

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



РУССКИХ СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА НА
УПРУГИХ ОПОРАХ ПО КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

*Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук*

Научный руководитель:

Заслуженный конструктор РФ,
к.т.н. Гнездилов В.А.

МОСКВА – 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ.....	3
2. КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ БАЛКИ С ДВИЖУЩИМСЯ ПО НЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ.....	13
2.1. Движение летательного аппарата по балке в случае близкого расположения опор.....	13
2.2. Движение летательного аппарата по балке в общем случае расположения опор.....	22
2.3. Исследование параметров схода летательного аппарата с упругой балки.....	42
3. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА НА ДВУХ КОЛЕСАХ ПО ПЛОСКОЙ КРИВОЙ.....	57
3.1. Движение тела на двух колесах по плоской кривой в кинематической постановке.....	57
3.2. Движение тела на двух колесах по плоской кривой с учетом упругости шин и подвески.....	71
4. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПО ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ.....	99
4.1. Формулировка задачи.....	99
4.2. Нелинейные уравнения движения.....	107
4.3. Геометрическое моделирование двухосной тележки.....	112
4.4. Учет кривизны направляющей поверхности.....	115
4.5. Учет относительного движения внутренних масс.....	119
4.6. Учет упругости и демпфирования роликов.....	121
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	124
6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	126

1. ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Задачи движения тел на упругих опорах по различным криволинейным направляющим являются актуальными в современной науке и технике.

Разнообразие технических систем, применяемых в настоящее время, привело к существенному различию математических и физических моделей, методов исследования, позволяющих осуществлять их эксплуатацию. Под телами, движущимися по криволинейным направляющим, можно понимать беспилотные летательные аппараты, автомобили, железнодорожный транспорт, ракетные системы, авиационная техника, планетоходы и так далее.

При исследовании процессов запуска беспилотных летательных аппаратов необходимо рассчитать их баллистические параметры при сходе с направляющей балки. Эти параметры важны для моделирования свободного полета в атмосфере и их корректировка путем изменения параметров направляющей является актуальной задачей. С развитием палубной авиации все чаще появляются задачи, связанные с уточненным моделированием взлета самолета с палубы авианосца трамплинным способом. Траекторию движения в данном случае можно рассматривать как криволинейную поверхность. В виде криволинейной поверхности можно рассматривать неровную дорогу, по которой движется автомобиль. В процессе движения необходимо рассчитывать вертикальные перегрузки, которые оказывают существенное влияние на пассажиров или перевозимый груз. При проектировании транспортного устройства для движения по некоторой планете необходимо учитывать неоднородную и негладкую структуру ее поверхности, что может привести к существенным перегрузкам при движении и нагрузкам на колеса и имеющуюся на борту аппаратуру.

Современные экстремальные аттракционы в виде катальных гор, предназначенные для развлечения посетителей парков, представляют собой набор криволинейных направляющих, по которым с большой скоростью двигаются

тележки с пассажирами. Развлекательный эффект достигается за счет создания острых психофизических ощущений у посетителя путем его неравномерного перемещения в пространстве. Расчет перегрузок, которые возникают в данном случае, является важной задачей биомеханического анализа наряду с расчетом кинематических и динамических параметров движения тележки по криволинейной направляющей. В качестве аттракционов и экстремальных развлечений можно рассматривать мотоциклы или велосипеды при их движении по различным криволинейным поверхностям при выполнении трюков.

Несмотря на значительные результаты, уже накопленные в области расчета кинематических, геометрических и динамических параметров движения тел по произвольным пространственным направляющим, проблема создания и развития математических и механических моделей, аналитических и численных методов их расчета продолжает оставаться весьма актуальной, в частности, вследствие появления новых типов конструкций, предусматривающих новые технические решения для обеспечения комфорта и безопасности.

В работах [1, 2, 3] рассматривается ряд задач о колебаниях нелинейных неконсервативных систем с силами, зависящими от перемещений. Например, это может быть жидкость, протекающая внутри консольной балки [1, 2] или балка с движущейся массой на конце [3]. При рассмотрении тела, движущегося по балке, как материальной точки, имеющей некоторую массу, в публикациях не учитывается характер взаимодействия тела и балки (нагрузка на балку записывается только в виде одной силы) и не учитывается конфигурация роликов, по которым тело скользит по балке. Не учет возможной конфигурации роликов приводит к существенным погрешностям при определении параметров схода аппарата с балки из-за возможного появления эффекта «сваливания» аппарата с балки, когда в некоторый момент времени на балке остается только одна опора и аппарат начинает относительно этой опоры дополнительное вращательное движение. Поведение стержней произвольной формы при различных

динамических нагрузках рассматриваются в [4, 5, 6, 7] без учета конструктивных особенностей их приложения к рассматриваемому упругому телу.

Исследования, посвященные взлету самолета с палубы авианосца, не так часто встречаются в литературе. В [8] даны математические модели палубных трамплинов и экспериментальные исследования по определению нагрузок в стойках шасси самолета при его запуске с палубы. В работе [9] показаны примеры математического моделирования шасси самолета, но данные модели являются линейными и приближенными, то есть без учета возможных нелинейных составляющих упругости и демпфирования.

Программный комплекс автоматизированного динамического анализа многокомпонентных систем EULER (ЭЙЛЕР) [10] предназначен для анализа работы механических систем, включающих в себя сложную кинематику, большие движения, жесткие и деформируемые элементы конструкции, гидравлические, пневматические и электрические системы, системы управления и другие компоненты. На основании инженерно-технического описания динамической модели автоматически формируется математическая модель движения исследуемой механической системы в соответствии с концепцией динамического взаимодействия множества твердых и упругих тел. Уравнения этой математической модели точно соответствуют законам классической механики с учетом больших перемещений частей механической системы и учетом нелинейных характеристик взаимодействий [11, 12, 13, 14, 15]. Сравнение результатов расчета после моделирования механических систем и аналитических методов расчета показывает высокую точность расчетов EULER. Однако, как и любой комплекс численного расчета, он требует аналитического подтверждения правильности заложенных алгоритмов на сложных примерах динамических многокомпонентных систем.

В работах [16, 17] исследуется поведение трубчатой конструкции при воздействии динамической нагрузки в контексте проектирования аттракционов

типа «катальная гора». В [16] даны общие положения определения действующих нагрузок на конструкцию катальных гор в линейной постановке задачи. Криволинейное движение поезда по трассе рассматривается в первом приближении как движение по конусу. В работе затрагивается вопрос о вычислении перегрузок, действующих на пассажира, в плоском случае при движении по окружности в линейной постановке задачи. Определение воздействий тележки на путь определяется только численными методами, как например в [17]. Для вычисления нагрузок и проектирования пути используется метод конечных элементов в форме перемещений. Биомеханические аспекты вычисления перегрузок, действующих на пассажира, при движении транспортного средства по «стандартным» траекториям (прямая линия, окружность, «мертвая петля») приведены в работе [18].

К сожалению, русскоязычной литературы по проектированию катальных гор не существует. Это не означает, что в Российской Федерации не проектируют и не изготавливают катальные горы. Данная информация является часто коммерческой тайной. Аналогичная ситуация в иностранных источниках. Попытка систематизировать знания о проектировании пути горы, о способах вычисления перегрузки, действующей на пассажира, и об определении нагрузок, действующих на путь со стороны движущихся тележек, приведена в [19]. В данном пособии исследуются наиболее простые математические и механические модели, без учета нелинейного взаимодействия тележки и пути.

Особенности движения автономных многоколесных и многоосных транспортных машин по неровной дороге, по криволинейной направляющей с широким диапазоном возможных кривизн рассматриваются при проектировании планетоходов [20, 21, 22]. Отличие от проектирования автомобилей заключается в возможности восприятия более существенных перегрузок, так как заранее не известна траектория движения аппарата. Недостатком расчета движения планетохода следует считать также отсутствие в модели упругости шин, так как это не предусмотрено конструкцией колеса.

Задачи о движении тел по рельсам, то есть когда тело всегда имеет точки контакта с неподвижной траекторией, рассматриваются в работах [23, 24, 25, 26, 27, 28]. Чаще всего данные исследования встречаются в книгах, посвященным динамике вагона. Вагон представляется как единая механическая система со многими степенями свободы. В вопросах взаимодействия пути и подвижного состава железнодорожный путь рассматривается как часть единой механической системы «путь-вагон». В конструкции вагона предусматривается несколько видов связей – связи между кузовом и рамами тележек и связи между рамами тележек и колесными парами. При этом связи могут быть жесткими или упруго-деформируемыми. Обычно считается, что деформации в подвеске малы, поэтому нелинейные параметры упругости не рассматриваются. Так же недостатком расчетной модели является невозможность резкого изменения кривизны траектории в пределах базы вагона из-за особенностей конструкции. Поэтому исследования в области динамики вагонов и вагонных систем полностью задачу не описывают.

Еще одним примером движения тела по произвольной криволинейной поверхности является движение автомобиля [29, 30, 31, 32, 33]. В данном случае, тело может иметь упругие шины и упругую подвеску. Характер изменения траектории может быть любой и кривизна может изменяться в широком диапазоне, даже в пределах базы транспортного средства. Однако, в литературе, связанной с проектированием автомобиля, не рассматриваются нелинейные колебания подвески, а колеса могут совершать отрывы от поверхности, что для движения, например, тележки по катальной горе не допустимо.

Целью диссертационной работы является: решение задач о движении тел по различным направляющим, получение разрешающих уравнений, оценка влияния параметров криволинейных направляющих и тела на характеристики движения, определение реакций опор и перегрузок.

Структура и объем диссертации. Результаты исследований изложены на 132 страницах машинописного текста, иллюстрированного 99 рисунками. Диссертация состоит из введения, 3-х глав с краткими выводами по каждой главе, заключения, списка публикаций и литературы.

В первой главе работы рассмотрены задачи о колебаниях упругой направляющей балки с движущимся по ней летательным аппаратом или реактивным снарядом. Глава состоит из трех частей. В первой части рассматривается случай близкого расположения опор, получены уравнения движения, рассмотрен пример расчета, в котором получены все необходимые кинематические параметры схода аппарата с балки. Во второй части главы рассмотрен более общий случай расположения опор, когда расстояние между ними может быть сравнимо с характеристическими размерами тела. Получены разрешающие уравнения для всех интервалов движения тела, сделана проверка численного алгоритма интегрирования системы дифференциальных уравнений, рассмотрен вопрос о нахождении кинематических параметров летательного аппарата при сходе с балки в различных вариациях постановки задачи. Рассмотрены примеры расчета, исследована сходимость полученных решений. В третьей части главы исследованы параметры схода аппарата с упругой балки при различных вариантах моделирования механической системы. Получены оценки влияния инерционных и жесткостных параметров балки и снаряда на его сход. Проведено исследование необходимости учета межосевого расстояния между опорами при различных скоростях схода. Сформулированы общие рекомендации для моделирования процессов покидания снарядом упругой направляющей балки.

Во второй главе работы рассмотрены задачи о плоском движении тела на двух колесах по кривой. Глава состоит из двух частей. В первой части рассматривается кинематическая постановка задачи, то есть тело не имеет упругой подвески и колеса тележки являются абсолютно твердыми телами. Получен алгоритм расчета основных кинематических, геометрических, инерционных и динамических параметров движения. Рассмотрены тестовые

задачи, подтверждающие правильность и корректность разработанного алгоритма. Рассмотрен пример расчета, в котором исследовано влияние учета радиуса колеса тележки на ее кинематические параметры. Во второй части главы рассматривается задача о движении тележки по произвольной плоской кривой с учетом упругости шин и подвески. Получена система нелинейных разрешающих дифференциальных уравнений второго порядка для вычисления обобщенных координат, характеризующих поджатие шин и ход подвески. Выполнена проверка численного алгоритма интегрирования системы уравнений. Рассмотрены примеры расчета для движения тел по различным траекториям. Изучен вопрос о влиянии различных жесткостных параметров тележки на величины вертикальных перегрузок, что является важным критерием для биомеханического анализа.

В третьей главе работы рассматривается движение тела по произвольной кривой (в общем случае поверхности), которое совершает поступательное и вращательное движения, сопровождаемое колебаниями, в том числе колебаниями внутренних масс. Глава состоит из шести частей. В первой части приведена формулировка задачи и основные допущения. Получены основные кинематические соотношения для задачи в векторном виде. Во второй части получены нелинейные дифференциальные уравнения движения. В третьей части показана связь подвижной системы координат, тележки и естественного трехгранника траектории. Получены выражения для основных кинематических параметров, вид неизвестных векторов для данного случая. В четвертой части приведено исследование учета изменения кривизны траектории в широком диапазоне. В пятой части показаны способы механического моделирования учета относительного движения внутренних масс. Приведены варианты механических моделей. В шестой части модель тела дополняется упругими роликами. Показано преобразование разрешающей системы уравнений.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Разработана методика расчета кинематических и динамических параметров движения абсолютно твердого летательного аппарата на двух опорах по упругой направляющей балке. Предложены способы изменения баллистических параметров аппарата при сходе его с направляющей. Подробно исследована конечная стадия движения аппарата по балке после схода передней опоры.
2. Составлен алгоритм расчета параметров движения плоского тела по произвольной кривой с учетом упругих колес и упругой подвески. Исследовано влияние жесткостных характеристик подвески на вертикальные перегрузки, что является важным аспектом для биомеханического анализа.
3. Предложен метод расчета движения тела по произвольной пространственной кривой. Показаны способы уточнения механической модели, в том числе учета упругости колес и подвески, а также относительного движения упругоприсоединенных внутренних масс.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработанный подход и результаты численного моделирования движения и схода летательного аппарата с упругой направляющей балки при различных геометрических и жесткостных характеристиках балки и аппарата.
2. Разработанные модели и алгоритмы для расчета движения тела на двух колесах с амортизацией по плоской кривой при различных постановках задачи. Результаты расчета параметров движения по различным криволинейным направляющим.
3. Методика решения общей задачи о движении тела с амортизацией и с учетом относительного движения упругоприсоединенных масс по произвольной пространственной кривой.

Достоверность полученных результатов подтверждается:

1. Строгим и корректным использованием известных методов механики деформируемого твердого тела и математическим обоснованием предлагаемых методов и подходов.
2. Соответствием полученных численных результатов с имеющимися в литературе для частных случаев.
3. Решением тестовых задач для проверки численных алгоритмов решения систем разрешающих уравнений.
4. Исследованием сходимости результатов расчета при решении систем дифференциальных уравнений для нескольких неизвестных.

Практическая ценность работы: методики и алгоритмы, разработанные в работе, могут быть использованы для расчета различных механических систем в проектной практике, в частности, при проектировании экстремальных катальных гор, систем запуска беспилотных летательных аппаратов и т.д.

Апробация работы: основные результаты диссертационной работы доложены на международных научных конференциях, семинарах и симпозиумах, в том числе:

1. XVIII международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, 13 – 17 февраля 2012 г., Ярополец, Московская Область, Российская Федерация.
2. Московская молодежная научно-практическая конференция «Инновации в авиации и космонавтике – 2012», 17 – 20 апреля 2012 г., Москва, Российская Федерация.

3. 12-ая Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2013», 12 – 15 ноября 2013 г., Москва, Российская Федерация (12th International Conference «Aviation and Cosmonautics – 2013», 12 – 15 November 2013).
4. XX международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, 17 – 21 февраля 2014 г., Кременки, Калужская Область, Российская Федерация.
5. Международная научно-техническая конференция имени Леонардо да Винчи, №2, 21 – 24 мая 2014 г., Мюльхаузен, Тюрингия, Германия (International scientific and technical Conference named after Leonardo da Vinci, №2, 21 – 24 May 2014; Internationalen wissenschaftlich-technischen Leonardo da Vinci Konferenz, №2, 21 – 24 Mai).
6. XIX международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация», 29 июня – 06 июля 2014 г., Анапа, Краснодарский Край, Российская Федерация (XIX International Conference «System analysis, management and navigation», 29 June – 06 July 2014).
7. Научный семинар кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института, сентябрь 2014 г., Москва, Российская Федерация.

Публикации: список научных трудов по диссертационной работе составляет 9 публикаций, в том числе 3 публикации в рецензируемых научных изданиях и журналах.

2. КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ БАЛКИ С ДВИЖУЩИМСЯ ПО НЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ

В данной главе рассматриваются задачи, связанные с процессом движения абсолютно жесткого летательного аппарата на двух скользящих опорах по упругой направляющей балке. В настоящее время подобные задачи являются актуальными и им были посвящены работы [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Процессы схода тел с направляющих балок возникают при моделировании запуска беспилотных летательных аппаратов. Задача рассматривается в двух вариантах: 1) опоры расположены достаточно близко друг к другу, то есть расстояние между опорами a много меньше характеристического линейного размера тела l ($a \ll l$); 2) опоры расположены на достаточном удалении друг от друга и размеры a и l сравнимы.

Результаты исследований по данной главе опубликованы в [34, 35, 36, 37, 38, 39].

2.1. Движение летательного аппарата по балке в случае близкого расположения опор

Рассмотрим поперечные нестационарные колебания консольной балки, расположенной под углом θ к горизонту, по которой под действием силы тяги движется на двух скользящих опорах реактивный абсолютно жесткий аппарат (рис. 1). В данном случае считается, что опоры расположены достаточно близко друг от друга и поэтому две реакции опор заменяются поперечной силой и изгибающим моментом (рис. 2). Будем учитывать начальный статический прогиб балки $\nu_0(x)$, который обусловлен начальным искривлением балки под действием собственного веса [40, 41]:

$$\nu_0(x) = -\frac{\bar{m}g}{24EI} (6x^2l^2 - 4x^3l + x^4),$$

где l – длина балки, \bar{m} – погонная масса балки, g – ускорение свободного падения, EI – изгибная жесткость балки.

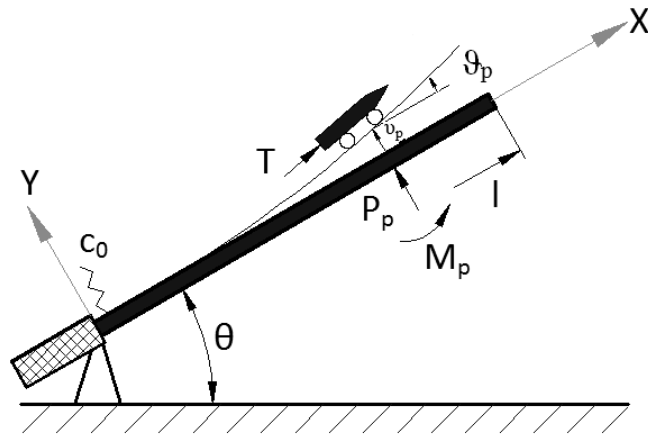


Рис. 1. Постановка задачи

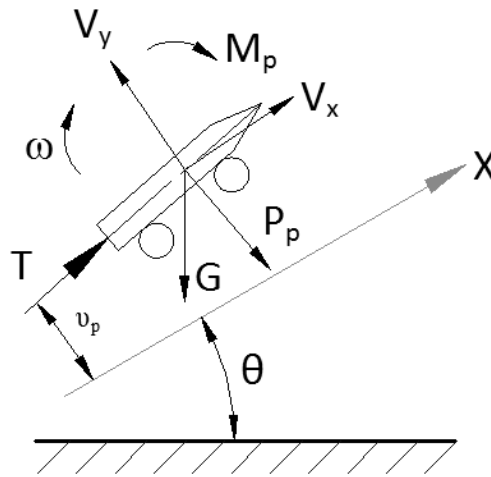


Рис. 2. Силы, действующие на балку и аппарат

Силы, действующие на балку со стороны опор, определяются из уравнений движения летательного аппарата с учетом перемещений балки:

$$\begin{cases} M\dot{V}_x = T(t) - G \sin(\theta); \\ M\dot{V}_y = T(t)\vartheta_p - G \cos(\theta) - P_p; \\ J\dot{\omega} = M_p, \end{cases} \quad (1)$$

где $T(t)$ – заданная сила тяги, $G = Mg$ – сила тяжести, M – масса аппарата, J – момент инерции аппарата, ϑ_p – угол поворота сечения балки по центр тяжести тела. Точкой обозначены производные по времени. При записи (1) были сделаны предположения о малости угла ϑ_p :

$$\mathcal{G}_p = \frac{\partial v_p}{\partial x} = v'_p \ll 1,$$

где штрихом обозначена производная по координате.

Выражение для нахождения скорости V_x находим из первого уравнения (1) (при $t = 0$ скорость $V_x = 0$):

$$V_x = \frac{1}{M} \int T(t) dt - tg \sin(\theta).$$

Координата центра тяжести аппарата по оси OX выражается из найденной выше скорости V_x с учетом соотношения $V_x = dx_p/dt$ следующим образом (при $t = 0$ координата $x_p = 0$):

$$x_p = \frac{1}{M} \iint T(t) dt dt - \frac{t^2}{2} g \sin(\theta).$$

Скорость V_y и прогиб балки под центром тяжести аппарата v_p связаны следующим уравнением:

$$V_y = \frac{d}{dt} v_p(x_p(t), t) = (\dot{v} + V_x v')_{x=x_p}.$$

С учетом начального искривления балки выражение для производной по времени для скорости V_y запишется в виде:

$$\dot{V}_y = (\ddot{v} + 2V_x \dot{v}' + \dot{V}_x (v'_0 + v') + V_x^2 (v''_0 + v''))_{x=x_p}.$$

Из второго уравнения системы (1) получаем выражения для P_p :

$$P_p = -Mg \cos(\theta) + T \mathcal{G}|_{x=x_p} - M(\ddot{v} + 2V_x \dot{v}' + \dot{V}_x (v'_0 + v') + V_x^2 (v''_0 + v''))_{x=x_p}.$$

Угловая скорость ω и угол \mathcal{G}_p связаны следующим соотношением:

$$\omega = -\frac{d}{dt} \mathcal{G}_p(x_p(t), t) = -(\dot{\mathcal{G}} + V_x \mathcal{G}')_{x=x_p},$$

поэтому производная по времени от угловой скорости с учетом начального прогиба балки вычисляется следующим образом:

$$\dot{\omega} = -(\ddot{\mathcal{G}} + 2V_x \dot{\mathcal{G}}' + \dot{V}_x (\mathcal{G}'_0 + \mathcal{G}') + V_x^2 (\mathcal{G}''_0 + \mathcal{G}''))_{x=x_p}.$$

Из третьего уравнения системы (1) получаем выражения для M_p (с учетом выражения $\mathcal{G} = v'$):

$$M_p = -J(\ddot{\mathcal{G}} + 2V_x \dot{\mathcal{G}}' + \dot{V}_x (\mathcal{G}'_0 + \mathcal{G}') + V_x^2 (\mathcal{G}''_0 + \mathcal{G}''))_{x=x_p}.$$

Перемещения балки, вызванные её колебаниями, представляются по методу Ритца в виде разложения по заданным функциям. В качестве этих функций используются линейная функция, представляющая поворот балки за счет упругости опорного устройства, и формы собственных колебаний консольно-закрепленной балки постоянного поперечного сечения:

$$v(x,t) = \sum_{m=0}^s q_m(t) \varphi_m(x),$$

где $\varphi_0(x) = x$ при $m=0$, $\varphi_m(x) = X_m(x)$ при $m=1,2,3\dots s$. Формы собственных колебаний консольно-закрепленной балки, с учетом удовлетворения граничных условий $X_m(0) = X'_m(0) = 0$ и $X''_m(l) = X'''_m(l) = 0$, записываются в виде [42, 43, 44, 45]:

$$X_m(x) = \operatorname{ch} \frac{k_m x}{l} - \cos \frac{k_m x}{l} - \sigma_m \left(\operatorname{sh} \frac{k_m x}{l} - \sin \frac{k_m x}{l} \right),$$

причем коэффициент k_m связан с собственной круговой частотой колебаний балки ω_m следующим соотношением:

$$k_m^2 = \omega_m \sqrt{\frac{\rho F}{EI}},$$

где ρ – плотность материала балки, F – площадь поперечного сечения.

Уравнения колебаний по методу Ритца записываются в виде [42, 43, 44, 45]:

$$\sum_{n=0}^s (m_{mn} \ddot{q}_n + k_{mn} q_n) = Q_m, \quad m = 0,1,2\dots s, \quad (2)$$

где

$$m_{mn} = \int_0^l \bar{m} X_m X_n dx = \begin{cases} m_m = \bar{m} l & \text{при } m = n; \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases};$$

$$k_{mn} = \int_0^l EI X_m'' X_n'' dx = \begin{cases} k_m = \omega_m^2 m_m & \text{при } m = n \\ 0 & \text{при } m \neq n \end{cases}.$$

Обобщенная сила Q_m в уравнении (2) записывается в виде:

$$Q_m = (P_p X_m + M_p X_m')_{x=x_p} = P_m - \sum_{n=0}^s (A_{nm} \ddot{q}_n + B_{nm} \dot{q}_n + C_{nm} q_n),$$

где

$$P_m = X_m P(t) + X_m' M(t); \quad A_{nm} = X_m \mu_n + X_m' \lambda_n;$$

$$B_{nm} = X_m \delta_n + X_m' \nu_n; \quad C_{nm} = X_m \psi_n + X_m' \beta_n.$$

В последних выражениях введены следующие обозначения:

$$P(t) = -Mg \cos(\theta) - M \dot{V}_x v_0'' - M V_x^2 v_0'''; \quad M(t) = -J \dot{V}_x v_0'' - J V_x^2 v_0''';$$

$$\mu_n = M X_n; \quad \delta_n = 2V_x M X_n'; \quad \psi_n = -T(t) X_n' + M \dot{V}_x X_n' + M V_x^2 X_n'';$$

$$\lambda_n = J X_n'; \quad \nu_n = 2V_x J X_n''; \quad \beta_n = J \dot{V}_x X_n'' + J V_x^2 X_n'''.$$

Таким образом, уравнения нестационарных колебаний балки с движущимся по ней аппаратом в обобщенных координатах, в качестве которых рассматриваются коэффициенты разложения записываются в виде:

$$\begin{cases} J_0 \ddot{q}_0 + \sum_{n=1}^s m_{0n} \dot{q}_n + c_0 q_0 = Q_0, & m = 0; \\ m_{m0} \ddot{q}_0 + m_m \ddot{q}_m + \omega_m^2 m_m q_m = Q_m, & m = 1, 2, 3, \dots, s, \end{cases} \quad (3)$$

где $J_0 = m_{00}$ – момент инерции балки без летательного аппарата, $c_0 = k_{00}$ – жесткость опорной пружины, $m_{0n} = \bar{m} X_n''(0)/k_n^4$, $m_{m0} = \bar{m} X_m''(0)/k_m^4$.

Система уравнений (3) преобразуется к матричному уравнению:

$$(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \mathbf{q} = \mathbf{Q}; \quad \mathbf{q} = [q_0, q_1, \dots, q_s]^T,$$

где:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} x\mu_0 + \lambda_0 & x\mu_1 + \lambda_1 & \dots & x\mu_s + \lambda_s \\ X_1\mu_0 + X_1'\lambda_0 & X_1\mu_1 + X_1'\lambda_1 & \dots & X_1\mu_s + X_1'\lambda_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_s\mu_0 + X_s'\lambda_0 & X_s\mu_1 + X_s'\lambda_1 & \dots & X_s\mu_s + X_s'\lambda_s \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} x\delta_0 + \nu_0 & x\delta_1 + \nu_1 & \cdots & x\delta_s + \nu_s \\ X_1\delta_0 + X_1'\nu_0 & X_1\delta_1 + X_1'\nu_1 & \cdots & X_1\delta_s + X_1'\nu_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_s\delta_0 + X_s'\nu_0 & X_s\delta_1 + X_s'\nu_1 & \cdots & X_s\delta_s + X_s'\nu_s \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} x\psi_0 + \beta_0 & x\psi_1 + \beta_1 & \cdots & x\psi_s + \beta_s \\ X_1\psi_0 + X_1'\beta_0 & X_1\psi_1 + X_1'\beta_1 & \cdots & X_1\psi_s + X_1'\beta_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_s\psi_0 + X_s'\beta_0 & X_s\psi_1 + X_s'\beta_1 & \cdots & X_s\psi_s + X_s'\beta_s \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} J_0 & m_{01} & \cdots & m_{0s} \\ m_{10} & m_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{s0} & 0 & \cdots & m_s \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_1^2 m_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_s^2 m_s \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} xP(t) + M(t) \\ X_1P(t) + X_1'M(t) \\ \vdots \\ X_sP(t) + X_s'M(t) \end{pmatrix}.$$

Данная система уравнений решается численно с помощью математического пакета РТС MathCad 15 в пределах интервала времени $0 \leq t \leq t_k$ при нулевых начальных условиях $q_m(0) = 0, \dot{q}_m(0) = 0$, где $t = t_k$ – время окончания движения аппарата по балке. При $t > t_k$ получаем уравнение вида:

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_2 \mathbf{q} = \mathbf{0},$$

которое описывает свободные колебания балки после схода летательного аппарата. Это уравнение также решается численно при начальных условиях, которые берутся из предыдущего решения при $t = t_k$.

Формулы для вычисления вертикальной $V_y(t_k)$ и угловой $\omega(t_k)$ скорости аппарата в момент схода с балки при $t = t_k$ имеют следующий вид:

$$V_y(t_k) = \left. \frac{dv_p}{dt} \right|_{t=t_k} = [\dot{v} + V_x(v'_0 + v')] \Big|_{t=t_k};$$

$$\omega(t_k) = -\frac{d\mathcal{G}_p}{dt}\Big|_{t=t_k} = -[\dot{\mathcal{G}} + V_x(\mathcal{G}'_0 + \mathcal{G}')] \Big|_{t=t_k} = -[\dot{\nu}' + V_x(\nu''_0 + \nu'')] \Big|_{t=t_k}.$$

Рассмотрим пример расчета. Исходные данные: $s = 4$, $M = 100$ кг, $l = 5$ м, $l_p = 1$ м – длина аппарата, $J = 8.3$ кг·м², $EI = 4.1 \cdot 10^6$ Н·м², $\bar{m} = 5.3$ кг/м, $J_0 = 267$ кг·м², $c_0 = 2.6 \cdot 10^5$ Н·м. Сила тяги аппарата считается постоянной и выбирается из условия конечной скорости $V_x(t = t_k) = 100$ м/с при $x_p(t = t_k) = 5$ м, откуда $t_k = 0.1$ с и $T = 10^5$ Н.

Было проведено исследование и сравнение результатов расчета прогиба балки при $x = l$, угла поворота балки при $x = l$, формы балки при $t = t_k$ и $t = 5t_k$. Сравнение показало, что при варьировании числа аппроксимирующих функций $s = 1, 2, 3 \dots 7$ результаты отличаются друг от друга не более чем на 1 %, поэтому для ускорения процесса расчета достаточно брать не более 4-х аппроксимирующих функций.

На рис. 3 и рис. 4 показаны графики изменения прогиба балки при $x = l$ для двух временных промежутков: $0 \leq t \leq 5t_k$ и $0 \leq t \leq t_k$.

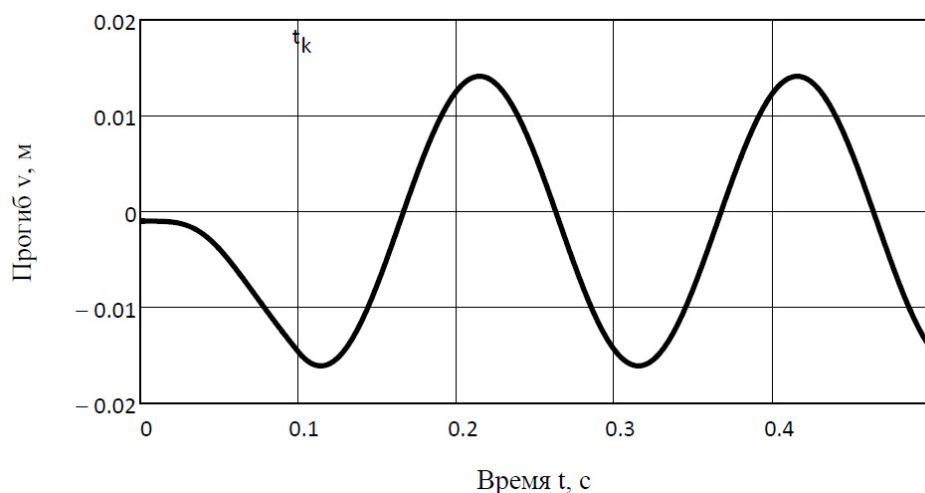
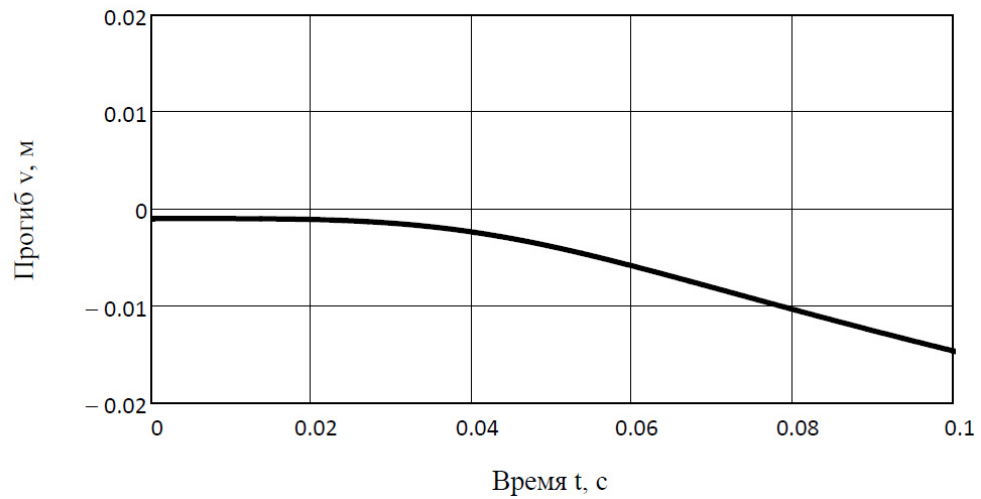
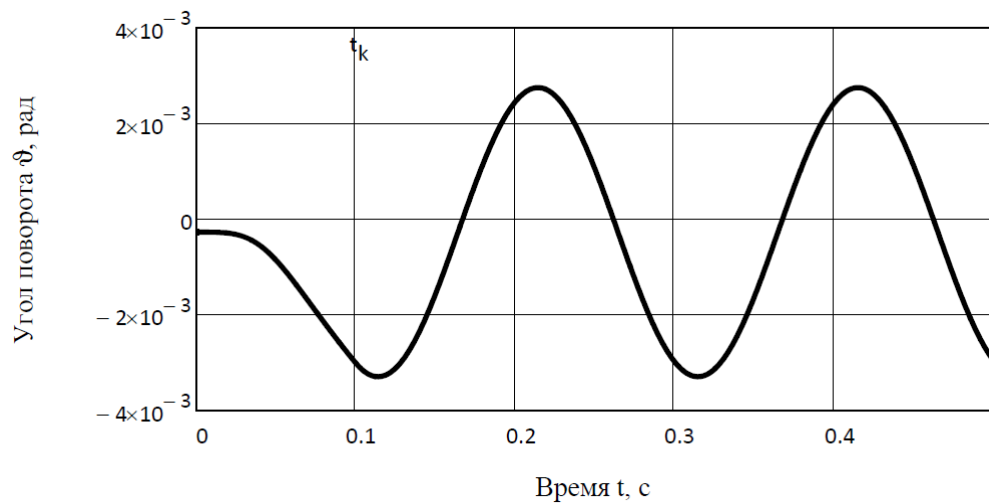
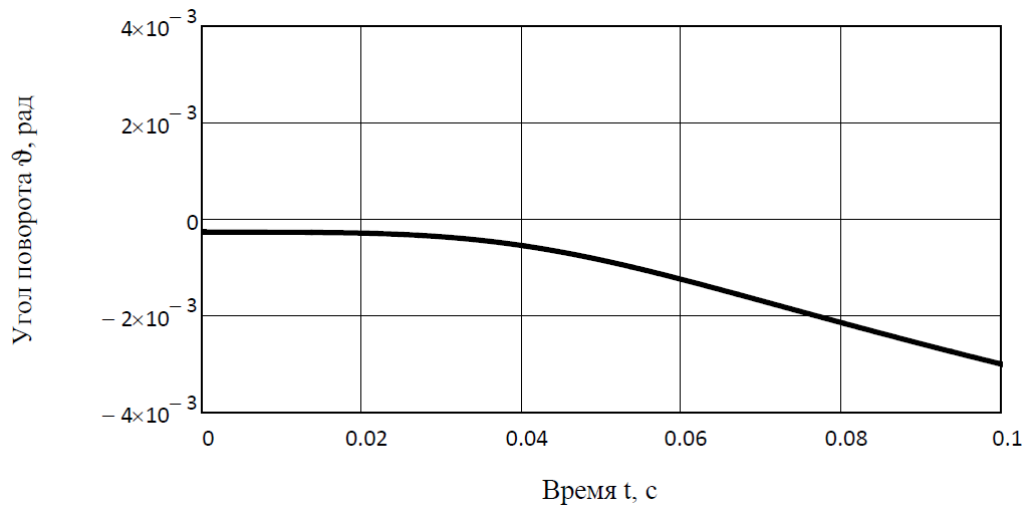


Рис. 3. Прогиб балки при $x = l$

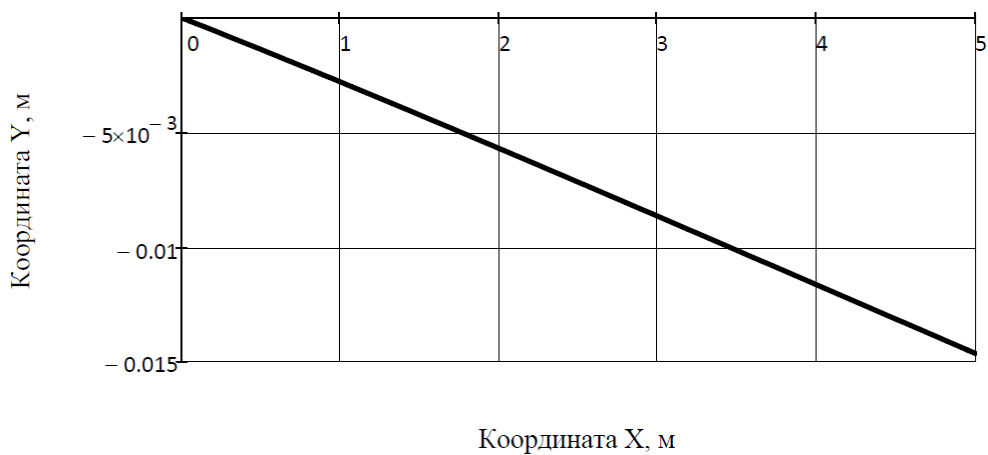
Рис. 4. Прогиб балки при $x = l$

На рис. 5 и рис. 6 показаны графики изменения угла поворота балки при $x = l$ для двух временных промежутков: $0 \leq t \leq 5t_k$ и $0 \leq t \leq t_k$.

Рис. 5. Угол поворота балки при $x = l$

Рис. 6. Угол поворота балки при $x = l$

На рис. 7 приведена форма балки при $t = t_k$.

Рис. 7. Форма балки при $t = t_k$

Исследовано влияние различных параметров балки и аппарата на перемещения балки и поперечную скорость аппарата и его угловую скорость вращения, в частности жесткости опорной пружины. При увеличении жесткости c_0 существенно изменятся форма балки. Сравнение результатов расчета формы балки при $c_0 = 2.6 \cdot 10^5$ Н·м и $c_0 = 1.0 \cdot 10^{10}$ Н·м для $t = t_k$ приведены на рис. 8. На рис. 9 показана форма балки в момент времени $t = t_k$ для $c_0 = 1.0 \cdot 10^{10}$ Н·м.

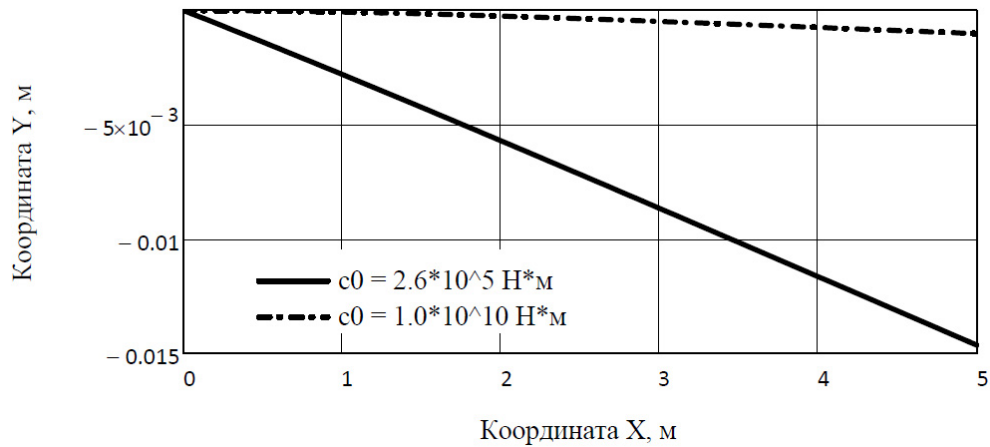


Рис. 8. Сравнение форм балки при $t = t_k$ для различных c_0

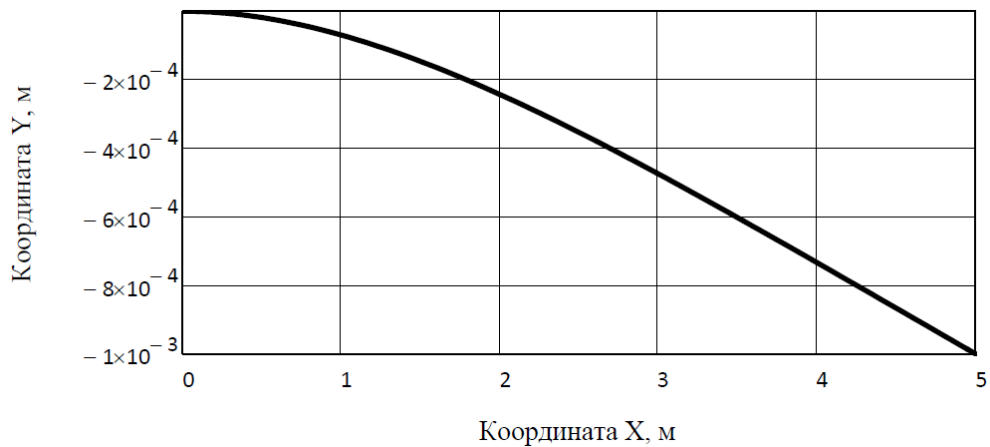


Рис. 9. Форма балки при $t = t_k$ при увеличенной жесткости c_0

Результаты расчета поперечной скорости аппарата и угловой скорости вращения при сходе с балки ($c_0 = 2.6 \cdot 10^5$ Н·м): $V_y = -0.503$ м/с, $\omega = 0.041$ рад/с. При $c_0 = 1.0 \cdot 10^{10}$ Н·м поперечная и угловая скорость равны: $V_y = -0.028$ м/с, $\omega = 4.230 \cdot 10^{-4}$ рад/с. Таким образом, с помощью варьирования различных параметров балки и аппарата можно изменять конечные параметры движения при сходе аппарата с балки.

2.2. Движение летательного аппарата по балке в общем случае расположения опор

Рассмотрим поперечные нестационарные колебания консольной балки, расположенной под углом θ к горизонту, по которой под действием силы тяги T движется на двух скользящих опорах реактивный абсолютно жесткий

летательный аппарат (рис. 10). Считаем, что расстояние между опорами сравнимо с характерными размерами аппарата, поэтому действие опор на балку представляется в виде двух реакций R_1 и R_2 .

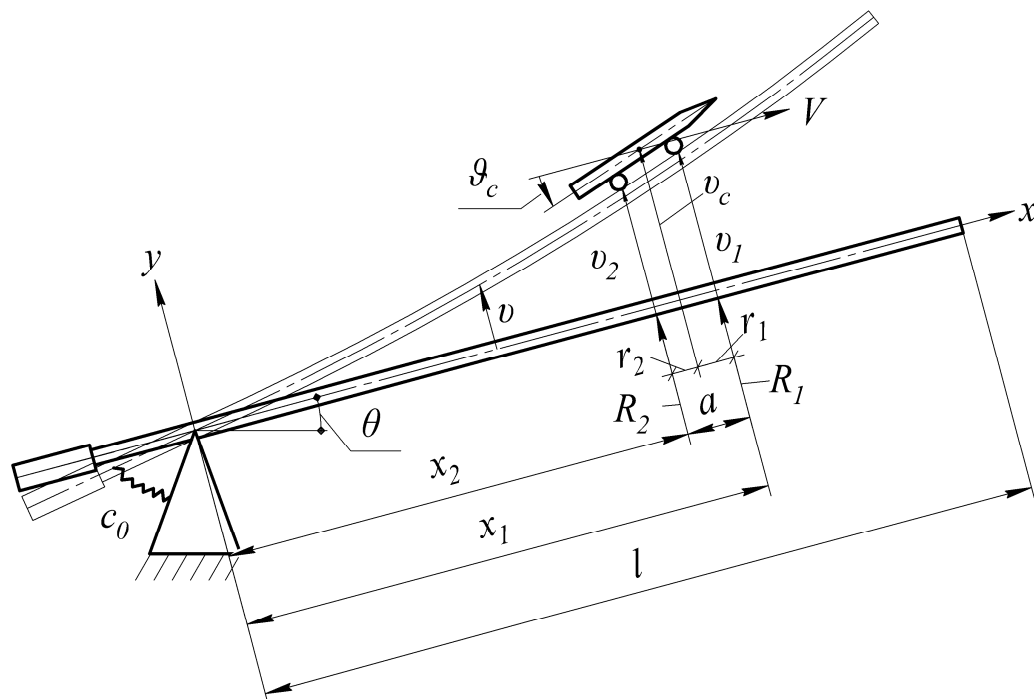


Рис. 10. Постановка задачи

Уравнения движения аппарата в проекциях на оси OX и OY ($|\vartheta_c| \ll 1$, $\cos(\vartheta_c) \approx 1$, $\sin(\vartheta_c) \approx \vartheta_c$) записываются в виде (рис. 11):

$$\begin{cases} M\dot{V} = T - Mg \sin(\theta); \\ M \frac{d^2 v_c}{dt^2} = T \vartheta_c - Mg \cos(\theta) - R_1 - R_2; \\ J \frac{d^2 \vartheta_c}{dt^2} = -R_1 r_1 + R_2 r_2, \end{cases} \quad (4)$$

где v_c , ϑ_c – поперечное перемещение в центре тяжести аппарата и его угол поворота относительно центра тяжести; M – масса аппарата; J – момент инерции аппарата, относительно его центра тяжести; r_1 и r_2 – расстояния между центром тяжести и опорами аппарата, при этом $r_1 + r_2 = a$.

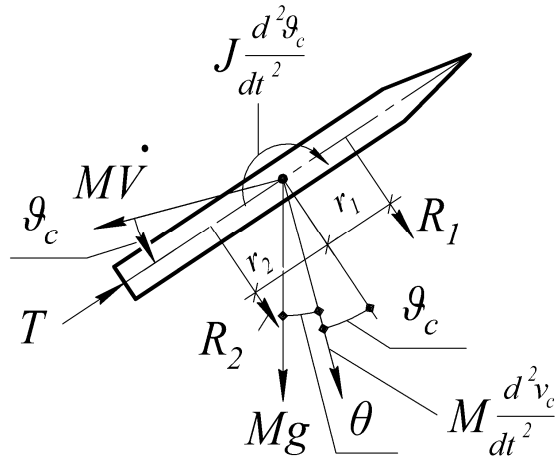


Рис. 11. Силовые факторы, действующие на аппарат

Начальные условия ($t = 0$): $x_1 = 0$, $V = 0$, $v_c = 0$, $g_c = 0$. Интегрируя первое уравнение (4), с учетом выражения $V = dx_1/dt$, получим:

$$V = \int_0^t \left(\frac{T}{M} - g \sin(\theta) \right) dt; \quad x_1 = \int_0^t V dt; \quad x_2 = x_1 - a.$$

Из второго и третьего уравнений (4) находим выражения для реакций R_1 и R_2 :

$$R_1 = -\frac{r_2}{a} \left(Mg \cos(\theta) - T g_c + M \frac{d^2 v_c}{dt^2} \right) - \frac{J}{a} \frac{d^2 g_c}{dt^2};$$

$$R_2 = -\frac{r_1}{a} \left(Mg \cos(\theta) - T g_c + M \frac{d^2 v_c}{dt^2} \right) + \frac{J}{a} \frac{d^2 g_c}{dt^2},$$

или

$$R_i = -\frac{a - r_i}{a} \left(Mg \cos(\theta) - T g_c + M \frac{d^2 v_c}{dt^2} \right) + (-1)^i \frac{J}{a} \frac{d^2 g_c}{dt^2}, \quad i = 1, 2.$$

Выражения для вычисления поперечного перемещения в центре тяжести аппарата и его угла поворота имеют вид:

$$g_c = \frac{1}{a} (v_1 - v_2) = -\frac{1}{a} \sum_{j=1}^2 (-1)^j v_j;$$

$$v_c = \frac{1}{a} (v_1 r_2 + v_2 r_1) = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^2 v_j (a - r_j).$$

Условие безотрывного скольжения опор летательного аппарата по колеблющейся балке имеет вид:

$$v_j = v(x_j(t), t), \quad j = 1, 2.$$

Прогиб балки $v(x, t)$ по методу Ритца записывается в виде:

$$v(x, t) = v_0(t) + \sum_{m=0}^s q_m(t) X_m(x),$$

где $v_0(t)$ – заданное начальное искривление балки с учетом её статического прогиба от действия сил тяжести при $t = 0$ и начального предварительного искривления; $X_0 = x$ представляет собой поворот балки относительно упругого шарнира как твердого тела; $X_m(x)$ ($m = 1, 2, \dots, s$) – собственные формы колебаний однородной консольной балки [42, 43, 44, 45]; $q_m(t)$ – обобщенные координаты, удовлетворяющие начальным условиям $q_m(0) = 0$, $\dot{q}_m(0) = 0$. Штрихом и точкой обозначаются производные по координате x и по времени t соответственно.

Используя полученные выше зависимости запишем выражения для определения первой и второй производной по времени от прогиба:

$$\frac{dv_j}{dt} = \left[Vv_0' + \sum_{n=0}^s (\dot{q}_n X_n + Vq_n X_n') \right]_{x=x_j} ;$$

$$\frac{d^2v_j}{dt^2} = \left[\dot{V}v_0' + V^2v_0'' + \sum_{n=0}^s (\ddot{q}_n X_n + 2V\dot{q}_n X_n' + q_n (\dot{V}X_n' + V^2 X_n'')) \right]_{x=x_j} .$$

Уравнения колебаний балки под действием реакций скользящих опор аппарата на основании принципа возможных перемещений записывается в виде [42, 43, 44, 45]:

$$\sum_{n=0}^s [m_{mn} \ddot{q}_n + k_{mn} q_n] = Q_m(t), \quad m = 0, 1, \dots, s, \quad (5)$$

где

$$m_{00} = J_0; \quad k_{00} = c_0; \quad m_{0n} = \int_0^l \bar{m}(x)xX_n(x)dx; \quad m_{mn} = \int_0^l \bar{m}(x)X_m(x)X_n(x)dx;$$

$$k_{0n} = 0; \quad k_{mn} = \int_0^l EI(x)X_m''(x)X_n''(x)dx; \quad Q_m(t) = \sum_{i=1}^2 X_m(x_i)R_i.$$

Здесь c_0 – жесткость опорной пружины; J_0 – момент инерции балки без летательного аппарата относительно шарнира с учетом её задней части; $\bar{m}(x)$ и $EI(x)$ – погонная масса и изгибная жесткость балки (её задняя часть при $x < 0$ считается абсолютно жесткой).

Выражение для обобщенной силы записывается в виде:

$$Q_m(t) = Q_m^0 - \sum_{n=0}^s [g_{mn}\ddot{q}_n + d_{mn}\dot{q}_n + b_{mn}q_n]$$

где

$$Q_m^0(t) = -\sum_{i=1}^s X_m(x_i) \left[\frac{a-r_i}{a} \left(Mg \cos(\theta) + \frac{T}{a} \sum_{j=1}^2 (-1)^j v_0(x_j) \right) + \sum_{j=1}^2 p_{ij} (\dot{V}v_0'(x_j) + V^2 v_0''(x_j)) \right];$$

$$p_{ij} = \frac{M}{a^2} (a-r_i)(a-r_j) + \frac{J}{a^2} (-1)^i (-1)^j;$$

$$g_{mn}(t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{ij} X_m(x_i) X_n(x_j); \quad d_{mn}(t) = 2V \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{ij} X_m(x_i) X_n'(x_j);$$

$$b_{mn}(t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 X_m(x_i) \left[p_{ij} (\dot{V}X_n'(x_j) + V^2 X_n''(x_j)) + \frac{T}{a^2} ((a-r_i)(-1)^j X_n(x_j)) \right].$$

Уравнения колебаний упругой балки с движущимся по ней летательным аппаратом при $a \leq x_1(t) \leq l$:

$$\sum_{n=0}^s [(m_{mn} + g_{mn})\ddot{q}_n + d_{mn}\dot{q}_n + (k_{mn} + b_{mn})q_n] = Q_m^0(t), \quad m = 0, 1, \dots, s. \quad (6)$$

Эти уравнения также можно получить без введения реакций связи как уравнения Лагранжа в обобщенных координатах.

В процессе решения задачи о колебаниях балки рассматриваются 4 интервала времени:

1) $0 \leq t \leq t_1$ – на балке только опора №1. В этом случае, при $0 \leq x_1(t) \leq a$ и $x_2(t) \leq 0$, в выражениях для вычисления коэффициентов $Q_m^0(t)$, $g_{mn}(t)$, $d_{mn}(t)$, $b_{mn}(t)$ следует положить $X_n(x_2) = 0$ при $n = 1, 2, \dots, s$:

$$Q_m^0(t) = -\sum_{i=1}^s X_0(x_i) \frac{a - r_i}{a} Mg \cos(\theta) \text{ при } m = 0;$$

$$Q_m^0(t) = -X_m(x_1) \left[\frac{a - r_1}{a} \left(Mg \cos(\theta) - \frac{T}{a} \nu_0(x_1) \right) + p_{11} (\dot{V} \nu_0'(x_1) + V^2 \nu_0''(x_1)) \right] \text{ при } m = 1 \dots s;$$

$$g_{mn}(t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{ij} X_0(x_i) X_0(x_j) \text{ при } m = 0 \text{ и } n = 0;$$

$$g_{mn}(t) = p_{11} X_0(x_1) X_n(x_1) + p_{21} X_0(x_2) X_n(x_1) \text{ при } m = 0 \text{ и } n = 1 \dots s;$$

$$g_{mn}(t) = p_{11} X_m(x_1) X_0(x_1) + p_{12} X_m(x_1) X_0(x_2) \text{ при } m = 1 \dots s \text{ и } n = 0;$$

$$g_{mn}(t) = p_{11} X_m(x_1) X_n(x_1) \text{ при } m = 1 \dots s \text{ и } n = 1 \dots s;$$

$$d_{mn}(t) = 2V \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_{ij} X_0(x_i) X_0'(x_j) \text{ при } m = 0 \text{ и } n = 0;$$

$$d_{mn}(t) = 2V p_{11} X_0(x_1) X_n'(x_1) + 2V p_{21} X_0(x_2) X_n'(x_1) \text{ при } m = 0 \text{ и } n = 1 \dots s;$$

$$d_{mn}(t) = 2V p_{11} X_m(x_1) X_0'(x_1) + 2V p_{12} X_m(x_1) X_0'(x_2) \text{ при } m = 1 \dots s \text{ и } n = 0;$$

$$d_{mn}(t) = 2V p_{11} X_m(x_1) X_n'(x_1) \text{ при } m = 1 \dots s \text{ и } n = 1 \dots s;$$

$$b_{mn}(t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 X_0(x_i) \left[p_{ij} (\dot{V} X_0'(x_j) + V^2 X_0''(x_j)) + \frac{T}{a^2} ((a - r_i)(-1)^j X_0(x_j)) \right] \text{ при } m = 0 \text{ и } n = 0;$$

$$b_{mn}(t) = X_0(x_1) \left[p_{11} (\dot{V} X_n'(x_1) + V^2 X_n''(x_1)) - \frac{T}{a^2} (a - r_1) X_n(x_1) \right] +$$

$$+ X_0(x_2) \left[p_{21} (\dot{V} X_n'(x_1) + V^2 X_n''(x_1)) - \frac{T}{a^2} (a - r_2) X_n(x_1) \right] \text{ при } m = 0 \text{ и } n = 1 \dots s;$$

$$b_{mn}(t) = X_m(x_1) \left[p_{11} (\dot{V} X_0'(x_1) + V^2 X_0''(x_1)) - \frac{T}{a^2} (a - r_1) X_0(x_1) \right] +$$

$$+ X_m(x_1) \left[p_{12} (\dot{V} X_0'(x_2) + V^2 X_0''(x_2)) + \frac{T}{a^2} (a - r_1) X_0(x_2) \right] \text{ при } m = 1 \dots s \text{ и } n = 0;$$

$$b_{mn}(t) = X_m(x_1) \left[p_{11} \left(\dot{V} X'_n(x_1) + V^2 X''_n(x_1) \right) - \frac{T}{a^2} \left((a - r_1) X_n(x_1) \right) \right] \text{ при } m = 1 \dots s \text{ и } n = 1 \dots s;$$

2) $t_1 \leq t \leq t_2$ – на балке опора №1 и №2. В этом случае, при $a \leq x_1(t) \leq l$ и $0 \leq x_2(t) \leq l - a$, выражения для вычисления коэффициентов $Q_m^0(t)$, $g_{mn}(t)$, $d_{mn}(t)$, $b_{mn}(t)$ в дополнительном преобразовании не нуждаются;

3) $t_2 \leq t \leq t_3$ – на балке только опора №2. В этом случае, при $l \leq x_1(t) \leq l + a$ и $l - a \leq x_2(t) \leq l$, то есть в случае, когда первая опора сошла с балки и её реакция будет равна нулю ($R_1 = 0$), в выражениях для вычисления коэффициентов $Q_m^0(t)$, $g_{mn}(t)$, $d_{mn}(t)$, $b_{mn}(t)$ будет необходимо учитывать только члены при $i = 2, j = 2$, а остальные (при $i, j = 1, 1$; $i, j = 1, 2$; $i, j = 2, 1$) будут равны нулю:

$$\begin{aligned} Q_m^0(t) &= -X_m(x_2) \left[\frac{a - r_2}{a} \left(Mg \cos(\theta) + \frac{T}{a} v_0(x_2) \right) + \right. \\ &\quad \left. + p_{22} \left(\dot{V} v'_0(x_2) + V^2 v''_0(x_2) \right) \right] \text{ при } m = 0 \dots s; \\ d_{mn}(t) &= 2V p_{22} X_m(x_2) X'_n(x_2) \text{ при } m = 0 \dots s \text{ и } n = 0 \dots s; \\ g_{mn}(t) &= p_{22} X_m(x_2) X_n(x_2) \text{ при } m = 0 \dots s \text{ и } n = 0 \dots s; \\ b_{mn}(t) &= X_m(x_2) \left[p_{22} \left(\dot{V} X'_n(x_2) + V^2 X''_n(x_2) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{T}{a^2} \left((a - r_2) X_n(x_2) \right) \right] \text{ при } m = 0 \dots s \text{ и } n = 0 \dots s. \end{aligned}$$

В этом случае появляется дополнительная степень свободы за счет поворота летательного аппарата относительно второй опоры и поэтому к системе уравнений (6) необходимо добавить уравнение. Оно может быть получено из выражения для R_1 при $R_1 = 0$:

$$\ddot{\mathcal{G}}_c \left(\frac{J}{r_2} + Mr_2 \right) - T \mathcal{G}_c + M \sum_{m=0}^s q_m(t) X_m(x) = -Mg \cos(\theta).$$

В данном случае наряду с $q_1(t) \dots q_s(t)$ в качестве неизвестной функции рассматривается $\mathcal{G}_c(t)$;

4) $t_3 \leq t \leq t_4$ – свободные колебания балки. В уравнениях (6) следует положить $g_{mn}(t) = d_{mn}(t) = b_{mn}(t) = 0$.

Полученная система дифференциальных уравнений решалась численно с помощью алгоритма Адамса с адаптивным шагом в программном комплексе РТС MathCad 15.

Для проверки численного алгоритма интегрирования системы дифференциальных уравнений стандартной программой была рассмотрена менее трудоемкая для решения задача – горизонтальная консольная балка с движущейся с постоянной скоростью сосредоточенной массой (рис. 12) [3].

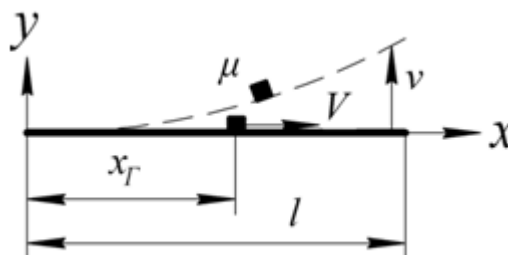


Рис. 12. Постановка задачи

Рассмотрим горизонтально расположенную консольную балку, по которой со скоростью $V_x = V = 50 \text{ м/с} = \text{const}$ движется сосредоточенная масса $\mu = 100 \text{ кг}$. При этом будем учитывать начальный статический прогиб балки $\nu_0(x)$, обусловленный ее возможным искривлением и действием собственного веса. Прогиб балки, обусловленный реакцией P движущейся массы с учетом ее веса, ищем в виде:

$$\nu(x, t) = \nu_0(x) + \sum_{m=0}^s q_m(t) X_m(x),$$

а уравнения колебаний балки на основании метода Ритца имеют вид:

$$\sum_{n=0}^s [m_{mn} \ddot{q}_n + k_{mn} q_n] = Q_m(t), \quad m = 0, 1, \dots, s.$$

Уравнения колебаний балки при $0 \leq t \leq l/V = 0.16$ с будут иметь вид:

$$\sum_{n=0}^s [(m_{mn} + g_{mn})\ddot{q}_n + d_{mn}\dot{q}_n + (k_{mn} + b_{mn})q_n] = Q_m^0(t), \quad m = 0, 1, \dots, s,$$

где

$$m_{mn} = \int_0^l \bar{m} X_m X_n dx; \quad k_{mn} = \int_0^l EI X_m'' X_n'' dx; \quad \mu_{mn} = \mu X_m(x_r) X_n(x_r);$$

$$d_{mn} = 2V\mu X_m(x_r) X_n'(x_r); \quad \mu_{mn} = V^2 \mu X_m(x_r) X_n''(x_r).$$

Эти уравнения в пределах интервала времени $0 \leq t \leq l/V$ решаются численно с помощью стандартной программы при нулевых начальных условиях $q_m(0) = 0$, $\dot{q}_m(0) = 0$.

В качестве критерия устойчивости вычислений был выбран закон сохранения энергии, согласно которому во время движения массы по балке полная энергия системы должна быть постоянной:

$$E = T + \Pi = const,$$

где $T = T_{\text{бал}} + T_{\text{мас}}$ – кинетическая энергия системы ($T_{\text{бал}}$ – кинетическая энергия балки, $T_{\text{мас}}$ – кинетическая энергия сосредоточенной массы), $\Pi = \Pi_{\text{бал}} + \Pi_{\text{мас}}$ – потенциальная энергия системы ($\Pi_{\text{бал}}$ – потенциальная энергия балки, $\Pi_{\text{мас}}$ – потенциальная энергия сосредоточенной массы) в гравитационном поле:

$$T_{\text{бал}} = \frac{1}{2} \int_0^l m_{\text{бал}} (\dot{v}(x, t))^2 dx; \quad T_{\text{мас}} = \frac{1}{2} \mu (V_x^2 + V_y^2);$$

$$\Pi_{\text{бал}} = \frac{1}{2} \int_0^l EI (v''(x, t))^2 dx; \quad \Pi_{\text{мас}} = \mu g v(x, t).$$

Для всего времени интегрирования полная энергия системы E оставалась постоянной и равной $1/2 \mu V_x^2 = 1.25 \cdot 10^5$ Дж с точностью $10^{-5} \dots 10^{-7}$ (рис. 13).

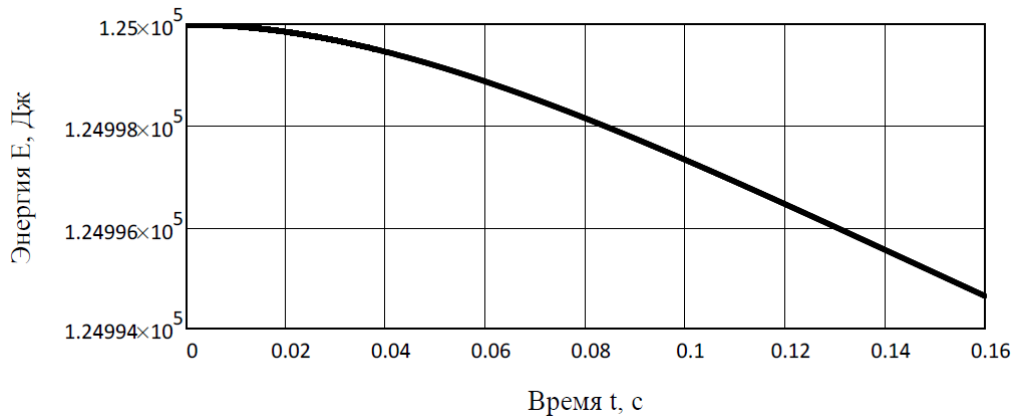


Рис. 13. Проверка численного алгоритма по полной энергии

Рассмотрим вопрос о нахождении кинематических параметров летательного аппарата при сходе с балки – вертикальной скорости $V_y(t_3)$, угловой скорости вращения $\omega(t_3)$ и угла поворота относительно оси OX – $\alpha(t_3)$. Для вычисления угла поворота аппарата используем соотношение:

$$\alpha(t_3) = \operatorname{arctg} \frac{V_y(t_3)}{V_x(t_3)},$$

где $V_x(t_3)$ – горизонтальная составляющая скорости. Если не учитывать дополнительную степень свободы при сходе аппарата с балки, то $V_y(t_3)$ и $\omega(t_3)$ вычисляются по формулам:

$$V_y(t_3) = \frac{dv_c}{dt} \Big|_{t=t_3} = \frac{r_2}{a} [\dot{v}_1 + V_x(v'_1 + v'_{10})] + \frac{r_1}{a} [\dot{v}_2 + V_x(v'_2 + v'_{20})] \Big|_{t=t_3};$$

$$\omega(t_3) = -\frac{d\mathcal{G}_c}{dt} \Big|_{t=t_3} = \frac{1}{a} [\dot{v}'_2 + V_x(v''_2 + v''_{20})] - \frac{1}{a} [\dot{v}'_1 + V_x(v''_1 + v''_{10})] \Big|_{t=t_3}.$$

При учете дополнительной степени свободы величины \mathcal{G}_c и $\dot{\mathcal{G}}_c$ находятся из решения дифференциального уравнения, тогда параметры схода аппарата с балки определяются по формулам:

$$\omega(t_3) = -\dot{\mathcal{G}}_c(t_3); \quad V(t_3) = \frac{dv_c}{dt} \Big|_{t=t_3} = [\dot{v}_2 + V_x(v'_2 + v'_{20})] \Big|_{t=t_3} + r_2 \dot{\mathcal{G}}_c(t_3).$$

Рассмотрим примеры расчета при различных постановках задачи.

I. Исследуем сходимость и трудоемкость решения задачи для примера без учета появления дополнительной степени свободы при покидании балки летательным аппаратом, так же исследуем влияние различных инерционных и жесткостных параметров балки на ее прогиб и форму.

Исходные данные для расчета: $\theta = 30^\circ$, $M = 100$ кг, $l = 8$ м, $g = 9.81$ м/с², $J = 0.1$ кг·м², $EI = 15 \cdot 10^6$ Н·м², $\bar{m} = 16$ кг/м, $J_0 = 5 \cdot 10^3$ кг·м², $c_0 = 8 \cdot 10^6$ Н·м, $a = 1$ м, $r_1 = 0.5$ м, $r_2 = 0.5$ м. Сила тяги считается постоянной на всем интервале движения аппарата по балке – $T = 10^4$ Н. Учитывались изгиб и поворот балки с аппаратом за счет собственного веса, а предварительное искривление балки не учитывалось [40, 41]:

$$v_0(x) = -\frac{\bar{m}g}{24EI} (6x^2l^2 - 4x^3l + x^4).$$

Границы временных интервалов: $t_1 = 0.145$ с, $t_2 = 0.410$ с, $t_3 = 0.435$ с, $t_4 = 2t_3$.

Была оценена сходимость результатов расчета по числу используемых координатных функций s и трудоемкость интегрирования системы дифференциальных уравнений. В табл. 1 и табл. 2 приведены значения обобщенных координат $q_1(t) \cdot 10^8$ и $q_2(t) \cdot 10^8$ для различных моментов времени в зависимости от числа координатных функций s .

Табл. 1. Исследование сходимости по координате $q_1(t)$

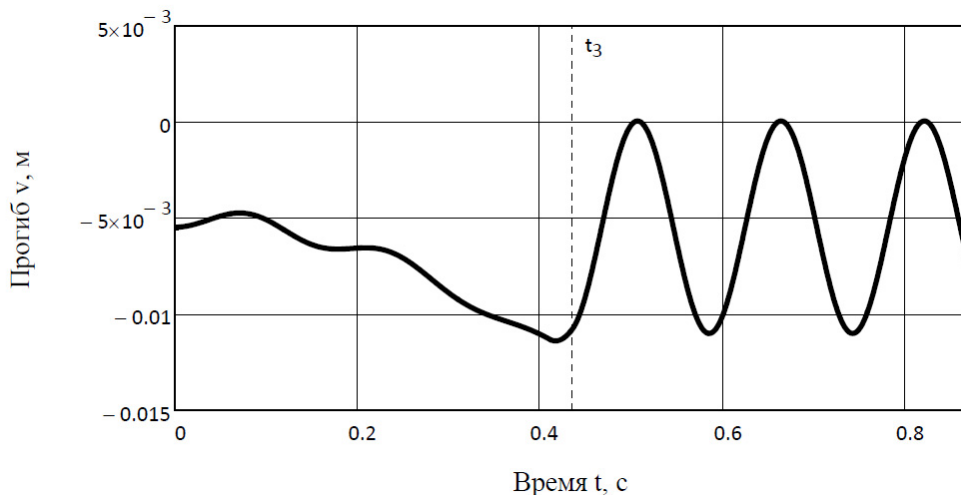
	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$
$t = 0.145$ с	-4.781	-4.851	-4.865	-4.866	-4.866
$t = 0.410$ с	73.15	73.40	73.53	73.54	73.54
$t = 0.435$ с	669.1	678.1	679.6	679.7	679.7

Табл. 2 Исследование сходимости по координате $q_2(t)$

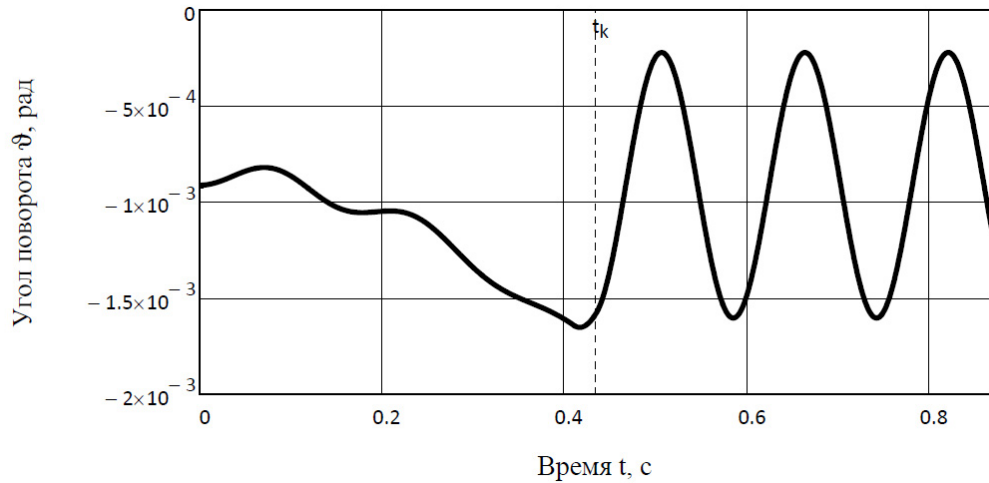
	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$
$t = 0.145$ с	-1.243	-1.262	-1.273	-1.274	-1.274
$t = 0.410$ с	-12.62	-12.71	-12.80	-12.81	-12.81
$t = 0.435$ с	-805.4	-811.1	-812.9	-813.0	-813.0

Была проведена оценка трудоемкости решения задачи в зависимости от числа аппроксимирующих функций s . Результаты расчета показывают следующие значения времени интегрирования системы дифференциальных уравнений: $t = 5$ с для $s = 1$, $t = 10$ с для $s = 2$, $t = 60$ с для $s = 3$, $t = 400$ с для $s = 4$, $t = 1200$ с для $s = 5$. С точностью до четырех значащих цифр были приняты: число координатных функций $s = 4$; число шагов на интервале прохождения аппаратом длины балки – 500.

На рис. 14 показан график изменения прогиба балки при $x = l$ на всем интервале движения аппарата.

Рис. 14. Прогиб балки при $x = l$

На рис. 15 показан график изменения угла поворота балки при $x = l$ на всем интервале движения аппарата.

Рис. 15. Угол поворота балки при $x = l$

На рис. 16 показана первоначальная форма балки и при характерных моментах времени движения аппарата.



Рис. 16. Форма балки в различные моменты времени

Вертикальная и угловая скорости аппарата в различные моменты времени: при $t = t_1 - V_y = -8.140 \cdot 10^{-3}$ м/с, $\omega = 6.205 \cdot 10^{-3}$ рад/с; при $t = t_2 - V_y = -0.091$ м/с, $\omega = 3.337 \cdot 10^{-3}$ рад/с; при $t = t_3 - V_y = 4.588 \cdot 10^{-3}$ м/с, $\omega = -7.292 \cdot 10^{-3}$ рад/с.

Исследуем влияние жесткости опорной пружины c_0 на прогиб балки при $x = l$ и на форму балки в момент схода аппарата с балки (при $t = t_3$) при увеличении c_0 в 3 и в 5 раз. Результаты представлены на рис. 17 и рис. 18. Кинематические параметры схода аппарата с балки: $c_0 = 24 \cdot 10^6$ Н·м –

$V_y = 0.033$ м/с, $\omega = -8.006 \cdot 10^{-3}$ рад/с; $c_0 = 40 \cdot 10^6$ Н·м – $V_y = 8.844 \cdot 10^{-3}$ м/с,
 $\omega = -4.950 \cdot 10^{-3}$ рад/с.

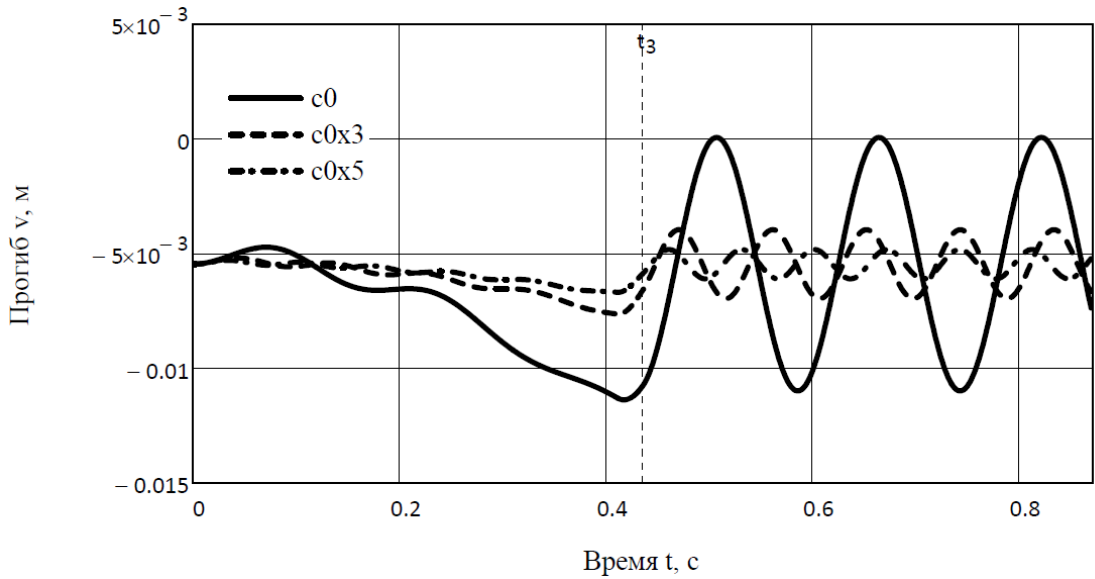


Рис. 17. Прогиб балки при $x = l$ при различных c_0

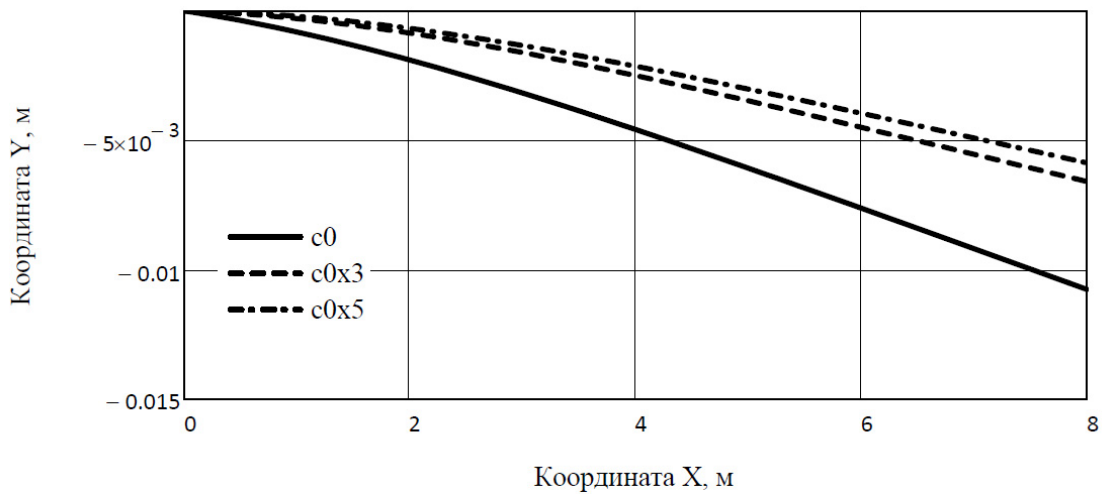


Рис. 18. Форма балки при $t = t_3$ при различных c_0

Варьирование жесткости опорной пружины существенно влияет на деформацию балки при движении аппарата, следовательно изменяются его кинематические параметры при сходе с балки.

Исследуем влияние погонной массы \bar{m} на прогиб балки при $x = l$ и на форму балки в момент схода аппарата с балки (при $t = t_3$) при увеличении \bar{m} в 5

раз. Результаты представлены на рис. 19 и рис. 20. Кинематические параметры схода аппарата с балки: $\bar{m} = 80$ кг/м – $V_y = -0.123$ м/с, $\omega = -8.866 \cdot 10^{-3}$ рад/с. Смещение графиков прогиба обусловлено увеличением начального прогиба от действия собственного веса в 5 раз.

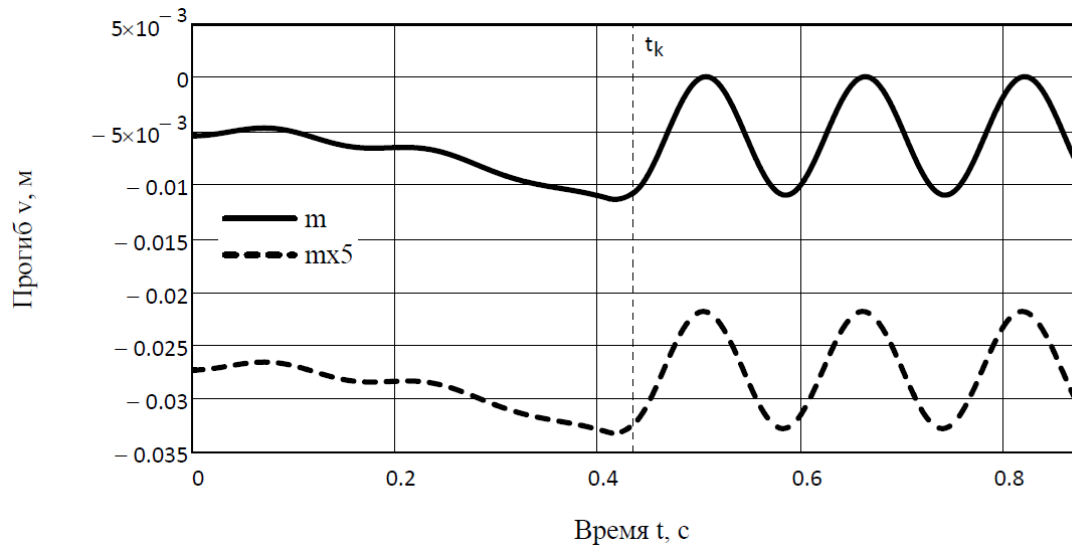


Рис. 19. Прогиб балки при $x = l$ при варьировании \bar{m}

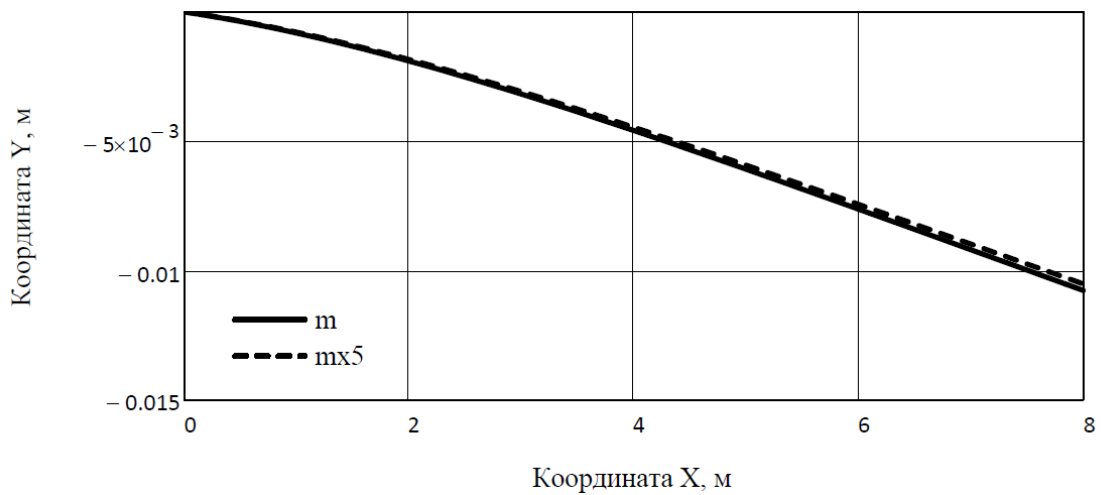


Рис. 20. Форма балки при $t = t_3$ при варьировании \bar{m}

Варьирование погонной массой балки не оказывает существенного влияния на деформацию балки при движении по ней аппарата. Однако изменение \bar{m} способно существенно изменить кинематические параметры схода, в частности, вертикальную скорость V_y .

II. Исследуем кинематические параметры схода аппарата с балки и перемещения опор аппарата и его центра тяжести при учете появления дополнительной степени свободы. Для данного примера расчета исходные данные аналогичные прошлому. Учитывались изгиб и поворот балки с аппаратом за счет собственного веса, а предварительное искривление не учитывалось [40, 41]:

$$v_0(x) = -\frac{\bar{m}g}{24EI} (6x^2l^2 - 4x^3l + x^4)$$

Вертикальная и угловая скорости аппарата в различные моменты времени: при $t = t_1 - V_y = -8.140 \cdot 10^{-3}$ м/с, $\omega = 6.205 \cdot 10^{-3}$ рад/с; при $t = t_2 - V_y = -0.091$ м/с, $\omega = 3.337 \cdot 10^{-3}$ рад/с; при $t = t_3 - V_y = -0.313$ м/с, $\omega = 0.620$ рад/с. Из результатов вычисления видно, что учет появления дополнительной степени свободы существенно повлиял на величины кинематических параметров схода аппарата с балки.

На рис. 21 представлены графики зависимости перемещения опор аппарата от времени на всем интервале движения.

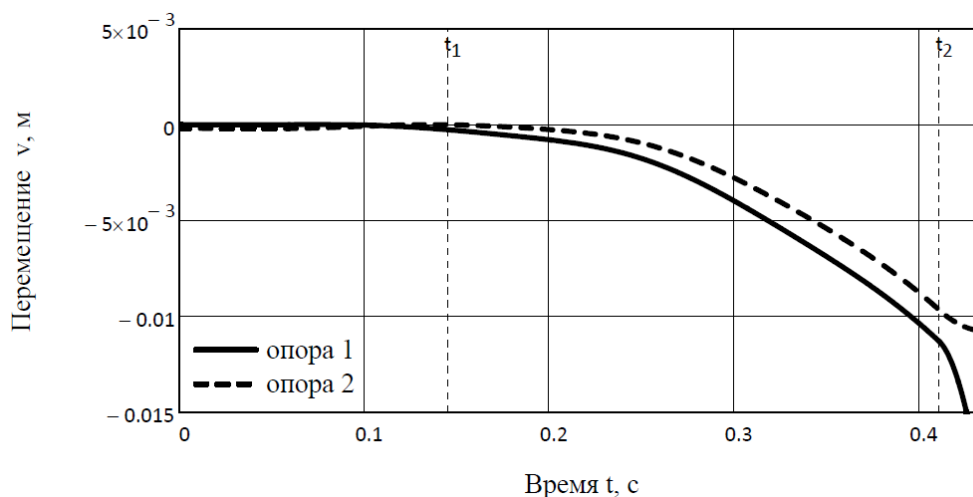


Рис. 21. Перемещения опор аппарата

На рис. 22 показан график изменения перемещения центра тяжести аппарата от времени на всем интервале движения.

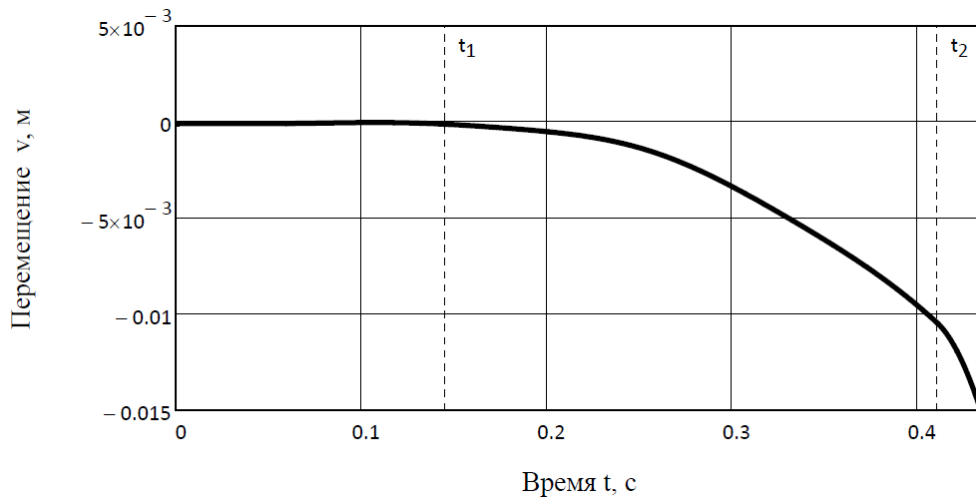


Рис. 22. Перемещение центра тяжести аппарата

На рис. 23 показан график изменения угла поворота относительно центра тяжести аппарата от времени на всем интервале движения.

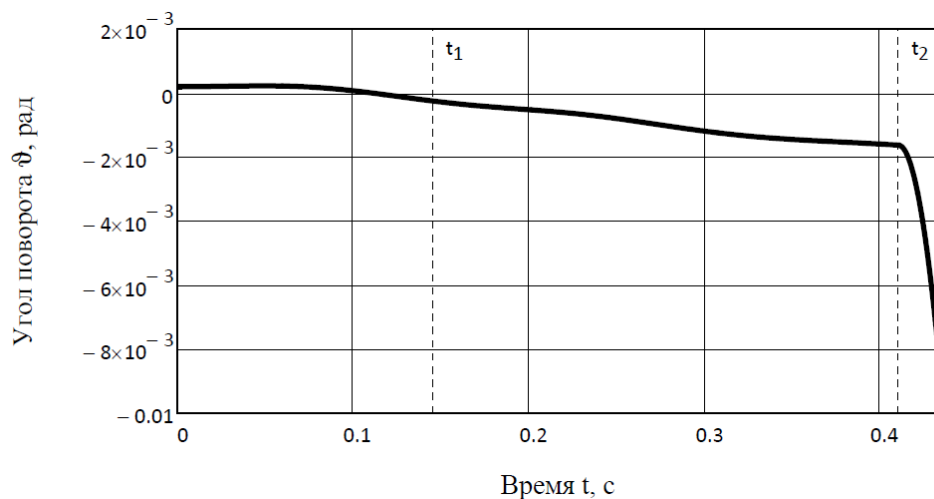


Рис. 23. Угол поворота относительно центра тяжести аппарата

Видно, что имеет место «сваливание» аппарата с балки, то есть резкое изменение угла поворота центра тяжести при покидании балки первой опоры.

III. Зададим балке принудительный начальный прогиб в виде следующей функции:

$$v_0(x) = \frac{1}{10} \left(\frac{x}{l} \right)^3.$$

Исследуем кинематические параметры схода аппарата с балки и изменение прогиба балки при учете появления дополнительной степени свободы. Исходные данные аналогичные прошлым расчетным случаям.

На рис. 24 и рис. 25 представлены графики изменения прогиба и угла поворота балки при $x = l$ на всем интервале движения аппарата.

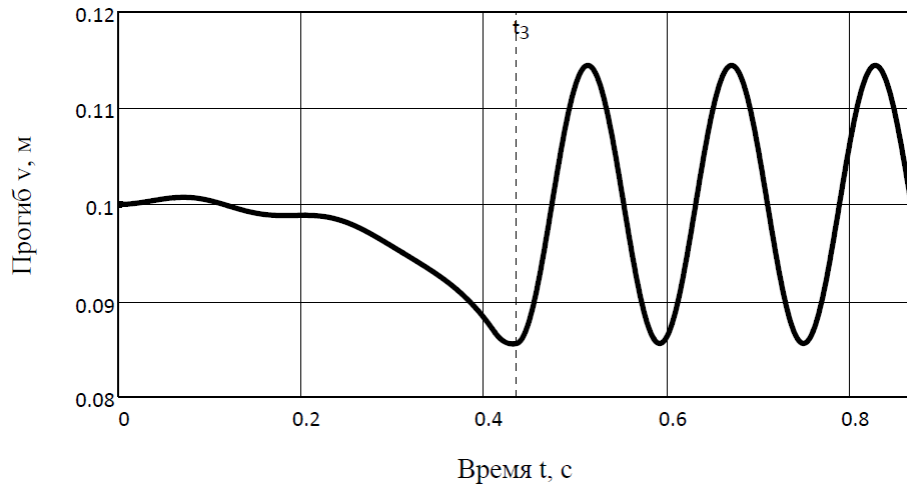


Рис. 24. Прогиб балки при $x = l$

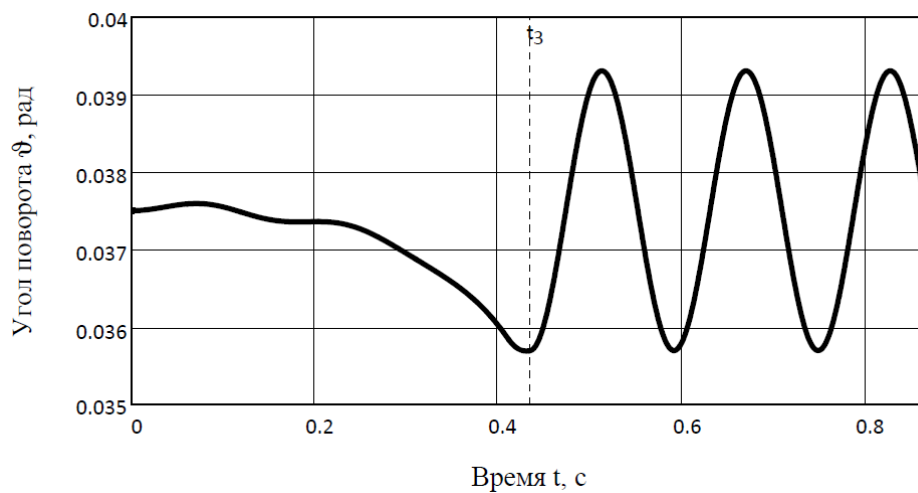


Рис. 25. Угол поворота балки при $x = l$

На рис. 26 показана первоначальная форма балки и в момент схода аппарата с балки.

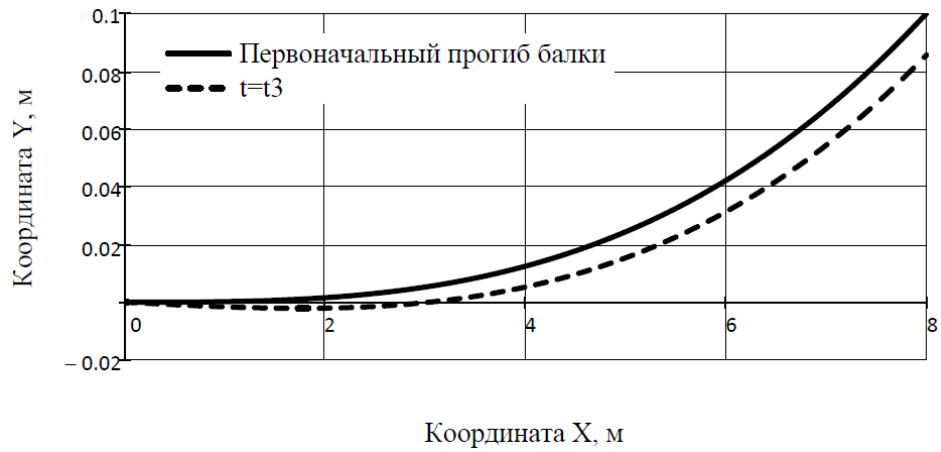


Рис. 26. Форма балки в различные моменты времени

На рис. 27 показаны графики зависимости перемещения опор аппарата от времени на всем интервале движения.

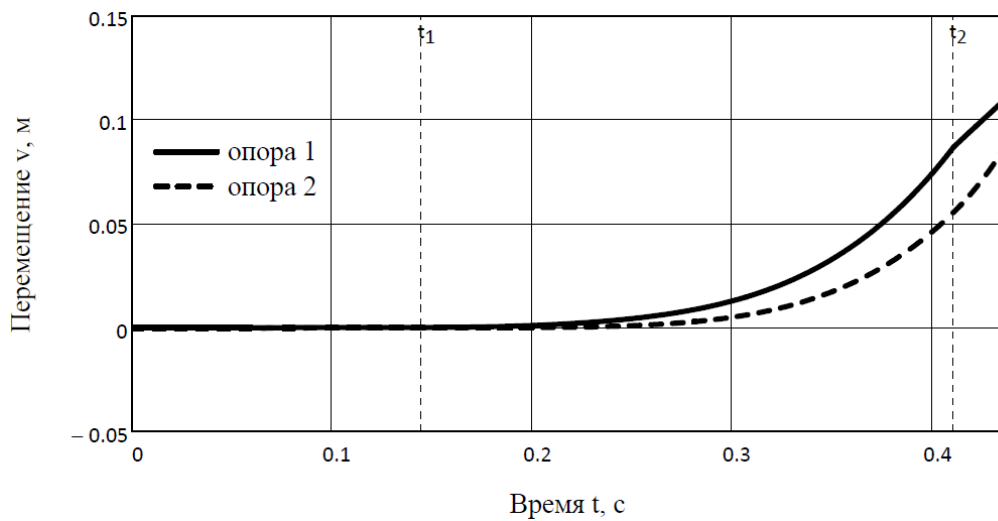


Рис. 27. Перемещения опор аппарата

На рис. 28 представлен график изменения перемещения центра тяжести аппарата от времени на всем интервале движения.

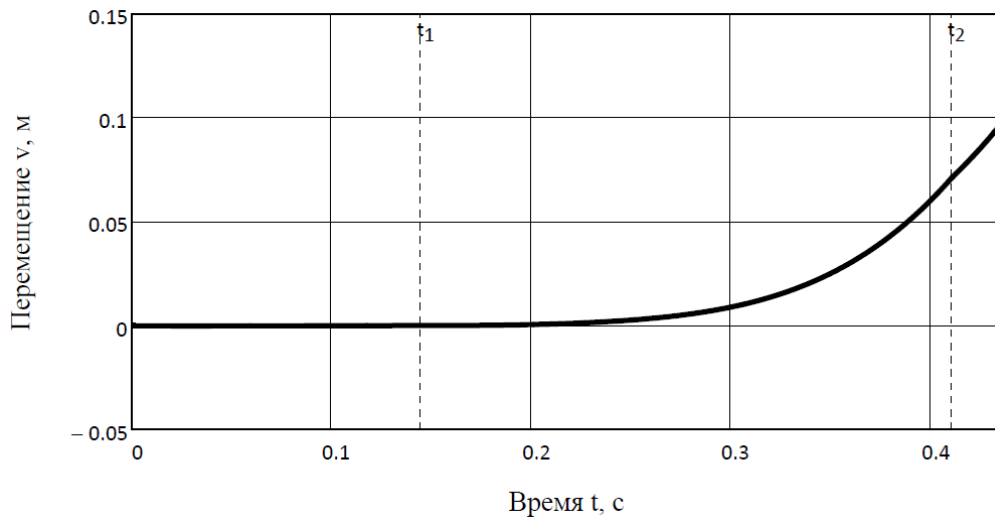


Рис. 28. Перемещение центра тяжести аппарата

На рис. 29 представлен график изменения угла поворота относительно центра тяжести аппарата от времени на всем интервале движения.

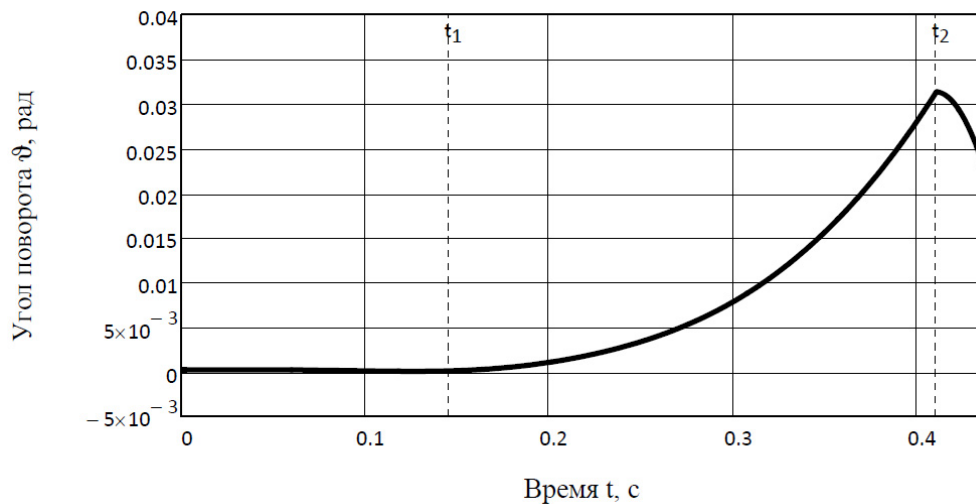


Рис. 29. Угол поворота относительно центра тяжести аппарата

Кинематические параметры аппарата в различные моменты времени: при $t = t_1$ – $V_y = 4.078 \cdot 10^{-3}$ м/с, $\omega = -0.014$ рад/с; при $t = t_2$ – $V_y = 1.261$ м/с, $\omega = -0.348$ рад/с; при $t = t_3$ – $V_y = 1.195$ м/с, $\omega = 0.601$ рад/с.

За счет задания предварительного искривления можно получить необходимые параметры схода аппарата с балки, а также устранить эффект «сваливания». Эти данные могут быть использованы при решении баллистической задачи динамики свободного полета летательного аппарата.

2.3. Исследование параметров схода летательного аппарата с упругой балки

Кроме оценки влияния инерционных и жесткостных параметров балки на ее прогиб и форму при движении летательного аппарата необходимо исследовать, как влияют различные параметры балки на перемещение и угол поворота относительно центра тяжести аппарата, а также его кинематические параметры при покидании балки.

Рассмотрим пример расчета. Исходные данные: $\theta = 0^\circ$, $M = 300$ кг, $l = 10$ м, $g = 9.81$ м/с², $J = 15$ кг·м², $EI = 12 \cdot 10^6$ Н·м², $\bar{m} = 7$ кг/м, $J_0 = 2 \cdot 10^3$ кг·м², $c_0 = 5 \cdot 10^6$ Н·м, $a = 1$ м, $r_1 = 0.4$ м, $r_2 = 0.6$ м. Сила тяги считается постоянной на всем интервале движения аппарата по балке – $T = 5 \cdot 10^3$ Н. При решении задачи в данном примере учитывались изгиб и поворот балки с аппаратом за счет собственного веса и предварительное искривление в форме трамплина [8, 40, 41]:

$$v_0(x) = -\frac{\bar{m}g}{24EI} [6x^2l^2 - 4x^3l + x^4] + b_{tr}x^3 + c_{tr}x^4,$$

где коэффициенты, профилирующие форму трамплина, с учетом угла выхода $\theta_{tr} = 5^\circ$ и высоты подъема $h_{tr} = 0.5$ м, находятся из соотношений:

$$b_{tr} = \frac{4h_{tr} - l \cdot \operatorname{tg} \theta_{tr}}{l^3}; \quad c_{tr} = \frac{l \cdot \operatorname{tg} \theta_{tr} - 3h_{tr}}{l^4}.$$

Учитывается появление дополнительной степени свободы при сходе аппарата с балки. Полученные значения границ по времени интервалов движения: $t_1 = 0.346$ с, $t_2 = 1.095$ с, $t_3 = 1.149$ с, $t_4 = 2 \cdot t_3 = 2.298$ с.

Была проведена оценка сходимости результатов расчета по числу s используемых координатных функций X_m . В табл. 3 приведены значения обобщенной координаты $q_1 \cdot 10^4$ для различных моментов времени в зависимости от числа координатных функций.

Табл. 3. Исследование сходимости по координате $q_1(t)$

	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$
$t = 0.191$ с	3.014	3.017	3.018	3.018	3.018
$t = 0.713$ с	-28.27	-28.33	-28.35	-28.35	-28.35
$t = 1.101$ с	-58.65	-58.70	-58.74	-58.74	-58.74

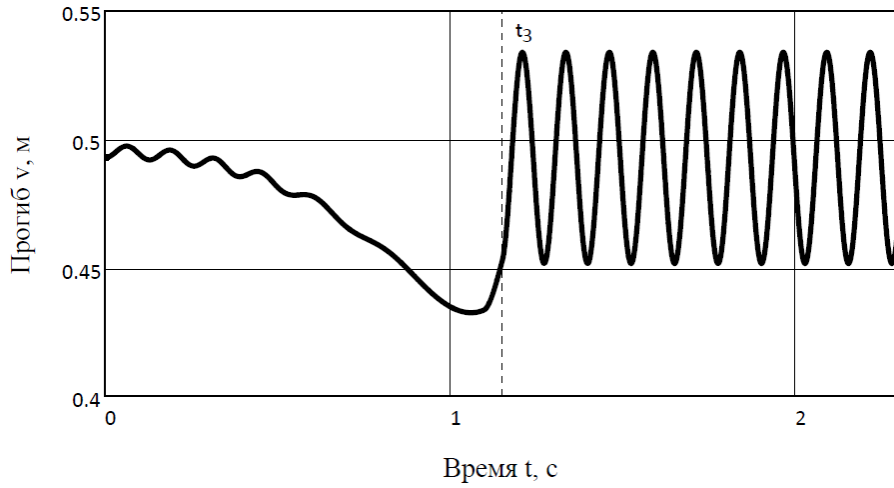
С точностью до четырех значащих цифр были приняты: число координатных функций $s = 4$; число шагов интегрирования на каждом интервале – 1000.

На рис. 30 представлены начальный прогиб балки и форма балки в момент времени $t = t_3$, то есть в момент схода аппарата с балки.



Рис. 30. Форма балки в различные моменты времени

На рис. 31 показан прогиб балки при $x = l$ на всех интервалах движения аппарата по балке и при свободных колебаниях.

Рис. 31. Прогиб балки при $x = l$

На рис. 32 представлены графики зависимости перемещения опор аппарата от времени на всем интервале движения.

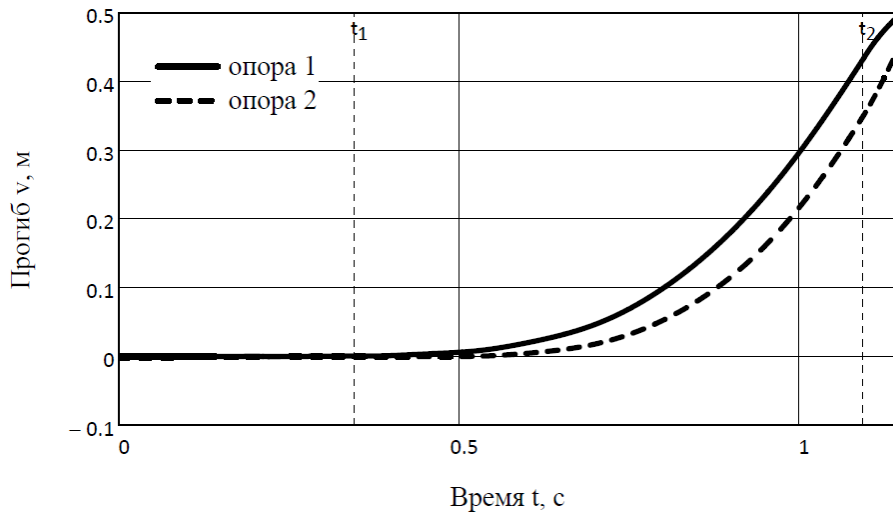


Рис. 32. Перемещения опор аппарата

На рис. 33 и рис. 34 представлены перемещение центра тяжести аппарата v_c и угол поворота ϑ_c относительно центра тяжести соответственно.

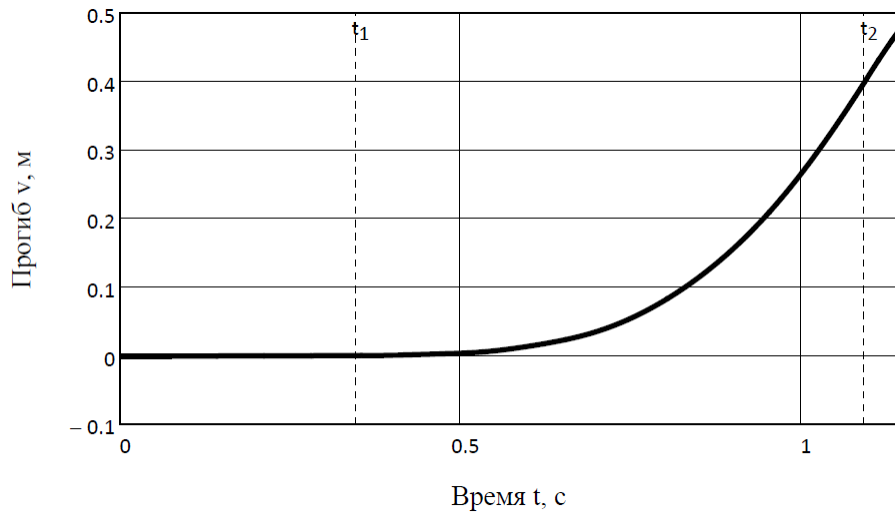


Рис. 33. Перемещение центра тяжести аппарата

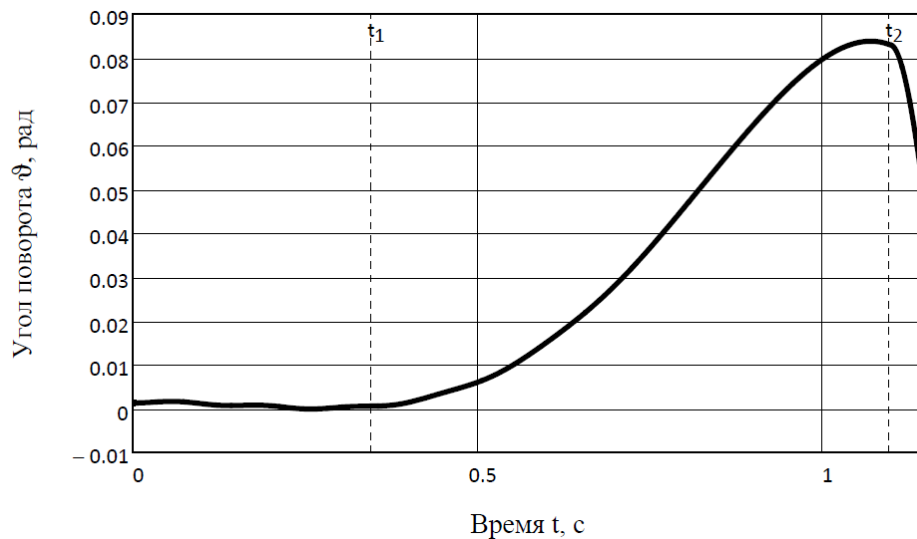


Рис. 34. Угол поворота относительно центра тяжести аппарата

Кинематические параметры летательного аппарата в момент его схода с упругой направляющей балки при $t = t_3 = 1.149$ с: $V_x = 19.149$ м/с, $V_y = 1.316$ м/с, $\omega = 1.271$ рад/с, $\alpha = 3.953^\circ$.

Исследуем необходимость учета межосевого расстояния между опорами и дополнительной степени свободы при сходе аппарата с балки при различных скоростях движения аппарата и инерционных характеристиках балки.

I. Исследование необходимости учета дополнительной степени свободы при сходе аппарата с балки в зависимости от соотношения межосевого расстояния a и

длины балки l . В табл. 4 приняты следующие обозначения: задача №1 – без учета расстояния между опорами, $a = 0$; задача №2 – без учета дополнительной степени свободы при сходе, $a = 1$ м, $r_1 = 0.4$ м, $r_2 = 0.6$ м; задача №3 – без учета дополнительной степени свободы при сходе, $a = 0.25$ м, $r_1 = 0.1$ м, $r_2 = 0.15$ м; задача №4 – с учетом дополнительной степени свободы при сходе, $a = 1$ м, $r_1 = 0.4$ м, $r_2 = 0.6$ м; задача №5 – с учетом дополнительной степени свободы при сходе, $a = 0.25$ м, $r_1 = 0.1$ м, $r_2 = 0.15$ м. Результаты вычисления основных кинематических параметров при сходе представлены в табл. 4.

Табл. 4. Исследование влияния межосевого расстояния a

	Задача №1	Задача №2	Задача №3	Задача №4	Задача №5
V_x , м/с	18.257	19.149	18.484	19.149	18.484
V_y , м/с	2.145	1.972	1.473	1.316	1.481
ω , рад/с	0.085	0.172	0.156	1.271	1.100
α°	6.701	5.580	4.556	3.931	4.581

Результаты расчета в задаче №1, в которой не учитывается межосевое расстояние, существенно отличается от результатов задач №3 и №5 ($a = 0.25$ м), поэтому даже при малых соотношениях a и l , межосевое расстояние следует учитывать. Исходя из результатов расчета, представленных в табл. 4, можно сделать вывод о том, что учет дополнительной степени свободы наиболее существенен при сравнимых величинах a и l (задачи №2 и №4). Различное соотношение a и l влияет на характер изгиба балки при движении аппарата. На рис. 35 представлен график изменения прогиба балки при $x = l$ в различных расчетных случаях.

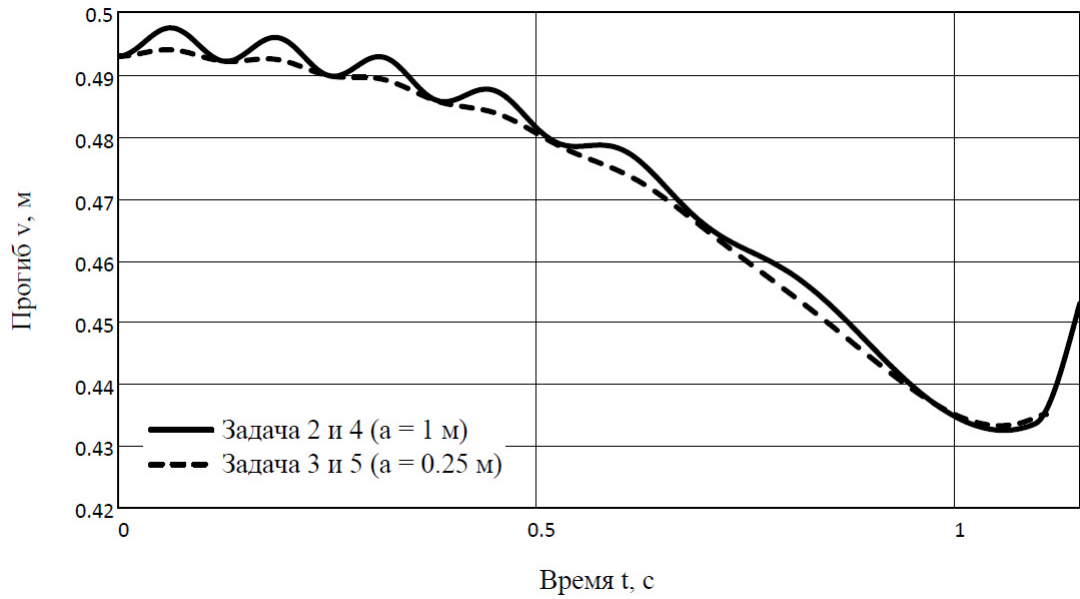


Рис. 35. Сравнение прогиба балки при $x = l$

Форма балки и перемещения центра тяжести в различных расчетных случаях отличаются не существенно. Наибольшее различие имеют графики зависимостей угла поворота относительно центра тяжести аппарата. На рис. 36 представлены графики сравнения зависимостей угла поворота относительно центра тяжести аппарата в задаче №2 ($\vartheta_c(t_3) = 0.077$ рад) и №3 ($\vartheta_c(t_3) = 0.080$ рад).

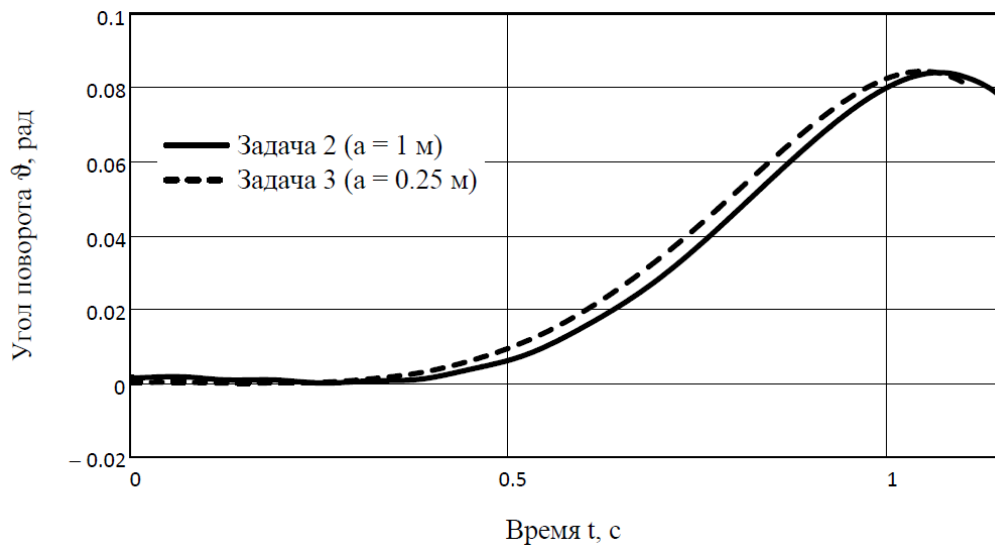


Рис. 36. Сравнение угла поворота относительно центра тяжести аппарата

На рис. 37 представлены графики сравнения зависимостей угла поворота относительно центра тяжести аппарата в задаче №4 ($\vartheta_c(t_3) = 0.044$ рад) и №5 ($\vartheta_c(t_3) = 0.081$ рад).

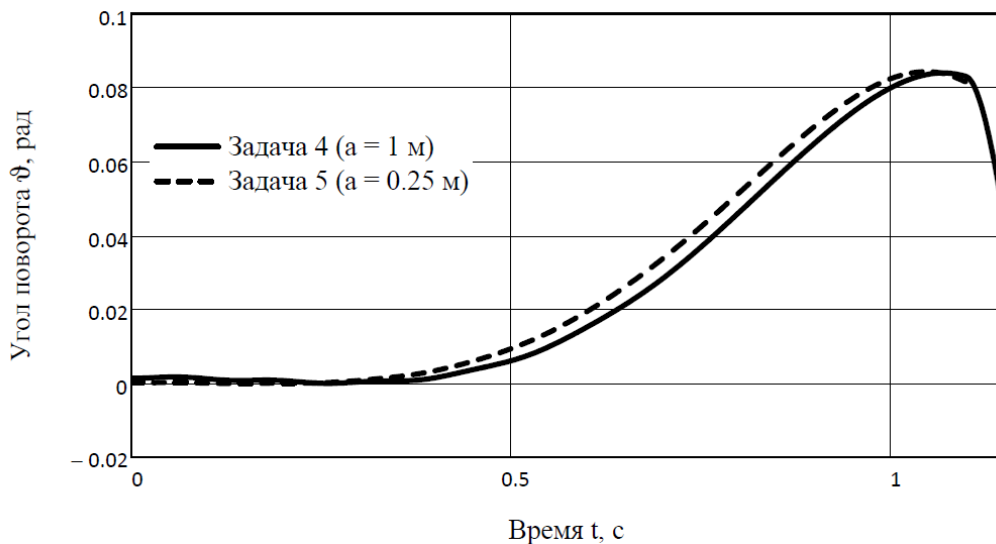


Рис. 37. Сравнение угла поворота относительно центра тяжести аппарата

При $a = 0.25$ м аппарат на конечной стадии движения не «сваливается», то есть при малых a можно не учитывать появление дополнительной степени свободы при сходе. Наибольшее «сваливание» происходит при больших a , сравнимых с длиной балки. Наглядно это показано на рис. 38.

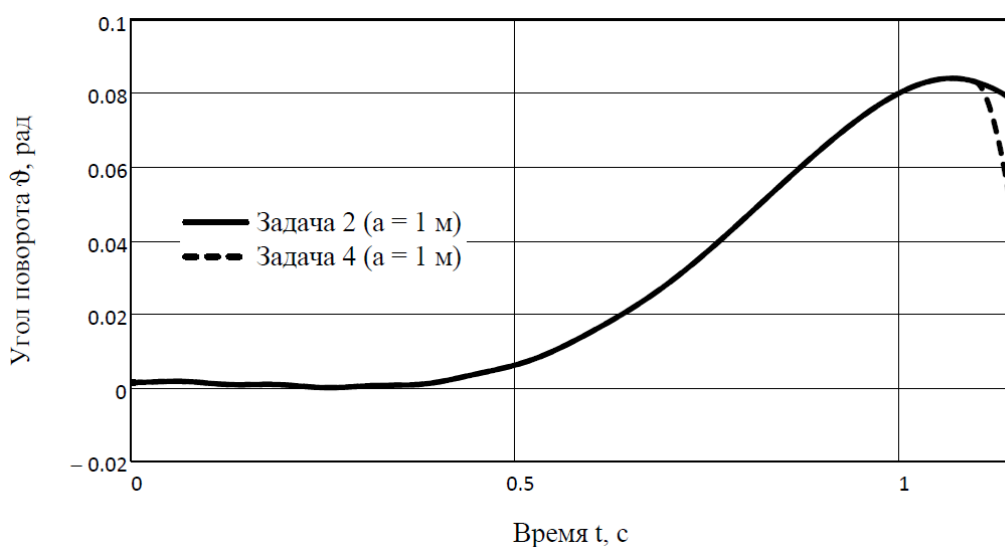


Рис. 38. Сравнение угла поворота относительно центра тяжести аппарата

II. Исследование изменения характера схода аппарата с балки и деформации балки при различных скоростях движения (различных силах тяги T). Скорость движения аппарата по балке наиболее сильно влияет на параметры схода летательного аппарата. В табл. 5 приведены результаты расчета при варьировании силы тяги T и, следовательно, скорости движения.

Табл. 5. Исследование влияния силы тяги T

	$T = 5 \cdot 10^3$ Н	$T = 1 \cdot 10^3$ Н	$T = 25 \cdot 10^3$ Н
V_x , м/с	19.149	8.563	42.817
V_y , м/с	1.316	-0.262	3.295
ω , рад/с	1.271	1.764	0.474
α°	3.931	-1.753	4.401

На рис. 39 представлен график изменения прогиба балки при $x = l$ в различных расчетных случаях.

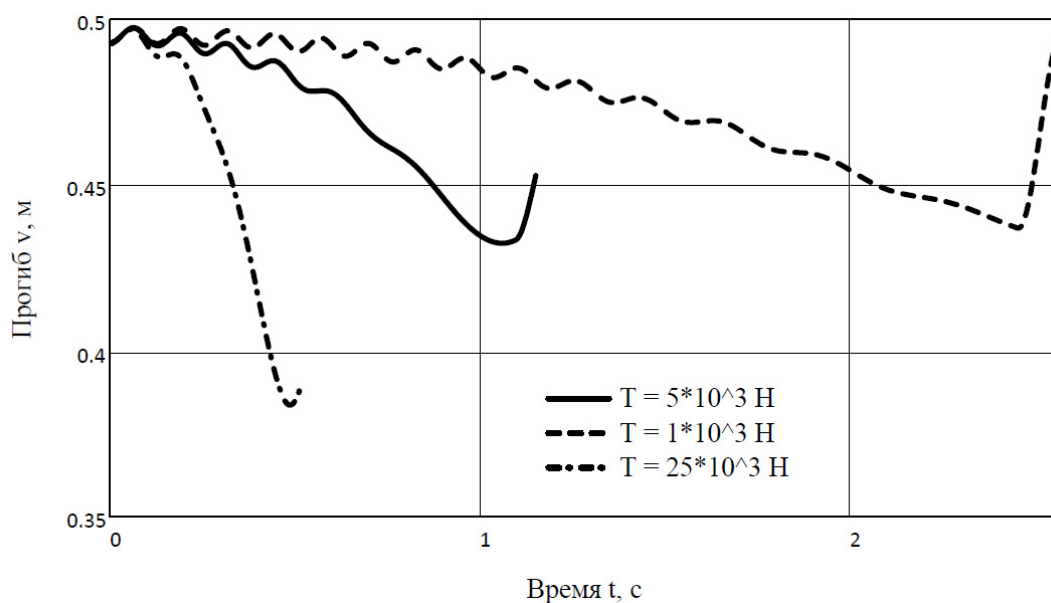


Рис. 39. Сравнение прогиба балки при $x = l$

Формы изгиба балки при $t = t_3$ в различных расчетных случаях показаны на рис. 40. Следует заметить, что при больших скоростях движения аппарата балка прогибается вниз наиболее существенно, что видно из приведенного графика.

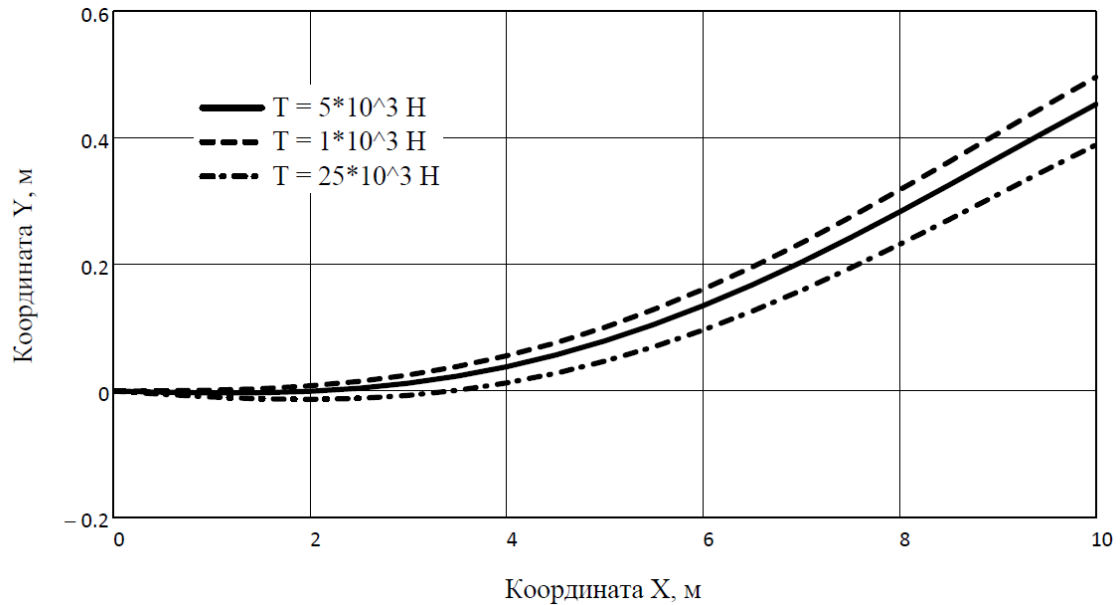


Рис. 40. Сравнение форм балки при $t = t_3$

Существенно отличаются зависимости перемещения центра тяжести аппарата, что показано на рис. 41, особенно при конечной стадии движения. При низкой скорости аппарат может начать «сваливаться» с балки, изменяя знак угла своего наклона к горизонту. На рис. 42 показаны графики зависимостей угла поворота относительно центра тяжести аппарата при $T = 5 \cdot 10^3$ Н ($\vartheta_c(t_3) = 0.044$ рад), $T = 1 \cdot 10^3$ Н ($\vartheta_c(t_3) = -0.102$ рад) и $T = 25 \cdot 10^3$ Н ($\vartheta_c(t_3) = 0.072$ рад).

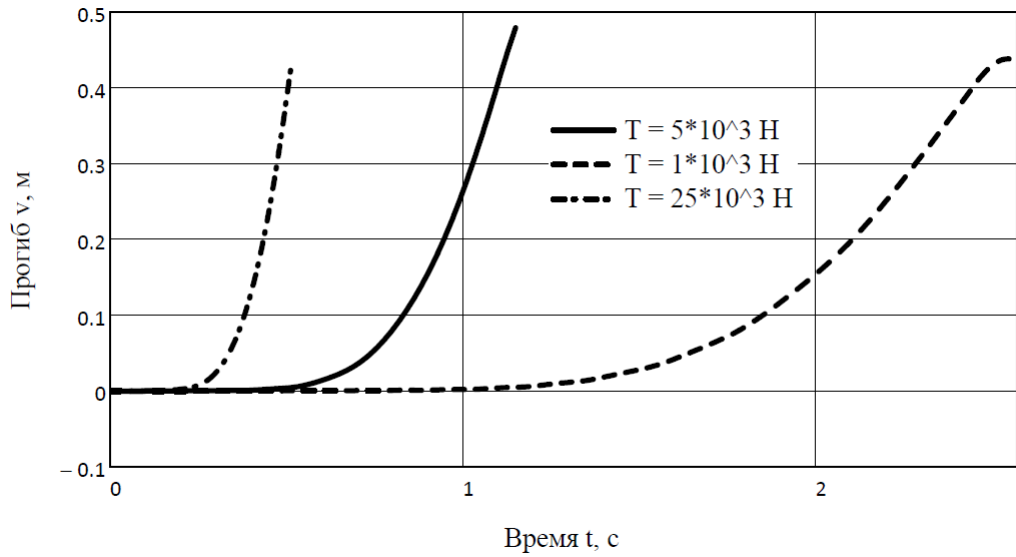


Рис. 41. Сравнение перемещения центра тяжести аппарата

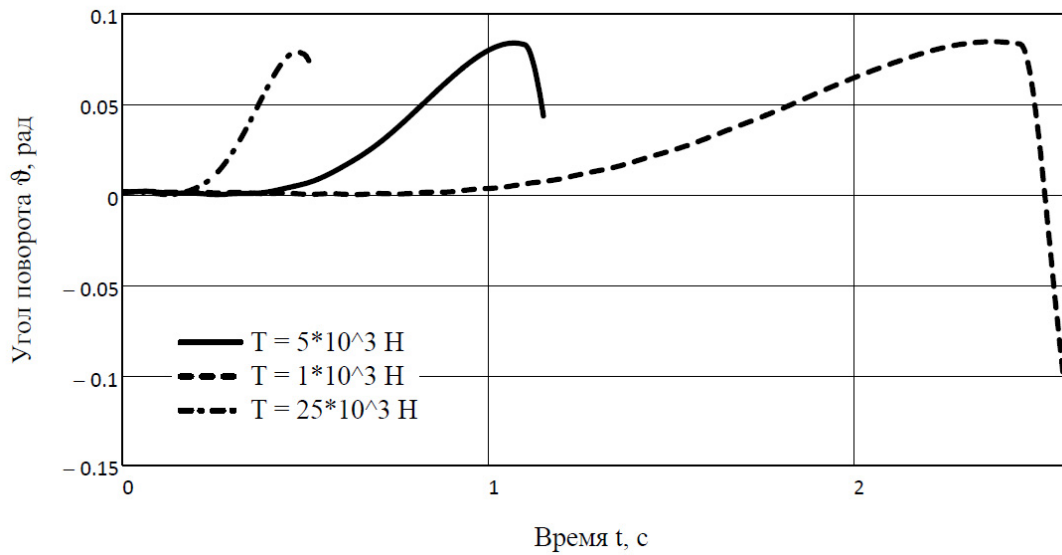


Рис. 42. Сравнение угла поворота относительно центра тяжести аппарата

III. Исследование влияния жесткости балки EI на параметры схода аппарата с балки. В табл. 6 показаны результаты исследования влияния жесткости балки EI на параметры схода аппарата.

Табл. 6. Исследование влияния жесткости балки EI

	$EI = 12 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$	$EI = 2.4 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$	$EI = 60 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$
$V_x, \text{ м/с}$	19.149	19.149	19.149
$V_y, \text{ м/с}$	1.316	1.245	1.331
$\omega, \text{ рад/с}$	1.271	1.312	1.262
α°	3.931	3.720	3.976

По приведенным в табл. 6 результатам видно, что варьирование жесткостью балки мало влияет на кинематические параметры схода летательного аппарата с балки, форму и характер деформации балки при движении аппарата. Угол поворота относительно центра тяжести аппарата в момент времени $t = t_3$: при $EI = 12 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}^2 - \vartheta_c(t_3) = 0.044 \text{ рад}$; при $EI = 2.4 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}^2 - \vartheta_c(t_3) = 0.038 \text{ рад}$; при $EI = 60 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}^2 - \vartheta_c(t_3) = 0.045 \text{ рад}$.

IV. Исследование влияния погонной массы балки \bar{m} на параметры схода аппарата с балки. В табл. 7 приведены результаты исследования по влиянию погонной массы балки \bar{m} на кинематические параметры схода летательного аппарата.

Табл. 7. Исследование влияния погонной массы балки \bar{m}

	$\bar{m} = 7 \text{ кг/м}$	$\bar{m} = 1.4 \text{ кг/м}$	$\bar{m} = 35 \text{ кг/м}$
$V_x, \text{ м/с}$	19.149	19.149	19.149
$V_y, \text{ м/с}$	1.316	1.331	1.246
$\omega, \text{ рад/с}$	1.271	1.260	1.312
α°	3.931	3.976	3.723

Как видно из табл. 7 варьирование погонной массы балки мало влияет на кинематические параметры схода летательного аппарата с балки. Угол поворота

относительно центра тяжести аппарата в момент времени $t = t_3$: при $\bar{m} = 7$ кг/м – $\vartheta_c(t_3) = 0.044$ рад; при $\bar{m} = 1.4$ кг/м – $\vartheta_c(t_3) = 0.045$ рад; при $\bar{m} = 35$ кг/м – $\vartheta_c(t_3) = 0.038$ рад.

V. Исследование изменения характера схода аппарата с балки и деформации балки при варьировании жесткости опорной пружины c_0 . В табл. 8 представлены параметры схода аппарата с балки при изменении жесткости опорной пружины c_0 .

Табл. 8. Исследование влияния жесткости опорной пружины c_0

	$c_0 = 5 \cdot 10^6$ Н·м	$c_0 = 1 \cdot 10^6$ Н·м	$c_0 = 25 \cdot 10^6$ Н·м
$V_x, \text{ м/с}$	19.149	19.149	19.149
$V_y, \text{ м/с}$	1.316	1.520	1.273
$\omega, \text{ рад/с}$	1.271	2.188	0.562
α°	3.931	4.538	3.803

Жесткость опорной пружины сильно влияет на вертикальную скорость схода и, особенно, на угловую скорость вращения аппарата. На рис. 43 представлен график изменения прогиба балки при $x = l$ в различных расчетных случаях. Балка сильнее изгибается при малых значениях c_0 , большими значениями c_0 можно практически исключить поперечную деформацию.

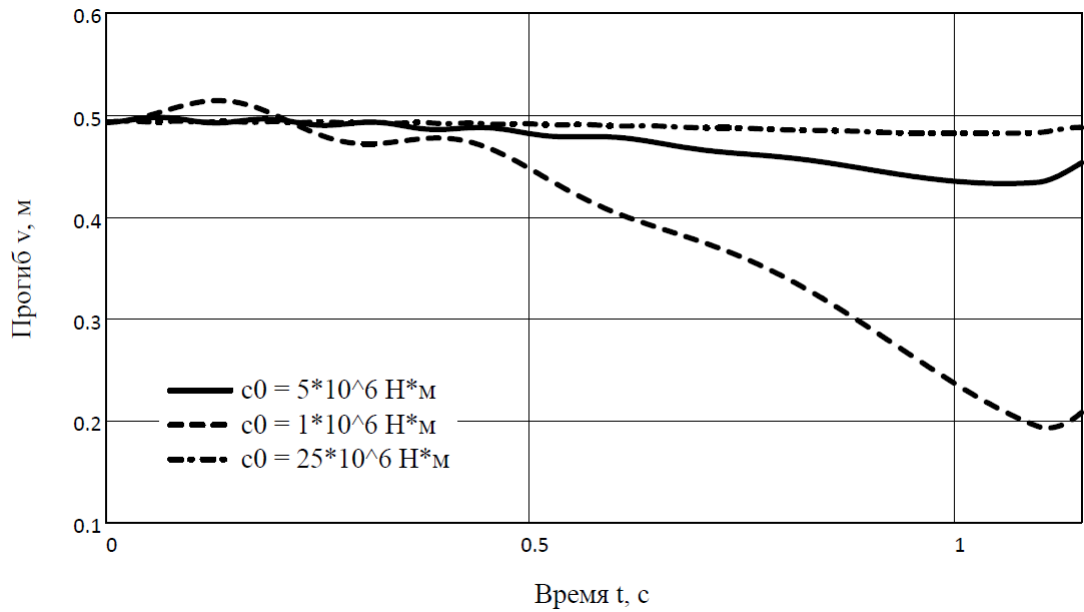


Рис. 43. Сравнение прогиба балки при $x = l$

Формы изгиба балки при $t = t_3$ в различных расчетных случаях показаны на рис. 44. Следует заметить, что при малых жесткостях c_0 балка существенно прогибается вниз и изменяется характер ее деформации.

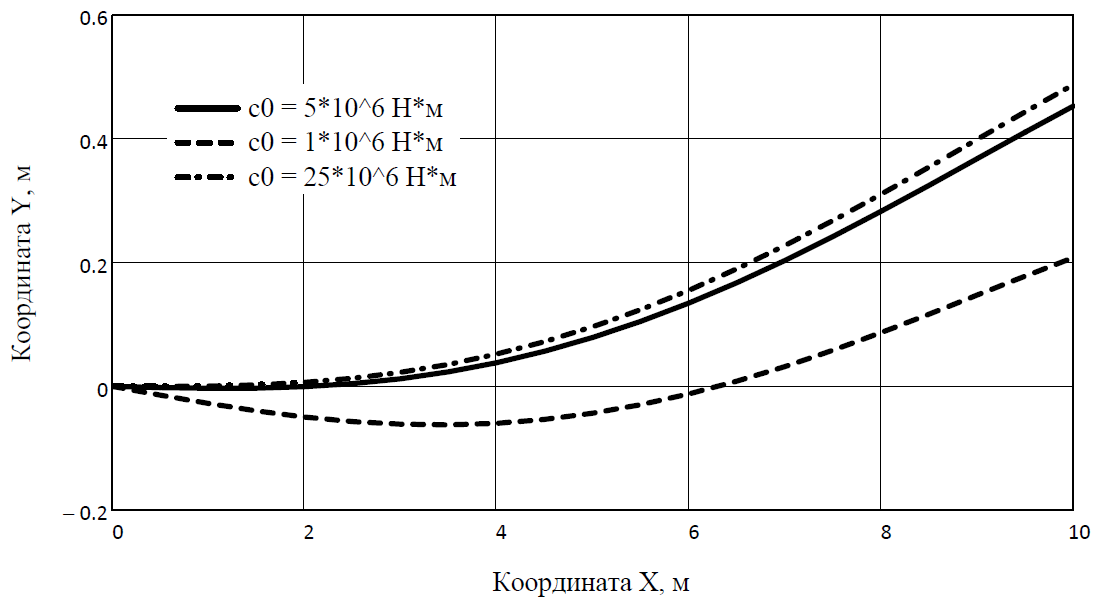


Рис. 44. Сравнение форм балки при $t = t_3$

На конечных стадиях движения аппарата по балке существенно отличаются графики перемещения центра тяжести, что показано на рис. 45.

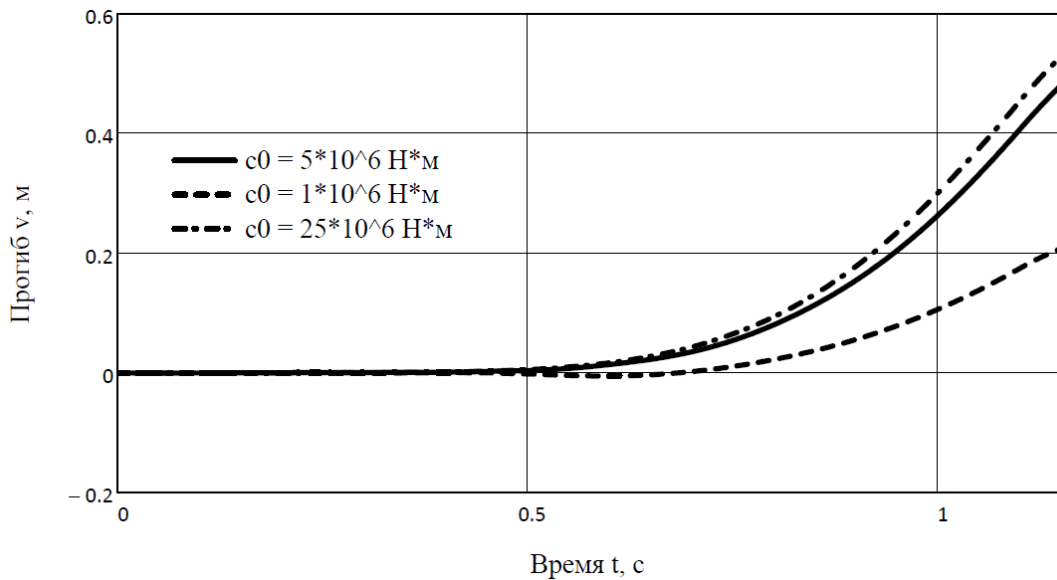


Рис. 45. Сравнение перемещения центра тяжести аппарата

На рис. 46 показаны графики зависимостей угла поворота относительно центра тяжести аппарата при $c_0 = 5 \cdot 10^6$ Н·м ($\vartheta_c(t_3) = 0.044$ рад), $c_0 = 1 \cdot 10^6$ Н·м ($\vartheta_c(t_3) = -2.248 \cdot 10^{-3}$ рад) и $c_0 = 25 \cdot 10^6$ Н·м ($\vartheta_c(t_3) = 0.065$ рад). Жесткость опорной пружины c_0 существенно влияет на угол ϑ_c , изменяя характер схода аппарата с балки. При малых c_0 , так же как при малых скоростях движения, аппарат может начать «сваливаться».

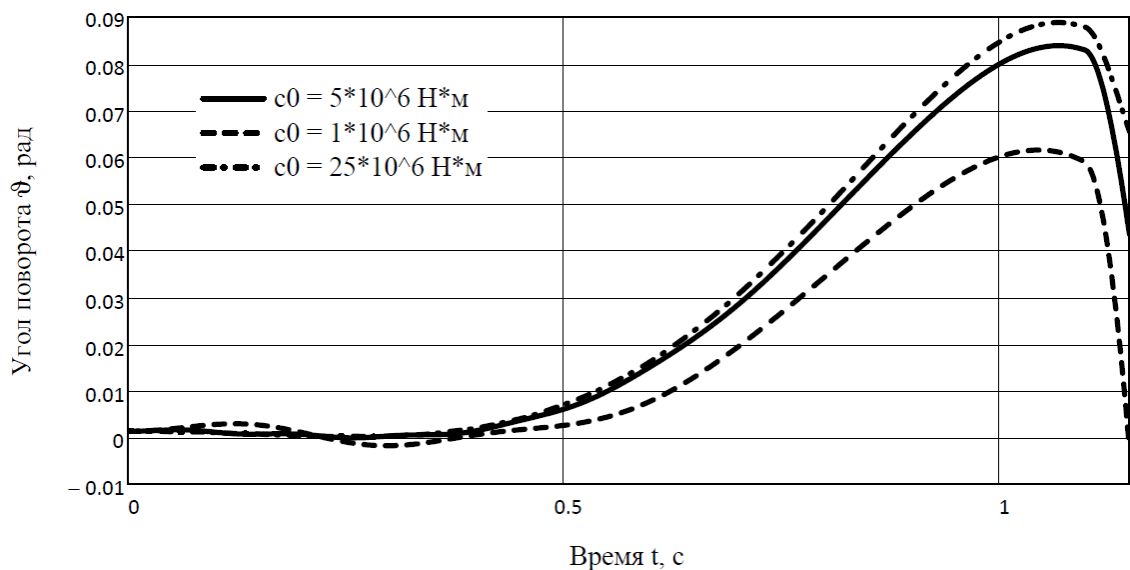


Рис. 46. Сравнение угла поворота относительно центра тяжести аппарата

Таким образом, было показано, что характер схода аппарата и его кинематические параметры зависят от многих величин. При решении задач о динамике свободного полета аппарата после его схода необходимо учитывать данные результаты. Корректировка данных может быть осуществлена изменением начальной кривизны балки или изменением инерционных и жесткостных параметров упругой направляющей.

3. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА НА ДВУХ КОЛЕСАХ ПО ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

В различных отраслях современного транспортного машиностроения и строительных сооружениях возникают задачи о движении тел на колесах или роликах, например, движение транспортных средств по неровной дороге [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33], взлет самолетов с палубного трамплина [8, 9], движение тележек по криволинейным поверхностям (направляющим) в сооружениях типа «катальная гора» [16, 17, 19] и др. Большинство из этих задач рассматриваются в предположении, что радиусы кривизны траектории движения тела малы, то есть расстояние по кривой между точками контакта колес практически равно колесной базе тела. В случае катальных гор и других подобных аттракционов обычно радиусы кривизны изменяются в широком диапазоне и подобный подход не применим для определения кинематических и силовых параметров движения. В этих случаях задача существенно усложняется и становится кинематически и динамически нелинейной. В данной главе рассматривается нестационарное движение твердого тела на двух колесах (роликах) по плоской кривой.

Задача решена в двух постановках. В первой постановке рассматривается кинематическая задача о движении тела по плоской кривой. Во второй постановке учитывается наличие упругости колес и подвески, то есть рассматривается колебательный процесс движения тела по плоской кривой.

Результаты исследований по данной главе опубликованы в [46, 47, 48].

3.1. Движение тела на двух колесах по плоской кривой в кинематической постановке

Задача по определению кинематических и динамических характеристик движения плоской двухколесной тележки по заданной неподвижной криволинейной направляющей произвольной формы решается при следующих предположениях: 1) корпус тележки и колеса являются абсолютно твердыми

телами; 2) массой колес можно пренебречь (колеса невесомые); 3) оси вращения колес жестко прикреплены к корпусу (нет подвески); 4) колеса катятся без проскальзывания и сила трения отсутствует; 5) заднее колесо является ведущим, а переднее – ведомым, радиусы колес считаются одинаковыми.

Плоская кривая, по которой движется твердое тело на двух колесах, в декартовой системе координат задается в виде $y = y(x)$ или в параметрическом виде в зависимости от длины дуги s :

$$x = x(s); \quad y = y(s).$$

Скорость движения контактной точки заднего ведущего колеса вдоль кривой считается известной, а тангенциальная реакция (движущая сила) $R_{A,\tau}(t)$ – неизвестной (рис. 47). После определения реакции $R_{A,\tau}$ можно определить крутящий момент на ведущем колесе по формуле: $M = R_{A,\tau}r$, где r – радиус колеса. Тангенциальная реакция ведомого колеса $R_{B,\tau} = 0$, так как считается, что трение между колесами и кривой отсутствует.

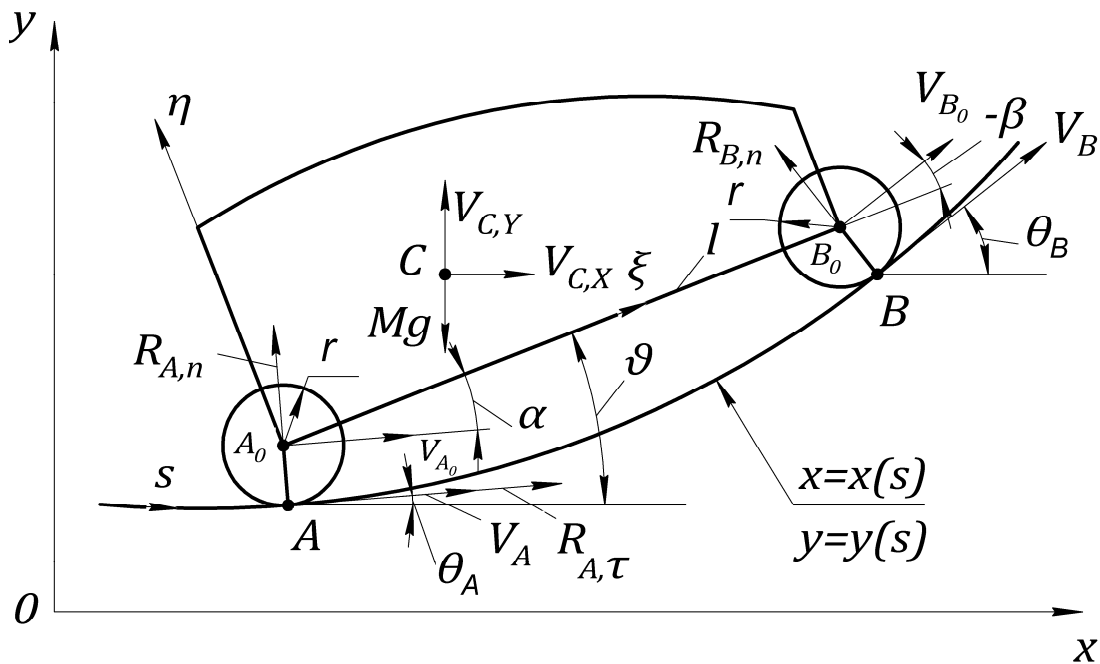


Рис. 47. Геометрические и кинематические параметры движения тела

Вычисляем все кинематические и геометрические параметры точки A при условии, что $s_A = s_0$ в момент времени $t = 0$:

$$\dot{V}_A = \frac{dV_A}{dt}; \quad s_A = s_0 + \int_0^t V_A(\tau) d\tau; \quad x_A = x(s_A); \quad y_A = y(s_A),$$

здесь $V_A(t)$ – скорость движения в точке A .

Составляя кинематические соотношения для движения точки по плоской кривой учитываем, что [49, 50, 51, 52, 53]:

$$\frac{ds}{dt} = V; \quad \frac{d(*)}{dt} = \frac{d(*)}{ds} \frac{ds}{dt} = V \frac{d(*)}{ds}.$$

Угол наклона касательной к кривой в точке A и его первая производная с учетом соотношений [54, 55, 56]

$$\frac{dy}{ds} = \sin(\theta); \quad \frac{dx}{ds} = \cos(\theta)$$

определяется как

$$\theta_A = \arcsin\left(\frac{dy}{ds}\Big|_{s=s_A}\right); \quad \dot{\theta}_A = -\frac{1}{\sin(\theta_A)} V_A \frac{d^2x}{ds^2}\Big|_{s=s_A}.$$

Координаты и скорость центра заднего колеса A_0 (рис. 47):

$$x_{A_0} = x_A - r \sin(\theta_A); \quad y_{A_0} = y_A + r \cos(\theta_A); \quad V_{A_0} = V_A - r \dot{\theta}_A.$$

При необходимости, функцию $x_{A_0}(s)$ и $y_{A_0}(s)$ можно задать в виде эквидистанты к заданной кривой $x = x(s)$, $y = y(s)$ [54, 55, 56]:

$$x_{A_0}(s) = x_A(s) - \frac{ry'_A(s)}{\sqrt{(x'_A(s))^2 + (y'_A(s))^2}}; \quad y_{A_0}(s) = y_A(s) + \frac{rx'_A(s)}{\sqrt{(x'_A(s))^2 + (y'_A(s))^2}}.$$

Для нахождения координаты s_B точки контакта B переднего колеса будем использовать соотношение, получающееся из условия неизменяемости длины «колесной базы» тела $A_0B_0 = l$:

$$l^2 = (x_{B_0} - x_{A_0})^2 + (y_{B_0} - y_{A_0})^2, \quad (7)$$

где выражения для неизвестных координат x_{B_0} и y_{B_0} записываются аналогично выражениям для x_{A_0} и y_{A_0} :

$$x_{B_0} = x(s_B) - r \left. \frac{dy}{ds} \right|_{s=s_B}; \quad y_{B_0} = y(s_B) + r \left. \frac{dx}{ds} \right|_{s=s_B}.$$

Уравнение (7) решается численно в текущий момент времени (при условии $s_B - s_A \geq l$) и по полученному значению s_B находятся остальные кинематические и геометрические параметры точки B :

$$x_B = x(s_B); \quad y_B = y(s_B); \quad \theta_B = \arcsin \left(\left. \frac{dy}{ds} \right|_{s=s_B} \right).$$

Угол поворота твердого тела относительно оси OX определяется из соотношения:

$$\mathcal{G} = \arcsin \left(\frac{y_{B_0} - y_{A_0}}{l} \right).$$

Зная угол \mathcal{G} , можно найти углы α и β (рис. 47):

$$\alpha = \mathcal{G} - \theta_A; \quad \beta = \mathcal{G} - \theta_B.$$

Для вычисления скорости точки B_0 используются геометрические условия

$$l \cos(\mathcal{G}) = x_{B_0} - x_{A_0}; \quad l \sin(\mathcal{G}) = y_{B_0} - y_{A_0}.$$

Продифференцировав их по времени и последовательно исключая неизвестные величины, находим V_{B_0} и $\dot{\mathcal{G}}$:

$$V_{B_0} = V_{A_0} \frac{\cos(\theta_A - \mathcal{G})}{\cos(\theta_B - \mathcal{G})} = V_{A_0} \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)},$$

$$\dot{\mathcal{G}} = \frac{V_{A_0}}{l} \frac{\sin(\theta_B - \theta_A)}{\cos(\theta_B - \mathcal{G})} = \frac{V_{A_0}}{l} \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\beta)}.$$

Скорость V_B и значение $\dot{\theta}_B$ связаны следующими соотношениями, аналогичными выражениями для V_A и $\dot{\theta}_A$:

$$V_B = V_{B_0} + r\dot{\theta}_B; \quad \dot{\theta}_B = -\frac{1}{\sin(\theta_B)} V_B \left. \frac{d^2 x}{ds^2} \right|_{s=s_B}.$$

Откуда находим:

$$V_B = \frac{V_{B_0}}{1 + \frac{r}{\sin(\theta_B)} \left[\left. \frac{d^2 x}{ds^2} \right|_{s=s_B} \right]}; \quad \dot{\theta}_B = \frac{V_B - V_{B_0}}{r}.$$

Угловые скорости вращения колес:

$$\omega_A = \frac{V_A}{r}; \quad \omega_B = \frac{V_B}{r}.$$

Угловое ускорение тела:

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} &= \frac{d\dot{\vartheta}}{dt} = \\ &= \frac{\dot{V}_{A_0}}{l} \frac{\sin(\theta_B - \theta_A)}{\cos(\theta_B - \vartheta)} + \frac{V_{A_0}}{l} (\dot{\theta}_B - \dot{\theta}_A) \frac{\cos(\theta_B - \theta_A)}{\cos(\theta_B - \vartheta)} + \dot{\vartheta} (\dot{\theta}_B - \dot{\vartheta}) \operatorname{tg}(\theta_B - \vartheta), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \dot{V}_{A_0} &= \dot{V}_A - r\ddot{\theta}_A; \\ \ddot{\theta}_A &= \frac{d\dot{\theta}_A}{dt} = \\ &= -\sin^{-2}(\theta_A) \left[V_A^2 \left(\left. \frac{d^3 x}{ds^3} \right|_{s=s_A} \right) \sin(\theta_A) + \left(\left. \frac{d^2 x}{ds^2} \right|_{s=s_A} \right) (\dot{V}_A \sin(\theta_A) - V_A \dot{\theta}_A \cos(\theta_A)) \right]. \end{aligned}$$

Неизвестные координаты центра тяжести тела x_C и y_C в неподвижной системе координат (рис. 47) вычисляются через их известные значения ξ_C и η_C в подвижной (связанной с телом) системе координат:

$$x_C = x_{A_0} + \xi_C \cos(\vartheta) - \eta_C \sin(\vartheta); \quad y_C = y_{A_0} + \xi_C \sin(\vartheta) + \eta_C \cos(\vartheta).$$

Проекции скорости центра тяжести тела $V_{C,X}$ и $V_{C,Y}$ на оси OX и OY определяются по следующим формулам:

$$V_{C,X} = V_{A_0,X} - \dot{\vartheta}(y_C - y_{A_0}); \quad V_{C,Y} = V_{A_0,Y} + \dot{\vartheta}(x_C - x_{A_0}),$$

где

$$V_{A_0,X} = \dot{x}_{A_0} = V_{A_0} \cos(\theta_A); \quad V_{A_0,Y} = \dot{y}_{A_0} = V_{A_0} \sin(\theta_A).$$

Скорость центра тяжести V_C :

$$V_C = \sqrt{V_{C,X}^2 + V_{C,Y}^2}.$$

Ускорения центра тяжести тела в проекциях на оси OX и OY вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{C,X} &= \dot{V}_{A_0,X} - \ddot{\theta}(y_C - y_{A_0}) - \dot{\theta}(\dot{y}_C - \dot{y}_{A_0}), \\ \dot{V}_{C,Y} &= \dot{V}_{A_0,Y} + \ddot{\theta}(x_C - x_{A_0}) + \dot{\theta}(\dot{x}_C - \dot{x}_{A_0}), \end{aligned}$$

где с учетом выражений для $V_{A_0,X}$ и $V_{A_0,Y}$:

$$\dot{V}_{A_0,X} = \ddot{x}_{A_0} = \dot{V}_{A_0} \cos(\theta_A) + V_{A_0}^2 \left. \frac{d^2 x}{ds^2} \right|_{s=s_A};$$

$$\dot{V}_{A_0,Y} = \ddot{y}_{A_0} = \dot{V}_{A_0} \sin(\theta_A) + V_{A_0}^2 \left. \frac{d^2 y}{ds^2} \right|_{s=s_A};$$

$$\dot{x}_C = V_{C,X}; \quad \dot{y}_C = V_{C,Y}.$$

Реакции в точках A и B со стороны тела на кривую, по которой оно движется, определяются из системы уравнений движения с учетом силы тяжести (рис. 47):

$$\begin{cases} M\dot{V}_{C,X} = R_{A,\tau} \cos(\theta_A) - R_{A,n} \sin(\theta_A) - R_{B,n} \sin(\theta_B); \\ M\dot{V}_{C,Y} = R_{A,\tau} \sin(\theta_A) + R_{A,n} \cos(\theta_A) + R_{B,n} \cos(\theta_B) + Mg; \\ J_C \ddot{\theta} = R_{A,\tau} (r + \xi_C \sin(\alpha) + \eta_C \cos(\alpha)) - R_{A,n} (\xi_C \cos(\alpha) - \eta_C \sin(\alpha)) + \\ \quad + R_{B,n} [(l - \xi_C) \cos(\beta) + \eta_C \sin(\beta)], \end{cases} \quad (8)$$

где M и J_C – масса и момент инерции тела, g – ускорение свободного падения.

Перегрузки по осям OX и OY находятся из соотношений:

$$n_x = \frac{\dot{V}_{C,X}}{g}; \quad n_y = \frac{\dot{V}_{C,Y}}{g}.$$

На основе полученных результатов для определения кинематических, геометрических, инерционных и динамических параметров движения твердого тела по плоской кривой, был составлен алгоритм расчета для последовательного нахождения необходимых величин по времени движения с заданным шагом.

В качестве тестовой задачи для проверки численного алгоритма решена задача о движении тела по дуге окружности, для которой можно получить точное аналитическое решение. В качестве кривой выбрана полуокружность радиусом $R = 50$ м; влияние гравитации не учитывалось ($g = 0$). Рассмотрены два расчетных случая:

1) $V_A = 2$ м/с, $l = 1.5$ м, $\xi_C = 0.3$ м, $\eta_C = 0.5$ м, $M = 500$ кг, $J_C = 250$ кг·м², $r = 0.2$ м. При этом движение тела по траектории со временем $t_k = 78.382$ с исследовалось с шагом $\Delta t = 0.5$ с;

2) $V_A = 5$ м/с, $l = 1.5$ м, $\xi_C = 0.3$ м, $\eta_C = 0.5$ м, $M = 500$ кг, $J_C = 250$ кг·м², $r = 0$. При этом движение тела по траектории со временем $t_k = 31.353$ с исследовалось с шагом $\Delta t = 0.1$ с.

Для оценки точности численного решения были использованы несколько критериев:

а) При движении тела по дуге окружности любая его точка движется с постоянной угловой скоростью ω . Для первого случая были вычислены угловые скорости движения пяти точек – центров колес A_0 и B_0 , точек контакта A и B и центра тяжести C . Для второго случая угловая скорость определялась для трех точек – точек контакта A и B и центра тяжести C . Угловые скорости как в первом, так и во втором, случаях получились постоянными с точностью до 3-х значащих цифр. Для первого случая угловая скорость $\omega = 0.04$ рад/с, для второго – $\omega = 0.1$ рад/с;

б) Полная энергия тела $E = \frac{1}{2}MV_C^2 + \frac{1}{2}J_C\dot{\vartheta}^2$ на исследуемых временных интервалах в обоих случаях оставалась постоянной с точностью до 3-х значащих

цифр. Для первого расчетного случая полная энергия тела $E = 972.2$ Дж, для второго – $E = 6.126 \cdot 10^3$ Дж;

в) При движении тела центр его колеса движется по кривой, весьма близкой к окружности радиуса $R - r$ (точное решение). Сопоставление полученной траектории с точным значением может судить о правильности численного алгоритма;

г) Полученные численные значения контактных реакций колес с точностью до 3-х значащих цифр совпадают с результатами точного решения.

Таким образом, подтверждается достоверность формул и численных результатов решения рассматриваемой задачи.

Рассмотрим пример расчета – задачу о движении твердого тела по траектории, в качестве которой выбрана кривая, состоящая из горизонтального участка 1 длиной 5 м и четырех гладко сопряженных окружностей 2 – 5, координаты центров и радиусов которых в метрах, соответственно – $x_2 = 5$, $y_2 = 5$, $R_2 = 15$, $x_3 = 26.9$, $y_3 = 14$, $R_3 = 10$, $x_4 = 43.1$, $y_4 = 6.2$, $R_4 = 10$, $x_5 = 65.8$, $y_5 = 16.7$, $R_5 = 15$ (рис. 48). Исходные данные: $V_A = 2.5$ м/с, $l = 1.5$ м, $\xi_C = 0.3$ м, $\eta_C = 0.5$ м, $M = 500$ кг, $J_C = 250$ кг·м². Полное время движения тела с постоянной скоростью V_A по этой кривой равно $t_k = 34.040$ с. Расчеты выполнялись с шагом $\Delta t = 1/3$ с.

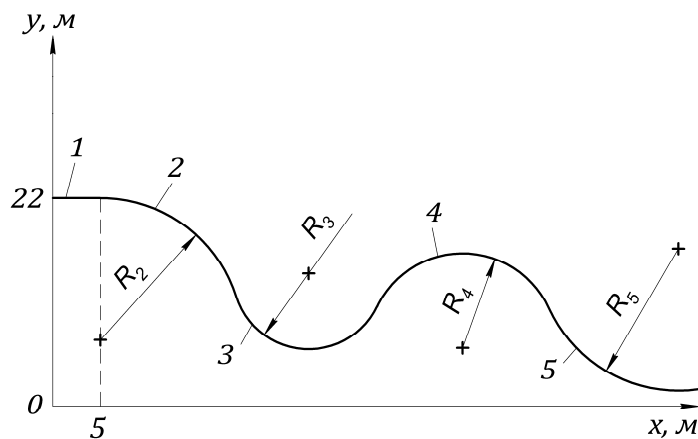


Рис. 48. Траектория движения тела

Сравним и проанализируем, как влияет радиус колеса на параметры движения тела. Для этого рассмотрим три варианта задачи: 1) $r = 0.2$ м; 2) $r = 0.1$ м; 3) $r = 0$. В первом и втором варианте была проведена дополнительная геометрическая проверка решения по точности определения траектории движения центров колес A_0 и B_0 и сравнению ее с эквидистантой к исходной кривой, которые практически совпали.

Графики зависимостей изменения угла поворота тела ϑ приведены на рис. 49. Значения угла при вариации радиуса колеса отличаются только в 3–4-ом знаке после запятой, что показано в табл. 9.

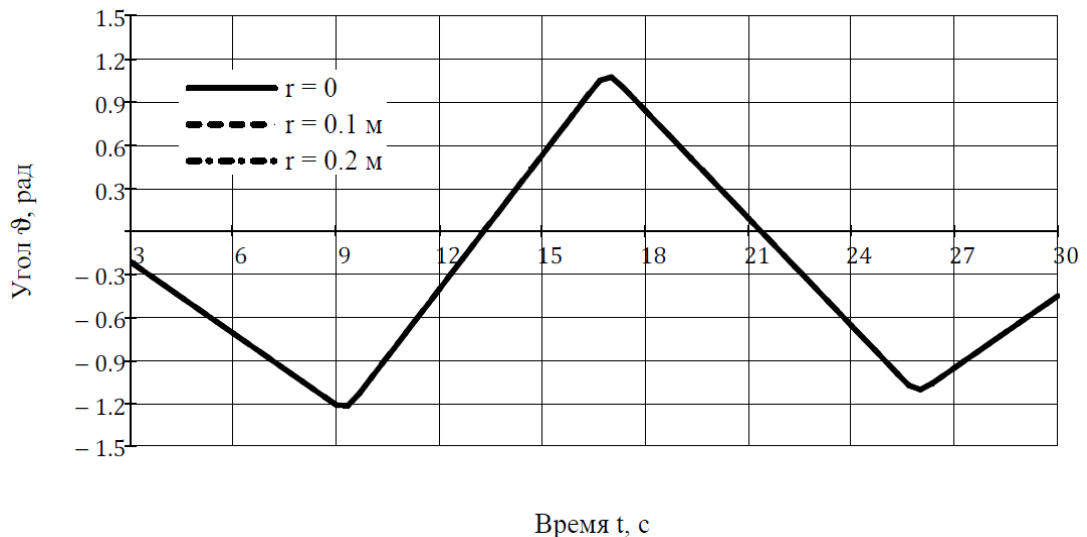


Рис. 49. Сравнение по углу поворота тела

Результаты расчета для первой производной по времени от угла ϑ также приведены в табл. 9. Значения отличаются в 3–4-ом знаке после запятой. Наиболее существенные различия в значении второй производной по времени. Они могут отличаться на 10 – 20 % (табл. 9). На рис. 50 представлены графики изменения второй производной от угла ϑ для интервала времени $8.6 \leq t \leq 9.7$ с.

Табл. 9. Угол поворота тела ϑ и его первая и вторая производная по времени

		$t = 6$ с	$t = 10$ с	$t = 14$ с
ϑ , рад	$r = 0$	-0.717	-1.029	0.221
	$r = 0.1$ м	-0.716	-1.028	0.222
	$r = 0.2$ м	-0.716	-1.027	0.223
$\dot{\vartheta}$, рад/с	$r = 0$	-0.167	0.313	0.313
	$r = 0.1$ м	-0.167	0.313	0.313
	$r = 0.2$ м	-0.167	0.313	0.313
$\ddot{\vartheta}$, рад/с ²	$r = 0$	$6.125 \cdot 10^{-7}$	$1.839 \cdot 10^{-5}$	$-1.931 \cdot 10^{-4}$
	$r = 0.1$ м	$-1.208 \cdot 10^{-6}$	$2.269 \cdot 10^{-5}$	$-1.805 \cdot 10^{-4}$
	$r = 0.2$ м	$-1.214 \cdot 10^{-6}$	$2.692 \cdot 10^{-5}$	$-1.675 \cdot 10^{-4}$

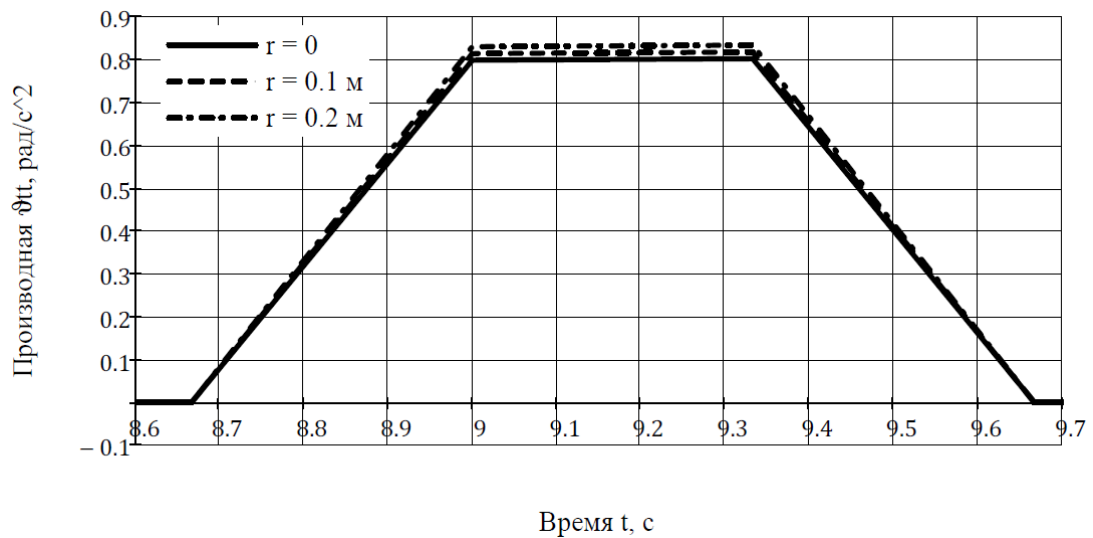


Рис. 50. Сравнение по второй производной по времени от угла поворота тела

На рис. 51 приведено сравнение траекторий движения центра тяжести тела $y_C(x_C)$ на одном из участков движения.

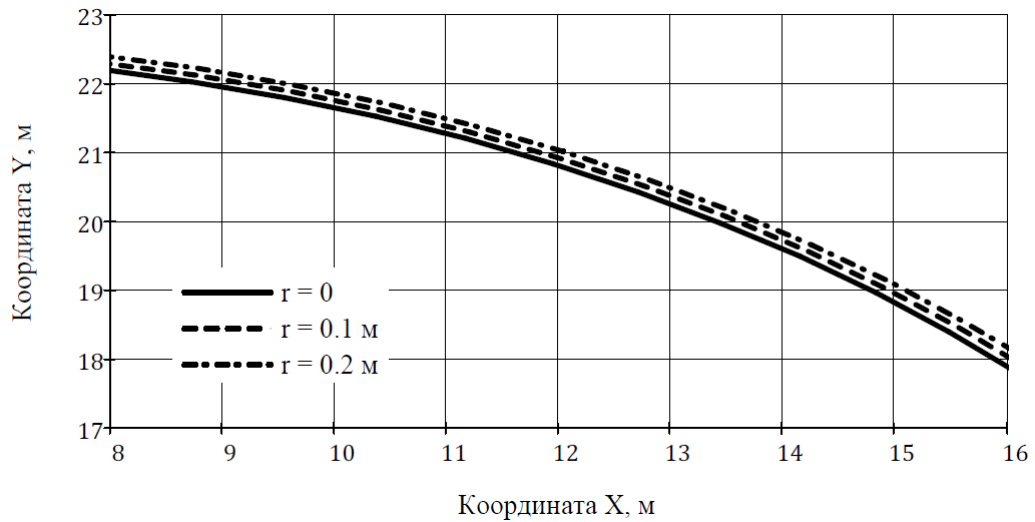


Рис. 51. Сравнение по траектории движения центра тяжести

Сравнение решений по проекции скорости центра тяжести тела C на ось OX приведено на рис. 52, по проекции скорости центра тяжести тела C на ось OY приведено на рис. 53, по скорости центра тяжести тела C — на рис. 54. Результаты расчета для разных моментов времени приведены в табл. 10. Значения $V_{C,X}$ могут отличаться во 2-ом знаке после запятой, то есть примерно на 1 – 2 %. Тот же самый вывод можно сделать при сравнении проекций скорости центра тяжести на ось OY . Скорость центра тяжести может отличаться на 2 – 5 %.

Табл. 10. Скорости $V_{C,X}$, $V_{C,Y}$ и V_C

		$t = 6 \text{ с}$	$t = 10 \text{ с}$	$t = 14 \text{ с}$
$V_{C,X}, \text{ м/с}$	$r = 0$	1.995	1.080	2.307
	$r = 0.1 \text{ м}$	2.008	1.066	2.276
	$r = 0.2 \text{ м}$	2.021	1.052	2.245
$V_{C,Y}, \text{ м/с}$	$r = 0$	-1.638	-2.072	0.373
	$r = 0.1 \text{ м}$	-1.649	-2.044	0.369
	$r = 0.2 \text{ м}$	-1.659	-2.016	0.365
$V_C, \text{ м/с}$	$r = 0$	2.581	2.336	2.337
	$r = 0.1 \text{ м}$	2.598	2.305	2.306
	$r = 0.2 \text{ м}$	2.615	2.274	2.274

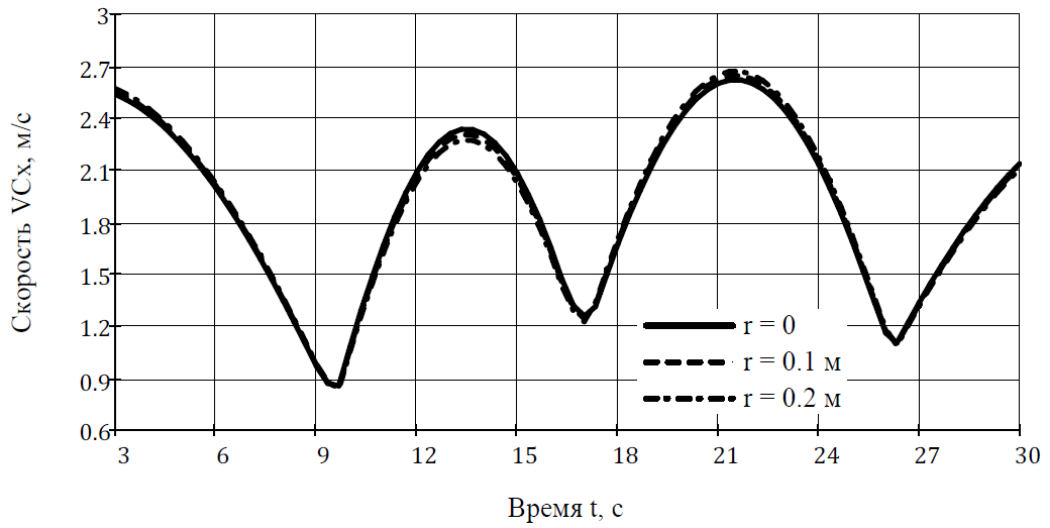
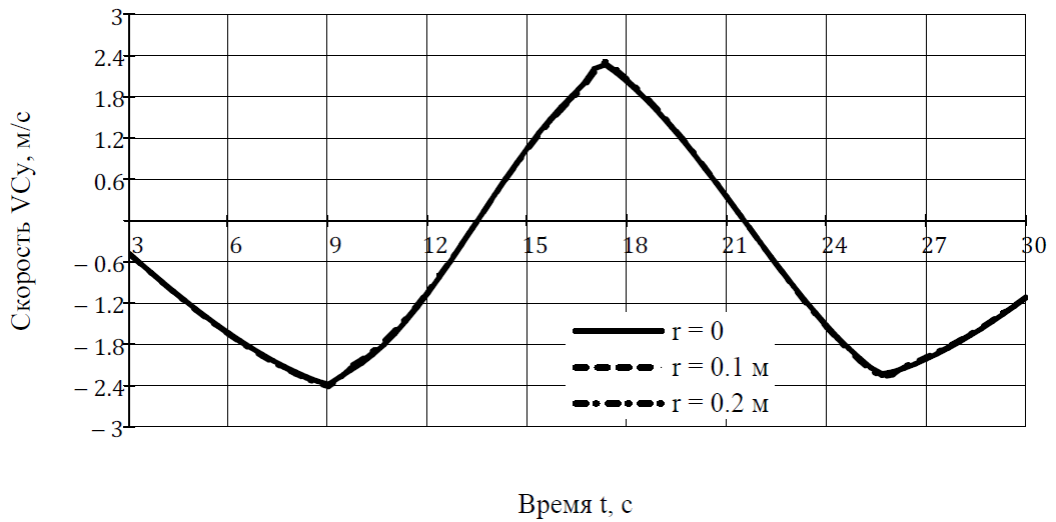
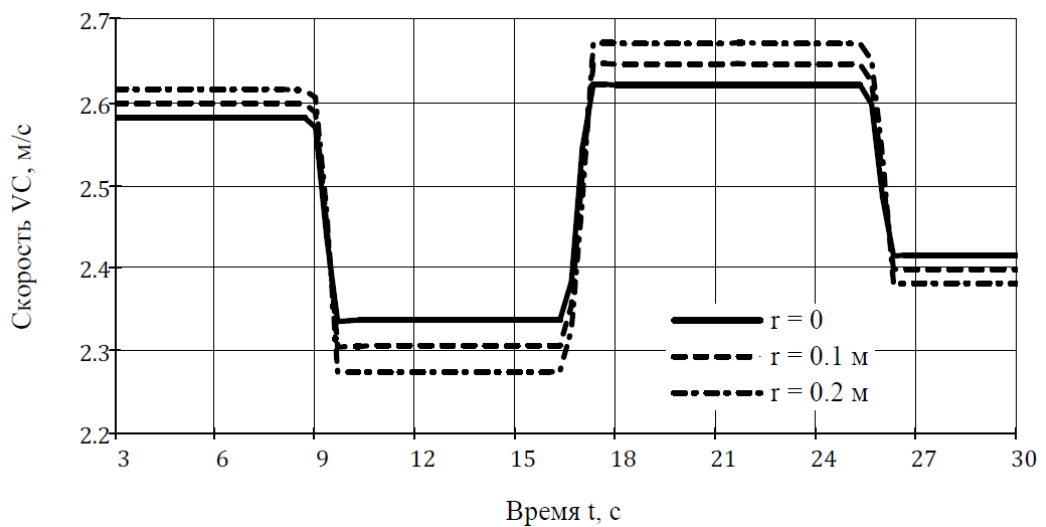
Рис. 52. Сравнение по проекции скорости центра тяжести на ось OX Рис. 53. Сравнение по проекции скорости центра тяжести на ось OY 

Рис. 54. Сравнение по скорости центра тяжести

Самые существенные различия проявляются при вычислении реакций $R_{A,n}$, $R_{B,n}$ (рис. 55, рис. 56 и рис. 57 соответственно). Нормальные составляющие реакций при вариации радиуса колеса могут отличаться на 20 – 70 %, что указывает на то, что при определении нагрузок на сооружение следует учитывать радиус колес тележек. Тангенциальные составляющие реакции $R_{A,\tau}$ отличаются в 2-ом знаке. Результаты расчета реакций в различные моменты времени представлены в табл. 11.

Табл. 11. Реакции $R_{A,\tau}$, $R_{A,n}$ и $R_{B,n}$

		$t = 6 \text{ с}$	$t = 10 \text{ с}$	$t = 14 \text{ с}$
$R_{A,\tau}, \text{ Н}$	$r = 0$	$3.214 \cdot 10^3$	$4.065 \cdot 10^3$	-732.7
	$r = 0.1 \text{ м}$	$3.234 \cdot 10^3$	$4.010 \cdot 10^3$	-724.5
	$r = 0.2 \text{ м}$	$3.255 \cdot 10^3$	$3.954 \cdot 10^3$	-716.3
$R_{A,n}, \text{ Н}$	$r = 0$	$-2.218 \cdot 10^3$	63.1	$-3.974 \cdot 10^3$
	$r = 0.1 \text{ м}$	$-2.005 \cdot 10^3$	321.7	$-4.028 \cdot 10^3$
	$r = 0.2 \text{ м}$	$-1.788 \cdot 10^3$	573.2	$-4.080 \cdot 10^3$
$R_{B,n}, \text{ Н}$	$r = 0$	$-1.862 \cdot 10^3$	$-1.850 \cdot 10^3$	-536.0
	$r = 0.1 \text{ м}$	$-2.077 \cdot 10^3$	$-2.119 \cdot 10^3$	-486.4
	$r = 0.2 \text{ м}$	$-2.296 \cdot 10^3$	$-2.381 \cdot 10^3$	-437.9

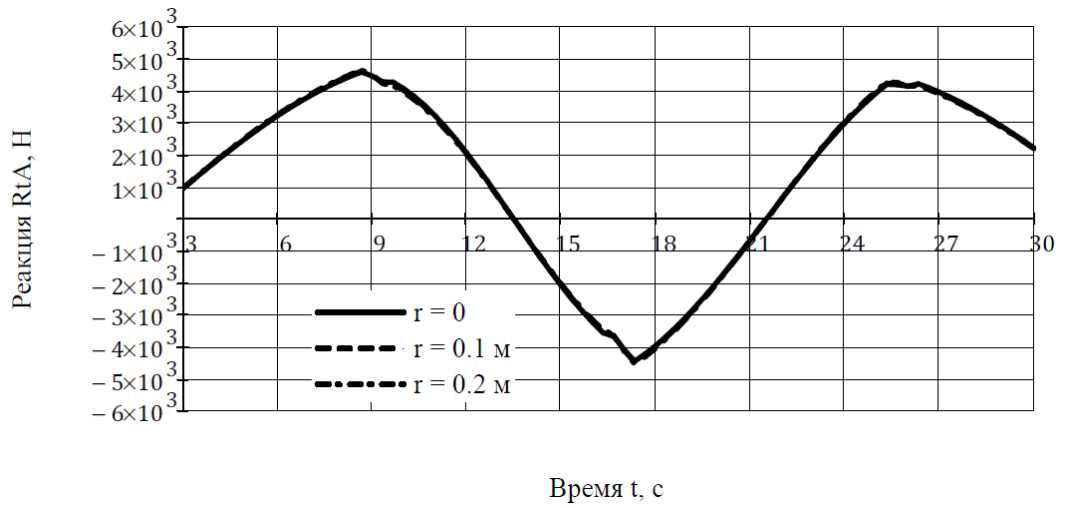


Рис. 55. Сравнение по тангенциальной реакции в точке А

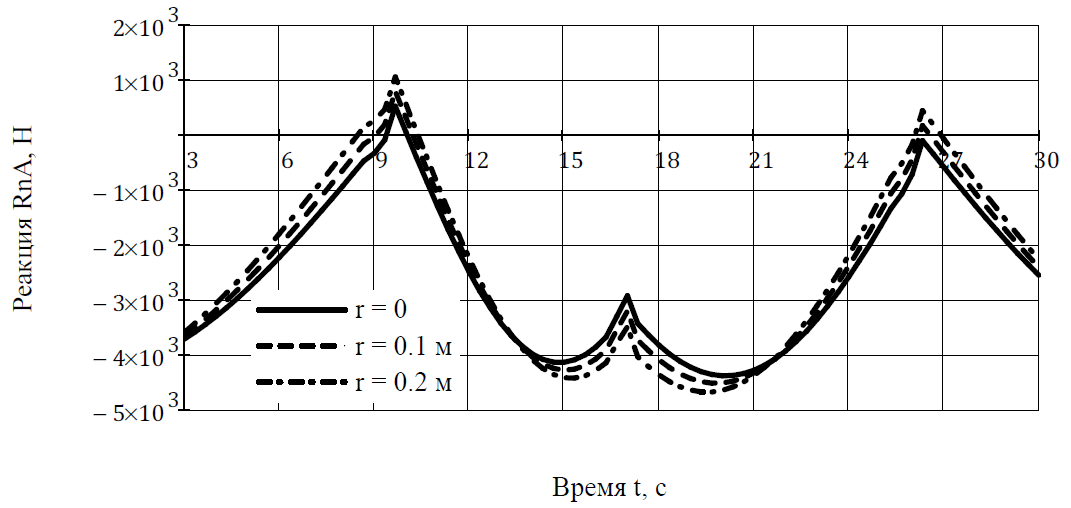


Рис. 56. Сравнение по нормальной реакции в точке А

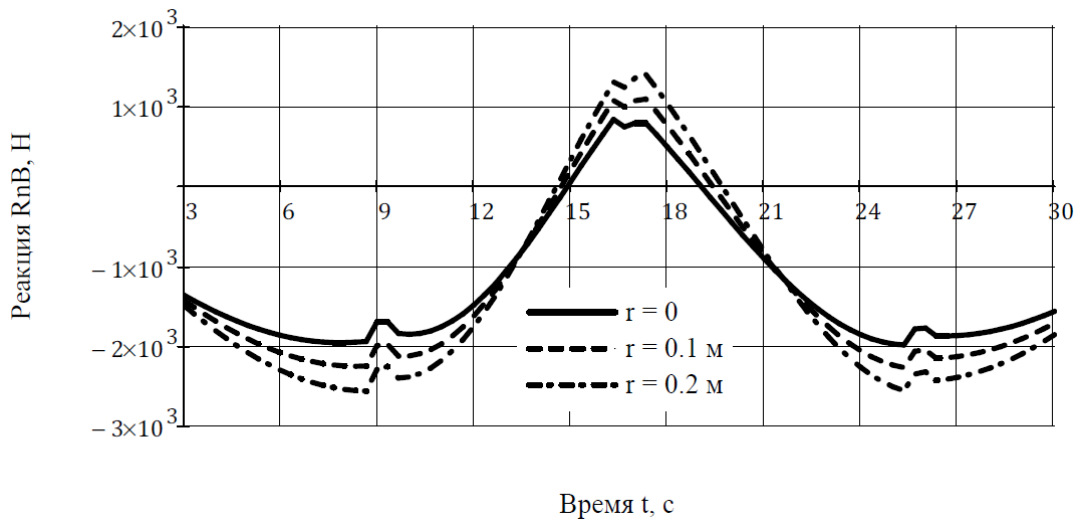


Рис. 57. Сравнение по нормальной реакции в точке В

Следует отметить, что значения перегрузок по осям OX и OY при различных значениях радиуса колеса отличаются не более чем на 5 – 7 %.

Таким образом, при определении кинематических и геометрических параметров движения тела, малыми радиусами колес (роликами) можно пренебрегать в пределах погрешностей 5 – 7 %, но при определении нагрузок их размеры следует учитывать.

Сформулированный алгоритм позволяет определять все необходимые параметры плоского движения тела (тележки на роликах) по криволинейной траектории.

3.2. Движение тела на двух колесах по плоской кривой с учетом упругости шин и подвески

Задача решается при следующих предположениях: 1) корпус тележки является абсолютно твердым телом; 2) колеса и подвеска имеют нелинейно упругие характеристики; 3) массой колес можно пренебречь (колеса невесомые); 4) колеса катятся без проскальзывания и сила трения отсутствует; 5) заднее колесо является ведущим, а переднее – ведомым.

В качестве неизвестных принимаются 4 обобщенные координаты $q_1 \dots q_4$ (рис. 58): q_1, q_2 – характеризуют упругость колес (поджатие шин), q_3, q_4 – характеризуют упругость амортизаторов колес (ход подвески). При решении задачи было принято допущение, что обобщенные координаты $q_1 \dots q_4$ являются малыми величинами по сравнению с линейными размерами тела и выполняются следующие соотношения ($i = 1 \dots 4$):

$$q_i \ll \dot{q}_i; \quad q_i \ll \ddot{q}_i,$$

где точками обозначены производные по времени. Линеаризация задачи была проведена после получения общих уравнений.

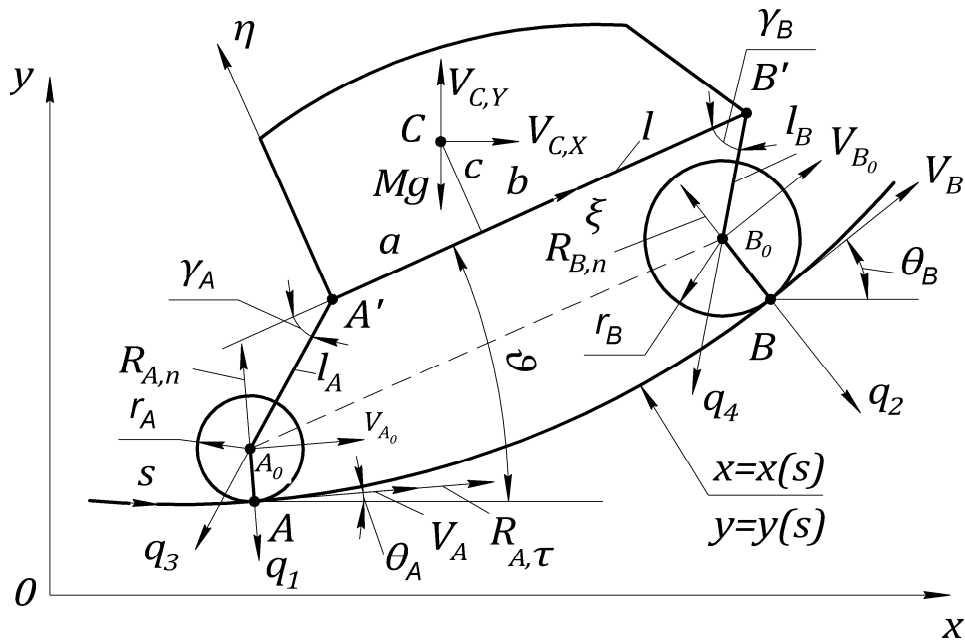


Рис. 58. Геометрические и кинематические параметры движения тела

Исходные данные для задачи:

1) задано уравнение плоской кривой, являющейся траекторией движения тела, в декартовой системе координат или в естественной системе координат (в параметрическом виде) в зависимости от длины дуги s :

$$y = y(x) \rightarrow x = x(s); \quad y = y(s);$$

2) известна скорость движения контактной точки заднего ведущего колеса вдоль кривой – $V_A(t)$, а тангенциальная реакция (движущая сила) $R_{A,\tau}(t)$ считается неизвестной (рис. 58). После определения реакции $R_{A,\tau}$ можно определить крутящий момент на ведущем колесе по формуле: $M = R_{A,\tau}r_A$, где r_A – радиус ведущего колеса. Тангенциальная реакция ведомого колеса $R_{B,\tau} = 0$, так как трение между колесами и кривой отсутствует;

3) все геометрические (линейные и угловые) параметры представлены на рис. 58;

4) m – масса тела, J_C – момент инерции относительно центра тяжести C ;

5) заданы коэффициенты жесткости колес (для ведущего колеса – c_1, c_2 , для ведомого колеса – c_3, c_4) и подвески (для подвески ведущего колеса – c_5, c_6 , для

подвески ведомого колеса – c_7, c_8), а также коэффициенты демпфирования в подвеске $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ для ведущего и ведомого колеса соответственно.

Найдем все кинематические и геометрические параметры точки A при условии, что естественная координата $s_A = s_0$ в момент времени $t = 0$:

$$\dot{V}_A = \frac{dV_A}{dt}; \quad s_A = s_0 + \int_0^t V_A(\tau) d\tau; \quad x_A = x(s_A); \quad y_A = y(s_A); \quad \omega_A = \frac{V_A}{r_A}.$$

При составлении кинематических соотношений для движения точки по плоской кривой необходимо учитывать следующие соотношения [49, 50, 51, 52, 53]:

$$\frac{ds}{dt} = V; \quad \frac{d(*)}{dt} = \frac{d(*)}{ds} \frac{ds}{dt} = V \frac{d(*)}{ds}.$$

Угол наклона касательной к кривой в точке A , его первая и вторая производная с учетом соотношений [54, 55, 56]

$$\frac{dy}{ds} = \sin(\theta); \quad \frac{dx}{ds} = \cos(\theta)$$

определяются по формулам:

$$\theta_A = \arcsin\left(\frac{dy}{ds}\Big|_{s=s_A}\right); \quad \dot{\theta}_A = \frac{1}{\cos(\theta_A)} V_A \frac{d^2 y}{ds^2}\Big|_{s=s_A};$$

$$\ddot{\theta}_A = \frac{1}{\cos^2(\theta_A)} \left[V_A^2 \left(\frac{d^3 y}{ds^3}\Big|_{s=s_A} \right) \cos(\theta_A) + \left(\frac{d^2 y}{ds^2}\Big|_{s=s_A} \right) \left(\dot{V}_A \cos(\theta_A) + V_A \dot{\theta}_A \sin(\theta_A) \right) \right].$$

При движении по горизонтальной или наклонной прямой, при $\theta_A = 0$ и $\theta_A = const$ соответственно, $\dot{\theta}_A = \ddot{\theta}_A = 0$.

Координаты, скорость и ее первая производная центра ведущего колеса A_0 (см. рис. 58):

$$x_{A_0} = x_A - r_A \sin(\theta_A); \quad y_{A_0} = y_A + r_A \cos(\theta_A);$$

$$V_{A_0} = V_A - r_A \dot{\theta}_A; \quad \dot{V}_{A_0} = \dot{V}_A - r_A \ddot{\theta}_A.$$

Для нахождения координаты s_B точки контакта B ведомого колеса будем использовать соотношение, получающееся из условия неизменяемости длины «базы» тела $A'B' = l$. В системе координат $\xi O \eta$, связанной с телом, квадрат длины отрезка

$$A_0 B_0^2 = (l - l_B \cos(\gamma_B) + l_A \cos(\gamma_A))^2 + (-l_B \sin(\gamma_B) + l_A \sin(\gamma_A))^2,$$

а в системе координат xOy , связанной с траекторией движения, квадрат длины отрезка

$$A_0 B_0^2 = \left(y(s_B) + r_B \frac{dx}{ds} \Big|_{s=s_B} - y_{A_0} \right)^2 + \left(x(s_B) - r_B \frac{dy}{ds} \Big|_{s=s_B} - x_{A_0} \right)^2.$$

Приравнявая правые части полученных выражений, получаем уравнение для нахождения координаты s_B в текущий момент времени (при условии $s_B - s_A \geq l$):

$$\begin{aligned} & (l - l_B \cos(\gamma_B) + l_A \cos(\gamma_A))^2 + (-l_B \sin(\gamma_B) + l_A \sin(\gamma_A))^2 = \\ & = \left(y(s_B) + r_B \frac{dx}{ds} \Big|_{s=s_B} - y_{A_0} \right)^2 + \left(x(s_B) - r_B \frac{dy}{ds} \Big|_{s=s_B} - x_{A_0} \right)^2. \end{aligned}$$

По найденному значению s_B находим кинематические и геометрические параметры точек B и B_0 по аналогии для точек A и A_0 :

$$\begin{aligned} x_B &= x(s_B); \quad y_B = y(s_B); \quad \theta_B = \arcsin \left(\frac{dy}{ds} \Big|_{s=s_B} \right); \\ x_{B_0} &= x_B - r_B \sin(\theta_B); \quad y_{B_0} = y_B + r_B \cos(\theta_B). \end{aligned}$$

Угол поворота твердого тела относительно оси OX определяется из следующего геометрического соотношения:

$$\vartheta = \arcsin \left(\frac{(x_{B_0} - x_{A_0})(l_B \sin(\gamma_B) - l_A \sin(\gamma_A)) - (y_{B_0} - y_{A_0})(l_B \cos(\gamma_B) - l_A \cos(\gamma_A) - l)}{(l_B \cos(\gamma_B) - l_A \cos(\gamma_A) - l)^2 + (l_B \sin(\gamma_B) - l_A \sin(\gamma_A))^2} \right).$$

После нахождения угла ϑ можно определить координаты точек «базы» тела:

$$y_{B'} = y_{B_0} + l_B \sin(\gamma_B + \vartheta); \quad y_{A'} = y_{A_0} + l_A \sin(\gamma_A + \vartheta);$$

$$x_{B'} = x_{B_0} + l_B \cos(\gamma_B + \mathcal{G}); \quad x_{A'} = x_{A_0} + l_A \cos(\gamma_A + \mathcal{G}).$$

Для вычисления скорости точки B_0 , первой и второй производной от угла \mathcal{G} используются геометрические условия:

$$l \cos(\mathcal{G}) = x_{B'} - x_{A'}; \quad l \sin(\mathcal{G}) = y_{B'} - y_{A'}. \quad (9)$$

Продифференцировав выражения (9) по времени и последовательно исключая неизвестные величины, находим V_{B_0} и $\dot{\mathcal{G}}$:

$$\dot{\mathcal{G}} = \frac{V_{A_0} \sin(\theta_B - \theta_A) - \dot{q}_2 + \dot{q}_1 \cos(\theta_A - \theta_B) + \dot{q}_4 \sin(\gamma_B + \mathcal{G} - \theta_B) - \dot{q}_3 \sin(\gamma_A + \mathcal{G} - \theta_B)}{l \cos(\mathcal{G} - \theta_B) - l_B \cos(\gamma_B + \mathcal{G} - \theta_B) + l_A \cos(\gamma_A + \mathcal{G} - \theta_B)};$$

$$V_{B_0} = \frac{1}{l \cos(\mathcal{G} - \theta_B) - l_B \cos(\gamma_B + \mathcal{G} - \theta_B) + l_A \cos(\gamma_A + \mathcal{G} - \theta_B)} \left[V_{A_0} l \cos(\mathcal{G} - \theta_A) - \right. \\ \left. - V_{A_0} l_B \cos(\gamma_B + \mathcal{G} - \theta_A) + V_{A_0} l_A \cos(\gamma_A + \mathcal{G} - \theta_A) + \dot{q}_2 l \sin(\mathcal{G} - \theta_B) - \right. \\ \left. - \dot{q}_2 l_B \sin(\gamma_B + \mathcal{G} - \theta_B) + \dot{q}_2 l_A \sin(\gamma_A + \mathcal{G} - \theta_B) - \dot{q}_1 l \sin(\mathcal{G} - \theta_A) + \right. \\ \left. + \dot{q}_1 l_B \sin(\gamma_B + \mathcal{G} - \theta_A) - \dot{q}_1 l_A \sin(\gamma_A + \mathcal{G} - \theta_A) - \dot{q}_4 l \cos(\gamma_B) + \dot{q}_4 l_B - \right. \\ \left. - \dot{q}_4 l_A \cos(\gamma_B - \gamma_A) + \dot{q}_3 l \cos(\gamma_A) - \dot{q}_3 l_B \cos(\gamma_B - \gamma_A) + \dot{q}_3 l_A \right]$$

Перепишем полученные выражения для V_{B_0} и $\dot{\mathcal{G}}$ в виде:

$$\dot{\mathcal{G}} = A_1 + \gamma_1 \dot{q}_1 + \gamma_2 \dot{q}_2 + \gamma_3 \dot{q}_3 + \gamma_4 \dot{q}_4;$$

$$V_{B_0} = A_3 + \gamma_5 \dot{q}_1 + \gamma_6 \dot{q}_2 + \gamma_7 \dot{q}_3 + \gamma_8 \dot{q}_4.$$

Здесь и далее коэффициенты A_i , γ_i , η_i , δ_i , ρ_i – величины, зависящие от времени и начальных условий задачи и не зависящие от обобщенных координат $q_1 \dots q_4$.

Скорость V_B и значение $\dot{\theta}_B$ связаны следующими соотношениями, аналогичными для V_A и $\dot{\theta}_A$:

$$V_B = V_{B_0} + r_B \dot{\theta}_B; \quad \dot{\theta}_B = \frac{1}{\cos(\theta_B)} V_B \frac{d^2 y}{ds^2} \Big|_{s=s_B},$$

откуда находим:

$$V_B = \frac{V_{B_0} \cos(\theta_B)}{\cos(\theta_B) - r_B \frac{d^2 y}{ds^2} \Big|_{s=s_B}}; \quad \dot{\theta}_B = \frac{V_{B_0} \frac{d^2 y}{ds^2} \Big|_{s=s_B}}{\cos(\theta_B) - r_B \frac{d^2 y}{ds^2} \Big|_{s=s_B}}$$

или

$$V_B = A_5 + \gamma_9 \dot{q}_1 + \gamma_{10} \dot{q}_2 + \gamma_{11} \dot{q}_3 + \gamma_{12} \dot{q}_4;$$

$$\dot{\theta}_B = A_7 + \gamma_{13} \dot{q}_1 + \gamma_{14} \dot{q}_2 + \gamma_{15} \dot{q}_3 + \gamma_{16} \dot{q}_4.$$

Угловая скорость вращения ведомого колеса:

$$\omega_B = \frac{V_B}{r_B} = A_8 + \gamma_{17} \dot{q}_1 + \gamma_{18} \dot{q}_2 + \gamma_{19} \dot{q}_3 + \gamma_{20} \dot{q}_4.$$

При движении по горизонтальной или наклонной прямой, при $\theta_B = 0$ и $\theta_B = const$ соответственно $\dot{\theta}_B = 0$ и $V_{B_0} = V_B$.

Для вычисления углового ускорения $\ddot{\theta}$ необходимо дважды продифференцировать выражения (9):

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{l \cos(\vartheta - \theta_B) - l_B \cos(\gamma_B + \vartheta - \theta_B) + l_A \cos(\gamma_A + \vartheta - \theta_B)} \left[\dot{V}_{A_0} \sin(\theta_B - \theta_A) + \right.$$

$$+ V_{B_0} \dot{\theta}_B - V_{A_0} \dot{\theta}_A \cos(\theta_B - \theta_A) - \ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 \cos(\theta_B - \theta_A) + 2\dot{q}_1 \dot{\theta}_A \sin(\theta_B - \theta_A) +$$

$$+ \ddot{q}_4 \sin(\gamma_B + \vartheta - \theta_B) - \ddot{q}_3 \sin(\gamma_A + \vartheta - \theta_B) + 2\dot{q}_4 \dot{\vartheta} \cos(\gamma_B + \vartheta - \theta_B) -$$

$$- 2\dot{q}_3 \dot{\vartheta} \cos(\gamma_A + \vartheta - \theta_B) - l_B \dot{\vartheta}^2 \sin(\gamma_B + \vartheta - \theta_B) + l_A \dot{\vartheta}^2 \sin(\gamma_A + \vartheta - \theta_B) +$$

$$\left. + \dot{\vartheta}^2 l \sin(\vartheta - \theta_B) \right]$$

После подстановки ранее полученных выражений получаем:

$$\ddot{\theta} = A_{11} + \eta_5 \ddot{q}_1 + \eta_6 \ddot{q}_2 + \eta_7 \ddot{q}_3 + \eta_8 \ddot{q}_4 + \delta_1 \dot{q}_1^2 + \delta_2 \dot{q}_2^2 + \delta_3 \dot{q}_3^2 + \delta_4 \dot{q}_4^2 + \delta_5 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \delta_6 \dot{q}_1 \dot{q}_3 +$$

$$+ \delta_7 \dot{q}_1 \dot{q}_4 + \delta_8 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \delta_9 \dot{q}_2 \dot{q}_4 + \delta_{10} \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \gamma_{25} \dot{q}_1 + \gamma_{26} \dot{q}_2 + \gamma_{27} \dot{q}_3 + \gamma_{28} \dot{q}_4.$$

Неизвестные координаты центра тяжести тела x_C и y_C в неподвижной системе координат (рис. 58) вычисляются следующим образом:

$$x_C = x_{A'} + a \cos(\vartheta) - c \sin(\vartheta); \quad y_C = y_{A'} + a \sin(\vartheta) + c \cos(\vartheta).$$

Проекция скорости центра тяжести тела $V_{C,X}$ и $V_{C,Y}$ на оси OX и OY определяются по следующим формулам:

$$V_{C,X} = V_{A',X} - \dot{\vartheta}(y_C - y_{A'}) = V_{A',X} - \dot{\vartheta}(a \sin(\vartheta) + c \cos(\vartheta));$$

$$V_{C,Y} = V_{A',Y} + \dot{\vartheta}(x_C - x_{A_0}) = V_{A',Y} + \dot{\vartheta}(a \cos(\vartheta) - c \sin(\vartheta)).$$

Здесь

$$V_{A',X} = \dot{x}_{A'} = V_{A_0} \cos(\theta_A) + \dot{q}_1 \sin(\theta_A) + \dot{q}_3 \cos(\gamma_A + \vartheta) - l_A \dot{\vartheta} \sin(\gamma_A + \vartheta);$$

$$V_{A',Y} = \dot{y}_{A'} = V_{A_0} \sin(\theta_A) - \dot{q}_1 \cos(\theta_A) + \dot{q}_3 \sin(\gamma_A + \vartheta) + l_A \dot{\vartheta} \cos(\gamma_A + \vartheta).$$

После подстановки известных величин $V_{C,X}$ и $V_{C,Y}$ записываются в виде:

$$V_{C,X} = A_{17} + \gamma_{43} \dot{q}_1 + \gamma_{44} \dot{q}_2 + \gamma_{45} \dot{q}_3 + \gamma_{46} \dot{q}_4;$$

$$V_{C,Y} = A_{19} + \gamma_{47} \dot{q}_1 + \gamma_{48} \dot{q}_2 + \gamma_{49} \dot{q}_3 + \gamma_{50} \dot{q}_4.$$

Скорость центра тяжести:

$$V_C = \sqrt{V_{C,X}^2 + V_{C,Y}^2}.$$

Ускорения центра тяжести тела в проекциях на оси OX и OY :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{C,X} &= \dot{V}_{A',X} - \ddot{\vartheta}(y_C - y_{A'}) - \dot{\vartheta}(\dot{y}_C - \dot{y}_{A'}) = \\ &= \dot{V}_{A',X} - \ddot{\vartheta}(a \sin(\vartheta) + c \cos(\vartheta)) - \dot{\vartheta}^2(a \cos(\vartheta) - c \sin(\vartheta)); \\ \dot{V}_{C,Y} &= \dot{V}_{A',Y} + \ddot{\vartheta}(x_C - x_{A'}) + \dot{\vartheta}(\dot{x}_C - \dot{x}_{A'}) = \\ &= \dot{V}_{A',Y} + \ddot{\vartheta}(a \cos(\vartheta) - c \sin(\vartheta)) - \dot{\vartheta}^2(a \sin(\vartheta) + c \cos(\vartheta)). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \dot{V}_{A',X} = \ddot{x}_{A'} &= \dot{V}_{A_0} \cos(\theta_A) - V_{A_0} \dot{\theta}_A \sin(\theta_A) + \ddot{q}_1 \sin(\theta_A) + 2\dot{q}_1 \dot{\theta}_A \cos(\theta_A) + \\ &+ \ddot{q}_3 \cos(\gamma_A + \vartheta) - 2\dot{q}_3 \dot{\vartheta} \sin(\gamma_A + \vartheta) - l_A \ddot{\vartheta} \sin(\gamma_A + \vartheta) - l_A \dot{\vartheta}^2 \cos(\gamma_A + \vartheta); \\ \dot{V}_{A',Y} = \ddot{y}_{A'} &= \dot{V}_{A_0} \sin(\theta_A) + V_{A_0} \dot{\theta}_A \cos(\theta_A) - \ddot{q}_1 \cos(\theta_A) + 2\dot{q}_1 \dot{\theta}_A \sin(\theta_A) + \\ &+ \ddot{q}_3 \sin(\gamma_A + \vartheta) + 2\dot{q}_3 \dot{\vartheta} \cos(\gamma_A + \vartheta) + l_A \ddot{\vartheta} \cos(\gamma_A + \vartheta) - l_A \dot{\vartheta}^2 \sin(\gamma_A + \vartheta). \end{aligned}$$

После подстановок и преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{C,X} &= A_{26} + \eta_{21} \ddot{q}_1 + \eta_{22} \ddot{q}_2 + \eta_{23} \ddot{q}_3 + \eta_{24} \ddot{q}_4 + \delta_{31} \dot{q}_1^2 + \delta_{32} \dot{q}_2^2 + \delta_{33} \dot{q}_3^2 + \delta_{34} \dot{q}_4^2 + \delta_{35} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\ &+ \delta_{36} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \delta_{37} \dot{q}_1 \dot{q}_4 + \delta_{38} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \delta_{39} \dot{q}_2 \dot{q}_4 + \delta_{40} \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \gamma_{67} \dot{q}_1 + \gamma_{68} \dot{q}_2 + \gamma_{69} \dot{q}_3 + \gamma_{70} \dot{q}_4; \\ \dot{V}_{C,Y} &= A_{29} + \eta_{25} \ddot{q}_1 + \eta_{26} \ddot{q}_2 + \eta_{27} \ddot{q}_3 + \eta_{28} \ddot{q}_4 + \delta_{41} \dot{q}_1^2 + \delta_{42} \dot{q}_2^2 + \delta_{43} \dot{q}_3^2 + \delta_{44} \dot{q}_4^2 + \delta_{45} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\ &+ \delta_{46} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \delta_{47} \dot{q}_1 \dot{q}_4 + \delta_{48} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \delta_{49} \dot{q}_2 \dot{q}_4 + \delta_{50} \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \gamma_{71} \dot{q}_1 + \gamma_{72} \dot{q}_2 + \gamma_{73} \dot{q}_3 + \gamma_{74} \dot{q}_4. \end{aligned}$$

Перегрузки по осям OX и OY находятся по формулам:

$$n_x = \frac{\dot{V}_{C,X}}{g}; \quad n_y = \frac{\dot{V}_{C,Y}}{g},$$

где g – ускорение свободного падения.

Система уравнений движения с учетом силы тяжести имеет вид:

$$\begin{cases} m\dot{V}_{C,X} = R_{A,\tau} \cos(\theta_A) - R_{A,n} \sin(\theta_A) - R_{B,n} \sin(\theta_B); \\ m\dot{V}_{C,Y} = R_{A,\tau} \sin(\theta_A) + R_{A,n} \cos(\theta_A) + R_{B,n} \cos(\theta_B) + Mg; \\ J_C \ddot{\vartheta} = R_{A,\tau} d_{A,\tau} - R_{A,n} d_{A,n} + R_{B,n} d_{B,n}, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} d_{A,\tau} &= r_A + l_A \sin(\gamma_A + \vartheta - \theta_A) + a \sin(\vartheta - \theta_A) + c \cos(\vartheta - \theta_A); \\ d_{A,n} &= l_A \cos(\gamma_A + \vartheta - \theta_A) + a \cos(\vartheta - \theta_A) - c \sin(\vartheta - \theta_A); \\ d_{B,n} &= -l_B \cos(\gamma_B + \vartheta - \theta_B) + b \cos(\vartheta - \theta_B) + c \sin(\vartheta - \theta_B). \end{aligned}$$

Выражение для реакции $R_{A,\tau}$ можно получить через реакции $R_{A,n}$ и $R_{B,n}$ из третьего уравнения системы (10):

$$R_{A,\tau} = R_{A,n} \frac{d_{A,n}}{d_{A,\tau}} - R_{B,n} \frac{d_{B,n}}{d_{A,\tau}} + \frac{J_C}{d_{A,\tau}} \ddot{\vartheta}.$$

Нормальные реакции в точках A и B :

$$R_{A,n} = c_1 q_1 + c_2 q_1^3; \quad R_{B,n} = c_3 q_2 + c_4 q_2^3.$$

Подставляя полученные выражения для нормальных реакций в точках A и B в уравнение для $R_{A,\tau}$ имеем:

$$\begin{aligned} R_{A,\tau} &= A_{30} + \eta_{29} \ddot{q}_1 + \eta_{30} \ddot{q}_2 + \eta_{31} \ddot{q}_3 + \eta_{32} \ddot{q}_4 + \delta_{51} \dot{q}_1^2 + \delta_{52} \dot{q}_2^2 + \delta_{53} \dot{q}_3^2 + \delta_{54} \dot{q}_4^2 + \delta_{55} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\ &+ \delta_{56} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \delta_{57} \dot{q}_1 \dot{q}_4 + \delta_{58} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \delta_{59} \dot{q}_2 \dot{q}_4 + \delta_{60} \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \gamma_{75} \dot{q}_1 + \gamma_{76} \dot{q}_2 + \gamma_{77} \dot{q}_3 + \\ &+ \gamma_{78} \dot{q}_4 + \rho_1 q_1 + \rho_2 q_1^3 + \rho_3 q_2 + \rho_4 q_2^3. \end{aligned}$$

После подстановки ранее найденных выражений и преобразований система уравнений (10) сводится к двум разрешающим уравнениям:

$$\begin{aligned} &\eta_{33} \ddot{q}_1 + \eta_{34} \ddot{q}_2 + \eta_{35} \ddot{q}_3 + \eta_{36} \ddot{q}_4 + \delta_{61} \dot{q}_1^2 + \delta_{62} \dot{q}_2^2 + \delta_{63} \dot{q}_3^2 + \delta_{64} \dot{q}_4^2 + \delta_{65} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \delta_{66} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \\ &+ \delta_{67} \dot{q}_1 \dot{q}_4 + \delta_{68} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \delta_{69} \dot{q}_2 \dot{q}_4 + \delta_{70} \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \gamma_{79} \dot{q}_1 + \gamma_{80} \dot{q}_2 + \gamma_{81} \dot{q}_3 + \gamma_{82} \dot{q}_4 + \rho_5 q_1 + \\ &+ \rho_6 q_1^3 + \rho_7 q_2 + \rho_8 q_2^3 = A_{32}; \\ &\eta_{37} \ddot{q}_1 + \eta_{38} \ddot{q}_2 + \eta_{39} \ddot{q}_3 + \eta_{40} \ddot{q}_4 + \delta_{71} \dot{q}_1^2 + \delta_{72} \dot{q}_2^2 + \delta_{73} \dot{q}_3^2 + \delta_{74} \dot{q}_4^2 + \delta_{75} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \delta_{76} \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \\ &+ \delta_{77} \dot{q}_1 \dot{q}_4 + \delta_{78} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \delta_{79} \dot{q}_2 \dot{q}_4 + \delta_{80} \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \gamma_{83} \dot{q}_1 + \gamma_{84} \dot{q}_2 + \gamma_{85} \dot{q}_3 + \gamma_{86} \dot{q}_4 + \rho_9 q_1 + \\ &+ \rho_{10} q_1^3 + \rho_{11} q_2 + \rho_{12} q_2^3 = A_{33}. \end{aligned} \quad (11)$$

Дополним систему (10) еще двумя уравнениями равновесия, получающимися из рассмотрения колес со стойками без связи с телом (рис. 59):

$$\begin{cases} R_{A,s} \cos(\varphi_A) + R_{A,n} = 0; \\ R_{B,s} \cos(\varphi_B) + R_{B,n} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\varphi_A = \frac{\pi}{2} - (\gamma_A + \vartheta - \theta_A); \quad \varphi_B = \frac{\pi}{2} - (\gamma_B + \vartheta - \theta_B).$$

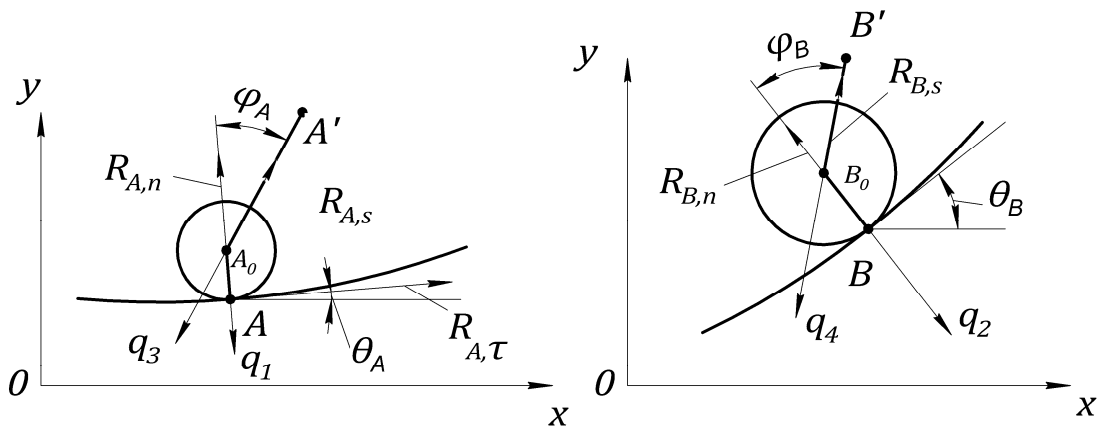


Рис. 59. Геометрические, кинематические и силовые параметры движения колес

Выражения для реакций в стойках подвески имеют вид:

$$R_{A,s} = c_5 q_3 + c_6 q_3^3 + \varepsilon_1 \dot{q}_3; \quad R_{B,s} = c_7 q_4 + c_8 q_4^3 + \varepsilon_2 \dot{q}_4.$$

После подстановки ранее найденных выражений и преобразований система уравнений (12) сводится к 3-му и 4-му разрешающему уравнению:

$$\begin{aligned} \gamma_{87} \dot{q}_3 + \rho_{13} q_1 + \rho_{14} q_1^3 + \rho_{15} q_3 + \rho_{16} q_3^3 &= 0; \\ \gamma_{88} \dot{q}_4 + \rho_{17} q_2 + \rho_{18} q_2^3 + \rho_{19} q_4 + \rho_{20} q_4^3 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Полученная система из четырех уравнений (11), (13) преобразуется для ее решения численными методами. На основе полученных уравнений для неизвестных обобщенных координат и выражений для определений кинематических, геометрических, инерционных и динамических параметров движения твердого тела по заданной произвольной кривой была составлена расчетная программа для нахождения выше перечисленных величин в программной среде PTC MathCad 15.

Дополним систему уравнений (11), (13) четырьмя уравнениями вида:

$$\dot{q}_i - p_i = 0, \quad i = 1 \dots 4, \quad (14)$$

где $p_j \equiv \dot{q}_j$ ($j = 1 \dots 4$). Задача о преобразовании системы уравнений (11), (13) и (14) ставится в виде записи матричного уравнения:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{P}, \quad (15)$$

где $\mathbf{r} = [p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4]^T$ – вектор-столбец неизвестных $\dot{\mathbf{r}} = [\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{p}_4, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4]^T$ – его первая производная по времени. После преобразований уравнение (15) приводится к виду:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{r} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P},$$

где \mathbf{E} – единичная матрица, размерностью 8×8 . Для того, что бы матрица \mathbf{M} не была вырожденной, продифференцируем один раз уравнения (13) по времени. С учетом вышесказанного, матрицы \mathbf{M} , \mathbf{K} и \mathbf{P} записываются в следующем блочном виде:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \eta_{33} & \eta_{34} & \eta_{35} & \eta_{36} \\ \eta_{37} & \eta_{38} & \eta_{39} & \eta_{40} \\ 0 & 0 & \gamma_{87} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{88} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{13} + 3q_1^2\rho_{14} & 0 & \rho_{15} + 3q_3^2\rho_{16} & 0 \\ 0 & \rho_{17} + 3q_2^2\rho_{18} & 0 & \rho_{19} + 3q_4^2\rho_{20} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} \delta_{61}p_1 + \delta_{65}p_2 + & \delta_{62}p_2 + \delta_{68}p_3 + & \delta_{63}p_3 + \delta_{66}p_1 + & \delta_{64}p_4 + \delta_{67}p_1 + \\ + \gamma_{79} & + \gamma_{80} & + \delta_{70}p_4 + \gamma_{81} & + \delta_{69}p_2 + \gamma_{82} \\ \delta_{71}p_1 + \delta_{75}p_2 + & \delta_{72}p_2 + \delta_{78}p_3 + & \delta_{73}p_3 + \delta_{76}p_1 + & \delta_{74}p_4 + \delta_{77}p_1 + \\ + \gamma_{83} & + \gamma_{84} & + \delta_{80}p_4 + \gamma_{85} & + \delta_{79}p_2 + \gamma_{86} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} \rho_5 + \rho_6q_1^2 & \rho_7 + \rho_8q_2^2 & 0 & 0 \\ \rho_9 + \rho_{10}q_1^2 & \rho_{11} + \rho_{12}q_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} A_{32} \\ A_{33} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для проверки численного алгоритма решим задачу о движении автомобиля с постоянной скоростью через кочку (рис. 60) [3]. Исходные данные для расчета: $M = 1000$ кг – масса автомобиля, $L = 2.5$ м – длина колесной базы, $J = 700$ кг·м², $V = 2$ м/с – скорость движения автомобиля, $k_1 = 30000$ Н/м – жесткость передней рессоры, $k_2 = 35000$ Н/м – жесткость задней рессоры, $a = 1$ м – длина кочки, $\delta = 0.08$ м – максимальная высота кочки, $h(t) = \delta \sin(\pi Vt/a)$ – функция изменения высоты профиля кочки. Отсчет времени начинается с момента заезда первого колеса на кочку. Центр тяжести автомобиля – в середине колесной базы. В качестве обобщенных координат q_1 и q_2 берутся перемещения точек крепления подвески к автомобилю. Условные обозначения: v – перемещение центра масс автомобиля, θ – угол поворота относительно центра масс автомобиля, Δ_1 и Δ_2 – удлинения пружин подвески.

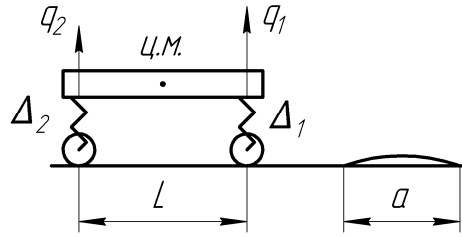


Рис. 60. Постановка задачи

Так как длина колесной базы больше чем длина кочки, то все движение разбивается на 4 интервала:

1) $0 \leq t \leq a/V$ – первое колесо проезжает кочку:

$$v = \frac{q_1 + q_2}{2}; \quad \theta = \frac{q_2 - q_1}{L}; \quad \Delta_1 = q_1 - h(t); \quad \Delta_2 = q_2.$$

2) $a/V \leq t \leq L/V$ – кочка находится между колесами:

$$v = \frac{q_1 + q_2}{2}; \quad \theta = \frac{q_2 - q_1}{L}; \quad \Delta_1 = q_1; \quad \Delta_2 = q_2.$$

3) $L/V \leq t \leq (a + L)/V$ – второе колесо проезжает кочку:

$$v = \frac{q_1 + q_2}{2}; \quad \theta = \frac{q_2 - q_1}{L}; \quad \Delta_1 = q_1; \quad \Delta_2 = q_2 - h(t).$$

4) $t \geq (a + L)/V$ – свободное движение автомобиля по дороге:

$$v = \frac{q_1 + q_2}{2}; \quad \theta = \frac{q_2 - q_1}{L}; \quad \Delta_1 = q_1; \quad \Delta_2 = q_2.$$

Кинетическая и потенциальная энергия системы (T – кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия):

$$T = \frac{1}{2} M \dot{v}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2; \quad \Pi = \frac{1}{2} k_1 \Delta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \Delta_2^2.$$

Уравнения колебаний получим из уравнения Лагранжа 2-го рода, записанного для координат q_1 и q_2 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i(t), \quad i = 1, 2.$$

После подстановки выражений для кинетической и потенциальной энергии уравнение колебаний данной системы записывается в виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}; \quad \mathbf{q} = [q_1, q_2]^T; \quad \ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2]^T,$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{M}{4} + \frac{J}{L^2} & \frac{M}{4} - \frac{J}{L^2} \\ \frac{M}{4} - \frac{J}{L^2} & \frac{M}{4} + \frac{J}{L^2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ для } a/V \leq t \leq L/V \text{ и } t \geq (a+L)/V;$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} k_1 h(t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ для } 0 \leq t \leq a/V; \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 h(t) \end{pmatrix} \text{ для } L/V \leq t \leq (a+L)/V.$$

Полученная система из двух дифференциальных уравнений 2-го порядка была решена численно и с помощью аналитических методов расчета. Расхождение в результатах не превышает 0.5 %.

Рассмотрим примеры расчета при различных постановках задачи.

I. Рассмотрим задачу о движении тележки по горизонтальной прямой при учете упругости только колес, то есть при отсутствии подвески, в поле силы тяжести. Упругость шин – линейная, то есть $R_n = cq$ для точек A и B . Исходные данные для расчета: $V_A = 2$ м/с, $l = 2$ м, $a = 0.7$ м, $b = 1.3$ м, $c = 0.8$ м, $r_A = 0.3$ м, $r_B = 0.3$ м, $m = 500$ кг, $J_C = 250$ кг·м², $c_1 = 5000$ Н/м – жесткость шины ведущего колеса, $c_2 = 6000$ Н/м – жесткость шины ведомого колеса.

На рис. 61 представлен график изменения угла поворота тела ϑ и его первая и вторая производная по времени.

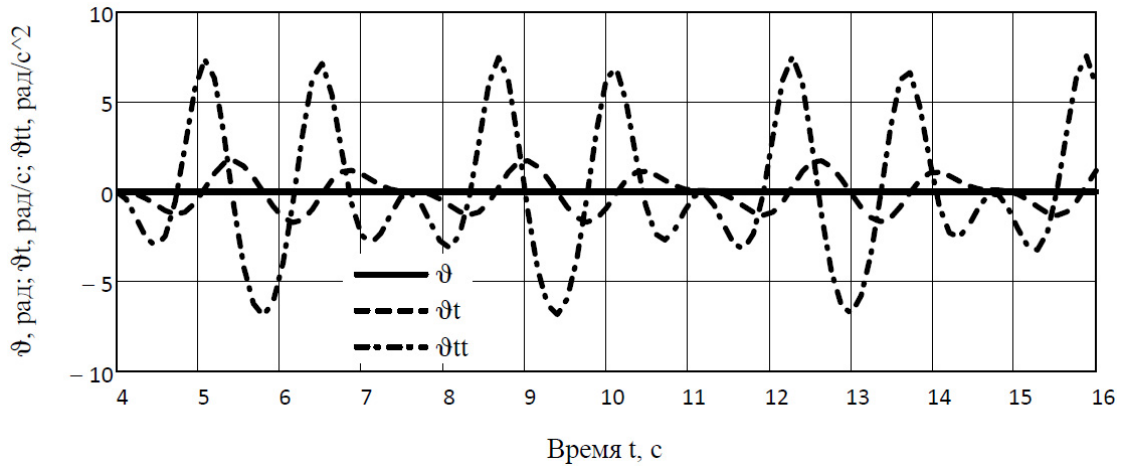


Рис. 61. Угол поворота тела и его первая и вторая производная

На рис. 62 показан график изменения тангенциальной и нормальных реакций при движении тела по горизонтальной прямой.

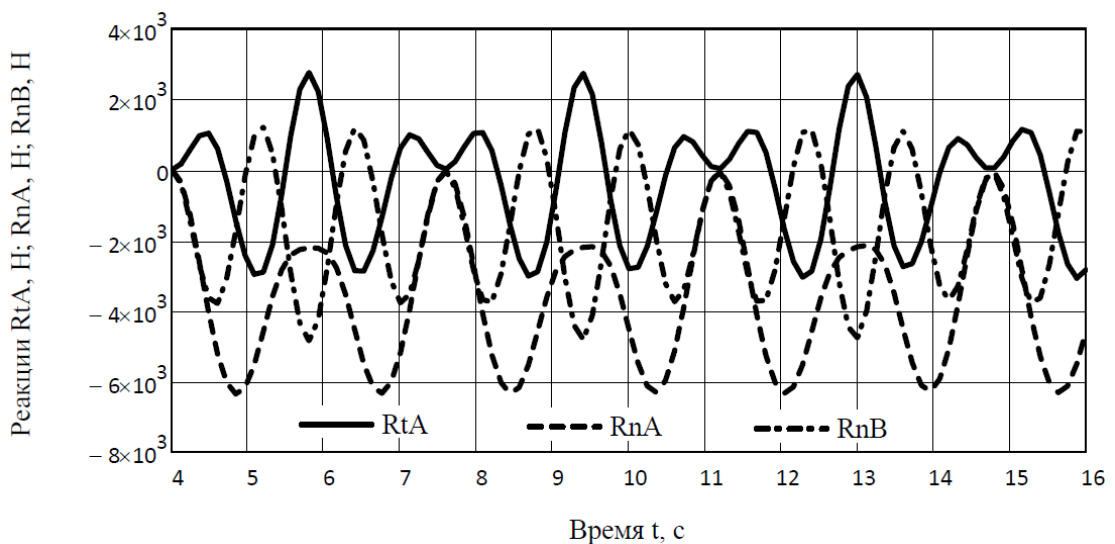


Рис. 62. Тангенциальные и нормальные реакции

II. Рассмотрим задачу о движении тележки по криволинейной траектории, изображенной на рис. 63, при учете упругости только колес, то есть при отсутствии подвески, в поле силы тяжести. Упругость шин – линейная, то есть $R_n = cq$ для точек A и B . Траектория состоит из горизонтальных участков 1 и 5 длиной 35 м каждый и трех сопряженных окружностей 2, 3 и 4 радиусом 70 м каждая. Координаты центров окружностей в метрах соответственно равны: $x_2 = 35$, $y_2 = -20$, $x_3 = 134$, $y_3 = 79$, $x_4 = 233$, $y_4 = -20$.

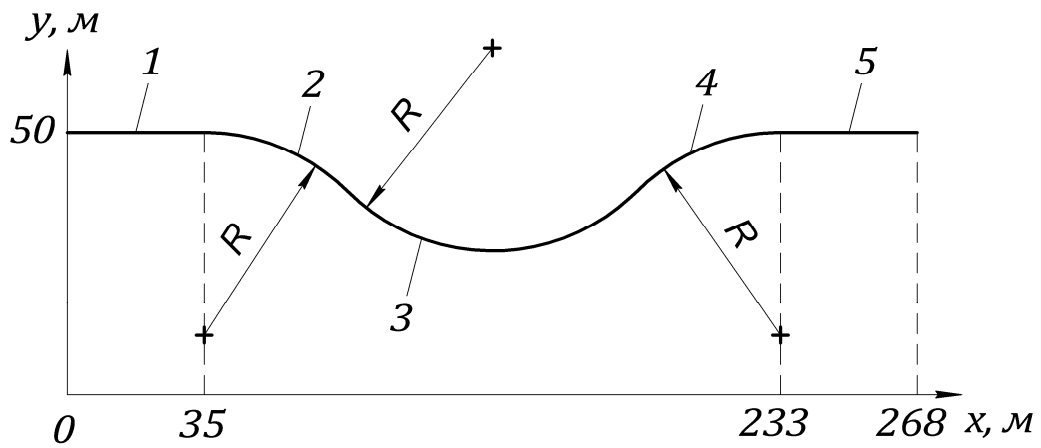
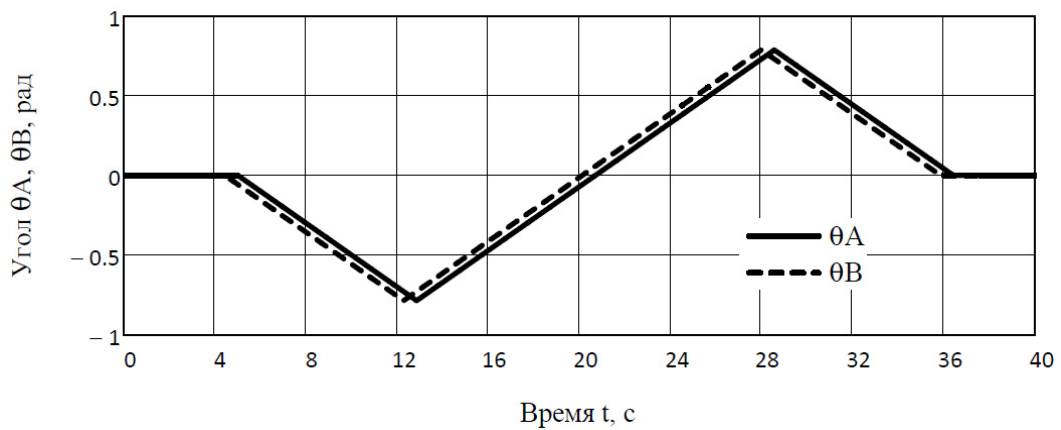


Рис. 63. Траектория движения тела

Исходные данные для расчета: $V_A = 7$ м/с, $l = 4$ м, $a = 1$ м, $b = 3$ м, $c = 1$ м, $r_A = 0.5$ м, $r_B = 0.5$ м, $m = 500$ кг, $J_C = 250$ кг·м², $c_1 = 3000$ Н/м – жесткость шины ведущего колеса, $c_2 = 4000$ Н/м – жесткость шины ведомого колеса. Полное время движения по траектории – $t = 41.416$ с.

На рис. 64 показаны графики изменения углов наклона скоростей точек A и B к горизонту, на рис. 65 – графики изменения их первых производных по времени для интервала $16 \leq t \leq 24$ с.

Рис. 64. Изменение углов наклона скоростей точек A и B к горизонту

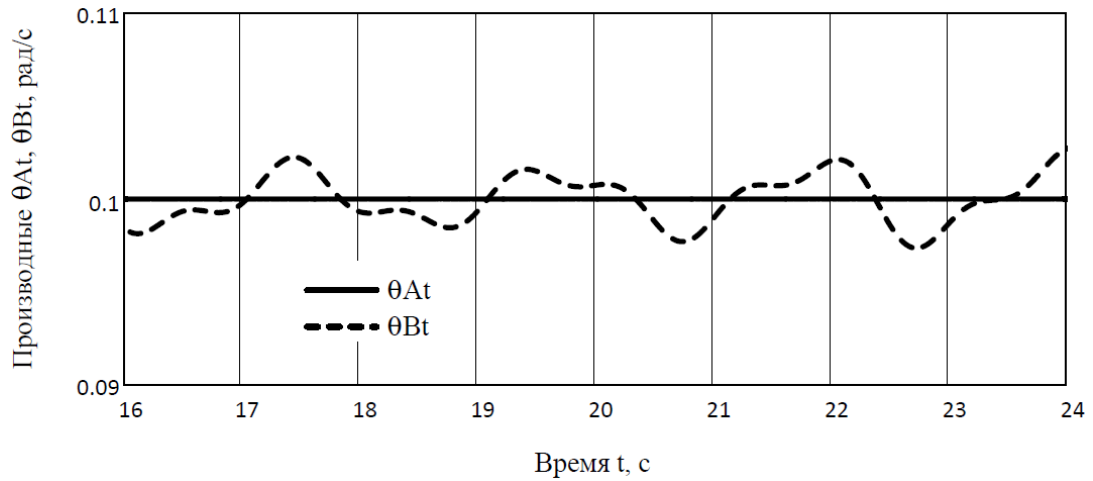


Рис. 65. Изменение первых производных по времени от углов наклона скоростей точек A и B к горизонту

На рис. 66, рис. 67 и рис. 68 представлены графики изменения угла поворота тела \mathcal{S} , его первая и вторая производная по времени. Видно, что по сравнению с движением по горизонтальной прямой, характер изменения величин производных другой, с более высокой интенсивностью.

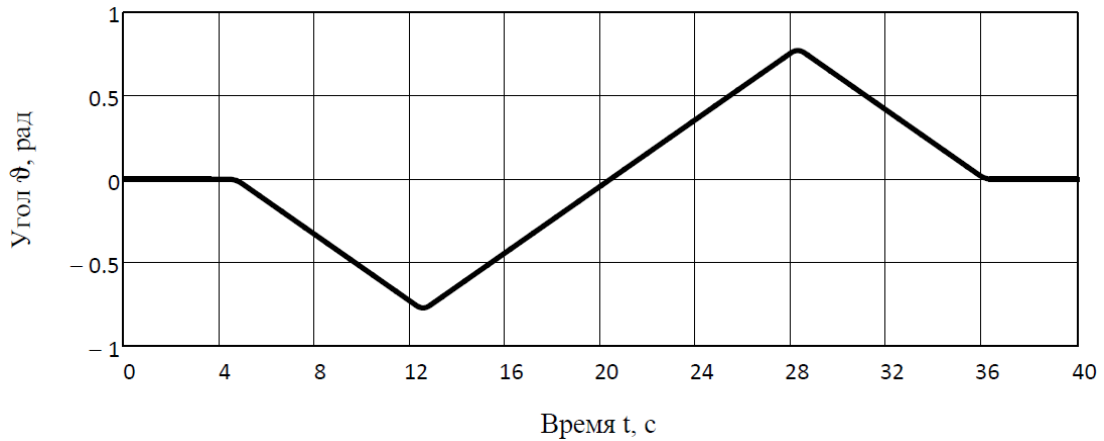


Рис. 66. Угол поворота тела

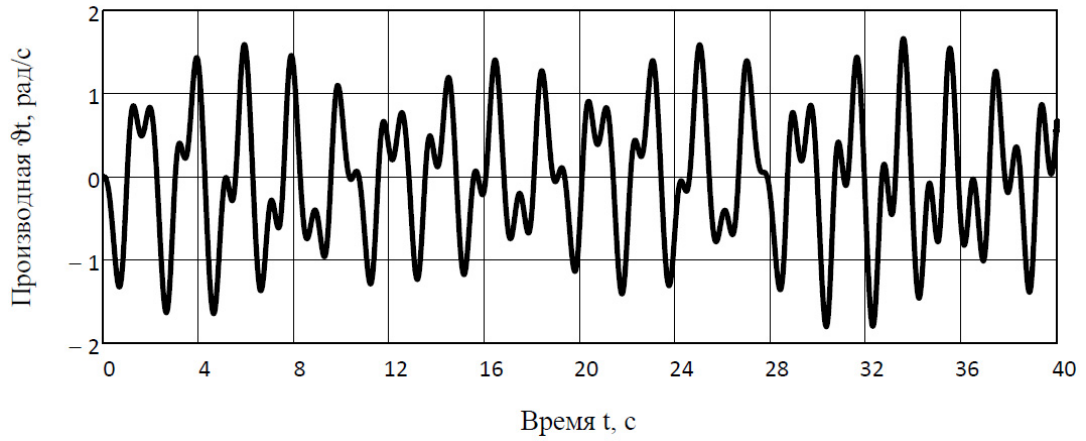


Рис. 67. Первая производная по времени от угла поворота тела

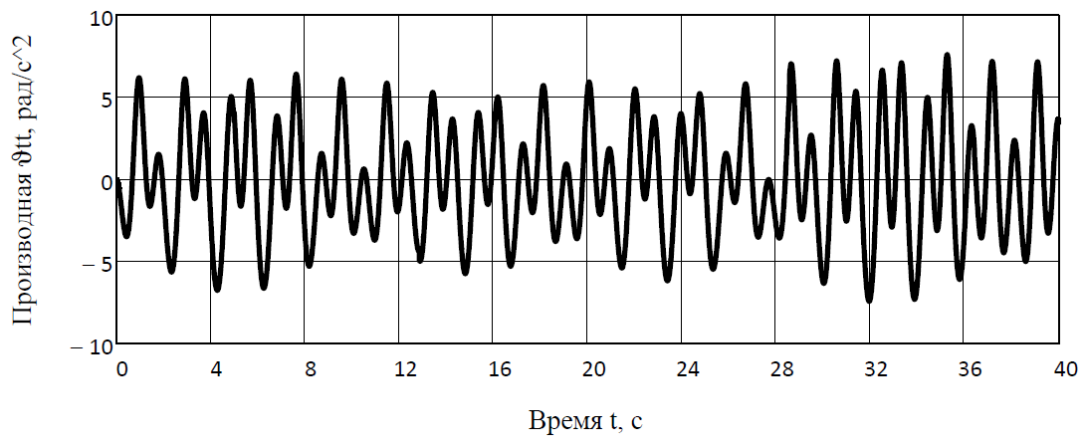


Рис. 68. Вторая производная по времени от угла поворота тела

На рис. 69 и рис. 70 показаны графики изменения проекций скорости центра тяжести на оси OX и OY и график изменения скорости центра тяжести тележки.

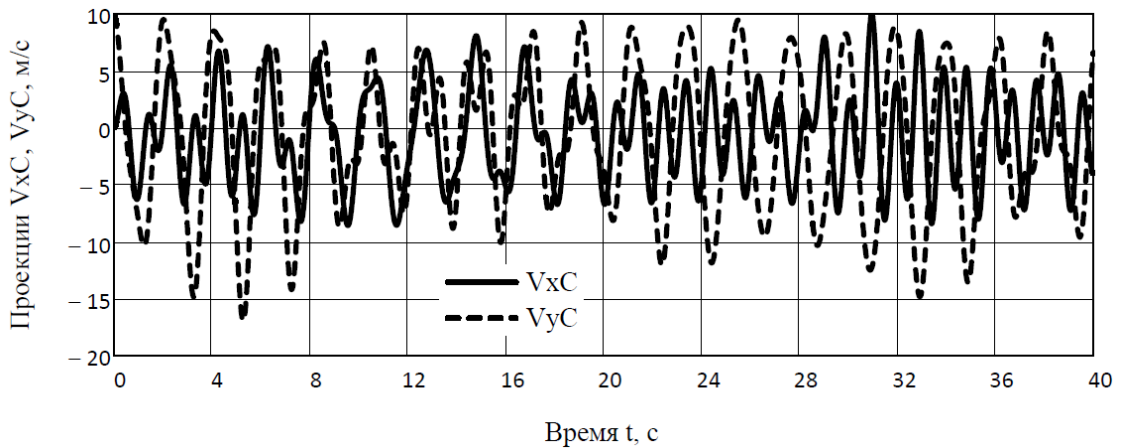


Рис. 69. Проекция скорости центра тяжести на оси OX и OY

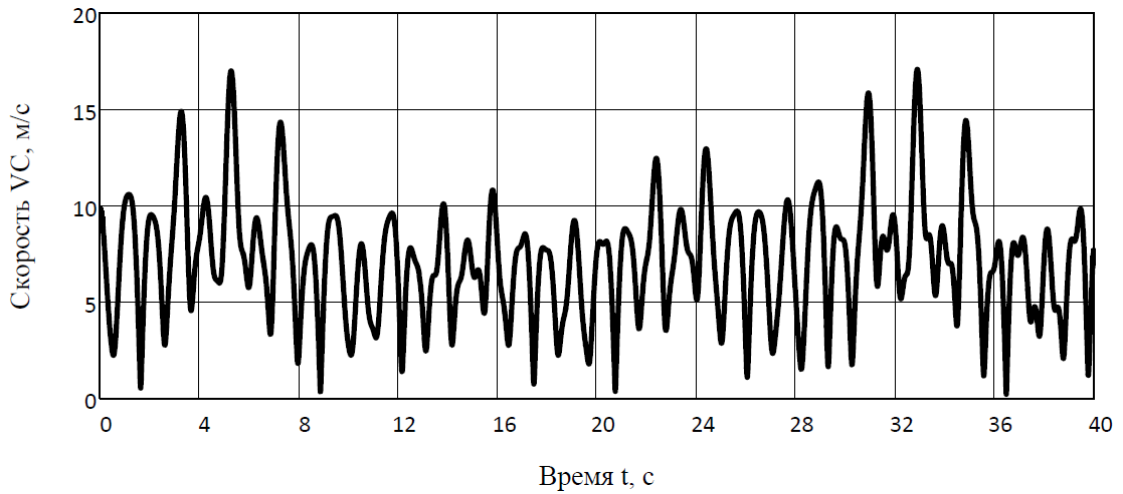
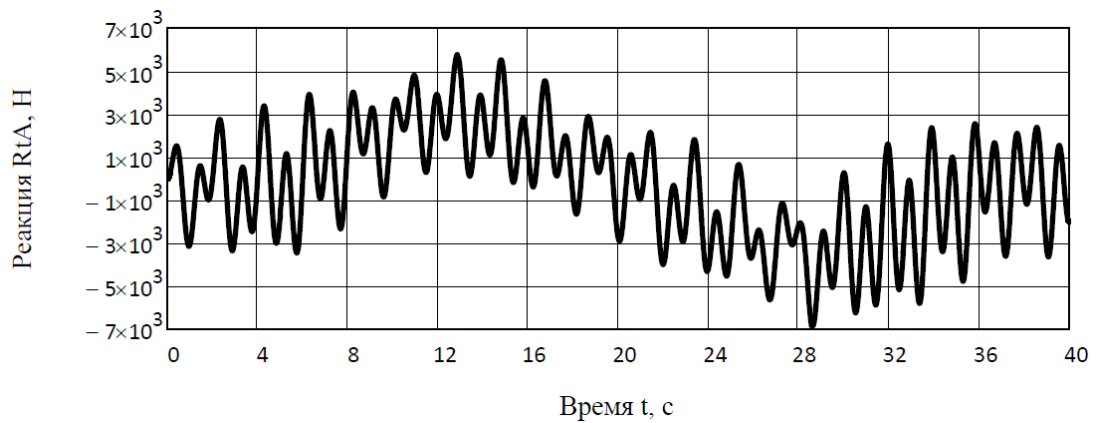
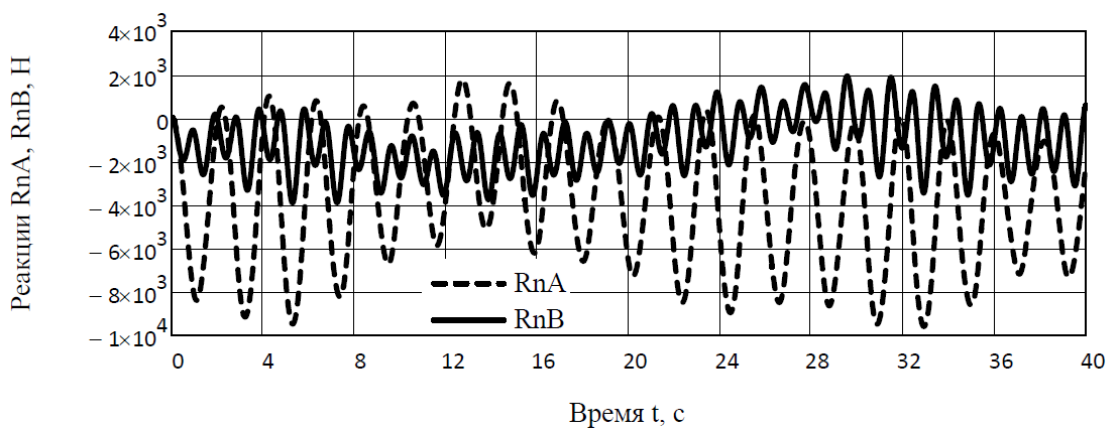


Рис. 70. Скорость центра тяжести

Изменения тангенциальной и нормальных реакций показано на рис. 71 и рис. 72.

Рис. 71. Тангенциальная реакция в точке A Рис. 72. Нормальные реакции в точках A и B

III. Рассмотрим задачу о движении твердого тела по горизонтальной прямой при учете упругости шин и наличия подвески. Учитывалось влияние гравитации. Исходные данные для расчета: $V_A = 2$ м/с, $l = 2$ м, $a = 0.9$ м, $b = 1.1$ м, $c = 0.8$ м, $r_A = 0.3$ м, $r_B = 0.25$ м, $\gamma_A = 30^\circ$, $\gamma_B = 45^\circ$, $l_A = 1$ м, $l_B = 0.9$ м, $m = 500$ кг, $J_C = 250$ кг·м², $c_1 = 2000$ Н/м, $c_3 = 3000$ Н/м, $c_2 = 200$ Н/м³, $c_4 = 300$ Н/м³, $c_5 = 1500$ Н/м, $c_7 = 1000$ Н/м, $c_6 = 150$ Н/м³, $c_8 = 100$ Н/м³, $\varepsilon_1 = 200$ Н/м·с, $\varepsilon_1 = 150$ Н/м·с.

На рис. 72 представлен график изменения угла поворота тела ϑ и его первая и вторая производная по времени.

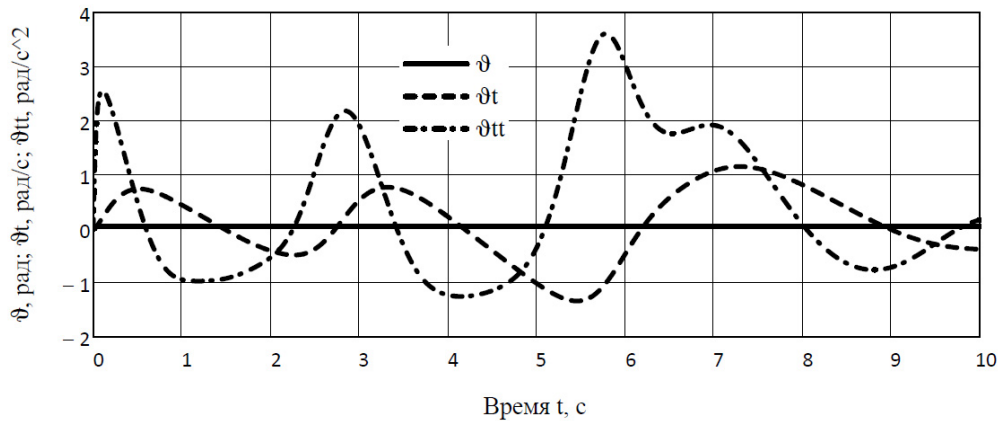


Рис. 73. Угол поворота тела и его первая и вторая производная

На рис. 74 и рис. 75 представлены графики изменения проекций скорости центра тяжести на оси OX и OY и график изменения скорости центра тяжести тележки.

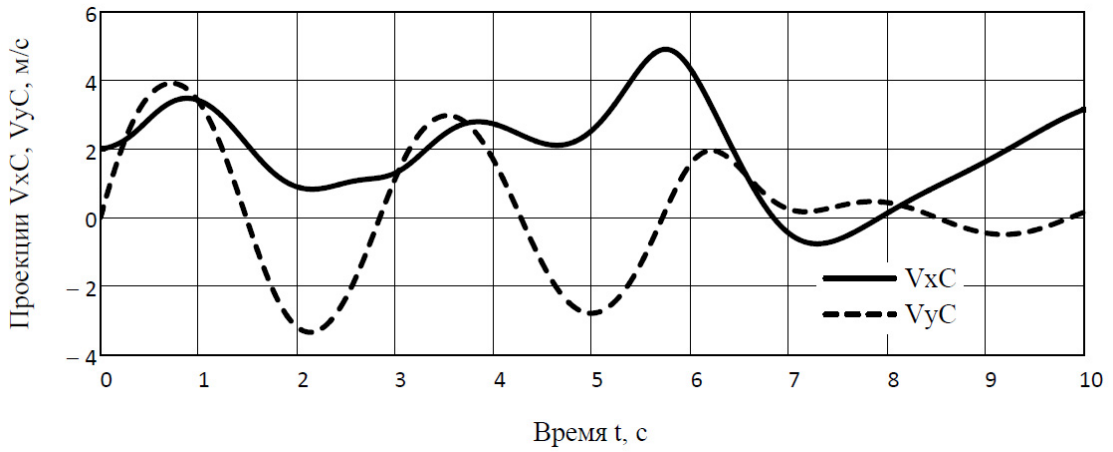


Рис. 74. Проекция скорости центра тяжести на оси OX и OY

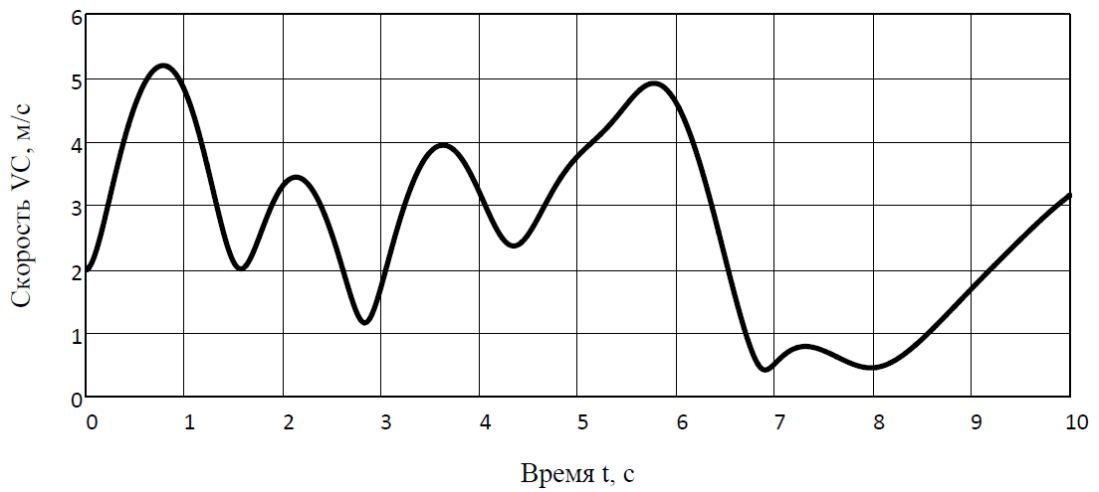


Рис. 75. Скорость центра тяжести

Графики изменения горизонтальной и вертикальной перегрузки показаны на рис. 76.

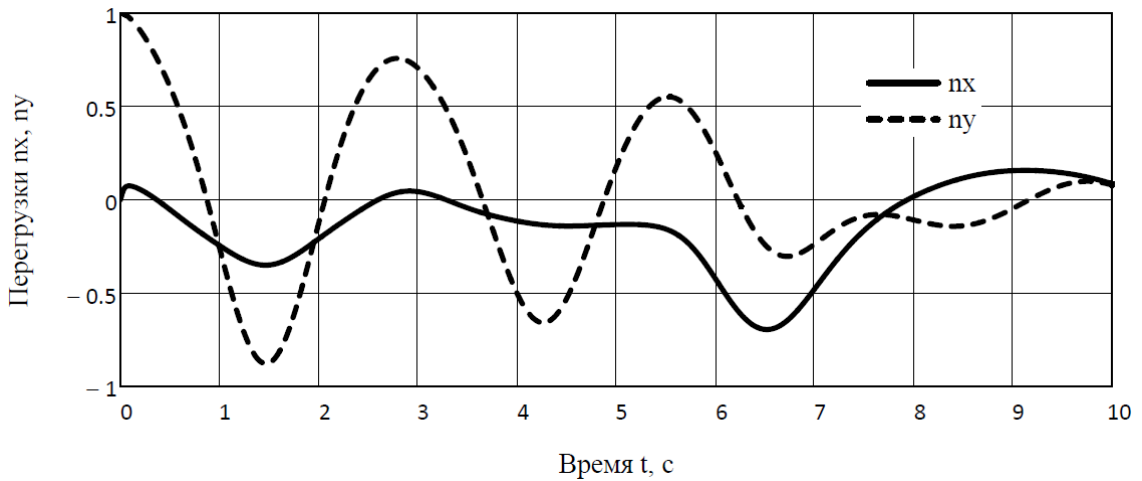


Рис. 76. Горизонтальная и вертикальная перегрузка

На рис. 77 представлены зависимости угловых скоростей вращения колес.

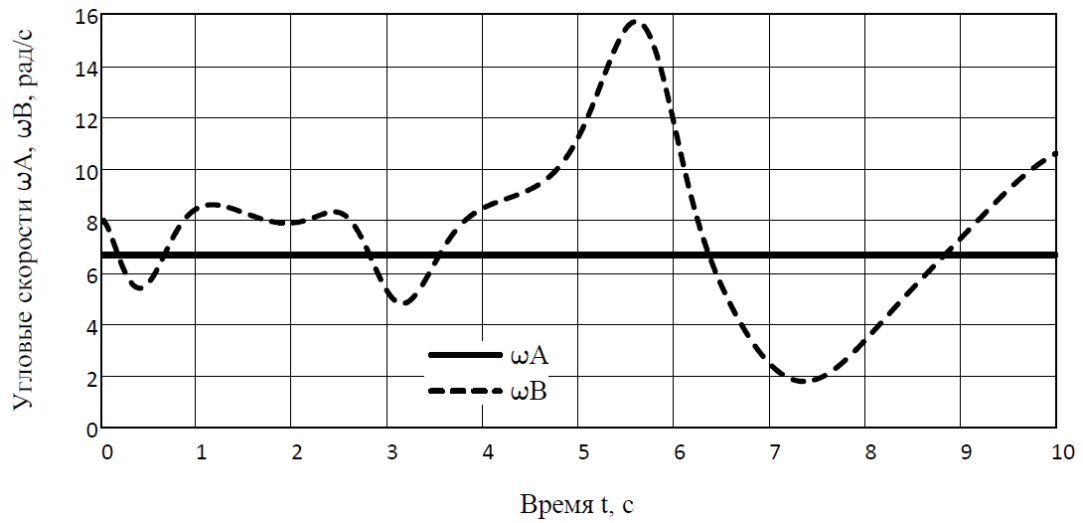


Рис. 77. Угловая скорость вращения колес

На рис. 78 показаны графики изменения усилий в подвеске. На рис. 79 представлены тангенциальные и нормальные реакции в точках контакта колес с траекторией.

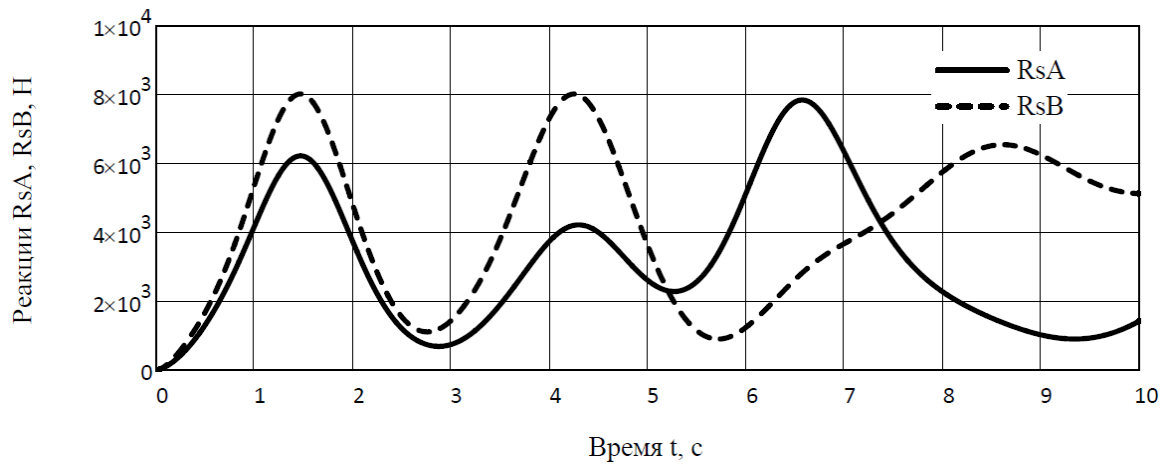


Рис. 78. Усилия в подвеске

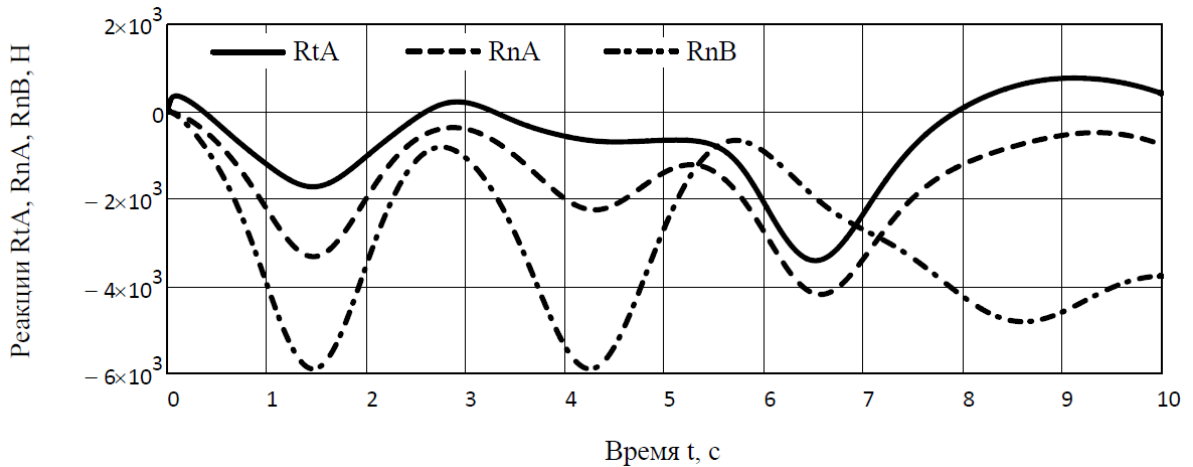


Рис. 79. Тангенциальные и нормальные реакции

IV. Рассмотрим задачу о движении твердого тела по траектории, в качестве которой выбрана кривая, состоящая из горизонтальных участков 1 и 4 длиной 35 м каждый и двух гладко сопряженных окружностей 2 и 3 координаты центров и радиусов которых в метрах, соответственно – $x_2 = 35$, $y_2 = -20$, $R_2 = 70$, $x_3 = 134$, $y_3 = 79$, $R_3 = 70$ (рис. 80). Учитывалось влияние гравитации. Исходные данные для расчета: $V_A = 4$ м/с, $l = 2$ м, $a = 1$ м, $b = 1$ м, $c = 1$ м, $r_A = 0.3$ м, $r_B = 0.3$ м, $\gamma_A = 90^\circ$, $\gamma_B = 90^\circ$, $l_A = 0.5$ м, $l_B = 0.5$ м, $m = 500$ кг, $J_C = 250$ кг·м², $c_1 = c_3 = 3000$ Н/м, $c_2 = c_4 = 200$ Н/м³, $c_5 = c_7 = 4000$ Н/м, $c_6 = c_8 = 300$ Н/м³, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 250$ Н/м·с. Время движения по траектории – $t_k = 44.489$ с. Рассматривался интервал движения $0 \leq t \leq 40$ с.

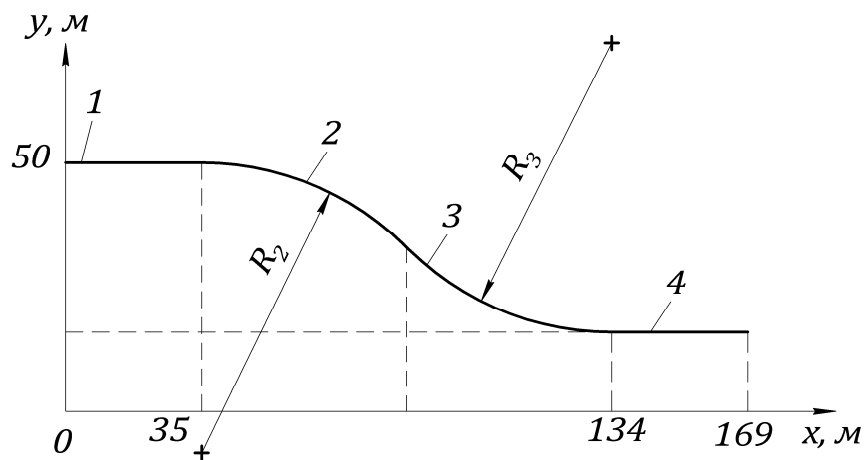


Рис. 80. Траектория движения тела

На рис. 81 представлены графики изменения углов наклона скоростей точек A и B к горизонту.

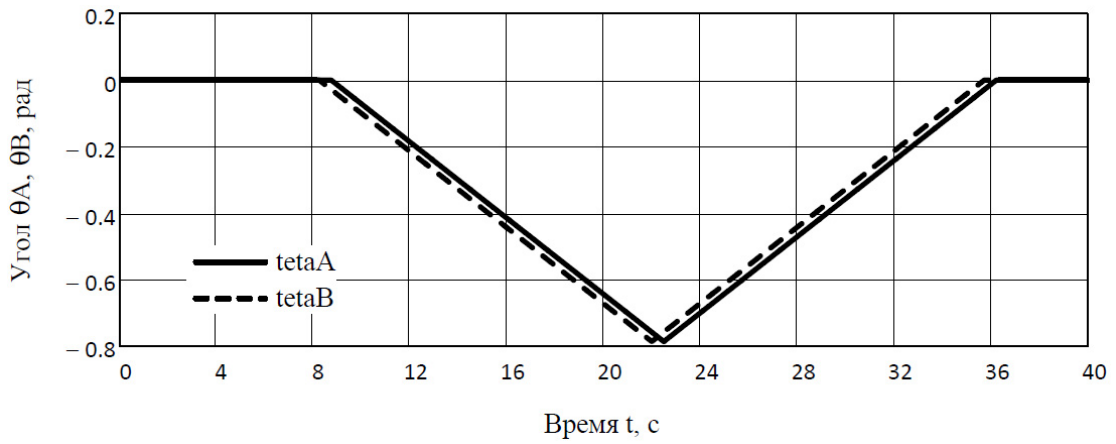


Рис. 81. Изменение углов наклона скоростей точек A и B к горизонту

На рис. 82 показаны графики изменения угла поворота тела \mathcal{Q} , его первая и вторая производная по времени.

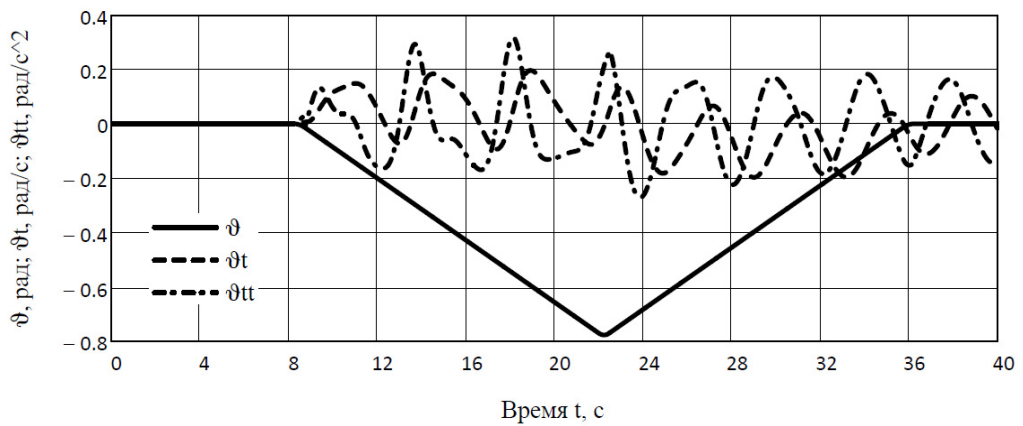


Рис. 82. Угол поворота тела и его первая и вторая производная

На рис. 83 и рис. 84 показаны графики изменения проекций скорости центра тяжести на оси OX и OY и график изменения скорости центра тяжести тележки.

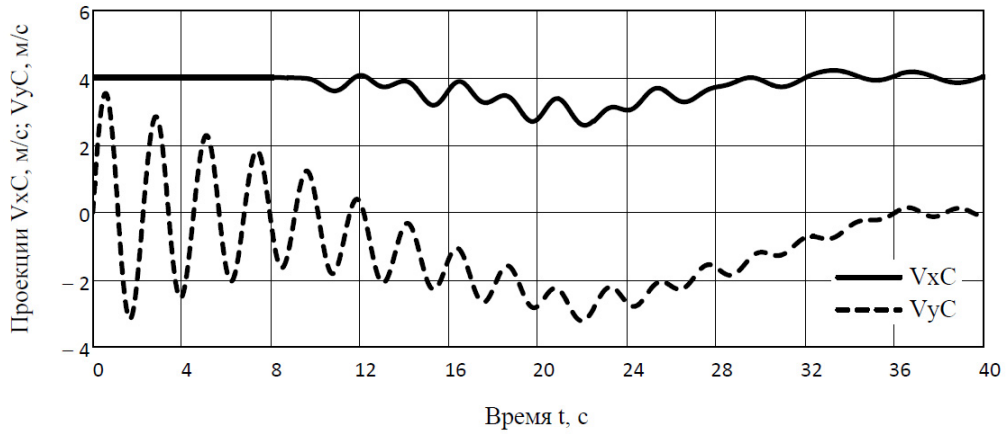


Рис. 83. Проекция скорости центра тяжести на оси OX и OY

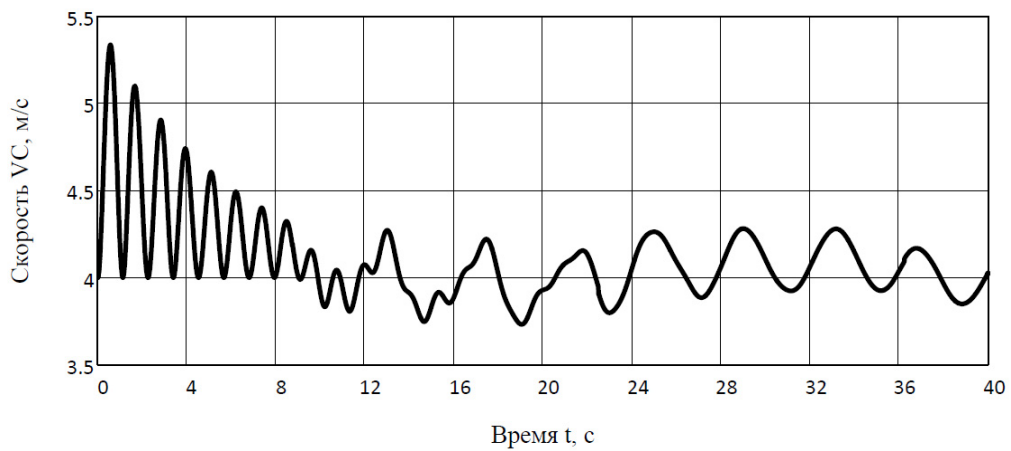


Рис. 84. Скорость центра тяжести

На рис. 85 представлены графики изменения усилий в подвеске. На рис. 86 показаны тангенциальные и нормальные реакции в точках контакта колес с траекторией движения.

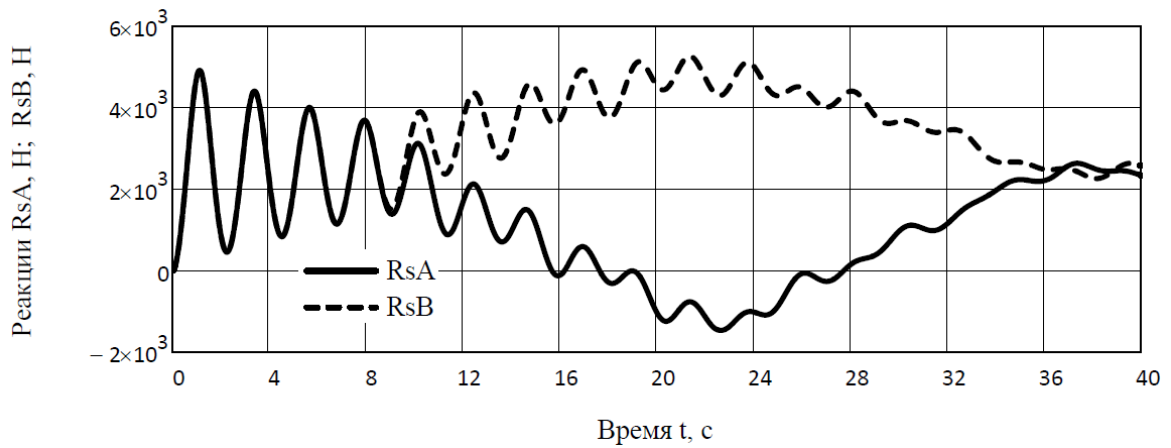


Рис. 85. Усилия в подвеске

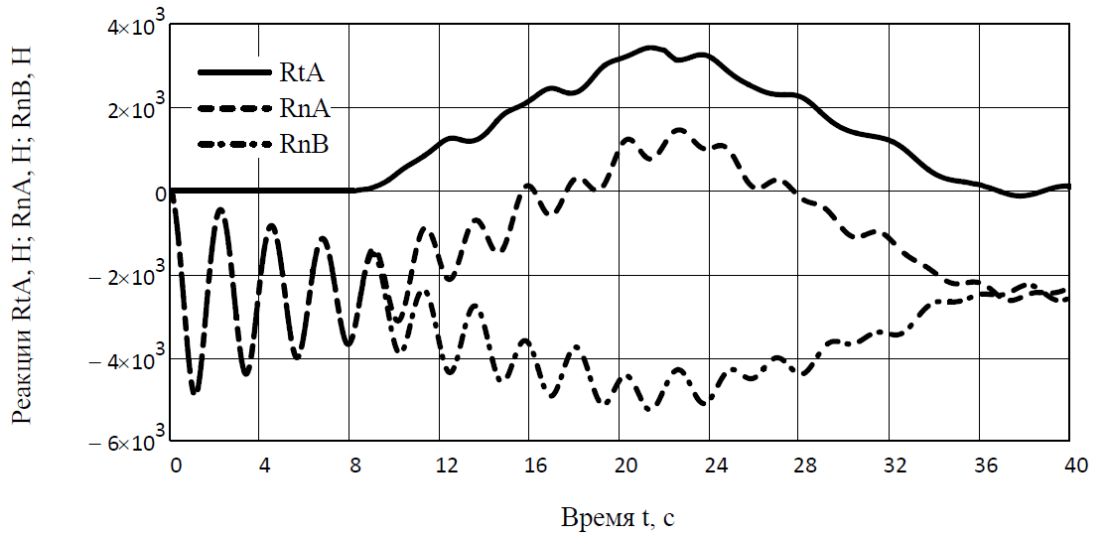


Рис. 86. Тангенциальные и нормальные реакции

Графики изменения горизонтальной и вертикальной перегрузки показаны на рис. 87.

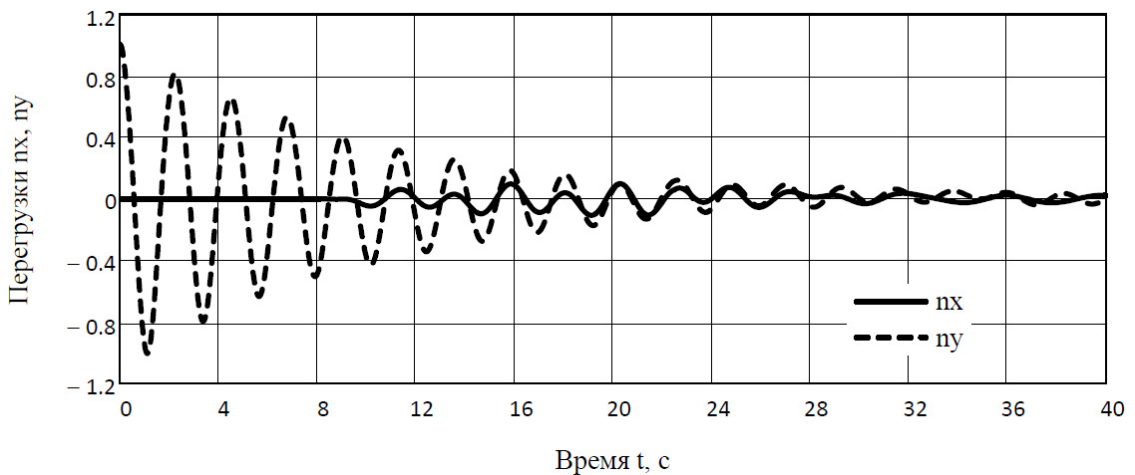


Рис. 87. Горизонтальная и вертикальная перегрузка

Исследуем влияние параметров подвески на движение тела, в частности на изменение перегрузки по оси Oy , что является важным параметром для биомеханического анализа [18]. Будем варьировать жесткостями $c_5 = c_7$ и $c_6 = c_8$. При одновременном увеличении или уменьшении жесткостей подвески для ведущего и ведомого колеса график изменения перегрузки качественно не изменяется (рис. 88 и рис. 89) – при увеличении параметров жесткости

уменьшение перегрузки происходит медленнее и, наоборот, при уменьшении параметров жесткости уменьшение перегрузки происходит быстрее.

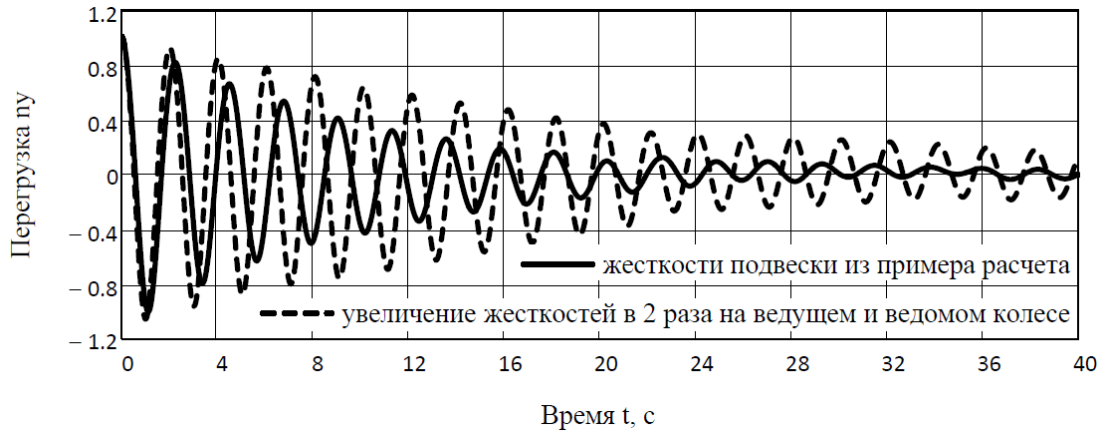


Рис. 88. Изменение вертикальной перегрузки при варьировании жесткостями

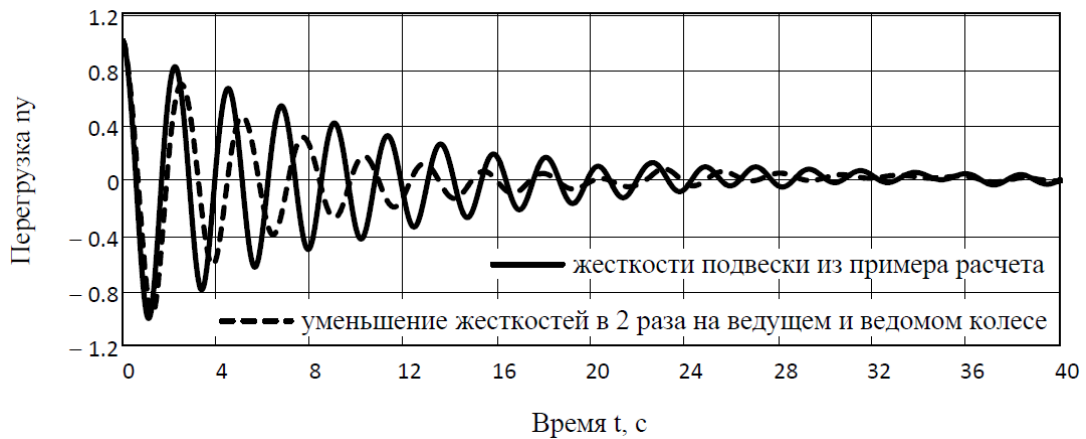


Рис. 89. Изменение вертикальной перегрузки при варьировании жесткостями

Качественное изменение графика перегрузки происходит в случае варьирования параметрами подвески только одного колеса, как например, на рис. 90 (увеличение жесткости на ведущем колесе), на рис. 91 (уменьшение жесткости на ведущем колесе), на рис. 92 (увеличение жесткости на ведомом колесе), на рис. 93 (уменьшение жесткости на ведомом колесе). Это позволяет, варьируя параметрами подвески и по аналогии параметрами жесткости колес не зависимо друг от друга, добиваться обеспечения нужного уровня перегрузок на рассматриваемом интервале движения, изменяя зависимости не только количественно, но и качественно.

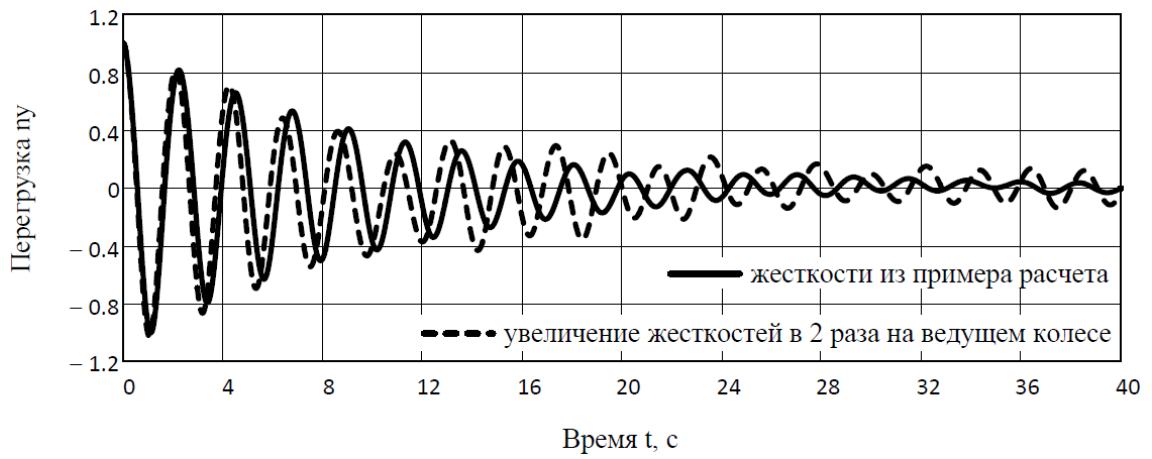


Рис. 90. Изменение вертикальной перегрузки при варьировании жесткостями

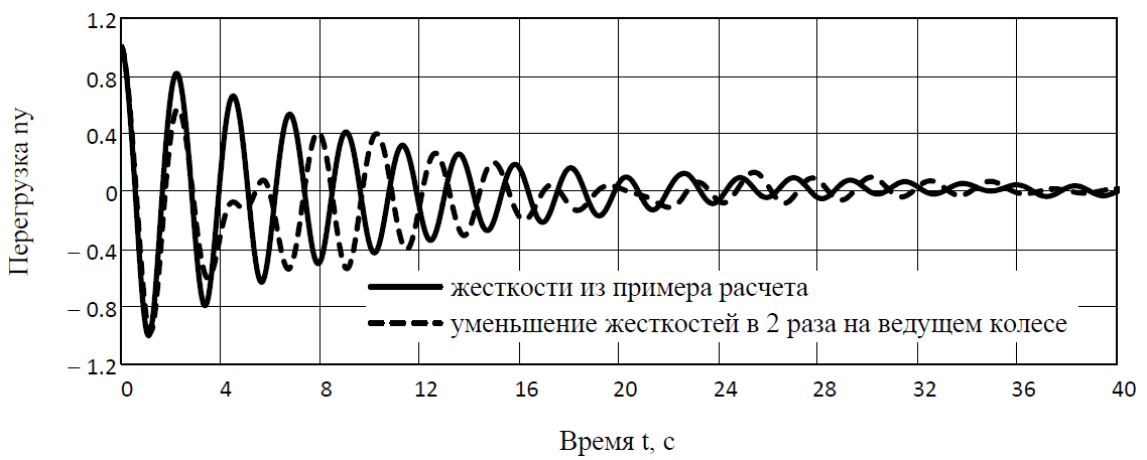


Рис. 91. Изменение вертикальной перегрузки при варьировании жесткостями

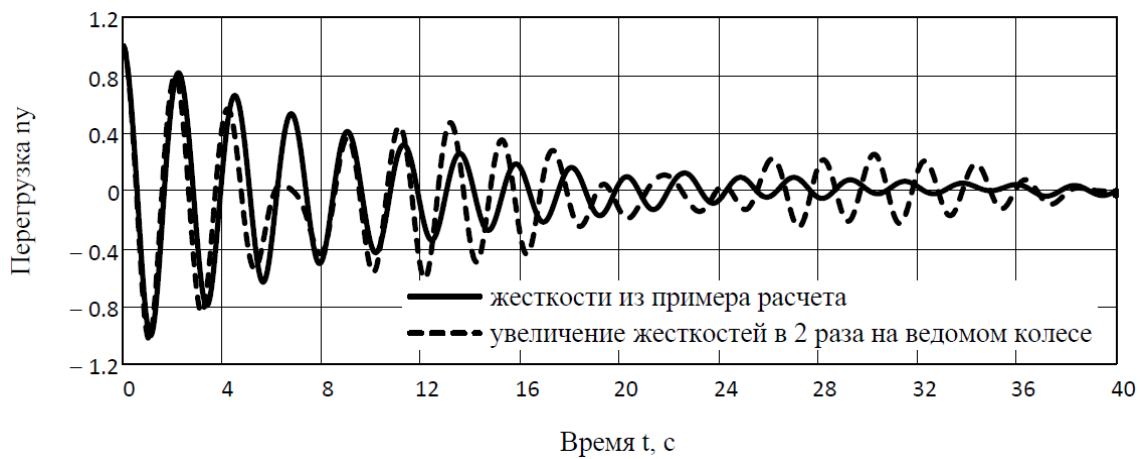


Рис. 92. Изменение вертикальной перегрузки при варьировании жесткостями

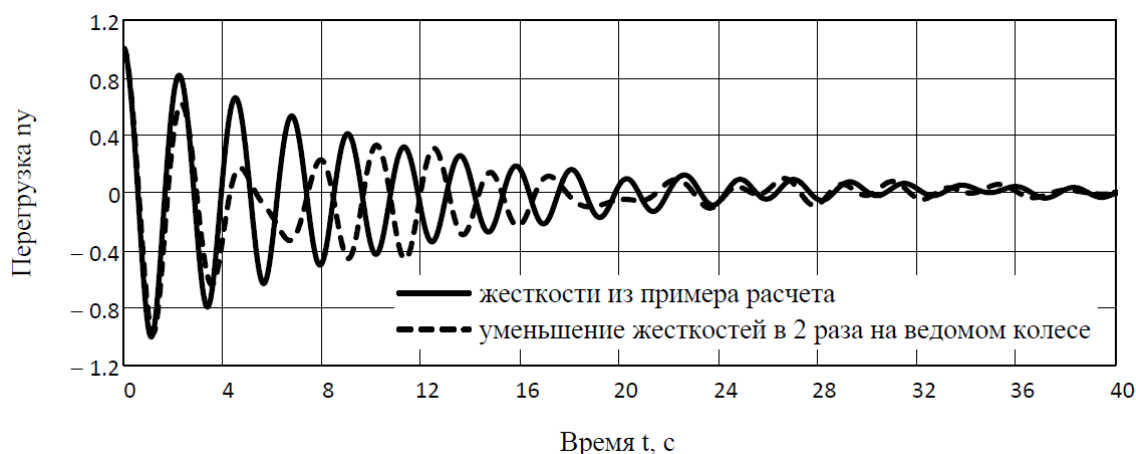


Рис. 93. Изменение вертикальной перегрузки при варьировании жесткостями

Разработанный алгоритм позволяет определять все необходимые параметры плоского движения тела (тележки на роликах) по произвольной криволинейной траектории с учетом упругости шин и подвески.

Результаты решения задачи могут быть использованы в различных приложениях (движение автомобиля или мотоцикла на неровной дороге, взлет самолета с палубного трамплина и пр.), исследование движения тележки в сооружениях типа «катальная гора» и т.д. Варьирование параметрами упругости шин и подвески позволяет для данной траектории движения изменять уровень перегрузок вдоль оси OX и OY , что является важным критерием в биомеханическом анализе движения транспортного средства.

4. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПО ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В данной главе рассматривается движение тела по произвольной криволинейной поверхности в пространстве, которое совершает поступательное и вращательное движения, сопровождаемые колебаниями. Получены общие нелинейные уравнения движения с точностью до квадратичных членов относительно обобщенных координат, представляющих упругие деформации.

Составление системы разрешающих уравнений для тела, движущегося по произвольной поверхности, можно вести по аналогии с уравнениями, описывающими динамику больших космических систем и их движение в центральном гравитационном поле [1, 2, 57, 58]. Отличие заключается в наличии непрерывной связи между заданной траекторией и определенной точкой на поверхности тела.

4.1. Формулировка задачи

Рассматривается пространственная изогнутая и закрученная полоса, представляющая полотно дороги с двумя направляющими линиями (рельсами), расстояние между которыми является постоянным. Геометрия этой полосы характеризуется изогнутой в двух плоскостях и закрученной нерастяжимой центральной линией $\mathbf{R}_0(s)$, где s – длина дуги, отсчитываемая вдоль этой линии; $\mathbf{R} = [X_1, X_2, X_3]^T$ – вектор некоторой неподвижной правой системы прямоугольных координат $O_*X_1X_2X_3$ (рис. 94), причем ось X_2 направлена противоположно вектору сил тяжести \mathbf{g} . При этом $\mathbf{R}_0(s) = [X_{01}(s), X_{02}(s), X_{03}(s)]^T$. Принимается, что деформации тела являются конечными и упругими, а углы поворота его элементов, обусловленными деформациями, – конечными (угол считается конечным, если $\sin \vartheta \approx \vartheta$, $\cos \vartheta \approx 1 - \vartheta^2/2$, и малым, если $\sin \vartheta \approx \vartheta$, $\cos \vartheta \approx 1$).

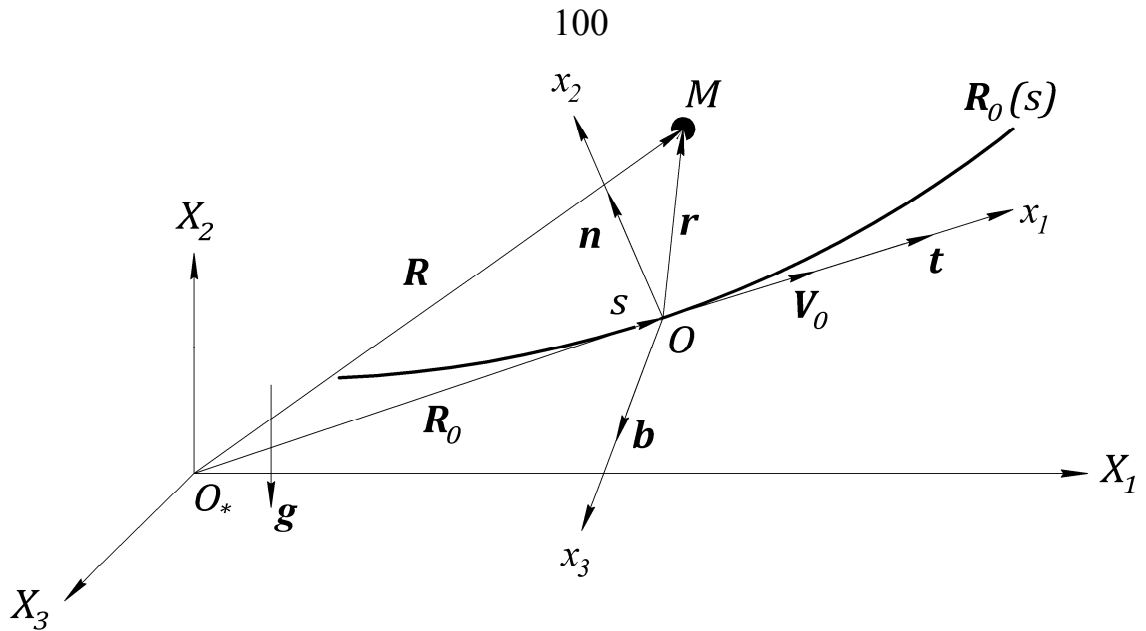


Рис. 94. Геометрическая постановка задачи

Подвижная система координат $Ox_1x_2x_3$, как сопровождающий трехгранник, скользит без отрыва со скоростью $V_0(t)$ вдоль кривой $R_0(s)$; оси x_1 , x_2 и x_3 направлены соответственно по касательной \mathbf{t} , нормали \mathbf{n} и бинормали \mathbf{b} к кривой $R_0(s)$. При этом

$$s = \int_0^t |V_0(t)| dt. \quad (16)$$

Скорость $V_0(t)$ считается заданной; $V_0(t)$ неизвестна, если задается сила тяги $T_0(t)$.

Повороты системы $Ox_1x_2x_3$ будем характеризовать самолетными углами θ_1 , θ_2 и θ_3 , представляющими углы крена, рыскания и тангажа соответственно. Эти углы и последовательность вращений системы $Ox_1x_2x_3$ показаны на рис. 95. Вектор углов поворота будем обозначать через $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$. Вектор координат $\mathbf{r} = [x_1; x_2; x_3]^T$ любой точки твердого тела, жестко связанного с подвижной системой координат $Ox_1x_2x_3$, выражаются через вектор \mathbf{R} как

$$\mathbf{r} = \Lambda(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \quad (17)$$

где $\Lambda = [\lambda_{ij}]_{3 \times 3}$ – матрица перехода при вращении системы координат $O_*X_1X_2X_3$ к системе $Ox_1x_2x_3$, которая при использовании самолетных углов и последовательности их вращений ($\theta_2 \rightarrow \theta_3 \rightarrow \theta_1$) записывается в виде:

$$\Lambda = \Lambda_3 \Lambda_2 \Lambda_1,$$

где Λ_1 – матрица перехода от $OX_1X_2X_3 = Ox_1^0x_2^0x_3^0$ к $Ox_1^1x_2^1x_3^1$ (поворот на угол θ_2), Λ_2 – матрица перехода от $Ox_1^1x_2^1x_3^1$ к $Ox_1^2x_2^2x_3^2$ (поворот на угол θ_3), Λ_3 – матрица перехода от $Ox_1^2x_2^2x_3^2$ к $Ox_1^3x_2^3x_3^3$ (поворот на угол θ_1).

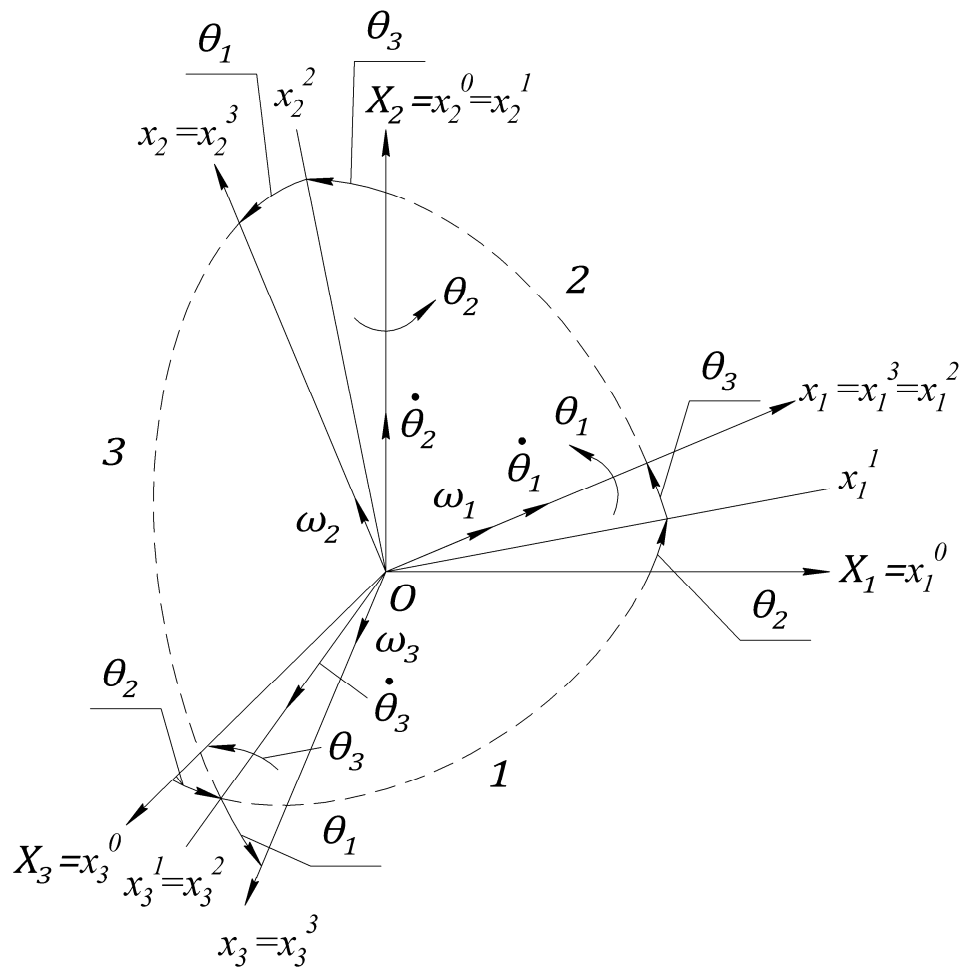


Рис. 95. Преобразования системы координат

Формулы перехода $OX_1X_2X_3 = Ox_1^0x_2^0x_3^0 \rightarrow Ox_1^1x_2^1x_3^1$ и матрица Λ_1 :

$$\begin{cases} x_1^1 = x_1^0 \cos \theta_2 - x_3^0 \sin \theta_2; \\ x_2^1 = x_2^0; \\ x_3^1 = x_1^0 \sin \theta_2 + x_3^0 \cos \theta_2; \end{cases}$$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix},$$

где $s_k \equiv \sin \theta_k$, $c_k \equiv \cos \theta_k$ ($k=1,2,3$).

Формулы перехода $Ox_1^1 x_2^1 x_3^1 \rightarrow Ox_1^2 x_2^2 x_3^2$ и матрица Λ_2 :

$$\begin{cases} x_1^2 = x_1^1 \cos \theta_3 + x_2^1 \sin \theta_3; \\ x_2^2 = -x_1^1 \sin \theta_3 + x_2^1 \cos \theta_3; \\ x_3^2 = x_3^1; \end{cases}$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Формулы перехода $Ox_1^2 x_2^2 x_3^2 \rightarrow Ox_1^3 x_2^3 x_3^3$ и матрица Λ_3 :

$$\begin{cases} x_1^3 = x_1^2; \\ x_2^3 = x_2^2 \cos \theta_1 + x_3^2 \sin \theta_1; \\ x_3^3 = -x_2^2 \sin \theta_1 + x_3^2 \cos \theta_1; \end{cases}$$

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & -s_1 & c_1 \end{bmatrix}.$$

Используя полученные выражения, записываем матрицу направляющих косинусов Λ :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & s_3 & -s_2 c_3 \\ s_1 s_2 - c_1 c_2 s_3 & c_1 c_3 & s_1 c_2 + c_1 s_2 s_3 \\ c_1 s_2 + s_1 c_2 s_3 & -s_1 c_3 & c_1 c_2 - s_1 s_2 s_3 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

при этом матрица Λ является ортогональной и выполняется соотношение $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$.

Вектор мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1; \omega_2; \omega_3]^T$ подвижной системы координат $Ox_1 x_2 x_3$ в проекциях на ее оси связан с вектором углов поворота $\boldsymbol{\theta}$ дифференциальным соотношением:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\theta}}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & s_3 & 0 \\ 0 & c_1 c_3 & s_1 \\ 0 & -s_1 c_3 & c_1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

В общем случае, когда связанное с системой $Ox_1x_2x_3$ тело является упругим (упруго с ней соединено или имеет упруго присоединенные к нему элементы), то за счет упругости появляются неизвестные относительные перемещения, которые будем описывать вектором $\mathbf{u} = [u_1; u_2; u_3]^T$, проекции которого зависят от координат и от времени – $u_k(x_1, x_2, x_3, t)$, $k=1,2,3$. В этом случае радиус-вектор точки упругого тела будем обозначать как

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u}. \quad (20)$$

Конечные деформации (относительные удлинения ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} и углы сдвига γ_{12} , γ_{23} , γ_{31}) определяются через проекции перемещения на оси подвижной системы координат $u_1(x_1, x_2, x_3, t)$, $u_2(x_1, x_2, x_3, t)$, $u_3(x_1, x_2, x_3, t)$ через квадратично нелинейные соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right]; & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 \right]; & \gamma_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}; \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}; & \gamma_{31} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (21)$$

которые справедливы при $\partial u_1 / \partial x_1 \ll 1$, $(\partial u_1 / \partial x_2)^2 \ll 1$, ... ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$).

В геометрически нелинейных задачах на основании метода Ритца и метода конечных элементов перемещение упругого тела в общем случае может быть представлено в виде [1, 2, 57]:

$$\mathbf{u} = \sum_i q_i \boldsymbol{\Phi}_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j q_i q_j \boldsymbol{\Psi}_{ij}, \quad (22)$$

где $q_i(t)$ – обобщенные координаты; $i, j=1,2,\dots,n$; $\boldsymbol{\Phi}_i(x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{\Psi}_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ –

заданные вектор-функции, которые выбираются в классе возможных перемещений тела согласно принятой расчетной модели (стержень, пластина и пр.) с учетом определенных допущений. Функции ψ_{ij} выражаются через φ_i и φ_j и являются симметричными, т. е. $\psi_{ij} = \psi_{ji}$. Обобщенные координаты $q_i(t)$ при $i=1,2,\dots,n$ представляют упругие деформации тела. В частности, если не используются никакие допущения, связывающие различные компоненты перемещений, то можно принять $\psi_{ij} \equiv 0$. В качестве функций φ_i при $i=1,2,\dots,n$ удобно использовать собственные формы малых колебаний рассматриваемой упругой системы. При этом можно ограничиться небольшим числом n этих функций, представляющих низшие формы колебаний, и с учетом их ортогональности упростить уравнения. Для локально связанной с упругим телом системы координат $Ox_1x_2x_3$ для φ_i ($i=1,2,\dots,n$) можно использовать формы собственных колебаний этого тела, закрепленного в точке O или на какой-либо его жесткой части.

Скорость и ускорение точки упругого тела, связанного с подвижной системой координат $Ox_1x_2x_3$, в которой полная производная по времени любого вектора, например скорости \mathbf{V} , определяется как

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V},$$

записываются в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{u}}; & \mathbf{a}_0 &= \dot{\mathbf{V}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_0; \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}}, \end{aligned} \quad (23)$$

где \mathbf{a}_0 – ускорение точки O . Для удобства дальнейших вычислений векторное произведение заменяется матричным по следующему правилу:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \overset{\vee}{\mathbf{a}} \mathbf{b},$$

где верхним знаком \vee обозначается кососимметричная матрица, образованная из компонент соответствующего вектора:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\vee} \mathbf{a} = -\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Направляющее полотно дороги проектируется и его координаты $X_{01}(s)$, $X_{02}(s)$, $X_{03}(s)$ и углы $\theta_1(s)$, $\theta_2(s)$, $\theta_3(s)$ считаются заданными. Они связаны между собой дифференциальными соотношениями, следующими из (17) при $\mathbf{r} = [ds; 0; 0]^T$, $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 = [dX_{01}, dX_{02}, dX_{03}]^T$, то есть

$$\begin{bmatrix} dX_{01} \\ dX_{02} \\ dX_{03} \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}^T \begin{bmatrix} ds \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Откуда с учетом (18) следуют соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{dX_{01}}{ds} &= c_1 c_3; & \frac{dX_{02}}{ds} &= s_1 s_2 - c_1 c_2 s_3; & \frac{dX_{03}}{ds} &= c_1 s_2 + s_1 c_2 s_3; \\ X_{01} &= \int_{s_0}^s (c_1 c_3) ds; & X_{02} &= \int_{s_0}^s (s_1 s_2 - c_1 c_2 s_3) ds; & X_{03} &= \int_{s_0}^s (c_1 s_2 + s_1 c_2 s_3) ds. \end{aligned} \quad (25)$$

При движении тела по направляющей кривой $\mathbf{R}_0(s)$ при заданной векторной функции $\boldsymbol{\theta}(s)$ найдем $d\boldsymbol{\theta}/ds$ и затем, используя формулу (19) с учетом (16), найдем:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) &= \mathbf{A}(s(t)) \frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds} \big|_{\mathbf{V}_0(t)}; \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) &= \left(\frac{d\mathbf{A}}{ds} \frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds} + \mathbf{A} \frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{ds^2} \right) \mathbf{V}_0^2 + \mathbf{A} \frac{d\boldsymbol{\theta}}{ds} \big|_{\dot{\mathbf{V}}_0}. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом, если движущееся по направляющему полотну тело, связанное с подвижной системой координат $Ox_1x_2x_3$ (эта связь будет установлена позднее), является абсолютно жестким, то задача определения скорости и ускорения (и, следовательно, перегрузки) в любой заданной точке тела $M(x_1, x_2, x_3)$ и в заданный момент времени t является задачей кинематики. После определения ускорения $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3, t)$ из уравнений динамического равновесия

твёрдого тела с учетом силы тяжести (эти уравнения будут выведены в следующем разделе), зависящих от углов θ_1 , θ_2 и θ_3 , определяются главный вектор \mathbf{P} и главный момент \mathbf{M} сил реакции и затем – сами реакции.

После этого можно выполнить расчеты на прочность конструкции тележки и всего сооружения вместе с полотном и опорными устройствами.

Если учитывается относительное движения с перемещением $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$, обусловленное упругостью и демпфированием роликов и амортизации, а также упругим деформированием присоединенных масс, то задача существенно усложняется. При заданных с учетом (16) векторных функциях $\mathbf{R}_0(s)$, $\boldsymbol{\theta}(s)$, скорости $\mathbf{V}_0(t)$ и найденной из кинематического условия (26) векторной функции $\boldsymbol{\omega}(t)$ задача сводится к задаче динамики относительно параметров (обобщенных координат), характеризующих неизвестную векторную функцию $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$. Эта задача будет рассмотрена в следующих разделах.

Отметим также следующее замечание. В задаче, сформулированной в этом разделе, предполагается, что тело связано с подвижной системой координат $Ox_1x_2x_3$, которая в свою очередь, при скольжении по криволинейной линии $\mathbf{R}_0(s)$ связана с последней по координатам и углам поворота только в одной точке s , совпадающей в данный момент времени с задней ведущей осью тележки. В действительности в случае двухосной тележки со свободно поворачивающейся относительно центра передней осью, движущейся при криволинейной пространственной направляющей, ролики задней и передней осей будут находится в разных точках кривой $\mathbf{R}_0(s)$ с различными углами наклона касательной $\mathbf{t}(s)$. Локальная кривизна направляющей между осями тележки окажет некоторое влияние на ее угловое положение в данный момент времени и, в результате, на кинематику и динамику движения тележки. Это влияние будет пренебрежимо малым, если расстояние между осями значительно меньше радиуса кривизны направляющей. Метод оценки влияния локальной кривизны

направляющей между осями тележки будет изложен в одном из следующих разделов.

4.2. Нелинейные уравнения движения

Получим уравнения движения системы для наиболее общего случая, то есть при учете относительного движения, обусловленным упругостью и демпфированием роликов и амортизации, а также упругим деформированием присоединенных масс [57].

Уравнения движения системы для векторов \mathbf{V}_0 , $\boldsymbol{\omega}$ и обобщенных координат q_i будем составлять на основе принципа возможных перемещений:

$$\delta\Pi = \delta A_P + \delta A_{\text{ин}}, \quad (27)$$

где $\Pi[\mathbf{u}]$ – потенциальная энергия деформации системы; δA_P – вариация работы гравитационных сил и реакций R_k на тело со стороны траектории, приложенных в точках с координатами (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) ; $\delta A_{\text{ин}}$ – вариация работы инерционных сил. Выражения для δA_P и $\delta A_{\text{ин}}$ имеют следующий вид:

$$\delta A_P = \int_V \delta \mathbf{u}_*^T \mathbf{g} dm + \sum_k \delta \mathbf{u}_*^T(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) R_k; \quad (28)$$

$$\delta A_{\text{ин}} = - \int_V \delta \mathbf{u}_*^T \mathbf{a} dm, \quad (29)$$

где $\delta \mathbf{u}_*$ – вариация перемещения любой точки тела с учетом вариаций смещения $\delta \mathbf{u}_0 = \Lambda \delta \mathbf{R}_0$ и малого поворота $\delta \boldsymbol{\theta}$ подвижной системы координат:

$$\delta \mathbf{u}_* = \delta \mathbf{u}_0 + \delta \boldsymbol{\theta} \times \tilde{\mathbf{r}} + \delta \mathbf{u}; \quad (30)$$

\mathbf{g} – вектор массовых сил тяготения; $dm = \rho dV$ – масса элемента тела, сохраняющая свою величину в процессе его деформирования; $\rho(x_1, x_2, x_3)$ – плотность тела; dV – элемент объема тела. Из выражения (22) с учетом $\Psi_{ij} = \Psi_{ji}$ получаем:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{u} &= \sum_i \delta q_i \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i; & \dot{\mathbf{u}} &= \sum_i \dot{q}_i \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i; \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \sum_i \ddot{q}_i \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i + \sum_i \sum_j \dot{q}_i \dot{q}_j \boldsymbol{\Psi}_{ij}; & \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i &= \boldsymbol{\varphi}_i + \sum_j q_j \boldsymbol{\Psi}_{ij}.\end{aligned}\quad (31)$$

Поскольку вариации $\delta \mathbf{u}_0$, $\delta \boldsymbol{\theta}$ и δq_i произвольны и независимы, из принципа возможных перемещений (27) с учетом (28) – (31) следуют уравнения движения:

$$\begin{aligned}\int_V \mathbf{a} dm &= \mathbf{P}; & \int_V \check{\mathbf{r}} \mathbf{a} dm &= \mathbf{M}; \\ \int_V \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \mathbf{a} dm + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} &= Q_i, & i &= 1, 2 \dots n,\end{aligned}\quad (32)$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{P}_g + \mathbf{P}_R$; \mathbf{P}_R – вектор сил реакций; $\mathbf{M} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_R$; \mathbf{M}_R – вектор моментов от реакций; $Q_i = Q_{g,i}$. Векторы \mathbf{P}_g , \mathbf{M}_g и $Q_{g,i}$ вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{P}_g = \int_V \mathbf{g} dm; \quad \mathbf{M}_g = \int_V \check{\mathbf{r}} \mathbf{g} dm; \quad Q_{g,i} = \int_V \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \mathbf{g} dm. \quad (33)$$

Уравнения (32) могут быть также составлены другим способом – как уравнения Эйлера–Лагранжа для скоростей \mathbf{V}_0 , $\boldsymbol{\omega}$ и уравнения Лагранжа для обобщенных координат q_i :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}_0} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}_0} &= \mathbf{P}; & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{V}_0 \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}_0} &= \mathbf{M}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} &= Q_i, & i &= 1, 2 \dots n,\end{aligned}\quad (34)$$

где T – кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{V}^T \mathbf{V} dm. \quad (35)$$

После преобразований уравнений (32) получим:

$$\begin{aligned}
m\mathbf{a}_0 - \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{L}}}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_j \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{L}}}_j \ddot{q}_j - (\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{L}}}_0 + 2 \sum_j \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{L}}}_j \dot{q}_j) \boldsymbol{\omega} + \sum_j \sum_k \overset{\vee}{\mathbf{L}}_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k &= \mathbf{P}; \\
-\overset{\vee}{\tilde{\mathbf{L}}}_0^T \mathbf{a}_0 + \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{I}}}_{00} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_j \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{S}}}_{0j} \ddot{q}_j + (\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{I}}}_{00} + 2 \sum_j \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{I}}}_{0j} \dot{q}_j) \boldsymbol{\omega} + \sum_j \sum_k \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{S}}}_{0,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k &= \mathbf{M}; \\
\tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{a}_0 + \tilde{\mathbf{S}}_{0i}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} + \sum_j \tilde{m}_{ij} \ddot{q}_j - (\boldsymbol{\omega}^T \tilde{\mathbf{I}}_{0i}^T + 2 \sum_j \tilde{\mathbf{S}}_{ij}^T \dot{q}_j) \boldsymbol{\omega} + \sum_j \sum_k \tilde{m}_{i,jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} &= Q_i, \\
i &= 1, 2, \dots, n,
\end{aligned} \tag{36}$$

где

$$\begin{aligned}
m &= \int_V dm; \quad \tilde{\mathbf{L}}_0 = \int_V \tilde{\mathbf{r}} dm; \quad \tilde{\mathbf{L}}_i = \int_V \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i dm; \quad \mathbf{L}_{ij} = \int_V \boldsymbol{\Psi}_{ij} dm; \quad \tilde{\mathbf{I}}_{00} = - \int_V \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{r}}^T dm; \\
\tilde{\mathbf{I}}_{0i} &= - \int_V \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^T dm; \quad \tilde{\mathbf{S}}_{0i} = \int_V \tilde{\mathbf{r}} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i dm; \quad \tilde{\mathbf{S}}_{0,ij} = \int_V \tilde{\mathbf{r}} \boldsymbol{\Psi}_{ij} dm; \quad \tilde{\mathbf{S}}_{ij} = \int_V \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_j^T dm; \\
\tilde{m}_{ij} &= \int_V \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_j dm; \quad \tilde{m}_{i,jk} = \int_V \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \boldsymbol{\Psi}_{jk} dm; \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{37}$$

В выражениях (37) инерционные характеристики, отмеченные сверху волной, вычисляются для деформированного тела и зависят от обобщенных координат в силу того, что от них зависят функции $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$ и $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i$, как (22) и (31). Например, матрица (тензор) инерции деформированного тела $\tilde{\mathbf{I}}_{00}$ зависит от обобщенных координат до четвертой степени включительно. При практических расчетах, считая упругие перемещения малыми по сравнению с габаритными размерами системы (так как углы поворота элементов тела, обусловленные упругими деформациями, являются конечными), в уравнениях (36) с учетом (37) можно ограничиться нелинейными членами не выше третьего или даже второго порядка по координатам q_i .

Если ограничиться нелинейными членами второго порядка, то коэффициенты (37) могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{L}}_0 &\approx \mathbf{L}_0 + \sum_k \mathbf{L}_k q_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \mathbf{L}_{kl} q_k q_l; & \tilde{\mathbf{L}}_j &\approx \mathbf{L}_j + \sum_k \mathbf{L}_{jk} q_k; \\
\tilde{\mathbf{I}}_{00} &\approx \mathbf{I}_{00} + \sum_k (\mathbf{I}_{0k} + \mathbf{I}_{0k}^T) q_k + \sum_k \sum_l (\mathbf{I}_{kl} + \frac{1}{2} [\mathbf{I}_{0,kl} + \mathbf{I}_{0,kl}^T]) q_k q_l; \\
\tilde{\mathbf{I}}_{0j} &\approx \mathbf{I}_{0j} + \sum_k (\mathbf{I}_{kj} + \mathbf{I}_{0,kj}^T) q_k + \sum_k \sum_l (\mathbf{I}_{k,jl} + \frac{1}{2} \mathbf{I}_{j,kl}^T) q_k q_l; \\
\tilde{\mathbf{S}}_{0j} &\approx \mathbf{S}_{0j} + \sum_k (\mathbf{S}_{kj} + \mathbf{S}_{0,kj}) q_k + \sum_k \sum_l (\mathbf{S}_{k,jl} - \frac{1}{2} \mathbf{S}_{j,kl}) q_k q_l; \\
\tilde{\mathbf{S}}_{ij} &\approx \mathbf{S}_{ij} + \sum_k (\mathbf{S}_{i,jk} - \mathbf{S}_{j,ik}) q_k; & \tilde{\mathbf{S}}_{0,jk} &\approx \mathbf{S}_{0,jk}; \\
\tilde{m}_{ij} &\approx m_{ij} + \sum_m (m_{i,jk} + m_{j,ik}) q_k; & \tilde{m}_{i,jk} &\approx m_{i,jk}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Коэффициенты правых частей выражений (38) определяются по формулам (37), если в них опустить верхний знак (\sim) и, кроме того, учесть дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{jk} &= - \int_V \overset{\vee}{\boldsymbol{\varphi}}_j \overset{\vee}{\boldsymbol{\varphi}}_k dm; & \mathbf{I}_{0,jk} &= - \int_V \mathbf{r} \overset{\vee}{\boldsymbol{\psi}}_{jk} dm; \\
\mathbf{I}_{k,jl} &= - \int_V \overset{\vee}{\boldsymbol{\varphi}}_k \overset{\vee}{\boldsymbol{\psi}}_{jl} dm; & \mathbf{S}_{k,jl} &= \int_V \overset{\vee}{\boldsymbol{\varphi}}_k \overset{\vee}{\boldsymbol{\psi}}_{jl} dm.
\end{aligned} \tag{39}$$

Потенциальная энергия деформации упругого тела записывается в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T)^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T)^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T) dV, \tag{40}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}; \varepsilon_{22}; \varepsilon_{33}; \gamma_{12}; \gamma_{23}; \gamma_{31}]^T$, $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}; \sigma_{22}; \sigma_{33}; \tau_{12}; \tau_{23}; \tau_{31}]^T$ – векторы, составленные из компонент деформаций и напряжений; вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_T$ представляет начальные нестесненные температурные или технологические деформации; \mathbf{C} – симметричная матрица коэффициентов упругости, входящих в уравнения закона Гука $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T)$. С учетом соотношений (21) и разложения (22) выражение Π записывается в обобщенных координатах. В случае тонких тел (стержней, пластин и оболочек) для форм преимущественно поперечных колебаний, при которых тангенциальные перемещения значительно меньше нормальных, последние по методу Ритца обычно представляются в виде линейных

зависимостей от обобщенных координат. При этом конечные деформации (21) и соответственно тангенциальные перемещения зависят от обобщенных координат квадратичным образом, как (22). Тогда выражение Π в обобщенных координатах будет содержать нелинейные члены до четвертого порядка, а обобщенные упругие силы $\partial\Pi/\partial q_i$ – до третьего порядка включительно. Следует заметить, что в общей нелинейной постановке, выражение потенциальной энергии деформации упругого тела может быть произвольным в зависимости от вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Величина вектора массовых сил тяготения вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{g} = -g_0 \mathbf{v}; \quad \mathbf{v} = \Lambda[0;1;0]^T, \quad (41)$$

где g_0 – среднее значение ускорения свободного падения у поверхности Земли; \mathbf{v} – единичный вектор, направленный вдоль оси X_2 инерциальной системы координат $O_*X_1X_2X_3$ и записанный в проекциях на оси подвижной системы. Гравитационные силы и моменты (33) с учетом (41) описываются следующими выражениями:

$$\mathbf{P}_g = -g_0 m \mathbf{v}; \quad \mathbf{M}_g = -g_0 \overset{\vee}{\mathbf{L}}_0 \mathbf{v}; \quad Q_{g,i} = -g_0 \tilde{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{v}, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{0i} &= \int_V \tilde{\mathbf{r}}^T \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i dm \approx m_{0i} + \sum_k (m_{ik} + m_{0,ik}) q_k + \sum_k \sum_l (m_{k,il} + m_{i,kl}) q_k q_l; \\ m_{0i} &= \int_V \mathbf{r}^T \boldsymbol{\varphi}_i dm; \quad m_{0,ik} = \int_V \mathbf{r}^T \boldsymbol{\psi}_{ik} dm. \end{aligned} \quad (43)$$

В результате получается замкнутая система нелинейных дифференциальных уравнений: шесть уравнений первого порядка для шести компонент векторов \mathbf{P}_R , \mathbf{M}_R и n уравнений для обобщенных координат $q_1, q_2 \dots q_n$.

Если движущееся по направляющему полотну тело, связанное с подвижной системой координат $Ox_1x_2x_3$ является абсолютно жестким, то уравнения (36)

переписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}_0 - \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{L}}}_0 \overset{\vee}{\dot{\boldsymbol{\omega}}} - \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{L}}}_0 \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{P}; \\ -\overset{\vee}{\tilde{\mathbf{L}}}_0^T \mathbf{a}_0 + \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{I}}}_{00} \overset{\vee}{\dot{\boldsymbol{\omega}}} + \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} \overset{\vee}{\tilde{\mathbf{I}}}_{00} \overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (44)$$

При известных векторах \mathbf{V}_0 , $\overset{\vee}{\boldsymbol{\omega}}$, полученных при решении кинематической задачи, из уравнений (44) определяются главный вектор \mathbf{P} и главный момент \mathbf{M} сил реакции и затем – сами реакции.

4.3. Геометрическое моделирование двухосной тележки

Проведем геометрическое моделирование параметров двухосной тележки для установления ее связи с осями подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$.

Как известно из курса дифференциальной геометрии, в любой точке пространственной кривой можно определить ортогональную систему координат t, n, b , которая задается тремя взаимно перпендикулярными единичными векторами: \mathbf{t} – вектор касательной, \mathbf{n} – вектор нормали, \mathbf{b} – вектор бинормали. В инерциальной системе отсчета $O_*X_1X_2X_3$ данные векторы имеют следующие координаты [54, 55, 56]:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= [X_1'(s); X_2'(s); X_3'(s)]^T; \\ \mathbf{n} &= \begin{bmatrix} \frac{X_1'(s)}{\sqrt{(X_1''(s))^2 + (X_2''(s))^2 + (X_3''(s))^2}} \\ \frac{X_2'(s)}{\sqrt{(X_1''(s))^2 + (X_2''(s))^2 + (X_3''(s))^2}} \\ \frac{X_3'(s)}{\sqrt{(X_1''(s))^2 + (X_2''(s))^2 + (X_3''(s))^2}} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{b} = \left[\begin{array}{c} \frac{\begin{vmatrix} X_2'(s) & X_3'(s) \\ X_2''(s) & X_3''(s) \end{vmatrix}}{\sqrt{(X_1''(s))^2 + (X_2''(s))^2 + (X_3''(s))^2}} \\ \frac{\begin{vmatrix} X_3'(s) & X_1'(s) \\ X_3''(s) & X_1''(s) \end{vmatrix}}{\sqrt{(X_1''(s))^2 + (X_2''(s))^2 + (X_3''(s))^2}} \\ \frac{\begin{vmatrix} X_1'(s) & X_2'(s) \\ X_1''(s) & X_2''(s) \end{vmatrix}}{\sqrt{(X_1''(s))^2 + (X_2''(s))^2 + (X_3''(s))^2}} \end{array} \right]$$

где штрихом обозначена производная по дуге s .

Поскольку передняя ведомая ось может свободно поворачиваться относительно задней ведущей оси, то заменим переднюю ось тележки срединной точкой, которая движется по центральной линии $\mathbf{R}_0(s)$ (рис. 96).

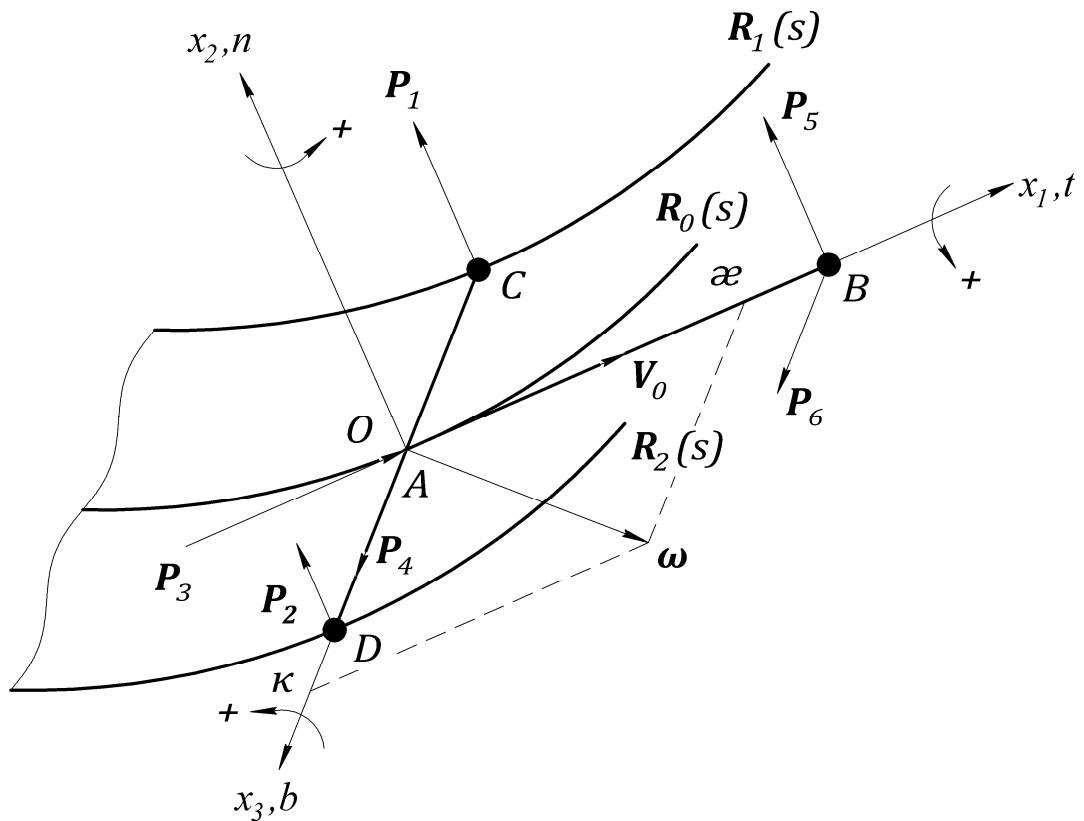


Рис. 96. Геометрическое моделирование двухосной тележки

Центр подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ свяжем с точкой A , являющейся серединой задней ведущей оси $CD = 2a$. Данная ось располагается вдоль оси x_3 , то есть по бинормали. Продольную связь $AB = l$, которая перпендикулярна оси CD , направим по касательной. Точка B моделирует переднюю ведомую ось и ее ролики. Точки C и D моделируют ролики ведущей оси. Таким образом, при движении по направляющему полотну тележка всегда находится в спрямляющей плоскости. Как говорилось ранее, точка B движется по центральной линии $\mathbf{R}_0(s)$. Точки C и D двигаются по эквидистантам к кривой $\mathbf{R}_0(s)$ и задаются соответственно векторами $\mathbf{R}_1(s)$ и $\mathbf{R}_2(s)$, так как полотно является жестким и расстояния AD и AC остаются постоянными.

На траекторию со стороны тележки действуют силы реакции, которые входят в выражения для \mathbf{P} и \mathbf{M} (рис. 96). Со стороны задней ведущей оси – реакции \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 (приложены в точках C и D соответственно, направлены по нормали), реакция \mathbf{P}_3 (движущая сила, приложена в точке A , направлена по касательной) и реакция \mathbf{P}_4 (приложена в точке A , направлена по бинормали, является суммарной от роликов C и D). Со стороны передней ведомой оси – реакция \mathbf{P}_5 (приложена в точке B , направлена по нормали) и реакция \mathbf{P}_6 (приложена в точке B , направлена по бинормали). Таким образом, количество неизвестных реакций равно 6, что совпадает с количеством уравнений (44). Выражения для вектора \mathbf{P}_R и момента \mathbf{M}_R сил реакции имеют вид:

$$\mathbf{P}_R = [P_3; P_1 + P_2 + P_5; P_4 + P_6]^T;$$

$$\mathbf{M}_R = [(P_1 - P_2)a; -P_6l; P_5l]^T.$$

Так как вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории, то заданный вектор скорости \mathbf{V}_0 направлен вдоль оси t , поэтому выражение для определения вектора скорости поступательного движения подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно инерциальной системы $O_*X_1X_2X_3$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{V}_0 = [V_0; 0; 0]^T,$$

где V_0 – модуль вектора \mathbf{V}_0 . При движении вдоль траектории трехгранник совершает вращательное движение с вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, определяемым из следующего векторного соотношения [54, 55, 56]:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{t} + \boldsymbol{\kappa} \mathbf{b},$$

где $\boldsymbol{\alpha}(s)$ – кручение кривой, $\boldsymbol{\kappa}(s)$ – кривизна кривой. Формулы для вычисления кручения и кривизны траектории имеют вид [54, 55, 56]:

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \frac{\begin{vmatrix} X_1'(s) & X_2'(s) & X_3'(s) \\ X_1''(s) & X_2''(s) & X_3''(s) \\ X_1'''(s) & X_2'''(s) & X_3'''(s) \end{vmatrix}}{(X_1''(s))^2 + (X_2''(s))^2 + (X_3''(s))^2};$$

$$\boldsymbol{\kappa}(s) = \sqrt{(X_1''(s))^2 + (X_2''(s))^2 + (X_3''(s))^2}.$$

Вектор скорости вращательного движения подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно инерциальной системы $O_*X_1X_2X_3$ в этом случае записывается следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\alpha}; 0; \boldsymbol{\kappa}]^T.$$

4.4. Учет кривизны направляющей поверхности

Приведем метод оценки влияния локальной кривизны направляющей между осями тележки.

Исходные данные: координаты центральной направляющей линии $\mathbf{R}_0(s)$ – $X_{01}(s)$, $X_{02}(s)$, $X_{03}(s)$; $\theta_1(s)$, $\theta_2(s)$, $\theta_3(s)$ – углы поворота связанной системы координат $Ax_1x_2x_3$ (рис. 96), оси которой x_1 , x_2 , x_3 в исходной положении совпадают с осями неподвижной системы $O_*X_1X_2X_3$ (соответственно x_1 , x_2 , x_3 – касательная, нормаль и бинормаль к $\mathbf{R}_0(s)$). Точка B , являющаяся центром передней, свободно поворачивающейся оси тележки, движется по кривой $\mathbf{R}_0(s)$ (рис. 97).

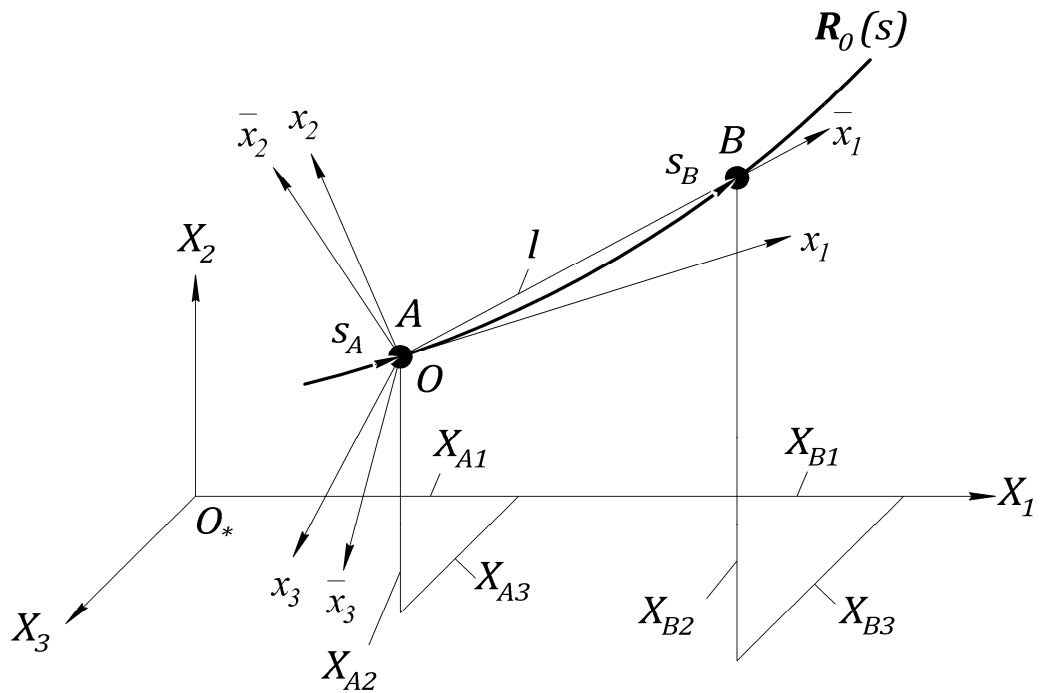


Рис. 97. Учет кривизны направляющей поверхности

Положение точек A и B характеризуется радиус-векторами \mathbf{R}_A и \mathbf{R}_B соответственно, выражения для которых имеют вид (рис. 97):

$$\mathbf{R}_A = [X_{A1}; X_{A2}; X_{A3}]^T; \quad \mathbf{R}_B = [X_{B1}; X_{B2}; X_{B3}]^T.$$

Введем вектор $\Delta\bar{\mathbf{R}}$, который характеризует разность соответствующих координат точек A и B :

$$\Delta\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} X_{B1} - X_{A1} \\ X_{B2} - X_{A2} \\ X_{B3} - X_{A3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\bar{X}_1 \\ \Delta\bar{X}_2 \\ \Delta\bar{X}_3 \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что в пределах длины l , кривизна $\mathbf{R}_0(s)$ мала и, соответственно, малы углы между направлением \vec{l} и касательной к дуге AB , в силу чего $s_B - s_A \approx l$. При этом допущении угол между осями x_1 и \bar{x}_1 будет малым и $l = |\Delta\bar{\mathbf{R}}| = \sqrt{\Delta\bar{X}_1^2 + \Delta\bar{X}_2^2 + \Delta\bar{X}_3^2}$ считается равным расстоянию между задней (A) и передней (B) осями тележки.

В данном случае при учете кривизны направляющей поверхности (полотна) с телом (тележкой) будет связана система координат $A\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. Углы поворота этой

системы будем обозначать как

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1; \quad \bar{\theta}_2 = \theta_2 + \Delta\theta_2; \quad \bar{\theta}_3 = \theta_3 + \Delta\theta_3, \quad (45)$$

где $\Delta\theta_2$ и $\Delta\theta_3$ – малые углы ($\sin \Delta\theta_i \approx \Delta\theta_i$, $\cos \Delta\theta_i \approx 1$, $i = 2,3$). При этом с учетом (45) будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{s}_i &= \sin(\theta_i + \Delta\theta_i) \approx \sin \theta_i + \Delta\theta_i \cos \theta_i = s_i + \Delta\theta_i c_i; \\ \bar{c}_i &= \cos(\theta_i + \Delta\theta_i) \approx \cos \theta_i - \Delta\theta_i \sin \theta_i = c_i - \Delta\theta_i s_i. \end{aligned} \quad (46)$$

Матрицу перехода от системы $O_*X_1X_2X_3$ к подвижной системе $A\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ будем обозначать через $\bar{\Lambda}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3)$; она определяется также как матрица $\Lambda(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ (18) с заменой $s_i \rightarrow \bar{s}_i$, $c_i \rightarrow \bar{c}_i$.

С точностью до линейных членов с $\Delta\theta_2$ и $\Delta\theta_3$ при $\Delta\theta_1 = 0$ получим:

$$\bar{\Lambda} = \Lambda + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_3} \Delta\theta_3, \quad (47)$$

где Λ записывается в виде (18), а выражения для производных от матрицы Λ имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_2} &= \begin{bmatrix} -s_2 c_3 & 0 & -c_2 c_3 \\ s_1 c_2 + c_1 s_2 s_3 & 0 & -s_1 s_2 + c_1 c_2 s_3 \\ c_1 c_2 - s_1 s_2 s_3 & 0 & -c_1 s_2 - s_1 c_2 s_3 \end{bmatrix}; \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_3} &= \begin{bmatrix} -c_2 s_3 & c_3 & s_2 s_3 \\ -c_1 c_2 c_3 & -c_1 s_3 & c_1 s_2 c_3 \\ s_1 c_2 c_3 & s_1 s_3 & -s_1 s_2 c_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (48)$$

Уравнение для вектора $\bar{\mathbf{r}}$ в точке B $\bar{\mathbf{r}}_B = \bar{\Lambda} \Delta \bar{\mathbf{R}}$ при $\bar{x}_{1B} = l$, $\bar{x}_{2B} = 0$, $\bar{x}_{3B} = 0$ с учетом (47) запишем в виде:

$$\left[\Lambda + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_3} \Delta\theta_3 \right] \begin{bmatrix} \Delta \bar{X}_1 \\ \Delta \bar{X}_2 \\ \Delta \bar{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Это уравнение эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned}
l_{10} + l_{12}\Delta\theta_2 + l_{13}\Delta\theta_3 &= l; \\
l_{20} + l_{22}\Delta\theta_2 + l_{23}\Delta\theta_3 &= 0; \\
l_{30} + l_{32}\Delta\theta_2 + l_{33}\Delta\theta_3 &= 0,
\end{aligned} \tag{50}$$

где

$$\begin{aligned}
l_{10} &= c_2c_3\Delta\bar{X}_1 + s_3\Delta\bar{X}_2 - s_2c_3\Delta\bar{X}_3; \\
l_{20} &= (s_1s_2 - c_1c_2s_3)\Delta\bar{X}_1 + c_1c_3\Delta\bar{X}_2 + (s_1c_2 + c_1s_2s_3)\Delta\bar{X}_3; \\
l_{30} &= (c_1s_2 + s_1c_2s_3)\Delta\bar{X}_1 - s_1c_3\Delta\bar{X}_2 + (c_1c_2 - s_1s_2s_3)\Delta\bar{X}_3; \\
l_{12} &= -s_2c_3\Delta\bar{X}_1 - c_2c_3\Delta\bar{X}_3; \\
l_{13} &= -c_2s_3\Delta\bar{X}_1 + c_3\Delta\bar{X}_2 + s_2s_3\Delta\bar{X}_3; \\
l_{22} &= (s_1c_2 + c_1s_2s_3)\Delta\bar{X}_1 - (s_1s_2 - c_1c_2s_3)\Delta\bar{X}_3; \\
l_{23} &= -c_1c_2c_3\Delta\bar{X}_1 - c_1s_3\Delta\bar{X}_2 + c_1s_2c_3\Delta\bar{X}_3; \\
l_{32} &= (c_1c_2 - s_1s_2s_3)\Delta\bar{X}_1 - (c_1s_2 + s_1c_2s_3)\Delta\bar{X}_3; \\
l_{33} &= s_1c_2c_3\Delta\bar{X}_1 + s_1s_3\Delta\bar{X}_2 - s_1s_2c_3\Delta\bar{X}_3.
\end{aligned} \tag{51}$$

Из второго и третьего уравнения системы (50) определяются $\Delta\theta_2$ и $\Delta\theta_3$; при этом первое уравнение системы (50) удовлетворяется тождественно с точностью до линейных членов с $\Delta\theta_2$ и $\Delta\theta_3$ включительно.

В результате с учетом найденных значений $\Delta\theta_2$, $\Delta\theta_3$ и матриц (48) определяется по формуле (47) переходная матрица $\bar{\Lambda}$ для подвижной системы координат $A\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, которая по сравнению с матрицей Λ учитывает влияние кривизны полотна дороги на участке $s_B - s_A \approx l$.

Вектор скорости \mathbf{V}_0 создается ведущими колесами (роликами) задней оси и направлен вдоль касательной к кривой $\mathbf{R}_0(s)$, то есть вдоль оси Ax_1 . В проекциях на оси подвижной системы координат $A\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ он имеет вид

$$\bar{\mathbf{V}}_0 \approx \mathbf{V}_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \Delta\theta_3 \\ -\Delta\theta_2 \end{bmatrix} \tag{52}$$

и определяется из дифференциального соотношения $\mathbf{V}_0 = \Lambda \dot{\mathbf{R}}_0$:

$$\bar{\mathbf{V}}_0 = \bar{\Lambda} \dot{\mathbf{R}}_0. \tag{53}$$

Вектор мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в проекциях на оси системы $A\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ связан с углами поворота этой системы (вектором $\bar{\boldsymbol{\theta}} = [\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3]^T$) дифференциальным соотношением типа (19):

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \bar{\mathbf{A}}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3)\dot{\bar{\boldsymbol{\theta}}}, \quad (54)$$

где матрица $\bar{\mathbf{A}}$ имеет такой же вид как матрица \mathbf{A} (19) при замене $s_i \rightarrow \bar{s}_i$, $c_i \rightarrow \bar{c}_i$. В линейном приближении при малых $\Delta\theta_2$, $\Delta\theta_3$ и $\Delta\theta_1 = 0$:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_2} \Delta\theta_2 + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_3} \Delta\theta_3; \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_2} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta_3} = \begin{bmatrix} 0 & c_3 & 0 \\ 0 & -c_1 s_3 & 0 \\ 0 & s_1 s_3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

При движении подвижной системы координат $Ax_1x_2x_3$ или $A\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ вдоль центральной линии $\mathbf{R}_0(s)$ криволинейной поверхности полотна дороги с касательной скоростью $V_0 = \dot{s}$ векторы $\bar{\mathbf{V}}_0$ и $\bar{\boldsymbol{\omega}}$, так же как и \mathbf{V}_0 и $\boldsymbol{\omega}$, и затем их производные $\dot{\bar{\mathbf{V}}}_0$ и $\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}$ вычисляются в зависимости от заданных параметров траектории $\theta_1(s)$, $\theta_2(s)$, $\theta_3(s)$ и $X_{01}(s)$, $X_{02}(s)$, $X_{03}(s)$, то есть векторов $\boldsymbol{\theta}(s)$ и $\mathbf{R}_0(s)$, при

$$s = \int_{t_0}^t V_0(t) dt. \quad (56)$$

4.5. Учет относительного движения внутренних масс

В данном разделе приведена методика учета наличия относительного движения внутренних масс для исследуемого тела. За счет их учета можно в рассматриваемую модель тела ввести перемещения опорных устройств с закрепленными на них пассажирами. Таким образом, вычислив необходимые перегрузки, можно провести биомеханический анализ [18].

За счет наличия деформирования присоединенных масс решение задачи ищется в виде системы уравнений (36) при учете относительного движения с

перемещением $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ для различных механических моделей. Примеры механических моделей подобных систем приведены на рис. 98.

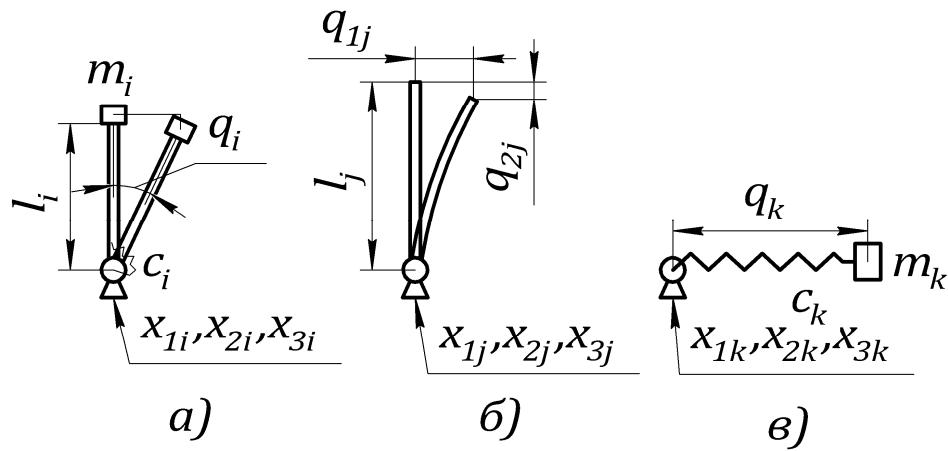


Рис. 98. Механические модели движения внутренних масс

Механической моделью может служить абсолютно твердый стержень длиной l_i , прикрепленный к основанию с координатами (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) и пружиной c_i , с массой m_i на конце (рис. 98, а). В качестве обобщенной координаты q_i используется угол отклонения стержня от вертикали. Второй вид механической модели – упругий стержень длиной l_j , прикрепленный к основанию с координатами (x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}) (рис. 98, б). В качестве обобщенных координат q_{1j} и q_{2j} можно выбрать отклонение по горизонтали и вертикали конца стержня соответственно. Третий возможный вид модели – масса m_k на пружине c_k , прикрепленной к основанию с координатами (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) (рис. 98, в). Данные модели могут быть прикреплены в любой точке тела и совершать относительные движения в любой плоскости. Характеристики упругости механических моделей могут быть нелинейными. Так же может быть учтено наличие демпфирования в подобных системах с учетом их возможных нелинейных характеристик.

Для каждой механической модели выбирается система вектор-функций $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$, $\Psi_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ и решается система уравнений движения тела в виде (36).

4.6. Учет упругости и демпфирования роликов

За счет упругости и демпфирования роликов тележка будет совершать дополнительные движения как твердое тело с 5-ю степенями свободы относительно подвижной системы координат $Ax_1x_2x_3$ или $A\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. В качестве обобщенных координат, представляющих эти движения, будем рассматривать: перемещения $q_{0_2} = u_{02}$, $q_{0_3} = u_{03}$ полюса (точки A) вдоль координатных осей x_2 , x_3 (или \bar{x}_2 , \bar{x}_3) и углы поворота тележки $q_{0_4} = \Delta\tilde{\theta}_1$, $q_{0_5} = \Delta\tilde{\theta}_2$, $q_{0_6} = \Delta\tilde{\theta}_3$ в квадратичном приближении ($\sin \Delta\tilde{\theta}_i \approx \Delta\tilde{\theta}_i$, $\cos \Delta\tilde{\theta}_i \approx 1 - \Delta\tilde{\theta}_i^2/2$, $i=1,2,3$) относительно осей x_1 , x_2 , x_3 (или относительно осей \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \bar{x}_3) (рис. 99). В результате точки A , B , C и D , которые по-прежнему связаны с траекторией движения, смещаются в точки A' , B' , C' и D' , которые в данном случае характеризуют положение тележки после введения упругостей роликов, то есть $A'B' = l$ и $C'D' = 2a$ (смещения точек C и D по оси x_3 или \bar{x}_3 равны).

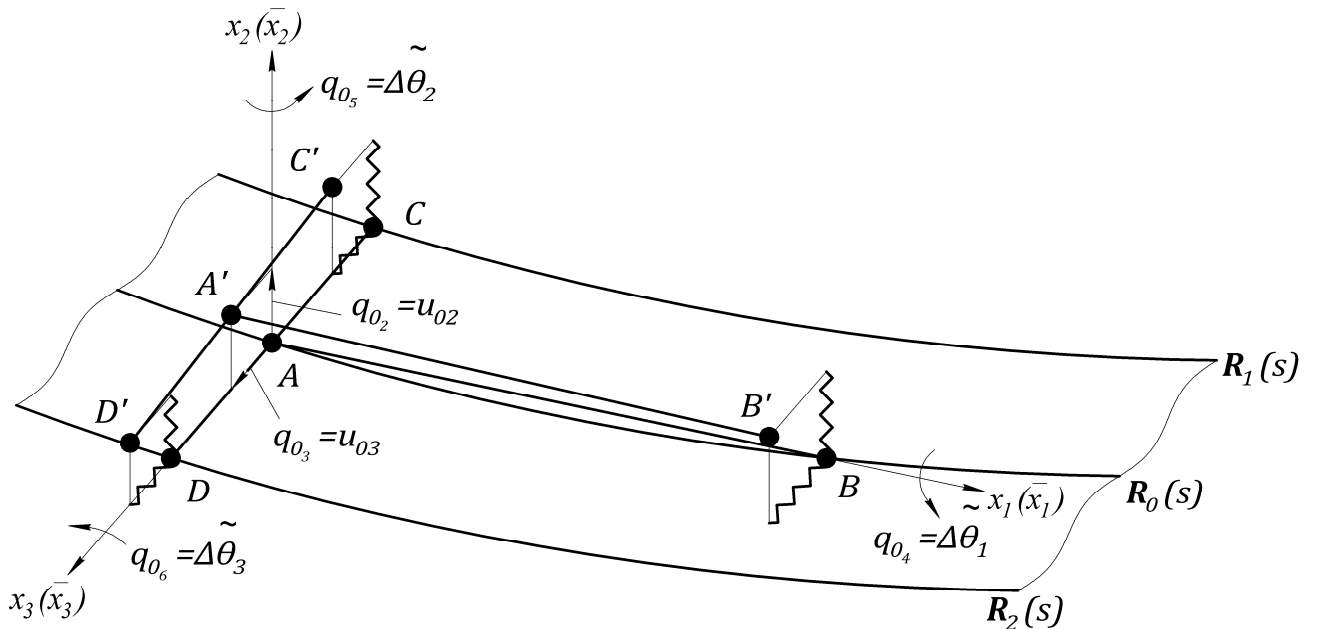


Рис. 99. Учет упругости и демпфирования роликов

В этом случае вектор дополнительных перемещений твердого тела, обусловленных упругими деформациями роликов, будет иметь вид, аналогичный (22):

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=2}^6 q_{0_i} \boldsymbol{\varphi}_{0_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=4}^6 \sum_{j=4}^6 q_{0_i} q_{0_j} \boldsymbol{\Psi}_{0_i 0_j}, \quad (57)$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_{0_2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; & \boldsymbol{\varphi}_{0_3} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; & \boldsymbol{\varphi}_{0_4} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}; & \boldsymbol{\varphi}_{0_5} &= \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{bmatrix}; & \boldsymbol{\varphi}_{0_6} &= \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \boldsymbol{\Psi}_{0_4 0_4} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ -x_2 \end{bmatrix}; & \boldsymbol{\Psi}_{0_4 0_5} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & \boldsymbol{\Psi}_{0_4 0_6} &= \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; & \boldsymbol{\Psi}_{0_5 0_5} &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \\ -x_3 \end{bmatrix}; & \boldsymbol{\Psi}_{0_5 0_6} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}; \\ \boldsymbol{\Psi}_{0_6 0_6} &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ 0 \end{bmatrix}; & \boldsymbol{\Psi}_{0_i 0_j} &= \boldsymbol{\Psi}_{0_j 0_i}. \end{aligned}$$

При использовании подвижной системы координат $A\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ вместо $Ax_1x_2x_3$ необходимо выполнить замену $x_i \rightarrow \bar{x}_i$, $i=1,2,3$.

В общем случае при физически нелинейных деформациях, включая возможные зазоры, потенциальная энергия роликов тележки записывается в обобщенных координатах как

$$\Pi^P = \Pi^P(q_{0_2}, q_{0_3}, q_{0_4}, q_{0_5}, q_{0_6}). \quad (58)$$

При малых упругих деформациях роликов (в пределах закона Гука) и малых углах поворота тела, обусловленных этими деформациями, будем иметь:

$$\Pi^P = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^6 \sum_{j=2}^6 k_{ij}^P q_{0_i} q_{0_j} \quad (59)$$

или

$$\Pi^P = \frac{1}{2} \mathbf{q}_0^T \mathbf{K}_0^P \mathbf{q}_0, \quad (60)$$

где $\mathbf{K}_0^P = [k_{ij}^P]$ при $i, j = 2 \dots 6$ – матрица коэффициентов жесткости,

$$\mathbf{q}_0 = [q_{0_2}, q_{0_3}, q_{0_4}, q_{0_5}, q_{0_6}]^T.$$

В общем случае при наличии сил демпфирования вариация их работы записывается в следующем виде:

$$\delta A_{\delta}^P = -\delta \mathbf{q}_0^T \mathbf{D}_0^P \dot{\mathbf{q}}_0, \quad (61)$$

где $\mathbf{D}_0^P = [d_{ij}^P]$ при $i, j = 2 \dots 6$ – матрица коэффициентов демпфирования.

Вектор перемещений тележки (57), обусловленный податливостью роликов, складывается с вектором относительных упругих перемещений присоединенных масс, характеризуемых обобщенными координатами $q_1, q_2 \dots q_n$, и суммарный вектор обозначается через \mathbf{u} . В результате с учетом податливостей роликов вектор \mathbf{u} будет выражаться через обобщенные координаты $q_{0_2}, q_{0_3} \dots q_{0_6}, q_1, q_2 \dots q_n$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы:

1. Разработана математическая модель и решена задача о колебаниях упругой направляющей балки с движущимся по ней летательным аппаратом или реактивным снарядом на двух опорах. Проведен анализ расчета кинематических параметров схода аппарата с упругой направляющей балки.
2. Решена задача о плоском движении тела на двух колесах по произвольной кривой в кинематической и динамической постановке (с учетом наличия упругости колес и подвески). Для кинематической постановки получен алгоритм расчета основных кинематических, геометрических и инерционных параметров движения. Проведен анализ влияния учета радиуса колеса при расчете реакций тела на кривую.
3. Для динамической постановки задачи о плоском движении тела на двух колесах получена система нелинейных дифференциальных уравнений, разработан метод решения полученной системы. Проведен анализ влияния параметров жесткости подвески и колес на характер изменения перегрузки по времени.
4. Решена задача о пространственном движении тела по криволинейной направляющей поверхности, сопровождаемое колебаниями, обусловленными относительным движением упругоприсоединенных внутренних масс, и колебаниями за счет упругости и демпфирования колес и подвески. Получена система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая движение тела в общем случае.
5. Полученные результаты позволяют определить динамические нагрузки (реакции) на несущие конструкции пути для расчета их на прочность, а также определить перегрузки с целью ограничения по биомеханическим показателям.

В качестве дальнейшего исследования темы можно разработать алгоритм, позволяющий моделировать и математически находить траекторию движения тела, которая удовлетворяет определенному набору критериев: биомеханические воздействия (перегрузки), кинематические параметры и прочее, то есть получить решение обратной задачи.

6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гришанина, Т.В. Колебания упругих систем: учебное пособие. / Т.В. Гришанина, Ф.Н. Шклярчук. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 100 с.
- [2] Гришанина, Т.В. Колебания неконсервативных систем: учебное пособие. / Т.В. Гришанина, Ф.Н. Шклярчук. – М.: Изд-во МАИ, 1989. – 46 с.
- [3] Гришанина, Т.В. Задачи по теории колебания упругих систем: учебное пособие. / Т.В. Гришанина под общ. ред. Ф.Н. Шклярчука. – М.: Изд-во МАИ, 1998. – 48 с.
- [4] Светлицкий, В.А. Механика стержней. В 2-х частях. Часть 1. Статика. / В.А. Светлицкий. – М.: Высшая школа, 1987. – 320 с.
- [5] Светлицкий, В.А. Механика стержней. В 2-х частях. Часть 2. Динамика. / В.А. Светлицкий. – М.: Высшая школа, 1987. – 304 с.
- [6] Спицина, Д.Н. Строительная механика стержневых машиностроительных конструкций. / Д.Н. Спицына. – М.: Высшая школа, 1977. – 248 с.
- [7] Коробко, В.И. Строительная механика стержневых систем. / В.И. Коробко. – М.: Изд-во АСВ, 2007. – 510 с.
- [8] Горшков, А.Г. Аэрогидроупругость конструкций. / А.Г. Горшков, В.И. Морозов, А.Т. Пономарев, Ф.Н. Шклярчук. – М.: Физматлит, 2000. – 592 с.
- [9] Павленко, В.Ф. Корабельные самолеты. / В.Ф. Павленко. – М.: Воениздат, 1990. – 320 с.
- [10] Официальный сайт разработчиков программного комплекса EULER. – Режим доступа: <http://www.euler.ru>.

[11] Бойков, В.Г. Программный комплекс автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем EULER. / В.Г. Бойков // САПР и графика. – 2000. – №9. – С.17.

[12] Бойков, В.Г. Программный комплекс EULER. – передовая российская технология динамического анализа / В.Г. Бойков // САПР и графика. – 1998. – №10. – С.8.

[13] Бойков, В.Г. Моделирование динамики механических систем в программном комплексе EULER. / В.Г. Бойков // САПР и графика. – 1998. – №1. – С.38.

[14] Бойков, В.Г. EULER – реальное движение сложных механических систем. / В.Г. Бойков, А. Афанасьев, А. Жданов, Д. Осипов // САПР и графика. – 1997. – №11. – С.83.

[15] Бойков, В.Г. Моделирование динамики системы твердых и упругих тел в программном комплексе EULER. / В.Г. Бойков, А.А. Юдаков // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2011. – №1. – С.42.

[16] Гнездилов, В.А. Разработка и исследование пространственных трубчатых конструкций, воспринимающих воздействие подвижных нагрузок: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Гнездилов Владимир Алексеевич. – М., 2000. – 171 с.

[17] Гнездилов, В.А. Проектирование и изготовление металлоконструкций для сложных механизированных аттракционов. / В.А. Гнездилов // Монтажные и специальные работы в строительстве. – 2000. – №6. – С.20.

[18] Рабинович, Б.А. Безопасность человека при ускорениях (Биомеханический анализ). / Б.А. Рабинович. – М.: Книга и бизнес, 2007. – 208 с.

[19] *Wayne T. Roller Coaster Physics // An Educational Guide To Roller Coaster Design and Analysis for Teachers and Students* – 1998.

[20] Кемурджиан, А.Л. Планетоходы. / А.Л. Кемурджиан, В.В. Громов, И.Ф. Кажукало и др. под общ. ред. А.Л. Кемурджиана. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1982. – 400 с.

[21] Колчин, Н.И. Механика машин. / Н.И. Колчин. – М.: Машиностроение, 1972. – 576 с.

[22] Громов, В.В. Передвижение по грунтам Луны и планет. / В.В. Громов, Н.А. Забавников, А.Л. Кемурджиан и др. – М.: Машиностроение, 1986. – 265 с.

[23] Бромберг, Е.М. Взаимодействие пути и подвижного состава. / Е.М. Бромберг, М.Ф. Вериге, В.Н. Данилов, М.А. Фришман. – М.: Трансжелдориздат, 1956. – 280 с.

[24] Вериге, М.Ф. Динамика вагонов. Конспект лекций. / М.Ф. Вериге. – М.: ВЗИИТ, 1971. – 175 с.

[25] Вершинский, С.В. Динамика вагона. / С.В. Вершинский, В.Н. Данилов, В.Д. Хусидов под ред. С.В. Вершинского. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Транспорт, 1991. – 360 с.

[26] Блохин, Е.П. Динамика поезда. / Е.П. Блохин, Л.А. Манашкин – М.: Транспорт, 1982. – 222 с.

[27] Лазарян, В.А. Динамика транспортных средств: избранные труды. / В.А. Лазарян. – Киев: Наукова Думка, 1985. – 528 с.

[28] Коган, А.Х. Колебания пути при высоких скоростях движения и ударном взаимодействии колеса и рельса. / А.Х. Коган. – М.: Трансинфо, 2011. – 168 с.

[29] Кулаков, Н.А. Воздействие динамической нагрузки на наземные транспортные средства. Избранные проблемы прочности современного машиностроения. / Н.А. Кулаков. – М.: Физматлит, 2008. – 204 с.

[30] Тарасик, В.П. Теория движения автомобиля. / В.П. Тарасик. – СПб.: БХВ, 2006. – 480 с.

[31] Селифонов, В.В. Теория автомобиля. / В.В. Селифонов. – М.: Гринлайт, 2009. – 206 с.

[32] Смирнов, Г.А. Теория движения колесных машин. / Г.А. Смирнов. – М.: Машиностроение, 1990. – 352 с.

[33] Яценко, Н.Н. Плавность хода грузовых автомобилей. / Н.Н. Яценко, О.К. Прутчиков. – М.: Машиностроение, 1969. – 220 с.

[34] Русских, С.В. Колебания упругой направляющей балки с движущимся по ней реактивным снарядом. / С.В. Русских // Известия ВУЗов. Авиационная техника. – 2014. – №1. – С.80.

Russkikh, S.V. Vibrations of an elastic guide beam with a missile moving along it. / S.V. Russkikh // Russian Aeronautics (Iz VUZ). – 2014. – №57/1. – P.107.

[35] Русских, С.В. Определение начальных условий для задачи динамики полета летательного аппарата после его схода с упругой направляющей балки. / С.В. Русских // Вестник МАИ. – 2014. – №2, том 21. – С.129.

[36] Русских, С.В. Динамика упругой направляющей балки с движущимся по ней реактивным снарядом. / Русских С.В. // Сборник материалов XVIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – 2012. – том 1. – С.154.

[37] Русских, С.В. Динамика снаряда, движущегося по упругой направляющей балке. / В.А. Гнездилов, С.В. Русских // Сборник материалов Московской молодежной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике – 2012». – 2012. – С.210.

[38] Русских, С.В. Динамика схода с упругой направляющей балки летательного аппарата на двух скользящих опорах. / С.В. Русских // Сборник материалов 12-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2013». – 2013. – С.244.

[39] Русских, С.В. Исследование динамики движения и схода с направляющей балки реактивного снаряда на двух опорах. / В.А. Гнездилов, С.В. Русских // Сборник материалов XIX международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация». – 2014. – С.80.

[40] Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. Серия «Механика в техническом университете». Том 2. / В.И. Феодосьев. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.

[41] Фесик, С.П. Справочник по сопротивлению материалов. / С.П. Фесик. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Будівельник, 1982. – 280 с.

[42] Бабанов, И.М. Теория колебаний. / И.М. Бабанов. – М.: Гостехиздат, 1958. – 628 с.

[43] Ильин, М.М. Теория колебаний: Учебник для вузов. Серия «Механика в техническом университете». Том 4. / М.М. Ильин, К.С. Колесников, Ю.С. Саратов под общ. ред. К.С. Колесникова. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 272 с.

[44] Бидерман, В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов. / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 480 с.

[45] Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер под ред. Э.И. Григолюка; пер. с англ. Л.Г. Корнейчука. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.

[46] Русских, С.В. Движение твердого тела на двух колесах по плоской кривой. / С.В. Русских // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 2014. – №2 (647). – С.52.

[47] Русских, С.В. Исследование параметров движения твердого тела на двух упругих колесах по плоской кривой с учетом подвески. / С.В. Русских // Сборник материалов XX международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – 2014. – С.165

[48] Русских, С.В. Уравнения движения твердого тела по плоской кривой на двух колесах с упругой подвеской. / С.В. Русских // Сборнике материалов Международной научно-технической конференции имени Леонардо да Винчи, №2. – 2014. – С.70.

[49] Колесников, К.С. Курс теоретической механики: Учебник для вузов. Серия «Механика в техническом университете». Том 1. / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др. под общ. ред. К.С. Колесникова. – 3-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 736 с.

[50] Лурье, А.И. Аналитическая механика. / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

[51] Виттенбург, Й. Динамика систем твердых тел. / Й. Виттенбург. – М.: Мир, 1980. – 292 с.

[52] Reiner, M. Dreizler. Theoretical Mechanics. / Reiner M. Dreizler, Cora S. Lüdde. – Springer, 2010. – 410 p.

[53] Fitzpatrick, R. Classical Mechanics. / Fitzpatrick R. – Lulu Enterprises, Inc., 2006. – 297 p.

[54] Бюшгенс, С.С. Дифференциальная геометрия. / С.С. Бюшгенс. – М.: Комкнига, 2006. – 302 с.

[55] Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. / П.К. Рашевский. – М.: Изд-во ЛКИ, 2013. – 432 с.

[56] Banchoff, T. Differential Geometry of Curves and Surfaces. / Banchoff T., Lovett S.T. – AK Peters, Taylor & Francis, 2010. – 352 p.

[57] Гришанина, Т.В. Динамика упругих управляемых конструкций / Т.В. Гришанина, Ф.Н. Шклярчук. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 328 с.

[58] Лебедев А.А. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов: Учебное пособие для вузов. / А.А. Лебедев, Л.С. Чернобровкин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1973. – 616 с.