

На правах рукописи



Каримов Суннат Бахтиярович

**Моделирование нелинейно-упругих композиционных материалов с
конечными деформациями методом асимптотического осреднения**

Специальность 1.1.8. – «Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2026 г.

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Научный руководитель: **Димитриенко Юрий Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (Национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Официальные оппоненты: **Звягин Александр Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Газовой и волновой динамики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (МГУ им. М.В. Ломоносова)

Ченцов Александр Викторович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук» (ИПМех РАН)

Ведущая организация: **Акционерное общество «Композит», г. Королёв**

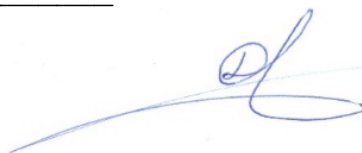
Защита диссертации состоится «01» июля 2026 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при ФГАОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГАОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4. и на сайте:

https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=187752

Автореферат разослан «___» _____ 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.2.327.07



Сердюк Д. О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В разных отраслях промышленности активно применяют композиционные материалы, состоящие из резиноподобных или эластомерных матриц, армированных волокнами, дисперсными частицами или тканевыми наполнителями. Такие материалы представляют значительный интерес, так как обладают удачными сочетаниями свойств, в частности относительно высокой прочностью и достаточно большой предельной деформацией разрушения, обусловленной способностью резин деформироваться без разрушения в области больших деформаций. Проблема формулировки уравнений состояния при конечных деформациях, в том числе и для высокоэластичных материалов, рассматривалась большим числом ученых, укажем лишь некоторых из них: Муни М., Ривлин Р.С., Грин А. и Адкинс Дж., Трусделл К., Черных К. Ф., Мурнаган Ф.Д., Дэй А., Ильюшин А. А., Победря Б.Е., Димитриенко Ю. И., Бровко Г.Л., Кондауров В.И., Карнаухов В. Г., Кристенсен Р., Левин В.А., Зингерман К. М., Вершинин А. В., Лурье А. И., Новожилов В. В., Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И., Арруда Е., Бойс М., Гольденблатт И. И., Гузь А. Н., Работнов Ю. Н., Оден Дж. и многие другие.

Для моделирования микро-макро-процессов в композиционных материалах наиболее перспективным в настоящее время является метод асимптотического осреднения, который был предложен Бахваловым Н.С., Панасенко Г.П., Победрей Б.Е., Vensousson A., Lions J.L., Paranicolaou G. и Санчес-Паленсией Э. Метод асимптотического осреднения достаточно хорошо развит в настоящее время и успешно численно реализован для различных задач механики, но, главным образом, для линейных задач. В работах под руководством проф. Димитриенко Ю.И. этот метод был применен для расчета нелинейно-упругих и упруго-пластических свойств композитов с малыми деформациями, а также для слоистых композитов с конечными деформациями. В данной диссертационной работе предложен вариант этого метода для расчета микро-макроскопического деформирования сложно-армированных композитов с конечными деформациями и периодической структурой, без наличия допущения о симметрии ячейки периодичности относительно координатных плоскостей. Для определяющих соотношений компонентов композитов

использованы универсальные представления моделей нелинейно-упругих сред с конечными деформациями, предложенные Ю.И.Димитриенко.

Целью настоящей диссертации является разработка варианта метода асимптотического осреднения для композитов с конечными деформациями и периодической структурой, для случая полных ячеек периодичности без допущения о наличии у нее симметрии относительно координатных плоскостей, а также разработка методики построения эффективных определяющих соотношений для изотропных и ортотропных КМ с конечными деформациями с использованием универсальных представлений полулинейных моделей упругих сред.

Объектом исследования композиционные материалы со сложными трехмерными структурами армирования (тканевые и дисперсно-армированные) с конечными деформациями, рассматриваемые, как неоднородные нелинейно-упругие среды с периодической структурой без наличия дополнительного требования о наличии симметрий ячеек периодичности относительно координатных плоскостей.

Задачами настоящей работы являются:

- разработка варианта метода асимптотического осреднения КМ со сложными трехмерными структурами армирования при конечных деформациях с использованием универсальных полулинейных моделей упругих сред;
- разработка численной конечно-элементной методики решения нелинейной задачи упругости с конечными деформациями на полных ячейках периодичности (ЯП), без использования дополнительных предположений относительно геометрической симметрии ЯП относительно координатных плоскостей;
- разработка методики построения аналитических эффективных определяющих соотношений для изотропных и ортотропных нелинейно-упругих КМ на основе аппроксимации диаграмм деформирования, полученных в результате численного решения серии локальных задач на ячейке периодичности ;
- решение двух задач многомасштабного расчета напряженно-деформированного состояния конструкций с применением нелинейно-

упругих КМ с конечными деформациями на макроуровне и на микроуровне.

Методы исследования. В диссертационной работе для решения сформулированных задач использованы следующие методы исследования:

- метод асимптотического осреднения периодических структур;
- метод конечных элементов;
- методы оптимизации.

Достоверность и обоснованность результатов и выводов гарантируется применением теоретически обоснованного математического аппарата.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту:

- разработка варианта метода асимптотического осреднения КМ со сложными трехмерными структурами армирования при конечных деформациях с использованием универсальных полулинейных моделей упругих сред;
- разработка итерационного метода решения задачи нелинейной упругости с конечными деформациями на полной ячейке периодичности без использования дополнительных предположений относительно симметрии ЯП, на основе вариационной формулировки в скоростях;
- разработка методики построения аналитических эффективных определяющих соотношений для нелинейно-упругих сред с периодической структурой, с использованием решений задач на полной ячейке периодичности.
- разработка методики решения многомасштабных задач нелинейной упругости с конечными деформациями для периодических сред.

Практическая значимость диссертационной работы.

Метод получения эффективных определяющих соотношений для изотропных и ортотропных нелинейно-упругих КМ может быть использован для проектирования КМ с заданными свойствами и многомасштабного анализа напряжённо-деформированного состояния конструкций из таких материалов с решением задач как на микро-, так и на макроуровне.

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на:

Всероссийской студенческой конференции «Студенческая научная весна - 2017», посвящённой 170-летию со дня рождения Н.Е. Жуковского, Москва, 2017 г;

Всероссийской студенческой конференции «Студенческая научная весна», посвящённой 165-летию со дня рождения В.Г. Шухова», Москва, 2018 г;

Международной конференции «International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences», August 27-31, 2018, Moscow, Russia;

Международном научном форуме «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 5-8 декабря 2018;

2-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 20-21 ноября 2019;

Международной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (FARM-2019), 10-12 декабря, МГТУ им Баумана

3-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2020;

4-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 1-3 декабря 2021;

5-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2022;

научных семинарах кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (Москва, 2018-2025 гг.).

Публикации. По теме диссертации автором опубликованы 12 публикаций, в том числе 4 в изданиях из списка ВАК (белый список).

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, 3 разделов, выводов и списка литературы из 91 наименования. Работа изложена на 155 листах, содержит 106 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность, основные положения,

выносимые на защиту, а также приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

Первый раздел посвящен разработке варианта метода асимптотического осреднения для решения системы уравнений нелинейной упругости для композитов с периодической структурой для случая конечных деформаций. Рассматривается общая постановка трехмерной задачи нелинейной теории упругости в лагранжевом описании с использованием универсальных моделей – моделей \mathcal{A}_n , предложенных Ю. И. Димитриенко для упругих сред с конечными деформациями:

$$\mathring{\nabla} \cdot \mathbf{P} + \mathring{\rho} \mathbf{f} = 0, \quad X^i \in \mathring{V}, \quad (1)$$

$$\mathbf{P} = \overset{(n)}{\mathcal{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \mathring{V} \cup \mathring{\Sigma}, \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathring{\nabla} \otimes \mathbf{u}^T, \quad X^i \in \mathring{V} \cup \mathring{\Sigma}, \quad (3)$$

$$\mathring{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{P}] = 0, \quad [\mathbf{u}] = 0, \quad X^i \in \mathring{\Sigma}_{\alpha\beta}, \quad (4)$$

$$\mathring{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{t}_{(e)}, \quad X^i \in \mathring{\Sigma}_1, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_{(e)}, \quad X^i \in \mathring{\Sigma}_2, \quad (5)$$

Здесь (1) – уравнения равновесия, (2) – определяющие соотношения нелинейно-упругой среды, (3) – кинематическое соотношение, (4) – условия идеального контакта на поверхностях раздела $\mathring{\Sigma}_{\alpha\beta}$ α -ой и β -ой компонент композита, (5) – граничные условия на частях $\mathring{\Sigma}_1$ и $\mathring{\Sigma}_2$ внешней поверхностях композита, которые вместе составляют всю внешнюю поверхность: $\mathring{\Sigma}_1 \cup \mathring{\Sigma}_2 = \mathring{\Sigma}$. Для скачка величины Ω при переходе через границу $\mathring{\Sigma}_{\alpha\beta}$ раздела компонентов α и β используется обозначение $[\Omega]$. Также введены обозначения для: $\mathring{\rho}$ – плотности в отсчетной конфигурации; $\overset{(n)}{\mathcal{P}}$ – тензора определяющих соотношений нелинейно-упругих компонент композита; \mathbf{P} – тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа; \mathbf{F} – тензора градиента деформации; \mathbf{u} – вектора перемещений; $\mathring{\mathbf{n}}$ – вектора нормали к поверхности в отсчетной конфигурации $\mathring{\mathcal{K}}$; $\mathbf{t}_{(e)}$ – вектора поверхностных

усилий, приложенных к поверхности $\overset{\circ}{\Sigma}_1$; $\mathbf{u}_{(e)}$ – вектора заданных перемещений поверхности $\overset{\circ}{\Sigma}_2$, \mathbf{f} – вектора плотности массовых сил; $\overset{\circ}{\nabla}$ – набла оператора в отсчетной конфигурации.

Тензор определяющих соотношений $\overset{(n)}{\mathcal{P}}$ нелинейно-упругих компонентов композита для моделей \mathcal{A}_n упругих сред с конечными деформациями имеет неявно-заданный вид и зависит от градиента деформаций \mathbf{F} и лагранжевых координат \mathbf{X} :

$$\begin{aligned}\overset{(n)}{\mathcal{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) &= \overset{\circ}{\rho} \overset{(n)}{\mathbf{E}^{\circ}} \cdot \Psi_{\mathbf{C}}, \\ \overset{(n)}{\mathbf{E}^{\circ}} &= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 E_{\alpha\beta}^0 \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\beta} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\beta} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha}, \\ \Psi_{\mathbf{C}} &= \frac{\partial}{\partial \overset{(n)}{\mathbf{C}}} \Psi(\overset{(n)}{\mathbf{C}}, \mathbf{X}),\end{aligned}\quad (6)$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}} = \frac{1}{n - III} (\mathbf{U}^{n-III} - \mathbf{E}), \quad \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha} \otimes \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha} \quad (7)$$

Здесь $\Psi(\overset{(n)}{\mathbf{C}}, \mathbf{X})$ – упругий потенциал; $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ – симметричный энергетический тензор деформации; $\overset{(n)}{\mathbf{E}^{\circ}}$ – тензор энергетической эквивалентности, связывающий энергетический тензор напряжений и тензор Пиолы—Кирхгофа; $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\alpha}, \overset{\circ}{\mathbf{p}}_{\beta}$ – векторы собственного базиса для правого и левого тензора искажений соответственно (являются неявными функциями только от \mathbf{F}); $E_{\alpha\beta}^0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – функции собственных значений λ_{γ} тензора искажений \mathbf{U} , а λ_{γ} являются функциями только от тензора градиента деформаций \mathbf{F} . Индекс n – номер пары энергетических тензоров: $n = 1, \dots, 5$.

Решение задачи (1)–(7) ищется относительно поля вектора перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X})$, после нахождения которого координаты произвольной точки композита вычисляются по формуле: $\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \overset{\circ}{\mathbf{x}}(\mathbf{X}) + \mathbf{u}(\mathbf{X})$.

Для КМ, имеющего периодическую структуру, решение ищется в виде асимптотического разложения по малому параметру $\kappa = l / L$, представляющему

собой отношение размера ячейки периодичности (ЯП) к характерному размеру конструкции:

$$u^i(\mathbf{X}, \xi) = \sum_{m=0}^N u^{(m)i}(\mathbf{X}, \xi) \kappa^m + o(\kappa^N), \quad (8)$$

которое представляет собой функцию от глобальных лагранжевых координат \mathbf{X} и локальных координат ξ , заданных на ячейке периодичности, и относительно которых функция (8) является периодической. С использованием этого разложения, а также разложений остальных неизвестных полей на ячейке периодичности, получена рекуррентная последовательность локальных задач \mathcal{L}_m , $m = 0, 1, \dots, N$.

Решение каждой задачи в этой последовательности используется как входные данные для следующей задачи. Задача нулевого приближения \mathcal{L}_0 имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{P}^{(0)} &= 0, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{V}, \quad \xi \in \overset{\circ}{V}_{\xi} \\ \mathbf{P}^{(0)} &= \overset{(n)}{\mathcal{P}}(\mathbf{F}^{(0)}, \xi), \quad \mathbf{F}^{(0)} = \bar{\mathbf{F}} + (\nabla_{\xi} \otimes \mathbf{u}^{(1)})^T, \\ \mathbf{n} \cdot [\mathbf{P}^{(0)}] &= 0, \quad [\mathbf{u}^{(1)}] = 0, \quad \xi \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \\ \langle \mathbf{u}^{(1)} \rangle &= 0, \quad \llbracket \mathbf{u}^{(1)} \rrbracket_l = 0, \quad l = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\overset{\circ}{V}_{\xi}$ - ячейка периодичности. Неизвестным в задаче (9) является поле перемещений $\mathbf{u}^{(1)}$, а входными данными является поле осредненного тензора градиента деформаций $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{E} + \nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}^{(0)}$. Здесь использованы обозначения для осреднения по ЯП: $\langle \Omega \rangle = \frac{1}{|V_{\xi}|} \int_{V_{\xi}} \Omega dV_{\xi}$ и для условия периодичности:

$$\llbracket \Omega \rrbracket_l = \Omega|_{\xi^i=1/2} - \Omega|_{\xi^i=-1/2}.$$

Для определения входных данных для локальной задачи нулевого приближения сформулирована осредненная задача нелинейной упругости

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{P}} - \langle \overset{\circ}{\rho} \mathbf{f} \rangle &= 0, \\ \bar{\mathbf{P}} &= \overset{(n)}{\mathcal{P}}(\bar{\mathbf{F}}), \quad \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{E} + (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}^{(0)})^T, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{t}_{(e)}, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}_{(e)}, \quad \mathbf{X} \in \overset{\circ}{\Sigma}_2,$$

где $\bar{\mathbf{P}} = \langle \bar{\mathbf{P}}^{(0)} \rangle$ – осредненный тензора напряжений Пиолы—Кирхгофа, а $\bar{\mathcal{P}}^{(n)}(\bar{\mathbf{F}})$ – тензор эффективных определяющих соотношений композита.

Для нахождения численного решения задачи L_0 сформулирована вариационная формулировка этой задачи в следующем виде:

$$\delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v}) = \int_{\overset{\circ}{V}_\xi} \delta \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{P}^{(0)} dV_\xi = 0. \quad (11)$$

где $\delta \mathbf{v}$ – вариация искомого решения задачи.

Уравнение (11) линеаризуется по отношению к приращению $\Delta \mathbf{u}^{(1)}$

$$\delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)} + \Delta \mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v}) \approx \delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v}) + \mathcal{D} \delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v}) \Delta \mathbf{u}^{(1)} = 0, \quad (12)$$

где $\mathcal{D} \delta W^{(0)}(\mathbf{u}^{(1)}, \delta \mathbf{v})$ – производна по Гато.

Для учёта периодичности решения на ЯП степени свободы на противоположных гранях ЯП отождествляются. Для учёта условия нормировки в одном из узлов фиксируются перемещения, после чего предварительно полученное решение $\Delta \mathbf{u}^{(1)*}$ нормализуется по формуле $\Delta \mathbf{u}^{(1)} = \Delta \mathbf{u}^{(1)*} - \langle \Delta \mathbf{u}^{(1)*} \rangle$.

Линеаризованная задача (12) на каждом шаге итерации по значению осредненного градиента $\bar{\mathbf{F}}$ решается методом конечных элементов.

Разработан программный модуль, реализующий предложенный алгоритм решения локальной задачи \mathcal{L}_0 .

Были проведены численные решения задачи локальной задачи \mathcal{L}_0 для: тканевого композиционного материала (рис. 1) и дисперсно-армированного с помощью сферических частиц (рис. 2) композиционного материала.

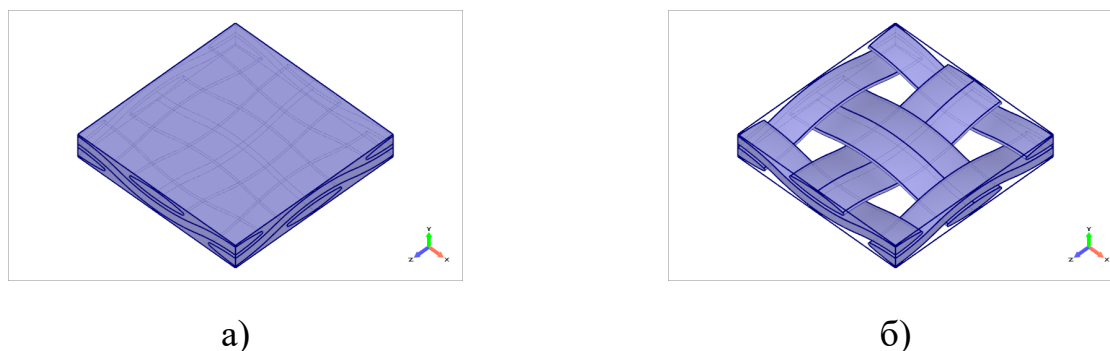


Рисунок 1. – ЯП тканевого КМ: а) общий вид; б) нити основы и утка

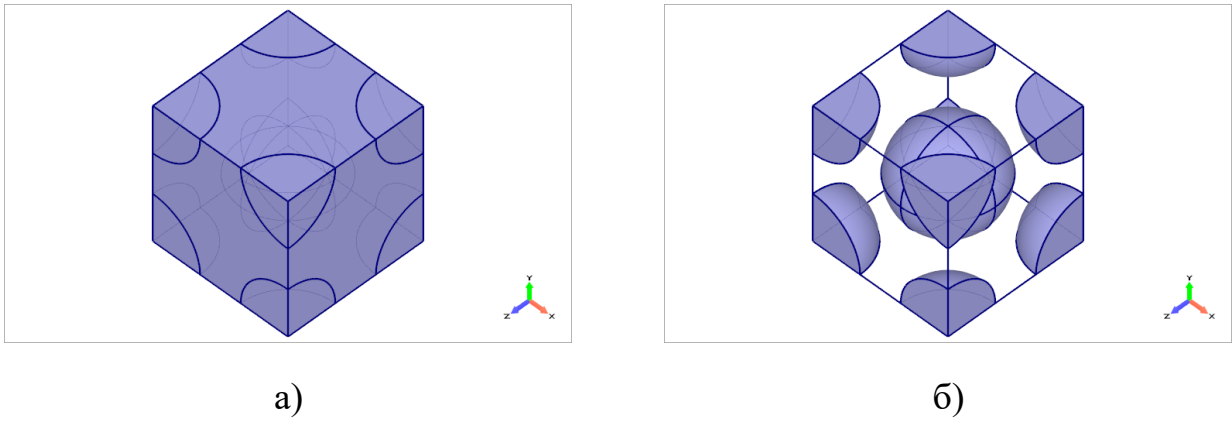


Рисунок 2. – ЯП дисперсно-армированного КМ: а) общий вид; б) армирующие частицы

Были рассмотрены различные схемы нагружения. На рисунках 3 представлены некоторые результаты расчетов – поля компонент тензора напряжений Коши $\mathbf{T}^{(0)} = (\rho / \rho^0) \mathbf{F}^{(0)} \cdot \mathbf{P}^{(0)}$ для пятой модели \mathcal{A}_5 .

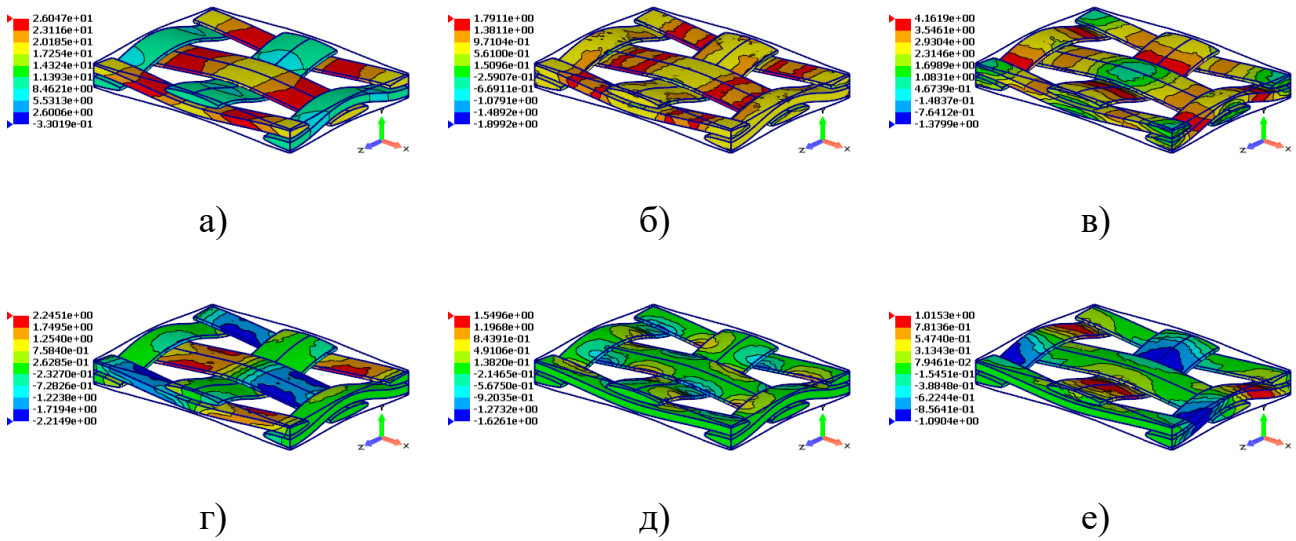
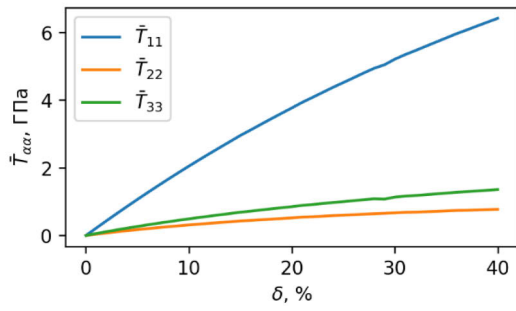


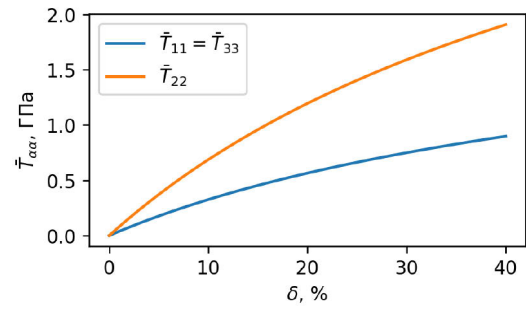
Рисунок 3. – Поле компонент $T_{ij}^{(0)}$ (ГПа) тензора напряжений Коши $\mathbf{T}^{(0)}$ в ЯП КМ1 при одноосном растяжении вдоль \mathbf{e}_1 с удлинением 40% :

а) $T_{11}^{(0)}$; б) $T_{22}^{(0)}$; в) $T_{33}^{(0)}$; г) $T_{12}^{(0)}$; д) $T_{13}^{(0)}$; е) $T_{23}^{(0)}$.

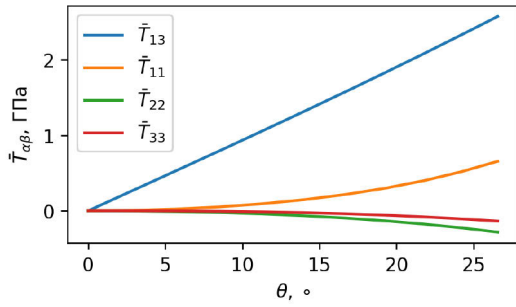
Также были получены диаграммы деформирования (рис 4) $\bar{T}_{\alpha\beta}(\bar{\delta}_\alpha)$ для 4-х программ нагружения: одноосного растяжения вдоль нитей, одноосного растяжения перпендикулярно плоскости плетения, сдвига в плоскости плетения и сдвига в поперечной плоскости, где $\bar{T}_{\alpha\beta}$ - компоненты среднего по ЯП тензора напряжений Коши: $\bar{\mathbf{T}}^{(0)} = (\bar{\rho} / \bar{\rho}^0) \bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{P}}$, а $\bar{\delta}_\alpha$ - средние по ЯП значения удлинений



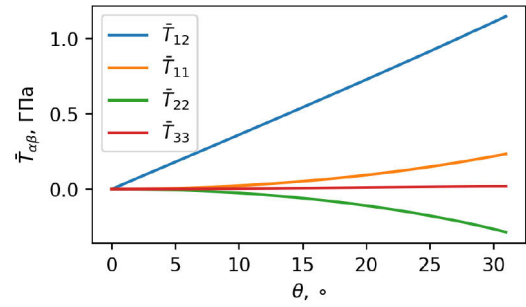
а)



б)



в)



г)

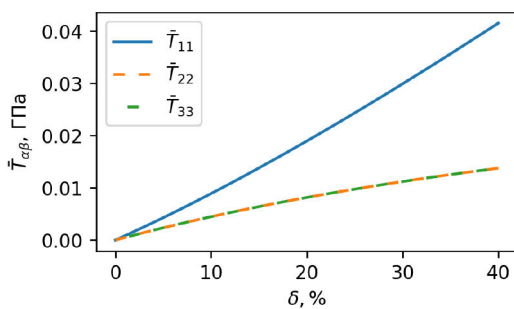
Рисунок 4. – Диаграммы деформирования КМ1, значение компонент тензора напряжений Коши

а) при одноосном растяжении вдоль \mathbf{e}_1 ($0 \leq \bar{\delta}_1 \leq 0.4$);

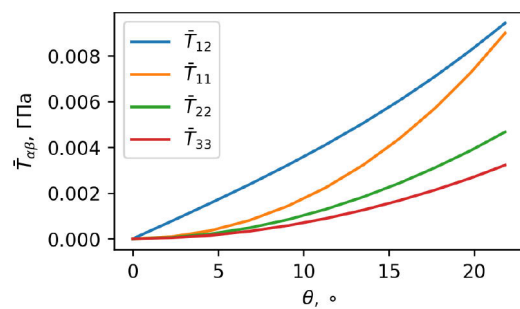
б) при одноосном растяжении вдоль \mathbf{e}_2 ($0 \leq \bar{\delta}_2 \leq 0.4$);

в) при сдвиге в плоскости XZ ($0^\circ < \bar{\theta}_{13} < 26.565^\circ$);

г) при сдвиге в плоскости XY ($0^\circ < \bar{\theta}_{12} < 31.964^\circ$).



а)



б)

Рисунок 5. – Диаграммы деформирования КМ2, значение компонент тензора напряжений Коши

а) при одноосном растяжении вдоль \mathbf{e}_1 ($0 \leq \bar{\delta} \leq 0.4$);

г) при сдвиге в плоскости XY ($0^\circ < \bar{\theta} < 26.5^\circ$).

Вторая глава диссертации посвящена разработке методики построения аналитических эффективных определяющих соотношений для периодических нелинейно-упругих сред, а также идентификации констант моделей аналитических эффективных определяющих соотношений.

В качестве модели аналитических эффективных определяющих соотношений тканевых композитов, к которым относится КМ1, были предложены полулинейные модели \mathcal{A}_n ортотропных материалов

$$\bar{T}_{\alpha\alpha}^{(n)} = \bar{J} \sum_{v=1}^3 \bar{l}_{\alpha v} \bar{C}_{vv}^{(n)}, \quad \bar{T}_{\alpha\beta}^{(n)} = 2\bar{J} \bar{l}_{3+\gamma, 3+\gamma} \bar{C}_{\alpha\beta}^{(n)}, \quad n=1, \dots, 5, \quad (13)$$

где α, β, γ принимают значения от 1 до 3, причём $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$; $\bar{l}_{\alpha\beta}$, $\bar{l}_{3+\gamma, 3+\gamma}$ – эффективные упругие константы ортотропного материала, $\bar{T}_{\alpha\beta}^{(n)}$ и $\bar{C}_{\alpha\beta}^{(n)}$ – компоненты средних по ЯП энергетических тензоров напряжений $\bar{\mathbf{T}}$ и деформаций $\bar{\mathbf{C}}$ в декартовом базисе, $\bar{J} = \det \bar{\mathbf{F}}^{-1}$.

В качестве модели аналитических эффективных определяющих соотношений дисперсно-армированных композитов, к которым относится композит КМ2, были предложены полулинейная модель \mathcal{A}_n изотропных материалов

$$\bar{T}_{\alpha\alpha}^{(n)} = \bar{J} \sum_{\gamma=1}^3 (\bar{l}_1 + \delta_{\alpha\gamma} 2\bar{l}_2) \bar{C}_{\gamma\gamma}^{(n)}, \quad \bar{T}_{\alpha\beta}^{(n)} = 2\bar{J} \bar{l}_2 \bar{C}_{\alpha\beta}^{(n)}, \quad n=1, \dots, 5, \quad (14)$$

где \bar{l}_1, \bar{l}_2 – эффективные упругие константы изотропного материала.

Компоненты $\bar{C}_{ij}^{(n)}$ в обоих случаях определяются из формул

$$\bar{C}_{ij}^{(n)} = \sum_{\alpha=1}^3 \bar{C}_{\alpha} \bar{p}_{\alpha i} \bar{p}_{\alpha j}, \quad \bar{C}_{\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{n-3} (\bar{\lambda}_{\alpha}^{n-3} - 1), & n \neq 3, \\ \ln \bar{\lambda}_{\alpha}, & n = 3, \end{cases} \quad (15)$$

где $\bar{p}_{\alpha i}$ – компоненты собственных векторов правого тензора искажений $\bar{\mathbf{U}}$, $\bar{\lambda}_{\alpha}$ – его собственные значения.

Для определения материальных констант $\bar{l}_{\alpha\beta}$, $\bar{l}_{3+\gamma, 3+\gamma}$ или \bar{l}_1, \bar{l}_2 моделей аналитических эффективных определяющих соотношений предложена

методика, заключающаяся в минимизации отклонения набора диаграмм деформирования композита при базовых программах нагружения, которые получены 2-м способами: путем прямого решения локальных задач (9) на ЯП и путем решения осредненной задачи (10) с аналитическими эффективными определяющими соотношениями (11) или (12). Базовые программы нагружения для определения констант ортотропного материала (11), следующие:

1. одноосное растяжение вдоль каждой оси главного базиса анизотропии;
2. сдвиг в плоскостях, образованными осями главного базиса анизотропии.

Для идентификации материальных констант изотропного композита достаточно двух экспериментов:

1. одноосное растяжение вдоль любой оси,
2. сдвиг в любой плоскости.

Для нахождения материальных констант модели была сформулирована задача минимизации относительного отклонения диаграмм деформирования:

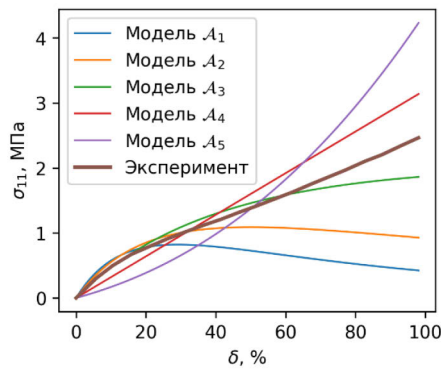
$$R = \sum_{k=1}^K w_k \sum_{i=1}^{N_k} \mu_{ki} \left(\bar{T}_{\alpha\alpha}^{(k)}(\delta_i^{(k)} | \bar{l}) - \bar{T}_{\alpha\alpha}^{(0)(k)}(\delta_i^{(k)}) \right)^2 \rightarrow \min_{\bar{l}}, \quad (16)$$

где w_k – вес численного эксперимента; μ_{ki} – вес i -ой точки внутри k -го ряда;

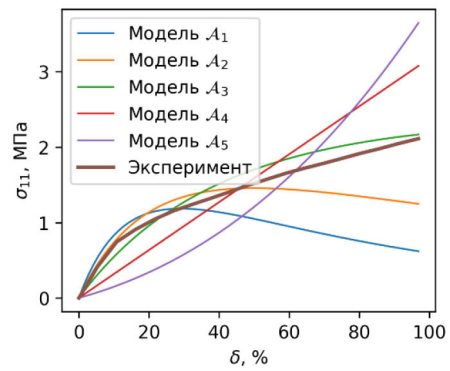
$\bar{T}_{\alpha\alpha}^{(k)}(\delta_i^{(k)} | \bar{l})$ – диаграмма деформирования композита, вычисленная с помощью модели (11) или (12) при некоторых значениях эффективных упругих констант $\bar{l} = \{\bar{l}_{11}, \dots, \bar{l}_{66}\}$ композита, а $\bar{T}_{\alpha\alpha}^{(0)(k)}(\delta_i^{(k)})$ – диаграмма деформирования композита полученная с помощью прямого решения локальной задачи (9) в k -ом варианте расчета. Управляющими параметрами являются \bar{l} .

Для решения задачи минимизации (16) был использован модифицированный метод Гаусса–Ньютона.

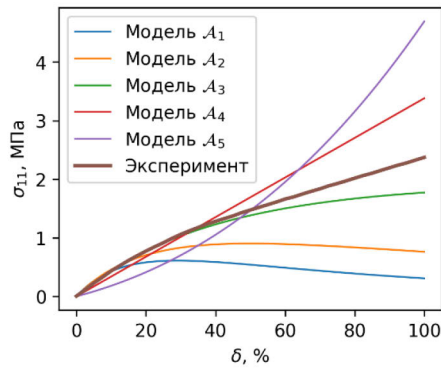
В качестве примера были рассмотрены экспериментальные диаграммы деформирования (рис. 6) натуральной резины (NR60), резины марок EPDM60, NEO60, а также полиэфира холодного литья (ССР60). Коэффициент Пуассона материалов был принят равным $\nu = 0.49$.



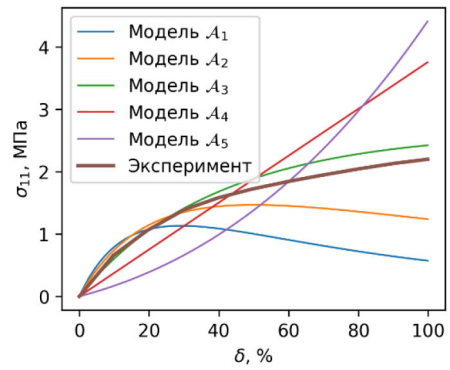
а)



б)



в)



г)

Рисунок 6. – Экспериментальные диаграммы деформирования материалов и их аппроксимации с помощью полулинейных моделей \mathcal{A}_n : а) NR60; б) EPDM60; в) NEO60; г) ССР60.

По этим диаграммам были найдены константы \bar{l}_1, \bar{l}_2 моделей \mathcal{A}_n описанным в этой главе методом (табл. 1).

Таблица 1 – Значения констант для материалов NR60, EPDM60, NEO60, ССР60 в различных моделях \mathcal{A}_n

		\mathcal{A}_1	\mathcal{A}_2	\mathcal{A}_3	\mathcal{A}_4	\mathcal{A}_5
NR60	l_1 , МПа	145	121	88.7	52.6	24.1
	l_2 , МПа	2.96	2.46	1.81	1.07	0.490
EPDM60	l_1 , МПа	209	161	103	52.2	21.2
	l_2 , МПа	4.28	3.30	2.11	1.07	0.432
NEO60	l_1 , МПа	108	100	84.1	55.6	25.8
	l_2 , МПа	2.20	2.04	1.72	1.14	0.526
ССР60	l_1 , МПа	227	174	111	53.6	20.4
	l_2 , МПа	4.63	3.56	2.26	1.09	0.417

Затем были найдены эффективные материальные константы $\bar{l}_{\alpha\beta}$, $\bar{l}_{3+\gamma,3+\gamma}$ для КМ1 и КМ2 на основе их диаграмм деформирования (рис. 4-5). Значения этих констант приведены в таблицах 2 и 3.

Таблица 2 – Эффективные материальные константы композита КМ1 в различных моделях \mathcal{A}_n

Константа	Модель				
	\mathcal{A}_1	\mathcal{A}_2	\mathcal{A}_3	\mathcal{A}_4	\mathcal{A}_5
\bar{l}_{11} , ГПа	50.0	36.5	19.9	17.3	11.4
\bar{l}_{22} , ГПа	15.5	11.3	7.89	5.33	3.48
\bar{l}_{33} , ГПа	50.0	36.5	19.9	17.3	11.4
\bar{l}_{12} , ГПа	4.21	3.76	3.33	2.92	2.54
\bar{l}_{23} , ГПа	4.21	3.76	3.33	2.92	2.54
\bar{l}_{13} , ГПа	7.09	6.34	5.62	4.93	4.29
\bar{l}_{44} , ГПа	3.82	3.99	4.04	3.99	3.82
\bar{l}_{55} , ГПа	3.82	3.99	4.04	3.99	3.82
\bar{l}_{66} , ГПа	10.3	10.6	10.7	10.6	10.3

Таблица 3 – Эффективные константы композита КМ2 в моделях \mathcal{A}_n

Константа	Модель				
	\mathcal{A}_1	\mathcal{A}_2	\mathcal{A}_3	\mathcal{A}_4	\mathcal{A}_5
\bar{l}_1 , ГПа	0.1155	0.0948	0.0736	0.0527	0.0326
\bar{l}_2 , ГПа	0.0168	0.0201	0.0211	0.0204	0.0189

Результаты расчетов (рис. 7) показывают, что хотя компоненты композита КМ2 были заданы в моделях \mathcal{A}_3 и \mathcal{A}_4 , композит в осреднённом смысле наиболее хорошо описывается моделями \mathcal{A}_4 и \mathcal{A}_5 – среднее отклонение для диаграммы одноосного растяжения не превышает 6%.

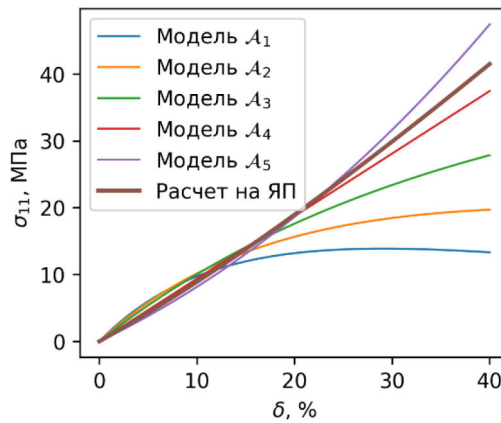


Рисунок 7 – Сравнение диаграмм деформирования при растяжении: КМ2 и аналитических моделей с константами, задающими наилучшее приближение.

Третья глава посвящена разработке методики решения многомасштабных задач нелинейной упругости для периодических сред.

В этой методике используется разработанный в главе 2 алгоритм построения аналитических эффективных определяющих соотношений, материальные константы в которых определяются из условия наилучшей аппроксимации диаграмм деформирования при базовых программах нагружения, полученных двумя способами: путем прямого решения локальных задач на ЯП и путем решения осредненной задачи. После решения осредненной макро-задачи вычисляются тензоры концентрации напряжений в компонентах композита, а затем – поля микронапряжений в ЯП для заранее выбранной точки конструкции.

Была рассмотрена задача № 1 о нагружении амортизатора, изготовленного из композита КМ-2, равномерной сжимающей нагрузкой, приложенной к верхней плите, изготовленной из стали. Нижнее основание амортизатора, считалось жестко закреплённым. Для КМ2 были использованы упругие константы для материала, вычисленные во второй главе.

Некоторые результаты решения макрозадачи (10) для данного случая нагружения, с помощью разработанной методики, приведены на рисунке (рис. 8).

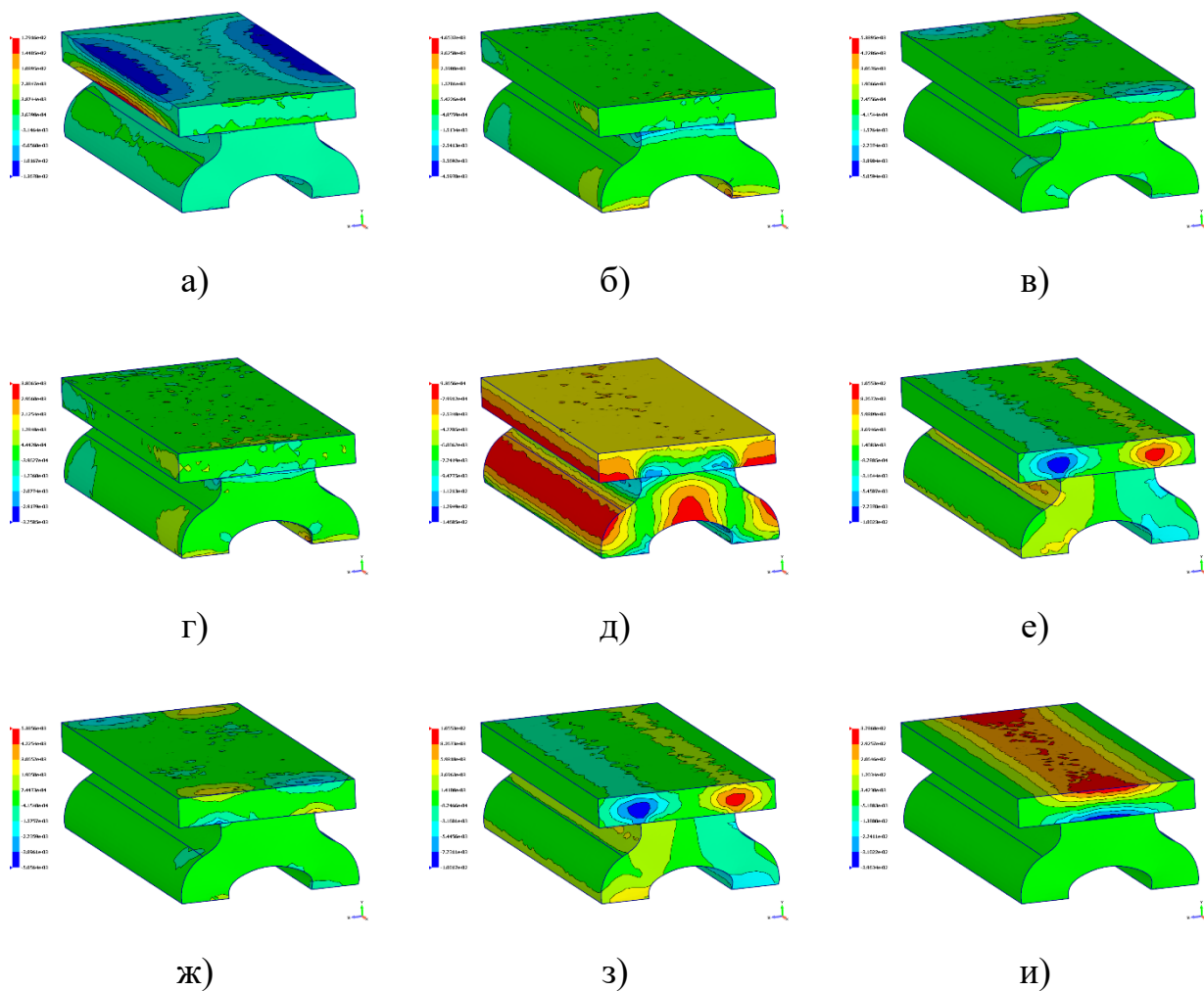
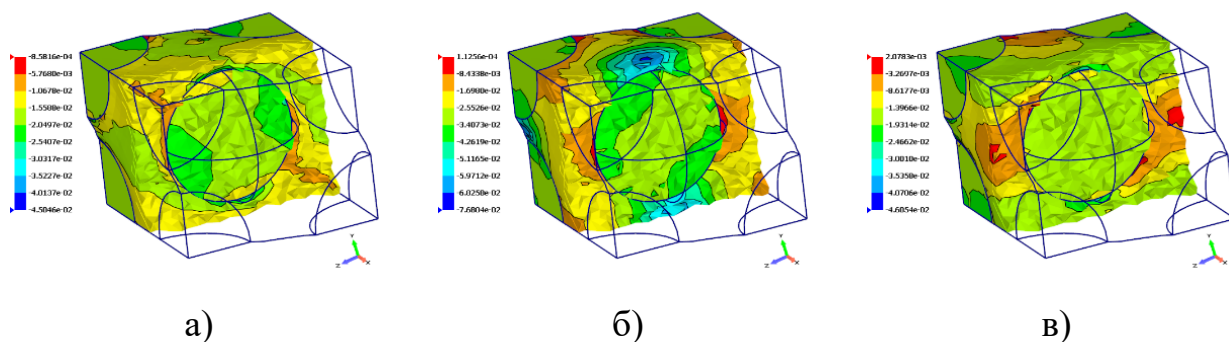


Рисунок 8. – Поле компонент \bar{P}_{ij} (ГПа) тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа в задаче о деформировании амортизатора из КМ:

а) P_{11} ; б) P_{12} ; в) P_{13} ; г) P_{21} ; д) P_{22} ; е) P_{23} ; ж) P_{31} ; з) P_{32} ; и) P_{33} .

Была также рассмотрена отдельная точка в материале амортизатора и для выделенной точки вычислены осреднённые компоненты тензора градиента деформаций, которые были переданы в микрозадачу, в результате чего получены распределения полей перемещений, деформаций и напряжений на ЯП (рис. 9).



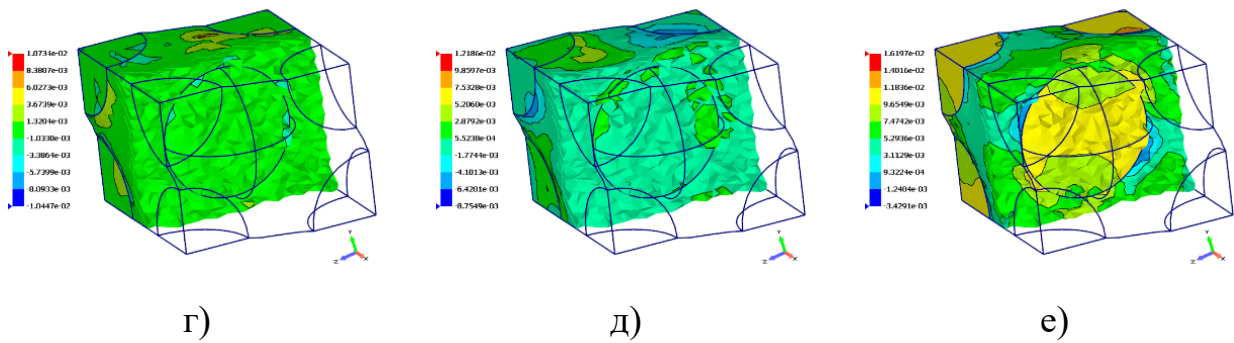


Рисунок 9. – Поле компонент T_{ij} (ГПа) тензора напряжений Коши на деформированной ЯП КМ1 рассчитанное в выделенной точке макрозадачи:

а) T_{11} ; б) T_{22} ; в) T_{33} ; г) T_{12} ; д) T_{13} ; е) T_{23} .

Задача № 2. Решена многомасштабная задача о деформировании модельной шины из композиционного материала КМ2 в составе колеса под действием внешней вертикальной сил, приложенной к оси колеса.

В результате решения описанной макрозадачи получены поля перемещений, деформаций и напряжений (рис 10).

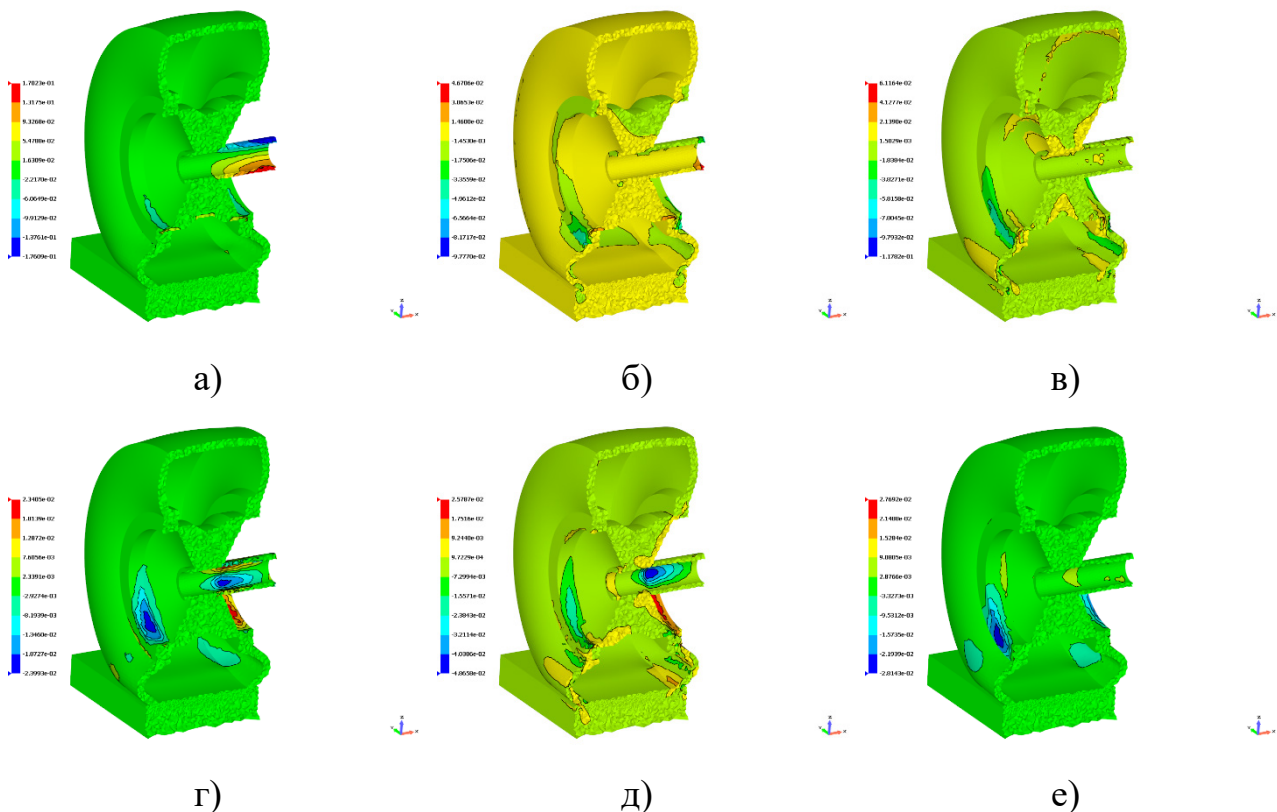


Рисунок 10. – Поля компонент T_{ij} (ГПа) тензора напряжений в задаче о деформировании модельной шины из КМ:

а) T_{11} ; б) T_{22} ; в) T_{33} ; г) T_{12} ; д) T_{13} ; е) T_{23} .

Была выбрана отдельная точка в окрестности основания, для которой была решена микрозадача, в результате чего получены распределения полей перемещений, деформаций и напряжений на ЯП (рис. 11-12).

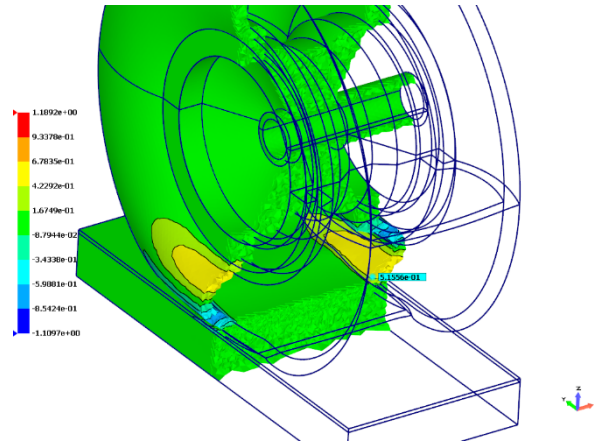


Рисунок 11 – Компонента градиента деформаций \bar{F}_{13} и выбранная точка

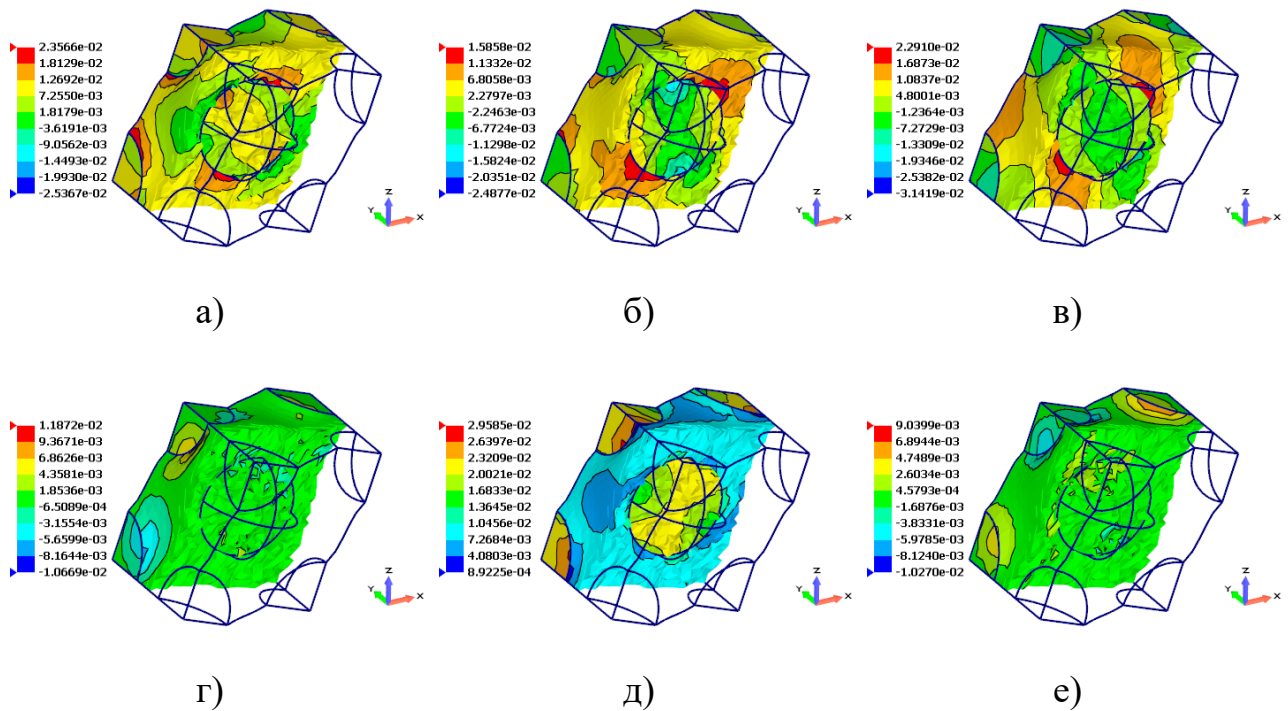


Рисунок 12. – Поля компонент T_{ij} (ГПа) тензора напряжений Коши на деформированной ЯП КМ2 рассчитанные в выделенной точке макрозадачи:

а) T_{11} ; б) T_{22} ; в) T_{33} ; г) T_{12} ; д) T_{13} ; е) T_{23} .

Показано, что комплекс разработанных методик (решение локальных задач, вычисление осредненных характеристик КМ и решение многомасштабных задач) может быть успешно применен для решения

многомасштабных задач нелинейного деформирования конструкций из композиционных материалов с конечными деформациями.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1) Разработан вариант метода асимптотического осреднения КМ со сложными трехмерными структурами армирования при конечных деформациях с использованием универсальных полулинейных моделей упругих сред;

2) Разработана численная конечно-элементная методика решения нелинейной задачи упругости с конечными деформациями на полных ячейках периодичности (ЯП), без использования дополнительных предположений относительно геометрической симметрии ЯП относительно координатных плоскостей;

3) Разработана методика построения аналитических эффективных определяющих соотношений для изотропных и ортотропных нелинейно-упругих КМ на основе аппроксимации диаграмм деформирования, полученных в результате численного решения серии локальных задач на ячейке периодичности;

4) Решены две задачи многомасштабного расчета напряженно-деформированного состояния конструкций с применением нелинейно-упругих КМ с конечными деформациями на макроуровне и на микроуровне.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОТРАЖЕНЫ В РАБОТАХ

Статьи в журналах из перечня ВАК (белый список):

1. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Кольжанова Д.Ю., Каримов С.Б. Моделирование несжимаемых слоистых композитов с конечными деформациями на основе метода асимптотического осреднения // Математическое моделирование и численные методы. — 2017. — № 1(13). — С. 32–54.
2. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Каримов С.Б., Кольжанова Д.Ю., Моделирование эффективных характеристик трансверсально-изотропных несжимаемых композитов с конечными деформациями. // Математическое моделирование и численные методы. — 2018. — № 4(20). — С. 72–92.
3. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Каримов С.Б., Кольжанова Д.Ю. Моделирование напряжений в композитной нелинейно упругой панели при цилиндрическом изгибе // Математическое моделирование и численные методы. — 2021. — № 1. — с. 3–30.
4. Димитриенко Ю.И., Каримов С.Б., Димитриенко А.Ю. Моделирование конечных деформаций композиционных материалов на основе универсальных моделей A_n и метода асимптотического осреднения // Математическое моделирование и численные методы. — 2024. — № 2. — С. 17–34.

Статьи в сборниках трудов конференций, индексируемых Scopus:

5. Yu I Dimitrienko, S B Karimov, D Yu Kolzhanova Modeling of the effective universal constitutive relations for elastic laminated composites with finite strains // IOP Journal of Physics: Material Science and Engineering. — 2019. — vol. 683. — № 012006. — pp. 1-6. doi:10.1088/1757-899X/683/1/012006
6. Yu I Dimitrienko, E A Gubareva, S B Karimov and D Yu Kolzhanova Universal models of the constitutive relations for transversely isotropic compressible composites with finite strains // IOP Conference Series: Material Science and Engineering. — 2020. — vol. 934. — №012012. — pp.1-6. doi:10.1088/1757-899X/934/1/012012.
7. Yu I Dimitrienko, E A Gubareva, S B Karimov, D Yu Kolzhanova Cylindrical bending of transversely isotropic composite panels with finite strains

// Advances in Composites Science and Technologies. — 2020. — IOP Publishing. Journal of Physics: Conference Series. — Vol. 1990. — №012053. — pp.1-5. doi:10.1088/1742-6596/1990/1/012053

8. Yu. Dimitrienko, S. Karimov and D. Kolzhanova Coupled micro-macroscopic modeling of layered composites with finite deformations // E3S Web of Conferences (ERSME-2023). — 2023. — Vol. 376. — №01030. — pp. 1-10. DOI:10.1051/e3sconf/202337601030

9. Y. Dimitrienko, Yu. Yurin, I. Bogdanov, A. Zaharov, S. Sborshchikov, R. Baimurzin, S. Karimov and A. Yakhnovskiy Supercomputer multiscale modeling of composite structures strength // E3S Web of Conferences (ERSME-2023) deformations // E3S Web of Conferences (ERSME-2023). — 2023. — Vol. 376. — №01034. — pp. 1-10. DOI: 10.1051/e3sconf/202337601034

Прочие публикации:

10. Каримов С.Б. Расчёт эффективных диаграмм деформирования несжимаемых слоистых композитов // Студенческая научная весна: сборник тезисов докладов Всероссийской студенческой конференции, посвященной 165-летию со дня рождения В.Г. Шухова. — Москва: ООО «Издательский дом «Научная библиотека». — 2018. — С. 154–155.

11. Димитриенко Ю. И., Каримов С. Б., Кольжанова Д. Ю. Моделирование эффективных упругих характеристик для слоистых композиционных материалов с конечными деформациями // Ключевые тренды в композитах: наука и технологии: сборник материалов Международной научно-практической конференции. — Москва: ООО «Диона», 2019. — С. 183–192.

12. Каримов С.Б. Моделирование композитов с конечными упругими деформациями // Будущее машиностроения России: XVI Всероссийская конференция молодых ученых и специалистов (с международным участием): сборник докладов. — Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024. — С. 374–381.