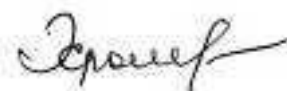


На правах рукописи



Хромова Ольга Михайловна

**ОПТИМИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ
ЛИНЕЙНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СТРАТЕГИЙ СИСТЕМ
ПО КВАНТИЛЬНОМУ КРИТЕРИЮ**

Специальность 05.13.01 —
системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2014 год

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей
Московского авиационного института
(национального исследовательского университета)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Кибзун Андрей Иванович**

Официальные оппоненты: **Валишин Анатолий Анатольевич**,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры «Высшая и прикладная
математика» Московского государственного
университета тонких химических технологий
им. М.В. Ломоносова;

Вишняков Борис Ваисович,
кандидат физико-математических наук,
начальник лаборатории «Анализ динамических
сцен» Федерального Государственного
Унитарного Предприятия «Государственный
Научно-Исследовательский Институт
Авиационных систем»

Ведущая организация: ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

Защита состоится 16 мая 2014 года в 10 часов на заседании
диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института по
адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского
авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское
шоссе, 4, Учёный совет МАИ

Автореферат разослан _____

Отзывы просим отправлять в 2-х экземплярах, заверенных печатью, по
адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Учёный совет МАИ

Учёный секретарь

диссертационного совета Д 212.125.04

кандидат физико-математических наук _____

Н. С. Северина

Общая характеристика работы

Актуальность диссертационной работы обусловлена ограниченностью исследования многоэтапных задач стохастического программирования, в частности, отсутствием постановки многоэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием, а также алгоритмов ее решения. В диссертации рассматривается новый класс задач — многоэтапные задачи стохастического программирования с квантильным критерием. Кроме того, для двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием ранее не рассматривались алгоритмы поиска решения в случае билинейной функции потерь.

Разработка математических моделей, описывающих управление стохастическими системами, является важной задачей системного анализа. В частном случае стохастические системы могут иметь многоэтапную структуру, как и многие практические задачи, например задачи экономики, управления летательными аппаратами. Процесс принятия решения в таких задачах осуществляется, как правило, последовательно на каждом этапе. На первом этапе выбирается некоторая предварительная стратегия, которая корректируется в дальнейшем за счет выбора стратегий последующих этапов при реализации случайных параметров. Оптимальные стратегии на различных этапах выбираются исходя из одного и того же критерия оптимизации. Для описания математических постановок и последующего решения подобных систем применяется аппарат двухэтапных и многоэтапных задач стохастического программирования.

Многоэтапные задачи стохастического программирования обычно рассматриваются в апостериорной постановке, когда оптимальный план на текущем этапе выбирается в зависимости от реализации случайных факторов на предыдущих этапах. По сути это означает применение метода динамического программирования для решения задачи стохастического программирования. Но метод динамического программирования для решения задачи стохастического управления применим лишь тогда, когда критерий оптимизации обладает аддитивным и марковским свойствами. Именно такими свойствами обладает математическое ожидание от функции случайных потерь. Квантильный критерий не обладает ни марковским, ни аддитивным свойствами, вследствие чего записать многоэтапную задачу стохастического программирования с квантильным критерием в традиционной апостериорной постановке невозможно в принципе. В диссертации исследуется задача квантильной оптимизации записанная в априорной постановке, когда оптимальные планы на всех этапах, кроме первого, выбираются в классе функций, зависящих от всей предыдущей информации.

Многоэтапные задачи рассматривались в работах таких авторов, как D. Barro и E. Canestrelli, J. Dupačová, G. Consigli и S.W. Wallace, K. Frauendorfer, F.V. Louveaux, P. Olsen, R.T. Rockafellar и R.J.-B. Wets, S.W. Wallace и T. Yan. В практических приложениях, например в финансовом планировании,

экономике, применяются, как правило, линейные постановки многоэтапных задач стохастического программирования. Многоэтапные задачи стохастического линейного программирования с критерием в форме математического ожидания рассматривались в работах J.R. Birge, C. Beltran-Royo, L.F. Escudero и др., M.S. Casey и S. Sen, P. Fúsek, P. Kall, J. Mayer и др., C. Swamy и D.B. Shmoys.

В авиационной и ракетно-космической технике наиболее адекватными являются постановки задач стохастического программирования с вероятностными критериями качества для обеспечения гарантированного по вероятности результата. К вероятностным критериям относятся квантильный и вероятностный критерии. Вероятностный критерий представляет собой вероятность непревышения допустимого уровня потерь, связанных с реализацией оптимизируемой стратегии. Квантильный критерий представляет собой уровень потерь при реализации стратегии, непревышение которого гарантируется с заданной вероятностью. Квантильный критерий впервые был введен в рассмотрение в работе S. Kataoka. Дальнейшее изучение задач с квантильным критерием связано с именами Р. Леппа, Э. Райка, Э. Тамма, Э. Юби.

Несмотря на наличие большого количества работ в области многоэтапных стохастических задач, класс многоэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием ранее не рассматривался.

Многоэтапные задачи стохастического программирования являются естественным обобщением двухэтапных задач. Двухэтапные и многоэтапные задачи стохастического программирования рассмотрены в работах E. Schweitzer и M. Avriel, A. Shapiro, A. Shapiro и A. Nemirovski.

Аппарат двухэтапных задач стохастического программирования можно применить для решения экономических задач планирования и управления. Модели двухэтапных задач впервые были рассмотрены в работах E.M.L. Beale и G.B. Dantzig. Дальнейшее изучение постановок двухэтапных задач отражено в работах A. Madansky, R. Wets, M.A.H. Dempster, J. Wessels и других авторов.

Двухэтапные задачи стохастического программирования с квантильным критерием впервые были рассмотрены А.И. Кибзуном и А.В. Наумовым. В их работе была установлена эквивалентность априорной и апостериорной постановок задач, кроме того, была получена верхняя оценка квантильного критерия для двухэтапной задачи, основанная на решении задачи линейного программирования. Результаты дальнейших исследований двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием отражены в работах А.В. Наумова и И.М. Бобылева, А.И. Кибзуна, А.В. Наумова и В.И. Норкина. Возможность дискретной аппроксимации линейной двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием исследовалась в работе А.И. Кибзуна и И.В. Никулина.

Прикладные двухэтапные задачи стохастического программирования с критерием в форме квантили применялись для оптимизации экономических систем. Например в работах А.В. Наумова исследовалась задача оптимизации бюджета госпиталя и задача оптимального инвестирования по квантильному критерию, в работе А.Б. Богданова и А.В. Наумова рассмотрена логистическая

задача, в работе А.В. Наумова и С.В. Уланова исследована задача оптимального распределения ресурсов, а в работе А.И. Кибзуна, А.В. Наумова и С.В. Уланова рассмотрена задача оптимизации самолетного парка авиакомпании.

Цели и задачи работы. Целью диссертации является изучение свойств многоэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием, функция потерь в которых линейна относительно оптимизируемых стратегий, а также разработка эффективных алгоритмов поиска решений данных задач.

Для достижения выбранной цели необходимо решить следующие задачи.

1. Разработать эффективные алгоритмы поиска решений многоэтапных линейных по стратегиям задач стохастического программирования с квантильным критерием.

2. Разработать численные процедуры, реализующие предложенные алгоритмы решения двухэтапных и многоэтапных линейных по стратегиям задач стохастического программирования с квантильным критерием, и проверить их эффективность на решении прикладной задачи.

Методы исследования. В диссертации используются методы системного анализа, методы стохастического программирования, математического моделирования, теории оптимизации, теории вероятностей.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических постановок и доказательств утверждений, корректным использованием методов системного анализа, подтверждением теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. В диссертационной работе получены новые теоретические результаты и разработаны новые алгоритмы решения многоэтапных задач стохастического программирования с квантильным критерием, в которых функция потерь линейна относительно стратегий. Среди полученных результатов можно выделить следующие.

1. Доказана эквивалентность многоэтапной линейной относительно стратегии задачи стохастического программирования с квантильным критерием и дискретизированным распределением случайных параметров и двухэтапной задачи квантильной оптимизации.

2. Разработан алгоритм поиска решения многоэтапной линейной по стратегии задачи стохастического программирования с квантильным критерием и дискретизированным распределением, основанный на переходе к эквивалентной задаче смешанного целочисленного линейного программирования.

3. Разработан алгоритм поиска решения двухэтапной задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь и нормальным распределением, основанный на переходе к задаче выпуклого программирования, параметризованной скалярным параметром, выбор которого осуществляется методом дихотомии.

4. Для задачи управления линейной стохастической системой специального вида с нормальным распределением случайных параметров и квантильным

критерием получен детерминированный эквивалент.

Практическая значимость работы состоит в том, что ее результаты могут служить основой для разработки программно-алгоритмического обеспечения решения прикладных задач в областях авиационной и ракетно-космической техники, оптимизации функционирования транспортных и логистических систем, систем распределения ресурсов, оптимального инвестирования. Эффективность предложенных алгоритмов продемонстрирована при решении задачи оптимального выбора трассы с учетом случайной стоимости работ на разных участках.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

В диссертации методы системного анализа применены для исследования сложных стохастических систем, проведено исследование задачи оптимизации, разработаны методы и алгоритмы их решения (области исследования 1, 4, 5 специальности 05.13.01).

Апробация работы. Результаты диссертации выносились на обсуждение научного сообщества в ходе научных семинаров кафедры теории вероятностей Московского авиационного института (рук. проф. Кибзун А.И.), 3-й и 4-й Традиционной молодежной Школы «Управление, информация и оптимизация» (Россия, Ярополец, 2011 г.; Россия, Звенигород, 2012 г.), научного семинара лаборатории № 7 Института проблем управления РАН (рук. проф. Поляк Б.Т.)

Материалы диссертации были представлены на следующих конференциях: 16-я международная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Украина, Евпатория, 2011 г.), научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов «Молодежь и будущее авиации и космонавтики» (Россия, Москва, 2009 г.), XLIX международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» (Россия, Новосибирск, 2011 г.), научно-практическая конференция студентов и молодых ученых МАИ «Инновации в авиации и космонавтике — 2011», 12-ая Международная конференция «Авиация и космонавтика-2013» (Россия, Москва, 2013 г.)

Работа поддержана грантами РФФИ (11-07-90407-Укр-ф-а, 11-07-00315-а, 12-07-00191-а), и государственным финансированием ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (мероприятие 1.2.2, госконтракт № 14.740.11.1128).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 научных статьях [1–3] в журналах, входящих в перечень ВАК, в 5 статьях [4–8] в различных сборниках и материалах конференций. Общее число публикаций — 8.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит введение, три главы, заключение, перечень сокращений и условных обозначений и список используемой литературы. Работа состоит из 118 страниц, включая 7 рисунков, 3 таблицы и список литературы, содержащий 169 наименований.

Содержание диссертации

Во введении дано обоснование актуальности выбранной автором темы диссертации, сформулирована цель работы, аргументирована ее научная новизна

и практическая значимость, а также в сжатом виде изложено содержание глав диссертации и сформулированы результаты, представляемые к защите.

В первой главе рассматривается многоэтапная линейная по стратегиям задача стохастического программирования с квантильным критерием в априорной постановке.

Целевая функция потерь имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi^N(u, y(\cdot), X) \triangleq & c_0^T u + a_{11}^T(X_1)u + c_1^T y_1(u, X_1) + a_{12}^T(X_1, X_2)u + \\ & + c_2^T y_2(u, X_1, X_2) + \dots = c_0^T u + \sum_{i=1}^{N-1} a_{1i}^T(X^i)u + \sum_{i=1}^{N-1} c_i^T y_i(u, X^i), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u \in \mathbb{R}^m$ – план первого этапа; $y(\cdot) = \text{col}(y_1(\cdot), \dots, y_{N-1}(\cdot))$ – вектор-функция планов последующих $N - 1$ этапов, выбираемая в классе измеримых функций со значениями в \mathbb{R}^{m_i} ; $X = \text{col}(X_1, \dots, X_{N-1})$, $X^i = \text{col}(X_1, \dots, X_i)$, $i = \overline{1, N-1}$, – наборы случайных векторов $X_i \in \mathbb{R}^{n_i}$; $a_{1i}(X^i)$, $i = \overline{1, N-1}$, – заданные измеримые вектор-функции размерности $(m \times 1)$; c_0, c_i , $i = \overline{1, N-1}$, – заданные детерминированные вектор-столбцы размерности $(m \times 1)$ и $(m_i \times 1)$ соответственно.

Предполагается, что случайный вектор X имеет плотность распределения $p(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_{N-1}$.

Набор из $N - 1$ ограничений имеет вид:

$$\Phi_i(u, y^i(\cdot), X^i) \triangleq A_{2i}(X^i)u + B_i y^i(u, X^i) \geq a_{3i}(X^i), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (2)$$

где $y^i(\cdot) = \text{col}(y_1(\cdot), \dots, y_i(\cdot))$ – наборы вектор-функций $y_i(\cdot) \in \mathbb{R}^{m_i}$; $A_{2i}(X^i)$, $i = \overline{1, N-1}$, – заданные измеримые матричные функции размерности $(s_i \times m)$; B_i , $i = \overline{1, N-1}$ – заданная матрица размерности $(s_i \times m_i)$; $a_{3i}(X^i)$, $i = \overline{1, N-1}$, – заданные измеримые вектор-функции размерности $(s_i \times 1)$.

Рассмотрим функцию вероятности

$$P_\varphi(u, y(\cdot)) = \mathcal{P}\{\Phi^N(u, y(\cdot), X) \leq \varphi, \Phi_i(u, y^i(\cdot), X^i) \geq a_{3i}(X^i), i = \overline{1, N-1}\}, \quad (3)$$

где \mathcal{P} – вероятностная мера, порожденная распределением случайного вектора X ; а также функцию квантили, представляющую собой минимальное пороговое значение φ , при котором выполняется вероятностное ограничение:

$$\varphi_\alpha(u, y(\cdot)) \triangleq \min\{\varphi : P_\varphi(u, y(\cdot)) \geq \alpha\}, \alpha \in (0, 1). \quad (4)$$

N -этапная задача стохастического программирования с квантильным критерием в априорной постановке формулируется в следующем виде:

$$\varphi_\alpha = \min_{u \in U, y(\cdot) \in \mathcal{Y}} \varphi_\alpha(u, y(\cdot)), \quad u_\alpha = \arg \min_{u \in U} [\min_{y(\cdot) \in \mathcal{Y}} \varphi_\alpha(u, y(\cdot))], \quad (5)$$

где U – заданное множество допустимых стратегий первого этапа, а \mathcal{Y} – множество допустимых стратегий последующих этапов, имеющее вид

$$\mathcal{Y} \triangleq \{y(\cdot) : y_i(u, X^i) \geq 0, i = \overline{1, N-1}\}.$$

Под решением задачи (5) понимается пара $(\varphi_\alpha, u_\alpha)$. Если не существует u_α , т.е. минимум в задаче (5) не достигается, то считается, что решение в задаче (5) не существует.

Исследуемая задача записана в априорной постановке, когда оптимальные стратегии на всех этапах, кроме первого, выбираются в классе функций, зависящих от всей предыдущей информации. Для решения поставленной задачи далее будет предложен алгоритм, основанный на следующей схеме дискретизации.

Предположим, что вероятностная мера, порожденная распределением случайного вектора X , абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и существует плотность $p(x)$ случайного вектора X . Дискретизируем вероятностную меру следующим образом. Пусть x^k , $k = \overline{1, K}$, — точки, сгенерированные случайным образом согласно плотности $p(x)$. Определим меры этих точек как $p_k \triangleq \tilde{\mathcal{P}}\{X = x^k\} = 1/K$, $k = \overline{1, K}$.

Пусть $\tilde{X} \triangleq \text{col}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{N-1})$ — случайный вектор, соответствующий этим мерам, т.е. $\tilde{\mathcal{P}}\{\tilde{X} = x^k\} = p_k$, где случайные подвекторы \tilde{X}_i имеют ту же размерность, что и X_i , $i = \overline{1, N-1}$. Пусть $F_K(x)$ — функция распределения случайного вектора \tilde{X} . Рассмотрим выборочную функцию распределения $\hat{F}_K(x)$, соответствующую случайному вектору X , реализация которой есть $F_K(x)$. Имеет место сходимость $\hat{F}_K(x) \xrightarrow{\text{п.н.}} F(x)$ при $K \rightarrow \infty$ для всех x (п.н. — почти наверное), где $F(x)$ — функция распределения случайного вектора X .

Далее под дискретным распределением $F_K(x)$ специального вида будем понимать дискретное распределение, полученное путем дискретизации непрерывного распределения с помощью описанной выше схемы дискретизации. Верно следующее утверждение.

ЛЕММА 1.1. Пусть случайный вектор $\tilde{X} = \text{col}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{N-1})$ имеет дискретное распределение $F_K(x)$ специального вида. Тогда существуют детерминированные функции $f_i(\tilde{X}_1)$ такие, что

$$\tilde{\mathcal{P}}\{\tilde{X}_i = f_i(\tilde{X}_1)\} = 1, \quad i = \overline{2, N-1},$$

где $\tilde{\mathcal{P}}$ — вероятностная мера, аппроксимирующая меру \mathcal{P} . Благодаря описанной схеме дискретизации меры все компоненты случайного вектора \tilde{X} определяются первой компонентой \tilde{X}_1 , поэтому удается свести многоэтапную задачу стохастического программирования к двухэтапной задаче.

Верна следующая теорема об эквивалентности многоэтапной линейной относительно стратегий задачи стохастического программирования и двухэтапной задачи в априорных постановках.

ТЕОРЕМА 1.1. N -этапная задача в априорной постановке (5) с дискретным распределением $F_K(x)$ случайного вектора \tilde{X} эквивалентна двухэтапной задаче стохастического программирования специального вида.

Доказательство основано на сведении трехэтапной задачи в априорной постановке к двухэтапной задаче с последующим обобщением на случай

сведения N -этапной задачи к двухэтапной по индукции. Структура ограничений полученной двухэтапной задачи повторяет структуру ограничений исходной задачи, кроме того, совпадают значения функций потерь обеих задач.

Под эквивалентностью задач в теореме 1.1 и в последующих утверждениях понимается следующее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Две задачи оптимизации будем считать эквивалентными, если:*

- 1) *либо обе эти задачи имеют допустимые решения (с конечными значениями целевых функций), либо обе не имеют таких решений;*
- 2) *если эти задачи имеют допустимые решения, то оптимальные значения их целевых функций (конечные или бесконечные) совпадают;*
- 3) *если оптимальные значения их целевых функций конечны, то эти значения в обеих задачах либо достигаются, либо не достигаются;*
- 4) *если оптимальные значения целевых функций достигаются, то по оптимальному решению одной задачи с помощью явно описанного алгоритма указывается оптимальное решение другой задачи;*
- 5) *если оптимальные значения целевых функций конечны, но не достигаются, то по оптимизирующей последовательности стратегий одной задачи по явно описанному алгоритму указывается оптимизирующая последовательность для другой задачи.*

Сформулируем задачу квантильной оптимизации в апостериорной постановке. Пусть известны реализация $x \in \mathbb{R}^n$ случайного вектора X и стратегии первого этапа $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, а множество допустимых стратегий второго этапа задается как $Y \triangleq \{y : y \in \mathbb{R}^{m_1}, y \geq 0\}$. Сформулируем задачу второго этапа в виде:

$$\bar{\Phi}(u, x) \triangleq \min_{y \in Y} \{c_1^T y | A_2(x)u + By(u, x) \geq a_3(x)\}, \quad (6)$$

где c_1 – вектор размерности m_1 .

Если для некоторого $u \in U$ и x из множества допустимых реализаций не существует $y \in Y$, удовлетворяющего (6), будем полагать, что $\bar{\Phi}(u, x) = +\infty$.

Следует отметить, что матрица $A_2(X)$ и вектор $a_3(X)$ могут зависеть от случайного вектора X .

Определим функцию вероятности

$$\bar{P}_\varphi(u) \triangleq \mathcal{P}\{a_1^T(X)u + \bar{\Phi}(u, X) \leq \varphi\},$$

и функцию квантили

$$\bar{\varphi}_\alpha(u) \triangleq \min_{\varphi} \{\varphi : \bar{P}_\varphi(u) \geq \alpha\}.$$

Тогда задача первого этапа имеет следующий вид:

$$\bar{\varphi}_\alpha = \min_{u \in U} [c_0^\top u + \bar{\varphi}_\alpha(u)], \quad \bar{u}_\alpha = \arg \min_{u \in U} [c_0^\top u + \bar{\varphi}_\alpha(u)]. \quad (7)$$

Далее задача в апостериорной постановке сводится к задаче смешанного целочисленного линейного программирования.

Согласно доверительному методу, предложенному А.И. Кибзуном, В.В. Малышевым, задача (7) эквивалентна следующей задаче

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_\alpha &= \min_{u \in U} \min_{S \in \mathcal{F}_\alpha} \{c_0^\top u + \sup_{x \in S} [a_1^\top(x)u + \bar{\Phi}(u, x)]\}, \\ (\bar{u}_\alpha, \bar{S}_\alpha) &= \arg \min_{u \in U, S \in \mathcal{F}_\alpha} \{c_0^\top u + \sup_{x \in S} [a_1^\top(x)u + \bar{\Phi}(u, x)]\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\bar{\Phi}(u, x)$ определяется согласно (6), $S \in \mathcal{F}_\alpha$ – доверительное множество из семейства доверительных множеств $\mathcal{F}_\alpha \triangleq \{S \in \mathcal{F} : \tilde{\mathcal{P}}(S) \geq \alpha\}$, \mathcal{F} – борелевская сигма-алгебра, вероятностная мера $\tilde{\mathcal{P}}$ соответствует дискретизированному распределению вектора \tilde{X} .

Если зафиксировать доверительное множество $S \in \mathcal{F}_\alpha$ и рассмотреть эквивалентную двойственную задачу для подзадачи (6), то есть

$$\bar{\Phi}(u, x) = \max_{v \in V} \{(a_3(x) - A_2(x)u)^\top v\},$$

где $v \in \mathbb{R}^s$ – вектор двойственных переменных, V – выпуклый многогранник вида

$$V = \{v : B^\top v \leq c_1, v_i \geq 0, i = \overline{1, s}\},$$

получим

$$\psi(S) = \min_{u \in U} \{c_0^\top u + \sup_{x \in S} [a_1^\top(x)u + \max_{v \in V} \{(a_3(x) - A_2(x)u)^\top v\}]\}. \quad (9)$$

Пусть векторы c_1 и матрица B таковы, что множество

$$V \triangleq \{v \in \mathbb{R}^s : B^\top v \leq c_1, v_i \geq 0, i = \overline{1, s}\} \quad (10)$$

компактно. Поскольку V – ограниченное множество согласно теории двойственности и функция $(a_3(x) - A_2(x)u)^\top v$ линейна по v для всех x и u , то ее максимум достигается в вершинах v^j , $j = \overline{1, J}$, многогранника V . Поэтому задача (9) трансформируется в задачу

$$\psi(S) = \min_{u \in U} \{c_0^\top u + \sup_{x \in S} [a_1^\top(x)u + \max_{j=\overline{1, J}} \{(a_3(x) - A_2(x)u)^\top v^j\}]\}. \quad (11)$$

Учитывая, что после дискретизации меры случайный вектор \tilde{X} принимает лишь конечное число значений x^k , $k = \overline{1, K}$, то задача (11) превращается в задачу

$$\psi(S) = \min_{u \in U} \{c_0^T u + \max_{r=1, R} \max_{j=1, J} [a_1^T(x^r)u + (a_3(x^r) - A_2(x^r)u)^T v^j]\}, \quad (12)$$

где множество S состоит из векторов x^r , $r = \overline{1, R}$.

Поскольку функция, стоящая под максимумом, линейна по u , а максимум находится по конечному набору векторов $\{x^r\}_{r=1}^R$, $\{v^j\}_{j=1}^J$, то функция, стоящая в фигурных скобках, оказывается кусочно-линейной и выпуклой по $u \in U$.

В случае если U – выпуклый многогранник, задача (12) превращается в задачу линейного программирования

$$\psi \rightarrow \min_{u \in U, \psi \geq 0} \quad (13)$$

при линейных ограничениях

$$c_0^T u + a_1^T(x^r)u + (a_3(x^r) - A_2(x^r)u)^T v^j \leq \psi, \quad r = \overline{1, R}, \quad j = \overline{1, J}. \quad (14)$$

Ранее множество S было зафиксировано, $\tilde{\mathcal{P}}(S) \geq \alpha$. Выберем оптимальное множество S_α в задаче (8). С этой целью введем булевы переменные, характеризующие принадлежность точек x^k доверительному множеству S по правилу:

$$\delta_k \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } x^k \in S, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим $p_k \triangleq \tilde{\mathcal{P}}\{\tilde{X} = x^k\} = 1/K$, $k = \overline{1, K}$.

Пусть известна величина $\gamma > -\infty$, являющаяся оценкой снизу функций

$$\gamma \leq a_1^T(x^k)u + (a_3(x^k) - A_2(x^k)u)^T v^j, \quad k = \overline{1, K}, \quad j = \overline{1, J}.$$

Рассмотрим задачу смешанного целочисленного линейного программирования

$$\psi \rightarrow \min_{u \in U, \delta_1, \dots, \delta_K, \psi \geq 0} \quad (15)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} c_0^T u + \gamma + \delta_k [a_1^T(x^k)u + (a_3(x^k) - A_2(x^k)u)^T v^j - \gamma] \leq \psi, \quad k = \overline{1, K}, \quad j = \overline{1, J}, \\ \sum_{k=1}^K \delta_k p_k \geq \alpha, \\ \delta_k \in \{0, 1\}, \quad k = \overline{1, K}. \end{cases} \quad (16)$$

Верно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.3. *Двухэтапная задача (7) в апостериорной постановке эквивалентна задаче (15) – (16) смешанного целочисленного линейного программирования.*

Полученную задачу смешанного целочисленного линейного программирования предлагается решать с помощью стандартных программных пакетов оптимизации с применением приемов для сокращения перебора при нахождении оптимального множества S_α , в частности с использованием понятия ядра меры. Ядро меры уровня α при больших α в случае дискретного распределения совпадает с выпуклой оболочкой всех точек из распределения случайного вектора \tilde{X} за исключением крайних точек. Поэтому в случае квазивыпуклости целевой функции по \tilde{x} достаточно перебрать только крайние точки из множества всех возможных значений. Стоит отметить, что при фиксированном $\delta_k, k = \overline{1, K}$, задача (15) – (16) представляет собой задачу линейного программирования. В случае если в критерии задачи вместо матрицы $A_2(\tilde{X})$ рассмотреть просто случайный вектор \tilde{X} , то задача (16) оказывается принадлежащей классу портфельных задач, рассматриваемых в многих работах, в частности, в монографии А.И. Кибзуна и Ю.С. Кана.

Основным результатом главы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.4. *Многоэтапная задача стохастического программирования в априорной постановке вида (5) для дискретного распределения $F_K(x)$ специального вида, сгенерированного на основе плотности $p(x)$, эквивалентна в смысле определения 1.1 задаче смешанного целочисленного программирования (15) – (16).*

В главе приводятся результаты численных расчетов, демонстрирующие применение разработанного алгоритма.

Во второй главе рассматривается двухэтапная задача стохастического программирования следующей структуры. Пусть случайный вектор X с реализациями $x \in \mathbb{R}^n$ имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(0, I)$. Введем функцию потерь, зависящую от стратегии первого этапа $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ и реализаций x случайного вектора X и учитывающую оптимальную стратегию второго этапа y :

$$\Phi(u, x) = c_0^T u + x^T A_1 u + \inf_{y \in \mathcal{Y}(u, x)} c_1^T y, \quad (17)$$

где

$$\mathcal{Y}(u, x) \triangleq \{y \in Y : x^T A_{2i} u + c_{2i}^T u + b_i^T y \geq a_{3i}^T x + d_i, i = \overline{1, s}\}, \quad (18)$$

$$Y \triangleq \{y \in \mathbb{R}^{m_1} : y_j \geq 0, j = \overline{1, m_1}\},$$

c_0 и c_1 - заданные детерминированные вектор-столбцы размерности m и m_1 , соответственно, матрицы A_1 и A_{2i} имеют размерность $(n \times m)$; c_{2i} , b_i и a_{3i} - вектор-столбцы размерности m , m_1 и n , соответственно, а d_i - константа.

Отметим, что часть матриц A_{2i} и векторов a_{3i} , $i = \overline{1, s}$, определяющих множество $\mathcal{Y}(u, x)$ допустимых стратегий второго этапа y , могут быть нулевыми. И тогда часть ограничений с теми же номерами i , соответствующими этим матрицам и векторам в множестве $\mathcal{Y}(u, x)$, будут детерминированными.

Пусть векторы c_1 и $b_i, i = \overline{1, s}$, таковы, что множество

$$V \triangleq \{v \in \mathbb{R}^s : B^T v \leq c_1, v_i \geq 0, i = \overline{1, s}\}, \quad (19)$$

компактно, где

$$B \triangleq \begin{pmatrix} b_1^T \\ \dots \\ b_s^T \end{pmatrix},$$

а ограничения на допустимые стратегии u первого этапа являются линейными:

$$U \triangleq \{u \in \mathbb{R}^m : A_u u \leq b_u\},$$

где вектор b_u имеет размерность k_1 , матрица A_u имеет размерность $k_1 \times m$, причем являются такими, что U - компакт.

Рассмотрим функцию вероятности:

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathcal{P}\{X : c_0^T u + X^T A_1 u + \bar{\Phi}(u, X) \leq \varphi\}, \quad (20)$$

где \mathcal{P} – вероятностная мера, порожденная распределением $\mathcal{N}(0, I)$,

$$\bar{\Phi}(u, X) = \begin{cases} \inf_{y \in \mathcal{Y}(u, X)} c_1^T y, & \mathcal{Y}(u, X) \neq \emptyset, \\ \infty, & \mathcal{Y}(u, X) = \emptyset, \end{cases} \quad (21)$$

и функцию квантили

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\}, \alpha \in (0, P^*), \quad (22)$$

где

$$P^* \triangleq \sup_{u \in U} \mathcal{P}\{X : \mathcal{Y}(u, X) \neq \emptyset\}.$$

Сформулируем задачу первого этапа

$$\varphi_\alpha = \inf_{u \in U} \varphi_\alpha(u), u_\alpha = \arg \min_{u \in U} \varphi_\alpha(u). \quad (23)$$

Согласно доверительному методу, задача (23) эквивалентна следующей задаче

$$\bar{\varphi}_\alpha = \inf_{u \in U, S \in \mathcal{F}_\alpha} \psi(S, u), (\bar{u}_\alpha, \bar{S}_\alpha) = \arg \min_{u \in U, S \in \mathcal{F}_\alpha} \psi(S, u), \quad (24)$$

где введена функция максимума

$$\psi(S, u) \triangleq c_0^T u + \sup_{x \in S} [x^T A_1 u + \bar{\Phi}(u, x)], \quad (25)$$

а S - доверительное множество.

При этом выполняется $\varphi_\alpha = \bar{\varphi}_\alpha$, $u_\alpha = \bar{u}_\alpha$, причем под допустимым решением задачи (23) понимается пара $(u, \varphi_\alpha(u))$, для которой $\varphi_\alpha \leq \varphi_\alpha(u)$, $u \in U$, а для задачи (24) – тройка $(u, S, \psi(S, u))$, для которой $\bar{\varphi}_\alpha \leq \psi(S, u)$, $S \in \mathcal{F}_\alpha$, $u \in U$.

Рассмотрим подзадачу (21), для которой эквивалентная двойственная задача с вектором двойственных переменных $v \in R^s$ будет иметь вид:

$$\bar{\Phi}(u, x) = \sup_{v \in V} \bar{a}^T(u, x)v, \quad (26)$$

где

$$\bar{a}(u, x) \triangleq \bar{A}^T(u)x + \bar{b}(u) \triangleq \begin{pmatrix} a_{31}^T x - u^T A_{21}^T x + d_1 - c_{21}^T u \\ \dots \\ a_{3s}^T x - u^T A_{2s}^T x + d_s - c_{2s}^T u \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\bar{A}^T(u) \triangleq \begin{pmatrix} a_{31}^T - u^T A_{21}^T \\ \dots \\ a_{3s}^T - u^T A_{2s}^T \end{pmatrix},$$

$$\bar{b}^T(u) = (d_1 - c_{21}^T u, \dots, d_s - c_{2s}^T u),$$

V – выпуклый ограниченный многогранник, введенный выше в (19).

Пусть $v^j, j = \overline{1, J}$ – вершины многогранника V , являющегося выпуклым компактом. Тогда в связи с линейностью по v функции в (26) ее максимум на V будет достигаться в вершинах V :

$$\bar{\Phi}(u, x) = \max_{j \in \overline{1, J}} \bar{a}^T(u, x)v^j. \quad (28)$$

Рассмотрим подзадачу задачи (24) для фиксированного множества S , в качестве которого выбирается доверительный шар S_{R_α} с радиусом R_α и центром в нуле, $\mathcal{P}(S_R) = \alpha$. Для простоты дальнейших обозначений далее будем использовать $\rho \equiv \rho_\alpha, R \equiv R_\alpha$, где ρ_α – радиус ядра вероятностной меры уровня α для случая нормального распределения случайного вектора X , а ядро вероятностной меры представляет собой множество, содержащееся во всех полупространствах меры больше, чем α .

Рассмотрим следующую задачу для шара S_r с центром в нуле и переменным радиусом $r \in [\rho, R]$:

$$\psi_r = \inf_{u \in U} \psi(S_r, u), u_r = \arg \min_{u \in U} \psi(S_r, u), \quad (29)$$

где функция $\psi(S_r, u)$ определяется согласно (25) для множества S_r , т.е.

$$\psi(S_r, u) \triangleq c_0^T u + \sup_{x \in S_r} [x^T A_1 u + \bar{\Phi}(u, x)]. \quad (30)$$

Поскольку функция под знаком \sup в (30) согласно (27) и (28) кусочно-линейна и выпукла по x для каждого $u \in U$, а шар S_r – компактное множество, то знак \sup можно заменить на \max . Таким образом, функция $\psi(S_r, u)$ в задаче (29) преобразуется к виду

$$\psi(S_r, u) = c_0^T u + \max_{x \in S_r} [x^T A_1 u + \bar{\Phi}(u, x)]. \quad (31)$$

Исследуем задачу (29) с функцией максимума (31). Верно следующее утверждение.

ЛЕММА 2.4. *Задача (29) является задачей выпуклого программирования и u_r существует для всех $r \in [\rho, R]$.*

Следующая лемма устанавливает свойство критериальной функции.

ЛЕММА 2.5. *Функция ψ_r монотонно возрастает и непрерывна по $r \in [\rho, R]$.*

Рассмотрим теперь задачу (31) для двух случаев $r = \rho$ и $r = R$, где ρ - радиус ядра K_α гауссовской меры \mathcal{P} , а R - радиус доверительного шара $S_R \in \mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{P}(S_R) = \alpha$.

Для нормального распределения $\mathcal{N}(0, I)$ радиус R может быть найден как решение трансцендентного уравнения:

$$\frac{1}{2^{(n-2)/2}\Gamma(n/2)} \int_0^R t^{n-1} \exp(-t^2/2) dt = \alpha, \quad (32)$$

где $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция.

Следующая лемма устанавливает связь между решением задачи (24) и его верхней и нижней оценками.

ЛЕММА 2.6. *Для решения задачи (24) имеет место следующая двусторонняя оценка*

$$\psi_{\rho_\alpha} \leq \varphi_\alpha \leq \varphi_\alpha(u_{R_\alpha}) \leq \psi_{R_\alpha}, \quad (33)$$

причем, $\psi_{R_\alpha} - \psi_{\rho_\alpha} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 1$.

Улучшим верхнюю оценку оптимального значения функции квантили φ_α , выбрав значение $r \in [\rho, R]$ в задаче (29) такое, что $\varphi_\alpha \leq \psi_r < \psi_R$. Рассмотрим для этой цели следующее множество

$$C_r \triangleq \{x : c_0^T u + x^T A_1 u_r + \max_{j=1, \dots, J} \bar{a}^T(u_r, x) v^j \leq \psi_r\} \quad (34)$$

и определим такое r_0 , что

$$r_0 \triangleq \inf_{r \in [\rho, R]} \{r : \mathcal{P}(C_r) \geq \alpha\}. \quad (35)$$

Заметим, что r_0 существует, поскольку при $r = R$ верно, что $\mathcal{P}(C_R) \geq \alpha$, т.к. $C_R \supset S_R$ и $\mathcal{P}(S_R) = \alpha$. Кроме того, при $r = \rho$ выполняется $\mathcal{P}(C_\rho) \leq \alpha$ при $r = \rho$, поскольку C_ρ содержится в одном из полупространств вероятностной с мерой α , которые образуют ядро S_ρ .

Следующая лемма устанавливает соотношение между вероятностными мерами правильного многогранника \bar{C}_r , симметричного относительно нуля, с J гранями, касающимися шара S_r , и произвольного многогранника C_r с тем же числом граней и содержащим S_r .

ЛЕММА 2.7. Если случайный вектор X имеет распределение $\mathcal{N}(0, I)$, то $\mathcal{P}(\bar{C}_r) \leq \mathcal{P}(C_r)$ для любого $r > 0$ и любого $J \geq n + 1$.

Для размерности $n \geq 2$ справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1 Для задачи (29) справедливы следующие утверждения

(i) $r_0 < R$, где $r_0 \triangleq \inf_{r \in [\rho, R]} \{r : \mathcal{P}(C_r) \geq \alpha\}$;

(ii) существует $r \in [r_0, R)$ такое, что $\mathcal{P}(C_r) \geq \alpha$ и

$$\varphi_\alpha \leq \varphi_\alpha(u_r) \leq \psi_r < \psi_R;$$

(iii) если $r_1 < r_2$, где $r_1, r_2 \in [r_0, R)$ и $\mathcal{P}(C_{r_1}) \geq \alpha$, $\mathcal{P}(C_{r_2}) \geq \alpha$, то $\varphi_\alpha \leq \psi_{r_1} < \psi_{r_2}$.

Для более общего случая, когда случайный вектор X имеет распределение $\mathcal{N}(m, K)$, где K – невырожденная ковариационная матрица, рассмотрим вектор

$$Z = K^{-1/2}(X - m),$$

который имеет распределение $\mathcal{N}(0, I)$. При такой замене переменных X на Z ограничения, задающие множество $\mathcal{Y}(u, x)$, преобразуются в множество $\mathcal{Y}(u, z)$, ограничения которого будут иметь точно такую же структуру, как и ограничения, описывающие множество $\mathcal{Y}(u, x)$. Таким образом, случай $X \sim \mathcal{N}(m, K)$ сводится к случаю $X \sim \mathcal{N}(0, I)$, рассмотренному выше.

Далее предлагается вычислительный алгоритм решения задачи (29). Рассмотрим вначале способ поиска точки r_0 , используя алгоритм дихотомии в следующей модификации. Выберем точки $r = \rho$ и $r = R$, для которых $\mathcal{P}(C_\rho) \leq \alpha$ и $\mathcal{P}(C_R) \geq \alpha$. Рассмотрим точку $r = (\rho + R)/2$ и найдем $\mathcal{P}(C_r)$ (алгоритм вычисления меры $\mathcal{P}(C_r)$ приводится далее). Если $\mathcal{P}(C_r) \geq \alpha$, то оставляем точки ρ и r . Если же $\mathcal{P}(C_r) < \alpha$, то оставляем точки r и R . И так далее производим деление пополам текущих отрезков неопределенности. Алгоритм сходится, поскольку $\mathcal{P}(C_\rho) \leq \alpha$ и $\mathcal{P}(C_R) \geq \alpha$. Скорость сходимости алгоритма равна $1/2^k$, где k – количество делений отрезков неопределенности пополам.

Предложим теперь алгоритм вычисления $\mathcal{P}(C_r)$ для произвольного $r \in [\rho, R]$. С этой целью дискретизируем меру так, как это предложено в первой главе. Пусть x_k , $k = \overline{1, K}$, – точки, сгенерированные на основе плотности нормального распределения $\mathcal{N}(0, I)$. Пусть $p_k = 1/K$ – вероятностная мера, приписанная к точке $x_k, \overline{1, K}$. Таким образом, получаем меру $\tilde{\mathcal{P}}$, аппроксимирующую гауссову меру \mathcal{P} . Заменим меру \mathcal{P} на меру $\tilde{\mathcal{P}}$ при вычислении $\mathcal{P}(C_r)$. Пусть для некоторого $r \in [\rho, R]$ найдены u_r и ψ_r в результате решения задачи выпуклого программирования

$$\psi_r = \min_{u \in U} \psi(S_r, u), \quad u_r = \arg \min_{u \in U} \psi(S_r, u). \quad (36)$$

Для решения задачи (36) можно использовать какие-либо эффективные методы выпуклого программирования, например метод внутренней точки.

Найдем вероятностную меру $\tilde{\mathcal{P}}(C_r)$ множества

$$C_r = \{x : c_0^T u_r + x^T A_1 u_r + \max_{j=1, \bar{J}} \bar{a}^T(u_r, x) v^j \leq \psi_r\}$$

Поскольку $S_r \subset C_r$, то исключим из рассмотрения точки $x_k \in S_r$. Отметим, что вероятностная мера $\mathcal{P}(S_r)$ множества S_r известна и вычисляется по формуле (32), в которой нужно заменить R на r , а α на получаемую меру $\mathcal{P}(S_r)$. Тогда

$$\mathcal{P}(C_r) = \mathcal{P}(C_r \setminus S_r) + \mathcal{P}(S_r) \approx \tilde{\mathcal{P}}(C_r \setminus S_r) + \mathcal{P}(S_r).$$

При этом мера $\tilde{\mathcal{P}}(C_r \setminus S_r)$ может быть найдена за счет перебора лишь точек x_k , лежащих вне S_r . Таким образом, вычисление вероятностной меры $\mathcal{P}(C_r)$ множества C_r резко упрощается.

По сути описанная процедура вычисления $\mathcal{P}(C_r)$ является реализацией метода Монте-Карло, из которой исключены точки, принадлежащие шару S_r . Алгоритм решения задачи основан на том факте, что случайный вектор X имеет нормальное распределение, но класс распределений случайного вектора может быть расширен, в частности, вектор случайных факторов может иметь сферически симметричное распределение. В этом случае почти все приведенные выше рассуждения остаются верными, изменяются только размеры доверительного шара и ядра вероятностной меры.

Основная трудоемкость предложенного алгоритма заключается в процедуре подсчета вероятностной меры многогранного множества. Однако за счет дискретизации меры нормального распределения и введения процедуры сокращения перебора точек, которые образуют доверительное множество, удается сократить время счета.

В главе приводятся результаты численных расчетов, демонстрирующие применение разработанного алгоритма.

В третьей главе рассматривается задача выбора оптимальной трассы с учетом случайной стоимости работ. Предполагается, что требуется проложить трассу между начальным и конечным пунктами, при этом стоимость прокладки трассы различна на каждом участке пути в связи с неоднородностью грунта, особенностями рельефа, естественными препятствиями и т.д. Оптимальной является трасса с наименьшими суммарными затратами по прокладке.

Весь процесс прокладки трассы разделен на ряд последовательных этапов. Существует множество трасс, каждая из которых связана с определенной стоимостью работ и характеризует управление процессом прокладки трассы.

Решение поставленной задачи осуществляется следующим образом. Рассматривается участок местности для предполагаемой прокладки трассы. На карту местности накладывается сетка разбиения на мелкие прямоугольники, где $i = \overline{1, L}, j = \overline{1, M}$ - число частей, на которые делятся стороны сетки разбиения по горизонтали и по вертикали соответственно; a_{ij} - стоимость прокладки трассы по горизонтали от точки (i, j) до точки $(i + 1, j)$; b_{ij} - стоимость прокладки трассы по вертикали от точки (i, j) до точки $(i, j + 1)$; c_{ij} - стоимость прокладки трассы

по диагонали от точки (i, j) до точки $(i + 1, j + 1)$. Если $i = L$, то $a_{ij} = c_{ij} = 0$; а если $j = M$, то $b_{ij} = c_{ij} = 0$. Текущее значение стоимости работ по прокладке трассы до точки $x_{i_k, j_k} \triangleq \text{col}(i_k, j_k)$ обозначим через d_k , причем $d_k > 0$.

Рассмотрим динамическую систему, описывающую изменение текущего положения точки на сетке разбиения и текущее значение стоимости работ:

$$\begin{cases} i_{k+1} = i_k + u_k, i_1 = 0, \\ j_{k+1} = j_k + 1 - u_k + u_k v_k, j_1 = 0, \\ d_{k+1} = d_k + \delta(i_k, j_k, u_k, v_k), d_1 = 0, \end{cases} \quad (37)$$

где $i_k = \overline{0, L}, j_k = \overline{0, M}$ - координаты точки на k -м шаге по горизонтали и по вертикали соответственно; k - номер шага, $k = \overline{1, N}$; N - общее число шагов, $\max\{L, M\} \leq N \leq L + M$; $x_{1,1} \triangleq \text{col}(i_1, j_1)$, где $i_1 = 0, j_1 = 0$, - начальная точка; $x_{N+1, N+1} \triangleq \text{col}(i_{N+1}, j_{N+1})$, где $i_{N+1} = L, j_{N+1} = M$, - конечная точка; u_k, v_k - управление, которое выбирается из множества $U \triangleq \{0, 1\}$ допустимых управлений, $u_k, v_k \in U$; d_k - стоимость прокладки трассы до k -го участка включительно; $\delta(i_k, j_k, u_k, v_k)$ - добавка к текущему значению стоимости работ.

Система (37) описывает движение по трем направлениям сетки разбиения, а применение особой комбинации управлений u_k, v_k позволяет описать движение посредством всего двух управляющих переменных $u_k, v_k \in \{0, 1\}$.

В зависимости от выбранного управления добавка к текущей стоимости трассы будет определяться величиной:

$$\delta(i_k, j_k, u_k, v_k) = \begin{cases} a_{i_k j_k}, & \text{если } u_k = 1, v_k = 0, \\ b_{i_k j_k}, & \text{если } u_k = 0, \\ c_{i_k j_k}, & \text{если } u_k = 1, v_k = 1. \end{cases} \quad (38)$$

Таким образом, текущее положение системы полностью описывается вектором текущего состояния системы:

$$z_k \triangleq \text{col}(i_k, j_k, d_k), k = \overline{1, N+1}.$$

Суммарная стоимость работ по прокладке трассы от начальной точки $x_{1,1}$ до конечной точки $x_{N+1, N+1}$ равна d_{N+1} .

Предположим, что параметры $a_{i_k j_k}, b_{i_k j_k}, c_{i_k j_k}, k = \overline{1, N}$ из (38), определяющие добавки к текущей стоимости в зависимости от управления, - случайные величины, зависящие от непредсказуемых локальных особенностей местности. Предполагается, что параметры a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} независимы и имеют нормальное распределение $a_{ij} \sim \mathbf{N}(m_{ij}^a, D_{ij}^a)$, $b_{ij} \sim \mathbf{N}(m_{ij}^b, D_{ij}^b)$, $c_{ij} \sim \mathbf{N}(m_{ij}^c, D_{ij}^c)$.

Поскольку стоимость прокладки трассы случайна, рассмотрим в качестве критерия оптимальности квантильный критерий:

$$[d_{N+1}]_\alpha \triangleq \varphi_\alpha(u, v) \triangleq \min\{\varphi : P_\varphi(u, v) \geq \alpha\}, \alpha \in (0, 1). \quad (39)$$

Задача оптимизации заключается в следующем

$$(u^*(\cdot), v^*(\cdot)) = \arg \min_{u_i(z_i), v_i(z_i) \in \{0,1\}, i=\overline{1,N}} \varphi_\alpha(u(\cdot), v(\cdot)). \quad (40)$$

В работе получен детерминированный эквивалент стохастической задачи

$$[d_{N+1}]_\alpha = \bar{d}_{N+1} + x_\alpha \sqrt{\Sigma_{N+1}},$$

где

$$\bar{d}_{N+1} \triangleq \mathbf{M}[d_{N+1}], \Sigma_{N+1} \triangleq \mathbf{D}[d_{N+1}]. \quad (41)$$

Для решения полученной задачи применяется алгоритм, основанный на методе динамического программирования и методе ветвей и границ.

В заключении подведены основные итоги данной работы, а также предложены некоторые перспективные направления дальнейших исследований в области многоэтапных линейных по стратегиям задач стохастического программирования с квантильным критерием.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Для случая дискретного распределения специального вида, полученного путем дискретизации непрерывного распределения, доказана эквивалентность многоэтапной линейной относительно стратегии задачи стохастического программирования с квантильным критерием и двухэтапной задачи квантильной оптимизации [3].

2. Для случая дискретного распределения специального вида, полученного путем дискретизации непрерывного распределения, разработан алгоритм поиска решения многоэтапной линейной по стратегии задачи стохастического программирования с квантильным критерием, основанный на переходе к эквивалентной задаче смешанного целочисленного линейного программирования [3].

3. Разработан алгоритм поиска гарантирующего решения двухэтапной задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь и нормальным распределением, основанный на последовательном решении задач выпуклого программирования и методе Монте-Карло [2].

4. Многошаговая задача управления линейной стохастической системой специального вида с гауссовскими помехами и квантильным критерием сведена к детерминированной задаче, для решения которой предложен алгоритм, основанный на методе динамического программирования и методе ветвей и границ. [1].

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК

1. Кибзун А.И., Хромова О.М. Выбор оптимальной трассы с учетом случайной стоимости работ на разных участках // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 7. — С. 89–108.

2. *Кибзун А.И., Хромова О.М.* О коррекции положения стохастической системы по квантильному критерию // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2014. — № 72.
3. *Кибзун А.И., Хромова О.М.* О сведении многоэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием к задаче смешанного целочисленного линейного программирования // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 4. — С. 120–133.

Публикации по теме диссертации в других изданиях

4. *Хромова О.М.* Модель прокладки трассы до аэропорта // Конкурс научно-технических работ и проектов молодых ученых и специалистов «Молодежь и будущее авиации и космонавтики». Москва. Аннотации работ. — Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. — С. 72–73.
5. *Хромова О.М.* Оптимизация прокладки трассы, учитывающей случайную стоимость работ на разных участках пути, связаную с разнообразным рельефом местности // Материалы XLIX международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика / Новосиб. Гос. Ун-т, Новосибирск, 16-20 апреля 2011 г. — С. 308.
6. *Хромова О.М.* Задача оптимальной прокладки автомобильной трассы с учетом случайной стоимости работ до места базирования авиационных систем // Научно-практическая конференция студентов и молодых ученых МАИ «Инновации в авиации и космонавтике – 2011». 26-30 апреля 2011 года. Москва. Сборник тезисов докладов. — М.: МЭЙЛЕР, 2011. — С. 117.
7. *Кибзун А.И., Хромова О.М.* Выбор оптимальной трассы с учетом случайной стоимости работ // 16-я международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация», Крым, Евпатория, 3–10 июля 2011 года. Сборник тезисов докладов. — М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2011. — С. 135–136.
8. *Кибзун А.И., Хромова О.М.* О сведении двухэтапной задачи квантильной оптимизации к задаче выпуклого программирования // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 5. — С. 131–143.