

На правах рукописи



**Пичугина Анна Евгеньевна**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
ТОНКИХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК  
НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ**

Специальность 1.1.8. – «Механика деформируемого твердого тела»

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва, 2023 г.

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (Национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**Научный руководитель:** **Димитриенко Юрий Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (Национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**Официальные оппоненты:** **Звягин Александр Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Газовой и волновой динамики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (МГУ им. М.В. Ломоносова)

**Жаворонок Сергей Игоревич**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела механики адаптивных и композиционных материалов и систем Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН)»

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт автоматизации проектирования Российской академии наук (ИАП РАН)»

Защита диссертации состоится «27» сентября 2023 г. в 13 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4. и на сайте:

[https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT\\_ID=172166](https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=172166)

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета 24.2.327.07



Сердюк Дмитрий Олегович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Тонкостенные оболочки из различных материалов являются основой современных строительных конструкций: зданий, мостов, корпусов автомобилей, самолетов и кораблей, ракет, спутников и других объектов. В настоящее время существует большое число различных теорий оболочек, в которых используются некоторая система допущений относительно характера распределения перемещений и деформаций или напряжений по толщине оболочки, в их числе работы А. Лява, С.П. Тимошенко, В.В. Новожилова, Л.А. Агаловяна, С.А. Амбарцумяна, В.Л. Бердичевского, В.Л. Бидермана, В.В. Болотина, А.Л. Гольденвейзера, В.В. Васильева, А.И. Лурье, В.З. Власова, В.И. Большакова, И.В. Андрианова, А.Н. Власова, В.Н. Бакулина, и многих других. Наибольшие сложности при расчете композитных оболочек возникают с определением компонент тензора напряжений, особенно напряжений межслойных сдвигов и поперечных нормальных напряжений. Для некоторых классов прикладных задач, таких как расчет термонапряжений в композитных оболочках при неравномерном по толщине нестационарном нагреве, расчет теплозащитных элементов конструкций, расчет диссипации энергии конструкций и других задач, необходим детальный анализ полей всех 6 компонент тензора напряжений. Перспективным направлением для построения логически непротиворечивой теории пластин и оболочек, сохраняющим все преимущества классических теорий Кирхгофа-Лява и Тимошенко, и позволяющим достаточно точно вычислять все 6 компонент тензора напряжений, являются асимптотические теории пластин и оболочек, в которых используются асимптотические разложения исходных трехмерных уравнений теории упругости по малому геометрическому параметру. К этому направлению относятся работы Ю.И. Димитриенко, С.В. Шешенина, С.А. Назарова, Т. Lewiński, J.J. Telega, A. G. Kolpakov и некоторых других.

**Целью настоящей диссертации** является применение метода асимптотических разложений на случай тонких композитных многослойных термоупругих оболочек произвольной кривизны при малых деформациях.

**Объектом исследования** являются методы расчета термоупругого деформирования тонких композиционных оболочечных конструкций при совместном воздействии механических нагрузок и нестационарного нагрева.

**Задачами настоящей работы** являются:

– разработка варианта уравнений тонкостенных композитных оболочек на основе асимптотического анализа общих трехмерных уравнений термоупругости;

– решение локальных задач термоупругости, возникающих в асимптотической теории;

– разработка аналитических соотношений для вычисления полного тензора напряжений для тонкостенных композиционных оболочек методом асимптотических разложений;

– вывод уравнений термоупругости для случая цилиндрических тонкостенных оболочек;

– решение частной задачи об осесимметричном изгибе и нестационарном нагреве цилиндрической композитной оболочки, проведение численного моделирования термонапряжений в тонких цилиндрических оболочках в качестве примера применения разработанного метода.

**Методы исследования.** В диссертационной работе для решения сформулированных задач использованы следующие методы исследования:

– метод асимптотических разложений уравнений в частных производных;

– аналитические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков;

– численные методы интегрирования.

**Достоверность и обоснованность результатов** и выводов гарантируется применением теоретически обоснованного математического аппарата.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту:

– разработка варианта асимптотической теории для тонкостенных композитных многослойных термоупругих оболочек;

– выражения для всех компонент тензора напряжений в оболочках, полученные с помощью асимптотической теории.

**Практическая значимость диссертационной работы.** Метод расчета тонкостенных композитных оболочек, основанный на асимптотической теории, может быть использован при термомеханических расчетах и проектировании элементов конструкций из композиционных материалов, применяемых в самолетостроении, двигателестроении, ракетостроении, строительстве и других отраслях промышленности, в которых применяются композиционные материалы.

**Апробация результатов работы.** Результаты диссертационной работы докладывались на:

Всероссийской студенческой конференции «СТУДЕНЧЕСКАЯ НАУЧНАЯ ВЕСНА - 2017», посвящённой 170-летию со дня рождения Н.Е. Жуковского, Москва 2017 г,

Всероссийской студенческой конференции «СТУДЕНЧЕСКАЯ НАУЧНАЯ ВЕСНА», посвященной 165-летию со дня рождения В.Г. Шухова», Москва 2018 г.

Международной конференции «International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences», August 27-31, 2018, Moscow, Russia;

Международном научном форуме «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 5-8 декабря 2018;

2-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 20-21 ноября 2019;

Международной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (FARM-2019), 10-12 декабря, МГТУ им Баумана

3-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2020;

4-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 1-3 декабря 2021;

5-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2022;

научных семинарах кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана (Москва, 2018-2022 гг.).

**Публикации.** По теме диссертации автором опубликованы 6 публикаций, в том числе 6 в изданиях из списка ВАК и 3 статьи в журналах, индексируемых в Scopus.

**Структура и объем.** Диссертация состоит из введения, трех разделов, выводов и списка литературы из 100 наименований. Работа изложена на 129 листах, содержит 66 рисунков.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность, основные положения, выносимые на защиту, а также приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

**Первый раздел** посвящен разработке варианта метода асимптотического осреднения для решения системы уравнений термоупругости для тонких многослойных оболочек.

Для оболочки, заданной в ортогональных криволинейных координатах  $X^i$ , рассматривается общая трехмерная квазистатическая задача линейной теории термоупругости в рамках малых деформаций, которая в компонентах в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial X^\alpha} (H_\beta H_3 \sigma_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial}{\partial X^\beta} (H_\alpha H_3 \sigma_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial X^3} (H_\alpha H_\beta \sigma_{\alpha 3}) - \sigma_{\beta\beta} H_3 \frac{\partial H_\beta}{\partial X^\alpha} - \\ & - \sigma_{33} H_\beta \frac{\partial H_3}{\partial X^\alpha} + \sigma_{\alpha\beta} H_3 \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} + \sigma_{\alpha 3} H_\beta \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^3} + H_1 H_2 H_3 f_\alpha = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \alpha \neq \beta,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial X^3} (H_1 H_2 \sigma_{33}) + \frac{\partial}{\partial X^1} (H_2 H_3 \sigma_{13}) + \frac{\partial}{\partial X^2} (H_1 H_3 \sigma_{23}) - \sigma_{11} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial X^3} - \\ & - \sigma_{22} H_1 \frac{\partial H_2}{\partial X^3} + \sigma_{13} H_2 \frac{\partial H_3}{\partial X^1} + \sigma_{23} H_1 \frac{\partial H_3}{\partial X^2} + H_1 H_2 H_3 f_3 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial X^\alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} u_\beta + \frac{1}{H_\alpha H_3} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^3} u_3; \varepsilon_{33} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_3}{\partial X^3} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial X^1} u_1 + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial X^2} u_2; \\ 2\varepsilon_{12} &= \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial X^2} \left( \frac{u_1}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial X^1} \left( \frac{u_2}{H_2} \right); \quad 2\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial X^3} - \frac{u_\alpha}{H_\alpha H_3} \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^3} + \frac{H_3}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial X^\alpha} \left( \frac{u_3}{H_3} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{IJ} &= C_{IJKL}(\varepsilon_{KL} - \varepsilon_{KL}^T) + C_{IJ33}(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^T) + 2C_{IJK3}(\varepsilon_{K3} - \varepsilon_{K3}^T); \\
\sigma_{I3} &= C_{I3KL}(\varepsilon_{KL} - \varepsilon_{KL}^T) + C_{I333}(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^T) + 2C_{I3K3}(\varepsilon_{K3} - \varepsilon_{K3}^T); \\
\sigma_{33} &= C_{33KL}(\varepsilon_{KL} - \varepsilon_{KL}^T) + C_{3333}(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^T) + 2C_{33K3}(\varepsilon_{K3} - \varepsilon_{K3}^T).
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij} \Delta \theta;$$

$$\frac{\rho c_v}{Fo} \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left( H_2 H_3 \frac{\partial q_1}{\partial X^1} + H_1 H_3 \frac{\partial q_2}{\partial X^2} + H_1 H_2 \frac{\partial q_3}{\partial X^3} \right) ; \tag{4}$$

$$-q_i = \lambda_{ij} g_j + \lambda_{i3} g_3; \quad g_\alpha = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial X^\alpha}; \tag{5}$$

$$\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3} = -\tilde{p}_\pm \delta_{i3}; \quad \Sigma_{Tu} : u_i = u_{ei}; \quad \Sigma_{T\sigma} : \sigma_{ij} n_j = t_{nei}, \quad \Sigma_{3\pm} : q_3 = \pm q_{e\pm}; \quad \Sigma_T : q_i n_i = 0; \tag{6}$$

где (1) – уравнения равновесия, (2) – соотношения Коши, (3) – обобщенный закон Гука, (4) – уравнение теплопроводности, (5) – закон Фурье, (6) – граничные условия,  $C_{ijkl}$  – компоненты тензора модулей упругости,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора малых деформаций,  $\varepsilon_{ij}^T$  – компоненты тензор тепловых деформаций,  $\alpha_{ij}$  – компоненты тензора теплового расширения,  $\theta$  – температура,  $\Delta \theta = \theta - \theta_0$  – перепад температур,  $\theta_0$  – начальная температура,  $u_i$  – компоненты вектора перемещений,  $n_i$  – компоненты вектора нормали,  $\rho$  – плотность,  $c_v$  – удельная теплоемкость,  $f_i$  – компоненты вектора плотности массовых сил,  $\lambda_{ij}$  – компоненты тензора теплопроводности,  $q_i$  – компоненты вектора теплового потока,  $g_i$  – компоненты градиента температуры,  $u_{ei}$  – компоненты заданного на части  $\Sigma_{Tu}$  торцевой поверхности вектора перемещений,  $t_{nei}$  – компоненты вектора напряжений, заданного на оставшейся торцевой части  $\Sigma_{T\sigma}$  поверхности,  $\Sigma_T = \Sigma_{T\sigma} \cup \Sigma_{Tu}$ ,  $q_{e\pm}$  – заданный тепловой поток на поверхностях  $\Sigma_\pm$  оболочки,  $\tilde{p}_\pm$  – давление, заданное на внешней и внутренней поверхностях  $\Sigma_\pm$  оболочки, где  $\Sigma_\pm = \{X^3 = \pm \mathfrak{a} / 2, X^I \in \Sigma_0\}$ , а  $\Sigma_0$  – срединная поверхность оболочки, координата  $X^3$  направлена по нормали к  $\Sigma_0$ . Все координаты  $X^i$  отнесены к  $L$  - характерному размеру (диаметру) срединной поверхности оболочки,  $\mathfrak{a} = h / L$ ,  $h$  – толщина оболочки, напряжения, модули упругости и давление отнесены к характерному значению  $E_0$  – модуля упругости,

$Fo = \lambda_0 t_0 / (\rho_0 c_0 L^2)$  – параметр Фурье, а  $\theta_0, \lambda_0, \rho_0, c_0, t_0$  – характерные значения температуры, теплопроводности, плотности, теплоемкости и времени.

Оболочка предполагается многослойной с числом слоев  $S$ , границы раздела слоев имеют вид  $\Sigma_s = \{X^3 = X_s^3, X^I \in \Sigma_0\}$ ,  $s = 1, \dots, S-1$ , где  $X_s^3$  – координаты раздела слоев. Оболочка предполагается тонкой: т.е. можно ввести малый параметр  $\varepsilon \ll 1$  (основное допущение № 1).

На поверхностях раздела слоев  $\Sigma_s$  задаются условия идеального контакта,  $\Sigma_s : [\sigma_{i3}] = 0, [u_i] = 0, \Sigma_s : [q_3] = 0, [\theta] = 0$ , где  $[u_i]$  – скачок функций. Тензор модулей упругости  $\mathbf{C}$ , тензор теплопроводности  $\boldsymbol{\lambda}$ , тензор теплового расширения  $\boldsymbol{\alpha}$ , плотность  $\rho$ , теплоемкость  $c_v$  для разных слоев оболочки различны и считаются функциями координаты  $X^3$ .

Для тонких оболочек можно пренебречь изменением метрики по толщине оболочки, т.е. положить, что:  $H_3 = 1, H_\alpha = A_\alpha (1 + \varepsilon k_\alpha \xi) \approx A_\alpha, \alpha = 1, 2, \frac{\partial H_3}{\partial \xi} = 0,$

$\frac{\partial H_\alpha}{\partial \xi} = \varepsilon A_{\alpha 3}, A_{\alpha 3} = A_\alpha k_\alpha, \alpha = 1, 2, \frac{\partial H_\alpha}{\partial X^\beta} = A_{\alpha, \beta} + \varepsilon (A_\alpha k_\alpha)_{, \beta} \approx A_{\alpha, \beta}$ , где  $A_\alpha$  – коэффициенты

первой квадратичной формы срединной поверхности,  $H_\alpha$  – коэффициенты Ламе оболочки,  $k_\alpha$  – главные кривизны срединной поверхности. Сделаем допущение № 2 об

условиях нагрева:  $Fo = \varepsilon^2 Fo_0, q_{e\pm} = \frac{1}{\varepsilon} q_{\pm}^{(-1)}$ , где  $Fo_0$  и  $q_{\pm}^{(-1)}$  – величины порядка  $O(1)$ .

Это допущение означает, что нагрев рассматривается на относительно коротких временах, когда распределение температурного поля по толщине оболочки является существенно неравномерным.

Введем допущение № 3, что  $\tilde{p}_\pm$  на внутренней и внешней поверхностях имеет порядок малости  $O(\varepsilon^3)$  т.е.  $\tilde{p}_\pm = \varepsilon^3 p_\pm$ . Это допущение, как правило, соответствует реальным условиям нагружения тонких оболочек. Слои оболочки далее полагаем моноклинными материалами, с главным базисом осей анизотропии, совпадающим с ортонормированным локальным базисом  $\vec{e}_i$  криволинейных координат  $X^i$ .



Решение системы уравнений (1) – (6) ищется в виде асимптотических разложений по параметру  $\varepsilon$  в виде функций  $u_i = u_i(X^\alpha, \xi)$ ,  $\alpha=1,2$ , зависящих от двумерных глобальных координат и локальной координаты  $\xi = X^3 / \varepsilon$  по толщине оболочки:

$$u_k = u_k^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_{ij}^{(n)} = u_k^{(0)}(X^\alpha) + \varepsilon u_k^{(1)}(X^\alpha, \xi) + \varepsilon^2 u_k^{(2)}(X^\alpha, \xi) + \dots$$

$$\theta = \theta^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \theta^{(n)} = \theta^{(0)}(X^\alpha, \xi, t) + \varepsilon \theta^{(1)}(X^\alpha, \xi, t) + \varepsilon^2 \theta^{(2)}(X^\alpha, \xi, t) + \dots \quad (7)$$

После подстановки разложений функций по малому параметру в уравнения равновесия и теплопроводности, приравнивая члены при отрицательных степенях  $\varepsilon$  к нулю, а при остальных степенях  $\varepsilon$  – к некоторым величинам  $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}, \dots$  и  $h_0^{(0)}, h_0^{(1)}, h_0^{(2)}$ , не зависящим от  $\xi$ , была получена рекуррентная последовательность локальных задач  $L_n$  термоупругости,  $n=0,1,2,\dots$ . Локальная задача термоупругости  $L_0$  имеет вид:

$$\frac{\rho c_v}{\text{Fo}_0} \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial t} = -q_{3/3}^{(-1)}, \quad -q_3^{(-1)} = \lambda_{33} g_3^{(-1)}, \quad g_3^{(-1)} = \theta_{/3}^{(0)}, \quad \sigma_{i3/3}^{(0)} = 0;$$

$$\sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{IJ33} \varepsilon_{33}^{(0)} - C_{IJKl} \varepsilon_{kl}^{T(0)}, \quad \sigma_{I3}^{(0)} = 2C_{I3K3} \varepsilon_{K3}^{(0)},$$

$$\sigma_{33}^{(0)} = C_{33KL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{3333} \varepsilon_{33}^{(0)} - C_{33kl} \varepsilon_{kl}^{T(0)}$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(0)} = O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(0)} + A_{\alpha,\beta} O_1 O_2 u_\beta^{(0)} + A_{\alpha 3} O_\alpha u_3^{(0)};$$

$$2\varepsilon_{12}^{(0)} = A_1 O_2 (u_1^{(0)} O_{1,2}) + A_2 O_1 (u_2^{(0)} O_{2,1});$$

$$\varepsilon_{33}^{(0)} = u_{3/3}^{(1)};$$

$$2\varepsilon_{\alpha 3}^{(0)} = u_{\alpha/3}^{(1)} + O_\alpha u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} O_\alpha u_\alpha^{(0)};$$
(8)

Локальные задачи термоупругости  $L_n$  имеют вид:

$$\frac{\rho c_v}{\text{Fo}_0} \frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial t} + O_1 O_2 (A_2 q_{1,1}^{(n-2)} + A_1 q_{2,2}^{(n-2)}) + q_{3/3}^{(n-1)} = h_0^{(n-2)}$$

$$-q_I^{(n-2)} = \lambda_{IJ} g_J^{(n-2)}, \quad -q_3^{(n-1)} = \lambda_{33} g_3^{(n-1)}, \quad g_J^{(n-2)} = \theta_{,J}^{(n-2)}, \quad g_3^{(n-1)} = \theta_{/3}^{(n-1)},$$

$$A_1 A_2 \sigma_{\alpha 3/3}^{(n)} + (A_\beta \sigma_{\alpha\alpha}^{(n-1)})_{,\alpha} + (A_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(n-1)} - A_{\beta,\alpha} \sigma_{\beta\beta}^{(n-1)} +$$

$$+ A_\beta A_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}^{(n-1)} + A_1 A_2 f_\alpha^{(n-1)} = h_\alpha^{(n-1)}$$

$$\begin{aligned}
& A_1 A_2 \sigma_{33/3}^{(n)} + \left( A_2 \sigma_{13}^{(n-1)} \right)_{,1} + \left( A_1 \sigma_{23}^{(n-1)} \right)_{,2} - A_2 A_{13} \sigma_{11}^{(n-1)} - A_1 A_{23} \sigma_{22}^{(n-1)} + A_1 A_2 f_3^{(n-1)} = h_3^{(n-1)} \\
& \sigma_{IJ}^{(n)} = C_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{IJKL} \varepsilon_{33}^{(n)} - C_{IJKl} \varepsilon_{kl}^{T(n)}, \sigma_{I3}^{(n)} = 2C_{I3K3} \varepsilon_{K3}^{(n)}; \\
& \sigma_{33}^{(n)} = C_{33KL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + C_{3333} \varepsilon_{33}^{(n)} - C_{33kl} \varepsilon_{kl}^{T(n)} \\
& \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(n)} = O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(n)} + A_{\alpha,\beta} O_1 O_2 u_\beta^{(n)} + A_{\alpha 3} O_\alpha u_3^{(n)}; \\
& 2\varepsilon_{12}^{(n)} = O_2 u_{1,2}^{(n)} + O_1 u_{2,1}^{(n)} - O_1 O_2 (A_{1,2} u_1^{(n)} + A_{2,1} u_2^{(n)}); \\
& \varepsilon_{33}^{(n)} = u_{3/3}^{(n+1)}; 2\varepsilon_{\alpha 3}^{(n)} = u_{\alpha/3}^{(n+1)} + O_\alpha u_{3,\alpha}^{(n)} - A_{\alpha 3} O_\alpha u_\alpha^{(n)}; \\
& \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(n)} = S_{i\pm}^{(n)}; \\
& \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(n)}] = 0; [u_i^{(n+1)}] = 0; [q_3^{(n-1)}] = 0; [\theta^{(n)}] = 0; \\
& \langle u_i^{(n+1)} \rangle = 0, \langle \theta^{(n)} \rangle = 0. \\
& \Sigma_{3\pm} : q_3^{(n-1)} = 0; \Sigma_T : q_I^{(n-2)} n_I = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь обозначена операция осреднения по толщине оболочки  $\langle u_i^{(n)} \rangle = \int_{-0.5}^{0.5} u_i^{(n)} d\xi$ , а

также обозначены функции граничных условий и массовых сил  $S_{i\pm}^{(n)} = 0$ , если  $n = 1, 2, 4, 5, \dots$ ;  $S_{i\pm}^{(n)} = -p_\pm \delta_{i3}$ , если  $n = 3$ .

Решением локальной задачи термоупругости в нулевом приближении являются функции  $\theta^{(0)}, u_j^{(1)}, \varepsilon_{kl}^{(0)}, \sigma_{ij}^{(0)}$ , они зависят от локальной координаты  $\xi$  и входных данных этой задачи – перемещений  $u_j^{(0)}(X^\alpha)$ . Решением задачи термоупругости  $n$ -го приближения являются функции  $\theta^{(n)}, u_j^{(n+1)}, \varepsilon_{kl}^{(n)}, \sigma_{ij}^{(n)}$ , а  $\theta^{(n-1)}, u_j^{(n)}, \varepsilon_{kl}^{(n-1)}, \sigma_{ij}^{(n-1)}$  в этой задаче – входные данные.

Ввиду того, что задачи (8), (9) являются одномерными по локальной переменной  $\xi$ , их решение можно найти аналитически. После решения локальных задач нулевого приближения были получены выражения для деформаций, перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned}
& u_\alpha^{(1)} = -\xi O_\alpha (u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)}), \quad u_3^{(1)} = U_{3KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + U_3^{T(1)}, \\
& U_{3KL}^{(1)} = -\langle Z_{3KL} \rangle_\xi, \quad U_3^{T(1)} = \langle Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle_\xi, \quad Z_{3kl} = C_{3333}^{-1} C_{33kl}, \\
& \varepsilon_{K3}^{(0)} = 0, \quad \varepsilon_{33}^{(0)} = Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(0)} - Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)}; \\
& \sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}, \quad C_{IJKl}^{(0)} = C_{IJKl} - C_{IJ33} Z_{3kl}.
\end{aligned}$$

Локальные задачи высших приближений также решаются аналитически, их решение было получено в виде:

$$\begin{aligned}
u_\alpha^{(n+1)} &= \langle C_{\alpha 3 I 3}^{-1} \sigma_{I 3}^{(n)} \rangle_\xi - O_\alpha \langle u_{3, \alpha}^{(n)} \rangle_\xi + A_{\alpha 3} O_\alpha \langle u_\alpha^{(n)} \rangle_\xi, \\
u_3^{(n+1)} &= \langle C_{3333}^{-1} \sigma_{33}^{(n)} \rangle_\xi - \langle Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{(n)} \rangle_\xi + \langle Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(n)} \rangle_\xi, \\
2\varepsilon_{K3}^{(n)} &= C_{I 3 K 3}^{-1} \sigma_{I 3}^{(n)}, \quad \varepsilon_{33}^{(n)} = C_{3333}^{-1} \sigma_{33}^{(n)} - Z_{3KL} \varepsilon_{KL}^{(n)} + Z_{3kl} \varepsilon_{kl}^{T(n)} \\
\sigma_{\alpha 3}^{(n)} &= -O_1 O_2 \left\{ \left( A_\beta \sigma_{\alpha \alpha}^{(n-1)} \right)_{, \alpha} + \left( A_\alpha \sigma_{\alpha \beta}^{(n-1)} \right)_{, \beta} + A_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha \beta}^{(n-1)} - A_{\beta, \alpha} \sigma_{\beta \beta}^{(n-1)} + A_\beta A_{\alpha 3} \sigma_{\alpha 3}^{(n-1)} \right\}_\xi \\
\sigma_{33}^{(n)} &= -O_1 O_2 \left\{ \left( A_2 \sigma_{13}^{(n-1)} \right)_{, 1} + \left( A_1 \sigma_{23}^{(n-1)} \right)_{, 2} - A_2 A_{13} \sigma_{11}^{(n-1)} - A_1 A_{23} \sigma_{22}^{(n-1)} \right\}_\xi + \Delta S_3^{(n)} (\xi + 0.5) + S_{3-}^{(n)}
\end{aligned}$$

Здесь введено обозначение:  $\{f(X^\alpha, \xi)\}_\xi = \int_{-0.5}^{\xi} (f(X^\alpha, \tilde{\xi}) - \langle f \rangle) d\tilde{\xi}$ .

Далее осуществлено рекуррентное решение задач: решение каждого следующего приближения выражается через решение предыдущего, в итоге были получены выражение решений задач высших приближений через нулевое приближение, принимающее на вход перемещения  $u_j^{(0)}(X^\alpha)$ , которые определяются из осредненной задачи равновесия оболочки. При решении локальных задач ограничиваемся решением задачи третьего приближения, в работах Ю.И. Димитриенко и Д.О. Яковлева было установлено, что для достижения приемлемой инженерной точности вычислений напряжений  $\sigma_{IJ}$  в многослойных тонких конструкциях достаточно ограничиться только нулевым и первым приближением, для сдвиговых напряжений  $\sigma_{\alpha 3}$  – нулевым, первым и вторым приближением, а для компонент  $\sigma_{33}$  – третьим приближением.

После последовательного выражения решения задач для высших приближений через нулевое приближение были получены следующие выражения для компонент тензора напряжений вплоть до третьего приближения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{IJ}^{(1)} &= C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(1)} + G_{IJKL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \tilde{\sigma}_{IJ}^{T(1)}, \quad \sigma_{\alpha 3}^{(1)} = -C_{\alpha 3 KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - R_{\alpha K L J}^{(1)} \varepsilon_{KL, J}^{(0)} - \sigma_{\alpha 3}^{T(1)}, \\
\sigma_{33}^{(1)} &= C_{33KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{33}^{T(1)}, \\
\sigma_{IJ}^{(2)} &= C_{IJKL}^{(0)} \langle \xi \rangle_\xi \eta_{KL}^{(2)} - C_{IJKL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - R_{IJKLM}^{(2)} \varepsilon_{KL, M}^{(0)} - E_{IJKLMN} \varepsilon_{KL, MN}^{(0)} - N_{IJKL} \eta_{KL} - \sigma_{IJ}^{T(2)}, \\
\sigma_{\alpha 3}^{(2)} &= -C_{\alpha 3 KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - R_{\alpha 3 K L J}^{(2)} \varepsilon_{KL, J}^{(0)} - N_{\alpha 3 KL} \eta_{KL} - V_{\alpha 3 K L J} \eta_{KL, J} - \sigma_{\alpha 3}^{T(2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^{(2)} &= O_1 O_2 \left\{ A_{2,1} (C_{13KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{1KLJ}^{(1)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \sigma_{13}^{T(1)}) + A_2 (C_{13KL}^{(1)} \varepsilon_{KL,1}^{(0)} + R_{1KLJ}^{(1)} \varepsilon_{KL,J1}^{(0)} + \sigma_{13,1}^{T(1)}) + \right. \\
&+ A_{1,2} (C_{23KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{2KLJ}^{(1)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \sigma_{23}^{T(1)}) + A_1 (C_{23KL}^{(1)} \varepsilon_{KL,2}^{(0)} + R_{2KLJ}^{(1)} A_1 \varepsilon_{KL,J2}^{(0)} + \sigma_{23,2}^{T(1)}) + \\
&\left. + A_2 A_{13} (C_{11KL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + C_{11KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{11}^{T(1)}) + A_1 A_{23} (C_{22KL}^{(0)} \xi \eta_{KL} + C_{22KL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \sigma_{22}^{T(1)}) \right\}_{\xi} \\
\sigma_{33}^{(3)} &= C_{33KL}^{(3)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + R_{33KLJ}^{(3)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + E_{33KLJM}^{(3)} \varepsilon_{KL,JM}^{(0)} + N_{33KL}^{(3)} \eta_{KL} + V_{33KLM}^{(3)} \eta_{KL,M} + \\
&+ U_{33KLMN}^{(3)} \eta_{KL,MN} + W_{KL}^{(3)} \eta_{KL}^{(2)} - (\Delta p (\xi + 0.5) + p_-) - \sigma_{33}^{T(3)}
\end{aligned}$$

С использованием этих выражений, были получены результирующие выражения для всех 6 компонент тензора напряжений с учетом термонапряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_{IJ} &= \hat{C}_{IJKL}^{(1)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + \hat{C}_{IJKL}^{(0)} \xi \eta_{KL} - \sigma_{IJ}^T, \\
-\sigma_{\alpha 3} &= \hat{C}_{\alpha 3KL}^{(2)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + \hat{R}_{\alpha 3KLJ}^{(2)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \hat{N}_{\alpha 3KL} \eta_{KL} + \hat{V}_{\alpha 3KLJ} \eta_{KL,J} + \sigma_{\alpha 3}^T, \\
\sigma_{33} &= \hat{C}_{33KL}^{(3)} \varepsilon_{KL}^{(0)} + \hat{R}_{33KLJ}^{(3)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \hat{E}_{33KLJM}^{(3)} \varepsilon_{KL,JM}^{(0)} + \hat{N}_{33KL} \eta_{KL} + \\
&+ \hat{V}_{33KLM}^{(3)} \eta_{KL,M} + \hat{U}_{33KLMN}^{(3)} \eta_{KL,MN} + \hat{W}_{KL}^{(3)} \eta_{KL}^{(2)} - \sigma_{33}^T - \mathfrak{a}^3 (\Delta p (\xi + 0.5) + p_-).
\end{aligned} \tag{10}$$

Все тензоры  $\hat{C}_{IJKL}^{(1)}, \hat{C}_{IJKL}^{(0)}, \hat{C}_{\alpha 3KL}^{(2)}, \hat{R}_{\alpha 3KLJ}^{(2)}, \hat{N}_{\alpha 3KL}, \hat{V}_{\alpha 3KLJ}, \hat{C}_{33KL}^{(3)}, \hat{R}_{33KLJ}^{(3)}, \hat{E}_{33KLJM}^{(3)}, \hat{N}_{33KL}, \hat{V}_{33KLM}^{(3)}, \hat{U}_{33KLMN}^{(3)}, \hat{W}_{KL}^{(3)}$ , выражаются только через тензор модулей упругости  $C_{ijkl}$  и геометрические параметры  $A_\alpha, k_\alpha, X_s^3, h$ , их явное выражение приведено в диссертации. Полученные выражения позволяют вычислить полный тензор напряжений для оболочек произвольной кривизны.

Замыкающими соотношениями для вычисления перемещений и деформаций для итогового вычисления напряжений являются осредненные уравнения равновесия теории оболочек. Усилия  $T_{IJ}$ , моменты  $M_{IJ}$  и перерезывающие сил  $Q_I$  в оболочке введены следующим образом:

$$T_{IJ} = \langle \sigma_{IJ} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n \langle \sigma_{IJ}^{(n)} \rangle, M_{IJ} = \mathfrak{a} \langle \xi \sigma_{IJ} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^{n+1} \langle \xi \sigma_{IJ}^{(n)} \rangle, Q_I = \langle \sigma_{I3} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n \langle \sigma_{I3}^{(n)} \rangle.$$

Тогда осредненные уравнения равновесия многослойной оболочки имеют вид:

$$\begin{aligned}
&(A_\beta T_{\alpha\alpha})_{,\alpha} + (A_\alpha T_{\alpha\beta})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} T_{\alpha\beta} - A_{\beta,\alpha} T_{\beta\beta} + A_\beta A_{\alpha 3} Q_\alpha + A_1 A_2 F_\alpha = 0, \\
&(A_2 Q_1)_{,1} + (A_1 Q_2)_{,2} - A_2 A_{13} T_{11} - A_1 A_{23} T_{22} + A_1 A_2 (F_3 - \Delta \bar{p}) = 0, \\
&(A_\beta M_{\alpha\alpha})_{,\alpha} + (A_\alpha M_{\alpha\beta})_{,\beta} + A_{\alpha,\beta} M_{\alpha\beta} - A_{\beta,\alpha} M_{\beta\beta} - A_1 A_2 (Q_\alpha - m_\alpha) = 0,
\end{aligned} \tag{11}$$

где обозначено  $\Delta\bar{p} = \mathfrak{a}^2 \Delta p$ , моменты внешних массовых сил  $m_\alpha = \langle \xi \rho f_\alpha \rangle$ . Эти уравнения формально совпадают с классическими осредненными уравнениями равновесия теории оболочек Кирхгофа-Лява и Тимошенко, однако они выведены с помощью асимптотической теории.

Осредненные определяющие соотношения для усилий и моментов имеют вид:

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL} \eta_{KL} - T_{IJ}^T, \quad M_{IJ} = \bar{B}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL} \eta_{KL} - M_{IJ}^T, \quad (12)$$

где обозначены средние функции – тензоры мембранных жесткостей, изгибных жесткостей и смешанных жесткостей оболочки:  $\bar{C}_{IJKL} = \langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle + \mathfrak{a} \langle C_{IJKL}^{(1)} \rangle$ ,  $B_{IJKL} = \mathfrak{a} \langle \xi C_{IJKL}^{(0)} \rangle$ ,  $\bar{B}_{IJKL} = \mathfrak{a} \langle \xi C_{IJKL}^{(0)} \rangle + \mathfrak{a}^2 \langle \xi C_{IJKL}^{(1)} \rangle$ ,  $D_{IJKL} = \mathfrak{a}^2 \langle \xi^2 C_{IJKL}^{(0)} \rangle$ , а также тепловые усилия и моменты в оболочке  $T_{IJ}^T = \langle \sigma_{IJ}^T \rangle$ ,  $M_{IJ}^T = \mathfrak{a} \langle \xi \sigma_{IJ}^T \rangle$ .

Кинематические соотношения, описывающие тангенциальные деформации срединной поверхности оболочки и искривление срединной поверхности оболочки, получены в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(0)} &= O_\alpha u_{\alpha,\alpha}^{(0)} + A_{\alpha,\beta} O_1 O_2 u_\beta^{(0)} + A_{\alpha 3} O_\alpha u_3^{(0)}; \quad 2\varepsilon_{12}^{(0)} = A_1 O_2 (u_1^{(0)} O_1)_{,2} + A_2 O_1 (u_2^{(0)} O_2)_{,1}; \\ -\eta_{\alpha\alpha} &= O_\alpha (O_\alpha (u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)}))_{,\alpha} + O_1 O_2 O_\beta A_{\alpha,\beta} (u_{3,\beta}^{(0)} - A_{\beta 3} u_\beta^{(0)}) \\ -2\eta_{12} &= A_1 O_2 (O_1^2 (u_{3,1}^{(0)} - A_{13} u_1^{(0)}))_{,2} + A_2 O_1 (O_2^2 (u_{3,2}^{(0)} - A_{23} u_2^{(0)}))_{,1} \end{aligned} \quad (13)$$

Эти уравнения с точностью до обозначений ( $O_\alpha A_{\alpha 3} = k_\alpha = 1/R_\alpha$ ) совпадают с кинематическими соотношениями общей теории тонких оболочек Кирхгофа-Лява. Выражения  $\gamma_\alpha = O_\alpha (u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)})$  представляют собой углы поворота нормали.

К этой системе присоединяем граничные условия на краю  $\partial\Sigma_0$  оболочки, представляющем собой пересечение поверхностей срединной и торцевой поверхностей:  $\partial\Sigma_{0u} = \Sigma_0 \cap \Sigma_{Tu}$ .  $\partial\Sigma_{0u} : u_i^{(0)} = u_{ei}$ ,  $\partial\Sigma_{0u} : \sum_{\alpha=1}^2 \nu_\alpha (u_{3,\alpha}^{(0)} - A_{\alpha 3} u_\alpha^{(0)}) = 0$ . При  $u_{ei} = 0$  получаем условия жесткого закрепления оболочки на этом контуре.

Для определения температуры  $\theta^{(0)}$  необходимо решить задачу теплопроводности в нулевом приближении:

$$\frac{\rho c_v}{Fo_0} \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial t} = -q_{3/3}^{(-1)}, \quad -q_3^{(-1)} = \lambda_{33} g_3^{(-1)}, \quad g_3^{(-1)} = \theta_{/3}^{(0)}, \quad \Sigma_{3\pm} : q_3^{(-1)} = \pm q_{e\pm}, \quad t = 0: \theta = \theta_0. \quad (14)$$

После решения этой осредненной системы уравнений для оболочек с граничными условиями и определения всех 5 функций  $u_1^{(0)}$ ,  $u_3^{(0)}$  и  $Q_I$  могут быть вычислены все 6 компонент тензора напряжений без решения дополнительных задач, а только по аналитическим соотношениям.

**Второй раздел** посвящен разработке варианта метода асимптотического осреднения для решения системы уравнений термоупругости для тонких многослойных оболочек цилиндрической формы. Для таких оболочек были введены безразмерные цилиндрические координаты  $X^i$ , где в качестве характерного размера  $L$  выбран радиус  $R$ :  $X^1 = z/R$ ,  $X^2 = \varphi$ ,  $X^3 = (r/R - 1)$ . С учетом того, что при таком задании криволинейных координат  $X^i$ :  $H_1 = 1$ ;  $H_2 = 1$ ,  $H_3 = 1$ ,  $A_{\alpha,\beta} = 0$ ,  $H_{\alpha/3} = \varkappa A_{\alpha 3}$ ,  $A_{13} = 0$ ,  $A_{23} = 1$ , осредненная система уравнений равновесия для цилиндрических оболочек в безразмерном виде принимает вид:

$$T_{IJ,J} + Q_2 \delta_{2I} + F_I = 0, \quad M_{IJ,J} - Q_I + m_I = 0, \quad Q_{1,1} + Q_{2,2} - T_{22} + F_3 - \Delta \bar{p} = 0, \quad I, J = 1, 2 \quad (15)$$

Определяющие соотношения для оболочки в цилиндрических координатах имеют вид (12), а кинематические соотношения (13) для цилиндрических оболочек принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(0)} &= u_{1,1}^{(0)}, & \varepsilon_{22}^{(0)} &= u_{2,2}^{(0)} + u_3^{(0)}, & 2\varepsilon_{12}^{(0)} &= u_{1,2}^{(0)} + u_{2,1}^{(0)}, \\ \eta_{11} &= -u_{3,11}^{(0)}, & \eta_{22} &= -u_{3,22}^{(0)} + u_{2,2}^{(0)}, & \eta_{12} &= -u_{3,12}^{(0)} + \frac{1}{2} u_{2,1}^{(0)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Выражения (10) для напряжений для случая цилиндрических оболочек были получены в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ} &= C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(0)} - C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} + \varkappa C_{IJKL}^{(0)} \xi \eta_{KL}, \\ -\sigma_{\alpha 3} &= \varkappa \left( R_{\alpha K LJ}^{(1)} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} - \left\{ C_{\alpha \alpha kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_{\xi, \alpha} - \left\{ C_{\alpha \beta kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_{\xi, \beta} \right) + \varkappa^2 V_{\alpha 3 K LJ} \eta_{KL,J}, \end{aligned}$$

$$\text{где } R_{\alpha K LJ}^{(1)} = \left\{ C_{\alpha \alpha KL}^{(0)} \right\}_{\xi} \delta_{\alpha J} + \left\{ C_{\alpha \beta KL}^{(0)} \right\}_{\xi} \delta_{\beta J}, \quad V_{\alpha 3 K LJ} = \left\{ C_{\alpha \alpha KL}^{(0)} \xi \right\}_{\xi} \delta_{\alpha J} + \left\{ C_{\alpha \beta KL}^{(0)} \xi \right\}_{\xi} \delta_{\beta J},$$

$$\sigma_{33} = \mathfrak{a} \left( \left\{ C_{22KL}^{(0)} \right\}_{\xi} \varepsilon_{KL}^{(0)} - \left\{ C_{22kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_{\xi} \right) + \mathfrak{a}^2 \left( E_{33KLJM}^{(2)} \varepsilon_{KL, JM}^{(0)} + \left\{ C_{22KL}^{(0)} \xi \right\}_{\xi} \eta_{KL} \right) + \mathfrak{a}^3 \left( p_- + \Delta p(\xi + 0.5) + U_{33KLMN}^{(3)} \eta_{KL, MN} + \left\{ C_{22KL}^{(0)} \langle \xi \rangle_{\xi} \right\}_{\xi} \eta_{KL}^{(2)} \right), \quad (17)$$

где  $E_{33KLJM}^{(2)} = \left\{ R_{1KLJ}^{(1)} \right\}_{\xi} \delta_{1M} + \left\{ R_{2KLJ}^{(1)} \right\}_{\xi} \delta_{2M}$ ,  $U_{33KLMN}^{(3)} = \left\{ V_{13KLM} \right\}_{\xi} \delta_{1N} + \left\{ V_{23KLM} \right\}_{\xi} \delta_{2N}$ ,

выражения для тепловых напряжений имеют вид:

$$\sigma_{IJ}^T = -C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}, \quad \sigma_{\alpha 3}^T = \mathfrak{a} \left( \left\{ C_{\alpha\alpha kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_{\xi, \alpha} + \left\{ C_{\alpha\beta kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_{\xi, \beta} \right), \quad \sigma_{33}^T = -\mathfrak{a} \left\{ C_{22kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \right\}_{\xi}.$$

**Третий раздел** посвящен разработке алгоритма вычисления термонапряжений для частного случая задачи об осесимметричном изгибе цилиндрической композитной оболочки при воздействии неравномерного одностороннего нагрева и давления, на основе разработанного в первом и втором разделах диссертации варианта метода асимптотического осреднения. Оба торца оболочки полагаются жестко закрепленными:  $X^1 = 0, X^1 = \bar{L}$ :  $u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = u_3^{(0)} = 0$ ,  $u_{3,1}^{(0)} = 0$ , где  $\bar{L} = L_0 / R$  – безразмерная длина оболочки.

При таких граничных условиях в оболочке имеет место состояние осесимметричного изгиба, при котором отличны от нуля прогиб  $u_3^{(0)}$  и продольное перемещение  $u_1^{(0)}$ , а также изгибающий момент  $M_{11}$ , перерезывающая сила  $Q_1$  и  $T_{11}, T_{22}$  – продольное и окружное усилия, которые зависят только от осевой координаты  $X^1$ . Тогда система уравнений (15) принимает вид:

$$\begin{cases} T_{11,1} = 0, \\ M_{11,1} - Q_1 + m_1 = 0, \\ Q_{1,1} - T_{22} + F_3 - \Delta \bar{p} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Определяющие соотношения (12) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \bar{C}_{1111} \varepsilon_{11}^{(0)} + \bar{C}_{1122} \varepsilon_{22}^{(0)} + B_{1111} \eta_{11} - T_{11}^T, \\ T_{22} &= \bar{C}_{1122} \varepsilon_{11}^{(0)} + \bar{C}_{2222} \varepsilon_{22}^{(0)} + B_{2211} \eta_{11} - T_{22}^T, \\ M_{11} &= \bar{B}_{1111} \varepsilon_{11}^{(0)} + \bar{B}_{1122} \varepsilon_{22}^{(0)} + D_{1111} \eta_{11} - M_{11}^T. \end{aligned} \quad (19)$$

Кинематические соотношения (16) имеют вид

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = u_{1,1}^{(0)}, \quad \varepsilon_{22}^{(0)} = u_3^{(0)}, \quad \varepsilon_{12}^{(0)} = 0, \quad \eta_{11} = -u_{3,1}^{(0)}, \quad \eta_{22} = 0, \quad \eta_{12} = 0 \quad (20)$$

Выражения для зависимости тепловых напряжений  $T_{11}^T$ ,  $T_{22}^T$  и тепловых моментов  $M_{11}^T$  от температуры  $\theta^{(0)}$  были получены в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_{IJ}^T &= \langle \sigma_{IJ}^T \rangle = \langle C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle + \alpha \langle \sigma_{IJ}^{T(1)} \rangle = \langle C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle \\ M_{IJ}^T &= \alpha \langle \xi \sigma_{IJ}^T \rangle = \alpha \langle \xi C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} \rangle, \\ \varepsilon_{kl}^{T(0)} &= \alpha_{kl} (\theta^{(0)} - 1). \end{aligned} \quad (21)$$

В этих формулах оставлены только главные члены разложения.

Для определения температуры  $\theta^{(0)}$  была решена задача теплопроводности в нулевом приближении

$$\frac{\rho c_v}{\text{Fo}_0} \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial t} = (\lambda_{33} \theta_{/3}^{(0)})_{/3}$$

$$\Sigma_{3\pm} : \lambda_{33} \theta_{/3}^{(0)} = \pm q_{e\pm}, q_{e\pm} = \alpha_{\pm}^T (\theta_{e\pm} - \theta^{(0)}), t=0: \theta=1 \quad (22)$$

Здесь обозначены:  $\alpha_{\pm}^T$  – коэффициенты теплообмена на внешней и внутренней поверхностях оболочки,  $\theta_{e\pm}$  – температура внешней среды на внешней и внутренней поверхностях оболочки.

В результате решения системы уравнений (18)-(20) были получены выражения для моментов и усилий:

$$M_{11} = w_0 \tilde{B}_{1122} + \sum_{m=1}^4 C_m (\tilde{B}_{1122} \Phi_m - \tilde{D}_{1111} \Phi_{m,11}) - \tilde{M}_{11}^T + T_1^0 (\beta_1 - \tilde{B}_{1122} \beta_3)$$

$$T_{22} = w_0 \tilde{C}_{2222} + \sum_{m=1}^4 C_m (\tilde{C}_{2222} \Phi_m - \tilde{B}_{1122} \Phi_{m,11}) - \tilde{T}_{22}^T,$$

где функции  $\Phi_m(X^1)$  имеют вид:  $\Phi_1 = e^{-rX^1} \cos \omega X^1$ ,  $\Phi_2 = e^{-rX^1} \sin \omega X^1$ ,  $\Phi_3 = e^{rX^1} \cos \omega X^1$ ,  $\Phi_4 = e^{rX^1} \sin \omega X^1$ , а т выражения для перемещений с точностью до 6 неопределенных констант  $C_0, C_1, \dots, C_4$  и  $T_1^0$ :

$$u_3^{(0)} = w_0 - \beta_3 T_1^0 + \sum_{m=1}^4 C_m \Phi_m(X^1),$$

$$\begin{aligned} u_1^{(0)} &= C_0 + \beta_1 \sum_{m=1}^4 C_m \Phi_{m,1} + \frac{x}{\bar{C}_{1111}} (T_1^0 + T_{11}^T) - \beta_2 (w_0 - \beta_3 T_1^0) x - \\ &- \beta_2 \chi_1 (C_1 (-r\Phi_1 + \omega\Phi_2) - C_2 (r\Phi_2 + \omega\Phi_1) + C_3 (r\Phi_3 + \omega\Phi_4) + C_4 (r\Phi_4 - \omega\Phi_3)) \end{aligned}$$



Далее для нахождения констант  $C_m$  были использованы граничные условия жесткого закрепления оболочки, показано, что тогда константы  $C_m$  находятся из системы  $\sum_{m=0}^5 \Phi_{sm} C_m = U_s$ ,  $s = 0, \dots, 5$ , где  $\Phi_{sm}$  – вычисленные коэффициенты (выражения для них приведены в диссертации).

После нахождения компонент перемещений, из (17) в явном виде были получены выражения для тангенциальных  $\sigma_{IJ}$ , касательных  $\sigma_{I3}$  и поперечных  $\sigma_{33}$  компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{IJ} &= C_{IJ11}^{(0)} \varepsilon_{11}^{(0)} + C_{IJ22}^{(0)} \varepsilon_{22}^{(0)} - C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)} + \alpha C_{IJ11}^{(0)} \xi \eta_{11}, \\ -\sigma_{13} &= \alpha \left( \{C_{1111}^{(0)}\}_{\xi} \varepsilon_{11,1}^{(0)} + \{C_{1122}^{(0)}\}_{\xi} \varepsilon_{22,1}^{(0)} - \{C_{11kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi,1} \right) + \alpha^2 \{C_{1111}^{(0)} \xi\}_{\xi} \eta_{11,1}, \\ -\sigma_{23} &= \alpha \left( \{C_{1211}^{(0)}\}_{\xi} \varepsilon_{11,1}^{(0)} + \{C_{1222}^{(0)}\}_{\xi} \varepsilon_{22,1}^{(0)} - \{C_{12kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi,1} \right) + \alpha^2 \{C_{1211}^{(0)} \xi\}_{\xi} \eta_{11,1}, \\ \sigma_{33} &= \alpha \left( \{C_{2211}^{(0)}\}_{\xi} \varepsilon_{11}^{(0)} + \{C_{2222}^{(0)}\}_{\xi} \varepsilon_{22}^{(0)} - \{C_{22kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi} \right) + \\ &+ \alpha^2 \left( \{ \{C_{1111}^{(0)}\}_{\xi} \}_{\xi} \varepsilon_{11,11}^{(0)} + \{ \{C_{1122}^{(0)}\}_{\xi} \}_{\xi} \varepsilon_{22,11}^{(0)} + \{C_{2211}^{(0)} \xi\}_{\xi} \eta_{11} \right) + \\ &+ \alpha^3 \left( p_- + \Delta p (\xi + 0.5) + \{ \{C_{1111}^{(0)} \xi\}_{\xi} \}_{\xi} \eta_{11,11} \right),\end{aligned}$$

Выражения для тепловых напряжений были получены в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{IJ}^T &= -C_{IJKl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}, \quad \sigma_{13}^T = \alpha \{C_{11kl}^{(0)} \varepsilon_{kl,1}^{T(0)}\}_{\xi} = 0, \\ \sigma_{23}^T &= \alpha \{C_{12kl}^{(0)} \varepsilon_{kl,1}^{T(0)}\}_{\xi} = 0, \quad \sigma_{33}^T = \alpha \{C_{22kl}^{(0)} \varepsilon_{kl}^{T(0)}\}_{\xi}.\end{aligned}$$

Решение задачи теплопроводности в нулевом приближении осуществлялось численно, с помощью конечно-разностного метода. Использовалась разностная аппроксимацию задачи по неявной схеме:

$$\begin{aligned}k_i \frac{\partial \bar{\theta}_i^{j+1} - \bar{\theta}_i^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda_{i+1}}{\Delta \xi^2} (\bar{\theta}_{i+1}^{j+1} - \bar{\theta}_i^{j+1}) - \frac{\lambda_i}{\Delta \xi^2} (\bar{\theta}_i^{j+1} - \bar{\theta}_{i-1}^{j+1}), \\ i=0: \frac{\lambda_0}{\Delta \xi} (\theta_1^{j+1} - \theta_0^{j+1}) &= -\tilde{\alpha}_-^T (\theta_{e-} - \theta_0^{j+1}), \quad i=N: \frac{\lambda_N}{\Delta \xi} (\theta_N^{j+1} - \theta_{N-1}^{j+1}) = \tilde{\alpha}_+^T (\theta_{e+} - \theta_N^{j+1}), \\ t=0: \theta_i^0 &= 1, \quad i=0, 1, \dots, N.\end{aligned}$$

Здесь  $\lambda = \lambda_{33}$ ,  $k = \frac{\rho c_v}{F_{O_0}}$ . Данная система имеет трехдиагональную структуру, для

ее решения применен метод прогонки.

Были проведены численные расчеты для цилиндрической оболочки с многослойной слоисто-волокнутой структурой композита, каждый слой которой представлял однонаправленно-армированный системой нитей материал (1D материал), ориентированный под некоторым углом  $\phi_{(s)}$  к направлению  $X^1$  в касательной плоскости, ортогональной к оси  $OX^3$ , совпадающей с направлением  $\xi$ . Углы ориентации волокон в слоях  $\phi_{(s)}$  варьировались: базовым для расчетов был выбран пакет из 4-х слоев с системой углов  $[\phi_{(1)} / \phi_{(2)} / \phi_{(3)} / \phi_{(4)}] = [30^\circ / 60^\circ / 60^\circ / 30^\circ]$  (КМ-1) и  $[45^\circ / 30^\circ / 30^\circ / 45^\circ]$  (КМ-2). Толщины всех слоев были выбраны одинаковыми, что обеспечивало ортотропность всего композиционного материала оболочки, как эффективной среды. Схема армирования КМ-2 отличается от КМ-1 тем, что внешние слои оболочки № 1 и № 4 у КМ-2 имеют больший угол армирования ( $45^\circ$  и  $30^\circ$ , соответственно), а внутренние слои № 2 и 3, наоборот – меньший угол армирования ( $30^\circ$  и  $60^\circ$ ). Следовательно, у КМ-2 внешние слои № 1 и 2 обладают меньшей жесткостью, чем у КМ-1, а внутренние – наоборот, большей жесткостью. Представленные ниже расчеты позволяют оценить влияние изменения порядка расположения более жестких слоев в пакете на общее осредненное напряженно-деформированное состояние оболочки, а также на распределение локальных напряжений  $\sigma_{ij}$  в каждом слое.

Толщина оболочки была постоянной и равной  $h = 2 \cdot 10^{-2}$  м, радиус срединной поверхности оболочки  $R = 0.2$  м, длина оболочки  $L_0$  варьировалась.

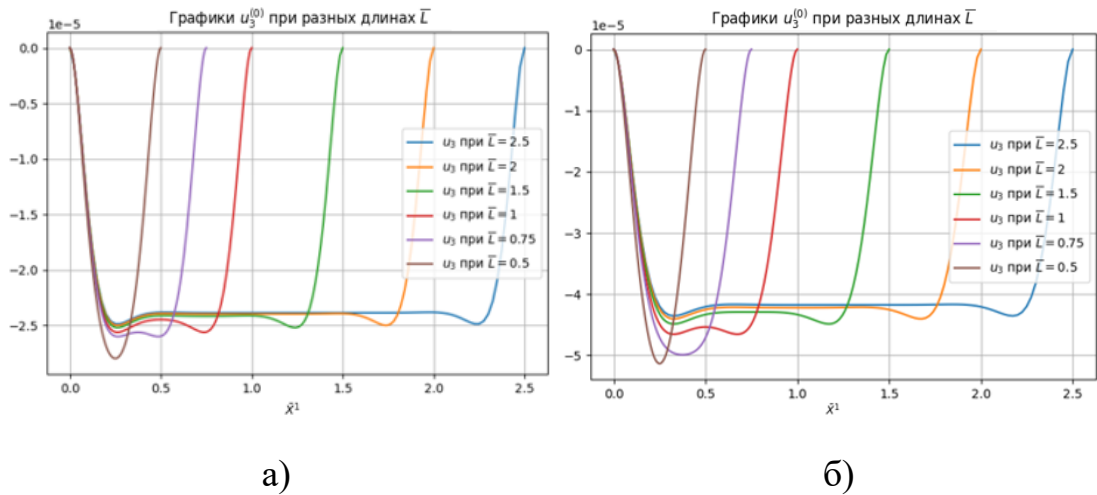


Рис.1 Зависимость прогиба оболочки  $u_3^{(0)}$  (м) от продольной координаты  $X^1$  при различных длинах  $\bar{L}$  оболочки из КМ-1 (а) и КМ-2 (б).

Результаты расчетов показывают, что перераспределение жесткости слоев в пакете КМ-2 по сравнению с КМ-1 приводит к возрастанию абсолютной величины значения прогиба: максимальное по абсолютной величине значение прогиба составляет, соответственно 0,018 и 0,042 мм в безмоментной зоне длинных оболочек, а также 0,028 и 0,052 – максимальное значение для коротких оболочек. Этот эффект также обусловлен уменьшением изгибной жесткости  $D_{1111}$  оболочки при переходе к КМ-2.

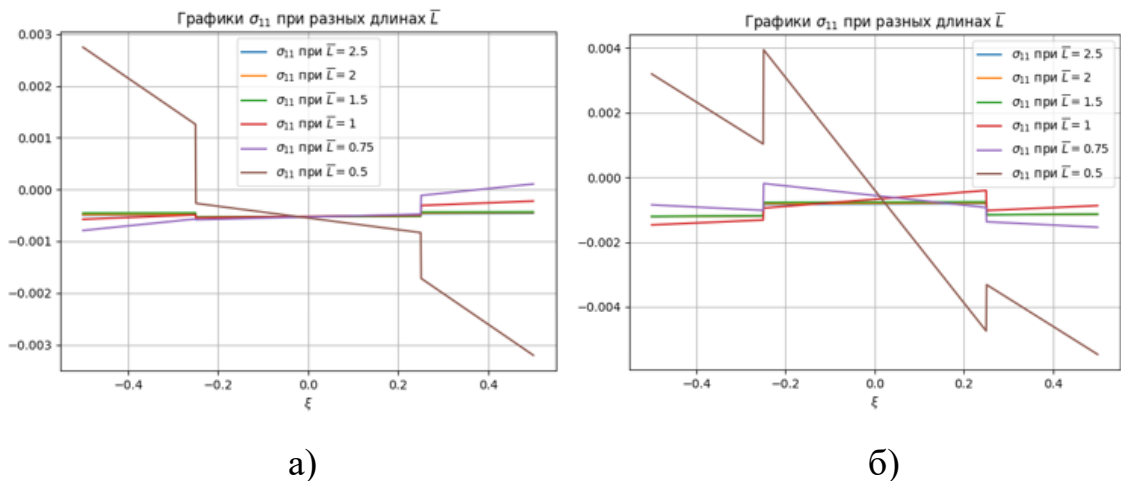


Рис.2 Распределение окружных напряжений  $\sigma_{11}$  (ГПа) по толщине оболочки при  $X^1 = 0,5\bar{L}$  для различных длин  $\bar{L}$  оболочки из КМ-1 (а) и КМ-2 (б).

На рисунке 2 показан график зависимости продольного (изгибного) напряжения  $\sigma_{11}$  от поперечной координаты  $\xi$  при  $X^1 = 0,5\bar{L}$  для различных длин  $\bar{L}$  оболочки. На границе раздела слоев оболочки №№ 1, 2 и №№ 3, 4, при  $\xi = -0.25$  и  $\xi = 0.25$ ,

соответственно, напряжения  $\sigma_{11}$  изменяют свои значения скачком, это соответствует переходу от к слоя к слою с другим углом ориентации волокон. С увеличением длины оболочки при  $\bar{L} > 0.5$  значения изгибного напряжения уменьшаются, поскольку оболочка в средней своей части переходит в безмоментное состояние, и наоборот, для коротких оболочек напряженное состояние является моментным, изгибные напряжения  $\sigma_{11}$  возрастают, при этом в верхних слоях №№ 3 и 4 эти напряжения – сжимающие, в нижних слоях №№ 1 и 2 – растягивающие, что обусловлено односторонним действием внешнего давления  $\tilde{p}_+$ . Влияние изменения структуры армирования приводит к тому, что напряжения  $\sigma_{11}$  в срединных слоях №№ 2 и 3 оболочки в КМ-2 (б) больше, чем в КМ-1 (а), а во внешних слоях №№ 1 и 4, наоборот, меньше. Это также объясняется тем, что модули упругости  $C_{1111}$  в слоях 3 и 4 с углами армирования  $\pm 30^\circ$  у КМ-2 больше, чем с углами армирования  $\pm 60^\circ$  у КМ-1. И наоборот, в слоях 1 и 4 с углами армирования  $\pm 45^\circ$  модули упругости  $C_{1111}$  у КМ-2 меньше, чем у КМ-1 с углами  $\pm 30^\circ$ .

На рисунке 3 показаны распределения температуры по толщине оболочке в различные моменты времени: от 1 до 40 с. В силу условий теплоизоляции на внутренней поверхности оболочки в течение указанного промежутка времени температурное поле в оболочке выходит на равномерное по всей толщине.

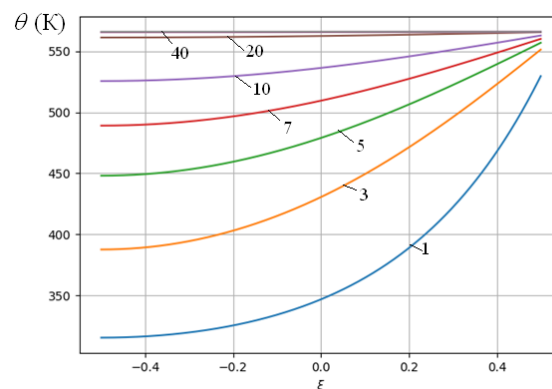


Рис.3 Распределение температуры  $\theta$  (К) по толщине оболочки для различных моментов времени  $t$  (цифры у кривых – время, с)

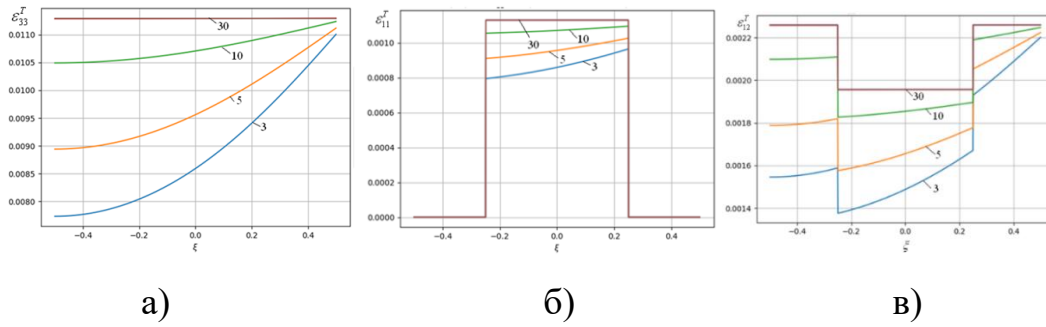


Рис.4 Распределение тепловых деформаций по толщине оболочки для различных моментов времени  $t$ : а –  $\varepsilon_{33}^T$ , б –  $\varepsilon_{11}^T$ , в –  $\varepsilon_{12}^T$  (цифры у кривых – время, с)

Наиболее существенный вклад в напряженно-деформированное состояние температурное поле вносит на начальных моментах времени, когда градиент температуры по толщине имеет максимальные значения.

На рисунке 4 приведены распределения тепловых деформаций  $\varepsilon_{ij}^T$  в слоях оболочки для различных моментов времени. Графики поперечной тепловой деформации  $\varepsilon_{33}^T$  подобны распределениям температуры, поскольку коэффициенты теплового расширения  $\alpha_{33}$  всех слоев в поперечном направлении практически совпадают и близки к к.т.р матрицы. Вследствие этого функции  $\varepsilon_{33}^T(\xi)$  для всех моментов времени являются гладкими. В то же время к.т.р. слоев  $\alpha_{ll}$  в тангенсиальной плоскости существенно различаются, т.к. они существенным образом зависят от угла армирования слоя. При увеличении времени нагрева происходит постепенное возрастание значений компонент тензора тепловой деформаций  $\varepsilon_{ll}^T(\xi)$ , при этом при увеличении времени графики этих функций остаются кусочно-постоянными.

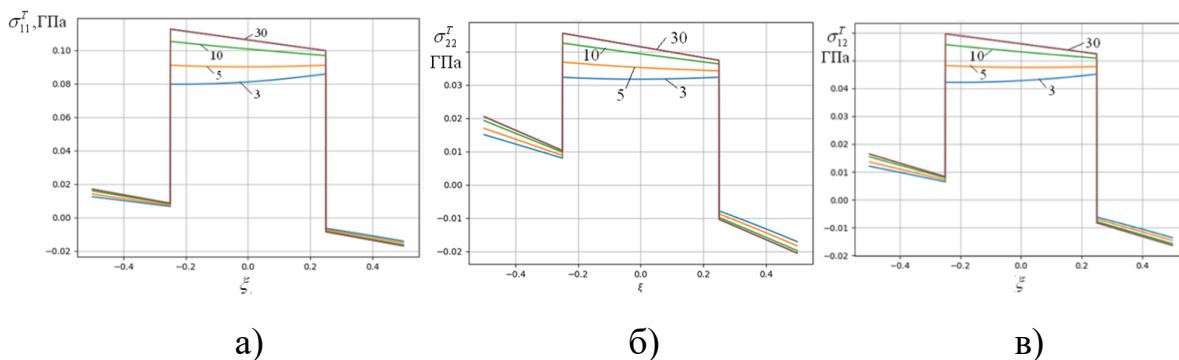


Рис.5 Распределение тепловых напряжений по толщине оболочки для различных моментов времени  $t$ , с (цифры у кривых): а -  $\sigma_{11}^T(\xi)$ , б -  $\sigma_{22}^T$ , в -  $\sigma_{12}^T$

Графики функций тепловых напряжений  $\sigma_{II}^T(\xi)$  (рис.5) также являются кусочно-гладкими, поскольку эти напряжения полностью определяются тепловыми деформациями  $\varepsilon_{ij}^T(\xi)$ , но поскольку в эти деформации вносит вклад также и поперечная компонента тепловой деформации  $\varepsilon_{33}^T(\xi)$ , то в слоях №№ 1 и 4 тепловые напряжения оказываются сопоставимы с тепловыми напряжениями в слоях №№ 2 и 3. Как видно из графиков, при увеличении времени нагрева происходит постепенное возрастание абсолютных значений напряжений  $\sigma_{II}^T(\xi)$ .

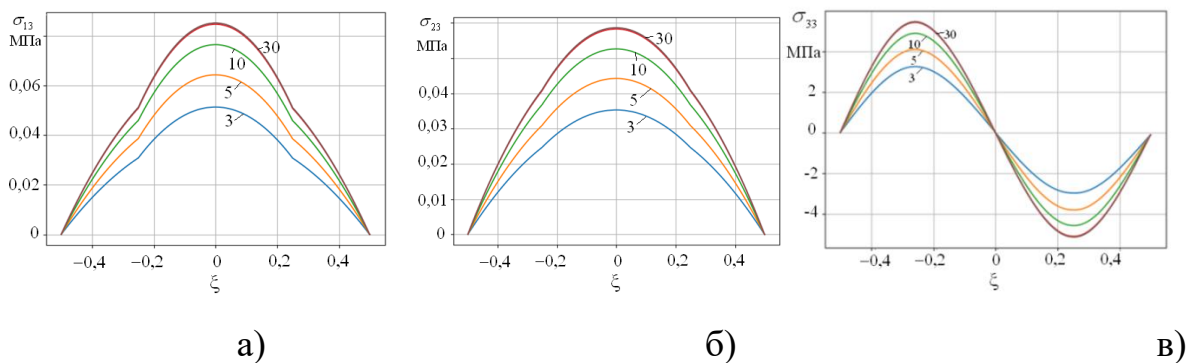


Рис.6 Распределение напряжений по толщине оболочки для различных моментов времени  $t$ , с (цифры у кривых): а -  $\sigma_{13}$ , б -  $\sigma_{23}$ , в -  $\sigma_{33}$

Напряжения в оболочке при наличии одностороннего нагрева показаны на рисунке 6. Влияние нагрева приводит к существенному возрастанию общего уровня напряжений по мере прогрева оболочки по толщине с увеличением времени  $t$ . Напряжения межслойного сдвига  $\sigma_{13}$  (а) и  $\sigma_{23}$  (б) при наложении одностороннего нагрева увеличивают значения примерно в 2 раза. Распределение напряжений межслойного сдвига по толщине сохраняет вид, подобный параболическому, с увеличением времени нагрева максимум этих напряжений возрастает.

Поперечные напряжения  $\sigma_{33}$  при наложении одностороннего нагрева возрастают, максимумы этих напряжений по абсолютной величине существенно превосходят значение напряжений, обусловленных только давлением сжатия  $\tilde{p}_+ = 0,1$  МПа. Расчет этих напряжений играет важную роль для оценки возможных расслоений композитных конструкций, так как при нагреве эти напряжения  $|\sigma_{33}|$  больше по абсолютной величине напряжений межслойного сдвига  $|\sigma_{\alpha 3}|$ , которые обычно считаются наиболее «опасными» для слоистых композитов при воздействии только

механических нагрузок. При увеличении времени нагрева происходит постепенное возрастание абсолютных значений поперечных напряжений  $|\sigma_{33}|$ .

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1) Предложена методика асимптотического анализа напряженно-деформированного и теплового состояния многослойных тонких анизотропных композитных оболочек общего вида в трехмерной постановке, без дополнительных предположений о характере распределения неизвестных функций по толщине оболочки. Показано, что методика приводит к двумерным осредненным системам уравнений типа анизотропных термоупругих оболочек типа Кирхгофа-Лява, а также позволяет математически строго обосновать формулы для вычисления распределения всех шести компонент тензора напряжений по толщине оболочки с учетом термонапряжений.

2) С помощью разработанной методики асимптотического анализа сформулирована рекуррентная последовательность локальных задач, для которых получены аналитические решения, эти решения позволили получить явные аналитические выражения для всех 6 компонент тензора напряжений в оболочке, без использования гипотез об их характере распределения по толщине.

3) Получена система уравнений двумерной теории цилиндрических оболочек и явные аналитические формулы для всех компонент тензора напряжений в цилиндрических оболочках, которые используют только решение осредненной задачи теории оболочек.

4) В качестве примера применения разработанной методики решены задачи об осесимметричном изгибе цилиндрической композитной многослойной оболочки при действии внешнего давления, а также при комбинированном воздействии давления и одностороннего нагрева. Показано, что разработанная методика позволяет проводить расчет трехмерного термо-напряженно-деформированного состояния композитных оболочек при различных структурах армирования и сложного термонагружения, используя при этом только двумерную осредненную теорию оболочек, в том числе позволяет вычислять напряжения межслойного сдвига и поперечные термонапряжения в оболочке.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОТРАЖЕНЫ В РАБОТАХ

1. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е. Моделирование напряжений в тонких композитных цилиндрических оболочках на основе асимптотической теории. *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 3, с. 114–132.
2. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е. Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 1. Общая теория оболочек. *Математическое моделирование и численные методы*, 2020, № 4, с. 84–110.
3. Yu I Dimitrienko, E A Gubareva, A E Pichugina Asymptotic theory for multilayer thin composite cylindrical shells *IOP Journal of Physics: Conference Series*, 2018. volume 1141 012097 doi:10.1088/1742-6596/1141/1/012097
4. Yu I Dimitrienko, E A Gubareva, A E Pichugina Theory of composite cylindrical shells under quasistatic vibrations, based on an asymptotic analysis of the general viscoelasticity theory equations *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 2019. volume 683 № 012013 doi:10.1088/1757-899X/683/1/012013 pp.1-6.
5. Yu I Dimitrienko, E A Gubareva and A E Pichugina Asymptotic stress analysis of multilayer composite thin cylindrical shells *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 2020. volume 934 (2020) 012017 doi:10.1088/1757-899X/934/1/012017 pp.1-6.
6. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Пичугина А.Е., Белькова К.В., Борин Д.М. Моделирование термонапряжений в композитных оболочках на основе асимптотической теории. Часть 2. Расчет цилиндрических оболочек. *Математическое моделирование и численные методы*, 2022, № 3, с. 3–30