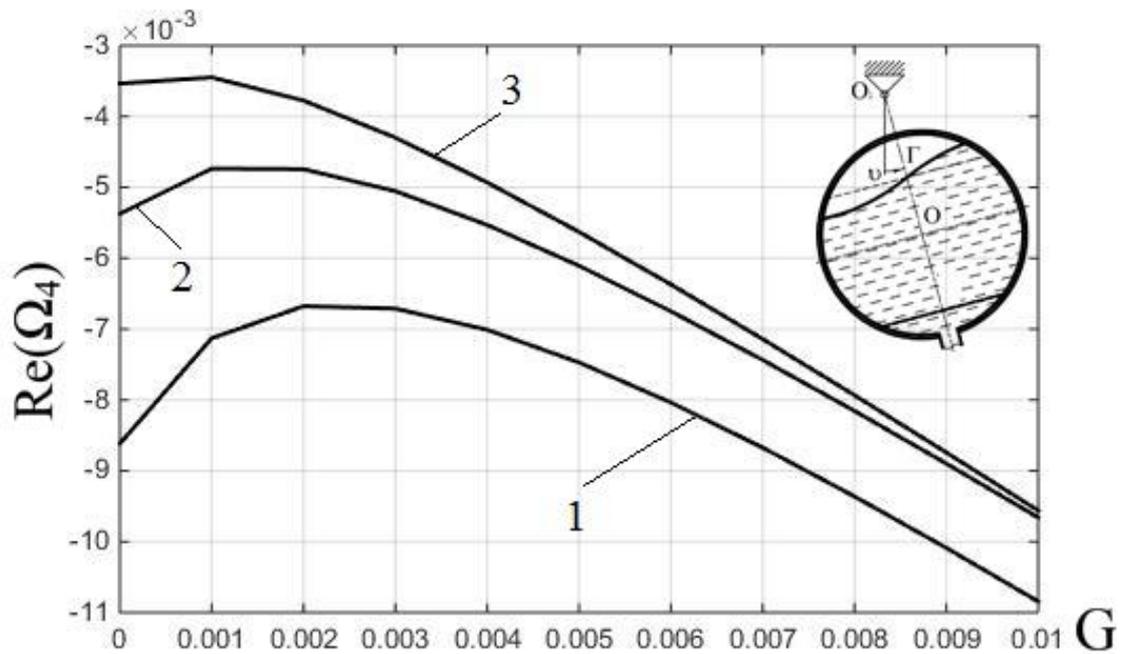


Рис. 4.15. Зависимости действительной части  $\Omega_4$ , отвечающие затухающим колебаниям жидкости, от  $G$  при  $\beta = 1$

1:  $h = -0,3$ ; 2:  $h = -0,1$ ; 3:  $h = 0,2$

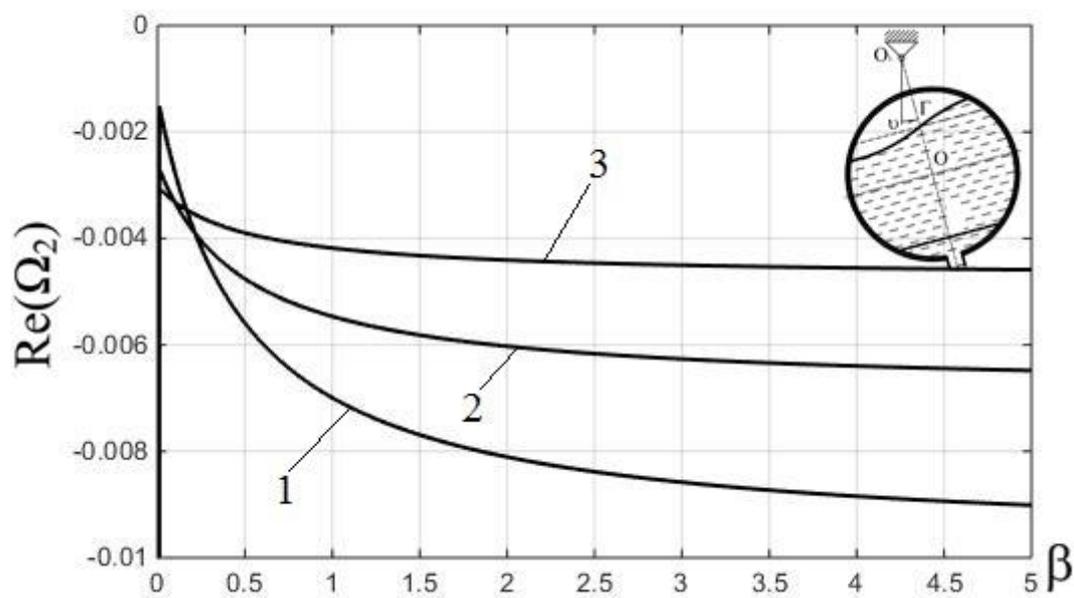


Рис. 4.16. Зависимости действительной части  $\Omega_2$ , отвечающие затухающим колебаниям «тело + жидкость», от  $\beta$  при  $G = 0,005$ :

1:  $h = -0,3$ ; 2:  $h = -0,1$ ; 3:  $h = 0,2$

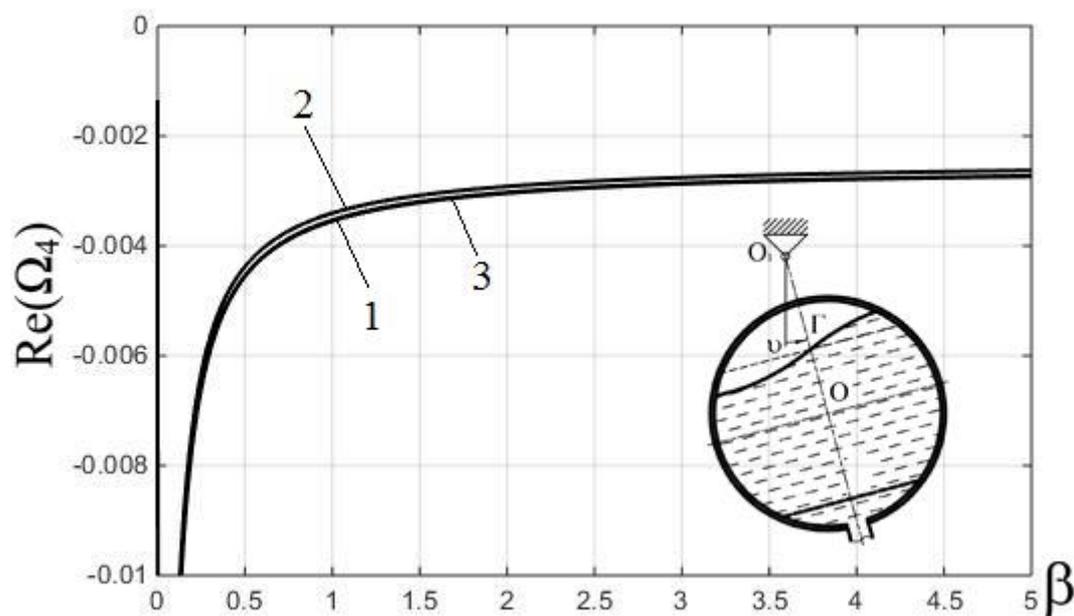


Рис. 4.17. Зависимости действительной части  $\Omega_4$ , отвечающие затухающим колебаниям «тело + жидкость», от  $\beta$  при  $G = 0,005$ :

1:  $h = -0,3$ ; 2:  $h = -0,1$ ; 3:  $h = 0,2$

#### 4.10. Системы уравнений возмущенного движения твердого тела с полостью, имеющей ЗУ и наполненной жидкостью, в условиях микрогравитации

Рассмотрим общую задачу о движения твердого тела, находящегося в условиях микрогравитации, с полостью осесимметричной конфигурации, частично заполненной каплевой жидкостью, вытекающей через заборные устройства (рис. 4.18).

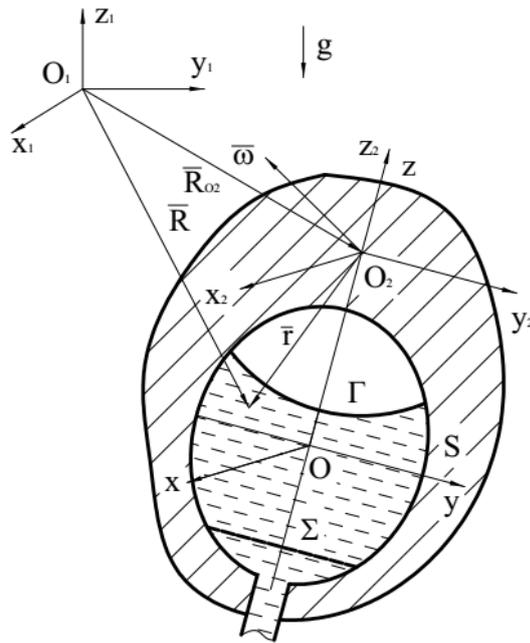


Рис. 4.18. Движения твердого тела с полостью, имеющей ЗУ и наполненной жидкостью, в условиях микрогравитации

В этом случае интенсивность гравитационной силы  $g \ll 1$ . Введем все необходимые обозначения и системы координат так, как в пунктах 3.2 и 4.1.

Перепады давлений на свободной поверхности  $\Gamma_0$  и поверхности слива  $\Sigma$  в невозмущенном состоянии запишутся в виде

$$p_{\Gamma_0} - p_a = -2\sigma H \quad \text{на } \Gamma_0, \quad (4.92)$$

$$p_{\Sigma+} - p_{\Sigma-} = \zeta \rho \frac{(V_{\Sigma}^{(0)})^2}{2} \quad \text{на } \Sigma. \quad (4.93)$$

В возмущенном состоянии свободная поверхность  $\Gamma$  жидкости, потенциал  $\Pi$  и давление  $p$  так же имеют вид

$$\xi_3 = N(\xi_1, \xi_2, t), \quad (4.94)$$

$$\Pi(x, y, z, t) = \Pi_0(x, y, z) + \delta\Pi(x, y, z, t), \quad (4.95)$$

$$p(x, y, z, t) = p_0(x, y, z) + \delta p(x, y, z, t), \quad (4.96)$$

Вариации перепадов давлений на поверхностях  $\Gamma$  и  $\Sigma$  в возмущенном состоянии принимают вид

$$\delta p_\Gamma = \delta(-2\sigma H) = -\sigma \cdot \delta(k_1 + k_2) \text{ на } \Gamma, \quad (4.97)$$

$$\delta p_\Sigma = \zeta \rho \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \vec{V} = \gamma \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_\Sigma \text{ на } \Sigma. \quad (4.98)$$

Предполагая возмущенное движение жидкости потенциальным, будем иметь уравнение движения жидкости в линеаризованном виде

$$\frac{\partial \vec{V}_a}{\partial t} + \nabla \left[ \vec{V}^{(0)} \cdot (\vec{V}_a - \vec{V}_e) \right] + \frac{1}{\rho} \nabla \delta p + \nabla \delta \Pi = 0. \quad (4.99)$$

Используя понятие потенциала абсолютных скоростей в уравнении (4.99), получим линеаризованный интеграл Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \frac{1}{\rho} \nabla \delta p + \nabla \delta \Pi - \vec{V}^{(0)} \cdot \vec{V}_e = c(t), \quad (4.100)$$

где  $c(t)$  - произвольная функция времени. Положим  $c(t) = 0$ .

Из уравнения (4.100), используя выражение (4.97), получаем граничное условие на поверхности  $\Gamma_0$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Gamma^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \frac{\sigma}{\rho} (aN - \Delta_\Gamma N) - \vec{V}_\Gamma^{(0)} \cdot \vec{V}_e = 0. \quad (4.101)$$

Аналогично, поставив выражение (4.98) в (4.100), получил граничное условие на поверхности  $\Sigma$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \gamma \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \cdot \vec{n}_\Sigma - \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \vec{V}_e = 0. \quad (4.102)$$

Используя уравнение неразрывности, условие непротекания, краевое условие за линии контакта, начальные условия, получаем постановку эволюционной задачи

$$\Delta \Phi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} = \left[ \dot{\vec{u}} + (\dot{\vec{g}} \times \vec{r}) \right] \cdot \vec{n} \text{ на } S,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Gamma^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \frac{\sigma}{\rho} (aN - \Delta_\Gamma N) - \vec{V}_\Gamma^{(0)} \cdot \vec{V}_e = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (4.103)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \nabla \Phi + \gamma \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \cdot \vec{n}_\Sigma - \vec{V}_\Sigma^{(0)} \cdot \vec{V}_e = 0 \text{ на } \Sigma,$$

$$\vec{w}_\Gamma = \vec{w}_\Gamma^0, \quad \vec{w}_\Sigma = \vec{w}_\Sigma^0, \quad \frac{\partial \vec{w}_\Gamma}{\partial t} = \vec{V}_\Gamma^0, \quad \frac{\partial \vec{w}_\Sigma}{\partial t} = \vec{V}_\Sigma^0 \text{ при } t = 0.$$

Потенциал абсолютной скорости разыскиваем в виде суммы трех функций

$$(4.17), \text{ в которой функция } \vec{\Psi}(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 \Psi_i(x, y, z) \vec{e}_i \text{ определена задачами (4.20)}$$

,  $\Phi_n^{(2)}(x, y, z)$  определена краевой задачей (4.19), а  $\Phi_n^{(1)}(x, y, z)$  - собственные функции, определяемые из задачи на собственные значения

$$\Delta \Phi_n^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S \cup \Sigma,$$

$$\frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n} = \lambda_n^{(1)} B_n^{-1} \Phi_n^{(1)} \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n} + \mu \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n} = 0 \text{ на } l. \quad (4.104)$$

Подставив полученное выражение  $\Phi(x, y, z, t)$  в виде (4.17) в условия на свободной поверхности и на поверхности слива краевой задачи (4.103),

умножив на  $\rho \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_\Gamma}$  и  $\rho \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_\Sigma}$ , проинтегрировав по площади невозмущённой

свободной поверхности и поверхности слива, соответственно, получим

$$\begin{aligned} \mu_n^{(1s)} \ddot{s}_n + V_\Gamma^{(0)} \delta_n^{(1)} \dot{s}_n + c_n s_n + \mu_n^{(1p)} \ddot{p}_n + V_\Gamma^{(0)} \varepsilon_n^{(1)} \dot{p}_n + \vec{\lambda}_n^{(1)} \ddot{u} + \vec{\lambda}_{0n}^{(1)} \ddot{\vec{g}} + \vec{\lambda}_{1n}^{(1)} \dot{\vec{g}} = 0, \\ \mu_n^{(2p)} \ddot{p}_n + \left[ V_\Gamma^{(0)} \delta_n^{(2)} + (-V_\Sigma^{(0)} + \gamma) \sigma_n^{(2)} \right] \dot{p}_n + \mu_n^{(2s)} \ddot{s}_n + V_\Gamma^{(0)} \varepsilon_n^{(2)} \dot{s}_n + \vec{\lambda}_n^{(2)} \ddot{u} + \\ + \gamma \vec{\lambda}_n^* \dot{u} + \vec{\lambda}_{0n}^{(2)} \ddot{\vec{g}} + \gamma \vec{\lambda}_{1n}^{(2)} \dot{\vec{g}} = 0, \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.105)$$

где

$$c_n = \sigma \left[ a \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} \Delta_\Gamma \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \right) \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} d\Gamma_0 \right], \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned}\vec{\lambda}_{1n}^{(1)} &= \sigma \left[ a \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial n_{\Gamma_0}} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} \Delta_{\Gamma} \left( \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial n_{\Gamma_0}} \right) \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} d\Gamma_0 \right] = \\ &= \sigma \left[ a \int_{\Gamma_0} (\vec{r} \times \vec{n}_{\Gamma}) \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} \Delta_{\Gamma} ((\vec{r} \times \vec{n}_{\Gamma})) \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} d\Gamma_0 \right],\end{aligned}\quad (4.107)$$

а остальные гидродинамические коэффициенты определены по формулам в пункте 4.5.

Аналогично пункту 4.7, получим уравнение малого поступательного движения и уравнение малого вращения относительно полюса  $O_2$  системы «тело + жидкость» в виде

$$m\ddot{u} + \gamma\beta_0\dot{u} + L\ddot{\mathcal{G}} + \gamma\lambda_0\dot{\mathcal{G}} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_n^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_n^{(2)} \ddot{p}_n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_n^* \dot{p}_n = \vec{F}^{(e)}, \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned}(J_1 + J_2)\ddot{\mathcal{G}} + \gamma\beta\dot{\mathcal{G}} - L^*\ddot{\mathcal{G}} + \bar{L}\ddot{u} + \gamma\bar{\lambda}_0\dot{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{0n}^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{1n}^{(1)} \dot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{0n}^{(1)} \ddot{p}_n + \\ + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{1n}^{(2)} \dot{p}_n = \vec{M}^{(e)}.\end{aligned}\quad (4.109)$$

#### 4.11. Колебания физического маятника, имеющего сферическую полость с плоской поверхностью ЗУ, в условиях микрогравитации

В качестве примера рассмотрим задачу о колебаниях физического маятника, вращающегося вокруг оси  $O_1x_1$ , со сферической полостью, частично заполненной жидкостью, вытекающей через заборное устройство, имитирующее локальную КСОЖ, упрощенная схема которой приведена в пункте 1.5 (рис. 4.19).

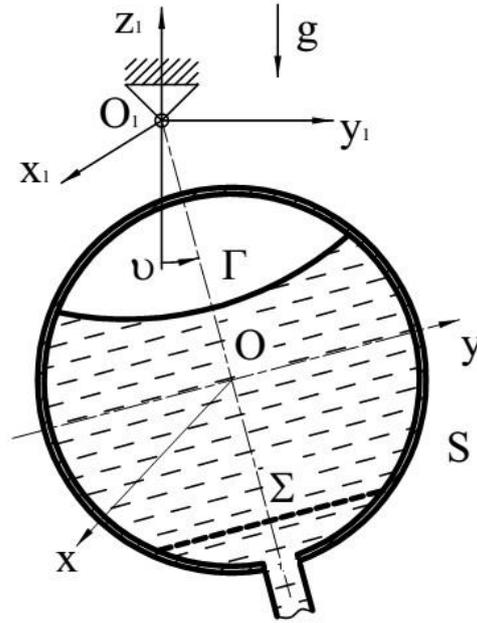


Рис. 4.19. Колебания физического маятника, имеющего сферическую полость с плоским ЗУ, в условиях микрогравитации

В этом случае  $\vec{u} = 0$ ,  $\vec{g}(t) = g(t) \cdot \vec{e}_1$ . Введем связанную систему координат  $Oxyz$  с началом в центре сферы. Формулировка задачи для потенциала абсолютной скорости имеет вид

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \dot{g}(\vec{e}_1 \times \vec{r}) \cdot \vec{n} \text{ на } S,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Gamma} \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Gamma} + \frac{\sigma}{\rho} \left[ a \int_t \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Gamma} dt - \Delta_\Gamma \int_t \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Gamma} dt \right] + V_{0\Gamma} \cdot V_{ez} = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad (4.110)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Sigma} \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial z} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \cdot V_{ez} = 0 \text{ на } \Sigma,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial\Phi}{\partial n} + \mu \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } l,$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi^0 \text{ при } t = 0.$$

Введем безразмерные переменные (3.41) и  $\bar{L} = L/R_0$  ( $L$  – координатное расстояние  $OO_1$ ). Как выше, знак «-» над безразмерными переменными будем пренебрегать.

Используя цилиндрические координаты  $r, \eta, z$  и сферические координаты  $R, \theta, \eta$ , перепишем систему (4.110) в виде

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial R} = \dot{\varrho} \cdot L \cdot \sin\theta \sin\eta \text{ на } S,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Gamma} \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Gamma} + \left[ a \int_t \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Gamma} dt - \Delta_\Gamma \int_t \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Gamma} dt \right] + V_{0\Gamma} \cdot V_{ez} = 0 \text{ на } \Gamma_0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Sigma} \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial z} + (V_{0\Sigma} + \gamma) \cdot V_{ez} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (4.111)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial\Phi}{\partial n} + \mu \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } l,$$

$$\Phi(r, \eta, z, t) = \Phi^0 \text{ при } t = 0.$$

Потенциал  $\Phi(r, \eta, z, t)$ , в этом случае, имеет вид

$$\Phi(r, \eta, z, t) = \dot{\varrho}(t) \cdot \Psi_1(r, \eta, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(1)}(r, \eta, z) \dot{s}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^{(2)}(r, \eta, z) \dot{p}_n(t). \quad (4.112)$$

Краевая задача для нахождения потенциала  $\Psi_1(r, \eta, z)$  запишется в виде

$$\Delta\Psi_1 = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial R} = L \sin\theta \sin\eta \text{ на } S,$$

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial z} = r \sin\eta \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial n_\Gamma} = [r \cdot n_z + (L - z) \cdot n_r] \cdot \sin\eta \text{ на } \Gamma_0, \quad (4.113)$$

а спектральные задачи для определения потенциала  $\Phi_n^{(1)}(r, \eta, z)$

$$\Delta\Phi_n^{(1)} = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi_n^{(1)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S \cup \Sigma, \quad \frac{\partial\Phi_n^{(1)}}{\partial n} = \lambda_n^{(1)} B_n^{-1} \Phi_n^{(1)} \text{ на } \Gamma_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial\Phi_n^{(1)}}{\partial n} + \mu \frac{\partial\Phi_n^{(1)}}{\partial n} = 0 \text{ на } l, \quad \frac{\partial\Phi_n^{(1)}(r_A, \frac{\pi}{2}, z_A)}{\partial n_\Gamma} = 1 \quad (4.114)$$

и потенциала  $\Phi_n^{(2)}(r, \eta, z)$

$$\Delta\Phi_n^{(2)} = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial\Phi_n^{(2)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S \cup \Gamma_0, \quad \frac{\partial\Phi_n^{(2)}}{\partial n} = \lambda_n^{(2)} \Phi_n^{(2)} \text{ на } \Sigma,$$

$$\frac{\partial\Phi_n^{(2)}(r_\Sigma, \frac{\pi}{2}, h_\Sigma)}{\partial z} = 1. \quad (4.115)$$

Приближенные решения задач (4.113) - (4.115) найдены методом Ритца в виде

$$\Psi_1(r, \eta, z) = \psi(r, z) \cdot H(\eta) = \sum_{k=1}^M c_k U_k(r, z) \cdot H(\eta), \quad (4.116)$$

$$\Phi_n^{(1)}(r, \eta, z) = \varphi_n^{(1)}(r, z) H(\eta) = \frac{\sum_{k=1}^M a_{nk} U_k(r, z)}{\sum_{k=1}^M a_{nk} \left( \frac{\partial U_k(r, z)}{\partial n_\Gamma} \right)_{\substack{r=r_A \\ z=z_A}}} H(\eta), \quad (4.117)$$

$$\Phi_n^{(2)}(r, \eta, z) = \varphi_n^{(2)}(r, z) H(\eta) = \frac{\sum_{k=1}^M b_{nk} U_k(r, z)}{\sum_{k=1}^M a_{nk} \left( \frac{\partial U_k(r, z)}{\partial n_\Gamma} \right)_{\substack{r=r_A \\ z=z_A}}} H(\eta), \quad (4.118)$$

где  $\{c_k\}_{k=1}^M$  - решение системы уравнений

$$\sum_{l=1}^M D_{kl} c_l = d_k, \quad (k=1, \dots, M), \quad (4.119)$$

а  $\{a_{nk}\}_{k=1}^M, \{b_{nk}\}_{k=1}^M$  - собственные векторы двух системы линейных уравнений

$$\sum_{l=1}^M a_l (p_{kl}^{(1)} - \lambda^{(1)} q_{kl}^{(1)}) = 0, \quad \sum_{l=1}^M b_l (p_{kl}^{(2)} - \lambda^{(2)} q_{kl}^{(2)}) = 0, \quad (k=1, 2, \dots, M) \quad (4.120)$$

соответственно. Здесь

$$D_{kl} = \pi \left( \int_0^{s_A} U_{k\Gamma} \left( \frac{\partial U_l}{\partial r} n_r + \frac{\partial U_l}{\partial z} n_z \right)_{\Gamma} r(s) ds + \int_{\theta_A}^{\theta_\Sigma} U_{k\Sigma} \left( \frac{\partial U_l}{\partial R} \right)_S \sin \theta d\theta - \int_0^{r_\Sigma} U_{k\Sigma} \left( \frac{\partial U_l}{\partial z} \right)_\Sigma r dr \right),$$

$$d_k = \pi \left( \int_0^{s_A} U_{k\Gamma} [r \cdot n_z + (L-z) \cdot n_r] r ds + L \int_{\theta_0}^{\theta_\Sigma} U_{k\Sigma} \sin^2 \theta d\theta - \int_0^{r_\Sigma} U_{k\Sigma} r^2 dr \right), \quad (4.121)$$

$$p_{kl}^{(1)} = D_{kl}, \quad q_{kl}^{(1)} = \int_0^{s_A} (B^{-1} U_k) U_l r ds, \quad p_{kl}^{(2)} = p_{kl}^{(1)}, \quad q_{kl}^{(2)} = \int_0^{r_\Sigma} U_k U_l r dr, \quad (4.122)$$

$$(k, l=1, 2, \dots, M)$$

Уравнение вращения системы «бак – жидкость» вокруг оси  $O_1 x_1$  имеет вид

$$(J_1 + J_2) \ddot{\theta} + \gamma \beta \dot{\theta} - mg z_{1c} \mathcal{G} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(1)} \dot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(2)} \ddot{p}_n + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(2)} \dot{p}_n = M^{(e)} \quad (4.123)$$

Введем безразмерные коэффициенты

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \frac{J}{\rho R_0^5}, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{\rho R_0^4}, \quad \bar{\lambda}_{0n}^{(1)} = \frac{\lambda_{0n}^{(1)}}{\rho R_0^5}, \quad \bar{\lambda}_{0n}^{(2)} = \frac{\lambda_{0n}^{(2)}}{\rho R_0^5}, \quad \bar{\lambda}_{1n}^{(1)} = \frac{\lambda_{1n}^{(1)}}{\sigma R_0^2}, \\ \bar{\lambda}_{1n}^{(2)} &= \frac{\lambda_{1n}^{(2)}}{\sigma R_0^3}, \quad \bar{m} = \frac{m}{\rho R_0^3}, \quad \bar{z}_c = \frac{z_c}{R_0}, \quad \bar{M}^{(e)} = \frac{M^{(e)}}{\sigma R_0^2}. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Дальше знак «-» над безразмерными коэффициентами также будем опускать.

Тогда все безразмерные гидродинамические коэффициенты определяются по следующим формулам

$$\begin{aligned} J_2 &= \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \vec{e}_1 (\vec{r} \times \vec{n}) \Psi_1 dS = \\ &= \pi \left[ \int_0^{s_A} \psi_{\Gamma_0} [r \cdot n_z + (\mathbf{L} - \mathbf{z}) \cdot n_r] r ds + L \int_{\theta_0}^{\theta_\Sigma} \psi_S \sin^2 \theta d\theta - \int_0^{r_\Sigma} \psi_\Sigma r^2 dr \right], \end{aligned} \quad (4.125)$$

$$\beta = \vec{e}_1 \int_{\tau} (\vec{e}_1 \times \vec{r}) \times \vec{V}_r^{(0)} d\tau = \int_{\tau} z_1 V_r^{(0)} d\tau, \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{0n}^{(1)} &= \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \Phi_n^{(1)} (\vec{r} \times \vec{n}) \vec{e}_1 dS = \\ &= \pi \left[ \int_0^{s_A} (\varphi_n^{(1)})_{\Gamma_0} [r \cdot n_z + (\mathbf{L} - \mathbf{z}) \cdot n_r] r ds + L \int_{\theta_0}^{\theta_\Sigma} (\varphi_n^{(1)})_S \sin^2 \theta d\theta - \int_0^{r_\Sigma} (\varphi_n^{(1)})_\Sigma r^2 dr \right], \end{aligned} \quad (4.127)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{0n}^{(2)} &= \oint_{S \cup \Gamma \cup \Sigma} \Phi_n^{(2)} (\vec{r} \times \vec{n}) \vec{e}_1 dS = \\ &= \pi \left[ \int_0^{s_A} (\varphi_n^{(2)})_{\Gamma_0} [r \cdot n_z + (\mathbf{L} - \mathbf{z}) \cdot n_r] r ds + L \int_{\theta_0}^{\theta_\Sigma} (\varphi_n^{(2)})_S \sin^2 \theta d\theta - \int_0^{r_\Sigma} (\varphi_n^{(2)})_\Sigma r^2 dr \right], \end{aligned} \quad (4.128)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1n}^{(1)} &= a \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} (\vec{r} \times \vec{n}_\Gamma) \vec{e}_1 d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} \Delta_\Gamma \left( \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial n_{\Gamma_0}} \right) \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \vec{e}_1 d\Gamma_0 = \\ &= a\pi \int_0^{s_A} \left( \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial n_\Gamma} \right)_{\Gamma_0} [r \cdot n_z + (\mathbf{L} - \mathbf{z}) \cdot n_r] r ds - \\ &\quad - \pi \int_0^{s_A} \left( \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial n_\Gamma} \right)_{\Gamma_0} \Delta_\Gamma [r \cdot n_z + (\mathbf{L} - \mathbf{z}) \cdot n_r] r ds, \end{aligned} \quad (4.129)$$

$$\lambda_{1n}^{(2)} = \int_\Sigma \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_\Sigma} (\vec{r} \times \vec{n}_\Sigma) \vec{e}_1 d\Sigma = \pi \int_0^{r_\Sigma} \left( \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z} \right)_\Sigma r^2 dr. \quad (4.130)$$

Уравнение (4.123) запишется в форме

$$\begin{aligned} & (J_1 + J_2) \ddot{\mathcal{G}} + \gamma \beta \dot{\mathcal{G}} - Vo \cdot m z_{1c} \mathcal{G} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(1)} s_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(2)} \ddot{p}_n + \\ & + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(2)} \dot{p}_n = M^{(e)}. \end{aligned} \quad (4.131)$$

Остальные коэффициенты в системе движения жидкости (4.105) определены в форме

$$\begin{aligned} \mu_n^{(1s)} &= \int_{\Gamma} \Phi_n^{(1)} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} d\Gamma = \pi \int_0^{s_A} \varphi_n^{(1)} \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} r ds, \\ \mu_n^{(1p)} &= \int_{\Gamma} \Phi_n^{(2)} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_{\Gamma_0}} d\Gamma = \pi \int_0^{s_A} \varphi_n^{(2)} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial n_{\Gamma_0}} r ds, \\ \delta_n^{(1)} &= - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial z_A} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} + \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \right) d\Gamma = - \pi \int_0^{s_A} \left( \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial z_A} \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} + \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \right) r ds, \\ \varepsilon_n^{(1)} &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial z_A} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} d\Gamma = - \pi \int_0^{r_0} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z_A} \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} r dr, \\ c_n &= \int_0^{2\pi} \int_0^{s_A} \left( a \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} - \Delta_{\Gamma} \left( \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \right) \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} \right) r ds d\eta = \mu_n^{(1s)} \lambda_n^{(1)}, \\ \mu_n^{(2s)} &= \int_{\Sigma} \Phi_n^{(1)} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial z} d\Sigma = \pi \int_0^{r_{\Sigma}} \varphi_n^{(1)} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z} r dr = \mu_n^{(1p)}, \\ \mu_n^{(2p)} &= \int_{\Sigma} \Phi_n^{(2)} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial z} d\Sigma = \pi \int_0^{r_{\Sigma}} \varphi_n^{(2)} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z} r dr, \\ \varepsilon_n^{(2)} &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial z_A} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial z} d\Sigma = - \pi \int_0^{r_{\Sigma}} \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial z_A} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z} r dr = \varepsilon_n^{(1)}, \\ \delta_n^{(2)} &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial z_A} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial z} d\Sigma = - \pi \int_0^{r_{\Sigma}} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z_A} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z} r dr, \\ \sigma_n^{(2)} &= - \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial z} d\Sigma = - \pi \int_0^{r_{\Sigma}} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z} r dr, \end{aligned} \quad (4.132)$$

При численном расчете считаем бак тонкостенным и следовательно его массой и моментом инерции будем пренебрегать ( $m_1 \approx 0$ ,  $J_1 \approx 0$ ). Результаты

численного решения характеристического уравнения (4.91) собственных движений физического маятника, имеющего сферическую полость с плоской поверхностью слива, в условиях микрогравитации, при  $L = 1$ ,  $h_{\Sigma} = 0,86$  ( $r_{\Sigma} \approx 0,5$ ),  $m = 1$ ,  $n = 1$ ,  $M = 10$  представлены на рис. 4.20-4.24. В этих рисунках: кривая 1 -  $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; кривая 2 -  $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; кривая 3 -  $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$ .

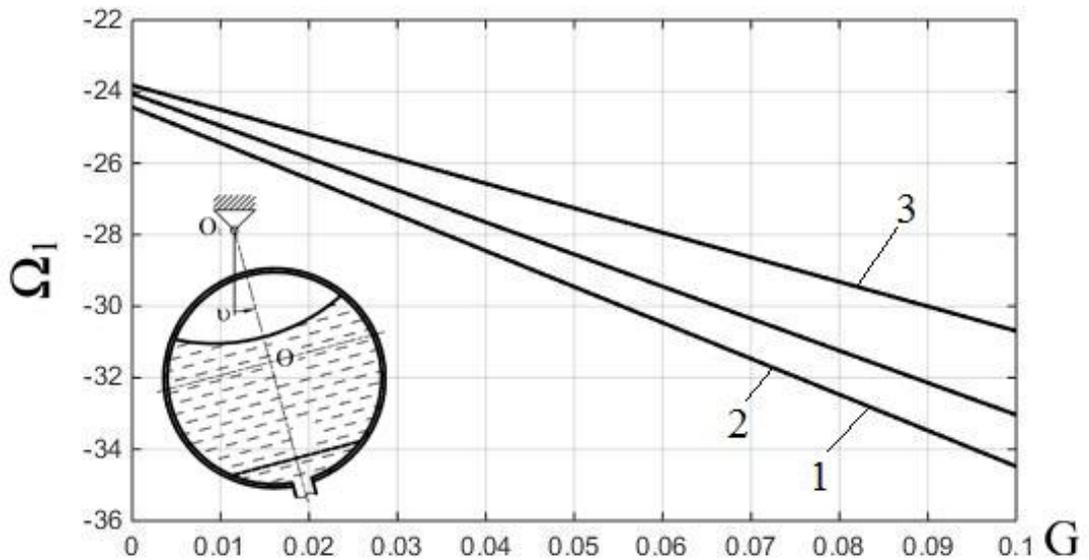
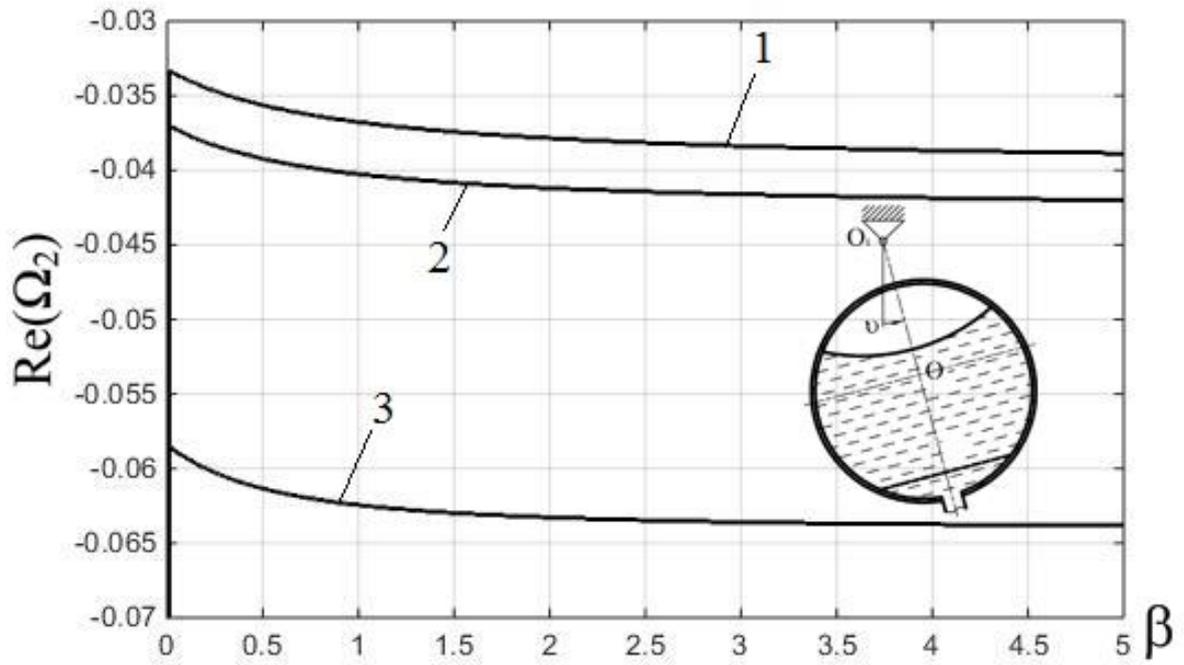
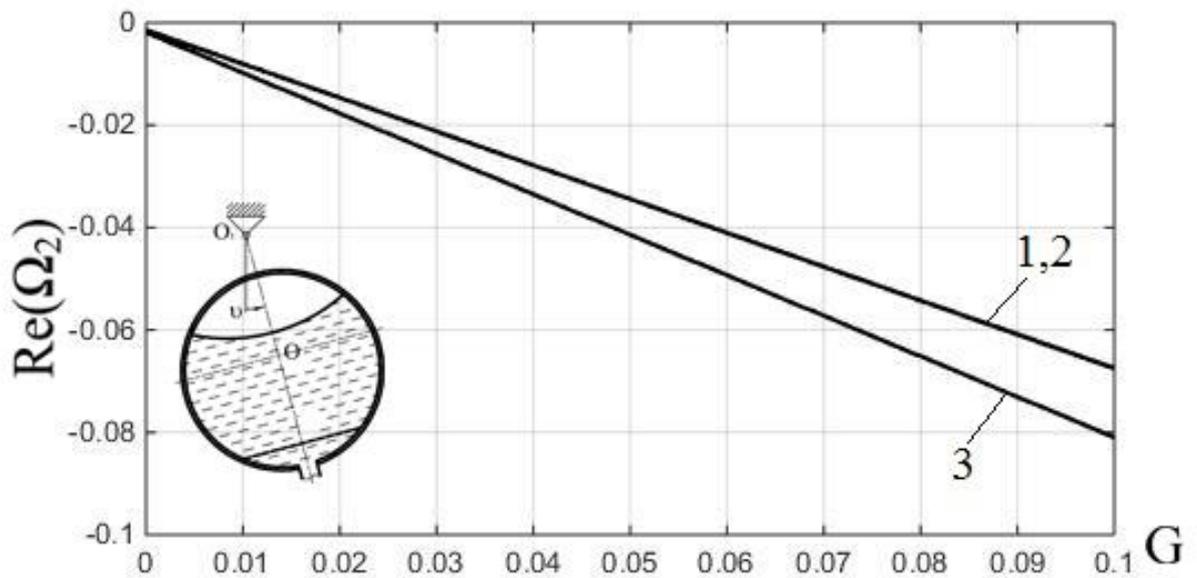


Рис. 4.20. Зависимости  $\Omega_1$ , отвечающие аperiodическому движению «тело + жидкость», от  $G$  при  $\beta = \gamma^{-1} = 0,2$

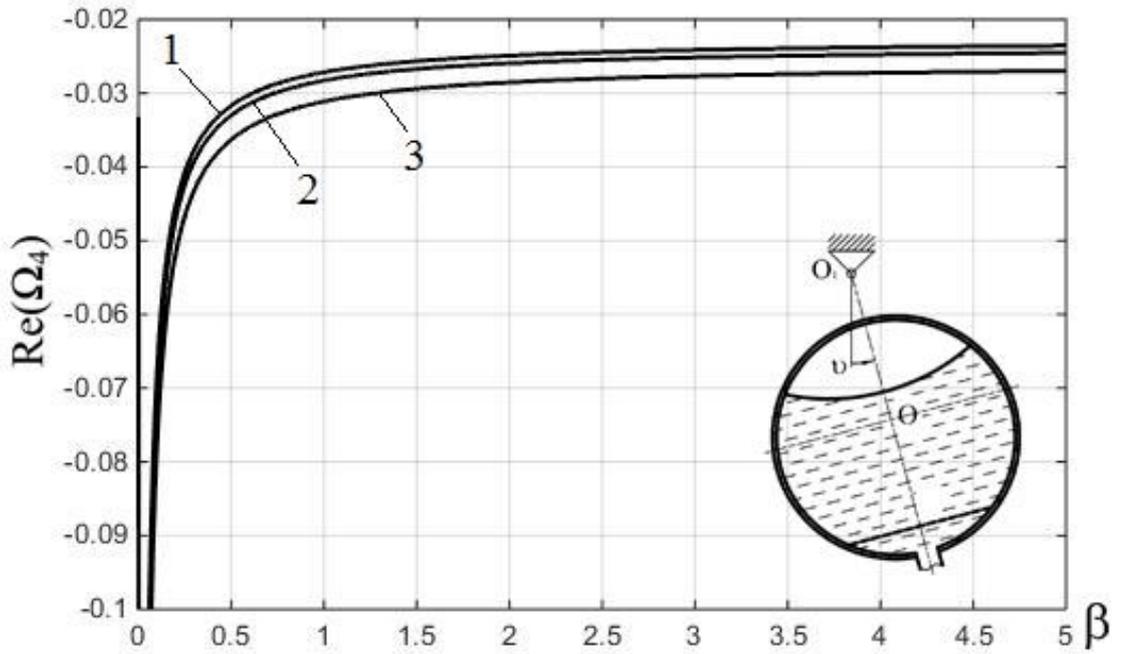


a)

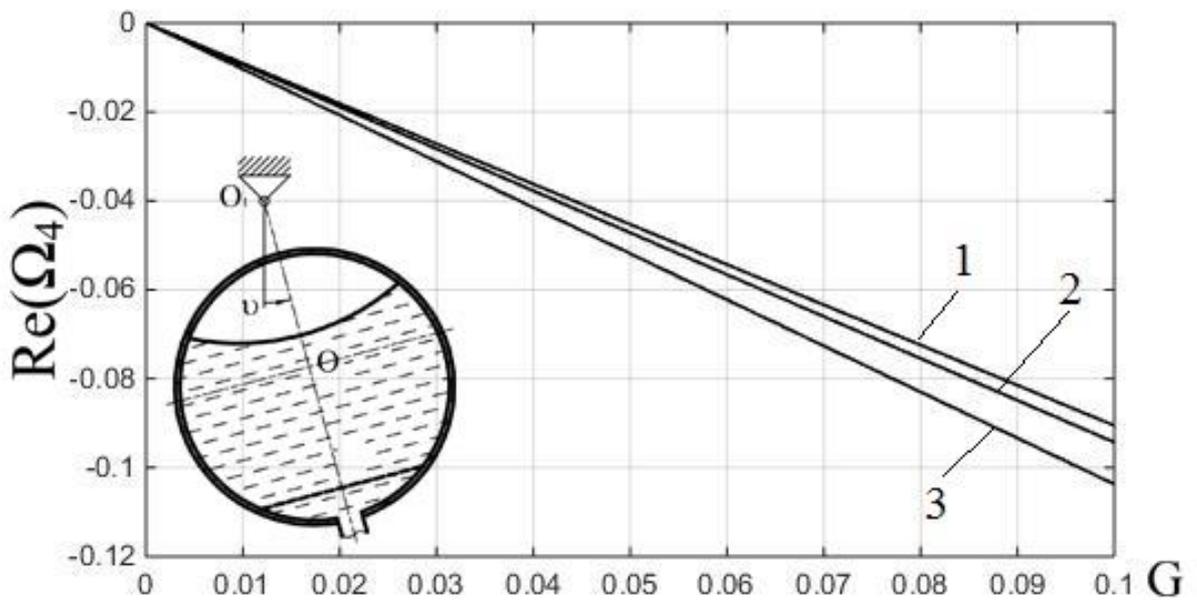


б)

Рис.4.21. Зависимости действительной части  $\Omega_2$ , отвечающие затухающим колебаниям «тело + жидкость», от  $\beta$  при  $G = 0,05$  (а) и от  $G$  при  $\beta = 0,2$  (б)



а)



б)

Рис.4.22. Зависимости действительной части  $\Omega_4$ , отвечающие затухающим колебаниям «тело + жидкость», от  $\beta$  при  $G = 0,05$  (а) и от  $G$  при  $\beta = 0,2$  (б)

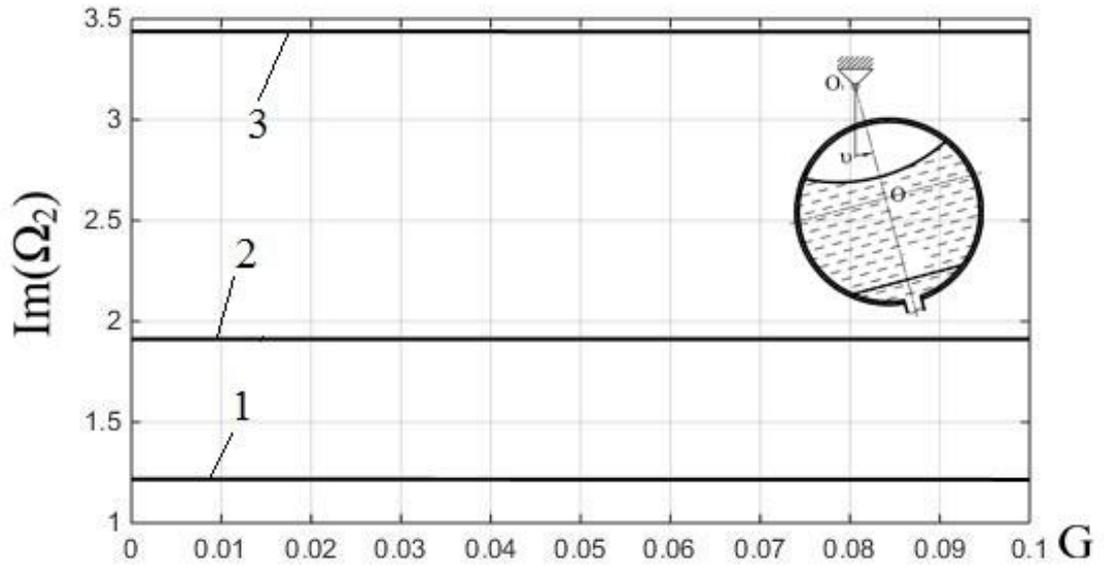


Рис. 4.23. Зависимости частоты затухающих колебаний (мнимой части  $\Omega_2$ ) от  $G$  при  $\beta = 0,2$

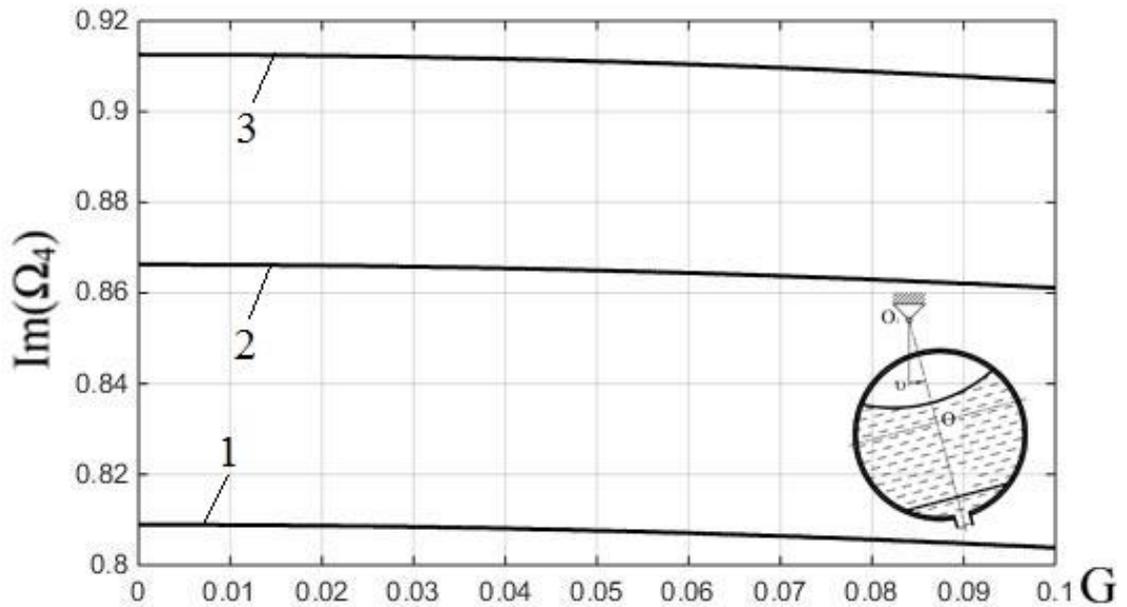


Рис. 4.24. Зависимости частоты затухающих колебаний (мнимой части  $\Omega_4$ ) от  $G$  при  $\beta = 0,2$

#### 4.12. Колебания физического маятника, имеющего сферическую полость со сферической поверхностью заборного устройства, в условиях микрогравитации

В этом пункте рассмотрим задачу о колебаниях физического маятника, вращающегося вокруг оси  $O_1x_1$ , со сферической полостью, частично заполненной жидкостью, вытекающей через заборное устройство, имитирующее тотальную КСОЖ, упрощенная схема которой приведена в пункте 1.5 (рис. 4.25).

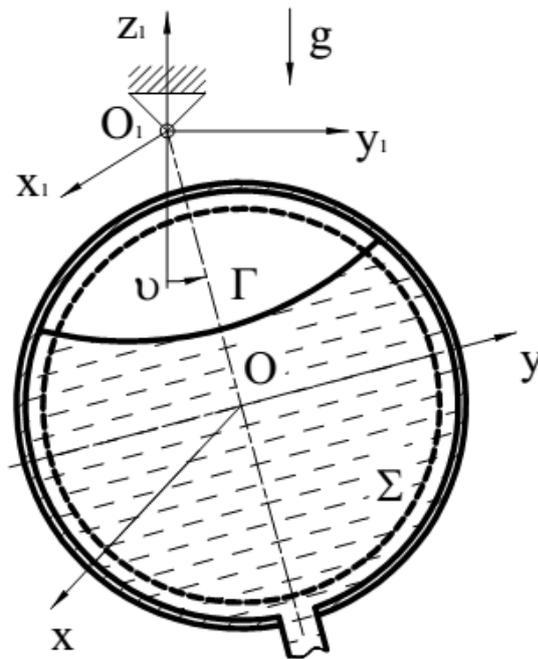


Рис. 4.25. Колебания физического маятника, имеющего сферическую полость со сферической поверхностью ЗУ, в условиях близких к невесомости

Перепишем краевую задачу для потенциала абсолютной скорости в виде

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в } \tau,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - V_{0\Gamma} \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Gamma} + \left[ a \int_t \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Gamma} dt - \Delta_\Gamma \int_t \frac{\partial\Phi}{\partial n_\Gamma} dt \right] + V_{0\Gamma} \cdot V_{ez} = 0 \text{ на } \Gamma_0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + V_{0\Sigma} \frac{\partial\Phi}{\partial R} + \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial R} - (V_{0\Sigma} + \gamma) \cdot V_{eR} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (4.133)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial\Phi}{\partial n} + \mu \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ на } l,$$

$$\Phi(r, \eta, z, t) = \Phi^0 \text{ при } t = 0.$$

В этом случае составляющие потенциалы  $\Psi_1(r, \eta, z)$ ,  $\Phi_n^{(1)}(r, \eta, z)$  и  $\Phi_n^{(2)}(r, \eta, z)$  также найдены по формулам (4.116) - (4.118). Постоянные  $\{c_k\}_{k=1}^M$ ,  $\{a_{nk}\}_{k=1}^M$ ,  $\{b_{nk}\}_{k=1}^M$  - решения систем линейных уравнений (4.119) и (4.120) с коэффициентами

$$D_{kl} = \pi \left( \int_0^{s_A} U_{k\Gamma} \left( \frac{\partial U_l}{\partial r} n_r + \frac{\partial U_l}{\partial z} n_z \right) r(s) ds + \int_{\theta_0}^{\pi} U_{k\Sigma} \left( \frac{\partial U_l}{\partial R} \right)_{\Sigma} \sin \theta d\theta \right), \quad (4.134)$$

$$d_k = \pi \left( \int_0^{s_A} U_{k\Gamma} [r \cdot n_z + (L-z) \cdot n_r] r ds + L \int_{\theta_0}^{\pi} U_{k\Sigma} \sin^2 \theta d\theta \right),$$

$$p_{kl}^{(1)} = D_{kl}, \quad q_{kl}^{(1)} = \int_0^{s_A} (B^{-1} U_k) U_l r ds, \quad p_{kl}^{(2)} = p_{kl}^{(1)}, \quad q_{kl}^{(2)} = \int_{\theta_0}^{\pi} U_k U_l \sin \theta d\theta. \quad (4.135)$$

Система уравнений возмущенного движения системы «тело – жидкость» имеет вид

$$\begin{aligned} & (J_1 + J_2) \ddot{\mathcal{G}} + \gamma \beta \dot{\mathcal{G}} - B o \cdot m z_{1c} \mathcal{G} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(1)} \ddot{s}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(1)} s_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n}^{(2)} \ddot{p}_n + \\ & + \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{1n}^{(2)} \dot{p}_n = M^{(e)}, \\ & \mu_n^{(1s)} \ddot{s}_n + V_{\Gamma}^{(0)} \delta_n^{(1)} \dot{s}_n + c_n s_n + \mu_n^{(1p)} \ddot{p}_n + V_{\Gamma}^{(0)} \varepsilon_n^{(1)} \dot{p}_n + \lambda_{0n}^{(1)} \ddot{\mathcal{G}} + \lambda_{1n}^{(1)} \dot{\mathcal{G}} = 0, \\ & \mu_n^{(2p)} \ddot{p}_n + [V_{\Gamma}^{(0)} \delta_n^{(2)} + (-V_{\Sigma}^{(0)} + \gamma) \sigma_n^{(2)}] \dot{p}_n + \mu_n^{(2s)} \ddot{s}_n + V_{\Gamma}^{(0)} \varepsilon_n^{(2)} \dot{s}_n + \\ & + \lambda_{0n}^{(2)} \ddot{\mathcal{G}} + \gamma \lambda_{1n}^{(2)} \dot{\mathcal{G}} = 0. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Тогда все гидродинамические коэффициенты определяются по следующим формулам

$$J_2 = \oint_{\Gamma \cup \Sigma} \vec{e}_1 (\vec{r} \times \vec{n}) \Psi_1 dS = \pi \left[ \int_0^{s_A} \psi_{\Gamma_0} [r \cdot n_z + (L-z) \cdot n_r] r ds + L \int_{\theta_0}^{\pi} \psi_{\Sigma} \sin^2 \theta d\theta \right],$$

$$\beta = \vec{e}_1 \int_{\tau} (\vec{e}_1 \times \vec{r}) \times \vec{V}_r^{(0)} d\tau = \int_{\tau} z_1 V_r^{(0)} d\tau,$$

$$\lambda_{0n}^{(1)} = \oint_{\Gamma \cup \Sigma} \Phi_n^{(1)} (\vec{r} \times \vec{n}) dS = \pi \left[ \int_0^{s_A} (\varphi_n^{(1)})_{\Gamma_0} [r \cdot n_z + (L-z) \cdot n_r] r ds + L \int_{\theta_0}^{\pi} (\varphi_n^{(1)})_{\Sigma} \sin^2 \theta d\theta \right],$$

$$\lambda_{0n}^{(2)} = \oint_{\Gamma \cup \Sigma} \Phi_n^{(2)} (\vec{r} \times \vec{n}) dS = \pi \left[ \int_0^{s_A} (\varphi_n^{(2)})_{\Gamma_0} [r \cdot n_z + (L-z) \cdot n_r] r ds + L \int_{\theta_0}^{\pi} (\varphi_n^{(2)})_{\Sigma} \sin^2 \theta d\theta \right],$$

$$\lambda_{1n}^{(1)} = a \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} (\vec{r} \times \vec{n}_{\Gamma}) d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} \Delta_{\Gamma} \left( \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial n_{\Gamma_0}} \right) \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n_{\Gamma_0}} d\Gamma_0 =$$

$$= a\pi \int_0^{s_A} \left( \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma}} \right)_{\Gamma_0} [r \cdot n_z + (L-z) \cdot n_r] r ds - \pi \int_0^{s_A} \left( \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial n_{\Gamma}} \right)_{\Gamma_0} \Delta_{\Gamma} [r \cdot n_z + (L-z) \cdot n_r] r ds,$$

$$\lambda_{1n}^{(2)} = \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial n_{\Sigma}} (\vec{r} \times \vec{n}_{\Sigma}) d\Sigma = \pi L \int_{\theta_0}^{\pi} \left( \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial R} \right)_{\Sigma} \sin^2 \theta d\theta.$$

Коэффициенты  $\mu_n^{(1s)}$ ,  $\mu_n^{(1p)}$ ,  $\delta_n^{(1)}$ ,  $\varepsilon_n^{(1)}$ ,  $c_n$  найдены по формулам (4.132), а остальные определены по формулам

$$\mu_n^{(2s)} = \int_{\Sigma} \Phi_n^{(1)} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial R} d\Sigma = \pi \int_{\theta_0}^{\pi} \varphi_n^{(1)} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial R} \sin \theta d\theta = \mu_n^{(1p)},$$

$$\mu_n^{(2p)} = \int_{\Sigma} \Phi_n^{(2)} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial R} d\Sigma = \pi \int_{\theta_0}^{\pi} \varphi_n^{(2)} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial R} \sin \theta d\theta,$$

$$\varepsilon_n^{(2)} = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(1)}}{\partial z_A} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial R} d\Sigma = - \pi \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\partial \varphi_n^{(1)}}{\partial z_A} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial R} \sin \theta d\theta = \varepsilon_n^{(1)}, \quad (4.137)$$

$$\delta_n^{(2)} = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial z_A} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial R} d\Sigma = - \pi \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial z_A} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial R} \sin \theta d\theta,$$

$$\sigma_n^{(2)} = \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial R} \frac{\partial \Phi_n^{(2)}}{\partial R} d\Sigma = \pi \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial R} \frac{\partial \varphi_n^{(2)}}{\partial R} \sin \theta d\theta.$$

Результаты численного решения характеристического уравнения (4.91) собственных колебаний физического маятника, имеющего сферическую полость со сферической поверхностью слива и вытекающей жидкостью, в условиях микрогравитации, при  $L = 1$ ,  $m = 1$ ,  $n = 1$ ,  $M = 10$  представлены на рис. 4.26-4.29. В этих рисунках: кривая 1 -  $V = 0,4545$ ,  $Bo = 1$ ; кривая 2 -  $V = 0,6511$ ,  $Bo = 2$ ; кривая 3 -  $V = 0,8024$ ,  $Bo = 5$ .

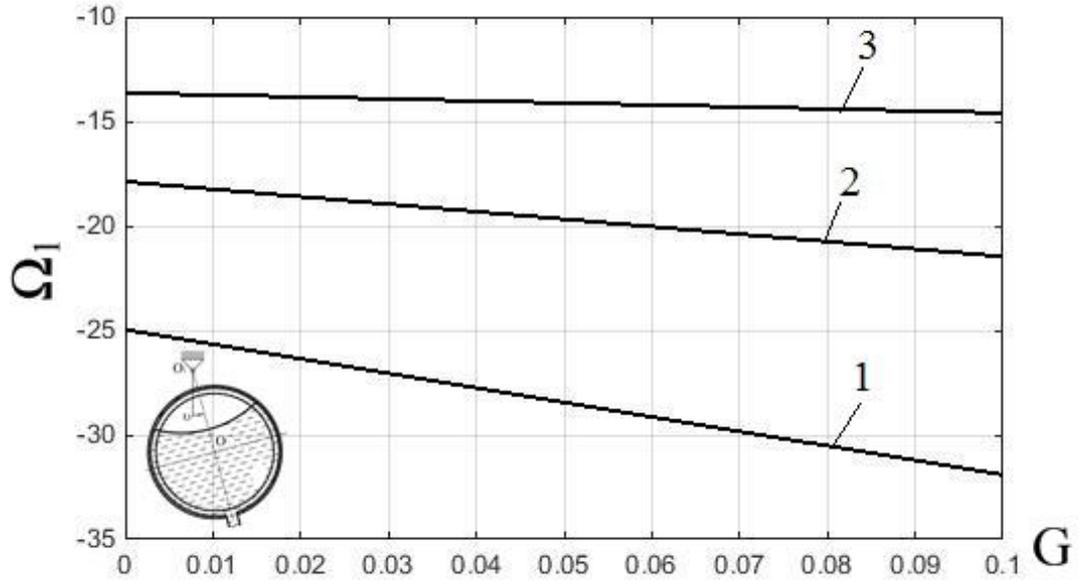


Рис. 4.26. Зависимости  $\Omega_1$ , отвечающие аperiodическому движению «тело + жидкость», от  $G$  при  $\beta = 0,2$

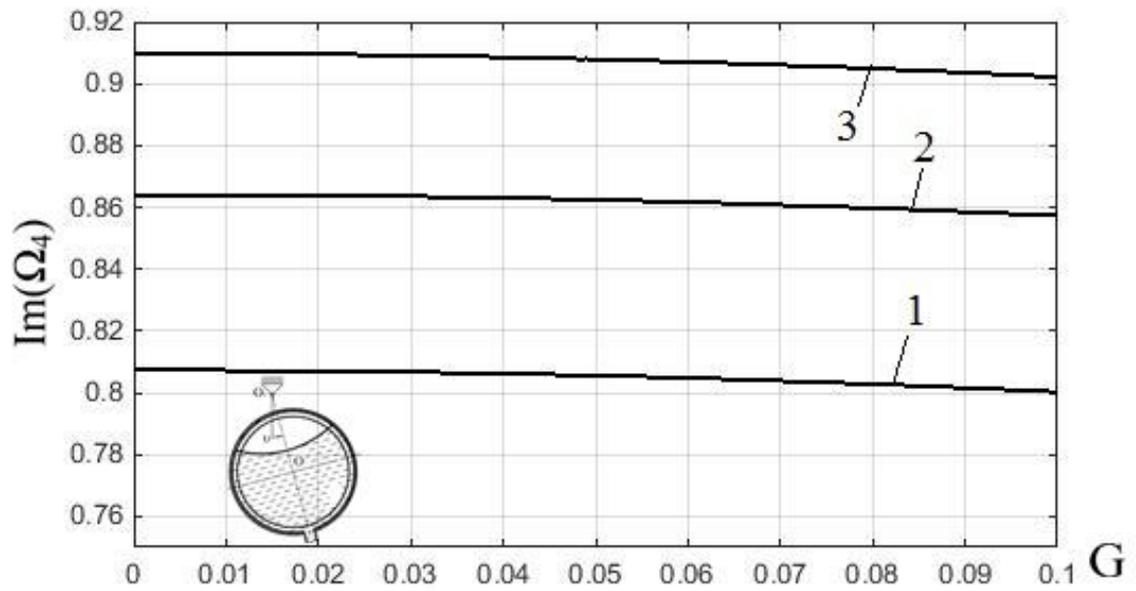
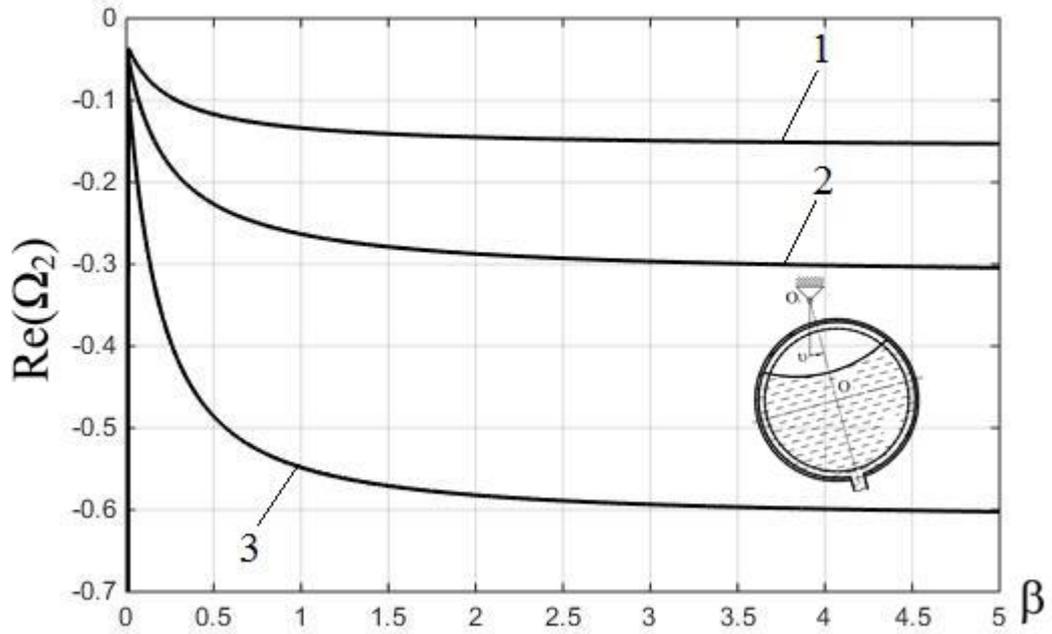
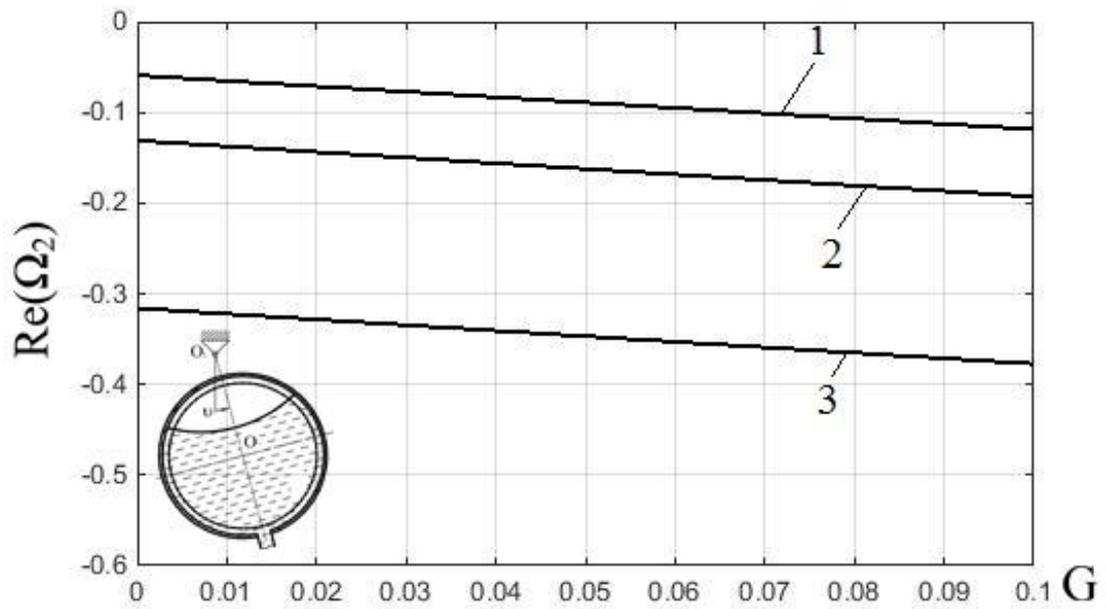


Рис. 4.27. Зависимости частоты затухающих колебаний (мнимой части  $\Omega_4$ ) от  $G$  при  $\beta = 0,2$



а)



б)

Рис.4.28. Зависимости действительной части  $\Omega_2$ , отвечающие затухающим колебаниям «тело + жидкость», от  $\beta$  при  $G = 0,05$  (а) и от  $G$  при  $\beta = 0,2$  (б)

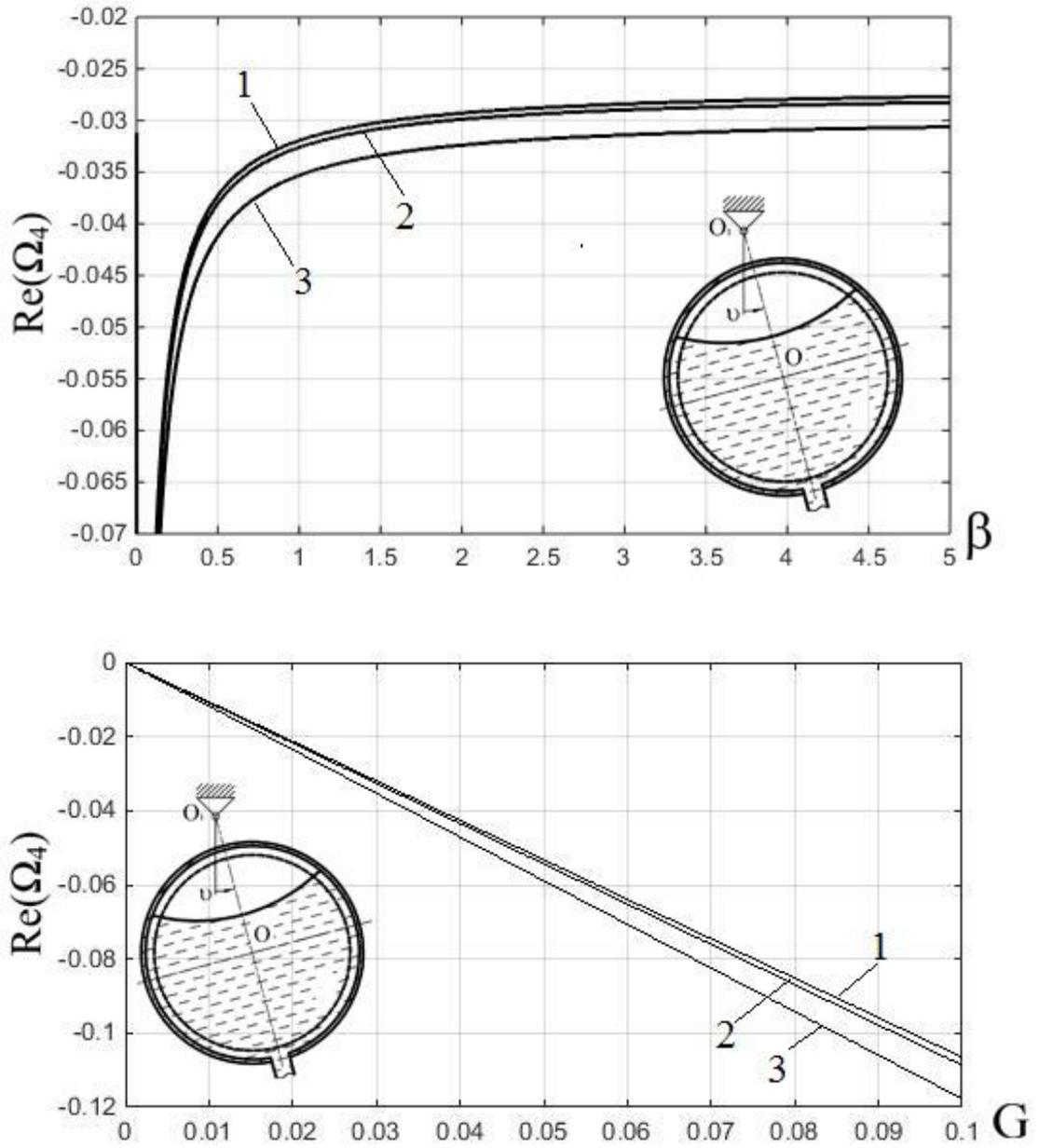


Рис.4.29. Зависимости действительной части  $\Omega_4$ , отвечающие затухающим колебаниям «тело + жидкость», от  $\beta$  при  $G = 0,05$  и от  $G$  при  $\beta = 0,2$

#### Вывод к главе 4

Анализ разработанной математической модели показал качественное отличие движения твердого тела, имеющего полость частично заполненной жидкостью, протекающей через заборные устройства.

ЗУ и ВБЭ оказывают дополнительные демпфирующие воздействие на твердое тело и меняют характер движения твердого тела, вызывая либо затухающие колебания, либо апериодические движения.

Собственным движениям новой модели соответствуют три множества собственных чисел – множество действительных чисел и два множества комплексно – сопряженных чисел, расположенных вблизи мнимой оси. Действительным числом отвечают постоянные времени апериодических движений твердого тела и жидкости, а комплексно – сопряженным числом – затухающие колебания твердого тела и жидкости.

Коэффициенты инерции  $\lambda_{0n}^{(2)}$ ,  $\lambda_{1n}^{(2)}$ , учитывающие дополнительное влияние движений жидкости вблизи заборного устройства, имеют численные значения на порядок меньше соответствующих коэффициентов  $\lambda_{0n}^{(1)}$ ,  $\lambda_{1n}^{(1)}$ , учитывающих движений свободной поверхности жидкости.

## Вывод и заключение

- Разработанные математические модели малых движений идеальной жидкости, частично заполняющей неподвижную осесимметричную полость с ЗУ и математические модели малых движений твердого тела, имеющего полость с ЗУ и жидкостью, показали качественное отличие от случая малых движений при отсутствии учета влияния ЗУ.

- Малым движениям жидкости в неподвижной осесимметричной полости, содержащей ЗУ и внутрибаковые элементы, отвечают две ветви собственных значений, соответствующих наличию двух множеств – дискретного множества действительных чисел меньше нуля и множества комплексно-сопряженных чисел.

- При увеличении расхода и постоянстве обобщенного коэффициента сопротивления коэффициент затухания монотонно увеличивается по модулю. При постоянстве расхода и уменьшении обобщенного коэффициента сопротивления коэффициент затухания стремится к некоторому постоянному значению.

- В условиях микрогравитации при увеличении расхода и постоянстве обобщенного коэффициента сопротивления собственные числа, характеризующие апериодические процессы и коэффициент затухания монотонно увеличиваются по модулю. При постоянстве расхода и уменьшении обобщенного коэффициента сопротивления коэффициент затухания не изменяется монотонно и имеет максимальное значение при некоторых значениях коэффициента сопротивления.

- Малым движениям твердого тела, имеющего полость с жидкостью и ЗУ, отвечают три ветви собственных значений, соответствующих наличию трех множеств – дискретного множества действительных чисел меньше нуля и двух множеств комплексно-сопряженных чисел.

- Случаю отрицательных вещественных чисел отвечают апериодические движения жидкого топлива и твердого тела. Случаю комплексно-сопряженных

чисел с отрицательной вещественной частью отвечают затухающие колебания жидкого топлива и твердого тела.

- Коэффициенты инерции  $\lambda_{0n}^{(2)}$ ,  $\lambda_{1n}^{(2)}$ , учитывающие дополнительное влияние движений жидкости вблизи заборного устройства, имеют численные значения на порядок меньше соответствующих коэффициентов  $\lambda_{0n}^{(1)}$ ,  $\lambda_{1n}^{(1)}$ , учитывающие движений свободной поверхности жидкости.

- Уравнения движения твердого тела, имеющего полость с ЗУ и ВБЭ кроме инерционных гидродинамических составляющих, присущих классическим задачам твердого тела с жидкостью, содержат дополнительные гидродинамических коэффициенты, характеризующие демпфирование колебаний.

- Коэффициенты затухания при колебаниях твердого тела с жидкостью зависят монотонным образом от увеличения расхода или уменьшения коэффициенты гидродинамического сопротивления. Для воды при  $R_0 = 1\text{ м}$ ,  $h = 0,3\text{ м}$ ,  $G = 0,05\text{ м}^3/\text{с}$ ,  $\gamma = 15\text{ м/с}$ :  $\Omega_1 = 81,325\text{ с}^{-1}$ ,  $\text{Re}(\Omega_2) = -0,051\text{ с}^{-1}$ ,  $\text{Re}(\Omega_4) = -0,019\text{ с}^{-1}$ . В условиях микрогравитации при  $Bo = 2$ ,  $V = 2,7259\text{ м}^3$ ,  $R_0 = 1\text{ м}$ ,  $G = 0,005\text{ м}^3/\text{с}$ ,  $\gamma = 10\text{ м/с}$ :  $\Omega_1 = 0,0923\text{ с}^{-1}$ ,  $\text{Re}(\Omega_2) = -0,0013\text{ с}^{-1}$ ,  $\text{Re}(\Omega_4) = -0,0016\text{ с}^{-1}$ ; при  $G = 0,02\text{ м}^3/\text{с}$ :  $\Omega_1 = 0,2136\text{ с}^{-1}$ ,  $\text{Re}(\Omega_2) = -0,0440\text{ с}^{-1}$ ,  $\text{Re}(\Omega_4) = -0,0561\text{ с}^{-1}$ .

- Результаты диссертации могут быть использованы при исследовании управляемого движения проектируемых разгонных блоков, космических аппаратов и ракеты-носителей.

## Литература

1. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. М.: Ижевск. Ин-т компьют. исслед. 2015. 308с.
2. Алифанов О. М. Баллистические ракеты и ракеты-носители. М.: Дрофа. 2004. 512 с.
3. Анисимов А. М. Осесимметричные колебания сферического сосуда, частично заполненного жидкостью // Изв. Высш. учебных заведений. Авиационная техника. 1969. № 2. С. 5 – 10.
4. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука. 1976. 504 с.
5. Багров В.В., Курпатенков А.В., Поляев В.М., Сисов А.Л., Сухоставец В.Ф. Капиллярные системы отбора жидкости из баков космических аппаратов. М.: УНПЦ «ЭНЕРГОМАШ». 1997. 328 с.
6. Балабух Л. И., Молчанов А. Г. Осесимметричные колебания сферической оболочки, частично заполненной жидкости // Известия АН СССР. МТТ. – 1967. Т.5. С. 22 – 26.
7. Балакирев Ю. Г. Осесимметричные колебания пологой сферической оболочки с жидкостью // Инженерный журнал МТТ. 1967. № 5. С. 116 – 123.
8. Беляев Н. М. Расчет пневмогидравлических систем ракет. М.: Машиностроение. 1983. 219 с.
9. Беляев Н. М., Уваров Е. И., Степанчук Ю. М. Пневмогидравлические системы. Расчет и проектирование: Учеб. пособие для технических вузов. М.: Высшая школа. 1988. 271 с.
10. Богоряд И. Б., Дружинина Г. З. О движении вязкой жидкости со свободной поверхностью в замкнутом сосуде // Сб. научн. трудов симпозиума. Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск. 1974. С. 47 – 50.

11. Богоряд И. Б. Динамика вязкой жидкости со свободной поверхностью. Томск: Изд. ТГУ. 1980. 102 с.
12. Боталов А. Ю. Численное исследование движения тела с полостью, частично или полностью заполненной вязкой жидкостью. Диссертация... канд. физ. мат. наук. Тюмень. 2014. 135 с.
13. Бужинский В. А. Колебания тел с острыми кромками в несжимаемой маловязкой жидкости и некоторые задачи гидродинамики космических аппаратов. Диссертация... док. физ. мат. наук. ЦНИИмаш Королев. 2003. 280 с.
14. Газиев Э. Л. Задачи статики, устойчивости и малых колебаний гидросистемы «Жидкость – Баротропный газ» в условиях, близких к невесомости. Диссертация ... канд. физ. мат. наук. Симферополь. 2014. 231 с.
15. Гончаров Д. А. Динамика двухслойной жидкости, разделённой упругой перегородкой с учётом сил поверхностного натяжения // Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. №11. С. 547-556. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html> (дата обращения 15.07.2016)
16. Грибков В. А., Соколов В. Ф. Решение в матричных рядах задачи о жидкости. Расчет тонкостенных элементов конструкций // Труды МВТУ. 1975. № 206. С. 86 – 92.
17. Григолюк Э. И., Шклярчук Ф. Н. Уравнения возмущенного движения тела с тонкостенной упругой оболочкой, частично заполненной жидкостью // ПММ. 1970. Т.34. Вып. 5. С. 402 – 411.
18. Григорьев В. Г. Применение метода конечных элементов к расчету колебаний упругих оболочечных конструкций содержащих жидкость // Труды научн. семинара ТГУ. Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. Тула. 1978. С. 55 – 60.
19. Добровольский М. В. Жидкостные ракетные двигатели. М.: Машиностроение. 1968. 396 с.

20. Докучаев Л. В. О присоединенном моменте инерции жидкости в цилиндре с перегородками, вращающимися около продольной оси // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. №2. С. 168 – 171.
21. Докучаев Л. В. О колебаниях резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которого расположена мембрана // Сборник трудов. Строительная механика и расчет сооружений 1972. №1. С. 49 – 54.
22. Докучаев Л. В. Уравнения движения тела с жидкостью, имеющей на свободной поверхности гибкую мембрану // Тр. всес. семинара. Динамика тел, взаимодействующих с жидкостью. Томск. 1977. С. 31– 35.
23. Дьяченко М. И., Темнов А. Н. Собственные колебания жидкого топлива в условиях перераспределения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2012. №3. С. 31-38.
24. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. Соч. В 5 т. М. Л.: Госнаучтехиздат. 1931. Т. 2. Вып. 1. С. 54 – 60.
25. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, заполненные однородной капельной жидкостью. М. Л.: Гостехиздат. 1949. 762 с.
26. Ивлена Л. И., Кухто В. А., Лампер Р. Е. О вариационном методе с нелинейным параметром и его приложении к задаче о колебаниях бака с жидкостью // Сб. трудов II-го Всес. симп. Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск. 1974. С. 28 – 32.
27. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / Под ред. М. О. Штестнберга. 3-е изд. перераб. и доп. М.: Машиностроение. 1992. 672 с.
28. Клишев О. П., Мордыга Ю. О. Математические модели динамики вращающихся разгонных блоков с учетом подвижности жидкого топлива в баках // Актуальные вопросы проектирования космических систем и комплексов. М. 2004. Вып. 5. С. 349 - 354.

29. Клишев О. П. Математическая модель космического аппарата с полостями, частично заполненными жидкостью. Режим нестационарного вращения // Полет. 2003. №10. С. 50-56.
30. Клишев О. П. Учет подвижности жидкого топлива в баках в математических моделях процессов стабилизации и стыковки космических объектов // Космонавтика и ракетостроение. 2007. №2. С.134-139.
31. Колесников К. С. Жидкостная ракета как объект регулирования. М.: Машиностроение. 1969. 298 с.
32. Колесников К. С. Динамика ракет. М.: Машиностроение. 2003. 520 с.
33. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания упругих мембран, разделяющих многослойную жидкость в цилиндрическом сосуде с упругим дном // Динамические системы. 2006. Вып. 21. С. 7 – 13.
34. Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А. Свободные колебания многослойной жидкости, разделённой упругими инерционными мембранами // Динамические системы. 2004. Вып.18. С. 111-118.
35. Копачевский Н. Д. О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости // Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: ВЦ АН СССР. 1968. С. 98-134.
36. Копачевский Н. Д. Гидродинамика в слабых гравитационных полях. О плоских колебаниях идеальной жидкости в прямоугольном канале // Механика жидкости и газа. 1972. №5. С. 3-13.
37. Копачевский Н. Д. Гидродинамика в слабых гравитационных полях. О малых колебаниях идеальной жидкости в цилиндрическом сосуде // Механика жидкости и газа. 1973. №2. С. 3-13.
38. Корольков А.В., Партола И.С., Сапожников В.Б. Динамика границы раздела сред в частично заполненном осесимметричном сосуде в условиях, близких к невесомости // Тезисы докладов XL чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского. Калуга. 2005. С. 36.

39. Корольков А. В., Партола И. С., Сапожников В. Б. Теоретические основы разработки и экспериментальной отработки капиллярных заборных устройств с минимальными остатками топлива // Сб. Научно-технические разработки ОКБ-23 - КБ «Салют». Москва. Воздушный транспорт. 2006. С. 313–319.
40. Корольков А. В., Меньшиков В. А., Партола И. С., Сапожников В. Б. Развитие идей профессора В.М. Поляева по применению пористосетчатых материалов для внутрибаковых устройств, обеспечивающих многократный запуск ЖРД // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Вып. 2(63). 2006. С. 78–88.
41. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ОГИЗ. 1947. 928 с.
42. Левин В. Е. Расчет колебаний сферического бака с учетом особенности течения жидкости в окрестности угловой точки // Межвузовский сборник научных трудов. Динамика и прочность элементов авиационных конструкций. НЭТИ. М. 1986. С. 66 – 69.
43. Луковский И. А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. Киев: Наукова. Думка. 1990. 296 с.
44. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение. 1968. 532с.
45. Микишев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение. 1978. 247 с.
46. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М.: Машиностроение. 1971. 563 с.
47. Моисеев Н. Н. Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной капельной жидкостью // ДАН СССР. 1952. Т. 85. № 4. С. 719 – 722.
48. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука. 1965. 440 с.

49. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: ВЦ АН СССР. 1966. 269 с.
50. Мокеев В. В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом методом конечных элементов // Изв. РАН. МТТ. 1998. №6. С. 166 – 174.
51. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 21 – 38.
52. Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение. 1977. 208с.
53. Нгуен З.Х., Темнов А.Н. Колебания жидкого топлива непостоянного объёма в сферической ёмкости // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. №12. С. 426-439. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/744115.html> (дата обращения 15.07.2016)
54. Нгуен З.Х. Собственные колебания жидкости в сферических ёмкостях // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Машиностроение. 2015. № 2. С. 84-90.
55. Нгуен З.Х. Колебания жидкости, вытекающей из сферических емкостей // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 2015. С. 2742-2744.
56. Нгуен З.Х., Темнов А.Н. Собственные колебания жидкого топлива непостоянного объема в сферической емкости // 50-е научные чтения памяти К.Э. Циолковского. 2015. С. 167-168.
57. Нгуен З.Х., Темнов А.Н. Колебания физического маятника, имеющего сферическую полость с вытекающей жидкостью // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. №10. С. 141-160. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/813746.html> (дата обращения 15.07.2016)
58. Нгуен З.Х., Темнов А.Н. Задачи динамики космических конструкций с жидким топливом, вытекающим из сферических емкостей // XI

- академические чтения по космонавтике «Королёвские чтения 2016». 2016. С. 30-31.
59. Нгуен З.Х., Темнов А.Н. Задачи динамики космических конструкций при колебаниях жидкого топлива // Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященная 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева. 2016. С. 169-171.
60. Нгуен З.Х., Темнов А.Н. Задачи динамики космических конструкций с жидким топливом, вытекающим из сферических емкостей // Инженерный журнал: наука и инновации. 2016. Вып. 5. Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/mech/dsmi/1490.html> (дата обращения 15.07.2016)
61. Охоцимский Д. Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 3 – 20.
62. Орлов В.В., Темнов А.Н. Малые движения жидкости, вытекающей из бака // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронеж. 1997. С. 124.
63. Партола И.С. Работоспособность и весовая отдача заборных устройств // Научно-технические разработки ОКБ-23 – КБ «Салют». Москва. Воздушный транспорт. 2006. С. 307-312.
64. Партола И.С. Расчетно-экспериментальная разработка капиллярных заборных устройств // Научно-технические разработки ОКБ-23 – КБ «Салют». Москва. Воздушный транспорт. 2006. С. 395-401.
65. Петров А. Г. Вариационные методы в динамике несжимаемой жидкости. М.: МГУ. 1985. 104 с.
66. Пожалостин А. А. К теории собственных малых осесимметричных колебаний упругих баков, частично заполненных жидкостью // Доклады I-го всеос. симп. Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск. 1970. С. 153 – 164.

67. Пожалостин А. А., Каменский О. А. Осесимметричные колебания упругой чечевицеобразной оболочки, частично заполненной жидкостью // Сб. научных докладов. симп. Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск. 1974. С. 114 – 117.
68. Пожалостин А. А., Паншина А. В. Приближенный метод определения логарифмического декремента для малых колебаний упругого сосуда, заполненного жидкостью // Сборник статей 125 лет кафедры теоретической механики МГТУ им. Н. Э. Баумана. М. 2003. С. 199 – 204.
69. Рабинович Б. И. Об уравнениях упругих колебаний тонкостенных стержней с жидким заполнением при наличии свободной поверхности // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1959. № 4. С. 63 – 68.
70. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М.: Машиностроение. 1975. 416с.
71. Сапожников В. Б., Крылов В. И., Новиков Ю. М., Ягодников Д.А. Наземная отработка капиллярных фазоразделителей на основе комбинированных пористосетчатых материалов для топливных баков жидкостных ракетных двигателей верхних ступеней ракет-носителей, разгонных блоков и космических аппаратов // Инженерный журнал: наука и инновации. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. Вып. 4. С. 1-16.  
Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/707.html> (дата обращения 15.07.2016)
72. Сидельников Р. В., Ямчук В. В. К вопросу расчета колебаний осесимметричных конструкций с жидкостью методом конечных элементов // Сб. научн. трудов симпозиума. Колебания упругих конструкций с жидкостью. М. 1980. С. 272 – 275.
73. Синярев Г. Б., Добровольский М. В. Жидкостные ракетные двигатели. М.: Оборонгиз. 1957. 304 с.
74. Слудский Ф.А. De la rotation de la terre supposee fluide a son interieur. Bulletin de la Societe des naturalistes de Moscou. vol. IX. 1895.

75. Соболев С. Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью // Журнал прикл. мех. и техн. физ. 1960. №3. С. 20-55.
76. Темнов А. Н., Тэйн У. Осесимметричные колебания оболочки, частично заполненной жидкостью, вытекающей через заборное устройства // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Машиностроение. 2008. № 1(70). С. 46–59.
77. Тэйн У. Колебания упругого днища с протекающей жидкостью // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Машиностроение. 2008. № 2(71). С. 121–124.
78. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью // ПММ. 1957. Т. 21(2). С. 157–168.
79. Шклярчук Ф. Н. О вариационных методах расчета осесимметричных колебаний оболочек вращения, частично заполненных жидкостью // Тр. VI Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок. М. 1966. С. 835 – 840.
80. Шклярчук Ф. Н. О параметрических колебаниях цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью // Сб. трудов II-го Всес. симп. Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск. 1973. С. 205 – 208.
81. Шмаков В. П. К вычислению собственных колебаний жидкости в неподвижных сосудах // Тр. Томского университета. Томск. 1978. С. 157 – 162.
82. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ СССР. 1968. 230 с.
83. Чурилов Г. А. Влияние поверхностного натяжения и угла смачивания на колебания жидкости в сосудах // Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства. М. Машиностроение. 1986. С. 164 - 175.

84. Abramson H. N., Chu W. H., Ransleben G. E. Representation of fuel sloshing in cylindrical tanks by an equivalent mechanical model // ARS J. 1961. V.31. №12. P. 1697 – 1705.
85. Chen P. C., Jadic I. Interfacing of fluid and structural models via innovative structural boundary element method // AIAA Journal. 1998. V. 36. № 2. P. 282 – 287.
86. De Sampaio P. A. B., Moreira M. L. A new finite element formulation for both compressible and nearly incompressible fluid dynamics // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2000. V.32. №1. P.51 – 78.
87. Douglas B. J. Perforated plates // Machine design. 1963. №2. P.179 – 180.
88. Hough S. S. The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1895. Vol. 186. P. 469–506.
89. Kiefling L., Feng G. C. Fluid-structure finite element vibration analysis // AIAA Journal. 1976. V.15. № 2. P. 199 – 203.
90. Maravani M., Hamed M. S. Numerical modeling of sloshing motion in a tuned liquid damper outfitted with a submerged slat screen // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2011. Vol. 65. P. 834–855.
91. Parkus H. Modes and frequencies of vibrating liquid-filled cylindrical tanks // Int. J. Eng. Sci. 1982. V.20. №2. P. 319 – 326.
92. Stokes G. Mathematical and Physical. Papers vol. 1. Cambridge. 1880. 103 c.
93. Wu C.H., Faltinsen O.M., Chen B.F. Numerical study of sloshing liquid in tanks with baffles by time-independent finite difference and fictitious cell method // Computers & Fluids. 2012. Vol. 63. P. 9–26.