

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ.  
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ) «МАИ»

---

*На правах рукописи*

Мулия Бин Минат

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ  
ВОЛОКНИСТЫХ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
Профессор Лурье Сергей Альбертович  
Доктор Технические Наук

Москва 2014

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>СОДЕРЖАНИЕ</b> .....	<b>2</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	<b>6</b>
<b>1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	<b>11</b>
1.1 Некоторые сведения о некоторых вискеризованных волокнах и на их основе композитов .....	11
1.2 Физические, геометрические и материальные характеристики вискеризованных волокнистых композитов .....	16
1.3 Методы моделирования композитов .....	17
1.3.1 Эффективные упругих свойства .....	19
1.3.2 Эффективные демпфирующие свойства .....	30
1.4 Методы моделирования вискеризованных волокнистых композитов и их результаты .....	31
1.5 Основы классической микромеханики при определении эффективных механических свойств композиционных материалов .....	34
1.5.1 Представленный объем элемента (ячейка) и принцип эквивалентной гомогенности .....	34
1.5.2 Осреднение по объему .....	35
1.5.3 Макромасштабные и микромасштабные разрешающие уравнения в статической задаче линейной классической теории упругости .....	36
1.5.4 Подходы для определения эффективных свойств композитов .....	39
1.5.5 Принцип упруго-вязкоупругой аналогии комплексных модулей .....	46
<b>2. МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТЫ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВИСКЕРИЗОВАННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ</b> .....	<b>48</b>
2.1 Постановка задачи .....	48

2.2	Приближенная структурная модель вискеризованного межфазного слоя. Эффективные свойства .....	50
2.3	Модель вискеризованных волокнистых композитов, основанная на методе самосогласования Эшелби (метод трех фаз) .....	54
2.4.1	Определение модуля продольного сдвига .....	57
	А. Постановка задачи чистого сдвига в направлении вдоль волокон в цилиндрических координатах для ортотропного многофазного среды .....	57
	Б. Методика получения эффективного модуля продольного сдвига .....	61
2.4.2	Определение объемного модуля плоской деформации ...	64
	А. Постановка задачи всестороннего нагрузки поперек волокон в цилиндрических координатах для ортотропного многофазного среды .....	64
	Б. Методика получения эффективного объемного модуля плоской деформации .....	66
2.4.3	Определение продольного модуля Юнга и коэффициента Пуассона .....	69
	А. Постановка задачи одноосного растяжения вдоль волокон в цилиндрических координатах для ортотропного многофазного среды .....	69
	Б. Методика получения эффективного продольного модуля Юнга и коэффициента Пуассона .....	73
2.4.4	Определение модуля поперечного сдвига .....	78
	А. Постановка задачи чистого сдвига в плоскости изотропии в цилиндрических координатах для ортотропного многофазного среды .....	78
	Б. Методика получения эффективного поперечного модуля сдвига .....	84
2.4.5	Определение поперечного модуля Юнга и других модулей .....	87

2.4	Модель вискеризованных волокнистых композитов, основанная на методе двух фаз (полидисперсная модель) .....	88
2.4.1	Методика определения модуля продольного сдвига .....	89
2.4.2	Методика определения объемного модуля плоской деформации .....	91
2.4.3	Методика определения продольного модуля Юнга и коэффициент Пуассона .....	93
2.5	Модель вискеризованных волокнистых композитов, основанная на методе потенциала комплексной переменной. Методика определения модуля продольного сдвига .....	95
2.6	Анализ построенных решений .....	106
2.6.1	Сравнительный анализ метода трех фаз с методом двух фаз и методом комплексных потенциалов .....	106
2.6.2	Сравнительный анализ полученных результатов с результатами, полученными методом Асимптотического .....	110
2.6.3	Сравнительный анализ с экспериментальным данным ....	111
2.7	Анализ на эффективные упругие и демпфирующие свойства по методу самосогласования Эшелби (методу трех фаз) .....	113
2.8	Выводы к главе 2 .....	118
<b>3.</b>	<b><i>ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВИСКЕРСОВ НА ЭФФЕКТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВИСКЕРИЗОВАННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ</i></b> .....	<b>120</b>
3.1	Анализ влияния длины вискерсов .....	120
3.2	Анализ влияния плотности (количества) вискерсов .....	124
3.3	Анализ влияния диаметра вискерсов .....	128
3.4	Анализ влияния свойства (тип материала) вискерсов .....	131
3.5	Выводы к главе 3 .....	136
	<b><i>ЗАКЛЮЧЕНИЕ — ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ</i></b> .....	<b>138</b>



<b>ПРИЛОЖЕНИЯ</b> .....	<b>140</b>
А.    Материал, конфигурация и свойства компонентов вискеризованных волокнистых композитов .....	140
Б.    Трансверсально-изотропная среда .....	143
В.    Изотропная среда .....	149
Г.    Теоремы средней деформации и среднего напряжения .....	150
Д.    Теорема и формула Клапейрона .....	152
Е.    Интегральная формула Эшелби .....	153
Ж.    Доказательство $D_2^{N+1} = 0$ при использовании интегральной формулы Эшелби .....	158
З.    Доказательство выражения $W^{RVE}$ .....	161
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	<b>171</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы.** Композиционные материалы широко используются в авиационных и ракетных конструкциях, а также находят широкое применение в различных других областях техники, включая транспорт, медицину и др. Композитные конструкции с различными комбинациями компонентов в структуре имеют много преимуществ по сравнению с традиционными материалами на основе металлических сплавов. Известно, что механические свойства композитов контролируются условиями контакта между волокном и матрицей (характеристиками интерфейса) в композите. Влияние структуры на характер взаимодействия фаз в области контакта фаз оказывается особенно значительным. Разработаны различные методики повышения качества интерфейса, и наиболее распространенными являются: модификация поверхности волокна, улучшение химических взаимодействий, либо добавление третьей фазы (межфазного слоя) между волокном и матрицей. Идеи, лежащие в основе этих методов заключаются в улучшении межфазных адгезионных свойств и в увеличении площади поверхности волокна для более эффективной передачи нагрузок между волокнами и матрицей и дополнительного улучшения свойств композитов.

Известно, что механические свойства композитов контролируются условиями контакта между волокном и матрицей (т.е. характеристиками интерфейса) в композите [1,2]. Влияние структуры на характер взаимодействия фаз в области контакта фаз оказывается особенно значительным. Разработаны различные методики для повышения качества интерфейса, и наиболее распространенными являются: модификация поверхности волокна, улучшение химических взаимодействий, либо добавление третьей фазы (межфазного слоя) между волокном и матрицей [3-5]. Идеи, лежащие в основе этих методов заключаются в улучшении межфазных адгезионных свойств и в увеличении площади поверхности волокна для более эффективной передачи нагрузок между волокнами и матрицей и дополнительного улучшения свойств композитов.

В настоящее время активно развиваются технологии получения современных волокнистых композитов, в которых для повышения сдвиговых свойств композита на круговой поверхности углеродных волокон выращены

специальные микроструктуры, содержащие нановолокна (вискерсы) — нанопроволоки [4,6,7] и углеродные нанотрубки («Фуззи»-волокна) [5,8,9]. Проведенные исследования [5-8] доказали, что для подобных систем существенно повышается прочность межфазной границы (интерфейса) на сдвиг. Для композиционных материалов с вискеризованными волокнами реализуется более высокая предельная прочность и жесткость на сдвиг по сравнению типовыми композитами, не имеющими дополнительную микроструктуру на поверхности волокон. Кроме того, присутствие этих же микроструктур повышает трансверсальную прочность и жесткость, и также демпфирующие характеристики и электропроводность композитов [8,10,11]. Важно отметить, что улучшение свойств композитов зависит от характеристики вискерсов, выращенных на поверхности волокна, и поэтому можно сказать, что вискеризованная волокнистая система представляет собой *функциональные волокна* [5-8,12,13]. Композиционные материалы на их основе называются современными *мультифункциональными* композиционными материалами так как одновременно могут быть улучшены различные свойства композитов: прочность, жесткость, демпфирование, усталость, и электро- и теплопроводность [14]. В связи с этим прогнозирование свойств таких мультифункциональных волокнистых композитов представляет теоретический и практический интерес. Поэтому, тема диссертации, посвященная моделированию деформирования волокнистых композитов с функциональными волокнами, имеющими слоистую структуру и дополнительный вискеризованный слой и разработке методов оценки эффективных свойств таких волокнистых композитов, несомненно, является актуальной.

**Цель работы.** Целью работы является обоснование и разработка модели функциональных волокнистых неоднородных композиционных материалов, основанной на аналитическом решении и способной достоверно прогнозировать механические и динамические свойства (упругие и диссипативные) композитов по свойствам и концентрациям фаз с учетом характеристик микро- или наноструктур (вискерсов), выращенных на поверхности базового волокна. Детальный анализ влияния всех параметров структуры (объемной доли волокон и вискерсов, длины, плотности, количества, диаметра и свойств вискерсов) на эффективные свойства композитов, выявление наиболее существенных из них, оказывающих наибольшее

влияние на эффективные свойства вискеризованных волокнистых композитов также является целью работы.

**Научная новизна работы** заключается в следующем:

1. Приложена новая модель вискеризованного межфазного слоя на поверхности волокон, как трансверсально изотропного слоя с цилиндрической изотропией, учитывающая геометрические и механические характеристики микроструктуры.
2. Разработан метод определения эффективных свойств волокнистых композитов с вискеризованными (функциональными) волокнами, основанный на процедуре Эшелби трех фаз, позволяющий в рамках единого подхода найти аналитическое решение проблемы и являющийся наиболее точным и полным по сравнению с другими известными методами оценки эффективных свойств вискеризованных композитов (методом двух фаз и методом комплексных потенциалов).
3. Предложен метод и алгоритм расчета эффективных динамических свойств волокнистых композитов с вискеризованными (функциональными) волокнами, основанный на методе Эшелби и методе комплексных модулей.
4. Подробный анализ возможных типов вискеризованных композитов на основе полученных аналитических решений, прогноз рациональных структур, обеспечивающих получение композитов с наилучшим комплексом эффективных свойств также составляет научную новизну диссертации.

**Практическое значение работы.** Получение аналитического метода расчета и прогноза свойств новых типов композитных материалов, с вискеризованными (функциональными) многослойными волокнами, разработка эффективной методики аналитической оценки спектра осредненных свойств таких материалов с учетом геометрических и механических характеристик микроструктуры вискеризации представляет значительное прикладное значение, так как дает в руки исследователей- механиков и проектировщиков новых материалов научно обоснованный инструмент для адекватного выбора параметров микроструктуры, позволяющий проектировать широкий класс новых композитов с заданными свойствами, что особенно важно при проектировании авиационной техники. Практическая значимость полученных результатов велика.

**Реализация результатов работы.** Результаты, полученные в диссертации, используются в Институте Прикладной механики (ИПРИМ) РАН, Вычислительном центре РАН, МАИ (Государственном техническом университете).

**Достоверность результатов** обосновывается использованием строгих подходов теории упругости, механики композитов и математических методов, а также совпадением результатов, полученных автором с экспериментальными данными, приведенными в литературе и с результатами других авторов, в том числе с результатами прямого численного моделирования методом асимптотического осреднения.

**Апробация работы и публикации.** Основные результаты были представлены на конференциях: EUROMECH Colloquium 551, 'Mechanics of Fiber-Reinforced Materials – Theory and Applications', University of Nottingham, United Kingdom, 2-5 Sept 2013; 2-я Всероссийская Научная Конференция «Механика Наноструктурированных Материалов и Систем», Москва, 17-19 Декабря 2013. Также, результаты обсуждались на заседании кафедры 603 «Строительная механика и прочность», на научном семинаре им. А.Г. Горшкова «Проблем механики деформируемого твердого тела и динамики машин», Московского авиационного института (Национального исследовательского университета) «МАИ», и на научном семинаре по механике сплошной среды (МСС) им. Л.А. Галина, Институте проблем механики (ИПМех) РАН, Москва, 6 июня 2014.

Основное содержание диссертационной работы опубликовано в пяти научных печатных работах, из них 3 – опубликовано в рецензируемых международных журналах с большими импакт-факторами и 1 – в журнале, рекомендуемом ВАК:

1. S. Lurie, M. Minhat, N. Tuchkova, J. Soliaev. On remarkable loss amplification mechanism in fiber reinforced laminated composite materials // Applied Composite Material Vol. 21 Issue 1, Feb 2014, pp. 179-196.
2. S. Lurie, M. Minhat. Application of generalized self-consistent method to predict effective elastic properties of bristled fiber composites // Composites B Vol. 61, 2014, pp. 26-40.
3. С.А. Лурье и М. Минат. Метод самосогласованного поля Эшелби в задаче определения эффективных свойств композиционных материалов, армированных

вискеризованными волокнами // Механика композиционных материалов и конструкций, том 20 №. 2, 2014г., с. 248-258.

4. S.A. Lurie, M. Minhat, N. Tuchkova. Estimation of effective dynamic properties of bristled fiber composite materials based on self-consistent Eshelby method // Journal of Engineering Mathematics (2014). (Принято к печати)

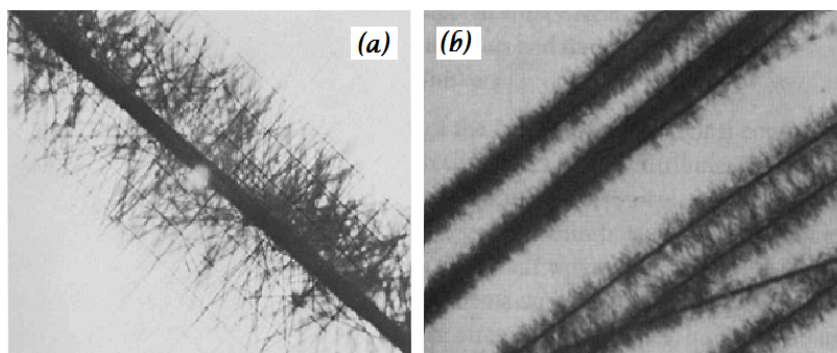
5. С.А. Лурье и М. Минат. Влияние характеристик вискерсов на эффективный продольный модуль сдвига композиционных материалов, армированных вискеризованными волокнами // Сборник докладов 2-й Всероссийской научной конференции «механика наноструктурированных материалов и систем» 17-19 декабря 2013г., г. Москва, том 3, с. 82-88.

**Объем и структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, приложения, и списка литературы. Она содержит 180 страниц, из них 10 занимает список использованных источников. Список используемой литературы включает 126 наименований (из них 106 на иностранном языке). В первой главе даются обзоры вискеризованных волокон и композитов на их основе, классических методов и их основ при моделировании эффективных механических свойства композитов, и методов моделирования вискеризованных волокнистых композитов. Во второй главе излагается постановка краевых задач для цилиндрических систем для многофазных ортотропных фаз в композите, методика осреднения и аналитического расчета эффективных механических и динамических свойств функциональных волокнистых композитов, которые состоят из многофазных ортотропных тел. В третьей главе исследуется влияние характеристик микро- или наноструктур (вискерсов) на эффективные механические и динамические свойства вискеризованных волокнистых композитов.

# 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

## 1.1 Некоторые сведения о вискеризованных волокнах и композитов на их основе

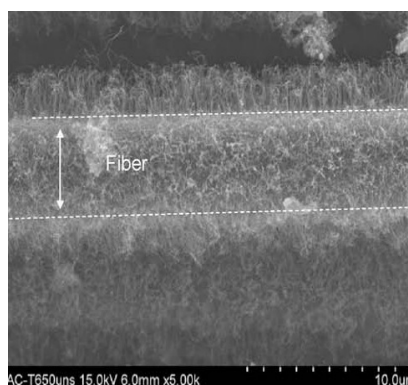
Несколько десятилетий назад были созданы углеродные волокна, вискеризованные *графитовыми микровискерсами* (см. рис. 1.1). Было показано, что прочность интерфейса на сдвиг полимерных композитов на основе таких волокон улучшается в 3–5 раз [15,16]. Однако, один из серьезных недостатков этой технологии заключается в том, что механические процессы, которые породили микровискерсы на поверхности волокон, существенно уменьшали предельную прочность на растяжение базовых волокон, и поэтому, прочность и жесткость композитов в направлении укрепления значительно уменьшились [17]. Таким образом, исследования в рамках этой технологии в течение достаточно долгого периода были приостановлены.



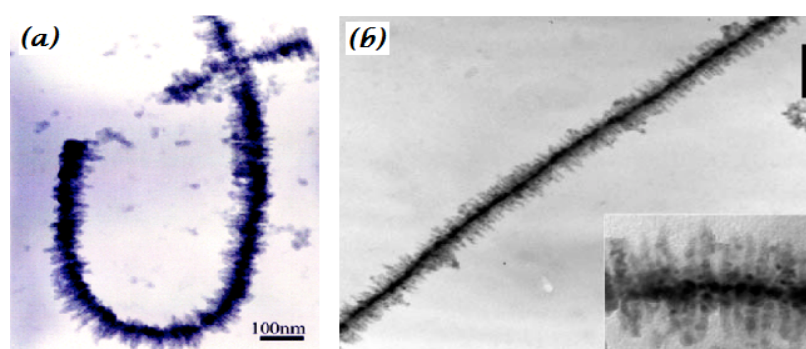
**Рис. 1.1 (а)** Единичное углеродное волокно, вискеризованное микровискерсами (сетка – 10 мкм) [15], и **(б)** Углеродные волокна (марки RAЕ), вискеризованные микровискерсами [16].

Интересно, что в современную эпоху нанотехнологий эта технология возобновляется. Углеродные нанотрубки (УНТ), которые стали доступными с 1990-х годов, в настоящее время используются для нанесения на поверхность углеродного волокна (см. рис. 1.2). Такое волокно именуется *волокном «Фуззи»* [5,8]. В экспериментальных работах [5,8] доказано, что при наличии нанотрубок, которые выращены на поверхности волокна, прочность интерфейса на сдвиг

композита существенно повышается. Так как нанотрубки выращены радиально в трансверсальном направлении волокон, сжимающая прочность композита в том же направлении возрастает значительно [18]. Кроме того, приведенные исследования [12,13] показали, что плотность, длина и ориентация нанотрубок могут влиять на поведение таких композитов. К сожалению, также как и его предшественник, этот тип волокна отличается существенным сокращением жесткости и прочности на растяжение. Это связано с высокой температурой, используемой в растущих нанотрубках на поверхности волокна. Тем не менее, Штейнер и др. [7] недавно объявил, что они успешно разработали новые методики производства волокон «Фуззи» без повреждения базового волокна.



**Рис. 1.2** Волокно «Фуззи» — углеродное волокно, вискеризованное углеродными нанотрубками [5].

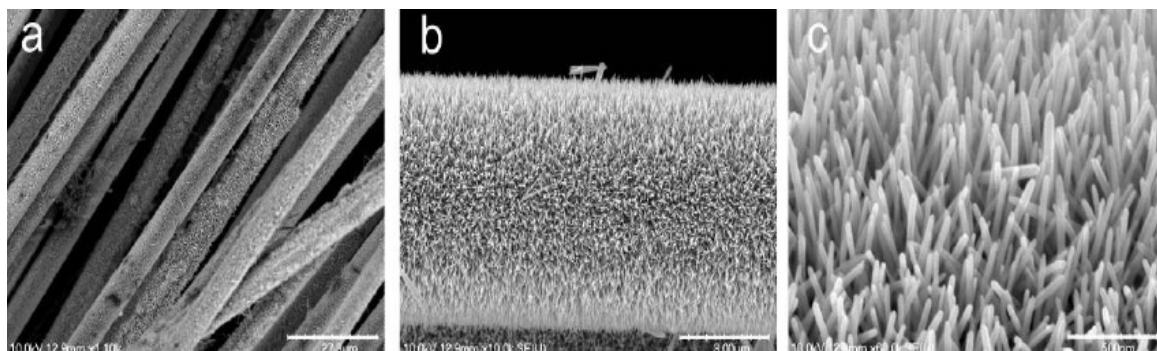


**Рис 1.3 (а)** CdTe-SiO<sub>2</sub> наноструктура, и **(б)** форма наноструктуры похожа на многоножки (масштаб – 200 нм) [6,20].

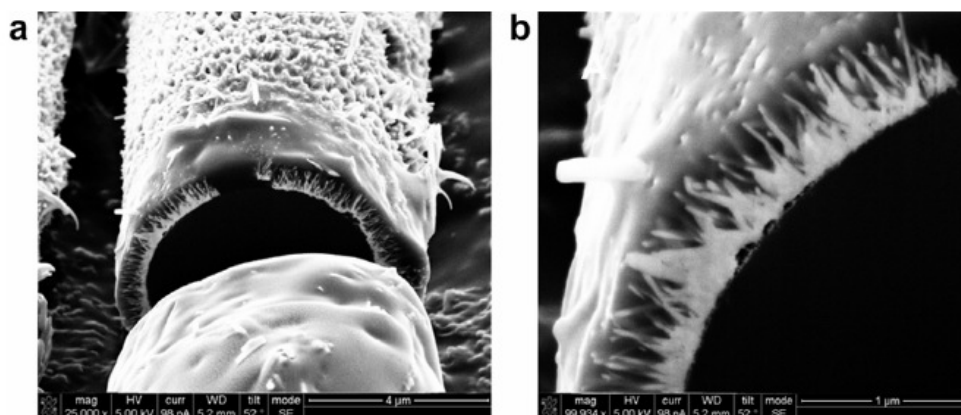
Помимо нанотрубок, нанопроволоки и наностержни также используются в нано-армированных материалах. Например, Ванг и др. [6] создали нанопроволоки



теллурида кадмия (CdTe), вискеризованные нанопроволоками кремния оксида (SiO<sub>2</sub>) (рис. 1.3). Отмечено, что эта наноструктура похожа на *нано-многоножки* [20]. По данным Гузя И.А. и др. [21], такая наноструктура имеет три компонента: 1) твердая базовая нанопроволока CdTe, 2) покрытие SiO<sub>2</sub>, и 3) нанопроволоки SiO<sub>2</sub>. Несмотря на свой огромный потенциал для композитного приложения, дополнительная информация о характеристиках таких композита не найдена.



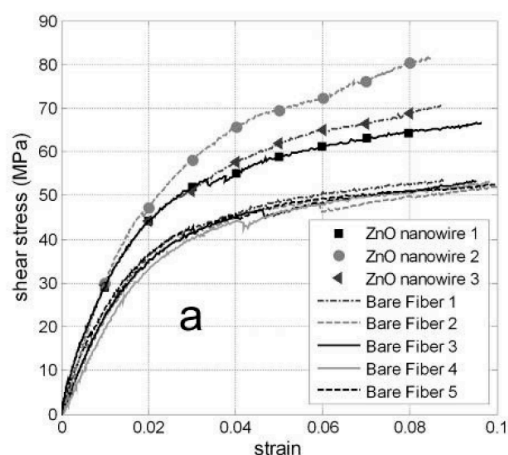
**Рис. 1.4** Углеродные волокна, вискеризованные нанопроволоками (масштаб: а. 27.8 мкм, б. 3 мкм, с. 500 нм) [4].



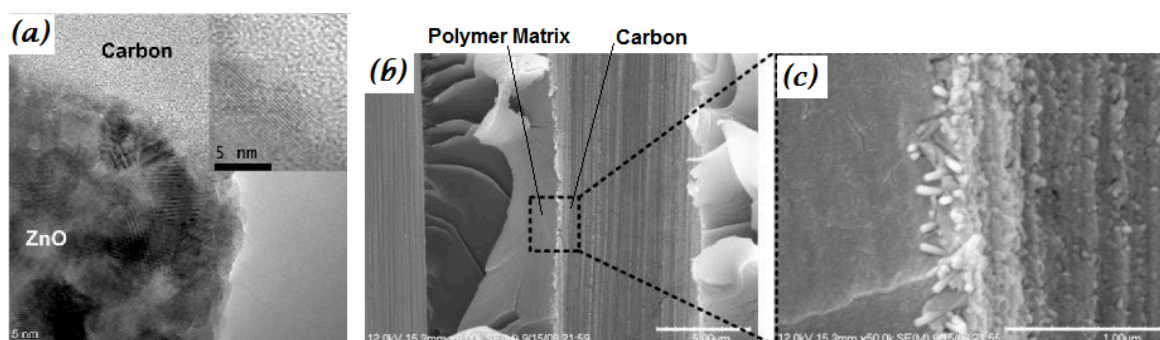
**Рис. 1.5** Микро-фотографии вискеризованного волокна с матрицей [4].

Далее, Лин и др. [4] и Галан и др. [7] получили новую подобную систему волокна без применения высокой температуры. В их работах создаются углеродные волокна, вискеризованные нанопроволоками оксида цинка (ZnO). На рис. 1.4 показана морфология этой волокнистой системы, и видно, что нанопроволоки выращены на поверхности волокна перпендикулярно с высокой плотностью. На рис. 1.5, с матрицей, видно, что такой композит имеет четыре слоя:

1) твердое базовое углеродное волокно марки IM7, 2) покрытие оксида цинка, 3) вискеризованный межфазный слой, который состоит из нанопроволок оксида цинка и полимерной матрицы, и 4) полимерная матрица. Можно увидеть также, что нанопроволоки смочены матрицей полностью.



**Рис. 1.6** Модуль продольного сдвига композита с микроструктурой и без микроструктуры [4].

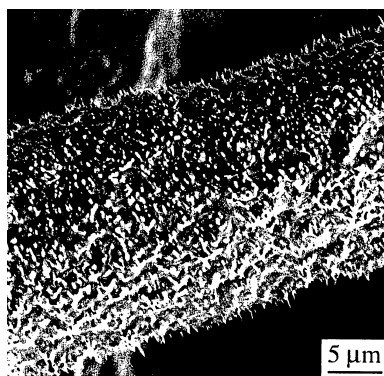


**Рис. 1.7** (а) Изображение НТРЕМ – Интерфейс волокно-ZnO (б) межфазный слой между волокном и матрицей, и (в) Интерфейс ZnO- матрицы [4].

Согласно экспериментальным данным сегментационного теста единичного волокна [4], изменяя диаметр (50 - 200 нм) и длину (0,2 - 1,6 μм) нанопроволоки, можно повышать сдвиговую прочность интерфейса до 228%. Вообще говоря, при увеличении диаметра и длины нанопроволок, повышается прочность интерфейса на сдвиг композита [7]. Самый интересный результат представляет собой данные для модуля продольного сдвига, полученные в эксперименте «V-notch shear testing - ASTM 5379». Рис. 1.6 показывает, что по сравнению с композитом без

нанопроволок средний модуль сдвига композита с нанопроволоками повышается на 37,5%.

Интересно отметить, что авторы [4,7] описывают область, содержащую нанопроволоки и матрицу как межфазный слой между волокном и матрицей, а также два интерфейса — волокно-ZnO и ZnO-матрица. Эти интерфейсы по сравнению с начальным интерфейсом волокно-матрицы обладают более высокой прочностью. Сообщалось, что интерфейс волокно-ZnO имеет лучшее прилипание чем интерфейс волокно-матрицы, а интерфейс ZnO-матрица — более сильное взаимодействие, не только за счет лучшего прилипания, но также из-за и большей поверхности контакта. Поэтому, композит на их основе становится более прочным материалом. На рис. 1.7. в видно, что хотя нанопроволоки главным образом выращены перпендикулярно к поверхности волокна, они в матрице ориентированы случайным образом. Интересно также, что этот тип волокнистой системы, согласно [7], не теряет прочностных свойств после роста нанопроволок.



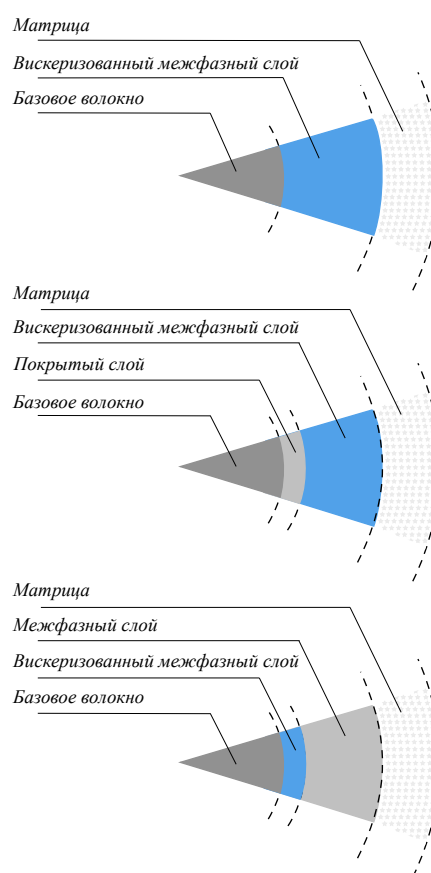
**Рис. 1.8** Металлические вискерсы на металлическом волокне [22].

Помимо полимерных композитов, армированных вискеризованными волокнами, существуют также композиционные материалы на основе металлических матриц, армированных вискеризованными металлическими волокнами. В последнее время разрабатываются композиты на основе алюминия, армированные непрерывными волокнами оксида алюминия  $Al_2O_3$ . Для улучшения механического контакта с матрицей, длинные волокна  $Al_2O_3$  подвергаются вискеризации вискерсами (карбид кремния  $SiO_2$ , титана оксида  $TiO_2$ , муллита  $3Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$  и т.д.) непосредственно в процессе изготовления композита. При

изготовлении вокруг волокон образуется межфазный слой, в зависимости от состава матрицы. Итак, такой вискеризованный волокнистый композит имеет четыре слоя. Рис. 1.8 показывает структуру вискеризованного металлического волокна.

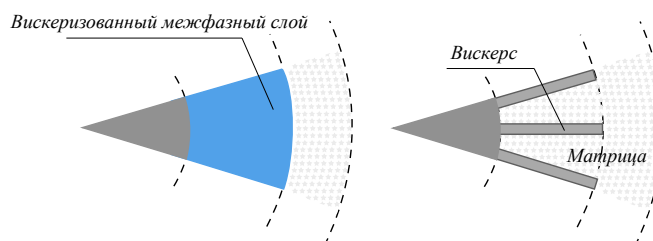
## 1.2 Физические, геометрические и материальные характеристики вискеризованных волокнистых композитов

На основе предыдущего обзора видно, что вискеризованные волокнистые композиты являются многофазными структурами. На рис. 1.9 представлены различные конфигурации таких композитов. Верхняя фигура соответствует композитам, армированным волокнами, вискеризованными вискерсами или нанотрубками. Средняя фигура поясняет компоненты композита, армированного волокнами, вискеризованными нанопроволоками, а нижняя фигура — композита на основе алюминия, армированного вискеризованными волокнами  $Al_2O_3$ .



**Рис. 1.9** Различные конфигурации вискеризованных волокнистых композитов.

Можно увидеть, что вискеризованный межфазный слой является наноккомпозитом, который состоит из вискерсов и матрицы (рис. 1.10). Итак, механические свойства этого слоя зависят от несколько параметров вискерсов в слое — плотность (количество), длина, диаметр, ориентация, и тип материала. Геометрические и материальные характеристики таких композитов даны в приложении А.



**Рис. 1.10** Схема вискеризованного межфазного слоя, содержащего вискерсы и матрицу.

### 1.3 Метод моделирования композитов

Моделирование композиционных материалов (КМ) содержит фундаментальную проблему, так как в макромасштабе они считаются однородными континуумами, а в микромасштабе — существенно неоднородными, т.е., компоненты или фазы композита различаются по свойствам, и между ними существуют явная граница раздела (интерфейс или межфазной слой особенно в полимерной матрице) [1]. В связи с этим, эффективные свойства КМ в целом зависят от характеристик фаз композитов (их свойств, объемного содержания, формы, размера, распределения и ориентации), состояния интерфейса или межфазного слоя, и внутренних взаимодействий (когезионных и адгезионных эффектов) [2]. Кроме того, параметры обработки в производстве также влияют как на свойства отдельных фаз, так и на эффективные свойства композитов. Таким образом, для определения макроскопических свойств КМ важную роль играет *микромеханика*.

Можно отметить, что история современных КМ является сравнительно небольшой по сравнению с другими традиционными (конвенциональными) конструкционными материалами и металлическими сплавами. Так можно считать, что современные КМ были впервые введены, когда впервые были получены стекловолокна (они были случайно созданы в 1930-х г). В то время, как полимерная химическая промышленность уже давно существовала. Большинство изделий КМ использовались для неструктурных приложений даже в аэрокосмических промышленности. Стекло-волокнистые КМ были впервые использованы в коммерческих самолетах лишь в 1950-х г. Бурное развитие современных КМ особенно для аэрокосмических (коммерческих и военных) началось в 1960-х, что было связано с новыми технологиями и успехами в области производства современных волокнистых материалов — борных, углеродных, и кевларов, и новых улучшенных полимерных материалов [23]. Интересно отметить также, что микромеханическая теория современных КМ также начала развиваться в течение этого же периода времени.

*Микромеханикой* называется область механики материалов, в которой дается анализ композитных или гетерогенных материалов на уровне отдельных компонентов, составляющих эти материалы. Учитывая свойства материалов компонентов композитов, как уже упоминалось ранее, одной из важных целей микромеханики материалов является моделирование деформации и характеристик КМ, эта задача определяется как *осреднение* или *гомогенизация*. Преимущество гомогенизации заключается в том, что поведение гетерогенных материалов может быть определено без обращения к испытанию потому, что такое испытание может быть весьма дорогим. Кроме того, результаты экспериментов представляют собой так или иначе макромасштабные данные. Тем не менее, конкретная теория микромеханики должна быть проверена путем сравнения с экспериментальными данными. Вторая основная задача микромеханики — это *локализация*, которая направлена на оценку локальных полей (напряжения и деформаций) в фазах под действием макроскопической нагрузки. Такое знание особенно важно для описания повреждения материала.

Так как большинство методов микромеханики основаны на механике сплошной среды, метод, основанный на атомистических подходах как

молекулярной динамики не охвачен. Более того, мы будем обсуждать аналитические методы в рамках линейной классической теории упругости, а не численные методы, такие как метод конечных элементов. Тем не менее, интересно напомнить о том, что происхождение и основание современной механики сплошных сред, были рассмотрены Навье (1827) и Коши (1827)<sup>1</sup> в значительной степени как — «микромеханические» [24]. Они разработали уравнения континуума (упругих сплошных сред) и использовали понятие *материальной точки*. Но на самом деле в некотором смысле материальной точкой является «гомогенная» или «гомогенизированная» ньютоновская картина материалов, находящихся в более меньшем масштабе, где предполагается, что материальная точка макроскопически ведет себя в сплошном теле таким же образом как и материал, имеющий молекулярную структуру [25,26].

Можно отметить, что актуальный анализ микрогетерогенных материалов имеет небольшую историю — это примерно 190 лет. Но сначала все работы были направлены на определение макроскопических свойств материалов, состоящих из матрицы и распределения частиц, например в работах электрической проводимости и магнитных полей: Пуассона (1824), Фарадея (1838), Максвелла (1854), и в работах разбавленных суспензий твердых частиц — Лорда Релея (1892), и Эйнштейна (1905) [24,27].

Анализ эффективных свойств микрогетерогенных твердых тел (поликристаллов) дается в работах Фойхта (1910) и Рейсса (1929), которыми изучались поликристаллы [28]. Как мы уже отмечали ранее, наибольшее развитие микромеханические теории КМ особенно на волокнистых композитах получили после 1960-х г., и это связано с значительными работами Эшелби (1956,1957) [29,30].

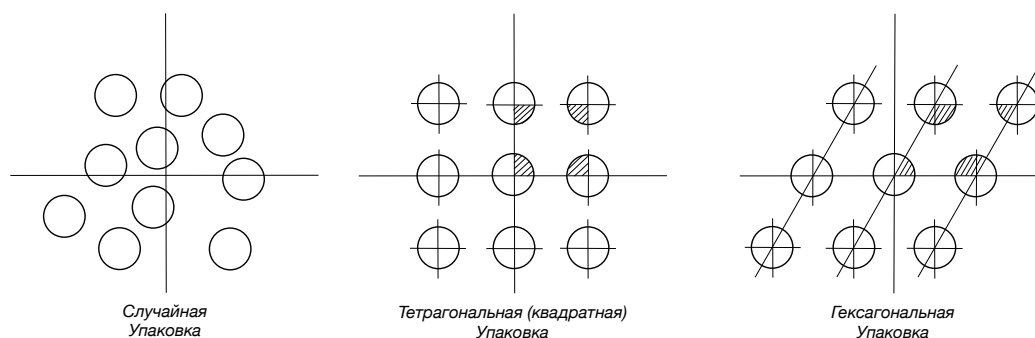
### **1.3.1 Эффективные упругие свойства композитов**

Для непрерывных волокнистых армирующих композиционных материалов развиты многие аналитические методы, основанные на распределении волокон в поперечном сечении однонаправленного композита, например, распределение

---

<sup>1</sup> (год) – год когда работа появилась, что показывается для исторического контекста.

случайное и периодическое — квадратная и шестиугольная упаковка (см. рис. 1.11). Для периодических структур наиболее плотная упаковка включений (волокон) в квадратной структуре —  $c_1^{max} = 0.78$ , а в гексагональной —  $c_1^{max} = 0.92$  [31]. С другой стороны, по словам Хашина [32], случайное или регулярное распределение лучше всего представлено гексагональной структурой.



**Рис. 1.11** Распределение волокон в однонаправленном композите.

**Осреднение Фойхта и Рейсса** являются самыми простыми методами при определении свойств КМ (двухфазных и многофазных), хотя и эти методы первоначально были созданы для изучения характеристик поликристаллов. Осреднения по Фойхту и Рейссу являются решениями для композита, который подвергнут постоянной деформации и постоянному напряжению, соответственно [23]. В то же время, можно считать, что методы Фойхта и Рейсса для и волокнистых композитов являются решениями для параллельно и последовательно растягиваемых стержней при условии равенства обобщенных перемещений в первом случае и обобщенных сил во втором случае [2]. Получаемые по этим формулам результаты зависят от объемных долей и модулей упругости фаз, входящих в состав композита.

**Осреднение по границам.** По Рикардию А. [33], при приближении эффективных свойств композитов существуют два подхода — прямая оценка и оценка границ. Исторически осреднения Фойхта и Рейсса были первыми моделями, позволяющими строго оценить верхнюю и нижнюю границы эффективных свойств, соответственно [2]. Однако польза такого подхода все же оказалась весьма ограниченной, поскольку этот подход дает хорошие результаты только для композитов, свойства фаз которых близки. Для случая пустот, имеющих нулевой

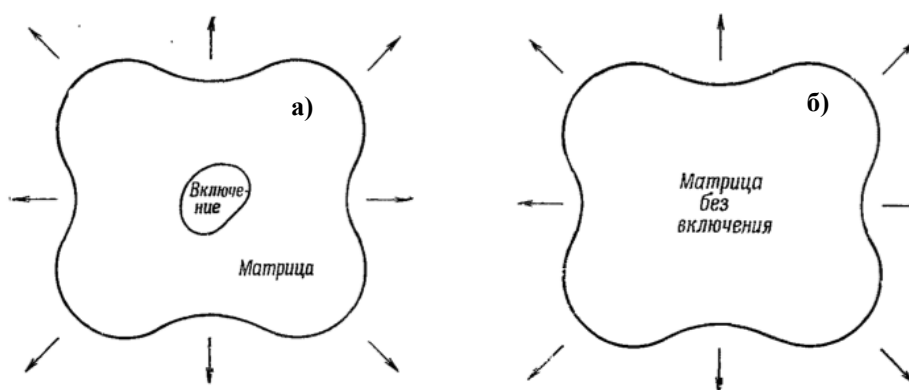


модуль упругости данные оценки дают тривиальные результаты, т.е. верхняя оценка для модуля соответствует материалу без пустот, а нижняя — материалу, потерявшему несущую способность с нулевым модулем. Для абсолютно жестких включений, что является типичным для композитов, данные оценки настолько далеки от свойств типичных композитов, что они не имеют практического значения, особенно при низкой объемной доле включений.

Было доказано, что наилучшие возможные границы свойств гетерогенной двухфазной среды для макроскопически изотропной среды, которые не могут быть далее улучшены для произвольного статистического распределения фаз без уточнения формы включений, являются границы Хашина-Штрикмана [34]. Данные границы отличаются от указанных ранее границ Фойхта и Рейса тем, что границы Хашина-Штрикмана включили переменные поля допустимых напряжений и деформаций. С другой стороны, вполне приемлемые уточненные возможные границы для свойств двухфазной среды, имеющей макроскопически трансверсально-изотропную среду были найдены Хашином и Хиллом [35].

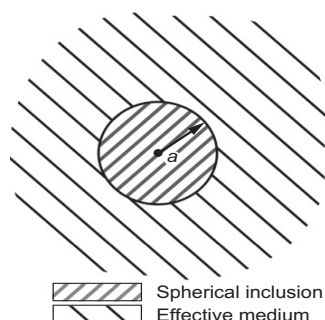
***Осреднение по методу Эшелби.*** Два основных результата теории упругости, применяющиеся для анализа гетерогенных твердых сред, были получены Эшелби [29,30]. В одной работе [30], Эшелби рассматривал единичное включение находящееся внутри неограниченной матрицы (см. рис. 1.12.а). Рассматриваемое включение является эллипсоидом. Таким образом, любыми взаимодействиями между включениями пренебрегают. Поле деформаций (напряжений) на бесконечности считается однородным. Данная аппроксимация является вполне удовлетворительной, по крайней мере, для малых концентраций включений. Как было показано Эшелби [30], дополнительное поле деформаций (напряжений), создаваемое включением зависит от характерного размера и формы включения, и расстояния между включениями. Кроме того, Эшелби показал, что поле деформаций (напряжений) внутри эллипсоидального включения в однородно нагруженном теле также является однородным. Это позволяет существенно упростить решение и дальнейшие выкладки, получить аналитическое решение для изолированного включения. В конце концов, Эшелби построил точное решение этой проблемы с помощью точного значения для матрицы Эшелби, определяющей соответствие между полями деформации во включении и в матрице. Конкретные

типы конфигураций включений рассматривались многими авторами, и различные матрицы Эшелби для этих различных конфигураций можно найти в книге Мура [34].



**Рис. 1.12** а) Изолированное включение в среде (матрице), и б) среда без включения — матрица [35].

В его другой известной работе [29], Эшелби построил формулу, основанную на энергетическом методе для анализа гетерогенных твердых сред. Формула, выведенная Эшелби для вычисления энергии деформирования между средами с включением и без включения, преобразует обычное интегрирование по объему в интегрирование по поверхности частного вида. Как было показано Кристенсенем для случая изолированного включения с малой концентрацией, получено точное решение с помощью уравнений теории упругости и формулы Эшелби [35], и для сферических и цилиндрических включений, получаемые решения совпадают с решениями, основанными на матрице Эшелби [36] хотя и процедура, использующая формулу Эшелби не учитывает во включении однородное поле деформаций (напряжений).



**Рис. 1.13** Схема метода самосогласования [36].

### ***Осреднение по методу самосогласования (модель эффективного поля).***

Идея метода состоит в рассмотрении каждого включения как находящегося в среде с упругими свойствами, соответствующими эквивалентному континууму, образованному матрицей и всеми остальными включениями (см. рис. 2) [2]. Для случая упругости данный метод впервые был предложен, вероятно, Херши и Кронером для поликристаллов [35], а затем — Хиллом и Будянским для КМ [37,38]. В данных моделях уравнения теории упругости решаются для сферических и цилиндрических включений в матрице с неизвестными упругими свойствами, затем вычисляются эффективные модули. Показано, что в частном случае метод эффективного поля включает метод осреднения Эшелби, так что эффективная среда совпадает с эффективным полем. В изотропном рассматриваемом случае метод приводит к системе двух алгебраических уравнений относительно двух эффективных упругих констант, а в анизотропном случае — к системе уравнений, число которых равно числу констант для эквивалентного упругого континуума.

Для малых концентраций включений метод дает результаты, асимптотически совпадающие с результатами, полученными согласно методу малых концентраций. В случае конечных концентраций включений, но не слишком больших, разумных концентраций, некоторые из эффективных модулей могут оказаться нефизическими, лежащими вне границ Хашина-Штрикмана. Кроме того, для пустот или трещин метод дает тривиальные результаты.

### ***Осреднение по методу самосогласования (Модель дифференциальная).***

Идея метода состоит в разделении включений на бесконечно малые порции, вносимые в матрицу. Для каждой последующей порции применяется метод самосогласования, т.е. каждая новая порция рассматривается как внедренная в эквивалентную среду, образованную матрицей и всеми включениями, внедренными на предыдущих этапах (см. рис. 1.14) [2]. Как метод самосогласования эффективного поля в изотропном случае метод приводит к системе двух дифференциальных уравнений относительно двух упругих констант, а в анизотропном случае — к системе дифференциальных уравнений, число которых равно числу констант для эквивалентного упругого континуума. Идея метода впервые была применена Роском для разбавленных суспензий твердых частиц [39]. Затем данный метод применялся Маклафином для композитов, и

показано, что в отличие от метода самосогласования, в случае конечных типичных концентраций включений все эффективные модули сферических и волокнистых композитов лежат внутри границ Хашина-Штрикмана [40].

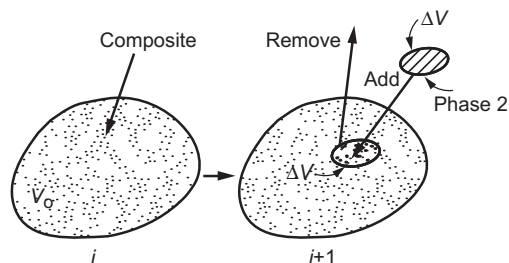


Рис. 1.14 Схема метода осреднения дифференциального [36].

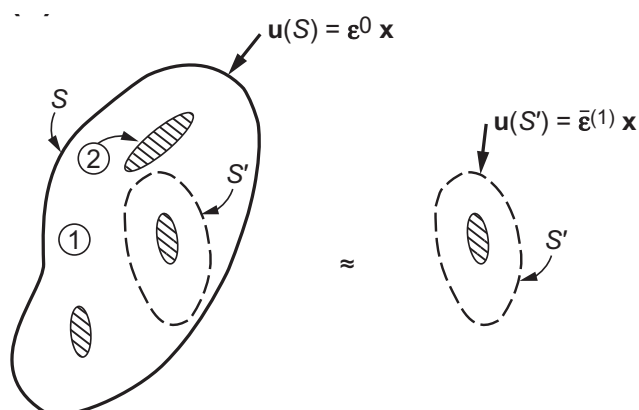
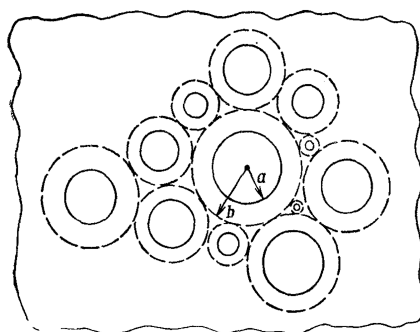


Рис. 1.15 Схема метода Мори-Танака [36].

**Осреднение по методу Мори-Танака.** Идея метода состоит в рассмотрении каждого включения как находящегося в поле напряжений, соответствующем среднему полю напряжений в матрице и, вообще говоря, отличному от среднего поля напряжений в композите (см. рис. 1.15) [2]. Модель в первые была предложена Мори и Танака и использовались для моделирования композитов с эллиптическими включениями [41]. Наиболее наглядно идея метода может быть сформулирована для случая пустот и в этом случае среднее поле напряжений в матрице отличается от усредненного поля напряжений в образце на величину относительной пористости (отношения объема пор к объему образцы). Эффект взаимодействия пустот при этом сводится исключительно к уменьшению эффективного сечения (за счет пустот) образца. Для случая трещин (пустот с нулевой толщиной) метод сводится к методу невзаимодействующих включений.

Метод Мори-Танака может рассматриваться как частный случай метода эффективного поля, в рамках которого эффективные поля напряжений для каждой из рассматриваемых частиц не обязательно должны быть одинаковыми и однородными. Наиболее простой подход метода Мори-Танака при определении эффективных свойств композитов предложен Бенвенисте (1987) [42]. На основе данного подхода осуществлялось и вычисление полного набора упругих констант волокнистого композита. Однако, при получении эффективных констант этот метод основан на использовании матрицы Эшелби, где используется предположение однородных полей внутри включений и для этого, этот подход дает хорошие результаты для малых концентраций включений особенно в поперечных характеристиках композита.

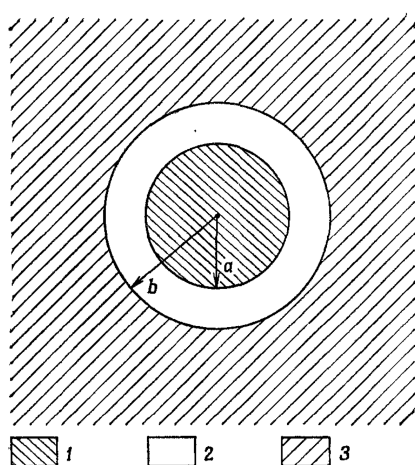


**Рис. 1.16** Схема полидисперсной модели со сферическими или цилиндрическими включениями [35].

*Осреднение по полидисперсной модели (Метод композитной сферической или цилиндрической сборки — метод двух фаз).* Идея метода состоит в том, что в непрерывной среде заполнены случайные распределенные включения различного размера (см. рис. 1.16). Штриховая линия ограничивает области матрицы, связанные с каждым отдельным включением. Отношение радиусов  $a/b$  принято постоянным для такой каждой составной частицы независимо от ее абсолютного размера. Очевидно, что распределение требует того, чтобы размеры частиц уменьшились до бесконечно малых. Можно ожидать, что эта модель даст разумные результаты для реальных систем, которые имеют широкое довольно непрерывное распределение размеров включений, и почти

очевидно, что от этой модели нельзя ожидать приемлемых результатов для систем, содержащих большие концентрации включений одного размера [35].

Этот метод первоначально был развит Хашиным и др. [32,43]. В рамках данной модели, рассматривается симметричная ячейка (отдельный объем), состоящая из одного включения (сферического или цилиндрического) и матрицы. С помощью уравнений теории упругости эффективные модули композита найдены при сравнении плотности энергии деформации между ячейкой и эффективной средой, имеющей те же объем ячейки и образованной матрицей и включением (гомогенизированным композитом). Тем не менее, получаемые результаты утверждены только в случае если решения, в которых используются два разных граничных условий деформаций и напряжений, совпадают. На самом деле, этот метод основан на подходе, который приводит к границам Хашина-Штрикмана (где форма включения не учтена). В случае сферического включения (т.е. форма включения определена) границы макроскопически изотропного композита для эффективного объема сжатия совпадают и поэтому, получено явное выражение этого модуля. Однако, для модуля сдвига найдены более узкие границы [32,35]. Для большинства методов микромеханики, описанных ранее, их результаты всегда сравниваются с этими границами для проверки их точности. В случае цилиндрического включения решение лежит внутри границ Хашина-Штрикмана. В конце концов, этот метод также дает хорошие точные результаты для конечных до достаточно высоких концентраций включений.



**Рис. 1.17** Схема трехфазной модели: 1 – сферическое/цилиндрическое включение, 2 – матрица, 3 – эквивалентная гомогенная среда [35].

**Осреднение по методу самосогласованного поля Эшелби (Трехфазная модель).** Метод трех фаз основан на полидисперсной модели и методе самосогласования (эффективного поля), и построен, чтобы получить точное решение для эффективного модуля сдвига [44]. Модель впервые была предложена Кристенсен-Ло для сферических и цилиндрических (волоконистых) композитов. Идея этого метода основана на рассмотрении трехфазного материала (см. рис. 1.17). Проводя осреднения по формуле Эшелби, рассматриваем задачу о симметричной ячейке на из трех фаз. Первый и второй компонент являются соответственно включением и матрицей, обладающими модулями упругости включения и матрицы. Объемная доля включения при этом такая же, как и в исследуемом композите. Модуль упругости третьей фазы считается равным эффективному модулю упругости эффективного гомогенного материала и является искомой величиной.

С помощью формулы Эшелби и уравнений теории упругости эффективные модули композита будут найдены путем сравнения энергии упругости, запасаемой в ячейке композита (т.е. в эквивалентной гомогенной среде с включением и матрицей) и эффективной среде (т.е. в эквивалентной гомогенной среде без включения и матрицы). В отличие от оригинальной полидисперсной модели, метод трех фаз дает точные результаты для эффективного модуля сдвига включений, так как включение образовано здесь двумя фазами и поэтому однородное деформирование состояние не реализуется [35]. Интересно отметить, что результаты и для других упругих константах, полученных по методу трех фаз идентично совпадают с результатами полидисперсной модели [39,45]. Также, метод трех фаз может дать достаточно аккуратные результаты для достаточно высоких концентраций включений [46].

**Метод асимптотического осреднения.** Самую высокую точность в задачах определения эффективных свойств композитов, основанных на использовании точных математических приемов метод является асимптотического осреднения, построенный Бахваловым и Пананценко [47], и Победрей [48]. В этом методе, композит считается периодической средой. В соответствии с техникой асимптотического осреднения процессов в средах с периодической структурой рассматривается бесконечная среда с периодическими микровключениями.

Формальное асимптотическое разложение общего решения строится в форме ряда по степеням малого геометрического параметра  $\varepsilon$ , который является периодом периодичности (диаметр включения). В этом разложении быстрые и медленные переменные разделяются для локального и глобального поведения. Важно указать на первые два члена разложения, которые описывают напряженно-деформированное состояние в композите с учетом и в соответствии с эффективными характеристиками эффективной среды. Этот подход является теорией нулевого приближения [48], и такой подход может получить аккуратные результаты для конечных и достаточно высоких концентраций включений в композите [49,50].

*Анализ и выводы.* В рамках классической теории упругости в настоящее время существуют подходы, позволяющие в принципе решить задачу нахождения эффективных характеристик композита, состоящего из матрицы и небольшой объемной доли включений другого материала. Иными словами, для малых концентраций включений такая задача в принципе решена.

Существующие решения для жестких включений в форме произвольного эллипсоида вращения, или для плоского эллипсоида вращения, вырожденного в диск, или для пустот, не всегда согласуются между собой и даже имеют ошибки. В связи с этим требуется дополнительный анализ для выяснения релевантности результатов доступных в литературных источниках.

Эффективные свойства композита с конечной концентрацией включений могут быть найдены с использованием какой-либо из аппроксимационных схем. Для концентраций до 20-30% относительное расхождение между результатами, полученными согласно различным теориям, не столь велико и, по видимому, не превышает экспериментальной погрешности для обычных наполненных композитов. По сравнению с несколькими экспериментальными данными [36,39] или с результатами конечных элементов [35,46], и со строгими границами Хашина-Штрикмана [35,49], метод трех фаз и асимптотического осреднения являются более точными методами при определении характеристик композитов для конечных до достаточно высоких концентраций включений.

Несколько рассмотренных методов (особенно метод двух и трех фаз) расширены на многофазную систему [51,52], которая используется для изучения



влияния межфазного слоя [53], покрытия [54], и также эффектов когезии и адгезии (хотя эти эффекты являются неклассическими) [55,56]. Помимо изотропных фаз, в композите рассматриваются трансверсально-изотропные и ортотропные фазы [57-62].

Относительное изменение упругих модулей композита со включениями по сравнению с упругими модулями матрицы определяется:

- Объемной концентрацией включений (изменение модуля пропорционально концентрации в случае малых концентраций);
- Отношением модулей (свойств) матрицы и включений;
- Формой включений (существенно зависит от соотношения максимального и минимального размеров включений);
- Ориентацией включений (если несферические включения имеют некоторые предпочтительные ориентации, композит становится анизотропным даже в случае изотропной матрицы).

В соответствии с теорией упругости относительное изменение упругих модулей композита со включениями, по сравнению с упругими модулями матрицы, почти не зависит (слабо зависит) от абсолютного размера включений при одинаковой концентрации. В тоже время, ряд авторов указывает на экспериментально наблюдаемую сильную зависимость эффективных упругих констант от абсолютного размера включений для композитов с микро- и нановключениями. Следовательно изменение упругих модулей должно существенно зависеть от абсолютного размера включений при одинаковой объемной концентрации и форме включений, что противоречит классической теории упругости. Этот факт объясняется изменением свойств материала матрицы на контакте со включением, и на первую роль выдвигается величина удельной поверхности включений. Таким образом, необходимо проведение тщательного анализа, и возможно дополнительных экспериментов, для обнаружения причины наблюдаемого явления.

### 1.3.2 Эффективные демпфирующие свойства композитов

Эффективные вибрационные и шумовые управляющие структуры являются важными в аэрокосмических промышленности [1,63,64]. Уменьшение вибрационной энергии приводит к увеличению срока службы изделий и конструкций, и в тоже время уменьшение шума означает увеличение комфорта для пассажиров, а также способствует охране окружающей среды [65].

Демпфированием в простой терминологии, является преобразование механической энергии в рассеивающую энергию, например, тепловую энергию [1]. В механической системе, демпфирование можно разделить на активное и пассивное демпфирование [66]. Для нашего исследования, пассивное демпфирование представляет собой интерес потому, что это связано с материальным особенностям. Хорошо известно, что полимерные композиты, армированные волокнами обеспечивают более высокое материальное затухание, чем наиболее распространенные металлы. Конечно, это происходит главным образом из-за присутствия вязкоупругого материала — полимерной матрицы. Наряду с матрицей, существуют и другие источники энергичной диссипации (т.е. механизм демпфирования) в композитах, например, от других фаз в композите - волокон и межфазных слоев, повреждения — трещины, расслоения и внутренней трения, вязкопластического и термального затухания, и вязкоупругого демпфирования при существовании большой амплитуды вибрации или высокого уровня напряжений и деформаций из-за больших интенсивностей напряжений или деформаций в области между волокнами или фазами [65,67].

Чандра R. и др. [66,67] предоставили хороший обзор о демпфированных исследованиях композитов до 1999 года. В своей работе они пришли к выводу, что существует два аналитических методов, используемых при прогнозе демпфирующих характеристик композитов — принцип упруго-вязкоупругой аналогии [35,36,68, 69,109,110] и метод, основанный на потенциальной энергии деформации [70,71]. Принцип упруго-вязкоупругой аналогии имеет два подхода — это преобразование Лапласа и метод комплексных модулей. В целом, оба подхода преобразуют выражения для эффективных упругих свойств в выражения для вязкоупругих свойств гетерогенных сред. Однако, метод комплексных модулей

является более простым. Тем не менее, этот метод может быть использован только для диапазона небольших вибрационных частот (больших длин волн) [68]. Другие микромеханические работы были направлены на исследование влияния межфазных, покрытий и трещин на демпфирующие характеристики волокнистых композитов [63,72-74].

Для дальнейшего повышения демпфирующих свойств композитов рассматривается концепция гибридных композитов с вязкоупругими материалами (т.е. полимерными материалами, которые имеют рубочные свойства на температуре стеклования). Имея вязкоупругий композиционный материал, может быть достижима хорошая комбинация высокого демпфирования и жесткости [75-77]. В последнее десятилетие такую концепцию аналитически и численно исследовали много ученых [78-84]. На микромеханическом уровне вязкоупругий материал покрыт между волокнам и матрицей, а на макромеханическом уровне — между слоями или пластинами. Тем не менее, результаты часто показывали, что хотя повышать демпфирующую способность композита получается, сохранять достаточно высокую жесткость является трудным. Однако, было показано, что такой композит может быть получен только когда толщина вязкоупругого материала порядка нанометров [46,65].

#### **1.4 Методы моделирования вискеризованных волокнистых композитов и их результаты**

Несколько десятилетий назад, была разработана модель модифицированной матрицы [121-123] для определения свойств вискеризованных волокнистых композитов. Расчет упругих характеристик материалов на основе вискеризованных волокон не имеет принципиальных отличий от расчета упругих характеристик материалов, образованных системой двух фаз. Т.е., однонаправленный композит состоит из вискеризованных волокон и модифицированной матрицы. Свойств модифицированной матрицы определяются как усреднение свойств вискерсов и матрицы. Однако, кроме объемной доли вискерсов, такой метод не учитывает геометрические характеристики (длину и диаметр) и плотность вискерсов в композите. Кроме того, эта модель не отражает физическую реальность потому,

что не вся матрица и только матрица, которая находится около волокно укрепляется вискерсами.

В настоящее время, существуют несколько аналитических моделей, которые анализируют эффективные механические свойства вискеризованных волокнистых композитов с учетом характеристик вискерсов. Например, Гузь и др. [85,86] исследовали эффекты плотность графитовых вискерсов на эффективные упругие свойства конкретного вискеризованного углеродного волокнистого композита, у которого есть четыре слоя — базовое волокно, слой покрытия, вискеризованный межфазный слой и матрица. В целом, эффективные свойства найдены путем процедуры двухэтапной гомогенизации. Свойства вискеризованного межфазного слоя в первом этапе определяются осреднением Фойхта и Рейса, а во втором этапе определяются окончательные свойства композита путем отношения средних напряжений и деформаций и метода комплексной переменной потенциала Мухелишвили [87-89]. Рассматривались эффекты присутствия вискеризованного слоя и влияние трех различных плотностей (разреженных, средних, плотных) на модуль продольного сдвига. Результаты показали, что из-за наличия вискеризованного межфазного слоя, модуль сдвига увеличивается существенно. Однако, показано, что влияние различных плотностей на эффективный модуль мало. Позже, они расширили свою модель для многофазных композитов [90-91].

В случае эффективных свойств Фуззи-волокнистого композита, содержащего базовое волокно, вискеризованный слой и матрица, Кундавал и Рей [92] использовали методы сопротивления материалов и Мори-Танака. Интересно отметить, что вместо двухэтапной процедуры, использована процедура трехэтапной гомогенизации. В своей работе они рассмотрели влияние диаметра нанотрубки и межфазного слоя между нанотрубками и матрицей. Результаты, полученные двумя методами согласовались друг с другом. Показано также, что из-за присутствия вискеризованного слоя поперечные упругие константы композиты значительно повышаются, а диаметр нанотрубки мало влияет на эффективные свойства такого композита. Кроме того, эффект межфазного слоя между нанотрубками и матрицей является несущественным.

Ту же композитную систему исследовали Чатзигеоргии и др. [93] с помощью комбинационных методов двух фаз и трех фаз. Как было показано ранее,

метод двух не дает точное решение для модуля поперечного сдвига, поэтому использовался в их работе метод трех фаз. Они эту задачу решили путем процедуры двухэтапной гомогенизации. Чтобы проверить их результаты, величины полученных эффективных свойств сравниваются с результатами, полученными численным методом асимптотического осреднения [94], и показано что, результаты обоих подходов находятся в очень хорошем согласии друг с другом. Показано также, что из-за наличия вискеризованного межфазного слоя в композите, эффективные сдвиговые и поперечные свойства улучшены существенно, и длина и объемная доля нанотрубки играют большую роль при определении поведения вискеризованных волокнистых композитов. Интересно, авторы этой работы отмечали, что использование метода трех фаз при определении эффективных продольного модуля сдвига, объемного модуля плоской деформации, продольного модуля Юнга и коэффициента Пуассона приведет к нелинейным уравнениям, как и когда эффективный поперечный модуль получается. Однако, будет показано, что решения для этих модулей, кроме поперечного модуля сдвига, не необходимы стать нелинейными.

Следует отметить, что вискерсы во всех моделях предположены расти на круговой поверхности волокна перпендикулярно. Более того их свойства считаются как длинные непрерывные волокна и это предположение возможно потому, что они имеют высокое отношение поверхности к объему как наноструктуры [87-94]. Однако, вся модель не учитывают одновременно эффект плотности, диаметра, длины, объемной доли и свойства вискерсов в вискеризованном межфазном слое композита при определении таких композитов. В то же время в литературе пока неизвестна модель, определяющая эффективные диссипативные свойства. Таким образом, мы хотим моделировать эффективные упругие и диссипативные свойства вискеризованных волокнистых композитов с учетом характеристик вискерсов в вискеризованном межфазном слое.

## 1.5 Основы классической микромеханики волокнистых композитов для определения механических свойств КМ

Здесь остановимся на нескольких понятиях при определении эффективных свойств неоднородных материалов. Кроме того, основные фундаментальные подходы гомогенизации композиционных материалов, приведенные в этом разделе и основанные на нескольких классических работах по микромеханике композитов будут даны и обсуждены.

### 1.5.1 Представительный объем элемента (ячейка) и принцип эквивалентной гомогенности

Механика сплошных сред основана на концепции однородного континуума, который может быть повторно подразделяется на бесконечно малые под-объемы или может быть представлен бесконечно малым объемом, каждый из которых сохраняет свойства сыпучих материалов. Однако, как отмечено ранее КМ — это гетерогенный материал. Здесь целью микромеханического анализа является учет гетерогенной микроструктуры материала, т.е. микроструктурных масштабов при построении соответствующей модели эффективного континуума. Для этого, методы микромеханики используются на уровне представительного объема элемента («*representative volume element - RVE*») или *элементарной ячейки*.

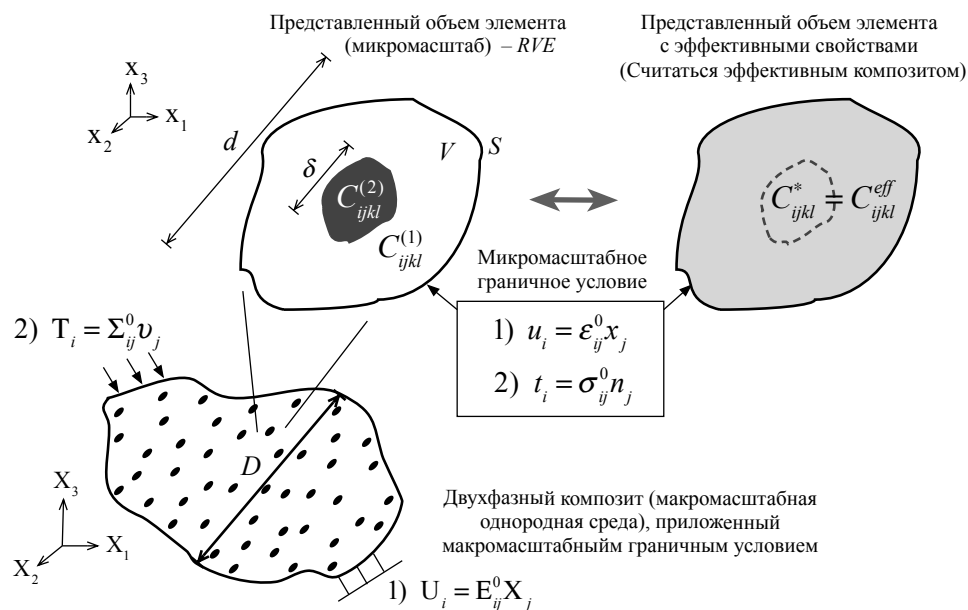
В целом, элементарная ячейка представляет собой малый объем материала, где его эффективные свойства являются свойствами целого материала. В контексте микромеханики КМ ячейка соединяет микромасштабный уровень с макромасштабным уровнем [36]. Например размер ячейки является бесконечно малой по сравнению с композитной средой:

$$d/D \ll 1,$$

где  $d$  — размер ячейки;  $D$  — размер композитной среды, но в то же время размер ячейки достаточно больше чем размер гетерогенного включения:

$$\delta/d < 1 \text{ или } \delta/d \ll 1.$$

где  $\delta$  — размер гетерогенности включения. Для понимания, см. рис. 1.18. Итак, с помощью ячейки эффективные поведения КМ могут быть моделированы.



**Рис. 1.18** Понятие представительного объемного элемента в многомасштабной гомогенизации двухфазных композитов.

Гипотеза, в которой существует такая ячейка в гетерогенной среде, которая может представлять поведение гетерогенной среды называется *эффективной* или *эквивалентной, гомогенности* [35]. С другой стороны, Хилл (1963) строго определил способность ячейки для правильного описания эффективных свойств композитов, где средняя плотность энергии деформации, полученная на границе ячейки, заданной внешним граничными условием, либо вектором перемещений, либо вектором напряжений, должна быть одинаковой [95]. Понятие ячейки исторически уже давно использовалось в механике сплошных сред, но формальное описание представительного объема элемента для микромеханике композитов появилось в 1960-е годы.

### 1.5.2 Осреднение по объему

Понятие осреднения по объему является основной в гомогенизации гетерогенной среды. Пусть представительный объем элемент имеет объем  $V$ , см. рис. 1.18. В условиях приложенного к нему макроскопически однородного поля напряжений или деформаций можно определить *средние объемные напряжения и деформации* в следующем образом:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV, \quad (1.1)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV. \quad (1.2)$$

где знак  $\langle \bullet \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\bullet) dV$  — осреднение по объему. Обычно в микромеханике КМ средние объемные напряжения и деформации могут быть представлены как невзвешенные средние напряжения и деформации [28]:

$$\bar{\sigma} \equiv \langle \sigma \rangle, \quad (1.3)$$

$$\bar{\varepsilon} \equiv \langle \varepsilon \rangle. \quad (1.4)$$

### 1.5.3 Макромасштабные и микромасштабные разрешающие уравнения в статической задаче линейной классической теории упругости

Статическое уравнение равновесия в макромасштабной среде (в композите) принимает вид:

$$\Sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0, \quad (1.5)$$

где  $\Sigma_{ij}$  — макромасштабные компоненты симметричного тензора напряжений Коши;  $F_i$  — массовая сила;  $\rho$  — массовая плотность;  $\Sigma_{ij,j}$  — дивергенция тензора напряжений по макромасштабной системе координат  $X_j$ ; по повторяющимся индексам проводится суммирование. Макромасштабные граничные условия имеют два типа: 1) на всей поверхности, ограничивающей упругое тело, задан вектор перемещений:

$$U_i = E_{ij}^0 X_j, \quad (1.6)$$

где  $U_i$  — компоненты вектора перемещений макромасштабной материальной точки;  $E_{ij}^0$  — компоненты постоянных деформаций; и  $X_j$  — радиус-вектор точек, и 2) на всей поверхности, ограничивающей упругое тело, задан вектор напряжений:

$$T_i = \Sigma_{ij}^0 v_j, \quad (1.7)$$

где  $T_i$  — компоненты вектора напряжений макромасштабной материальной точки;  $\Sigma_{ij}^0$  — компоненты постоянных напряжений; и  $v_j$  — единственный вектор



внешней нормали к поверхности. Макромасштабная кинематическая связь на основе соотношения Коши имеет вид:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}), \quad (1.8)$$

где  $E_{ij}$  — макромасштабные компоненты тензора малых деформаций; и  $U_{i,j}$  — градиент вектора перемещений относительно макромасштабной системы координат  $X_i$ . Макромасштабный закон Гука является:

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl}^* E_{kl}, \quad (1.9)$$

где  $C_{ijkl}^*$  — компоненты тензора эффективных модулей упругости, которые получены из микромасштабной ячейки и таким образом зависит от микромасштабной системы координат  $x_i$ .

Для микромасштабной ячейки статические уравнения равновесия<sup>2</sup> выражаются через

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (1.10)$$

где  $\sigma_{ij}$  — микромасштабные компоненты симметричного тензора напряжений Коши;  $\sigma_{ij,j}$  — дивергенция тензора напряжений по системе координат  $x_i$ .

Микромасштабная кинематическая связь на основе соотношения Коши имеет вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.11)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  — микромасштабные компоненты тензор малых деформаций;  $u_i$  — микромасштабные компоненты вектора перемещения материальной точки; и  $u_{i,j}$  — градиент вектора перемещений относительно микромасштабной системы координат  $x_i$ . На границах ячейки даны два типа граничных условий<sup>3</sup> — вектор перемещений и вектор напряжений:

<sup>2</sup> Видно, что массовая сила исключена из уравнения (1.13). Это следует из статической многомасштабной теории, в которой массовую силу не нужно рассмотреть в микромасштабных уравнениях равновесия [96,97].

<sup>3</sup> На основе многомасштабной теории можно показать, что микромасштабные граничные условия перемещений и векторов напряжений являются однородными и последовательным с макромасштабными деформациями и напряжениями [28,36,95].

$$u_i = \varepsilon_{ij}^0 x_j, \quad (1.12)$$

$$t_i = \sigma_{ij}^0 n_j. \quad (1.13)$$

Если фазы в композите являются линейными упругими материалами, то отношение тензора напряжений Коши и тензора малых деформаций Коши через закон Гука имеет вид:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1.14)$$

где  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора модулей упругости четвертого ранга, которые изменяются по  $x_i$  зависящий от микроструктуры композита. С помощью тензор упругой податливости  $S_{ijkl}$  уравнение (1.17) альтернативно может выражаться:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (1.15)$$

Известно, что тензор четвертого ранга в уравнении (1.17) имеет 81 независимых компонентов и из-за симметричных тензоров напряжений и малых деформаций, число независимых компонентов уменьшается до 36. Далее, для линейного анизотропного упругого тела тензор модулей упругости имеет 21 независимых компонентов [98-100]. С дополнительными предположениями относительно материальной симметрии можно еще больше уменьшить число независимых компонентов тензора модулей упругости. В частности тензор модулей упругости для ортотропного упругого тела принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Тензор модулей упругости в уравнении (1.19) можно выразить через обозначение Фойхта. Далее, форма и компоненты тензоров модулей упругости для трансверсально-изотропной и изотропной среды показаны в приложениях Б и В.

### **Разрешающие уравнения в полярных цилиндрических координатах**

[89,100]. На основании (1.14), дифференциальные соотношения Коши (кинематические связи) в цилиндрической систем координат:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Для уравнений равновесия находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr}^{(i)} - \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(i)}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}^{(i)}}{r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(i)}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}^{(i)}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(i)}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

и на основании (1.19) тензор модулей упругости для ортотропного материала в цилиндрической системе координат можно выразаться в следующем виде

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{r\theta} & C_{rz} & 0 & 0 & 0 \\ C_{r\theta} & C_{\theta\theta} & C_{\theta z} & 0 & 0 & 0 \\ C_{rz} & C_{\theta z} & C_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{\theta z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{rz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{r\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{\theta z} \\ 2\varepsilon_{rz} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

#### **1.5.4 Подходы для определения эффективных свойств композитов**

В этом разделе рассматриваются три подхода, которые обычно используются во многих классических микромеханических методах при определении эффективных свойств композиционных материалов.

##### ***А. Прямой подход***

В микромеханике обычно предполагается, что макромасштабные напряжения и деформации считаются равны средним напряжениям и деформациям (микромасштабным) [28,96]:

$$\Sigma = \bar{\sigma}, \quad (1.20)$$

$$E = \bar{\varepsilon}. \quad (1.21)$$

Итак, с помощью (1.3), (1.4), (1.10) и (1.11), можно записать закон Гука (1.9) в виде

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad (1.22)$$

где  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  означают средние напряжения и деформации в микромасштабном уровне;  $C_{ijkl}^* = C_{ijkl}^{eff}$  — компоненты эффективного тензора модуля упругости

элементарной ячейки где  $C_{ijkl}^* = \frac{1}{V} \int_V C_{ijkl}(\mathbf{x}) dV$ ; и  $C_{ijkl}(\mathbf{x})$  — пространственно зависимые упругие модули композита, т.е., эти модули зависят от величин модулей упругости фаз в композите. Таким образом, эффективные свойства макромасштабный композит определяются выбранной ячейкой и напряженно-деформационным состоянием в микромасштабном уровне.

Однако, хотя и эта формула (1.22) кажется простой в общих чертах, она сложна в деталях, и при ее выполнении необходима осторожность. Для строго выполнения гомогенизации необходимо иметь точные решение для полей напряжений  $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$  в гетерогенной среде (в ячейке). Интересно отметить, что этот подход был использован в работе Гузя и др. [85,86] при оценке свойств их вискеризованных волокнистых композитов, и на тот же подход опирается и метод асимптотического осреднения.

## ***Б. Подход на основе отношения объемного осреднения***

В этом подходе используются теоремы средней деформации и среднего напряжения<sup>4</sup>. ***Теорема средней деформации*** показывает, что при наличии

---

<sup>4</sup> Хилл [95,28] считал, что ячейка должна быть достаточно малой, т.е. такой, что с макроскопической точки зрения напряжения и деформации макроскопического тела можно считаться приблизительно постоянными в месте ячейки. В результате этого, ячейку можно считать материальной точкой в макроскопическом теле. С одной стороны, та же ячейка должна быть достаточно большой, так что флуктуация граничных полей достаточно относительно мала. Таким образом, если существует такая ячейка, то приводятся теоремы средней деформации и среднего напряжения. Важно отметить, что если существует неидеальный контакт между фазами, выводится дополнительный член (см. приложения Г)

однородного внешнего граничного условия, средние деформации по объему ячейки композита, имеющего идеальный контакт между фазами, равны введенным постоянным деформациям на границах ячейки<sup>5</sup>:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV = \varepsilon_{ij}^0. \quad (1.23)$$

**Теорема среднего напряжения** заявляет, что при отсутствии вектора массовых сил средние напряжения по объему ячейки равны постоянным напряжениям, приложенным на границах ячейки<sup>5</sup>:

$$\bar{\sigma}_{ij} \equiv \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \sigma_{ij}^0. \quad (1.24)$$

Чтобы хорошо понимать этот подход, рассматривается двухфазный композит. Считаем сначала, что на поверхности ячейки задано однородное граничное условие вектора перемещений (1.12). Можно записать для и двухфазного композита со совершенным контактом между фазами его среднюю объемную деформацию в следующем виде:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = c_1 \langle \varepsilon_{ij}^{(1)} \rangle + c_2 \langle \varepsilon_{ij}^{(2)} \rangle, \quad (1.25)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  являются объемной доли фаз композита и  $c_1 + c_2 = 1$  (можно считать фазу 1 — матрица и фазу 2 — включение);  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  — средняя деформация композита (ячейки) по объему;  $\langle \varepsilon_{ij}^{(1)} \rangle$  и  $\langle \varepsilon_{ij}^{(2)} \rangle$  — средняя объемная деформация в матрице и во включении. С одной стороны, среднее объемное напряжение ячейки имеет вид:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = c_1 \langle \sigma_{ij}^{(1)} \rangle + c_2 \langle \sigma_{ij}^{(2)} \rangle, \quad (1.26)$$

где  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  — среднее объемное напряжение композита;  $\langle \sigma_{ij}^{(1)} \rangle$  и  $\langle \sigma_{ij}^{(2)} \rangle$  — среднее объемное напряжение в матрице и во включении соответственно. Можно переписать (1.26) в другом виде

$$C_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{ij} \rangle = c_1 C_{ijkl}^{(1)} \langle \varepsilon_{ij}^{(1)} \rangle + c_2 C_{ijkl}^{(2)} \langle \varepsilon_{ij}^{(2)} \rangle, \quad (1.27)$$

где  $\langle C_{ijkl}^{(1)} \rangle$  и  $\langle C_{ijkl}^{(2)} \rangle$  — тензор модулей упругости матрицы и включения соответственно. Учитывая теорему средней деформации (1.23) и отношение (1.25), на основании (1.27) имеет место равенство

---

<sup>5</sup> Для доказательства смотрите на приложения Г.

$$C_{ijkl}^* \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^0 = C_{ijkl}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^0 + c_2 \left( C_{ijkl}^{(2)} - C_{ijkl}^{(1)} \right) \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{(2)} \rangle. \quad (1.28)$$

Итак, эта удивительно простая формула показывает, что для вывода выраженных эффективных свойств композита необходимо знать только состояние деформации во включении. В практике, обычно  $\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^0$  считается равным единице. С одной стороны, если на границах ячейки задано однородное граничное условие вектора напряжений, то определяется следующая формула

$$S_{ijkl}^* \boldsymbol{\sigma}_{kl}^0 = S_{ijkl}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}_{kl}^0 + c_2 \left( S_{ijkl}^{(2)} - S_{ijkl}^{(1)} \right) \langle \boldsymbol{\sigma}_{kl}^{(2)} \rangle. \quad (1.29)$$

Можно увидеть, что существует единственная зависимость средних деформаций или напряжений по объему фаз к средним деформации или напряжению по объему композита. При этом имеются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(1)} \rangle &= A_{ijkl}^{(1)} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \rangle, & \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{(2)} \rangle &= A_{ijkl}^{(2)} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \rangle, \\ \langle \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(1)} \rangle &= B_{ijkl}^{(1)} \langle \boldsymbol{\sigma}_{kl} \rangle, & \langle \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(2)} \rangle &= B_{ijkl}^{(2)} \langle \boldsymbol{\sigma}_{kl} \rangle, \end{aligned} \quad (1.30)$$

где  $A_{ijkl}^{(\alpha)}$  — тензор деформации концентрации фаз; и  $B_{ijkl}^{(\alpha)}$  — тензор напряжения концентрации фаз. Итак, на основании (1.30) можно записать (1.28) и (1.29) в следующем окончательном виде:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^{(1)} + c_2 \left( \mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)} \right) \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \rangle}{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle} = \mathbf{C}^{(1)} + c_2 \left( \mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)} \right) \mathbf{A}^{(2)}, \quad (1.31)$$

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^{(1)} + c_2 \left( \mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)} \right) \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle}{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle} = \mathbf{S}^{(1)} + c_2 \left( \mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)} \right) \mathbf{B}^{(2)}. \quad (1.32)$$

Многие методы для и прогнозирования свойств композитов опираются на эти формулы (1.31) и (1.32), и каждый метод имеет свою методику или процедуру при определении своих тензоров деформации и напряжения концентрации, которые зависят от формы и свойств включения и взаимодействий<sup>6</sup> в матрице. Такой подход использован в методах матрицы Эшелби, Мори-Танака, и самосогласования — эффективного поля и дифференциального<sup>7</sup>. Однако, как мы узнали ранее, эти

<sup>6</sup>Взаимодействия могут быть описаны как беспорядков на состоянии напряжения или деформации («eigenstress» или «eigenstrain») из-за присутствия включения в матрице, эффекта температуры и т.д.

<sup>7</sup> См. работу [36] для деталей.

методы, много из них, только дают хорошо результаты для малых концентраций включений в композите.

### ***В. Подход с методом энергии***

В предыдущем разделе эффективные свойства композитов определены путем формулы (1.31) с участием средних деформаций и напряжений в ячейке. А в этом разделе эффективные свойства выводятся через энергия эквивалентности и имеется два типа метода энергии.

***Метод энергии первого типа.*** В этом подходе эффективные свойства композитов найдены путем эквивалентности средней плотности энергии деформации между ячейками композита (RVE) и эффективного композита (см. рис. 1.18). Следует отметить, что плотность энергии деформации композита равна сумме плотности энергии деформации каждого компонента в композите. По формуле Клапейрона удельной энергией деформации упругого тела, подчиняющегося закону Гука является<sup>8</sup>:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (1.33)$$

На основании (1.33) можно считать, что удельная энергия деформации как плотность энергия деформации (средняя энергия деформация). Поэтому, можно записать эквивалентность плотности энергии деформации между ячейками двухфазного композита и эффективного композита в виде

$$\begin{aligned} W^{eff} &= \langle W^{eff} \rangle = \langle W^{RVE} \rangle = W^{RVE} \\ \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{eff} \varepsilon_{ij}^{eff} &= \frac{1}{2} \langle \sigma_{ij}^{eff} \varepsilon_{ij}^{eff} \rangle = \frac{1}{2} \langle \sigma_{ij}^{RVE} \varepsilon_{ij}^{RVE} \rangle = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{RVE} \varepsilon_{ij}^{RVE} \\ \frac{1}{2V^{eff}} \int_V \sigma_{ij}^{eff} \varepsilon_{ij}^{eff} dV &= \frac{1}{2V^{RVE}} \int_V \sigma_{ij}^{RVE} \varepsilon_{ij}^{RVE} dV, \end{aligned} \quad (1.34)$$

---

<sup>8</sup> Теорема Клапейрона, которая справедлива для любого упругого тело имеет вид:  $A = \int_V \varepsilon_{ij} (\partial W / \partial \varepsilon_{ij}) dV$ . См. приложения Д для доказательства.

где  $V^{eff} = V^{RVE} = V$  — объем ячейки. В левую часть равенства (1.34) с помощью теоремы Хилла<sup>9</sup> имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^{eff} \varepsilon_{ij}^{eff} dV &= \frac{1}{2} \langle \sigma_{ij}^{eff} \varepsilon_{ij}^{eff} \rangle = \frac{1}{2} \langle \sigma_{ij}^{eff} \rangle \langle \varepsilon_{ij}^{eff} \rangle \\ &= \frac{1}{2} C_{ijkl}^{eff} \langle \varepsilon_{ij}^{eff} \rangle \langle \varepsilon_{ij}^{eff} \rangle = \frac{1}{2} C_{ijkl}^{eff} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0, \end{aligned} \quad (1.35)$$

а в правой часть,

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}^{RVE} \varepsilon_{ij}^{RVE} dV = \frac{1}{V} \left[ \int_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV + \int_{V_2} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV \right]. \quad (1.36)$$

Итак, приравняв (1.35) и (1.36), получим

$$C_{ijkl}^{eff} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 = \frac{1}{V} \left[ \int_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV + \int_{V_2} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV \right]. \quad (1.37)$$

Будет показано, что равенство (1.34) использовано в методе полидисперсной модели (метод двух фаз). Можно обобщить результаты (1.34) и (1.37) для многофазных композитов и запишем:

$$\begin{aligned} W^{eff} &= W^{RVE} \\ C_{ijkl}^{eff} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 &= \frac{1}{V} \left[ \int_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV + \int_{V_2} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV + \dots + \int_{V_N} \sigma_{ij}^{(N)} \varepsilon_{ij}^{(N)} dV \right], \end{aligned} \quad (1.38)$$

где  $N$  — число слоя или фазы в композите.

**Метод энергии второго типа.** В этом подходе формулируется энергия взаимодействия между фазами композита при определении эффективных свойств композитов. Этот подход основан на оригинальной интегральной формуле Эшелби, которая дает хорошие результаты для малых концентраций включений. Однако, уже сказано, что такой подход может быть модифицирован, чтобы использовался для достаточно высоких объемных долей включений. Теперь рассмотрим энергетическую формулировку для малой концентрации включения в двухфазном композите. Тем не менее, показываемая процедура, которая приводит к знаменитой интегральной формуле Эшелби будет отличаться от того, что была предложена Кристенсенем<sup>10</sup>.

<sup>9</sup> Теорема Хилла показывает, что для малых деформации и в условии, где граничные условия достаточно постоянными, следующее равенство действительно:  $\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle$  [95,28]. См. замечания 4.



Сначала произведем свертку (1.28) при помощи тензора средних деформаций  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0$  и умножая с половиной:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C_{ijkl}^* \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 &= \frac{1}{2} C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 + \frac{1}{2} c_2 \left( C_{ijkl}^{(2)} - C_{ijkl}^{(1)} \right) \langle \varepsilon_{kl}^{(2)} \rangle \varepsilon_{ij}^0 \\ &= \frac{1}{2} C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 + \frac{1}{2V} \int_{V_2} \left( C_{ijkl}^{(2)} \varepsilon_{kl}^{(2)} \varepsilon_{ij}^0 - C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^{(2)} \right) dV. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Используя симметрию,  $C_{ijkl}^{(1)} = C_{klij}^{(1)}$  в последний член интеграла (1.39), имеем

$$C_{klij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^{(2)} = \sigma_{kl}^0 \varepsilon_{kl}^{(2)}.$$

Итак с равенством  $\sigma_{ij}^{(2)} = C_{ijkl}^{(2)} \varepsilon_{kl}^{(2)}$ , можно записать (1.39) в виде

$$\frac{1}{2} C_{ijkl}^* \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 = \frac{1}{2} C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 + \frac{1}{2V} \int_{V_1} \left( \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^0 - \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^{(2)} \right) dV, \quad (1.40)$$

где  $V$  — объем ячейки. Приняв

$$\begin{aligned} U^{RVE} &= W^{RVE} V = \frac{1}{2} C_{ijkl}^* \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 V, \\ U^0 &= W^0 V = \frac{1}{2} C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 V, \end{aligned}$$

где  $U^{RVE}$  — энергия деформации с включением (композит);  $U^0$  — энергия деформации среда без включения (матрица), и с помощью теоремы Гаусса-Остроградского<sup>11</sup>, равенство (1.40) принимает вид

$$U^{RVE} = U^0 + U^{INT} = U^0 + \frac{1}{2} \int_{S_i} \left( t_i u_i^0 + t_i^0 u_i \right) dS, \quad (1.41)$$

где  $S_i$  — контакт поверхности между включением и матрицей;  $t_i, u_i$  — компоненты вектора напряжений и перемещений матрицы (среда с включением) в контакте фаз;  $t_i^0, u_i^0$  — компоненты вектора напряжений и перемещений матрицы (среда без включения) в контакте фаз; и  $U^{INT}$  — дополнительная энергия взаимодействия, которая возникает когда включение входит в среду без включения.

<sup>10</sup> Произведение интегральной формулы Эшелби, предложено Кристенсенем для малой концентрации двухфазного материала дается в приложении Е.

<sup>11</sup> См. замечания номера 13 приложения Г.

Позже, Кристенсен и Ло в своем предполагаемом методе трех фаз (см. рис. 1.17) модифицировали формулу Эшелби (1.41). Как мы узнали ранее, что метод трех фаз (самосогласованный метод Эшелби) основан на идее полидисперсной модели композите с изолированными включениями (т.е. волокном и матрицей), окруженными бесконечной эквивалентной гомогенной средой, с однородным полем деформации реализующимся на большом расстоянии от включений. Итак, на основании (1.41), они предложили, что энергия деформации между эквивалентными гомогенными средами с включениями  $U^{RVE}$  и без включений  $U^{eff}$  идентичны. Это условие сводится к тому, что дополнительная энергии деформации, связанная с наличием включений в эффективной матрице равна нулю. В результате, формула Эшелби (1.41) дает следующее энергетическое соотношение, на поверхности контакта включения и эквивалентной гомогенной среды:

$$\int_{S_i} (\sigma_{ij}^{N+1} u_i^{eff} - \sigma_{ij}^{eff} u_i^{N+1}) n_j dS = 0, \quad (1.42)$$

где  $S_i$  — контакт поверхности между матрицей ( $N$ -фазой) и эквивалентной гомогенной средой ( $N+1$  фазой);  $\sigma_{ij}^{N+1}, u_i^{N+1}$  — компоненты тензора напряжений и вектора перемещений на поверхности контакта среды с включениями. Эти напряжения и перемещения присутствуют в условиях контакта, записываемых на поверхности при решении контактной задачи;  $\sigma_{ij}^{eff}, u_i^{eff}$  — компоненты тензора напряжений и вектора перемещений на поверхности контакта для среды без включений со стороны эффективной среды. Следуя [35], эффективная среда (без включений) представляет собою среду, у которой включения заменены окружающим его материалом. Для рассматриваемой модели — это эффективная среда с эквивалентными гомогенными свойствами, эквивалентная трансверсально-изотропная среда если включение является цилиндрическим.

### 1.5.5 Принцип упруго-вязкоупругой аналогии комплексных модулей

Как уже упоминалось ранее, принцип упруго-вязкоупругой аналогии комплексных модулей преобразует выражения для эффективных упругих свойств в

выражения для вязкоупругих свойств. Проиллюстрируем описанную процедуру простым примером; заменяя каждый модуль в (1.37) соответствующим модулем, получим

$$C_{ijkl}^{eff*} \varepsilon_{ij}^{0*} \varepsilon_{kl}^{0*} = \frac{1}{V} \left[ \int_{V_1} C_{ijkl}^{(1)*} \varepsilon_{ij}^{(1)*} \varepsilon_{kl}^{(1)*} dV + \int_{V_2} C_{ijkl}^{(2)*} \varepsilon_{ij}^{(2)*} \varepsilon_{kl}^{(2)*} dV \right]. \quad (1.43)$$

Описание двухфазных комплексных модулей с учетом зависимости от частоты имеет вид

$$C_{ijkl}^{(1)*} = C_{ijkl}'^{(1)}(\omega) + i C_{ijkl}''^{(1)}, \quad C_{ijkl}^{(2)*} = C_{ijkl}'^{(2)}(\omega) + i C_{ijkl}''^{(2)}. \quad (1.44)$$

Подстановка этих выражений (1.44) в (1.43) приводит к эффективным комплексным модулям

$$C_{ijkl}^{eff*} = C_{ijkl}'^{eff} + i C_{ijkl}''^{eff}. \quad (1.45)$$

Известно, что  $C_{ijkl}'$  — действительная часть, которая равна модулю накопления, а мнимая часть  $C_{ijkl}''$  — модуль потерь. Отношение мнимой части к действительной в (1.45) часто используется в качестве характеристики материала. Тангенс потерь  $C_{ijkl}^*$  определяется следующим образом

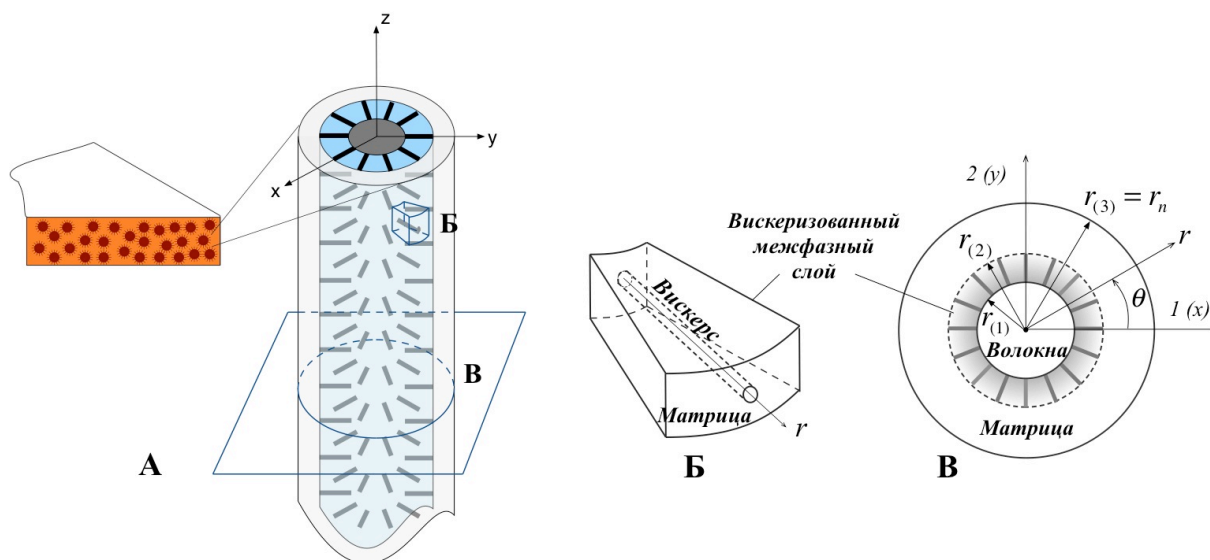
$$tg \eta = C_{ijkl}''(\omega) / C_{ijkl}'(\omega). \quad (1.46)$$

Угол  $\eta$  интерпретируется как фазовый угол запаздывания деформации относительно напряжения при установившихся гармонических колебаниях в вязкоупругой среде.

## 2.0 Моделирование и расчеты эффективных механических и динамических свойств вискеризованных волокнистых композитов

### 2.1 Постановка задачи

На рис. 2.1.а показан вискеризованный волокнистый композит для однонаправленного монослоя. Для простоты, композиционная структура состоит из двух компонентов и определяется с одной стороны вискеризованным волокном, а с другой — полимерной матрицей. Из-за наличия микро- или нановолокон (вискерсов или щетин), такой композит имеет дополнительный межфазный слой между базовым волокном и матрицей, и поэтому, такие материалы можно отнести к волокнистым многофазным композитам. Итак, в нашем случае мы считаем, что наш композит имеет только три слоя или фазы (т.е.  $N = 3$  где  $N$  — число слоя в композите).



**Рис 2.1** а) Однонаправленный вискеризованный волокнистый композит; б) ячейка вискеризованного межфазного слоя; в) ячейка вискеризованного волокнистого композита.

При моделировании эффективных свойств таких композитов, мы считаем, что у композита есть трансверсально-изотропная структура с плоскостью изотропии поперек волокна (см. рис. 2.1.в). Кроме того, приняты несколько предположений, которые состоят в том, что вискеризованные межфазные слоя в

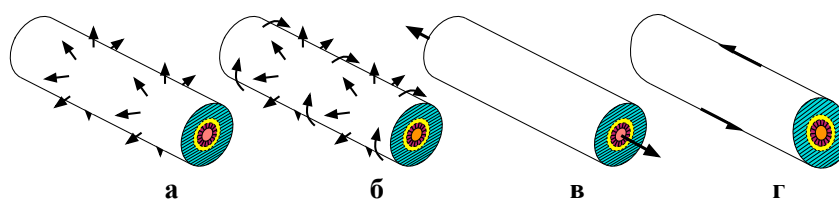
матрице не пересекаются друг с другом, и вискерсы выращены перпендикулярно к поверхности базового волокна. Предполагается также, что свойства вискерсов являются свойствами длинных микро- или нановолокон и это возможно потому, что они имеют высокое отношение поверхности к их объему [93].

Чтобы получить эффективные свойства композита, необходимо сначала найти эффективные свойства вискеризованного слоя. В реальности этот слой показывает ортотропное поведение (радиальный тип структуры [58]) и в то же время, имеет градиентные свойства по длине вискерсов (см. рис. 2.1.б). Тем не менее, для нашего аналитического моделирования предполагается, что эта фаза соответствует трансверсально-изотропному материалу с плоскостью изотропии поперек вискерсов (т.е. ось симметрии, направлена вдоль направления оси  $r$ ) и ее свойства являются постоянными по длине вискерсов — цилиндрическая ортотропия [85,86,91,93]. Последнее упрощение кажется разумным с учетом того, что длина вискерсов довольно мала [85,86]. Будет показано, что эти предположения являются основой при построении предполагаемой приближенной геометрической модели (см. рис. 2.3), которая будет использоваться при оценке свойств вискеризованного межфазного слоя с помощью известных формул метода трех фаз, полученных для и двухфазного композита с цилиндрическими включениями.

После определения эффективных свойств вискеризованного межфазного слоя мы находим окончательные эффективные механические свойства вискеризованного волокнистого композита, используя предлагаемый метод Эшелби для ортотропного многофазного композита, а также метод на основе полидисперсной модели (метод двух фаз) и метод на основе комплексного переменного потенциала. Два последних метода исследуются для сравнительного анализа. Для эффективных динамических свойств, предполагается использовать метод комплексных модулей. Далее, в следующей главе исследуется влияние различных характеристик вискерсов на окончательные эффективные свойства такого композита.

Следует отметить, что для композита с цилиндрическими включениями рассматриваются две постановки задач — в плоскости изотропии и в перпендикулярной к ней плоскости, т.е. деформирование в направлении волокон (см. рис. 2.2). Эффективный объемный модуль плоской деформации и модуль

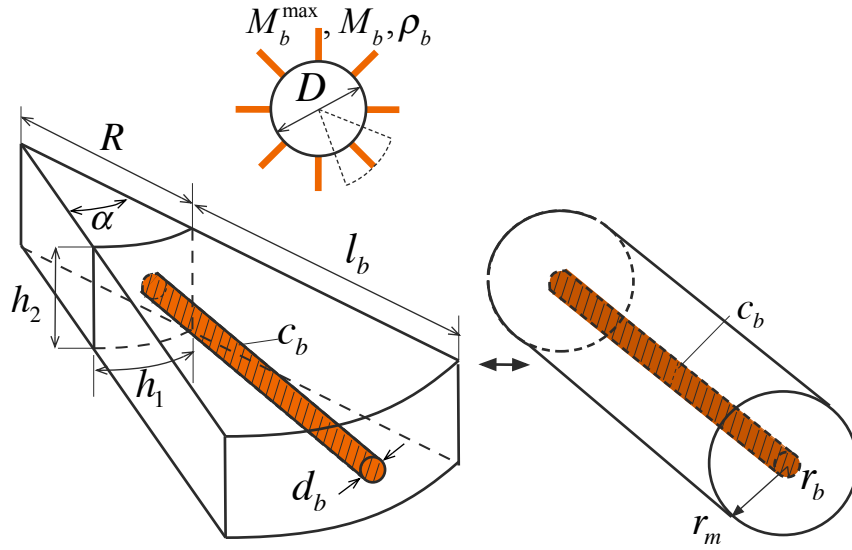
поперечного сдвига получается соответственно из решения задач всестороннего растяжения (сжатия) поперек волокон и чистого сдвига в трансверсальной плоскости, которые решаются в цилиндрической полярной системе координат. Модуль продольного сдвига определяется из решения задачи чистого сдвига вдоль волокон. Эффективные модуль Юнга и коэффициент Пуассона в направлении волокон определяются из решения задачи об одноосном растяжении (сжатии) в цилиндрической системе координат. Эффективный коэффициент Пуассона определяется как отношение поперечной эффективной деформации к продольной при растяжении вдоль волокон. В конце концов с помощью этих найденных свойств можно найти другие свойства как эффективный поперечный модуль Юнга через установленные соотношения, данные в Приложении Б. Чтобы определить эффективные механические свойства композита в каждой задаче определяются допустимые поля перемещений для напряженно-деформированного состояния композита во всех указанных ортотропных фазах композита.



**Рис. 2.2** Задача в плоскости изотропии: а) задача всестороннего растяжения (сжатия) поперек волокон; б) задача чистого сдвига в трансверсальной плоскости и задача в перпендикулярной плоскости изотропии; в) задача об одноосном растяжении (сжатии); г) задача чистого сдвига в направлении вдоль волокон.

## 2.2 Приближенная структурная модель вискеризованного межфазного слоя. Эффективные свойства

На рис. 2.3 показывается приближенная структурная модель вискеризованного межфазного слоя, которая построена для нахождения объемной доли вискерсов, и следовательно, эффективных свойств вискеризованного межфазного слоя с учетом различных характеристик вискерсов (т.е. длины, плотности, диаметра, свойств вискерсов) в этом слое.



**Рис 2.3** Приближенная структурная модель вискеризованного межфазного слоя.

Теперь определяем максимальное допустимое число вискерсов  $M_b^{\max}$ , которое может поместиться на длине окружности волокна по формуле

$$M_b^{\max} = \pi D / d_b, \quad (2.1)$$

где  $D$  — диаметр базового волокна;  $d_b$  — диаметр вискерса. Угол между вискерсами  $\alpha$  задается, как

$$\alpha = 2\pi M_b, \quad (2.2)$$

где  $M_b$  — число вискерсов, выращенных на поверхности волокна. Расстояние  $h_1$  между вискерсами задается формулой

$$h_1 = \alpha R, \quad (2.3)$$

где  $R = D/2$  — радиус базового волокна. Расстояния между вискерсами по единичной длине  $h_2$  волокна запишем

$$h_2 = p h_1, \quad (2.4)$$

где  $p$  — константа, определяющая отношение между  $h_1$  и  $h_2$ . Объем вискерсов в вискеризованном межфазном слое  $V_b$  определяется формулой вида

$$V_b = \pi M_b l_b d_b^2 / 4, \quad (2.5)$$

где  $l_b$  — длина вискерса, а объемом вискеризованного межфазного слоя является

$$V_{bm} = \pi(r_2^2 - r_1^2)h_2, \quad (2.6)$$

где  $r_1 = R$  и  $r_2 = R + l_b$ . Итак, взяв соотношение (2.5) и (2.6), определяем объемную долю вискерсов в этом слое так

$$c_b = \frac{M_b d_b^2}{4(l_b + D)h_2}. \quad (2.7)$$

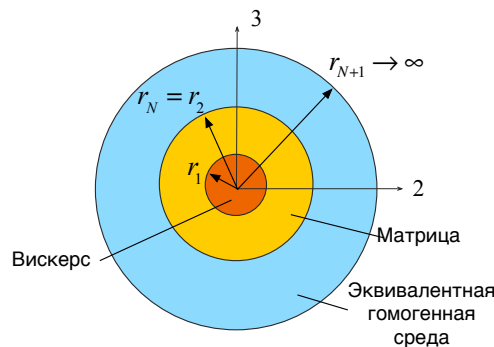
Так как для простоты, ячейка на корне вискерса считается квадратной, имеем  $p = 1$ . Следовательно, на основании (2.2), (2.3) и (2.4), можно переписать (2.7) в виде

$$c_b = \frac{M_b^2 d_b^2}{4\pi(l_b + D)D}. \quad (2.8)$$

Плотность вискерсов связана с числом вискерсов, выращенных на единичной поверхности волокна. Однако, для простоты мы определяем в расчете, что плотность вискерсов представляет собой соотношение числа вискерсов, выращенных на волокне к максимальному допустимому числу вискерсов, уместяющихся по длине окружности волокна. Имеем

$$\rho_b = (M_b / M_b^{\max}) 100\%. \quad (2.9)$$

Уравнения (2.8) и (2.9) используются для расчета объемной доли вискерсов в вискеризованном межфазном слое. После получения оценки концентрации вискерсов, мы можем использовать известные формулы метода трех фаз, приведенные в работе [35] для двухфазного композита при определении эффективных свойств вискеризованного межфазного слоя (см. рис. 2.4)



**Рис. 2.4** Ячейка вискеризованного межфазного слоя по методу трех фаз.



**Продольный модуль Юнга  $E_{11}^{eff}$  :**

$$E_{11}^{eff} = c_b E_b + (1 - c_b) E_m + \frac{4c_b(1 - c_b)(v_b - v_m)^2 \mu_m}{(1 - c_b)\mu_m/(k_b + \mu_b/3) + c_b\mu_m/(k_m + \mu_m/3) + 1}, \quad (2.10)$$

**Коэффициент Пуассона (вдоль волокон)  $\nu_{12}^{eff}$  :**

$$\nu_{12}^{eff} = c_b \nu_b + (1 - c_b) \nu_m + \frac{c_b(1 - c_b)(v_b - v_m)(\mu_m/(k_m + \mu_m/3) - \mu_m/(k_b + \mu_b/3))}{(1 - c_b)(\mu_m/(k_b + \mu_b/3)) + c_b(\mu_m/(k_m + \mu_m/3)) + 1}. \quad (2.11)$$

**Модуль продольного сдвига  $\mu_{12}^{eff}$  :**

$$\frac{\mu_{12}^{eff}}{\mu_m} = \frac{\mu_b(1 + c_b) + \mu_m(1 - c_b)}{\mu_b(1 - c_b) + \mu_m(1 + c_b)}. \quad (2.12)$$

**Объемный модуль плоской деформации  $K_{23}^{eff}$  :**

$$K_{23}^{eff} = k_m + \frac{\mu_m}{3} + \frac{c_b}{1/(k_b - k_m + \frac{1}{3}(\mu_b - \mu_m)) + (1 - c_b)/(k_m + 4\mu_m/3)}. \quad (2.13)$$

**Модуль поперечного сдвига  $\mu_{23}^{eff}$  :**

$$A \left( \frac{\mu_{23}^{eff}}{\mu_m} \right)^2 + 2B \left( \frac{\mu_{23}^{eff}}{\mu_m} \right) + C = 0. \quad (2.14)$$

где  $\eta = 3 - 4\nu$  и

$$\begin{aligned} A &= 3c_b(1 - c_b)^2 \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - \eta_b \right) + \\ &+ \left[ \frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m + \eta_b \eta_m - \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m - \eta_b \right) c_b^3 \right] \left[ c_b \eta_m \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) - \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m + 1 \right) \right], \\ B &= -3c_b(1 - c_b)^2 \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} + \eta_b \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \eta_m \frac{\mu_b}{\mu_m} + \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) c_b + 1 \right] \left[ (\eta_m - 1) \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} + \eta_b \right) - \right. \\ &\left. - 2 \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m - \eta_b \right) c_b^3 \right] + \frac{c_b}{2} (\eta_m + 1) \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) \left[ \frac{\mu_b}{\mu_m} + \eta_b + \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m - \eta_b \right) c_b^3 \right], \end{aligned}$$

$$C = 3c_b(1 - c_b)^2 \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} + \eta_b \right) + \left[ \eta_m \frac{\mu_b}{\mu_m} + \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} - 1 \right) c_b + 1 \right] \left[ \frac{\mu_b}{\mu_m} + \eta_b + \left( \frac{\mu_b}{\mu_m} \eta_m - \eta_b \right) c_b^3 \right].$$

### 2.3 Модель вискеризованных волокнистых композитов, основанная на методе самосогласования Эшелби (метод трех фаз).

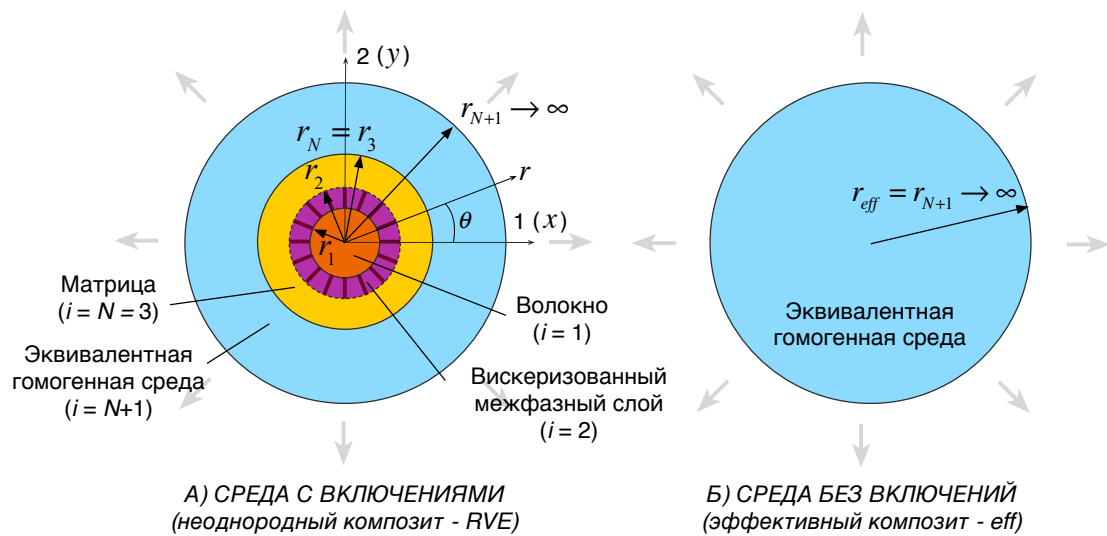


Рис 2.5 а) Ячейка вискеризованного волокнистого композита, и б) ячейка эффективного композита (гомогенизированный композит).

На рис. 2.5 представлены ячейки вискеризованного волокнистого композита по методу самосогласованного поля Эшелби и его эффективного композита. Как уже упоминалось ранее в первой главе раздела 1.5.4.б, эффективные свойства такого композита найдены при рассмотрении разности энергии деформации между средами с включениями и без включениями. Кристенсен и Ло показали, что этот метод позволяет найти все необходимые эффективные константы, включающие продольные и поперечные модуля Юнга и сдвига, объемный модуль плоской деформации и коэффициенты Пуассона из решения задач в плоскости изотропии и в перпендикулярной к ней плоскости (см. рис. 2.2). В каждом случае нагружения определяются общие допустимые поля перемещений для ортотропных фаз композита из решения соответствующей задачи теории упругости. С помощью

соотношений Коши и уравнений закона Гука находятся конкретные поля деформаций и напряжений для всех фаз в композите. Далее, эти поля перемещений и напряжений подставляются в граничные условия на границах контактов фаз: условия непрерывности перемещения и напряжения, условия несингулярности в центре волокна, и условия на бесконечности (внешнее граничное условие). На основе этих условий формулируется система алгебраических уравнений, из которой с помощью интегральной формулы Эшелби (1.42) находятся все неизвестные константы и, следовательно, все эффективные модули упругости, которые также были включены в число искомых неизвестных постоянных.

Здесь показаны тензоры упругих модулей ( $C_{ijkl}^{(i)}$ ) фаз в композите, которые будут использоваться для предлагаемой модели. На основе правила Гука тензор упругих модулей первой фазы ( $i=1$ ) или базового волокна (трансверсально-изотропная среда с осей симметрии, направленной вдоль своей оси волокна — приложение Б.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(1)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} \\ \sigma_{\theta z}^{(1)} \\ \sigma_{rz}^{(1)} \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & C_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(1)} & C_{11}^{(1)} & C_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^{(1)} & C_{13}^{(1)} & C_{33}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(1)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \varepsilon_{zz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

где индексы компонентов тензора упругих модулей  $r, \theta, z$  заменены индексами 1, 2, 3, соответственно. Для второй фазы ( $i=2$ ) или вискеризованного межфазного слоя тензор упругих модулей принимает вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(2)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)} \\ \sigma_{zz}^{(2)} \\ \sigma_{\theta z}^{(2)} \\ \sigma_{rz}^{(2)} \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & C_{23}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(2)} & C_{23}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}^{(2)} - C_{23}^{(2)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(2)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} \\ \varepsilon_{zz}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Видно, что ось симметрии этого трансверсально-изотропного слоя отличается от оси плоскости изотропии волокна (см. Приложение Б). Полученные эффективные физические модули упругости в (2.10 – 2.14) можно преобразовать к модулям упругости  $C_{ij}^{(2)}$  (см. (2.16)) с помощью соотношений, данных в приложении Б (см. формулы (Б.27)). Далее, тензор упругих модулей изотропной матрицы или третьей фазы ( $i = N = 3$ ) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(3)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(3)} \\ \sigma_{zz}^{(3)} \\ \sigma_{\theta z}^{(3)} \\ \sigma_{rz}^{(3)} \\ \sigma_{r\theta}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(3)} & C_{11}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & C_{11}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(3)} - C_{12}^{(3)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(3)} - C_{12}^{(3)}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(3)} - C_{12}^{(3)}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(3)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(3)} \\ \varepsilon_{zz}^{(3)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(3)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(3)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Тензор упругих модулей для эквивалентной гомогенной среды или внешней фазы ( $i = N + 1$ ) считается равным эффективному модулю упругости эффективного гомогенизированного материала и является искомой величиной. Кроме того, эта среда обладает трансверсально-изотропным свойствам по оси симметрии, направленной вдоль оси базового волокна и поэтому, имеем

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{N+1} \\ \sigma_{\theta\theta}^{N+1} \\ \sigma_{zz}^{N+1} \\ \sigma_{\theta z}^{N+1} \\ \sigma_{rz}^{N+1} \\ \sigma_{r\theta}^{N+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{N+1} & C_{12}^{N+1} & C_{13}^{N+1} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{N+1} & C_{11}^{N+1} & C_{13}^{N+1} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^{N+1} & C_{13}^{N+1} & C_{33}^{N+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{N+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^{N+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{N+1} - C_{12}^{N+1}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{N+1} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{N+1} \\ \varepsilon_{zz}^{N+1} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{N+1} \\ 2\varepsilon_{rz}^{N+1} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{N+1} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Наконец, тензор упругих модулей для эффективного композита (среда без включений или гомогенизированный композит, который имеет эквивалентные трансверсально-изотропные свойства,) имеет тот же тензор упругих модулей эквивалентной гомогенной среды (т.е.  $C_{ij}^{eff} = C_{ij}^{N+1}$ ) и это запишем в виде

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{eff} \\ \sigma_{\theta\theta}^{eff} \\ \sigma_{zz}^{eff} \\ \sigma_{\theta z}^{eff} \\ \sigma_{rz}^{eff} \\ \sigma_{r\theta}^{eff} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{eff} & C_{12}^{eff} & C_{13}^{eff} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{eff} & C_{11}^{eff} & C_{13}^{eff} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^{eff} & C_{13}^{eff} & C_{33}^{eff} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{eff} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^{eff} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{eff} - C_{12}^{eff}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{eff} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{eff} \\ \varepsilon_{zz}^{eff} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{eff} \\ 2\varepsilon_{rz}^{eff} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{eff} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

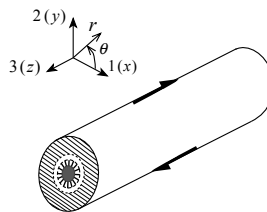
### 2.3.1 Определение модуля продольного сдвига

А. Постановка задачи чистого сдвига в направлении вдоль волокон в цилиндрических координатах для ортотропного многофазного среды.

Предполагается, что ось волокон направлена вдоль оси  $z$  (оси 3) в цилиндрической системой координат. Эффективный модуль продольного сдвига определяется из решения задачи чистого сдвига вдоль волокон (см. рис. 2.6). Нужно сначала найти общие поля перемещений ортотропных фаз, удовлетворяющие уравнение равновесия этой задачи. Согласно работам [45,61,93] на внешней границе ячейки задано поле перемещения вдоль волокон  $u_z(r, \theta)$ . При этом возникают только перемещения фаз вдоль волокон, которые зависят от радиуса и угла, а угловые и радиальные перемещения равны нулю:

$$u_z^{(i)}(r, \theta) \neq 0, \quad u_r^{(i)} = u_\theta^{(i)} = 0, \quad (2.20)$$

где  $i$  — фаза композита.



**Рис. 2.6** Задача чистого продольного сдвига.

Введем для простоты обозначение  $u_z(r, \theta) = u_z$  и по соотношениям деформации Коши (1.17) и (2.20) получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & 2\varepsilon_{\theta z} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, & 2\varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ \varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{r\theta} = 0.\end{aligned}\quad (2.21)$$

и с помощью закона Гука (1.19) вместе с соотношениями (2.21) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta z} &= G_{\theta z} 2\varepsilon_{\theta z} = & \sigma_{rz} &= G_{rz} 2\varepsilon_{rz} = \\ &= G_{\theta z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), & &= G_{rz} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).\end{aligned}\quad (2.22)$$

Подставив (2.22) в уравнение равновесия (1.18), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \left[ G_{rz} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( G_{\theta z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \right) \right] + \frac{1}{r} \left[ G_{rz} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right] + 0 &= 0 \\ \Rightarrow G_{rz} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} G_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} G_{\theta z} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} &= 0 \\ \Rightarrow r^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \lambda^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} &= 0 \\ \Rightarrow r^2 u_z''(r) + r u_z'(r) + \lambda^2 u_z''(\theta) &= 0.\end{aligned}\quad (2.23)$$

где  $\lambda = \sqrt{G_{\theta z}/G_{rz}}$ . Другую форму дифференциального уравнения (2.23) можно записать в виде

$$\begin{aligned}r^2 R''(r)T(\theta) + rR'(r)T(\theta) + \lambda^2 R(r)T''(\theta) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{-R(r)} &= \lambda^2 \frac{T''(\theta)}{T(\theta)},\end{aligned}\quad (2.24)$$

где общее решение этого уравнения имеет форму

$$u_z(r, \theta) = R(r)T(\theta) = u_z(r)u_z(\theta).$$

Теперь найдем форму решения для  $u_z(r)$ . Пусть правая часть уравнения (2.24) задается некоторой постоянной, т.е.  $T''(\theta)/T(\theta) = K$ , и тогда уравнение (2.24) имеет вид

$$\frac{r^2 R_z''(r) + r R_z'(r)}{-\lambda^2 R_z(r)} = K. \quad (2.25)$$

Пусть  $K = -1$  и поэтому, уравнение (2.25) принимает вид

$$r^2 R_z''(r) + r R_z'(r) - \lambda^2 R_z(r) = r^2 u_z''(r) + r u_z'(r) - \lambda^2 u_z(r) = 0. \quad (2.26)$$

Делая в (2.26) замену переменной

$$u_r = r^m, \quad u'_r = mr^{m-1}, \quad u''_r = m(m-1)r^{m-2},$$

приходим к характеристическому уравнению относительно  $m$ :

$$\begin{aligned} r^2 [m(m-1)r^{m-2}] + r [mr^{m-1}] - \lambda^2 r^m &= 0 \\ \Rightarrow m^2 - \lambda^2 &= 0 \\ \Rightarrow m_{1,2} &= \pm \lambda. \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (2.26) имеет вид

$$R(r) = u_r(r) = A_1 r^\lambda + A_2 r^{-\lambda}. \quad (2.27)$$

Далее ищем общую форму решения для  $u_\theta(r)$ . Аналогично пусть левая часть уравнения (2.24) равна  $-1$ , и поэтому, имеем

$$T''(\theta) + T(\theta) = 0, \quad (2.28)$$

и общую форму решения дифференциального уравнения (2.28) можно записать в виде

$$T(\theta) = u_z(\theta) = B_1 \cos \theta + B_2 \sin \theta. \quad (2.29)$$

Однако, на основе состояния деформирования ячейки под действием чистого продольного сдвига, константа  $B_2$  должна быть равна нулю и поэтому, решение (2.29) приводится к виду

$$T(\theta) = u_z(\theta) = B_1 \cos \theta. \quad (2.30)$$

Таким образом, на основании (2.27) и (2.30), имеем

$$\begin{aligned} u_z(r, \theta) &= (A_1 r^\lambda + A_2 r^{-\lambda}) B_1 \cos \theta = \\ &= (A_1 B_1 r^\lambda + A_2 B_1 r^{-\lambda}) \cos \theta. \end{aligned}$$

Итак, общими допустимыми полями перемещений ортотропных многофазных композита являются.

$$u_z^{(i)}(r, \theta) = (D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}}) \cos \theta, \quad (2.31)$$

где  $D_1^{(i)}, D_2^{(i)}$  — неизвестные константы, которые определяются из граничных условий; и  $\lambda_{(i)} = \sqrt{G_{\theta z}^{(i)} / G_{rz}^{(i)}}$  — материальная константа фазы.

Следовательно, используя соотношения Коши, можно записать допустимые поля деформаций ортотропных фаз в следующем виде

$$2\varepsilon_{\theta z}^{(i)}(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} \frac{1}{r^{\lambda_{(i)}}} \right) \cos \theta \right] =$$

$$= \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} \right) (-\sin \theta), \quad (2.32)$$

$$2\varepsilon_{rz}^{(i)}(r, \theta) = \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} \frac{1}{r^{\lambda_{(i)}}} \right) \cos \theta \right] =$$

$$= \left( \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + (-\lambda_{(i)}) D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} \right) \cos \theta, \quad (2.33)$$

и используя закон Гука для (2.32) и (2.33), допустимые поля напряжений ортотропных фаз примут вид

$$\sigma_{\theta z}^{(i)}(r, \theta) = G_{\theta z}^{(i)} 2\varepsilon_{\theta z}^{(i)} = -G_{\theta z}^{(i)} \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} \right) \sin \theta =$$

$$= -C_{44}^{(i)} \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} \right) \sin \theta, \quad (2.34)$$

$$\sigma_{rz}^{(i)}(r, \theta) = G_{rz}^{(i)} 2\varepsilon_{rz}^{(i)} = G_{rz}^{(i)} \left( \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + (-\lambda_{(i)}) D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} \right) \cos \theta =$$

$$= C_{55}^{(i)} \left( \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + (-\lambda_{(i)}) D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} \right) \cos \theta. \quad (2.35)$$

Видно, что в равенствах (2.34) и (2.35) тензоры модулей упругости  $G_{rz}$  и  $G_{\theta z}$  заменены индексами  $C_{55}$  и  $C_{44}$  соответственно.

В случае изотропных или трансверсально-изотропных сред с осью плоскости изотропии, направленной вдоль волокон материальная константа фаз равна

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{G_{\theta z}^{(i)} / G_{rz}^{(i)}} = \sqrt{C_{44}^{(i)} / C_{55}^{(i)}} = 1, \quad (2.36)$$

потому что в этом случае имеется равенство

$$G_{\theta z} = G_{rz} \text{ или } C_{44}^{(i)} = C_{55}^{(i)}. \quad (2.37)$$

Кроме того, соотношение (Б.5), данное в Приложении Б, действительно. Таким образом, с учетом (2.36), (2.37) и (Б.5), можем переписать (2.31), (2.32), (2.33), (2.34) и (2.35) следующим образом:

$$u_r^{(i)}(r, \theta) = \left( D_1^{(i)} r + D_2^{(i)} r^{-1} \right) \cos \theta, \quad (2.38)$$

$$2\varepsilon_{\theta z}^{(i)}(r, \theta) = -\left( D_1^{(i)} + D_2^{(i)} r^{-2} \right) \sin \theta, \quad (2.39)$$

$$2\varepsilon_{rz}^{(i)}(r, \theta) = \left( D_1^{(i)} - D_2^{(i)} r^{-2} \right) \cos \theta, \quad (2.40)$$



$$\sigma_{\theta z}^{(i)}(r, \theta) = -\mu_{23}^{(i)} \left( D_1^{(i)} + D_2^{(i)} r^{-2} \right) \sin \theta, \quad (2.41)$$

$$\sigma_{rz}^{(i)}(r, \theta) = \mu_{23}^{(i)} \left( D_1^{(i)} - D_2^{(i)} r^{-2} \right) \cos \theta, \quad (2.42)$$

Б. Методика получения эффективного модуля продольного сдвига. Рассмотрим вновь задачу чистого сдвига для слоистой структура и предположим что, в направлении вдоль ячейки на бесконечности задано поле перемещений  $u_z(r, \theta) = 2\varepsilon_0 r \cos \theta$ . Опять при этом возникают только допустимые перемещения вдоль волокон, которые имеют следующий вид

$$u_z^{(i)}(r, \theta) = \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} \right) \cos \theta, \quad (2.43)$$

где

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{44}^{(i)} / C_{55}^{(i)}}, \quad (2.44)$$

и для изотропных и трансверсально-изотропных фаз с осью симметрии, направленной вдоль оси волокна,  $\lambda_{(i)} = 1$ . Из равенств (2.34) и (2.35) соответствующие поля напряжений каждой фазы принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z}^{(i)}(r, \theta) &= -C_{44}^{(i)} \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} \right) \sin \theta, \\ \sigma_{rz}^{(i)}(r, \theta) &= C_{55}^{(i)} \left( \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} - \lambda_{(i)} D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Теперь определим поля перемещений и напряжений для эквивалентной гомогенной среды, которые соответствуют средам с трансверсально-изотропными свойствами с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси волокна. Из равенств (2.38), (2.41) и (2.42) имеем

$$u_z^{N+1}(r, \theta) = \left( D_1^{N+1} r + D_2^{N+1} r^{-1} \right) \cos \theta, \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z}^{N+1}(r, \theta) &= -\mu_{23}^{N+1} \left( D_1^{N+1} + D_2^{N+1} r^{-2} \right) \sin \theta, \\ \sigma_{rz}^{N+1}(r, \theta) &= \mu_{23}^{N+1} \left( D_1^{N+1} - D_2^{N+1} r^{-2} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Очевидно, что мы имеем девять неизвестных констант, состоящих из восьми неизвестных констант  $( D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_1^{N+1}$  и  $D_2^{N+1} )$  и одного неизвестного модуля — эффективного модуля продольного сдвига  $\mu_{23}^{N+1}$ .

Далее, чтобы найти все постоянные, задается условие несингулярности в центре волокна ( $r = 0$ ):

$$D_2^{(1)} = 0, \quad (2.48)$$

условие непрерывности на границах идеального контакта фаз:

$$u_z^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = u_z^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \quad \sigma_{rz}^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = \sigma_{rz}^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \quad (i = 1, 2, \dots, N); \quad (2.49)$$

внешнее граничное условие на бесконечности ( $r_{N+1} \rightarrow \infty$ ):

$$u_z^{N+1}(r_{N+1}) = 2\varepsilon_0 r_{N+1} \cos \theta, \quad (2.50)$$

где в микромеханике композитов величина  $\varepsilon_0$  часто принята единицей ( $\varepsilon_0 = 1$ ); и

условие энергетического взаимодействия по поверхности на контакте ( $r = r_N$ ):

$$\int_S \left( \sigma_{rz}^{N+1} u_z^{eff} - \sigma_{rz}^{eff} u_z^{N+1} \right)_{r=r_N} dS = 0. \quad (2.51)$$

Видно, что угловые поля напряжений не входят в интегральную формулу Эшелби (2.51), потому что угловые перемещения равны нулю. Сначала определим поля перемещений и напряжений эффективного композита в подынтегральной (2.51). Эти поля имеют те же формы поля перемещений и напряжений эквивалентной гомогенной среды:

$$u_z^{eff}(r, \theta) = \left( D_1^{eff} r + D_2^{eff} r^{-1} \right) \cos \theta, \quad (2.52)$$

$$\sigma_{\theta z}^{eff}(r, \theta) = -\mu_{23}^{eff} \left( D_1^{eff} + D_2^{eff} r^{-2} \right) \sin \theta, \quad (2.53)$$

$$\sigma_{rz}^{eff}(r, \theta) = \mu_{23}^{eff} \left( D_1^{eff} - D_2^{eff} r^{-2} \right) \cos \theta.$$

С помощью равенства (2.48), которое применимо также для эффективного композита где  $D_2^{eff} = 0$ <sup>12</sup>, (2.52) и (2.53) приводят к следующему виду

$$u_z^{eff}(r, \theta) = D_1^{eff} \cos \theta \quad (2.54)$$

$$\sigma_{\theta z}^{eff}(r, \theta) = -\mu_{23}^{eff} D_1^{eff} \sin \theta, \quad (2.55)$$

$$\sigma_{rz}^{eff}(r, \theta) = \mu_{23}^{eff} D_1^{eff} \cos \theta.$$

Видно, что на основании (2.50), которое применимо также для эффективного композита вместе с (2.54), неизвестная константа  $D_1^{eff}$  принимает вид

$$D_1^{eff} = 2\varepsilon_0. \quad (2.56)$$

<sup>12</sup> см. работах [35] на странице 88, и [45] на странице 30.

Таким образом, на основании (2.46), (2.47), (2.54), (2.55) и (2.56), формула (2.51) приводится к равенству

$$D_2^{N+1} = 0, \quad (2.57)$$

где длина ячейки считается равной  $2L$ . Доказательство (2.57) дано в приложении Ж.2. Далее, на основании (2.46), (2.50) и (2.57), можно записать величину  $D_1^{N+1}$  в виде

$$D_1^{N+1} = 2\varepsilon_0. \quad (2.58)$$

Теперь мы имеем пять неизвестных констант —  $D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$  и один искомый эффективный модуль продольного сдвига  $\mu_{23}^{N+1} = \mu_{23}^{eff}$ . Шесть неизвестных констант можно получить с помощью условий непрерывности перемещения и напряжения (2.49) на радиусах  $r_1, r_2, r_3 = r_N$ :

$$\begin{aligned} 1) \quad & D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}} - D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}} - D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}} = 0, \\ 2) \quad & D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}} + D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}} - D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}} - D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}} = 0, \\ 3) \quad & D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(3)}} + D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_{(3)}} - 2\varepsilon_0 r_3 = 0, \\ 4) \quad & C_{55}^{(1)} \lambda_{(1)} D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}-1} - C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}-1} + C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}-1} = 0, \\ 5) \quad & C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}-1} - C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}-1} - C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}-1} + C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}-1} = 0, \\ 6) \quad & C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(3)}-1} - C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_{(3)}-1} - 2\varepsilon_0 \mu_{23}^{N+1} = 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Видно, что из шестого уравнения (2.59) определяется эффективный объемный модуль продольного сдвига

$$\mu_{23}^{N+1} = \mu_{23}^{eff} = \frac{1}{2\varepsilon_0} C_{55}^{(3)} \left[ \lambda_{(3)} D_1^{(3)} r^{\lambda_{(3)}-1} + (-\lambda_{(3)}) D_2^{(3)} r^{-\lambda_{(3)}-1} \right] \cos \theta. \quad (2.60)$$

Таким образом, если обобщить результат (2.60) для многофазных композитов, то эффективный объемный модуль продольного сдвига имеет вид

$$\mu_{23}^{eff} = \frac{1}{2\varepsilon_0} C_{55}^{(N)} \left[ \lambda_{(N)} D_1^{(N)} r^{\lambda_{(N)}-1} + (-\lambda_{(N)}) D_2^{(N)} r^{-\lambda_{(N)}-1} \right] \cos \theta, \quad (2.61)$$

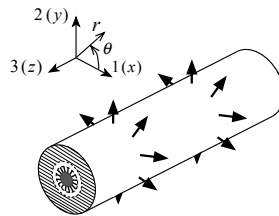
где

$$\lambda_{(N)} = \sqrt{C_{44}^{(N)} / C_{55}^{(N)}}. \quad (2.62)$$

### 2.3.2 Определение объемного модуля плоской деформации

А. Постановка задачи всесторонней нагрузки (растяжение - сжатие) поперек волокон в цилиндрических координатах для ортотропной многофазной среды. Предполагается, что ось волокон направлена вдоль оси  $z$  (оси 3) в цилиндрической системе координат. Эффективный объемный модуль плоской деформации определяется из решения в задачи плоской деформации и всестороннего нагружения (растяжение - сжатие) поперек волокон (см. рис. 2.7). Согласно работ [45,61,93], на внешней границе ячейки задано радиальное перемещение поперек волокон  $u_r(r)$ . При этом состояние деформирования ячейки будет осесимметричным и в фазах ячейки возникают только радиальные перемещения. Т.е. угловые перемещения  $u_\theta$  равны нулю, и также перемещения вдоль волокон  $u_z$  равны нулю из-за плоской деформации и поэтому, радиальные перемещения фаз зависят только от радиуса:

$$u_r^{(i)}(r) \neq 0, \quad u_\theta^{(i)} = u_z^{(i)} = 0. \quad (2.63)$$



**Рис. 2.7** Задача всестороннего (растяжение - сжатие) нагружения.

Используя соотношение малых деформации (1.17), имеем

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}. \quad (2.64)$$

Подставив (2.64) в уравнение закона Гука (1.19), находим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{rr} \varepsilon_{rr} + C_{r\theta} \varepsilon_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\theta} &= C_{r\theta} \varepsilon_{rr} + C_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} \\ &= C_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta} \frac{u_r}{r}, & &= C_{r\theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\theta\theta} \frac{u_r}{r}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

При помощи уравнения равновесия (1.18) вместе с равенством (2.65), получим дифференциальное уравнение второго ранга

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial r} \left[ C_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta} \frac{u_r}{r} \right] + \frac{1}{r} \left[ C_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta} \frac{u_r}{r} - \left( C_{r\theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\theta\theta} \frac{u_r}{r} \right) \right] = 0 \\
& \Rightarrow C_{rr} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + C_{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_r}{r} \right) + \frac{C_{rr}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta} \frac{u_r}{r^2} - \frac{C_{r\theta}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - C_{\theta\theta} \frac{u_r}{r^2} = 0 \\
& \Rightarrow C_{rr} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{C_{rr}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - C_{\theta\theta} \frac{u_r}{r^2} = 0 \\
& \Rightarrow r^2 u_r'' + r u_r' - \lambda^2 u_r = 0.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

где  $\lambda = \sqrt{C_{\theta\theta}/C_{rr}}$ . Также как и ранее, делая в (2.66) замену переменной

$$u_r = r^m, \quad u_r' = m r^{m-1}, \quad u_r'' = m(m-1)r^{m-2},$$

имеем

$$\begin{aligned}
& r^2 [m(m-1)r^{m-2}] + r [m r^{m-1}] - \lambda^2 r^m = 0 \\
& \Rightarrow m^2 - \lambda^2 = 0 \\
& \Rightarrow m_{1,2} = \pm \lambda.
\end{aligned}$$

Таким образом, допустимые общие поля перемещений ортотропных фаз в композите принимают вид

$$u_r^{(i)}(r) = D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}}, \tag{2.67}$$

где  $D_1^{(i)}, D_2^{(i)}$  — неизвестные константы, которые определяются из граничных условий; и  $\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{\theta\theta}^{(i)}/C_{rr}^{(i)}}$  — материальная константа. Следовательно, с помощью соотношения Коши соответствующие поля деформаций ортотропных фаз имеют вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr}^{(i)}(r) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} \right) = \\
&= \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} - \lambda_{(i)} D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1},
\end{aligned} \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= \frac{1}{r} \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} \right) = \\
&= D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1},
\end{aligned} \tag{2.69}$$

и подставив (2.68) и (2.69) в уравнение Гука, для полей напряжений ортотропных фаз получим следующий вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(i)}(r) &= C_{rr}^{(i)} \left[ \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} - \lambda_{(i)} D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} \right] + C_{r\theta}^{(i)} \left[ D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} \right] = \\
&= D_1^{(i)} (\lambda_{(i)} C_{rr}^{(i)} + C_{r\theta}^{(i)}) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} (-\lambda_{(i)} C_{rr}^{(i)} + C_{r\theta}^{(i)}) r^{-\lambda_{(i)}-1} = \\
&= D_1^{(i)} (\lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)}) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} (-\lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)}) r^{-\lambda_{(i)}-1},
\end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= C_{r\theta}^{(i)} \left[ \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} - \lambda_{(i)} D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} \right] + C_{\theta\theta}^{(i)} \left[ D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} \right] = \\
&= D_1^{(i)} (\lambda_{(i)} C_{r\theta}^{(i)} + C_{\theta\theta}^{(i)}) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} (-\lambda_{(i)} C_{r\theta}^{(i)} + C_{\theta\theta}^{(i)}) r^{-\lambda_{(i)}-1} = \\
&= D_1^{(i)} (\lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)}) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} (-\lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)}) r^{-\lambda_{(i)}-1}.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Видно, что в равенствах (2.70) и (2.71) индексы тензора модулей упругости  $r$  и  $\theta$  заменены индексами 1 и 2 соответственно.

В случае изотропных или трансверсально-изотропных сред с осью плоскости изотропии, направленной вдоль волокон материальная константа равна

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{\theta\theta}^{(i)} / C_{rr}^{(i)}} = \sqrt{C_{22}^{(i)} / C_{11}^{(i)}} = 1, \tag{2.72}$$

так как в этом случае имеется равенство

$$C_{rr} = C_{\theta\theta} \text{ или } C_{11}^{(i)} = C_{22}^{(i)}. \tag{2.73}$$

Кроме того, соотношения (Б.4) и (Б.6), данные в Приложении Б действительны. Таким образом, с учетом (2.72), (2.73), (Б.4) и (Б.6), можем переписать (2.67), (2.68), (2.69), (2.70) и (2.71) следующим образом:

$$u_r^{(i)}(r) = D_1^{(i)} r + D_2^{(i)} r^{-1}, \tag{2.74}$$

$$\varepsilon_{rr}^{(i)}(r) = D_1^{(i)} - D_2^{(i)} r^{-2}, \tag{2.75}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) = D_1^{(i)} + D_2^{(i)} r^{-2}, \tag{2.76}$$

$$\sigma_{rr}^{(i)}(r) = 2K_{12}^{(i)} D_1^{(i)} - 2\mu_{12}^{(i)} D_2^{(i)} r^{-2}, \tag{2.77}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r) = 2K_{12}^{(i)} D_1^{(i)} + 2\mu_{12}^{(i)} D_2^{(i)} r^{-2}. \tag{2.78}$$

#### Б. Методика получения эффективного объемного модуля плоской деформации.

Рассмотрим вновь задачу всестороннего (растяжение - сжатие) и предположим, что поперек ячейки задано поле перемещений  $u_r(r) = \varepsilon_0 r$  на бесконечности. При этом возникают только радиальные перемещения, которые имеют следующий вид

$$u_r^{(i)}(r) = D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}}, \tag{2.79}$$

где

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{22}^{(i)} / C_{11}^{(i)}}, \quad (2.80)$$

и для изотропных и трансверсально-изотропных фаз с осью симметрии, направленной вдоль оси волокна,  $\lambda_{(i)} = 1$ . Из равенств (2.70) и (2.71)

соответствующие поля напряжений каждой фазы принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)}(r) &= D_1^{(i)}(\lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)})r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)}(-\lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)})r^{-\lambda_{(i)}-1}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= D_1^{(i)}(\lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)})r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)}(-\lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)})r^{-\lambda_{(i)}-1}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Теперь определим поля перемещений и напряжений для эквивалентной гомогенной среды, которые соответствуют средам с трансверсально-изотропными свойствами с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси волокна. Из равенств (2.74), (2.77) и (2.78) имеем

$$u_r^{N+1}(r) = D_1^{N+1}r + D_2^{N+1}r^{-1} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{N+1}(r) &= 2K_{12}^{N+1}D_1^{N+1} - 2\mu_{12}^{N+1}D_2^{N+1}r^{-2}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{N+1}(r) &= 2K_{12}^{N+1}D_1^{N+1} + 2\mu_{12}^{N+1}D_2^{N+1}r^{-2}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Очевидно, что мы имеем десять неизвестных постоянных, состоящих из восьми неизвестных констант ( $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_1^{N+1}$  и  $D_2^{N+1}$ ) и двух неизвестных модулей — эффективный объемный модуль плоской деформации  $K_{12}^{N+1}$  и эффективный модуль плоского сдвига  $\mu_{12}^{N+1}$ .

Далее чтобы получить все переменные, задается условие несингулярности в центре волокна ( $r = 0$ ):

$$D_2^{(1)} = 0; \quad (2.84)$$

условия непрерывности на границах идеального контакта фаз:

$$u_r^{(i)}(r_{(i)}) = u_r^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad \sigma_{rr}^{(i)}(r_{(i)}) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad (i = 1, 2, \dots, N); \quad (2.85)$$

внешнее граничное условие на бесконечности ( $r_{N+1} \rightarrow \infty$ ):

$$u_r^{N+1}(r_{N+1}) = \varepsilon_0 r_{N+1}, \quad (2.86)$$

и условие энергетической поверхности на контакте ( $r = r_N$ ):

$$\int_S (\sigma_{rr}^{N+1} u_r^{eff} - \sigma_{rr}^{eff} u_r^{N+1})_{r=r_N} dS = 0. \quad (2.87)$$

Опять, угловые поля напряжений не входят в интегральную формулу Эшелби (2.87). Важно отметить, что из равенств (2.84) — (2.87) мы имеем только девять уравнений. Однако, будет показано, что неизвестный модуль плоского сдвига будет определяться из интегрального соотношения (2.87).

Как и ранее, определим поля перемещений и напряжений эффективного композита в соотношении (2.87). Эти поля имеют те же формы поля перемещений и напряжений эквивалентной гомогенной среды:

$$u_r^{eff}(r) = D_1^{eff} r + D_2^{eff} r^{-1}, \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{eff}(r) &= 2K_{12}^{eff} D_1^{eff} - 2\mu_{12}^{eff} D_2^{eff} r^{-2}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{eff}(r) &= 2K_{12}^{eff} D_1^{eff} + 2\mu_{12}^{eff} D_2^{eff} r^{-2}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

С помощью равенства (2.84), которое применимо также для эффективного композита, где  $D_2^{eff} = 0$ , приводят (2.88) и (2.89) к следующему виду

$$u_r^{eff}(r) = D_1^{eff} r, \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{eff}(r) &= 2K_{12}^{eff} D_1^{eff}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{eff}(r) &= 2K_{12}^{eff} D_1^{eff}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Видно, что на основании (2.86), которое применимо также для эффективного композита и в (2.90), неизвестная константа  $D_1^{eff}$  принимает вид

$$D_1^{eff} = \varepsilon_0. \quad (2.92)$$

Таким образом, на основании (2.82), (2.83), (2.90), (2.91) и (2.92), формула (2.87) приводит к равенству

$$D_2^{N+1} = 0. \quad (2.93)$$

Доказательство (2.93) дано в Приложении Ж.1. В равенстве (2.93) можно увидеть, что эффективный модуль плоского сдвига в (2.83) находится из системы уравнений. Далее, на основании (2.82), (2.86) и (2.93), можно записать величину  $D_1^{N+1}$  в виде

$$D_1^{N+1} = \varepsilon_0. \quad (2.94)$$

Теперь мы имеем пять неизвестных констант —  $D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$  и один искомый эффективный объемный модуль плоской деформации  $K_{12}^{N+1} = K_{12}^{eff}$ .



Шесть неизвестных констант можно получить с помощью условий непрерывности перемещения и напряжения (2.85) на радиусах  $r_1, r_2, r_3 = r_N$  :

$$\begin{aligned}
1) \quad & D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}} - D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}} - D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}} = 0, \\
2) \quad & D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}} + D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}} - D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}} - D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}} = 0, \\
3) \quad & D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(3)}} + D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_{(3)}} - \varepsilon_0 r_3 = 0, \\
4) \quad & D_1^{(1)} (\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) r_1^{\lambda_{(1)}-1} - \\
& \quad - D_1^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_1^{\lambda_{(2)}-1} - D_2^{(2)} (-\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_1^{-\lambda_{(2)}-1} = 0, \\
5) \quad & D_1^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_2^{\lambda_{(2)}-1} + D_2^{(2)} (-\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_2^{-\lambda_{(2)}-1} - \\
& \quad - D_1^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_2^{\lambda_{(3)}-1} - D_2^{(3)} (-\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_2^{-\lambda_{(3)}-1} = 0, \\
6) \quad & D_1^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_3^{\lambda_{(3)}-1} + D_2^{(3)} (-\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_3^{-\lambda_{(3)}-1} - 2\varepsilon_0 K_{12}^{N+1} = 0.
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Видно, что опять из шестого уравнения (2.95) определяется объемный модуль плоской деформации

$$K_{12}^{N+1} = K_{12}^{eff} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \left[ D_1^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_3^{\lambda_{(3)}-1} + D_2^{(3)} (-\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_3^{-\lambda_{(3)}-1} \right]. \tag{2.96}$$

Таким образом, если обобщаем результат (2.96) для многофазных композитов, то эффективный объемный модуль плоской деформации имеет вид

$$K_{12}^{eff} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \left[ D_1^{(N)} (\lambda_{(N)} C_{11}^{(N)} + C_{12}^{(N)}) r^{\lambda_{(N)}-1} + D_2^{(N)} (-\lambda_{(N)} C_{11}^{(N)} + C_{12}^{(N)}) r^{-\lambda_{(N)}-1} \right], \tag{2.97}$$

где

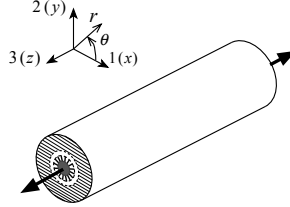
$$\lambda_{(N)} = \sqrt{C_{22}^{(N)} / C_{11}^{(N)}}. \tag{2.98}$$

### 2.3.3 Определение продольного модуля Юнга и коэффициента Пуассона

А. Постановка задачи одноосного растяжения вдоль волокон в цилиндрических координатах для ортотропного многофазного среды. Предполагается, что ось волокон направлена вдоль оси  $z$  (оси 3) в цилиндрической системе координат. Эффективный продольный модуль Юнга и коэффициент Пуассона определяются из решения задачи одноосного растяжения вдоль волокон (см. рис. 2.8). Согласно работам [45,61,93] вне ячейки задано поле перемещения вдоль волокон  $u_z(z) = \varepsilon_0 z$ .

При этом возникают перемещения вдоль волокон и радиальные перемещения, а угловые перемещения равны нулю:

$$u_r^{(i)}(r) \neq 0, \quad u_z^{(i)}(z) = \varepsilon_0 z, \quad u_\theta^{(i)} = 0. \quad (2.99)$$



**Рис. 2.8** Задача одноосного растяжения (сжатия).

По соотношениям деформации Коши (1.17) и (2.99) находим

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_0, \quad (2.100)$$

и с помощью закона Гука (1.19) вместе с соотношениями (2.100) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{rr} \varepsilon_{rr} + C_{r\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + C_{rz} \varepsilon_{zz} = \\ &= C_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta} \frac{u_r}{r} + C_{rz} \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= C_{r\theta} \varepsilon_{rr} + C_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + C_{\theta z} \varepsilon_{zz} = \\ &= C_{r\theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\theta\theta} \frac{u_r}{r} + C_{\theta z} \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= C_{rz} \varepsilon_{rr} + C_{\theta z} \varepsilon_{\theta\theta} + C_{zz} \varepsilon_{zz} = \\ &= C_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\theta z} \frac{u_r}{r} + C_{zz} \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (2.103)$$

При помощи уравнения равновесия (1.18) вместе с равенствами (2.101), (2.102) и (2.103), получается дифференциальное уравнение второго ранга в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r} \left[ C_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta} \frac{u_r}{r} + C_{rz} \varepsilon_0 \right] + \frac{1}{r} \left[ C_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta} \frac{u_r}{r} + C_{rz} \varepsilon_0 \right] - \frac{1}{r} \left[ C_{r\theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\theta\theta} \frac{u_r}{r} + C_{\theta z} \varepsilon_0 \right] = 0 \\ \Rightarrow &C_{rr} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + C_{r\theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{C_{\theta\theta} u_r}{r} + \frac{(C_{rz} - C_{\theta z})}{r} \varepsilon_0 = 0 \\ \Rightarrow &r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{C_{\theta\theta}}{C_{rr}} u_r + \frac{(C_{rz} - C_{\theta z})}{C_{rr}} \varepsilon_0 r = 0 \\ \Rightarrow &r^2 u_r''(r) + r u_r'(r) + \lambda^2 u_r + \beta \varepsilon_0 r = 0, \end{aligned} \quad (2.104)$$

где  $\lambda = \sqrt{C_{\theta\theta}/C_{rr}}$  и  $\beta = \frac{C_{rz} - C_{\theta z}}{C_{rr}}$ . Можно записать (2.104) в виде

$$r^2 u_r''(r) + r u_r'(r) + \lambda^2 u_r = -\beta \varepsilon_0 r. \quad (2.105)$$

Форма решения дифференциального уравнения (2.105) имеет вид

$$u_r(r) = u_r^{(h)}(r) + u_r^{(p)}(r), \quad (2.106)$$

где  $u_r^{(h)}$  — однородное решение левой части дифференциального уравнения (2.105), которое равно нулю;  $u_r^{(p)}$  — неоднородное решение уравнения (2.105).

Форма однородного решения (2.106) уже дана в равенстве (2.67). Теперь найдем общее неоднородное решение с помощью следующей формулы

$$u_{r2}(r) = -u_A \int \frac{u_B S}{W} dr + u_B \int \frac{u_A S}{W} dr, \quad (2.107)$$

где  $u_A(r), u_B(r)$  — компоненты однородного решения, например,  $u_r^{(1)} = Au_A(r) + Bu_B(r)$ , и поэтому, на основании (2.67) имеем

$$\begin{aligned} u_A(r) &= r^\lambda, & u_B(r) &= r^{-\lambda}, \\ u_A'(r) &= \lambda r^{\lambda-1}, & u_B'(r) &= -\lambda r^{-\lambda-1}; \end{aligned} \quad (2.108)$$

и  $S$  — правая часть уравнения (2.105)

$$S = \beta \varepsilon_0 r = \left( \frac{C_{rz} - C_{\theta z}}{C_{rr}} \right) \varepsilon_0 r; \quad (2.109)$$

и  $W$  — Формула Вронскиена (Wronskian)

$$W(u_A, u_B) = \begin{vmatrix} u_A & u_B \\ u_A' & u_B' \end{vmatrix} = u_A u_B' - u_B u_A' = r^\lambda (-\lambda r^{-\lambda-1}) - r^{-\lambda} (\lambda r^{\lambda-1}) = -2\lambda r^{-1}. \quad (2.110)$$

Подставив (2.108), (2.109) и (2.110) в формулу (2.107) получаем

$$u_r^{(p)}(r) = v \varepsilon_0 r, \quad (2.111)$$

где  $v = \left( \frac{C_{rz} - C_{\theta z}}{C_{\theta\theta} - C_{rr}} \right)$ . Таким образом, с учетом (2.67) и (2.111) поля перемещений

ортотропных фаз в этой задаче принимают вид

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} r^{\lambda(i)} + D_2^{(i)} r^{-\lambda(i)} + v^{(i)} \varepsilon_0 r, \\ u_z^{(i)}(z) &= \varepsilon_0 z. \end{aligned} \quad (2.112)$$

где  $D_1^{(i)}, D_2^{(i)}$  — неизвестные константы, которые определяются из граничных условий;  $\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{\theta\theta}^{(i)}/C_{rr}^{(i)}}$  и  $v^{(i)} = \left( \frac{C_{rz}^{(i)} - C_{\theta z}^{(i)}}{C_{\theta\theta}^{(i)} - C_{rr}^{(i)}} \right)$  — константы. Следовательно,

используя соотношения малых деформации, можно записать поля деформаций ортотропных фаз в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(i)}(r) &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} + v^{(i)} \varepsilon_0 r \right] = \\ &= \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + (-\lambda_{(i)}) D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} + v^{(i)} \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= \frac{u_r}{r} = \frac{1}{r} \left[ D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} + v^{(i)} \varepsilon_0 r \right] = \\ &= D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} + v^{(i)} \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (2.114)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(i)}(r) = \varepsilon_0. \quad (2.115)$$

и с уравнением законом Гука для полями напряжений ортотропных фаз получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} \left( \lambda_{(i)} C_{rr}^{(i)} + C_{r\theta}^{(i)} \right) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} \left( -\lambda_{(i)} C_{rr}^{(i)} + C_{r\theta}^{(i)} \right) r^{-\lambda_{(i)}-1} + \\ &+ \left( C_{rr}^{(i)} + C_{r\theta}^{(i)} \right) v^{(i)} \varepsilon_0 + C_{rz}^{(i)} \varepsilon_0 = \\ &= D_1^{(i)} \left( \lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)} \right) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} \left( -\lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)} \right) r^{-\lambda_{(i)}-1} + \\ &+ \left( C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)} \right) v^{(i)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(i)} \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} \left( \lambda_{(i)} C_{r\theta}^{(i)} + C_{\theta\theta}^{(i)} \right) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} \left( -\lambda_{(i)} C_{r\theta}^{(i)} + C_{\theta\theta}^{(i)} \right) r^{-\lambda_{(i)}-1} + \\ &+ \left( C_{r\theta}^{(i)} + C_{\theta\theta}^{(i)} \right) v^{(i)} \varepsilon_0 + C_{\theta z}^{(i)} \varepsilon_0 \\ &= D_1^{(i)} \left( \lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)} \right) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} \left( -\lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)} \right) r^{-\lambda_{(i)}-1} + \\ &+ \left( C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)} \right) v^{(i)} \varepsilon_0 + C_{23}^{(i)} \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} \left( \lambda_{(i)} C_{rz}^{(i)} + C_{\theta z}^{(i)} \right) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} \left( -\lambda_{(i)} C_{rz}^{(i)} + C_{\theta z}^{(i)} \right) r^{-\lambda_{(i)}-1} + \\ &+ \left( C_{rz}^{(i)} + C_{\theta z}^{(i)} \right) v^{(i)} \varepsilon_0 + C_{zz}^{(i)} \varepsilon_0 = \\ &= D_1^{(i)} \left( \lambda_{(i)} C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)} \right) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} \left( -\lambda_{(i)} C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)} \right) r^{-\lambda_{(i)}-1} + \\ &+ \left( C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)} \right) v^{(i)} \varepsilon_0 + C_{33}^{(i)} \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (2.118)$$

В случае изотропных или трансверсально-изотропных сред с осью плоскости изотропии, направленной вдоль волокон материальные константы равны

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{G_{\theta\theta}^{(i)} / G_{rr}^{(i)}} = \sqrt{C_{22}^{(i)} / C_{11}^{(i)}} = 1, \quad (2.119)$$

$$\mathbf{v}^{(i)} = \begin{pmatrix} \frac{C_{rz}^{(i)} - C_{\theta z}^{(i)}}{C_{\theta\theta}^{(i)} - C_{rr}^{(i)}} \\ \frac{C_{13}^{(i)} - C_{23}^{(i)}}{C_{22}^{(i)} - C_{11}^{(i)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.120)$$

так как в этом случае имеются равенства (2.73) и

$$C_{rz}^{(i)} = C_{\theta z}^{(i)} \text{ или } C_{13}^{(i)} = C_{23}^{(i)}. \quad (2.121)$$

Кроме того, соотношения (Б.4), (Б.6) и (Б.7), данные в Приложении Б действительны. Таким образом, с учетом (2.73), (2.119), (2.120), (2.121), (Б.4), (Б.5) и (Б.7), можем переписать (2.112), (2.113), (2.114), (2.115), (2.116), (2.117) и (2.118) в следующем виде:

$$u_r^{(i)}(r) = D_1^{(i)} r + D_2^{(i)} r^{-1}. \quad (2.122)$$

$$\varepsilon_{rr}^{(i)}(r) = D_1^{(i)} - D_2^{(i)} r^{-2}. \quad (2.123)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) = D_1^{(i)} + D_2^{(i)} r^{-2}. \quad (2.124)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(i)}(r) = \varepsilon_0, \quad (2.125)$$

$$\sigma_{rr}^{(i)}(r) = 2K_{12}^{(i)} D_1^{(i)} - 2\mu_{12}^{(i)} D_2^{(i)} r^{-2} + 2K_{12}^{(i)} \nu_{31}^{(i)} \varepsilon_0, \quad (2.126)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r) = 2K_{12}^{(i)} D_1^{(i)} + 2\mu_{12}^{(i)} D_2^{(i)} r^{-2} + 2K_{12}^{(i)} \nu_{31}^{(i)} \varepsilon_0, \quad (2.127)$$

$$\sigma_{zz}^{(i)}(r) = 4K_{12}^{(i)} \nu_{31}^{(i)} D_1^{(i)} - 4K_{12}^{(i)} (\nu_{31}^{(i)})^2 \varepsilon_0 + E_{33}^{(i)} \varepsilon_0. \quad (2.128)$$

Б. Методика получения эффективных продольного модуля Юнга и коэффициента Пуассона. В задаче об одноосном растяжении вдоль волокон предположим что, в направлении вдоль ячейки задано поле перемещений  $u_z(z) = \varepsilon_0 z$  вне ячейки. При этом возникают радиальные перемещения и перемещения вдоль волокон (см. Приложение И), которые имеют следующий вид

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} + \mathbf{v}^{(i)} \varepsilon_0 r, \\ u_z^{(i)}(z) &= \varepsilon_0 z, \end{aligned} \quad (2.129)$$

где

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{22}^{(i)} / C_{11}^{(i)}},$$

$$\nu^{(i)} = \frac{C_{13}^{(i)} - C_{23}^{(i)}}{C_{22}^{(i)} - C_{11}^{(i)}}. \quad (2.130)$$

и для изотропных и трансверсально-изотропных фаз с осью симметрии, направленной вдоль оси волокна,  $\lambda_{(i)} = 1$  и  $\nu^{(i)} = 0$ . Из равенств (2.116), (2.117) и (2.118) соответствующие поля напряжений каждой фазы принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} \left( \lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)} \right) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} \left( -\lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)} \right) r^{-\lambda_{(i)}-1} + \\ &\quad + \left( C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)} \right) \nu^{(i)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(i)} \varepsilon_0, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} \left( \lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)} \right) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} \left( -\lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)} \right) r^{-\lambda_{(i)}-1} + \\ &\quad + \left( C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)} \right) \nu^{(i)} \varepsilon_0 + C_{23}^{(i)} \varepsilon_0, \\ \sigma_{zz}^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} \left( \lambda_{(i)} C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)} \right) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} \left( -\lambda_{(i)} C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)} \right) r^{-\lambda_{(i)}-1} + \\ &\quad + \left( C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)} \right) \nu^{(i)} \varepsilon_0 + C_{33}^{(i)} \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Теперь определим поля перемещений и напряжений для эквивалентной гомогенной среды, которые соответствуют средам с трансверсально-изотропными свойствами с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси волокна. Из равенств (2.122), (2.126), (2.127) и (2.128) имеем

$$\begin{aligned} u_r^{N+1}(r) &= D_1^{N+1} r + D_2^{N+1} r^{-1}, & u_z^{N+1}(z) &= \varepsilon_0 z, \\ \sigma_{rr}^{N+1}(r) &= 2K_{12}^{N+1} D_1^{N+1} - 2\mu_{12}^{N+1} D_2^{N+1} r^{-2} + 2K_{12}^{N+1} \nu_{31}^{N+1} \varepsilon_0, \\ \sigma_{\theta\theta}^{N+1}(r) &= 2K_{12}^{N+1} D_1^{N+1} + 2\mu_{12}^{N+1} D_2^{N+1} r^{-2} + 2K_{12}^{N+1} \nu_{31}^{N+1} \varepsilon_0, \\ \sigma_{zz}^{N+1}(r) &= 4K_{12}^{N+1} \nu_{31}^{N+1} D_1^{N+1} + 4K_{12}^{N+1} \left( \nu_{31}^{N+1} \right)^2 \varepsilon_0 + E_{33}^{N+1} \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Очевидно, что мы имеем двенадцать неизвестных постоянных, состоящих из восьми неизвестных констант ( $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_1^{N+1}$  и  $D_2^{N+1}$ ) и четырех неизвестных модулей —  $K_{12}^{N+1}, \mu_{12}^{N+1}, \nu_{31}^{N+1}$  и  $E_{33}^{N+1}$ . Будет показано, что все эти неизвестные эффективные модули (кроме коэффициента Пуассона) не будут входить в систему алгебраических уравнений при получении этих неизвестных констант.

Чтобы получить неизвестные константы, задается условие несингулярности в центре волокна ( $r = 0$ ):

$$D_2^{(1)} = 0, \quad (2.134)$$

условия непрерывности на границах идеального контакта фаз:

$$u_r^{(i)}(r_{(i)}) = u_r^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad \sigma_{rr}^{(i)}(r_{(i)}) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad (i = 1, 2, \dots, N); \quad (2.135)$$

внешнее граничное условие на бесконечности ( $r_{N+1} \rightarrow \infty$ ):

$$\sigma_{rr}^{N+1}(r_{N+1}) = 0; \quad (2.136)$$

и также условие энергетической поверхности на контакте ( $r = r_N$ ):

$$\int_S (\sigma_{zz}^{N+1} u_z^{eff} - \sigma_{zz}^{eff} u_z^{N+1})_{r=r_N} dS = 0. \quad (2.137)$$

Теперь определяем поля перемещений и напряжений эффективного композита в виде

$$u_r^{eff}(r) = D_1^{eff} r + D_2^{eff} r^{-1}, \quad u_z^{eff}(z) = \varepsilon_0 z, \quad (2.138)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{eff}(r) &= 2K_{12}^{eff} D_1^{eff} - 2\mu_{12}^{eff} D_2^{eff} r^{-2} + 2K_{12}^{eff} \nu_{31}^{eff} \varepsilon_0, \\ \sigma_{\theta\theta}^{eff}(r) &= 2K_{12}^{eff} D_1^{eff} + 2\mu_{12}^{eff} D_2^{eff} r^{-2} + 2K_{12}^{eff} \nu_{31}^{eff} \varepsilon_0, \\ \sigma_{zz}^{eff}(r) &= 4K_{12}^{eff} \nu_{31}^{eff} D_1^{eff} + 4K_{12}^{eff} (\nu_{31}^{eff})^2 \varepsilon_0 + E_{33}^{eff} \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (2.139)$$

На основании (2.134), которое применимо также для эффективного композита где  $D_2^{eff} = 0$ , уравнения (2.138) и (2.139) приводят к виду

$$u_r^{eff}(r) = D_1^{eff} r, \quad u_z^{eff}(z) = \varepsilon_0 z, \quad (2.140)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{eff}(r) &= 2K_{12}^{eff} D_1^{eff} + 2K_{12}^{eff} \nu_{31}^{eff} \varepsilon_0, \\ \sigma_{\theta\theta}^{eff}(r) &= 2K_{12}^{eff} D_1^{eff} + 2K_{12}^{eff} \nu_{31}^{eff} \varepsilon_0, \\ \sigma_{zz}^{eff}(r) &= 4K_{12}^{eff} \nu_{31}^{eff} D_1^{eff} + 4K_{12}^{eff} (\nu_{31}^{eff})^2 \varepsilon_0 + E_{33}^{eff} \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Далее, с помощью равенства (2.136), которое применимо также для эффективного композита неизвестный констант  $D_1^{eff}$  принимает вид

$$D_1^{eff} = -\nu_{31}^{eff} \varepsilon_0. \quad (2.142)$$

Используя (2.132), (2.133), (2.140), (2.141) и (2.142), формула (2.137) дает

$$D_1^{N+1} = -\nu_{31}^{N+1} \varepsilon_0. \quad (2.143)$$

На основании уравнений (2.133), (2.136) и (2.143) имеем

$$D_2^{N+1} = 0. \quad (2.144)$$

Таким образом, шесть неизвестных констант ( $D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$  и  $v_{31}^{N+1}$ ) можно решить с помощью условий непрерывности перемещения и напряжения (2.135) на радиусах  $r_1, r_2, r_3 = r_N$ :

$$\begin{aligned}
1) \quad & D_1^{(1)} r_1^{\lambda(1)} + v^{(1)} \varepsilon_0 r_1 - D_1^{(2)} r_1^{\lambda(2)} - D_2^{(2)} r_1^{-\lambda(2)} - v^{(2)} \varepsilon_0 r_1 = 0, \\
2) \quad & D_1^{(2)} r_2^{\lambda(2)} + D_2^{(2)} r_2^{-\lambda(2)} + v^{(2)} \varepsilon_0 r_2 - D_1^{(3)} r_2^{\lambda(3)} - D_2^{(3)} r_2^{-\lambda(3)} - v^{(3)} \varepsilon_0 r_2 = 0, \\
3) \quad & D_1^{(3)} r_3^{\lambda(3)} + D_2^{(3)} r_3^{-\lambda(3)} + v^{(3)} \varepsilon_0 r_3 = -v_{31}^{N+1} \varepsilon_0 r_3 \\
4) \quad & D_1^{(1)} \left( \lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)} \right) r_1^{\lambda(1)-1} + \left( C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)} \right) v^{(1)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(1)} \varepsilon_0 - \\
& - D_1^{(2)} \left( \lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)} \right) r_1^{\lambda(2)-1} - D_2^{(2)} \left( -\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)} \right) r_1^{-\lambda(2)-1} - \\
& - \left( C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)} \right) v^{(2)} \varepsilon_0 - C_{13}^{(2)} \varepsilon_0 = 0, \\
5) \quad & D_1^{(2)} \left( \lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)} \right) r_2^{\lambda(2)-1} + D_2^{(2)} \left( -\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)} \right) r_2^{-\lambda(2)-1} \\
& + \left( C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)} \right) v^{(2)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(2)} \varepsilon_0 - \\
& - D_1^{(3)} \left( \lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} \right) r_2^{\lambda(3)-1} - D_2^{(3)} \left( -\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} \right) r_2^{-\lambda(3)-1} - \\
& - \left( C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} \right) v^{(3)} \varepsilon_0 - C_{13}^{(3)} \varepsilon_0 = 0, \\
6) \quad & D_1^{(3)} \left( \lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} \right) r_3^{\lambda(3)-1} + D_2^{(3)} \left( -\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} \right) r_3^{-\lambda(3)-1} + \\
& + \left( C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} \right) v^{(3)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(3)} \varepsilon_0 = 0.
\end{aligned} \tag{2.145}$$

**Коэффициент Пуассона вдоль волокон** определяется из третьего уравнения (2.145) как отношение поперечной эффективной деформации к продольной при растяжении вдоль волокон на границе  $r_3$

$$v_{31}^{N+1} = v_{31}^{eff} = -\frac{1}{\varepsilon_0 r_3} \left( D_1^{(3)} r_3^{\lambda(3)} + D_2^{(3)} r_3^{-\lambda(3)} + v^{(3)} \varepsilon_0 r_3 \right). \tag{2.146}$$

Для многофазных композитов (2.146) приводим к виду:

$$v_{31}^{eff} = -\frac{1}{\varepsilon_0 r_N} \left( D_1^{(N)} r_N^{\lambda(N)} + D_2^{(N)} r_N^{-\lambda(N)} + v^{(N)} \varepsilon_0 r_N \right). \tag{2.147}$$

**Эффективный продольный модуль Юнга.** В отличие от предыдущих разделов, нам нужно дополнительное уравнение при определении эффективного продольного модуля Юнга. Для этого используем полную формулу Эшелби (Е.18) для многофазного композита

$$U^{RVE} = U^{eff} + U^{INT} = U^{eff} + \frac{1}{2} \int_{S_i} \left( \sigma_{ij}^{N+1} u_i^{eff} - \sigma_{ij}^{eff} u_i^{N+1} \right) n_j dS. \tag{2.148}$$



Так как  $U^{INT} = 0$ , формула (2.148) преобразуется к следующему виду

$$U^{RVE} = U^{INT}. \quad (2.149)$$

Путем осреднения по объему можно рассматривать равенство (2.149) как эквивалентность плотности энергии деформации между средами с включениями и без включений

$$\frac{1}{2V^{RVE}} \int_{V^{RVE}} (\sigma_{zz}^{RVE} \varepsilon_{zz}^{RVE}) dV = \frac{1}{2V^{eff}} \int_{V^{eff}} (\sigma_{zz}^{eff} \varepsilon_{zz}^{eff}) dV, \quad (2.150)$$

где  $V^{RVE}$  — объем среды с включениями (эквивалентная гомогенная среда с волокном, вискеризованном межфазном слое и матрицей);  $V^{eff}$  — объем среды без включений (эквивалентная гомогенная среда, которая считается эффективными композитом), который равен  $V^{RVE}$ . Из равенства (2.115) имеем

$$\varepsilon_{zz}^{eff} = \varepsilon_{zz}^{N+1} = \varepsilon_0. \quad (2.151)$$

Используя (2.151), можно записать (2.150) в виде

$$\frac{1}{2V^{RVE}} \int_{V^{RVE}} \sigma_{zz}^{RVE} dV = \frac{1}{2V^{eff}} \int_{V^{eff}} \sigma_{zz}^{eff} dV. \quad (2.152)$$

На правой части равенства (2.152) можно переписать

$$\frac{1}{2V^{eff}} \int_{V^{eff}} \sigma_{zz}^{eff} dV = \frac{1}{2} E_{zz}^{eff} \varepsilon_{zz}^{eff} = \frac{1}{2} E_{33}^{eff} \varepsilon_0, \quad (2.153)$$

а в левой части имеем

$$\frac{1}{2V^{RVE}} \int_{V^{RVE}} \sigma_{zz}^{RVE} dV = \frac{1}{4\pi r_{N+1}^2 L} \left[ 4\pi L \left( \sum_{i=1}^N \int_{r_{i-1}}^{r_i} \sigma_{33}^{(i)} r dr + \frac{E_{33}^{eff} \varepsilon_0}{2} (r_{N+1}^2 - r_N^2) \right) \right]. \quad (2.154)$$

Приравняв (2.153) и (2.154), получим

$$E_{33}^{eff} = \frac{2}{\varepsilon_0 r_N^2} \sum_{i=1}^N \int_{r_{i-1}}^{r_i} \sigma_{zz}^{(i)} r dr. \quad (2.155)$$

Таким образом, из (2.155) окончательное выражение для эффективного продольного модуля Юнга принимает вид

$$E_{33}^{eff} = \frac{2}{\varepsilon_0 r_N^2} \sum_{i=1}^N \left( D_1^{(i)} (\lambda_{(i)} C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)}) \left( \frac{r_{(i)}^{\lambda_{(i)}+1} - r_{(i-1)}^{\lambda_{(i)}+1}}{1 + \lambda_{(i)}} \right) + D_2^{(i)} (-\lambda_{(i)} C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)}) Z^{(i)} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_0}{2} \left( (C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)}) v^{(i)} + C_{33}^{(i)} (r_{(i)}^2 - r_{(i-1)}^2) \right) \right) \quad (2.156)$$

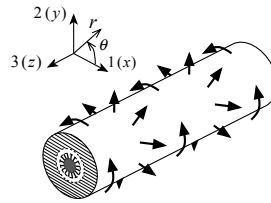
где

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{22}^{(i)} / C_{11}^{(i)}}, \quad \nu^{(i)} = \frac{C_{13}^{(i)} - C_{23}^{(i)}}{C_{22}^{(i)} - C_{11}^{(i)}}, \quad Z^{(i)} = \begin{cases} \ln r_{(i)} - \ln r_{(i-1)}, & \lambda_{(i)} = 1, \\ \frac{r_{(i)}^{-\lambda_{(i)}+1} - r_{(i-1)}^{-\lambda_{(i)}+1}}{1 - \lambda_{(i)}}, & \lambda_{(i)} \neq 1. \end{cases} \quad (2.157)$$

### 2.3.4 Определение модуля поперечного сдвига

А. Постановка задачи чистого сдвига в плоскости изотропии в цилиндрических координатах для ортотропной многофазной среды. Предполагается, что ось волокон направлена вдоль оси  $z$  (оси 3) в цилиндрической системе координат. Эффективный модуль поперечного сдвига определяются из решения задачи плоской деформации и чистого сдвига поперек волокон (см. рис. 2.9). Согласно работ [45,61,93] ячейка находится под действием напряжений  $\sigma_{rr} = \sin \theta$  и  $\sigma_{r\theta} = \cos \theta$ . При этом возникают только перемещения радиального и углового.

$$u_r^{(i)}(r) = u_\theta^{(i)} \neq 0, \quad u_z^{(i)}(z) = 0. \quad (2.158)$$



**Рис. 2.9** Задача чистого сдвига поперек волокон

Если мы рассмотрим сначала поведение однородной среды в состоянии чистого сдвига, то компоненты в декартовой системе координат в осях  $x, y, z$  определяются следующим образом

$$u_x = cx, \quad u_y = -cy, \quad u_z = 0, \quad (2.159)$$

где максимум деформации чистого сдвига имеет значение  $c$ . Перепишем выражения для перемещений, соответствующих (2.159), в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned}
u_r &= cr \sin \theta, \\
u_\theta &= cr \cos \theta, \\
u_z &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.160}$$

Руководствуясь предшествующими формулами для деформации однородной среды, запишем общее решение для неоднородной среды в виде

$$\begin{aligned}
u_r &= u(r) \sin \theta, \\
u_\theta &= w(r) \cos \theta, \\
u_z &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.161}$$

где  $u(r)$  и  $w(r)$  — неизвестные функции, которые зависят от радиуса единственно.

Подставив (2.161) в соотношение Коши, имеем

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= u' \sin 2\theta, \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \left( \frac{u - 2w}{r} \right) \sin 2\theta, \\
2\varepsilon_{r\theta} &= \left( \frac{2u - w}{r} + w' \right) \cos 2\theta.
\end{aligned}
\tag{2.162}$$

Используя (2.162) в законе Гука, получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \left[ C_{rr} u' + C_{r\theta} \left( \frac{u - 2w}{r} \right) \right] \sin 2\theta, \\
\sigma_{\theta\theta} &= \left[ C_{r\theta} u' + C_{\theta\theta} \left( \frac{u - 2w}{r} \right) \right] \sin 2\theta, \\
\sigma_{r\theta} &= G_{r\theta} \left( \frac{2u - w}{r} + w' \right) \cos 2\theta.
\end{aligned}
\tag{2.163}$$

Подставив (2.163) в уравнение равновесия, находим два дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( C_{rr} u'(r) + \frac{C_{r\theta}}{r} (u(r) - 2w(r)) \right) \sin 2\theta \right] + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ G_{r\theta} \left( \frac{2u(r) - w(r)}{r} + w'(r) \right) \cos 2\theta \right] + \\
& + \frac{1}{r} \left[ \left( C_{rr} u'(r) + \frac{C_{r\theta}}{r} (u(r) - 2w(r)) \right) \sin 2\theta - \right. \\
& \quad \left. - \left( C_{r\theta} u'(r) + \frac{C_{\theta\theta}}{r} (u(r) - 2w(r)) \right) \sin 2\theta \right] = 0, \\
& \Rightarrow C_{rr} \left( (r^2 u''(r) + ru'(r)) - (C_{\theta\theta} + 4G_{r\theta}) u(r) - \right. \\
& \quad \left. - 2(C_{r\theta} + G_{r\theta}) rw'(r) + 2(C_{\theta\theta} + G_{r\theta}) w \right) = 0, \tag{2.164}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial r} \left[ G_{r\theta} \left( \frac{2u(r) - w(r)}{r} + w'(r) \right) \cos 2\theta \right] + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( C_{r\theta} u'(r) + C_{\theta\theta} \left( \frac{u(r) - 2w(r)}{r} \right) \right) \sin 2\theta \right] + \\
& + \frac{2}{r} \left[ \left( G_{r\theta} \left( \frac{2u(r) - w(r)}{r} + w'(r) \right) \right) \cos 2\theta \right] = 0 \\
& \Rightarrow 2(C_{r\theta} + G_{r\theta}) ru'(r) + 2(C_{\theta\theta} + G_{r\theta}) u(r) + G_{r\theta} (r^2 w'' + rw') - (4C_{\theta\theta} + G_{r\theta}) w = 0. \tag{2.165}
\end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения второго ранга (2.164) и (2.165) имеют следующую форму решения

$$\begin{aligned}
u(r) &= Fr^\lambda, \\
w(r) &= Dr^\lambda.
\end{aligned} \tag{2.166}$$

где  $F$  и  $D$  — неизвестные константы, которые как будет показано, зависят от друг друга. Теперь требуется найти характеристическое уравнение для  $\lambda$  из условия существования нетривиального нулевого решения уравнений (2.164) и (2.165), записанных с учетом (2.166). Пусть

$$\begin{aligned}
u(r) &= Fr^\lambda & w(r) &= Dr^\lambda \\
u'(r) &= \lambda Fr^{\lambda-1} & w'(r) &= \lambda Dr^{\lambda-1} \\
u''(r) &= \lambda(\lambda-1)Fr^{\lambda-2}, & w''(r) &= \lambda(\lambda-1)Dr^{\lambda-2}.
\end{aligned} \tag{2.167}$$

Далее подставив (2.167) в (2.164) и (2.165), получим

$$\left[ C_{rr} \lambda^2 - (C_{\theta\theta} + 4G_{r\theta}) \right] F - \left[ 2(C_{r\theta} + G_{r\theta}) \lambda - 2(C_{\theta\theta} + G_{r\theta}) \right] D = 0, \quad (2.168)$$

$$\left[ 2(C_{r\theta} + G_{r\theta}) \lambda + 2(C_{\theta\theta} + G_{r\theta}) \right] F + \left[ G_{r\theta} \lambda^2 - (4C_{\theta\theta} + G_{r\theta}) \right] D = 0. \quad (2.169)$$

Равенства (2.168) можно записать в другом виде

$$F = 2 \frac{C_{\theta\theta} + G_{r\theta} - \lambda(C_{r\theta} + G_{r\theta})}{C_{\theta\theta} + 4G_{r\theta} - \lambda^2 C_{rr}} D, \quad (2.170)$$

и подставляя (2.170) в (2.169), и имеем

$$C_{rr} G_{r\theta} \lambda^4 - \left[ (C_{rr} + C_{\theta\theta} - 8C_{r\theta}) G_{r\theta} + 4(C_{rr} C_{\theta\theta} - C_{r\theta}^2) \right] \lambda^2 + 9C_{\theta\theta} G_{r\theta} = 0. \quad (2.171)$$

Таким образом, учитывая (2.171), характеристическое уравнение для  $\lambda$  записывается в виде:

$$L\lambda^4 + M\lambda^2 + N = 0, \quad (2.172)$$

где

$$\begin{aligned} L &= C_{rr} G_{r\theta}, \\ M &= - \left[ (C_{rr} + C_{\theta\theta} - 8C_{r\theta}) G_{r\theta} + 4(C_{rr} C_{\theta\theta} - C_{r\theta}^2) \right], \\ N &= 9C_{\theta\theta} G_{r\theta}. \end{aligned} \quad (2.173)$$

Заметим, что характеристическое уравнение (2.172) можно получить сразу, приравнявая нулю определитель системы линейных уравнений относительно  $F$  и  $D$ .

Очевидно, что корни ( $\lambda$ ) выражения (2.172) зависят от свойств материалов, показанных в (2.173). Согласно работе З. Хашина[11], имеется три варианта корней ( $\lambda$ ): 1) все корни представляют собой действительные числа, 2) все комплексные корни, и 3) одна пара действительная и одна пара комплексная. Однако, в классической теории упругости в соответствии с работами Хашина[10] и Цукрова [11] корни являются вещественными числами. В целом для любых действительных корней  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и  $\lambda_4$  выражения  $u(r)$  и  $w(r)$  представляются в следующем виде

$$\begin{aligned} u(r) &= F_1 r^{\lambda_1} + F_2 r^{\lambda_2} + F_3 r^{\lambda_3} + F_4 r^{\lambda_4}, \\ w(r) &= D_1 r^{\lambda_1} + D_2 r^{\lambda_2} + D_3 r^{\lambda_3} + D_4 r^{\lambda_4}, \end{aligned} \quad (2.174)$$

где  $\lambda_{(i)}^1, \lambda_{(i)}^3$  — положительные величины; и  $\lambda_{(i)}^2, \lambda_{(i)}^4$  — отрицательные величины. Кроме того, по соотношению (2.170) константы  $F$  и  $D$  имеют линейную зависимость друг с другом. Т.е. аналогично имеем

$$F_j = \phi_j D_j, \quad (2.175)$$

где

$$\phi_j = 2 \frac{C_{\theta\theta} + G_{r\theta} - \lambda_j (C_{r\theta} + G_{r\theta})}{C_{\theta\theta} + 4G_{r\theta} - (\lambda_j)^2 C_{rr}}.$$

Таким образом, поля перемещения для этой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r) &= \left( \phi_1^{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_1^{(i)}} + \phi_2^{(i)} D_2^{(i)} r^{\lambda_2^{(i)}} + \phi_3^{(i)} D_3^{(i)} r^{\lambda_3^{(i)}} + \phi_4^{(i)} D_4^{(i)} r^{\lambda_4^{(i)}} \right) \sin 2\theta = \\ &= \left( \sum_{j=1}^4 \phi_j^{(i)} D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}} \right) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (2.176)$$

$$\begin{aligned} u_\theta^{(i)}(r) &= \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_1^{(i)}} + D_2^{(i)} r^{\lambda_2^{(i)}} + D_3^{(i)} r^{\lambda_3^{(i)}} + D_4^{(i)} r^{\lambda_4^{(i)}} \right) \cos 2\theta = \\ &= \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}} \right) \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2.177)$$

Соответствующие поля деформаций имеют вид

$$\varepsilon_{rr}^{(i)}(r) = \left( \sum_{j=1}^4 \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} \right) \sin 2\theta, \quad (2.178)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) = \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (\phi_j^{(i)} - 2) \right) \sin 2\theta, \quad (2.179)$$

$$\varepsilon_{r\theta}^{(i)}(r) = \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (2\phi_j^{(i)} + \lambda_j^{(i)} - 1) \right) \cos 2\theta, \quad (2.180)$$

и поля напряжений принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)}(r) &= \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (C_{rr}^{(i)} \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} + C_{r\theta}^{(i)} (\phi_j^{(i)} - 2)) \right) \sin 2\theta = \\ &= \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (C_{11}^{(i)} \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} + C_{12}^{(i)} (\phi_j^{(i)} - 2)) \right) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (2.181)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)-1} \left( C_{r\theta}^{(i)} \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} + C_{\theta\theta}^{(i)} (\phi_j^{(i)} - 2) \right) \right) \sin 2\theta = \\ &= \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)-1} \left( C_{12}^{(i)} \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} + C_{22}^{(i)} (\phi_j^{(i)} - 2) \right) \right) \sin 2\theta,\end{aligned}\quad (2.182)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta}^{(i)}(r) &= G_{r\theta} \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)-1} \left( 2\phi_j^{(i)} + \lambda_j^{(i)} - 1 \right) \right) \cos 2\theta = \\ &= C_{66} \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)-1} \left( 2\phi_j^{(i)} + \lambda_j^{(i)} - 1 \right) \right) \cos 2\theta,\end{aligned}\quad (2.183)$$

где постоянные  $\phi_j$  имеют вид

$$\phi_j^{(i)} = 2 \frac{C_{\theta\theta}^{(i)} + G_{r\theta}^{(i)} - \lambda_j^{(i)} \left( C_{r\theta}^{(i)} + G_{r\theta}^{(i)} \right)}{C_{\theta\theta}^{(i)} + 4G_{r\theta}^{(i)} - \left( \lambda_j^{(i)} \right)^2 C_{rr}^{(i)}} = 2 \frac{C_{22}^{(i)} + C_{66}^{(i)} - \lambda_j^{(i)} \left( C_{12}^{(i)} + C_{66}^{(i)} \right)}{C_{22}^{(i)} + 4C_{66}^{(i)} - \left( \lambda_j^{(i)} \right)^2 C_{11}^{(i)}}, \quad (2.184)$$

и  $\lambda_j^{(i)}$  — решения характеристического уравнения, данного ниже

$$L \left( \lambda_j^{(i)} \right)^4 - M \left( \lambda_j^{(i)} \right)^2 + N = 0, \quad (2.185)$$

где

$$\begin{aligned}L &= C_{rr}^{(i)} G_{r\theta}^{(i)} = C_{11}^{(i)} C_{66}^{(i)}, \\ M &= \left( C_{rr}^{(i)} + C_{\theta\theta}^{(i)} - 8C_{r\theta}^{(i)} \right) G_{r\theta}^{(i)} + 4 \left( C_{rr}^{(i)} C_{\theta\theta}^{(i)} - \left( C_{r\theta}^{(i)} \right)^2 \right) = \\ &= \left( C_{11}^{(i)} + C_{22}^{(i)} - 8C_{12}^{(i)} \right) C_{66}^{(i)} + 4 \left( C_{11}^{(i)} C_{22}^{(i)} - \left( C_{12}^{(i)} \right)^2 \right), \\ N &= 9C_{\theta\theta}^{(i)} G_{r\theta}^{(i)} = 9C_{22}^{(i)} C_{66}^{(i)}.\end{aligned}\quad (2.186)$$

Видно, что тензор модулей упругости индексов  $C_{rr}^{(i)}, C_{\theta\theta}^{(i)}, C_{r\theta}^{(i)}$  заменен тензором с индексами  $C_{11}^{(i)}, C_{22}^{(i)}, C_{66}^{(i)}$ .

В случае изотропных или трансверсально-изотропных сред с осью плоскости изотропии, направленной вдоль волокон и из-за равенств (Б.6) и (2.73) характеристическое уравнение (2.185) и (2.186) имеет форму

$$C_{11}^{(i)} C_{66}^{(i)} \left( \lambda_j^{(i)} \right)^4 - 10C_{11}^{(i)} C_{66}^{(i)} \left( \lambda_j^{(i)} \right)^2 + 9C_{11}^{(i)} C_{66}^{(i)} = 0, \quad (2.187)$$

Следовательно, решения характеристического уравнения (2.187) можно записать в следующем виде

$$\lambda_1^{(i)} = 1 \quad , \quad \lambda_2^{(i)} = -1 \quad , \quad \lambda_3^{(i)} = 3 \quad , \quad \lambda_4^{(i)} = -3. \quad (2.188)$$

В результате равенства (2.188) вместе со соотношениями (Б.4), (Б.5), (Б.6) и (Б.7) позволяют найти в явном виде постоянные  $\phi_j$

$$\phi_1^{(i)} = 1, \quad \phi_2^{(i)} = 1 + \frac{K_{12}^{(i)}}{\mu_{12}^{(i)}}, \quad \phi_3^{(i)} = \frac{K_{12}^{(i)} - \mu_{12}^{(i)}}{2K_{12}^{(i)} + \mu_{12}^{(i)}}, \quad \phi_4^{(i)} = -1. \quad (2.189)$$

Таким образом, с помощью равенств (2.188), (2.189), (Б.4), (Б.5), (Б.6) и (Б.7) можно переписать соотношения (2.176), (2.177), (2.178), (2.179), (2.180), (2.181), (2.182) и (2.183) в следующем виде

$$u_r^{(i)}(r) = \left( D_1^{(i)} r + D_2^{(i)} \left( 1 + \frac{K_{12}^{(i)}}{\mu_{12}^{(i)}} \right) r^{-1} + D_3^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{(i)} - \mu_{12}^{(i)}}{2K_{12}^{(i)} + \mu_{12}^{(i)}} \right) r^3 - D_4^{(i)} r^{-3} \right) \sin 2\theta, \quad (2.190)$$

$$u_\theta^{(i)}(r) = \left( D_1^{(i)} r + D_2^{(i)} r^{-1} + D_3^{(i)} r^3 + D_4^{(i)} r^{-3} \right) \cos 2\theta, \quad (2.191)$$

$$\varepsilon_{rr}^{(i)}(r) = \left( D_1^{(i)} - D_2^{(i)} \left( 1 + \frac{K_{12}^{(i)}}{\mu_{12}^{(i)}} \right) r^{-2} + 3D_3^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{(i)} - \mu_{12}^{(i)}}{2K_{12}^{(i)} + \mu_{12}^{(i)}} \right) r^2 + 3D_4^{(i)} r^{-4} \right) \sin 2\theta, \quad (2.192)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) = \left( -D_1^{(i)} - D_2^{(i)} \left( 1 - \frac{K_{12}^{(i)}}{\mu_{12}^{(i)}} \right) r^{-2} - 3D_3^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{(i)} + \mu_{12}^{(i)}}{2K_{12}^{(i)} + \mu_{12}^{(i)}} \right) r^2 - 3D_4^{(i)} r^{-4} \right) \sin 2\theta, \quad (2.193)$$

$$\varepsilon_{r\theta}^{(i)}(r) = \left( D_1^{(i)} + D_2^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{(i)}}{\mu_{12}^{(i)}} \right) r^{-2} + 3D_3^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{(i)}}{2K_{12}^{(i)} + \mu_{12}^{(i)}} \right) r^2 - 3D_4^{(i)} r^{-4} \right) \cos 2\theta, \quad (2.194)$$

$$\sigma_{rr}^{(i)}(r) = \left( D_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} - 2D_2^{(i)} K_{12}^{(i)} r^{-2} + 3D_3^{(i)} \mu_{12}^{(i)} r^{-4} \right) \sin 2\theta, \quad (2.195)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r) = \left( -D_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + 3D_3^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{(i)} - \mu_{12}^{(i)}}{2K_{12}^{(i)} + \mu_{12}^{(i)}} \right) r^{-2} - 3D_4^{(i)} \mu_{12}^{(i)} r^{-4} \right) \sin 2\theta, \quad (2.196)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(i)}(r) = \left( D_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + D_2^{(i)} K_{12}^{(i)} r^{-2} + 3D_3^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{(i)} \mu_{12}^{(i)}}{2K_{12}^{(i)} + \mu_{12}^{(i)}} \right) r^2 - 3D_4^{(i)} \mu_{12}^{(i)} r^{-4} \right) \cos 2\theta. \quad (2.197)$$

## Б. Методика получения эффективного модуля поперечного сдвига.

Рассмотрим вновь задачу чистого сдвига в плоскости изотропии ячейки, для слоистой структуры, которая под действием напряжений:  $\sigma_{rr}(r_{N+1}) = \sin 2\theta$  и  $\sigma_{r\theta}(r_{N+1}) = \cos 2\theta$ . В этом случае возникают радиальные и угловые перемещения



$$\begin{aligned}
u_r^{(i)}(r, \theta) &= \left( \sum_{j=1}^4 \phi_j^{(i)} D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}} \right) \sin 2\theta, \\
u_\theta^{(i)}(r, \theta) &= \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}} \right) \cos 2\theta.
\end{aligned} \tag{2.198}$$

где опять запишем

$$\phi_j^{(i)} = 2 \frac{C_{22}^{(i)} + C_{66}^{(i)} - \lambda_j^{(i)} (C_{12}^{(i)} + C_{66}^{(i)})}{C_{22}^{(i)} + 4C_{66}^{(i)} - (\lambda_j^{(i)})^2 C_{11}^{(i)}},$$

и  $\lambda_{(i)}$  — решение характеристического уравнения, данного ниже

$$L(\lambda^{(i)})^4 - M(\lambda^{(i)})^2 + N = 0$$

где

$$\begin{aligned}
L &= C_{11}^{(i)} C_{66}^{(i)}, \\
M &= (C_{11}^{(i)} + C_{22}^{(i)} - 8C_{12}^{(i)}) C_{66}^{(i)} + 4(C_{11}^{(i)} C_{22}^{(i)} - (C_{12}^{(i)})^2), \\
N &= 9C_{22}^{(i)} C_{66}^{(i)}.
\end{aligned}$$

Здесь мы получаем, что  $\lambda_{(1)}, \lambda_{(3)}$  — положительные числа, и  $\lambda_{(2)}, \lambda_{(4)}$  — отрицательные числа. Соответствующие поля напряжений, которые необходимы для нашего анализа имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(i)}(r, \theta) &= \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (C_{11}^{(i)} \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} + C_{12}^{(i)} (\phi_j^{(i)} - 2)) \right) \sin 2\theta, \\
\sigma_{r\theta}^{(i)}(r, \theta) &= C_{66}^{(i)} \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (2\phi_j^{(i)} + \lambda_j^{(i)} - 1) \right) \cos 2\theta.
\end{aligned} \tag{2.199}$$

Теперь определим поля перемещений и напряжений для эквивалентной гомогенной среды, которые соответствуют средам с трансверсально-изотропными свойствами с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси волокна. Из равенств (2.190), (2.191), (2.195) и (2.197) имеем

$$\begin{aligned}
u_r^{N+1}(r) &= \left( D_1^{N+1} r + D_2^{N+1} \left( 1 + \frac{K_{12}^{N+1}}{\mu_{12}^{N+1}} \right) r^{-1} + D_3^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{N+1} - \mu_{12}^{N+1}}{2K_{12}^{N+1} + \mu_{12}^{N+1}} \right) r^3 - D_4^{N+1} r^{-3} \right) \sin 2\theta, \\
u_\theta^{N+1}(r) &= (D_1^{N+1} r + D_2^{N+1} r^{-1} + D_3^{N+1} r^3 + D_4^{N+1} r^{-3}) \cos 2\theta,
\end{aligned} \tag{2.200}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{N+1}(r) &= \left( D_1^{N+1} \mu_{12}^{N+1} - 2D_2^{N+1} K_{12}^{N+1} r^{-2} + 3D_4^{N+1} \mu_{12}^{N+1} r^{-4} \right) \sin 2\theta, \\
\sigma_{r\theta}^{N+1}(r) &= \left( D_1^{N+1} \mu_{12}^{N+1} + D_2^{N+1} K_{12}^{N+1} r^{-2} + \right. \\
&\quad \left. + 3D_3^{N+1} \left( \frac{K_{12}^{N+1} \mu_{12}^{N+1}}{2K_{12}^{N+1} + \mu_{12}^{N+1}} \right) r^2 - 3D_4^{N+1} \mu_{12}^{N+1} r^{-4} \right) \cos 2\theta.
\end{aligned} \tag{2.201}$$

Более полезные формы (2.200) и (2.201) для эквивалентной гомогенной среды будут получены в следующем образом. С помощью внешнего граничного условия

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{N+1}(r_{N+1} \rightarrow \infty) &= \sin 2\theta, \\
\sigma_{r\theta}^{N+1}(r_{N+1} \rightarrow \infty) &= \cos 2\theta,
\end{aligned} \tag{2.202}$$

получаем

$$D_1^{N+1} = \frac{1}{2\mu_{12}^{N+1}}, \tag{2.203}$$

$$D_3^{N+1} = 0. \tag{2.204}$$

Итак, используя (2.202), (2.203) и (Б.7) можно записать (2.200) и (2.201) в виде

$$u_r^{N+1}(r, \theta) = \frac{1}{4\mu_{12}^{N+1}} \left( 2r + (\eta^{N+1} + 1) \frac{D_2^{N+1}}{r} + \frac{D_4^{N+1}}{r^3} \right) \sin 2\theta, \tag{2.205}$$

$$u_\theta^{N+1}(r, \theta) = \frac{1}{4\mu_{12}^{N+1}} \left( 2r + (\eta^{N+1} - 1) \frac{D_2^{N+1}}{r} - \frac{D_4^{N+1}}{r^3} \right) \cos 2\theta,$$

$$\sigma_{rr}^{N+1}(r, \theta) = \left( 1 - \Gamma^{N+1} \frac{D_2^{N+1}}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{D_4^{N+1}}{r^4} \right) \sin 2\theta, \tag{2.206}$$

$$\sigma_{r\theta}^{N+1}(r, \theta) = \left( 1 + \frac{D_2^{N+1}}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{D_4^{N+1}}{r^4} \right) \cos 2\theta,$$

где

$$\eta^{N+1} = 1 + 2 \frac{K_{12}^{N+1}}{\mu_{12}^{N+1}}, \quad \Gamma^{N+1} = 1 + \left( \frac{K_{12}^{N+1}}{\mu_{12}^{N+1}} \right)^2. \tag{2.207}$$

Очевидно, что помимо четырнадцати констант  $(D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_3^{(1)}, D_4^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_3^{(2)}, D_4^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_3^{(3)}, D_4^{(3)}, D_2^{N+1}$  и  $D_4^{N+1})$ , имеем два неизвестных эффективных модуля  $K_{12}^{N+1} = K_{12}^{eff}$  и  $\mu_{12}^{N+1} = \mu_{12}^{eff}$ . Будет показано, что знание эффективного объемного модуля плоской деформации не необходимо и поэтому,

нужно получить только пятнадцать неизвестных констант. Пятнадцать требуемых уравнений состоят из условий несингулярности:

$$D_2^{(1)} = D_4^{(1)} = 0, \quad (2.208)$$

условия непрерывности на границах идеального контакта фаз:

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r_{(i)}, \theta) &= u_r^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), & u_\theta^{(i)}(r_{(i)}, \theta) &= u_\theta^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \\ \sigma_{rr}^{(i)}(r_{(i)}, \theta) &= \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), & \sigma_{r\theta}^{(i)}(r_{(i)}, \theta) &= \sigma_{r\theta}^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N); \quad (2.209)$$

и условия энергетической поверхности на контакте ( $r = r_N$ ):

$$\int_S \left( \sigma_{rr}^{N+1} u_r^{eff} + \sigma_{r\theta}^{N+1} u_\theta^{eff} - \sigma_{rr}^{eff} u_r^{N+1} - \sigma_{r\theta}^{eff} u_\theta^{N+1} \right)_{r=r_N} dS = 0. \quad (2.210)$$

Теперь определяем поля перемещений и напряжений эффективного композита, которые имеют вид при  $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} u_r^{eff}(r, \theta) &= \frac{r \sin 2\theta}{2\mu_{12}^{eff}}, & u_\theta^{eff}(r, \theta) &= \frac{r \cos 2\theta}{2\mu_{12}^{eff}}, \\ \sigma_{rr}^{eff}(r, \theta) &= \sin 2\theta, & \sigma_{r\theta}^{eff}(r, \theta) &= \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2.211)$$

Используя (2.205), (2.206), (2.211) в (2.210), находим

$$D_2^{N+1} = 0. \quad (2.212)$$

Таким образом, соотношения (2.208), (2.209) и (2.212) формируют систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных констант и в том числе эффективного поперечного модуля сдвига  $\mu_{12}^{N+1} = \mu_{12}^{eff}$ . Видно, что в отличие от предыдущих случаев здесь не удастся получить аналитическое представления для модуля сдвига, так как система уравнений включает в себя нелинейное уравнение — характеристическое уравнение. Тем не менее, было показано ранее, что решения для других модулей не привлекают нелинейные уравнения, и поэтому ясные окончательные выражения других необходимых модулей могут быть получены.

### 2.3.5 Определение модуля поперечного сдвига

По известным значениям эффективного объемного модуля плоской деформации, продольного модуля Юнга, модуля плоского сдвига, и коэффициента Пуассона определяем поперечный модуль Юнга по формуле (Б.12)

$$E_{11}^{eff} = \frac{4\mu_{12}^{eff} K_{12}^{eff}}{K_{12}^{eff} + \mu_{12}^{eff} + 4\left(\nu_{31}^{eff}\right)^2 \mu_{12}^{eff} K_{12}^{eff} / E_{33}^{eff}}. \quad (2.213)$$

Другие коэффициенты Пуассона можно найти в Приложении Б.1 равенств (Б.13) и (Б.14).

## 2.4 Модель вискеризованных волокнистых композитов, основанная на методе двух фаз (полидисперсная модель)

На рис. 2.10 представлены регулярные ячейки вискеризованного волокнистого композита для полидисперсной модели (метод двух фаз) и условный гомогенный материал. По теореме Клапейрона, как показано в предыдущей главе раздела 1.5.4.б, эффективные свойства найдены путем приравнивания энергий деформации гетерогенного композита и эффективного гомогенного материала. Этот метод использован Чатзигеоржим и др. [93] при исследовании эффективных свойств Фуззи-композитов. Однако, как известно, этот метод не дает решение для эффективного модуля поперечного сдвига [32,35,45,93]. Тем не менее, во всех задачах используемые поля перемещений, деформаций и напряжений, все равно одинаковы как и раньше, и неизвестные константы определяются только из условия несингулярности, условий непрерывности в контакте фаз и внешнего граничного условия.

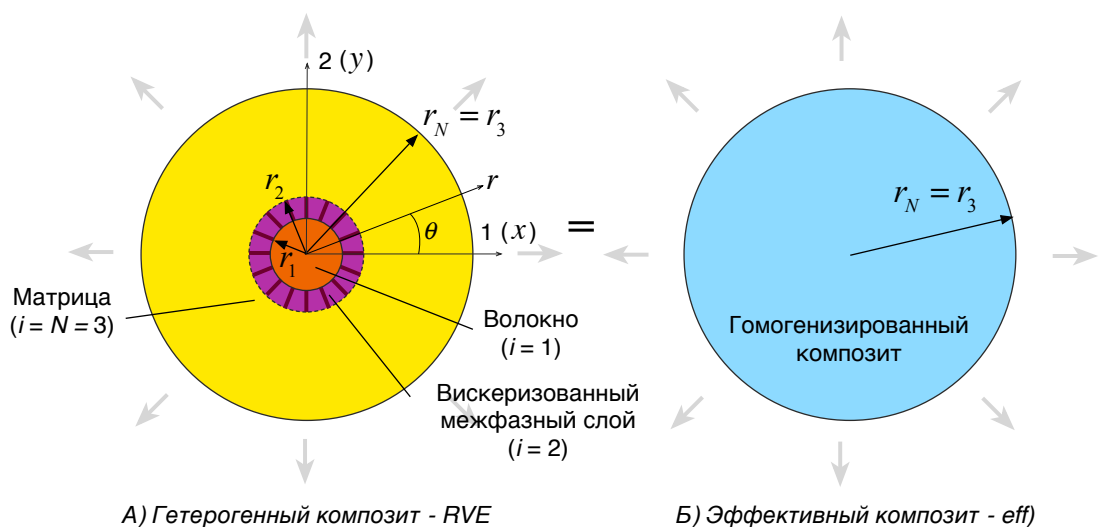


Рис. 2.10 Ячейки вискеризованного волокнистого композита по дисперсной модели и своего представленного эффективного композита.

### 2.4.1 Методика определение эффективного модуля продольного сдвига

В этой задаче используются поля перемещений и напряжений такие же, и как раньше, которые даются в (2.31), (2.34) и (2.35). Из (2.32) и (2.33) поля деформаций каждой ортотропной фазы принимают вид

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\theta z}^{(i)}(r, \theta) &= \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} \right) (-\sin \theta), \\ 2\varepsilon_{rz}^{(i)}(r, \theta) &= \left( \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + (-\lambda) D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} \right) \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.214)$$

Шесть неизвестных констант  $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$  определяются по условию несингулярности, которое дано уже в (2.25); условиям непрерывности на границах идеального контакта фаз:

$$u_z^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = u_z^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \quad \sigma_{rz}^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = \sigma_{rz}^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \quad (i = 1, 2, \dots, N-1); \quad (2.215)$$

и граничному условию на внешней границе ( $r = r_N$ ):

$$u_z^{(3)}(r_3) = 2\varepsilon_0 r \cos \theta. \quad (2.216)$$

Итак, системой пяти алгебраических уравнений для нахождения  $D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$ , состоящих из (2.215) и (2.216) является

$$\begin{aligned} 1) \quad & D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}} - D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}} - D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}} = 0, \\ 2) \quad & D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}} + D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}} - D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}} - D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}} = 0, \\ 3) \quad & D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(3)}} + D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_{(3)}} - 2\varepsilon_0 r_3 = 0, \\ 4) \quad & C_{55}^{(1)} \lambda_{(1)} D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}-1} - C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}-1} + C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}-1} = 0, \\ 5) \quad & C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}-1} - C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}-1} - \\ & - C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}-1} + C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}-1} = 0. \end{aligned} \quad (2.217)$$

Далее чтобы найти эффективный модуль, используется отношение эквивалентности плотности энергии деформации (1.34) между гетерогенными и эффективным композитом

$$W^{eff} = W^{RVE}. \quad (2.218)$$

**Определение  $W^{eff}$ .** По теореме Клапейрона плотность энергии деформации эффективного композита принимает вид

$$W^{eff} = \frac{1}{2V} \int_V \left( \sigma_{\theta z}^{eff} \varepsilon_{\theta z}^{eff} + \sigma_{rz}^{eff} \varepsilon_{rz}^{eff} \right) dV. \quad (2.219)$$

Из равенств (2.39), (2.40), (2.54) и (2.56) компоненты тензора деформации имеют вид

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\theta z}^{eff} &= -2\varepsilon_0 \sin \theta, \\ 2\varepsilon_{rz}^{eff} &= 2\varepsilon_0 \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.220)$$

и из равенств (2.55) и (2.56) соответствующие компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z}^{eff} &= -2\mu_{23}^{eff} \varepsilon_0 \sin \theta, \\ \sigma_{rz}^{eff} &= 2\mu_{23}^{eff} \varepsilon_0 \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.221)$$

Итак, на основании (2.220) и (2.221) можно записать (2.219) в виде

$$\begin{aligned} W^{eff} &= \frac{1}{2V} \int_V (\sigma_{\theta z}^{eff} \varepsilon_{\theta z}^{eff} + \sigma_{rz}^{eff} \varepsilon_{rz}^{eff}) dV = \\ &= \frac{1}{2V} \int_V [(-2\mu_{23}^{eff} \varepsilon_0 \sin \theta)(-2\varepsilon_0 \sin \theta) + (2\mu_{23}^{eff} \varepsilon_0 \cos \theta)(2\varepsilon_0 \cos \theta)] dV = \\ &= \frac{4\mu_{23}^{eff} \varepsilon_0^2}{2V} \int_V (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) dV = \\ &= 2\mu_{23}^{eff} \varepsilon_0^2. \end{aligned} \quad (2.222)$$

**Определение**  $W^{RVE}$ . Плотность энергии деформации композита описать уравнением вида

$$\begin{aligned} W^{RVE} &= W^{(1)} + W^{(2)} + W^{(3)} = \\ &= \frac{1}{2V} \int_{V_{(1)}} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV + \frac{1}{2V} \int_{V_{(2)}} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV + \frac{1}{2V} \int_{V_{(3)}} \sigma_{ij}^{(3)} \varepsilon_{ij}^{(3)} dV. \end{aligned} \quad (2.223)$$

где  $V$  — объем ячейки. На основании (2.223) и (3.12), с учетом (2.48) плотность энергии деформации композита имеет вид

$$\begin{aligned} W^{RVE} &= \frac{1}{2r_N^2} \left[ \frac{C_{44}^{(1)}}{\lambda_{(1)}} D_1^{(1)2} r_{(1)}^{2\lambda_{(1)}} \right] + \\ &+ \frac{1}{2r_N^2} \left[ C_{44}^{(2)} \left( \frac{(D_1^{(2)})^2}{\lambda_{(2)}} (r_{(2)}^{2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{2\lambda_{(2)}}) + \frac{(D_2^{(2)})^2}{-\lambda_{(2)}} (r_{(2)}^{-2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{-2\lambda_{(2)}}) \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2r_N^2} \left[ C_{44}^{(3)} \left( \frac{(D_1^{(3)})^2}{\lambda_{(3)}} (r_{(3)}^{2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{2\lambda_{(3)}}) + \frac{(D_2^{(3)})^2}{-\lambda_{(3)}} (r_{(3)}^{-2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{-2\lambda_{(3)}}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.224)$$

Таким образом, на основании (2.218), (2.222) и (2.224) эффективный модуль продольного сдвига для многофазных композитов принимает вид

$$\mu_{23}^{eff} = \frac{1}{4\varepsilon_0^2 r_N^2} \sum_{i=1}^N C_{44}^{(i)} \left( \frac{D_1^{(i)}}{\lambda_{(i)}} (r_{(i)}^{2\lambda_{(i)}} - r_{(i-1)}^{2\lambda_{(i)}}) + \frac{D_2^{(i)}}{-\lambda_{(i)}} (r_{(i)}^{-2\lambda_{(i)}} - r_{(i-1)}^{-2\lambda_{(i)}}) \right). \quad (2.225)$$

где для изотропных и трансверсально изотропных фаз с осями симметрии, направленными вдоль оси волокна  $\lambda_{(i)}^2 = C_{55}^{(i)} / C_{44}^{(i)} = 1$ .

#### 2.4.2 Методика определение эффективного объемного модуля плоской деформации

В этой задаче используются поля перемещений и напряжений такие же, и как раньше, которые даются в (2.67), (2.70) и (2.71). Из (2.68) и (2.69). Поля деформаций каждой ортотропной фазы принимают вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(i)}(r) &= \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} - \lambda_{(i)} D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1}.\end{aligned}\quad (2.226)$$

Шесть известных констант  $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$  определяются по условию несингулярности, которое дано в (2.84); условиям непрерывности на границах идеального контакта фаз:

$$u_r^{(i)}(r_{(i)}) = u_r^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad \sigma_{rr}^{(i)}(r_{(i)}) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad (i = 1, 2, \dots, N-1); \quad (2.227)$$

и граничному условию на внешней границе ( $r = r_N$ ):

$$u_r^{(3)}(r_3) = \varepsilon_0 r. \quad (2.228)$$

Итак, системой пяти алгебраических уравнений для нахождения  $D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$ , состоящих из (2.227) и (2.228) является

$$\begin{aligned}1) \quad & D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}} - D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}} - D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}} = 0, \\ 2) \quad & D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}} + D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}} - D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}} - D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}} = 0, \\ 3) \quad & D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(3)}} + D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_{(3)}} - \varepsilon_0 r_3 = 0, \\ 4) \quad & D_1^{(1)} (\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) r_1^{\lambda_{(1)}-1} - \\ & - D_1^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_1^{\lambda_{(2)}-1} + D_2^{(2)} (-\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_1^{-\lambda_{(2)}-1} = 0, \\ 5) \quad & D_1^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_2^{\lambda_{(2)}-1} - D_2^{(2)} (-\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_2^{-\lambda_{(2)}-1} - \\ & - D_1^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_2^{\lambda_{(3)}-1} + D_2^{(3)} (-\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_2^{-\lambda_{(3)}-1} = 0.\end{aligned}\quad (2.229)$$

**Определение  $W^{eff}$ .** По теореме Клапейрона плотность энергии деформации эффективного композита имеет вид

$$W^{eff} = \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^{eff} \varepsilon_{ij}^{eff} dV, \quad (2.230)$$

где  $V$  — объем ячейки. Теперь определяем компоненты интеграла (2.230). Из равенств (2.75), (2.76), (2.90) и (2.92) компоненты тензора деформации имеют вид

$$\varepsilon_{rr}^{eff} = \varepsilon_{\theta\theta}^{eff} = \varepsilon_0, \quad (2.231)$$

и из равенств (2.91) и (2.92) соответствующие компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{rr}^{eff} = \sigma_{\theta\theta}^{eff} = 2K_{12}^{eff} \varepsilon_0. \quad (2.232)$$

Итак, на основании (2.231) и (2.232) можно записать (2.230) в виде

$$\begin{aligned} W^{eff} &= \frac{1}{2V} \int_V (\sigma_{rr}^{eff} \varepsilon_{rr}^{eff} + \sigma_{\theta\theta}^{eff} \varepsilon_{\theta\theta}^{eff}) dV = \\ &= \frac{1}{2V} \int_V (4K_{12}^{eff} \varepsilon_0^2) dV = \frac{4K_{12}^{eff} \varepsilon_0^2 V}{2V} = \\ &= 2K_{12}^{eff} \varepsilon_0^2. \end{aligned} \quad (2.233)$$

**Определение  $W^{RVE}$ .** Можно показать, что соотношение (3.7) с учетом (2.92) равно

$$\begin{aligned} W^{RVE} &= \frac{1}{r_N^2} \left( \frac{C_{22}^{(1)}}{\lambda_{(1)}} + C_{12}^{(1)} \right) (D_1^{(1)})^2 r_{(1)}^{2\lambda_{(1)}} + \\ &+ \frac{1}{r_N^2} \left[ \left( \frac{C_{22}^{(2)}}{\lambda_{(2)}} + C_{12}^{(2)} \right) (D_1^{(2)})^2 (r_{(2)}^{2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{2\lambda_{(2)}}) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{C_{22}^{(2)}}{-\lambda_{(2)}} + C_{12}^{(2)} \right) (D_2^{(2)})^2 (r_{(2)}^{-2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{-2\lambda_{(2)}}) \right] + \\ &+ \frac{1}{r_N^2} \left[ \left( \frac{C_{22}^{(3)}}{\lambda_{(3)}} + C_{12}^{(3)} \right) (D_1^{(3)})^2 (r_{(3)}^{2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{2\lambda_{(3)}}) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{C_{22}^{(3)}}{-\lambda_{(3)}} + C_{12}^{(3)} \right) (D_2^{(3)})^2 (r_{(3)}^{-2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{-2\lambda_{(3)}}) \right]. \end{aligned} \quad (2.234)$$

Доказательство соотношения (2.234) дано в Приложении 3 (3.7). Таким образом, на основании (2.218), (2.233) и (2.234) можно записать эффективный объемный модуль плоской деформации для многофазных композитов в виде

$$\begin{aligned} K_{12}^{eff} &= \frac{1}{2r_N^2 \varepsilon_0^2} \sum_{i=1}^N \left[ \left( \frac{C_{22}^{(i)}}{\lambda_{(i)}} + C_{12}^{(i)} \right) (D_1^{(i)})^2 (r_{(i)}^{2\lambda_{(i)}} - r_{(i-1)}^{2\lambda_{(i)}}) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{C_{22}^{(i)}}{-\lambda_{(i)}} + C_{12}^{(i)} \right) (D_2^{(i)})^2 (r_{(i)}^{-2\lambda_{(i)}} - r_{(i-1)}^{-2\lambda_{(i)}}) \right]. \end{aligned} \quad (2.235)$$



### 2.4.3 Методика определение эффективных продольного модуля Юнга и коэффициента Пуассона

В этой задаче соответствующие поля перемещений и напряжений даются в (2.112), (2.116), (2.117) и (2.118). А из (2.113), (2.114) и (2.115), и с другой стороны, поля деформаций каждой ортотропной фазы принимают вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(i)}(r) &= \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + (-\lambda_{(i)}) D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} + v^{(i)} \varepsilon_0, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} + v^{(i)} \varepsilon_0, \\ \varepsilon_{zz}^{(i)}(r) &= \varepsilon_0.\end{aligned}\quad (2.236)$$

Шесть известных констант  $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$  определяются по условию несингулярности, которое дано в (2.134); условиям непрерывности на границах идеального контакта фаз:

$$u_r^{(i)}(r_{(i)}) = u_r^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad \sigma_{rr}^{(i)}(r_{(i)}) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad (i = 1, 2, \dots, N-1); \quad (2.237)$$

и граничному условию на внешней границе ( $r = r_N$ ):

$$\sigma_{rr}^{(3)}(r_3) = 0. \quad (2.238)$$

Итак, системой пяти алгебраических уравнений для нахождения  $D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$ , состоящих из (2.237) и (2.238) является

- 1)  $D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}} - D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}} - D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}} = 0,$
- 2)  $D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}} + D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}} - D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}} - D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}} = 0,$
- 3)  $D_1^{(1)} (\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) r_1^{\lambda_{(1)}-1} + (C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) v^{(1)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(1)} \varepsilon_0 -$   
 $- D_1^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_1^{\lambda_{(2)}-1} - D_2^{(2)} (-\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_1^{-\lambda_{(2)}-1} -$   
 $- (C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) v^{(2)} \varepsilon_0 - C_{13}^{(2)} \varepsilon_0 = 0,$
- 4)  $D_1^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_2^{\lambda_{(2)}-1} + D_2^{(2)} (-\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_2^{-\lambda_{(2)}-1}$   
 $+ (C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) v^{(2)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(2)} \varepsilon_0 -$   
 $- D_1^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_2^{\lambda_{(3)}-1} - D_2^{(3)} (-\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_2^{-\lambda_{(3)}-1} -$   
 $- (C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) v^{(3)} \varepsilon_0 - C_{13}^{(3)} \varepsilon_0 = 0,$
- 5)  $D_1^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_3^{\lambda_{(3)}-1} + D_2^{(3)} (-\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_3^{-\lambda_{(3)}-1} +$   
 $+ (C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) v^{(3)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(3)} \varepsilon_0 = 0.$

**Эффективный продольный модуль Юнга** найден с помощью равенства (2.218).

**Определение  $W^{eff}$ .** По теореме Клапейрона плотность энергии деформации эффективного композита принимает вид

$$W^{eff} = \frac{1}{2V} \iiint_V (\sigma_{rr}^{eff} \varepsilon_{rr}^{eff} + \sigma_{\theta\theta}^{eff} \varepsilon_{\theta\theta}^{eff} + \sigma_{zz}^{eff} \varepsilon_{zz}^{eff}) dV. \quad (2.240)$$

Из равенств (2.138), (2.140), (2.123), (2.124) и (2.125) компоненты тензора деформации принимают вид

$$\varepsilon_{rr}^{eff} = -\nu_{31}^{eff} \varepsilon^o, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{eff} = -\nu_{31}^{eff} \varepsilon^o, \quad \varepsilon_{zz}^{eff} = \varepsilon^o, \quad (2.241)$$

и из равенств (2.139) и (2.140) соответствующие компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{eff}(r) &= 0, \\ \sigma_{\theta\theta}^{eff}(r) &= 0, \\ \sigma_{zz}^{eff}(r) &= E_{33}^{eff} \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (2.242)$$

Итак, на основании (2.241-242) и  $E_{33} = E_{zz}$  можно записать (2.240) в виде

$$\begin{aligned} W^{eff} &= \frac{1}{2V} \int_V (\sigma_{rr}^{eff} \varepsilon_{rr}^{eff} + \sigma_{\theta\theta}^{eff} \varepsilon_{\theta\theta}^{eff} + \sigma_{zz}^{eff} \varepsilon_{zz}^{eff}) dV = \\ &= \frac{1}{2V} \int_V (E_{zz}^{eff} \varepsilon_0^{eff}) \varepsilon_0^{eff} dV = \frac{1}{2} E_{33}^{eff} \varepsilon_0^2. \end{aligned} \quad (2.243)$$

**Определение  $W^{RVE}$ .** На основании (3.16) с учетом (2.134) можно показать, что плотность энергии деформации композита имеет вид

$$\begin{aligned} W^{(i)} &= \frac{1}{2V} \iiint_V [\sigma_{rr}^{(i)} \varepsilon_{rr}^{(i)} + \sigma_{\theta\theta}^{(i)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)} + \sigma_{zz}^{(i)} \varepsilon_{zz}^{(i)}] dV \\ &= \frac{1}{2r_N^2} \sum_{i=1}^N \left[ (D_1^{(i)})^2 \left( C_{12}^{(i)} + \frac{C_{22}^{(i)}}{\lambda_{(i)}} \right) (r_{(i)}^{2\lambda_{(i)}} - r_{(i-1)}^{2\lambda_{(i)}}) + (D_2^{(i)})^2 \left( C_{12}^{(i)} + \frac{C_{22}^{(i)}}{-\lambda_{(i)}} \right) (r_{(i)}^{-2\lambda_{(i)}} - r_{(i-1)}^{-2\lambda_{(i)}}) + \right. \\ &\quad \left. + 2D_1^{(i)} \varepsilon_0 \left[ ((\lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)}) + (\lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)})) v^{(i)} + (\lambda_{(i)} C_{13}^{(i)} + C_{22}^{(i)}) \right] \left( \frac{r_{(i)}^{\lambda_{(i)}+1} - r_{(i-1)}^{\lambda_{(i)}+1}}{1 + \lambda_{(i)}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2D_2^{(i)} \varepsilon_0 \left[ ((-\lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)}) + (-\lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)})) v^{(i)} + (-\lambda_{(i)} C_{13}^{(i)} + C_{22}^{(i)}) \right] (Z^{(i)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left[ (A_1^{(i)} + A_2^{(i)}) v^{(i)} + A_3^{(i)} \right] (r_{(i)}^2 - r_{(i-1)}^2) \right] \end{aligned} \quad (2.244)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}^{(i)} &= \begin{cases} \ln r_{(i)} - \ln r_{(i-1)} & , \lambda_{(i)} = 1 \\ \frac{r_{(i)}^{-\lambda_{(i)}+1} - r_{(i-1)}^{-\lambda_{(i)}+1}}{1 - \lambda_{(i)}} & , \lambda_{(i)} \neq 1 \end{cases}, & \mathbf{v}^{(i)} &= \begin{cases} 0 & , \lambda_{(i)} = 1 \\ \frac{C_{13}^{(i)} - C_{23}^{(i)}}{C_{22}^{(i)} - C_{11}^{(i)}} & , \lambda_{(i)} \neq 1 \end{cases}, \\
\lambda_{(i)} &= \begin{cases} 1 & , C_{22}^{(i)} = C_{11}^{(i)} \\ \sqrt{\frac{C_{22}^{(i)}}{C_{11}^{(i)}}} & , C_{22}^{(i)} \neq C_{11}^{(i)} \end{cases}, & \mathbf{A}_1^{(i)} &= (C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)})\vartheta^{(i)}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{13}^{(i)}\boldsymbol{\varepsilon}_0, \\
& & \mathbf{A}_2^{(i)} &= (C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)})\vartheta^{(i)}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{23}^{(i)}\boldsymbol{\varepsilon}_0, \\
& & \mathbf{A}_3^{(i)} &= (C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)})\vartheta^{(i)}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{33}^{(i)}\boldsymbol{\varepsilon}_0.
\end{aligned} \tag{2.245}$$

Таким образом, на основании (2.218), (2.243), (2.244) и (2.245) выражения эффективного продольного модуля Юнга для многофазных композитов имеет вид

$$\begin{aligned}
E_{33}^{eff} &= \frac{1}{2\varepsilon_0^2 r_N^2} \sum_{i=1}^N \left[ (D_1^{(i)})^2 \left( C_{12}^{(i)} + \frac{C_{22}^{(i)}}{\lambda_{(i)}} \right) (r_{(i)}^{2\lambda_{(i)}} - r_{(i-1)}^{2\lambda_{(i)}}) + (D_2^{(i)})^2 \left( C_{12}^{(i)} + \frac{C_{22}^{(i)}}{-\lambda_{(i)}} \right) (r_{(i)}^{-2\lambda_{(i)}} - r_{(i-1)}^{-2\lambda_{(i)}}) + \right. \\
&+ 2D_1^{(i)}\varepsilon_0 \left[ \left( (\lambda_{(i)}C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)}) + (\lambda_{(i)}C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)}) \right) \vartheta^{(i)} + (\lambda_{(i)}C_{13}^{(i)} + C_{22}^{(i)}) \right] \left[ \frac{r_{(i)}^{\lambda_{(i)}+1} - r_{(i-1)}^{\lambda_{(i)}+1}}{1 + \lambda_{(i)}} \right] + \\
&+ 2D_2^{(i)}\varepsilon_0 \left[ \left( (-\lambda_{(i)}C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)}) + (-\lambda_{(i)}C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)}) \right) \vartheta^{(i)} + (-\lambda_{(i)}C_{13}^{(i)} + C_{22}^{(i)}) \right] (\mathbf{Z}^{(i)}) + \\
&+ \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[ (\mathbf{A}_1^{(i)} + \mathbf{A}_2^{(i)})\vartheta^{(i)} + \mathbf{A}_3^{(i)} \right] (r_{(i)}^2 - r_{(i-1)}^2) \left. \right].
\end{aligned} \tag{2.246}$$

**Коэффициент Пуассона** определяется как отношение поперечной эффективной деформации к продольной при растяжении вдоль волокон на границе  $r_3$

$$\nu_{31}^{eff} = -\varepsilon_{rr}^{eff} / \varepsilon_{zz}^{eff} = -\varepsilon_{rr}^{(3)} / \varepsilon_{zz}^{(3)} = -\varepsilon_{11}^{(3)} / \varepsilon_{33}^{(3)} = -u_r^{(3)} / \varepsilon_0 r_N.$$

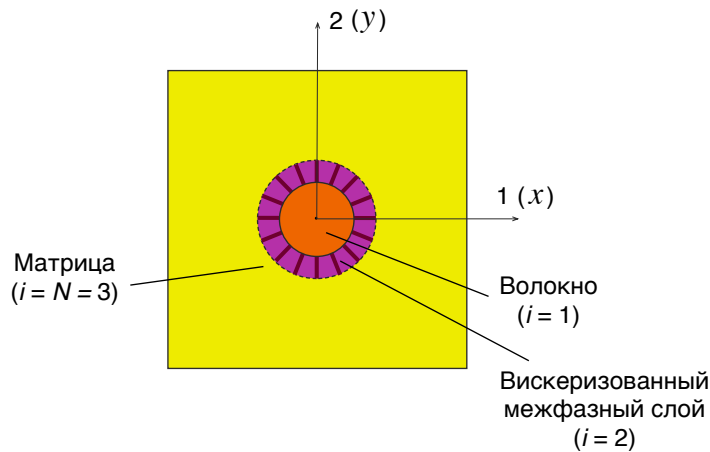
Итак, коэффициент Пуассона для многофазных композитов принимает вид

$$\nu_{31}^{eff} = -\frac{1}{\varepsilon_0^2 r_N} \left( D_1^{(N)} r_N^{\lambda_{(N)}} + D_2^{(N)} r_N^{-\lambda_{(N)}} + \mathbf{v}^{(N)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r_N \right). \tag{2.247}$$

## 2.5 Модель вискеризованных волокнистых композитов, основанная на методе потенциала комплексной переменной. Методика определение модуля продольного сдвига

В этом методе, предложенном Гузём и др. [90,92], элементарная ячейка выделенного объемного композита рассматривается в предположении, что волокна

периодически располагаются в матрице с квадратной упаковкой (см. рис. 2.11). Ключевой особенностью аналитической процедуры метода комплексных потенциалов Мусхелишвили, является использование комплексных потенциальных функций. Здесь исследуется только задача чистого сдвига вдоль волокон для случая антиплоской деформации.

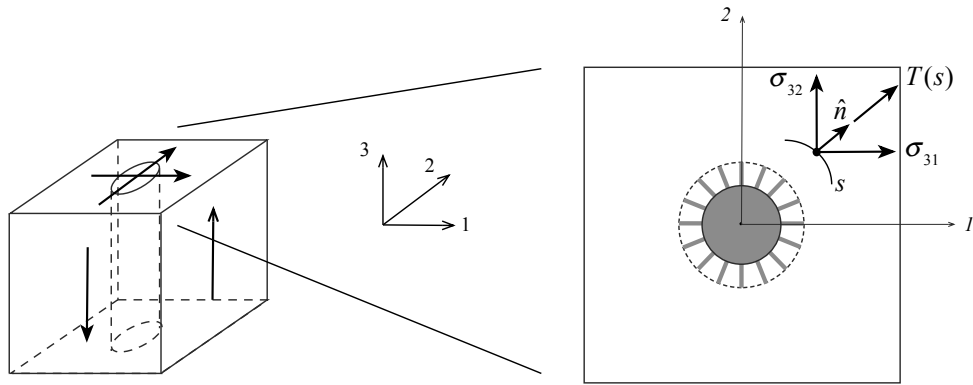


**Рис. 2.11** Квадратная ячейка вискеризованного волокнистого композита

### 2.5.1 Задача анти-плоской деформации

Рассмотрим случай, когда ячейка находится в состоянии чистого сдвига в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (см. рис. 2.12), проходящих параллельно волокнам, при действии касательных напряжений  $\sigma_{31}$  и  $\sigma_{32}$  [88,111]. Остальные напряжения положим равными нулю. На основании (1.10), три уравнения равновесия в любой точке волокна, вискеризованного слоя или матрицы сводятся к равенствам

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} &= \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \tag{2.248}$$



**Рис. 2.12** Задача анти-плоскости деформации

Согласно задаче чистого сдвига из трех компонентов вектора перемещений среды останется  $u_3$ . Углы сдвига, согласно соотношению малых деформации (1.11), будут функциями только по  $x_1$  и  $x_2$ .

$$\begin{aligned}\gamma_{31} &= 2\varepsilon_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \\ \gamma_{32} &= 2\varepsilon_{32} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2}.\end{aligned}\tag{2.249}$$

Выражение напряжения  $\sigma_{31}$  и  $\sigma_{32}$  через смещение  $u_3$  с учетом закона Гука (1.14) и формулы (2.249), имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \nabla^2 u_3 = 0.\tag{2.250}$$

Теперь вводим комплексную переменную соотношения [87-89]

$$\begin{aligned}z &= x_1 + ix_2, & \bar{z} &= x_1 - ix_2, \\ x_1 &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}), & x_2 &= -\frac{i}{2}(z - \bar{z}), \\ \partial/\partial x_1 &= \partial/\partial z + \partial/\partial \bar{z}, & \partial/\partial x_2 &= i(\partial/\partial z - \partial/\partial \bar{z}).\end{aligned}\tag{2.251}$$

где чертой сверху обозначена сопряжения функция. При учете (2.251), равенство (2.250) принимает вид

$$\begin{aligned}\nabla^2 u_3 &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) + \left( i \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \left( i \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \right] u_3 = \\ &= 4 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z \partial \bar{z}},\end{aligned}\tag{2.252}$$

и поэтому, решением уравнения Лапласа будет функция

$$u_3^{(j)} = \varphi_{(j)}(z) + \overline{\varphi_{(j)}(z)} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \varphi_{(j)}(z) \right\}. \quad (2.253)$$

Соответствующими касательными напряжениями при учете закона Гука являются

$$\begin{aligned} \sigma_{31}^{(j)} &= \mu^{(j)}(\gamma_{31}^{(j)}) = \mu^{(j)} \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x_1} = \mu^{(j)} \left( \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z} + \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial \bar{z}} \right), \\ \sigma_{32}^{(j)} &= \mu^{(j)}(\gamma_{32}^{(j)}) = \mu^{(j)} \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x_2} = \mu^{(j)} i \left( \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial z} - \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial \bar{z}} \right). \end{aligned} \quad (2.254)$$

Однако, так как уравнения в (2.253) удовлетворяют условию уравнения Коши-Римана [87,89,111], где последние члены в скобках уравнений в (2.254) равны нулю, приводит (2.254) к виду

$$\begin{aligned} \sigma_{31}^{(j)}(z) &= \mu \left( \varphi'_{(j)}(z) + \overline{\varphi'_{(j)}(z)} \right), \\ \sigma_{32}^{(j)}(z) &= i\mu \left( \varphi'_{(j)}(z) - \overline{\varphi'_{(j)}(z)} \right). \end{aligned} \quad (2.255)$$

Наконец, касательные напряжения (2.255) можно определить через введенную функцию согласно формуле

$$\sigma_{31}^{(j)} - i\sigma_{32}^{(j)} = \mu^{(j)} \left( \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x_1} - i \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x_2} \right) = 2\mu^{(j)} \varphi'_{(j)}(z). \quad (2.256)$$

Запишем условие непрерывности в границе контактных фаз в виде

$$\begin{aligned} u_3^{(j)}(z) &= u_3^{(j+1)}(z), \\ \mu^{(j)} \left[ \varphi_{(j)}(z) - \overline{\varphi_{(j)}(z)} \right] &= T_{(j)}(s) = T_{(j+1)}(s) = \mu^{(j+1)} \left[ \varphi_{(j+1)}(z) - \overline{\varphi_{(j+1)}(z)} \right], \end{aligned} \quad (2.257)$$

где  $s$  — длина контура интегрирования (см. рис. 2.13). Теперь находим другую форму условия непрерывности (2.257). Можно переписать  $T(s)$  в виде

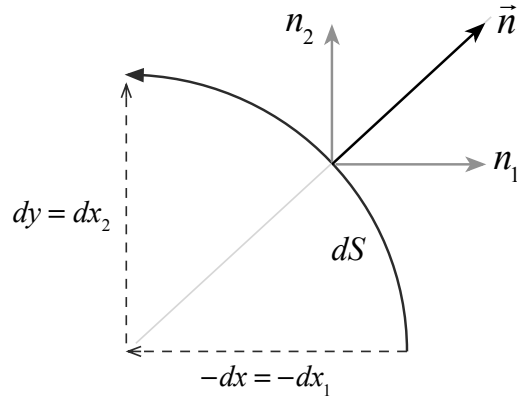
$$T(s) = \int_s (\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2) dS. \quad (2.258)$$

По рис. 2.9 определяем  $n_1$  и  $n_2$

$$n_1 = \frac{\partial x_2}{\partial s} = \frac{i}{2} \left( \frac{\partial \bar{z}}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s} \right), \quad n_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial s} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{z}}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial s} \right). \quad (2.259)$$

На основании (2.254) и (2.259), формула (2.258) принимает вид

$$\begin{aligned} T(s) &= \int_s \left[ \mu \left( \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right) \left( \frac{i}{2} \left( \frac{d\bar{z}}{ds} - \frac{dz}{ds} \right) \right) + i\mu \left( \varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)} \right) \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{z}}{ds} + \frac{dz}{ds} \right) \right) \right] ds = \\ &= -i\mu \int_s \frac{d}{ds} \left( \varphi(z) - \overline{\varphi(z)} \right) ds = -i\mu \left[ \varphi(z) - \overline{\varphi(z)} \right]_s. \end{aligned} \quad (2.260)$$



**Рис. 2.13** Отношение  $n_1, n_2$  и  $s$ .

Таким образом, с помощью (2.260) найденную систему уравнений (2.257) сводим к одному функциональному соотношению

$$\left(1 + \frac{\mu^{(j)}}{\mu^{(j+1)}}\right) \varphi_{(j)}(z) + \left(1 - \frac{\mu^{(j)}}{\mu^{(j+1)}}\right) \overline{\varphi_{(j)}(z)} = 2\varphi_{(j+1)}(z). \quad (2.261)$$

### 2.5.2 методика получения эффективного модуля

Согласно Гузю, каждая фаза выделяется с некоторым комплексным потенциалом Мухелишвили: Волокно — Гармоническая комплексная функция Тейлора, которая является регулярным в области  $A^{(1)}$

$$\varphi_{(1)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}^{(1)} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}; \quad (2.262)$$

Вискеризованный межфазный слой — Функция ряда Лорана, которая является регулярным в области  $A^{(2)}$

$$\varphi_{(2)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_{2k}^{(2)} z^{2k+1}; \quad (2.263)$$

и матрица — двоякопериодическая функция Вейерштрасса для области  $A^{(3)}$

$$\varphi_{(3)}(z) = a_0^{(3)} z - \lambda^2 a_2^{(3)} \left[ \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,0} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2k+2}^{(3)} \alpha_{n,k} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k+2}^{(3)}}{(2k+1)} \frac{\lambda^{2k+2}}{z^{2k+1}}, \quad (2.264)$$

где  $\lambda = r_{(2)}/l_{cell}$ ;  $l_{cell}$  — единичная длина;  $\alpha_{n,k}$  — постоянная Вейерштрасса; и

$a_{2k}^{(1)}, a_{2k}^{(2)}, a_{2k}^{(3)}$  — неизвестные константы.

В этом методе эффективный продольный модуль сдвига определяется соотношением (1.22) в виде

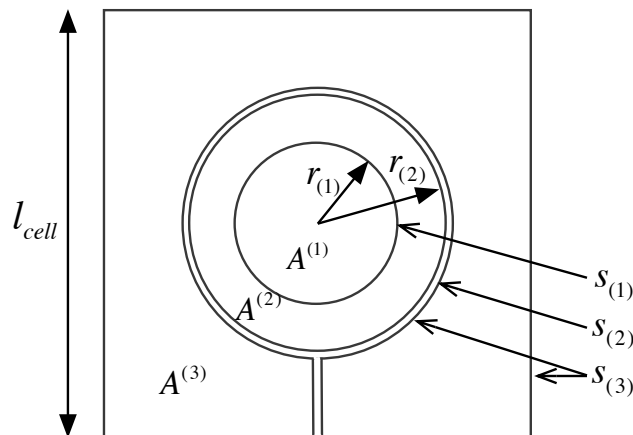
$$\mu^{eff} = \langle \sigma_{31} \rangle / \langle \gamma_{31} \rangle. \quad (2.265)$$

Теперь определяем сначала средние напряжения ячейки с помощью данной формулы [85,88]

$$\langle \sigma_{31} - i\sigma_{32} \rangle = \frac{i}{l_{cell}^2} \oint_L \mu^{(j)} \varphi_{(j)}(z) d\bar{z}, \quad (2.266)$$

где  $\langle \sigma_{31} - i\sigma_{32} \rangle$  — средняя комбинация напряжения; и контурный интеграл определяются по контуру, показанному на рис. 2.14. Можно записать (2.266) в виде

$$\langle \sigma_{31} - i\sigma_{32} \rangle = \frac{i}{l_{cell}^2} \left[ \mu^{(1)} \oint_{S_{(1)}} \varphi_{(1)}(z) d\bar{z} + \mu^{(2)} \oint_{S_{(2)}} \varphi_{(2)}(z) d\bar{z} + \mu^{(3)} \oint_{S_{(3)}} \varphi_{(3)}(z) d\bar{z} \right]. \quad (2.267)$$



**Рис 2.14** Контурный интеграл для вычисления состояния напряжений.

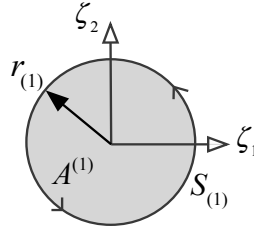
Следует отметить, что контурный интеграл комплексного переменного не будет давать площадь под замкнутой кривой и поэтому, используется конформное отображение [87,89]. Пусть функция

$$z = \omega(\zeta) = R^2 \zeta \quad (2.268)$$

определяет однолистное конформное отображение области  $A$  плоскости  $\zeta$  на плоскости  $z$ ; и  $R$  — постоянная, которая в нашем случае является радиусом круга. С помощью (2.268) контурная интегральная формула (2.267) для:

1) Волокна:





**Рис. 2.15** Контурное интегрирование для площади  $A^{(1)}$ .

Контурное интегрирование для площади  $A^{(1)}$  (см. рис 2.15) имеет вид

$$\mu^{(1)} \oint_{S^{(1)}} \varphi_{(1)}(z) d\bar{z} = \mu^{(1)} \oint_{S^{(1)}} \omega_{(1)}(R^2 \zeta) d\bar{\zeta}. \quad (2.269)$$

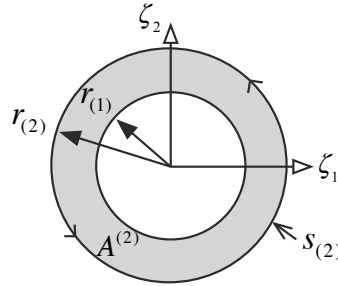
Так как в центре цилиндра в задаче теории упругости имеется сингулярность, функция не является аналитической. Проводя интегрирование (2.269) с равенством типа Коши [87] и учитывая (2.262), найдем

$$\mu^{(1)} R^2 \oint_{S^{(1)}} \omega_{(1)}(\zeta) d\bar{\zeta} = \mu^{(1)} R^2 (2\pi i a_{2k}). \quad (2.270)$$

Пусть  $R = r_{(1)}$ ,  $k = 0$  и  $c_{(1)} = \pi r_{(1)}^2 / l_{cell}^2$  где  $c_{(1)}$  — объемная доля волокна. Итак, (2.270) приводится к виду

$$\mu^{(1)} \oint_{S^{(1)}} \varphi_{(1)}(z) d\bar{z} = 2i l_{cell}^2 \mu^{(1)} c_{(1)} a_0^{(1)}. \quad (2.271)$$

2) Вискеризованного межфазного слоя:



**Рис. 2.16** Контурное интегрирование для площади  $A^{(2)}$

Контурным интегрированием для площади  $A^{(2)}$  (см. рис 2.16) является

$$\mu^{(2)} \oint_{S^{(2)}} \varphi_{(2)}(z) d\bar{z} = \mu^{(2)} \oint_{S^{(2)}} \omega_{(2)}(R^2 \zeta) d\bar{\zeta}. \quad (2.272)$$

По интегралу Коши интегрирование (2.272) и учитывая (2.263) найдем

$$\mu^{(2)} R^2 \oint_{S_{(2)}} \omega_{(2)}(\zeta) d\bar{\zeta} = \mu^{(2)} R^2 (2\pi i a_{2k}^{(2)}). \quad (2.273)$$

Пусть  $R = r_{(2)}$ ,  $k = 0$  и  $c_{(2)} = \frac{\pi}{l_{cell}^2} (r_{(2)}^2 - r_{(1)}^2)$  где  $c_{(2)}$  — объемная доля волокна. Итак,

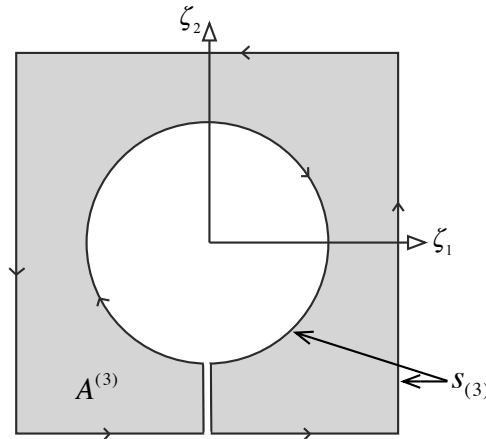
(2.273) преобразует к виду

$$\begin{aligned} \mu^{(2)} \oint_{S_{(2)}} \varphi_{(2)}(z) d\bar{z} &= 2il_{cell}^2 \mu^{(2)} \left( \frac{\pi}{l_{cell}^2} \left( (r_{(2)}^2 - r_{(1)}^2) + r_{(1)}^2 \right) \right) a_0^{(2)} = \\ &= 2il_{cell}^2 \mu^{(2)} (c_{(2)} + c_{(1)}) a_0^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.274)$$

### 3) Матрицы:

Сначала преобразуем двоякопериодическую функцию Вейерштрасса (2.264) к эквивалентной форме [112]:

$$\varphi_{(3)}(z) = a_o^{(3)} z - \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2}^{(3)} \lambda^{2k+2} \left[ -\frac{1}{2k+1} \frac{1}{(z^{2k+1})} - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,k} \frac{z^{2n+3}}{2n+3} \right]. \quad (2.275)$$

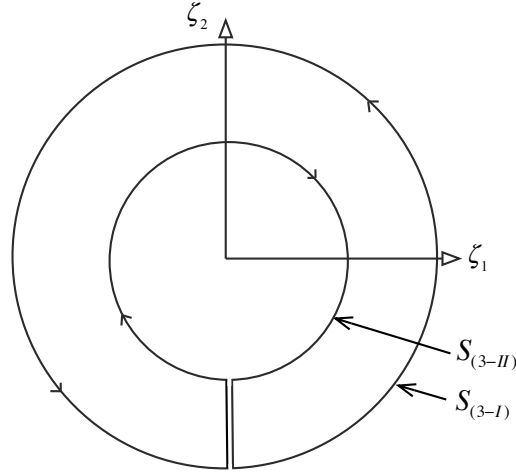


**Рис. 2.17** Контурное интегрирование для площади  $A^{(3)}$

На рис. 2.17 можно увидеть, что контурное интегрирование  $A^{(3)}$  имеет два контура — контур квадратной формы  $r_{(1)}$  и контур круга  $S_{(3-II)}$ :

$$\mu_{(3)} \oint_{S_{(3)}} \varphi_{(3)}(z) d\bar{z} = \mu_{(3)} \left( \oint_{S_{(3-I)}} \varphi_{(3)}(z) d\bar{z} + \oint_{S_{(3-II)}} \varphi_{(3)}(z) d\bar{z} \right). \quad (2.276)$$

Контур квадратной формы  $S_{(3-I)}$  можно преобразовать в окружность равновеликого круга и эквивалентная площадь  $A^{(3)}$  показывается на рис. 2.18.



**Рис. 2.18** Контурное интегрирование для эквивалентной площади  $A^{(3)}$

Интегрируя по контуру  $S_{(3-I)}$  выражение в скобке (2.276), имеем

$$\begin{aligned} \mu^{(3)} \oint_{S_{(3-I)}} \varphi_{(3)}(z) d\bar{z} &= \mu^{(3)} R^2 \oint_{S_{(3-I)}} \omega_{(3)}(\zeta) d\zeta = \\ &= \mu^{(3)} R^2 \left[ 2\pi i a_0^{(3)} - 2\pi i a_{2k+2}^{(3)} \lambda^{2k+2} \right]. \end{aligned} \quad (2.277)$$

Пусть  $R = r_{(2)}$ ,  $k = 0$  и  $\frac{\pi r_{(2)}^2}{l_{cell}^2} = 1$ . Итак, из (2.277) имеем

$$\mu^{(3)} \oint_{S_{(3-I)}} \varphi_{(3)}(z) d\bar{z} = \mu^{(3)} \left[ 2il_{cell}^2 a_0^{(3)} - 2il_{cell}^2 \lambda^2 a_2^{(3)} \right]. \quad (2.278)$$

А для контура  $S_{(3-II)}$  аналогично имеем

$$\mu^{(3)} \oint_{S_{(3-II)}} \varphi_{(3)}(z) d\bar{z} = \mu^{(3)} \left[ -2il_{cell}^2 \left( \frac{\pi r_{(2)}^2}{l_{cell}^2} \right) a_0^{(3)} + 2il_{cell}^2 \left( \frac{\pi r_{(2)}^2}{l_{cell}^2} \right) \lambda^2 a_2^{(3)} \right]. \quad (2.279)$$

Итак, на основании (2.278) и (2.279), равенство (2.276) принимает вид

$$\mu^{(3)} \oint_{S_{(3)}} \varphi_{(3)}(z) d\bar{z} = \mu^{(3)} \left[ c_{(3)} a_0^{(3)} - c_{(3)} \lambda^2 a_2^{(3)} \right], \quad (2.280)$$

где объемная доля матрицы:  $c_{(3)} = 1 - \pi r_{(2)}^2 / l_{cell}^2$ ; и  $c_{(1)} + c_{(2)} + c_{(3)} = 1$ . Таким образом,

пользуя (2.271), (2.274) и (2.280), получаем, что средними напряжениями  $\sigma_{31}^*$  и  $\sigma_{32}^*$

(2.267) являются

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{31} - i\sigma_{32} \rangle &= \sigma_{31}^* - i\sigma_{32}^* = \\ &= 2\mu^{(1)} c_{(1)} a_0^{(1)} + 2\mu^{(2)} (c_{(1)} + c_{(2)}) a_0^{(2)} + 2\mu^{(2)} (c_{(1)} a_0^{(3)} + c_{(2)} \lambda^{(2)} a_2^{(3)}). \end{aligned} \quad (2.281)$$

Далее, определяем соотношение неизвестных констант  $a_0^{(1)}, a_0^{(2)}, a_0^{(3)}$  и  $a_2^{(3)}$ . С помощью (2.261) рассмотрим контактную задачу между волокном и вискеризованном межфазном слоем

$$\left(1 + \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}}\right) a_0^{(1)} + \left(1 - \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}}\right) \bar{a}_0^{(1)} = 2a_0^{(2)} \quad (2.282)$$

При этом учитывается только первый член в разложениях (2.262) и (2.263), и поэтому, из равенства (2.282) получаем

$$a_0^{(1)} = \frac{2a_0^{(2)}}{1 + \mu^{(1)}/\mu^{(2)}}. \quad (2.283)$$

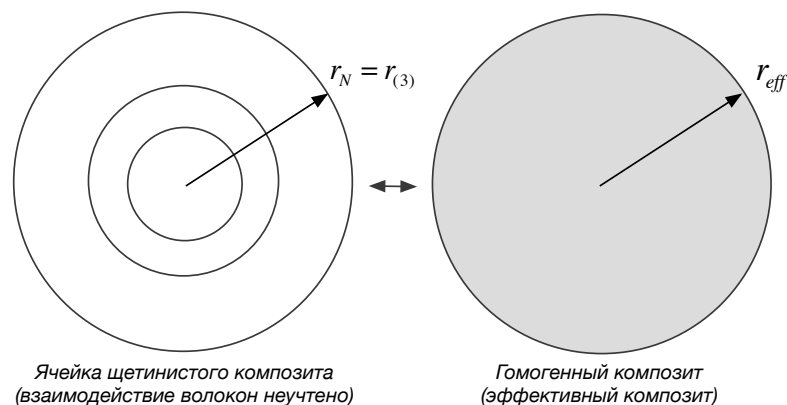
А для контакта между вискеризованном слоем и матрицей, аналогично получаем

$$a_0^{(2)} = \frac{2a_0^{(3)}}{1 + \mu^{(2)}/\mu^{(3)}}, \quad (2.284)$$

и учитывая (2.284), равенство (2.283) преобразует к виду

$$a_0^{(1)} = \frac{4a_0^{(3)}}{\left(1 + \mu^{(1)}/\mu^{(2)}\right)\left(1 + \mu^{(2)}/\mu^{(3)}\right)}, \quad (2.285)$$

Теперь ищем среднюю деформацию сдвига (угол сдвига) гомогенного композита. Сначала определяем ячейки гетерогенного и гомогенного композита, которая не учтено взаимодействие волокон в ячейке. Такие ячейки показаны на рис. 2. 19.



**Рис. 2.19** Ячейки гетерогенного и гомогенного композита.

В задаче чистого сдвига вдоль волокон считается, что средняя деформация сдвига для гетерогенного материала равна деформации гомогенного материала  $\gamma^{(3)} = \gamma^{eff} = \gamma^*$ . Поэтому, средние деформации композита согласно выражению (2.249) имеют вид

$$\begin{aligned}\gamma_{31}^* &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \left(a_0^{(3)} + \overline{a_0^{(3)}}\right) + \lambda^2 \left(a_2^{(3)} + \overline{a_2^{(3)}}\right), \\ \gamma_{32}^* &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = i \left[ \left(a_0^{(3)} - \overline{a_0^{(3)}}\right) + \lambda^2 \left(a_2^{(3)} - \overline{a_2^{(3)}}\right) \right].\end{aligned}\quad (2.286)$$

Выражая  $a_2^{(3)}$  через  $a_0^{(3)}$  с помощью контактного условия, выражение  $\gamma_{31}^*$  принимает вид

$$\gamma_{31}^* = 2 \operatorname{Re} \left\{ a_0^{(3)} \right\} \left[ 1 + (c_{(1)} + c_{(2)}) \frac{1 - (\mu^{(2)}/\mu^{(3)})}{1 + (\mu^{(2)}/\mu^{(3)})} \right]. \quad (2.287)$$

Таким образом, на основании формулы (2.265), (2.281) и (2.287), выражение эффективного модуля сдвига имеет вид

$$\begin{aligned}\mu_{31}^{eff} &= \sigma_{31}^{eff} / \gamma_{31}^{eff} = \\ &= \frac{2\mu^{(3)} \left( c_{(3)} a_0^{(3)} - c_{(3)} (c_{(2)} + c_{(1)}) a_2^{(3)} \right) + 2\mu^{(2)} (c_{(2)} + c_{(1)}) a_0^{(2)} + 2\mu^{(1)} c_{(1)} a_0^{(1)}}{2a_0^{(3)} \left[ 1 + (1 - c_{(3)}) \frac{1 - (\mu^{(2)}/\mu^{(2)})}{1 + (\mu^{(2)}/\mu^{(2)})} \right]}.\end{aligned}\quad (2.288)$$

В работе [90,92] вместо (2.288) предложено использовать приближенное соотношение

$$\mu_{31}^{eff} = \frac{2\mu^{(3)} c_{(3)} a_0^{(3)} + 2\mu^{(2)} c_{(2)} a_0^{(2)} + 2\mu^{(1)} c_{(1)} a_0^{(1)}}{2a_0^{(3)} \left[ 1 + (1 - c_{(3)}) \frac{1 - (\mu^{(2)}/\mu^{(2)})}{1 + (\mu^{(2)}/\mu^{(2)})} \right]}.\quad (2.289)$$

Далее, с помощью уравнений (2.283) и (2.285) и алгебраической манипуляции равенство (2.289) приводится к виду

$$\mu_{31}^{eff} = \mu^{(3)} \frac{c_{(3)} + 2c_{(2)} + c_{(3)} \frac{\mu^{(3)}}{\mu^{(2)}} + \frac{4c_{(1)}}{1 + \mu^{(2)}/\mu^{(1)}}}{c_{(3)} + (2 - c_{(3)}) \frac{\mu^{(3)}}{\mu^{(2)}}}.\quad (2.290)$$

## 2.6 Анализ построенных решений

### 2.6.1 Сравнительный анализ метода трех фаз с методом двух фаз и методом комплексных потенциалов

В качестве конкретного примера, мы оценим эффективные механические свойства однонаправленного вискеризованного волокнистого композита, который состоит из углеродных волокон (марки IM7), вискеризованных нанопроволоками оксида цинка (ZnO). Известными являются следующие характеристики композитной структуры: диаметр волокна — 5,2 мкм, длина и диаметр вискерса — 500 нм и 50 нм, соответственно. Поверхности волокон окружены вискерсами с максимальной плотностью (плотность — 100%) и объемная доля вискерсов в вискеризованном межфазном слое — 71%. Матрица и вискерсы считаются изотропными. Углеродное волокно является трансверсально-изотропным с плоскостью изотропии поперек волокна. Механические характеристики компонент композита даны в таблице 2.1.

**Таблица 2.1** Параметры компонент композита (Приложение А.2)

IM7 углеродное волокно	Эпоксидная матрица	Вискерс – ZnO
$E_L = 256,76$ ГПа	$E = 2,9$ ГПа	$E = 140$ ГПа
$E_T = 25,51$ ГПа	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,35$
$\mu_L = 22,06$ ГПа		
$\mu_T = 9,25$ ГПа		
$\nu_{LT} = 0,289$		

На основе представленного объемного элемента (см. рис. 2.5) величины радиусов компонент:  $r_{(1)} = 2,6$  мкм,  $r_{(2)} = 3,1$  мкм, а  $r_{(3)}$  зависит от концентрации включения (волокно плюс вискеризованный слой) в третьей фазе (матрице), где  $r_{(3)} = r_{(2)} / \sqrt{1-c}$  и на основе гексагональной упаковки концентрация третьей фазы —  $0,08 \leq c \leq 1$ . Итак, концентрации волокон —  $V_f = r_{(1)}^2 / r_{(3)}^2$ . Следует отметить, что без вискеризованного межфазного слоя радиусы  $r_{(1)}$  и  $r_{(2)}$  одинаковы. Теперь

определяем упругие константы для каждой фазы композита. На основе материальных параметров углеродного волокна (см. табл. 2.1) и соотношений, данных в (Б.16) и (Б.17) упругие константы первой фазы (2.15) имеют вид

$$[C_{ij}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 30,3506 & 11,8506 & 12,1962 & 0 & 0 & 0 \\ 11,8506 & 30,3506 & 12,1962 & 0 & 0 & 0 \\ 12,1962 & 12,1962 & 263,809 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22,06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 22,06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9,25 \end{bmatrix}.$$

Для второй компоненты сначала нужно найти эффективные свойства вискеризованного межфазного слоя и с помощью материальных параметров (см. табл. 2.1) и уравнений (2.10 – 2.14) получаем

$$E_{11}^{(2)} = 100,70 \text{ GPa}, \quad \nu_{12}^{(2)} = 0,339, \quad K_{23}^{(2)} = 11,84 \text{ GPa}, \\ \mu_{23}^{(2)} = 5,52 \text{ GPa}, \quad \mu_{12}^{(2)} = 5,93 \text{ GPa}.$$

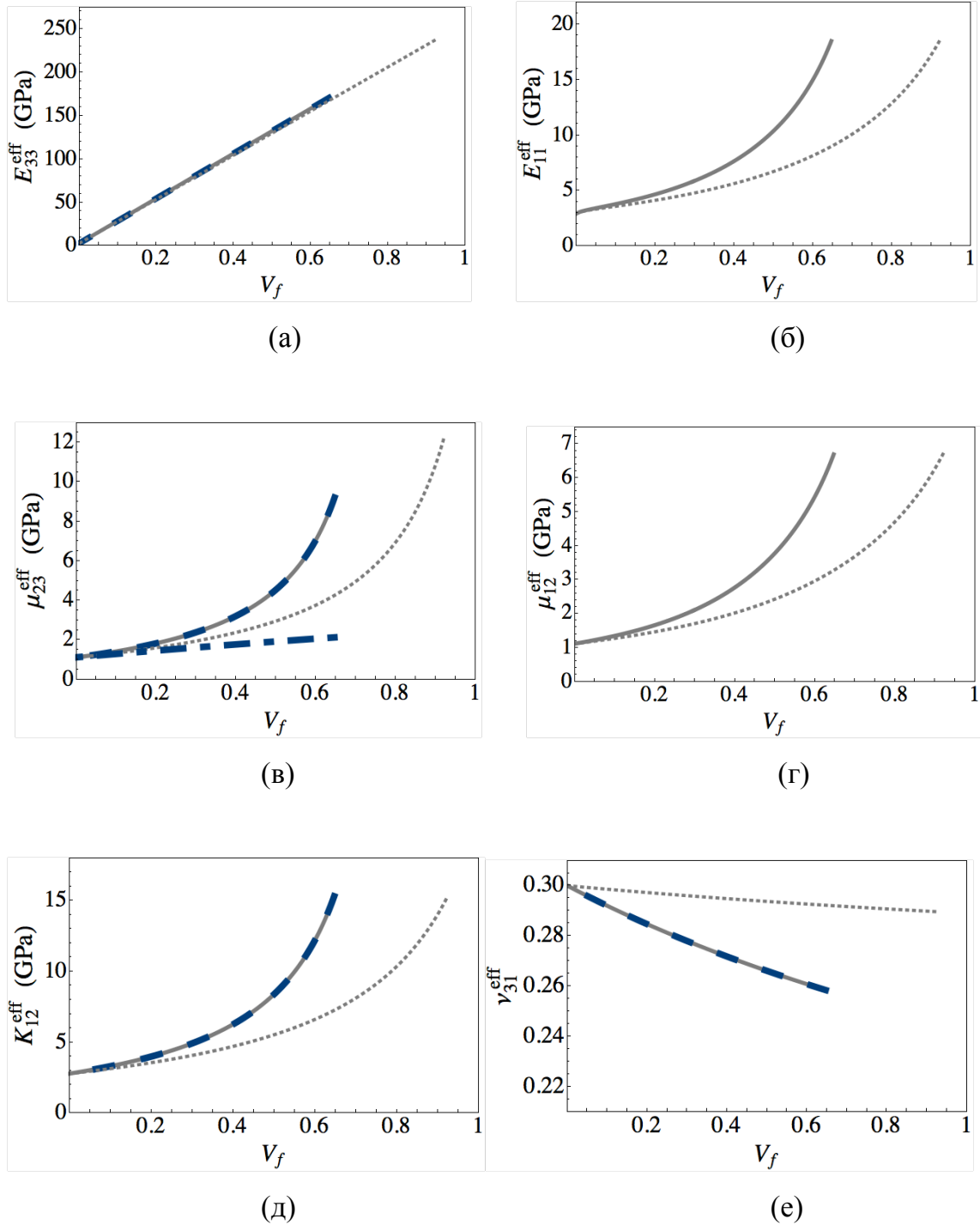
Итак, на основании (Б.27) упругие константы второй компоненты имеют вид

$$[C_{ij}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 106,108 & 7,98334 & 7,98334 & 0 & 0 & 0 \\ 7,98334 & 17,3047 & 6,2594 & 0 & 0 & 0 \\ 7,98334 & 6,2594 & 17,3047 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5,52266 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5,92801 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,92801 \end{bmatrix}.$$

Наконец, пользуясь (В.8), упругие константы для матрицы принимает вид

$$[C_{ij}^{(3)}] = \begin{bmatrix} 3,90385 & 1,67308 & 1,67308 & 0 & 0 & 0 \\ 1,67308 & 3,90385 & 1,67308 & 0 & 0 & 0 \\ 1,67308 & 1,67308 & 3,90385 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,11538 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,11538 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,11538 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, на рис. 2.20 представлены эффективные свойства композита, полученные с использованием различных методов: нашим предлагаемым методом трех фаз, методом двух фаз [93] и методом комплексных потенциалов [90,91].



**Рис. 2.20** Зависимости эффективных свойств вискеризованного волокнистого композита от объемной доли волокон ( $V_f$ ) для: а) продольного модуля Юнга; б) поперечного модуля Юнга; в) модуля продольного сдвига; г) модуля поперечного сдвига; д) объемного модуля плоской деформации, и е) коэффициента Пуассона. Тонкая прямая линия — метод трех фаз, толстая штриховая линия — метод двух фаз [93], толстая пунктирно-штриховая линия — метод комплексных потенциалов [90,91], и тонкая пунктирная линия — композит без вискерсов.



Как и ожидалось, метод двух фаз, основанный на полидисперсной модели дает фактически те же результаты, что и метод трех фаз, развиваемых нами для определения эффективных продольного модуля Юнга, продольного модуля сдвига, объемного модуля плоской деформации и коэффициента Пуассона. Такое совпадение результатов в методах двух и трех фаз уже отмечалось ранее в работах Кристенсена [39] и Хашина [58]. С другой стороны, как упоминалось ранее, метод двух фаз дает лишь верхние и нижние пределы для эффективного поперечного модуля и неприемлем для получения уточненных оценок этого модуля упругости. Поэтому при решении этой задачи использовался метод трех фаз, чтобы наиболее полно определить свойства трансверсально-изотропных материалов.

Сравнение результатов расчета для продольного модуля сдвига, полученных нами методом трех фаз и найденных ранее с использованием комплексных потенциалов показывает, что результаты сопоставимы только при очень низкой концентрации волокон в композите (меньше чем 0,05%) и, следовательно применение этого метода ограничено очень малыми концентрациями волокон.

Следует отметить, что максимальная допустимая объемная доля волокон в вискеризованном волокнистом композите всегда меньше максимальной концентрации волокон в обычном композите. Это обстоятельство следует учитывать при моделировании, так как длина вискерса или толщина вискеризованного межфазного слоя ограничивает максимальную допустимую концентрацию волокон в композите. И наоборот, следует учитывать, что максимальная длина вискерса имеет ограничения при заданной постоянной объемной доли волокон в композите (в представленном элементе объема). Если это максимальное значение превышено, то вискеризованные межфазные слоя в композите будут пересекаться друг с другом и такое условие нарушает предположение об изолированности включений, использованное в модели трех фаз. Тем не менее, по рисунку 2.20 максимальная объемная доля волокон для конкретной рассматриваемой конфигурации композита весьма значительна и равна 64%.

Наконец, очевидно, что из-за наличия вискерсов, выращенных на поверхностях волокон, эффективные сдвиговые и поперечные свойства композита значительно возрастают. И это мы будем подробно обсуждать в разделе 2.7.

### 2.6.3 Сравнительный анализ полученных результатов с результатами, полученными методом асимптотического осреднения [94]

Здесь, сравниваются величины эффективных модулей продольного сдвига однонаправленного вискеризованного волокнистого композита, полученные из предлагаемого метода Эшелби и метода конечных элементов, используемого в работе [94] для получения решения на ячейке периодичности. Характеристики композита определяются следующими параметрами: диаметр волокна — 5 мкм, длина и диаметр вискерса — 2000 нм и 0.85 нм соответственно. Объемная доля вискерсов в вискеризованном межфазном слое — 42,17%. Материальные характеристики композита даны в таблице 2.2.

**Таблица 2.2** Параметры компонент композита (Приложение А.1)

Углеродное волокно (марка Т650)	Эпоксидная матрица	Вискерсы – УНТ
$E_L = 241$ ГПа	$E = 3$ ГПа	$E = 1100$ ГПа
$E_T = 14,5$ ГПа	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,14$
$\mu_L = 22,8$ ГПа		
$\mu_T = 4,8$ ГПа		
$\nu_{LT} = 0,27$		

В методе конечных элементов, который использован при реализации метода асимптотического разложения, используются два типа упаковки — квадратная и гексагональная при определении эффективных свойств вискеризованного межфазного слоя. Также, свойства этого слоя считаются не постоянными по длине вискерсов. Результаты сравнения для композита, у которого есть 60% концентрации включений (т.е. объемной доли волокна и вискеризованного межфазного слоя) показаны в таблице 2.3. Видно, что совпадение исключительно хорошее.

**Таблица 2.3** Эффективные свойства композита на основе фуззи-волокон, полученные из метода конечных элементов [94] и аналитического метода Эшелби (метода трех фаз)

Упаковка вискеризованного межфазного слоя	Продольный модуль Юнга (ГПа)	Поперечный модуль Юнга (ГПа)	Продольный модуль сдвига (ГПа)	Поперечный модуль сдвига (ГПа)	Объемный модуль плоской деформации (ГПа)
Квадратная	50,10	6,89	2,65	2,38	6,40
Гексагональная	49,45	6,92	2,55	2,39	6,40
Аналитическое решение	48,90	7,08	2,43	2,47	6,41

### 2.6.3 Сравнительный анализ с экспериментальными данными [4]

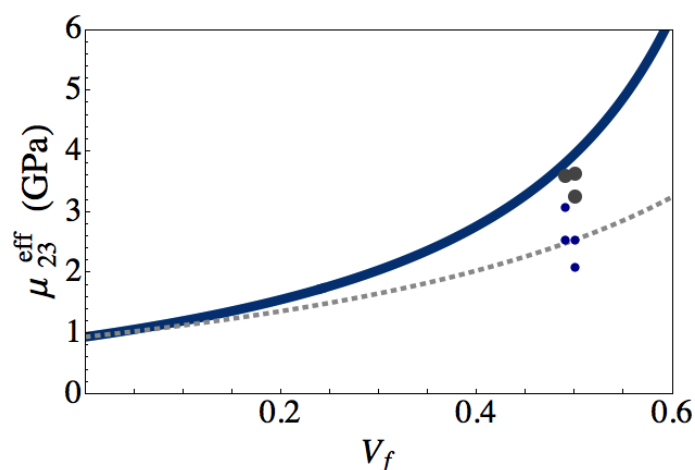
В этом разделе, сравниваются найденные величины модуля продольного сдвига с экспериментальными данными для обычных композитов и вискеризованных волокнистых композитов. Эти данные были получены Элртом [124] из испытания на сдвиг ASTM 5379 [126]. Характеристики рассматриваемого композита определяются следующими параметрами: диаметр волокна — 5,2 мкм, длина и диаметр вискерса — 500 нм и 50 нм соответственно. Поверхности волокон окружены вискерсами с максимальной плотностью (плотность — 100%) и объемная доля вискерсов в вискеризованном межфазном слое — 71%. Механические характеристики компонент композита даны в таблице 2.4.

**Таблица 2.4** Параметры компонент композита

Углеродное волокно (Марка: IM7) [102]	Эпоксидная матрица (Марки: Epon 862 resin + Epikure 9554 hardener) [124,125]	Вискерсы – ZnO [102,127]
--	--	--------------------------------

$E_L = 256,76$ ГПа	$E = 2,55$ ГПа	$E = 140$ ГПа
$E_T = 25,51$ ГПа	$\nu = 0,353$	$\nu = 0,35$
$\mu_L = 22,06$ ГПа		
$\mu_T = 9,25$ ГПа		
$\nu_{LT} = 0,289$		

В таблице 2.5 и на рисунке 2.21 представлены результаты сравнения модулей продольного сдвига. Видно, что в случае композита без вискерсов предлагаемый метод дает практически тот же результат со экспериментальными данными, а для вискеризованного волокнистого композита — наблюдается хорошее соответствие между нашим расчетом и экспериментом. Маленькая разница между ними, может быть, связана с качеством образцов или эксперимента, и также предположениями, используемыми в нашей модели, а также со свойствами нанопроволоки. Тем не менее, можно сказать, что предлагаемая модель является хорошей основой для моделирования эффективных свойств вискеризованных волокнистых композитов. Оказывается также, что хотя и метод трех фаз основан на изолированном включении, он дает хорошие точные результаты для конечных и достаточно высоких концентраций включений.



**Рис. 2.21** Эффективный модуль продольного сдвига. Прямая толстая линия — метод Эшелби (трех фаз), пунктирная линия — композит без вискерсов, толстая точка — экспериментальные данные композита с вискерсами, и тонкая точка — экспериментальные данные композита без вискерсов.

**Таблица 2.5** Сравнение модулей продольного сдвига композита между экспериментальными данными [124] и расчетными величинами, полученными по методу Эшелби.

Образцы ( $V_f \approx 50\%$ )	Экспериментальные величины (ГПа)	Эффективный модуль сдвига (ГПа)	Разница в процентах (%)
Без вискерсов 1	3,07		-20,8
Без вискерсов 2	2,53		0,4
Без вискерсов 3	2,53	2,54	0,4
Без вискерсов 4	2,53		0,4
Без вискерсов 5	2,08		18,1
С вискерсами 1	3,64		7,5
С вискерсами 2	3,25	3,95	17,7
С вискерсами 3	3,59		9,1

## 2.7 Анализ на эффективные упругие и демпфирующие свойства по методу самосогласованного поля Эшелби (методу трех фаз)

Как упоминалось ранее, эффективные динамические характеристики находятся методом комплексных модулей, в соответствии с которым в полученные решения для эффективных упругих модулей композита подставляются значения комплексных модулей. Выделяя действительную и мнимую часть, в итоге получаем значения эффективных упругих модулей упругости и модулей потерь композита, определяющих диссипативные свойства.

Рассматривается волокнистый композит, который состоит из углеродных волокон (марки IM7), вискеризованных нанопроволоками цинка оксида (ZnO) и эпоксидной матрицы. Характеристики композита определяются следующими параметрами: диаметр волокна — 5,2 мкм, длина и диаметр вискерса — 500 нм и 50 нм соответственно. Поверхности волокон окружены вискерсами с максимальной плотностью (плотность — 100%) и объемная доля вискерсов в

вискеризованном межфазном слое — 71%. Материальные характеристики композита даны в таблице 2.6.

**Таблица 2.6** Параметры материалов композита [113]

ИМ7 углеродное волокно	Эпоксидная матрица	Вискерс – ZnO
$E_L = 256,76$ ГПа	$k = 2,5$ ГПа	$E = 140$ ГПа
$E_T = 25,51$ ГПа	$\mu = 2,5 + 0,005 i$ ГПа	$\nu = 0,35$
$\mu_L = 22,06$ ГПа		
$\mu_T = 9,25$ ГПа		
$\nu_{LT} = 0,289$		

Как показано ранее, углеродное волокно считается трансверсально-изотропным с плоскостью изотропии поперек волокна, и матрица и вискерсы являются изотропными. Однако, чтобы определить эффективные упругие и демпфирующие свойства такого композита, матрица считается как вязкоупругий материал и ее эффективные свойства даны следующим образом

$$\begin{aligned}
 E_{11}^{(2)} &= 101,55 + 0,0029i \text{ GPa}, & \nu_{12}^{(2)} &= 0,304 - 0,00009i, \\
 K_{23}^{(2)} &= 18,75 + 0,0193i \text{ GPa}, & \mu_{23}^{(2)} &= 11,69 + 0,0183i \text{ GPa}, \\
 \mu_{12}^{(2)} &= 9,552 + 0,0132i \text{ GPa}.
 \end{aligned}$$

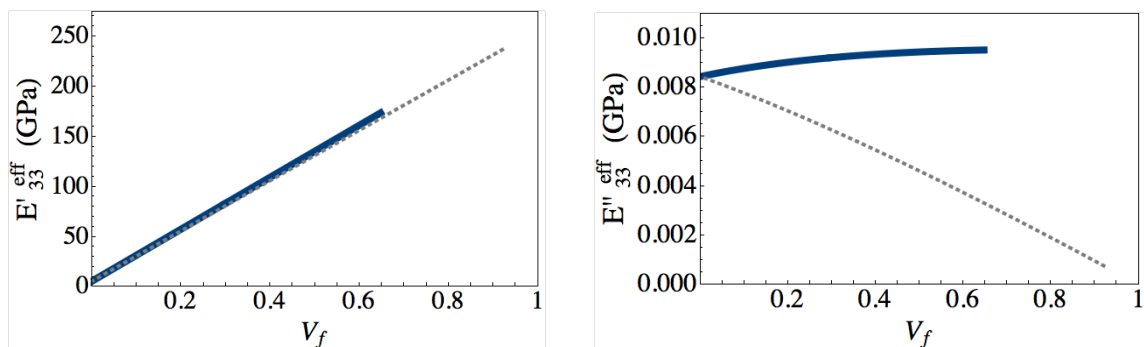
Итак, компонентами упругих модулей вискеризованного слоя являются

$$\left[ C_{ij}^{(2)} \right] = \begin{bmatrix} 108,494 + 0,00554i & 11,409 + 0,00805i & 11,409 + 0,00805i & 0 & 0 & 0 \\ 11,409 + 0,00805i & 28,297 + 0,03253i & 9,193 + 0,00610i & 0 & 0 & 0 \\ 11,409 + 0,00805i & 9,193 + 0,00610i & 28,297 + 0,03253i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9,552 + 0,01321i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11,693 + 0,01834i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11,693 + 0,01834i \end{bmatrix},$$

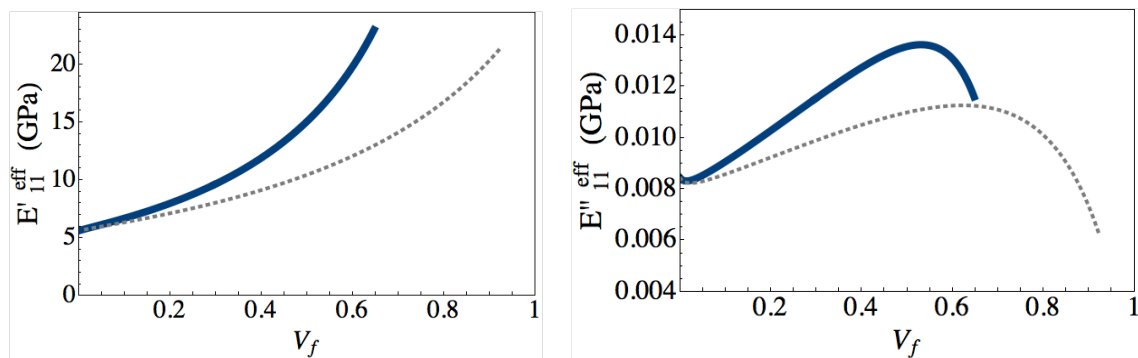
и с помощью (B.4) и (B.5) для матрицы имеем

$$[C_{ij}^{(3)}] = \begin{bmatrix} 5,883+0,00667i & 0,833-0,00333i & 0,833-0,00333i & 0 & 0 & 0 \\ 0,833-0,00333i & 5,883+0,00667i & 0,833-0,00333i & 0 & 0 & 0 \\ 0,833-0,00333i & 0,833-0,00333i & 5,883+0,00667i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,5+0,005i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,5+0,005i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,5+0,005i \end{bmatrix}$$

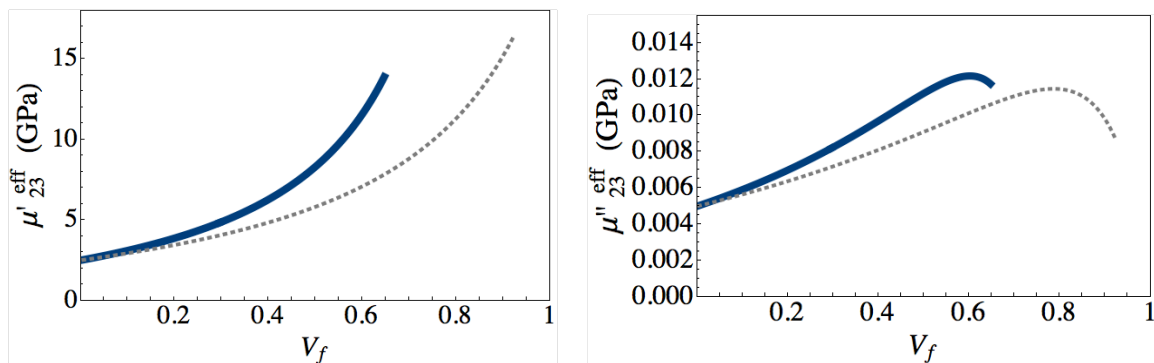
На рис. 2.22 представлены эффективные модули накопления и потерь конкретного вискеризованного волокнистого композита, полученные из методов самосогласованного поля Эшелби и вязкоупругого комплексного модуля.



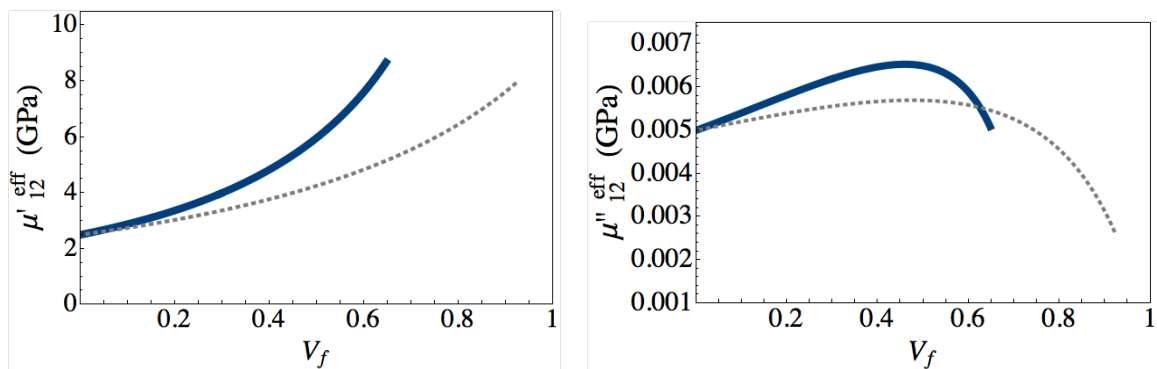
а) Модули накопления и потерь продольного Юнга



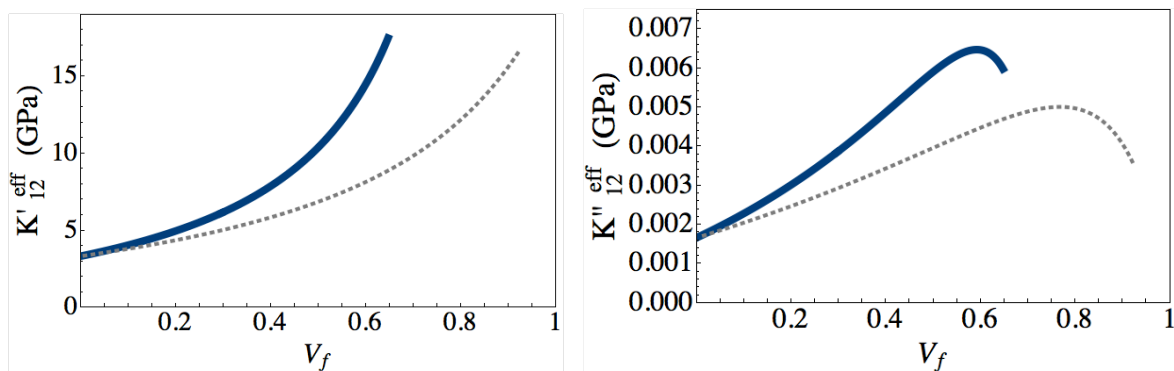
б) Модули накопления и потерь поперечного Юнга



в) Модули накопления и потерь продольного сдвига



г) Модули накопления и потерь поперечного сдвига



д) Объемные модули накопления и потерь плоской деформации

**Рис. 2.22** Зависимости эффективных динамических свойств вискеризованного волокнистого композита от объемной доли волокон ( $V_f$ ) для: а) продольных модулей Юнга накопления и потерь; б) поперечных модулей Юнга накопления и потерь; в) продольных модулей сдвига накопления и потерь; г) поперечных модулей сдвига накопления и потерь, и д) объемных модулей плоской деформации накопления и потерь. Толстая прямая линия — вискеризованный волокнистый композит (метод трех фаз), и тонкая пунктирная линия — композит без вискерсов.

Из рис. 2.22 преимущества вискеризованный волокнистого композита очевидны по сравнению с обычным композитом. В случае модуля накопления присутствие вискерсов значительно повышает сдвиговые и поперечные характеристики композита особенно при большом объемной доли волокон. Тем не менее, присутствие вискерсов мало влияет на эффективный продольный модуль Юнга. Это ожидалось, так как вискеризованный межфазный слой обеспечивает поперечное укрепление волокон. При 50% концентрации волокон эффективный поперечный модуль накопления Юнга, эффективные модули накопления



продольного и поперечного сдвига, и объемный модуль накопления плоской деформации улучшены на 44%, 43%, 40% и 52% соответственно, а эффективный продольный модуль накопления Юнга — меньше чем, 4%. Существенное увеличение эффективных соответствующих модулей накопления может быть объяснено уменьшением концентрации матрицы в представленном элементе объема и замещением ее вискеризованным межфазным слоем при постоянной объемной доли волокон. Иными словами, поскольку свойства вискеризованного межфазного слоя больше чем свойства матрицы, то эффективные свойства вискеризованного волокнистого композита лучше свойств обычного композита.

В случае демпфирующих характеристик композита все эффективные модули потерь улучшены. При 50% концентрации волокон эффективные модули потерь продольного и поперечного Юнга, модули потерь продольного и поперечного сдвига, и объемный модуль потерь плоской деформации повышаются на 105%, 23%, 23%, 14% и 49% соответственно. Можно видеть, что, имеет место более значительное улучшение эффективных модулей накопления по сравнению с улучшением эффективных модулей потерь. Иная картина наблюдается для модуля накопления продольного Юнга. Здесь значительное улучшение эффективного продольного модуля потерь Юнга вискеризованного волокнистого композита может быть объяснено низкими демпфирующими характеристиками композита без вискеризованного межфазного слоя. В продольном направлении волокна, демпфирующая характеристика композита без вискерсов диктуется волокном [114] и поэтому, при повышении концентрации волокон уменьшается эффективный продольный модуль потерь Юнга. Это связано с тем, что матрица фактически является источником демпфирующего механизма композита [64]. Чем меньше концентрации матрицы в композите, тем меньше продольный модуль потерь Юнга. Однако, при присутствии вискерсов это сокращение компенсируется демпфирующим механизмом, обеспечивающим вискеризованным межфазным слоем. Демпфирование вискеризованного волокнистого композита не подает хотя и концентрация волокон увеличивает потому, что концентрация вискеризованного межфазного слоя, обеспечивающего дополнительное демпфирование повышает при уменьшении объемной доли матрицы в представленном элементе объема. Таким образом, при сравнении значений эффективных продольных модулей потерь

Юнга между композитами без и с вискеризованным межфазным слоем, рассматриваемое улучшение может быть очень существенно.

Чтобы понять причину улучшения для других эффективных модулей потерь вискеризованного межфазного композита, нужно сначала понять демпфирующий механизм в композите без вискерсов. В обычном композите демпфирование в поперечном направлении волокна и также демпфирование связанное со сдвиговыми напряженными диктуются матрицей [64]. Однако, при повышении концентрации волокон сдвиговое и поперечное демпфирование обычного композита не падают потому, что существует разный механизм демпфирования, связанный с высокими сдвиговыми напряжениями, которые возникают из-за большой концентрации жестких волокон [115]. Итак, из-за наличия вискеризованного межфазного слоя, который имеет лучшие демпфирующие характеристики, могут быть получены более высокие эффективные сдвиговые и поперечные модули потерь композита.

## **2.8 Выводы к главе 2**

В работе проведено исследование прикладной континуальной модели в применении к прогнозу механических свойств наноструктурированных сред (композитов, армированных волокнами, вискеризованными микро- или наноструктурами — вискерсами: УНТ или нанопроволоками). Продемонстрирована возможность адекватного описания свойств вискеризованных волокнистых композитов в рамках классической теории упругости.

При определении окончательных эффективных свойств таких композитов предложена трактовка гипотез о вискеризованном межфазном слое, сформированном из вискерсов и матрицы, и создана приближенная геометрическая модель для этого слоя с учетом характеристик (длины, плотности или количества, диаметра, свойств или типа материала и объемной доли) вискерсов. Доказано, что с помощью этой модели эффективные трансверсально-изотропные свойства этого слоя могут быть получены на основе метода трех фаз.

Показана достоверность предлагаемой модели путем сравнения полученных результатов этой модели с результатами, полученными с помощью других

аналитических моделей, основанных на методах двух фаз и комплексных потенциалов, методом конечных элементов, и также с экспериментальными данными.

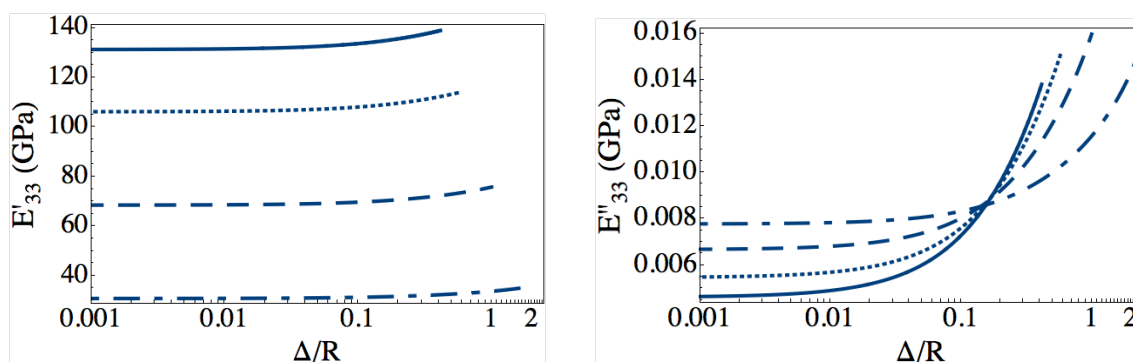
Решена задача определения эффективных динамических свойств вискеризованных волокнистых композитов с помощью метода трех фаз и комплексных модулей.

### 3.0 Влияние характеристик вискерсов на эффективных механических и динамических свойств вискеризованных волокнистых

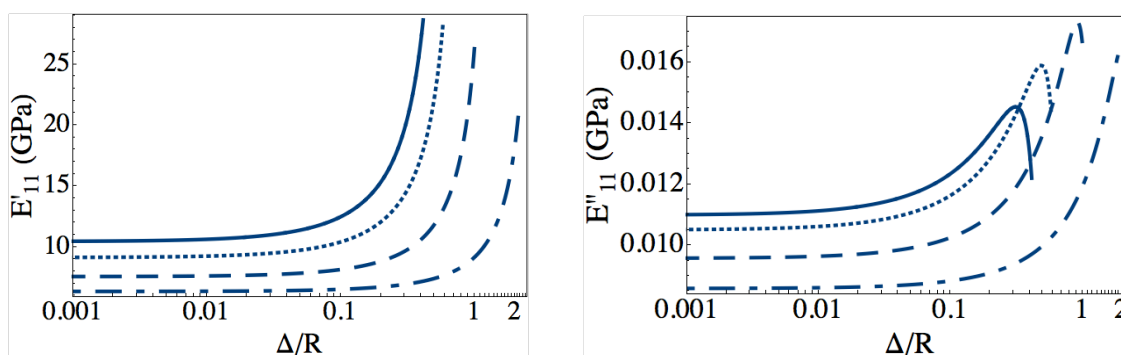
#### 3.1 Анализ влияния длины вискерсов

В этом разделе исследуется влияние длины вискерсов на эффективные динамические свойства вискеризованного волокнистого композита с различными концентрациями волокон  $V_f$ : 10%, 25%, 40% и 50%. Как и ранее, характеристики композита определяются следующими параметрами: диаметр волокна и вискерсов — 5,2 мкм и 50 нм, соответственно. Поверхность волокон окружена вискерсами с максимальной плотностью (плотность - 100%). Материальные параметры фаз даны в таблице 2.2. Результаты исследования представлены на рис. 3.1.

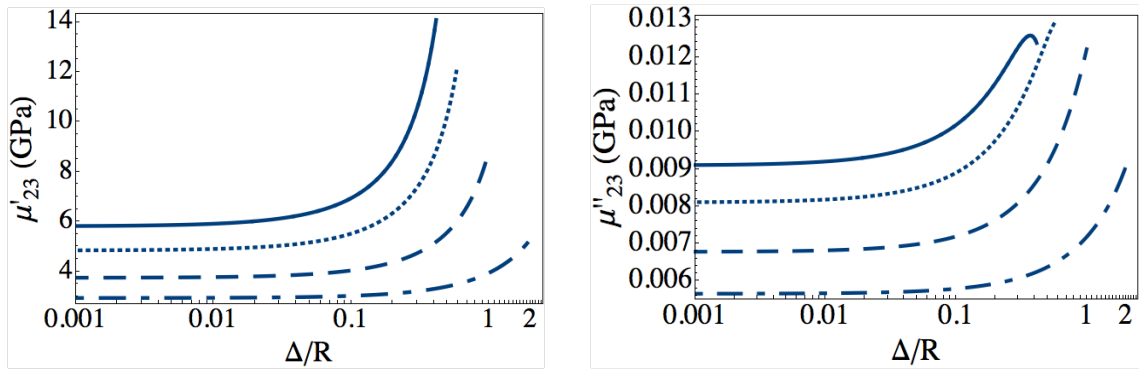
Можно увидеть, как правило, что чем больше длины вискерсов, тем больше эффективные модули накопления и потерь композита при постоянной концентрации волокон в композите.



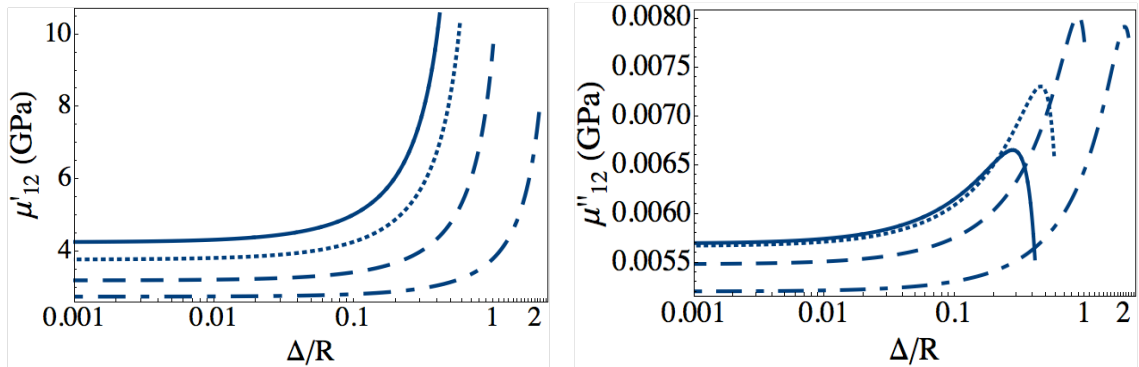
а) Модули накопления и потерь продольного Юнга



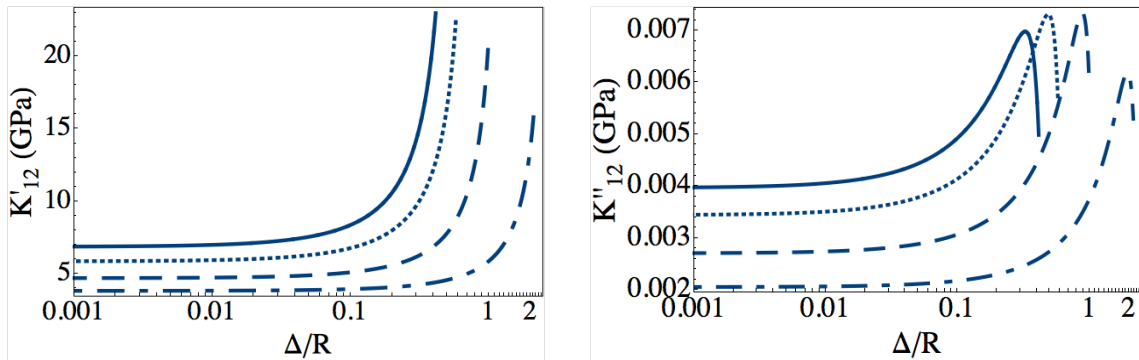
б) Модули накопления и потерь поперечного Юнга



в) Модули накопления и потерь продольного сдвига



г) Модули накопления и потерь поперечного сдвига



д) Объемные модули накопления и потерь плоской деформации

**Рис. 3.1** Зависимости эффективных динамических свойств вискеризованного волокнистого композита от длины вискерсов и объемной доли волокон для: а) продольных модулей Юнга накопления и потерь; б) поперечных модулей Юнга накопления и потерь; в) продольных модулей сдвига накопления и потерь; г) поперечных модулей сдвига накопления и потерь, и д) объемных модулей плоской деформации накопления и потерь. *Отношение длины вискерса к радиусу волокна  $\Delta/R$ :  $\Delta = r_{(2)} - r_{(1)}$  — длина вискерса, и  $R$  — радиус волокна ( $R = r_{(1)} = 5,2$  мкм); и объемная доля волокон: прямая линия —  $V_f = 50\%$ , пунктирная линия —  $V_f$*

= 40%, штриховая линия —  $V_f = 25\%$ , и пунктирно-штриховая линия —  $V_f = 10\%$ .

Плотность вискерсов  $\rho_b = 100\%$ .

Из рис 3.1 видно, что когда отношение  $\Delta/R \rightarrow 0,01$ , величины эффективных модулей накопления и потерь композита начинают возрастать. Кроме того, длина вискерсов сильно влияет на все эффективные модули накопления и потерь, кроме продольного модуля накопления Юнга, именно тогда, когда длина вискерсов достигает значений, близких к предельным, максимально допустимым длинам. Это наблюдение связано с большой концентрацией вискеризованного слоя и меньшей концентрацией матрицы в ячейке при постоянной объемной доли волокон. Поскольку эффективные свойства вискеризованного межфазного слоя выше свойств матрицы, то, следовательно, и композит, в котором межфазный слой имеет значительную длину вискерсов имеет большие эффективные модули накопления и потерь чем композит с более короткими вискерсами или без вискерсов. Таблица 3.1 показывает улучшение в процентах при сравнении эффективных динамических свойств композитов со значительной длиной вискерсов и без вискерсов.

Интересно отметить, что на основании формулы (2.8), объемная доля вискерсов в вискеризованном межфазном слое будет меньше и свойства этого слоя будут слабыми когда длина вискерсов становится больше. Однако, это условие может быть не существенным при оценке окончательных эффективных свойств композита. Таким образом, можно сказать, что длина вискерсов существенно влияет на окончательные эффективные динамические свойства вискеризованного волокнистого композита.

Следует отметить, что максимальные получаемые величины эффективных модулей потерь композита могут быть получены на низкой концентрации волокон, а величины эффективных модулей накопления всегда получены на самой высокой объемной доли волокон при приближении к величине, близкой к предельным, максимально допустимым длинам (см. рис. 3.1 и табл. 3.1). Далее, отмечено, что поведение эффективных динамических модулей накопления и потерь для объемного модуля плоской деформации, поперечного модуля Юнга, и продольного и поперечного сдвига подобны, т.е. эффект длинны вискерсов подобен на этих

модулях. Однако, поведение эффективного динамического модуля продольного сдвига накопления и потерь отличается.

**Таблица 3.1** Улучшение эффективных динамических свойств композитов с значительной длиной вискерсов и без вискерсов для объемной доли волокон – 50%, 25% и 10%.

Объемная доля	Эффективные свойства (с и без вискерсов)		Модуль накопления		Модуль Потерь		
			ГПа	%	ГПа	%	
50% ( $\Delta/R \approx 0,33$ )*	$E_{33}^{eff}$	С	137,65	0,05	0,0122	164	
		Без	131,24		0,0046		
	$E_{11}^{eff}$	С	21,26	103	0,0145	32	
		Без	10,46		0,0110		
	$\mu_{23}^{eff}$	С	11,20	93	0,0125	37	
		Без	5,81		0,0091		
	$\mu_{12}^{eff}$	С	8,14	91	0,0066	15	
		Без	4,25		0,0057		
	$K_{12}^{eff}$	С	15,69	129	0,0070	76	
		Без	6,85		0,0040		
	25% ( $\Delta/R \approx 0,89$ )*	$E_{33}^{eff}$	С	75,11	9,7	0,0151	125
			Без	68,45		0,0067	
$E_{11}^{eff}$		С	20,69	173	0,0172	79	
		Без	7,57		0,0096		
$\mu_{23}^{eff}$		С	7,88	111	0,0115	69	
		Без	3,74		0,0068		
$\mu_{12}^{eff}$		С	7,90	147	0,0080	45	
		Без	3,20		0,0055		
$K_{12}^{eff}$		С	15,39	228	0,0073	170	
		Без	4,69		0,0027		
10%	$E_{33}^{eff}$	С	35,55	15	0,0142	82	
		Без	30,76		0,0078		

$(\Delta/R \approx 1,95)^*$	$E_{11}^{eff}$	С	17,36	174	0,0166	93
		Без	6,35		0,0086	
	$\mu_{23}^{eff}$	С	5,20	77	0,0090	61
		Без	2,93		0,0056	
	$\mu_{12}^{eff}$	С	6,67	143	0,0079	52
		Без	2,75		0,0052	
	$K_{12}^{eff}$	С	12,80	236	0,0062	195
		Без	3,81		0,0021	

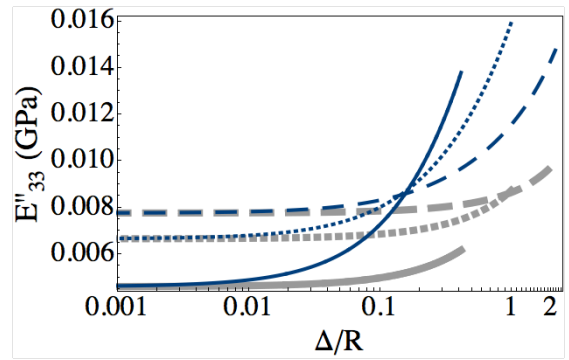
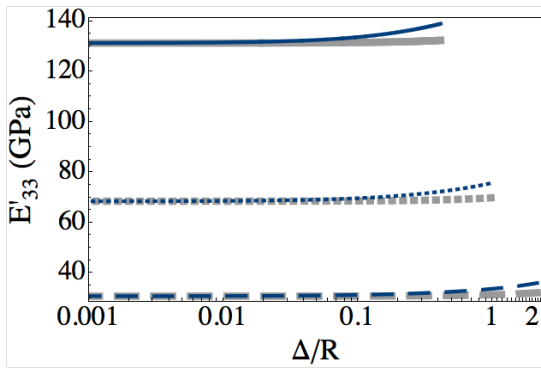
\* Приведенное соотношение  $\Delta/R$  принято на оптимальной величине модуля потерь для каждой рассмотренной объемной доли волокон.

### 3.2 Анализ влияния плотности (количества) вискерсов

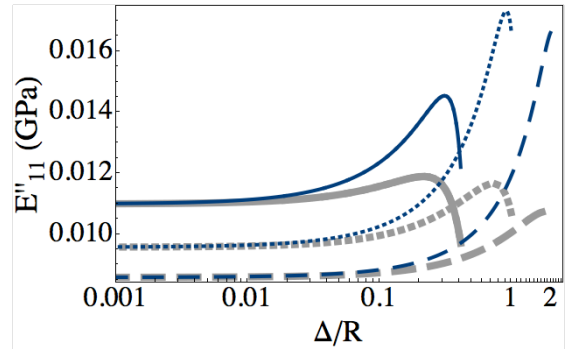
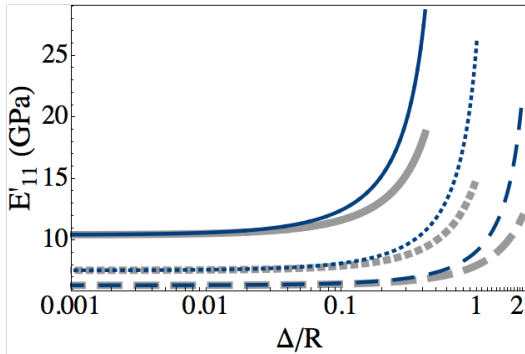
Теперь рассматривается влияние плотности (количества) вискерсов, выращенных на единичной поверхности волокна на эффективные динамические свойства вискеризованного волокнистого композита с различными концентрациями волокон  $V_f$ : 10%, 25% и 50% и изменением отношения длины вискерса к радиусу волокна  $\Delta/R$ . Чтобы понять эффект плотности, исследуются две различные плотности вискерсов:  $\rho_b = 100\%$  и  $50\%$ . Характеристики композита определяются теми же параметрами: диаметр волокна и диаметр вискерсов — 5,2 мкм и 50 нм, соответственно, и свойства фаз, заданные в табл. 2.2. Результаты исследования иллюстрированы на рис. 3.2 и табл. 3.2.

Из рис. 3.2 видно, что плотность вискерсов играет важную роль при определении эффективных динамических свойств вискеризованного волокнистого композита. При постоянной объемной доли волокон величины всех эффективных модулей накопления и потерь, уменьшаются, когда плотность вискерсов падает с 100% до 50%, и это уменьшение может быть весьма существенным, когда длина вискерса становится все больше.

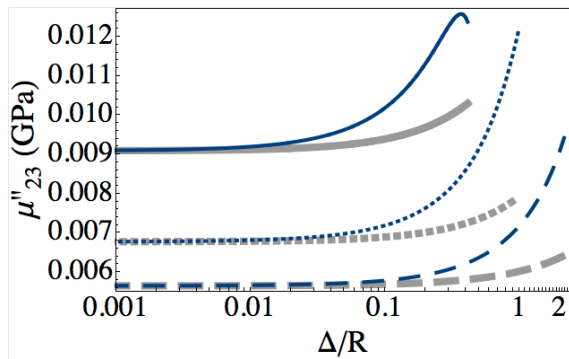
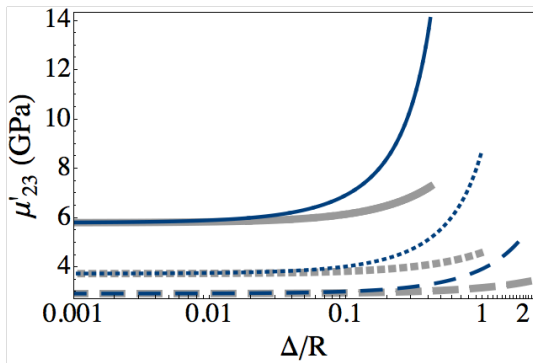




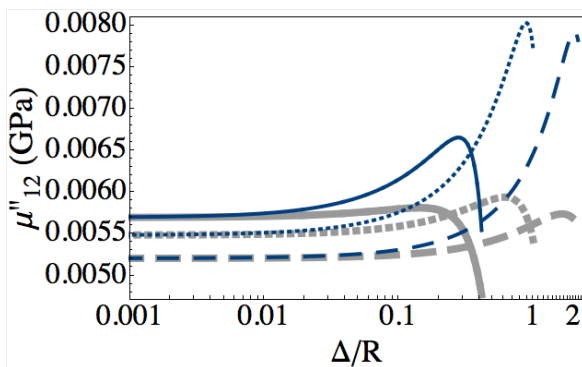
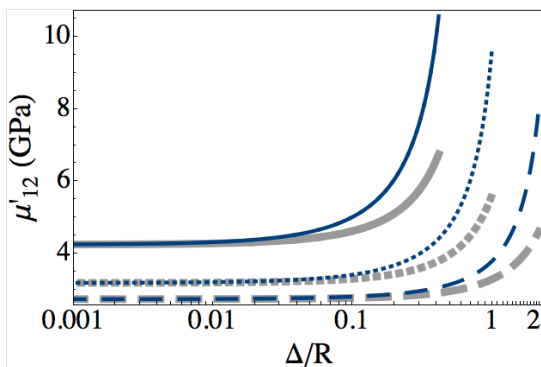
а) Модули накопления и потерь продольного Юнга



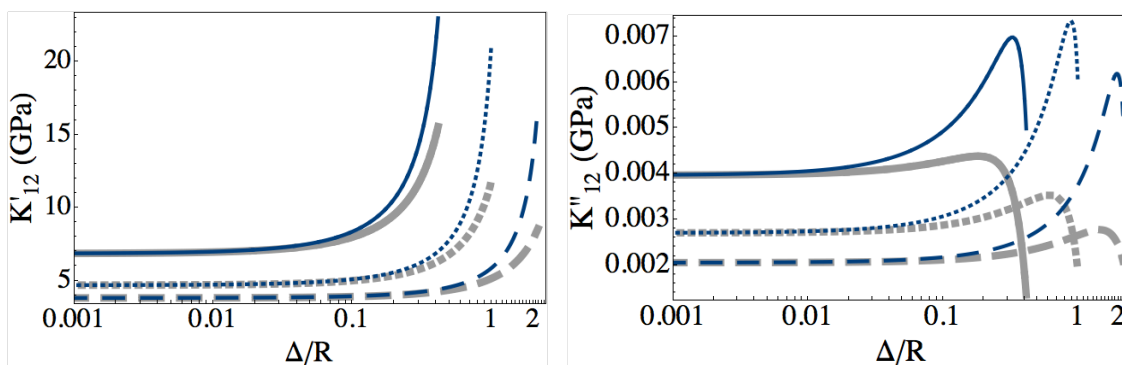
б) Модули накопления и потерь поперечного Юнга



в) Модули накопления и потерь продольного сдвига



г) Модули накопления и потерь поперечного сдвига



д) Объемные модули накопления и потерь плоской деформации

**Рис. 3.2** Зависимости эффективных динамических свойств вискеризованного волокнистого композита от плотности и длины вискерсов, и объемной доли волокон для: а) продольных модулей Юнга накопления и потерь; б) поперечных модулей Юнга накопления и потерь; в) продольных модулей сдвига накопления и потерь; г) поперечных модулей сдвига накопления и потерь, и д) объемных модулей плоской деформации накопления и потерь. **Плотность вискерсов:** *толстая линия* —  $\rho_b = 50\%$ , и *тонкая линия* —  $\rho_b = 100\%$ ; объемная доля волокон: *прямая линия* —  $V_f = 50\%$ , *штриховая линия* —  $V_f = 25\%$ , и *пунктирная линия* —  $V_f = 10\%$ ; и отношение длины вискерса к радиусу волокна  $\Delta/R$ , где  $\Delta = r_{(2)} - r_{(1)}$  — длина вискерса, и  $R$  — радиус волокна ( $R = r_{(1)} = 5,2$  мкм). Диаметр вискерсов  $r_b = 50$  мкм.

**Табл. 3.2** Улучшение эффективных динамических свойств композитов с двумя плотностями вискерсов ( $\rho_b = 50\%$  и  $100\%$ )

Объемная доля	Эффективные свойства ( $\rho_b = 50\%$ и $100\%$ )		Модуль накопления		Модуль Потерь	
			ГПа	%	ГПа	%
50% ( $\Delta/R \approx 0,33$ )	$E_{33}^{eff}$	100%	137,65	4,2	0,0122	110
		50%	132,10		0,0058	
	$E_{11}^{eff}$	100%	21,26	33	0,0145	27
		50%	16,01		0,0114	
	$\mu_{23}^{eff}$	100%	11,20	61	0,0125	24
		50%	6,95		0,0101	

	$\mu_{12}^{eff}$	100%	8,14	37	0,0066	22	
		50%	5,96		0,0054		
	$K_{12}^{eff}$	100%	15,69	26	0,0070	94	
		50%	12,41		0,0036		
25% ( $\Delta/R \approx 0,89$ )	$E_{33}^{eff}$	100%	75,11	7,8	0,0151	78	
		50%	69,67		0,0085		
	$E_{11}^{eff}$	100%	20,69	52	0,0172	51	
		50%	13,57		0,0114		
	$\mu_{23}^{eff}$	100%	7,88	75	0,0115	47	
		50%	4,51		0,0078		
	$\mu_{12}^{eff}$	100%	7,90	54	0,0080	40	
		50%	5,14		0,0057		
	$K_{12}^{eff}$	100%	15,39	51	0,0073	152	
		50%	10,16		0,0029		
	10% ( $\Delta/R \approx 1,95$ )	$E_{33}^{eff}$	100%	35,55	11	0,0142	46
			50%	31,95		0,0097	
$E_{11}^{eff}$		100%	17,36	59	0,0166	55	
		50%	10,93		0,0107		
$\mu_{23}^{eff}$		100%	5,20	54	0,0090	43	
		50%	3,38		0,0063		
$\mu_{12}^{eff}$		100%	6,67	55	0,0079	39	
		50%	4,30		0,0057		
$K_{12}^{eff}$		100%	12,80	67	0,0062	148	
		50%	7,67		0,0025		

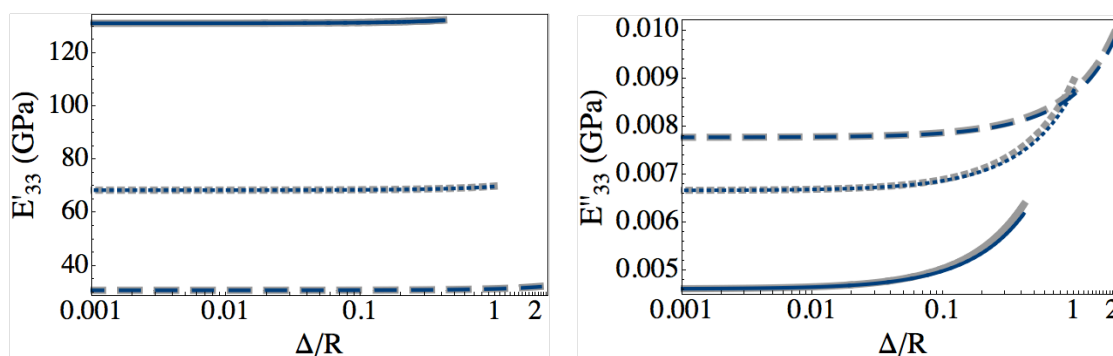
\* Приведенное соотношение  $\Delta/R$  принято для оптимальной величине модуля потерь для каждой рассмотренной объемной доли волокон.

Как упоминалось ранее во второй главе раздела 2.2, плотность вискерсов связана с допустимым количеством вискерсов, выращенных на поверхности волокна. По формуле (2.9) видно, что чем меньше плотности, тем меньше

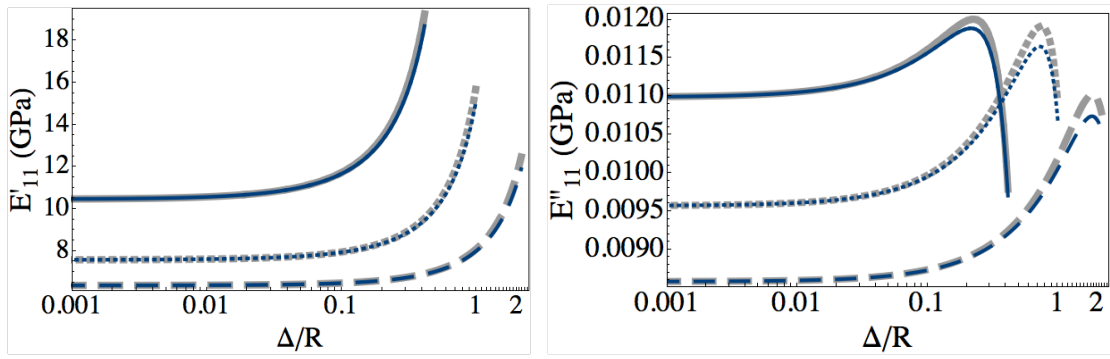
количества вискерсов, и согласно уравнению (2.8), уменьшение количество вискерсов приводит к уменьшению объемной доли вискерсов в вискеризованном межфазном слое и поэтому, эффективные свойства межфазного слоя уменьшаются. Следовательно, уменьшаются окончательные эффективные свойства вискеризованного волокнистого композита. В дополнение, это уменьшение является настолько большим, что оно не может быть скомпенсировано увеличением длины вискерсов. И наоборот, как показано в таб. 3.2, повышение плотности вискерсов приводит к существенно повышению окончательных эффективных динамических свойств вискеризованного волокнистого композита. Таким образом, можем сказать, что плотность вискерсов сильно влияет на окончательные эффективные динамические свойства такого композита.

### 3.3 Анализ влияния диаметра вискерсов

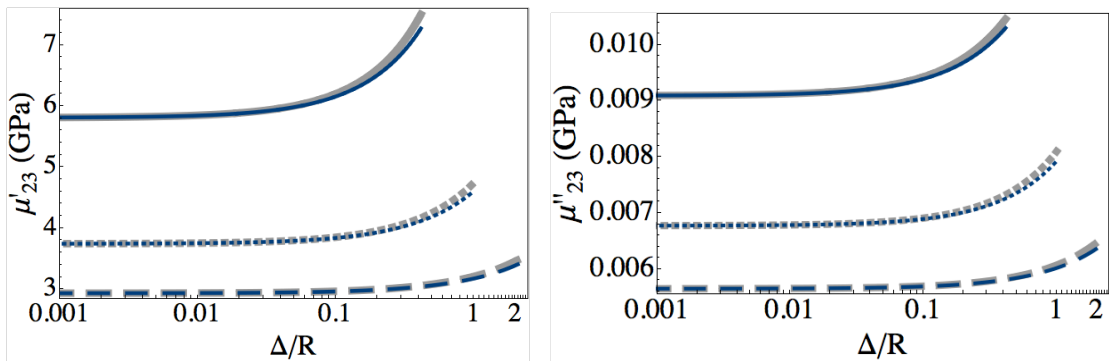
Далее будем рассматривать влияние диаметра вискерсов на эффективные динамические свойства вискеризованного волокнистого композита с различными концентрации волокон  $V_f$  : 10%, 25% и 50% и изменением отношения длины вискерса к радиусу волокна  $\Delta/R$ . Рассматриваются два диаметра вискерсов:  $r_b = 20$  нм и 200 нм. Характеристики композита определяются теми же параметрами: диаметр волокна — 5,2 мкм, плотность вискерсов — 50%, и свойства фаз даны в табл. 2.2. Результаты исследования показаны на рис. 3.3 и табл. 3.3.



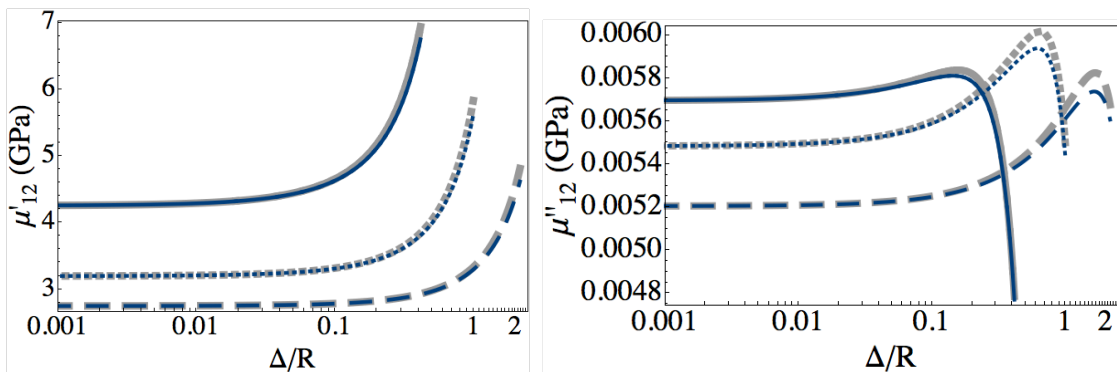
а) Модули накопления и потерь продольного Юнга



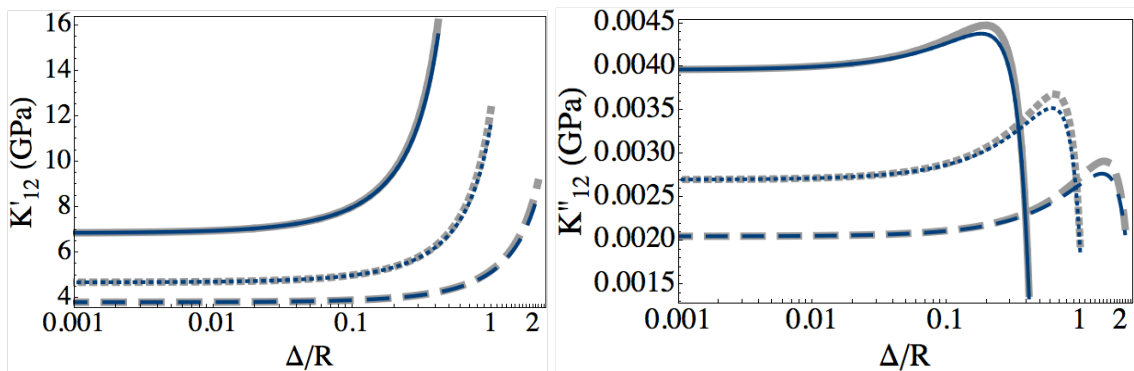
б) Модули накопления и потерь поперечного Юнга



в) Модули накопления и потерь продольного сдвига



г) Модули накопления и потерь поперечного сдвига



д) Объемные модули накопления и потерь плоской деформации

**Рис. 3.3** Зависимости эффективных динамических свойств вискеризованного волокнистого композита от диаметра и длины вискерсов, и объемной доли волокон для: а) продольных модулей Юнга накопления и потерь; б) поперечных модулей Юнга накопления и потерь; в) продольных модулей сдвига накопления и потерь; г) поперечных модулей сдвига накопления и потерь, и д) объемных модулей плоской деформации накопления и потерь. *Диаметр вискерсов: толстая линия —  $r_b = 200$  нм, и тонкая линия —  $r_b = 20$  нм;* объемная доля волокон: прямая линия —  $V_f = 50\%$ , штриховая линия —  $V_f = 25\%$ , и пунктирная линия —  $V_f = 10\%$ ; и отношение длины вискерса к радиусу волокна  $\Delta/R$  где  $\Delta = r_{(2)} - r_{(1)}$  — длина вискерса, и  $R$  — радиус волокна ( $R = r_{(1)} = 5,2$  мкм). Плотность вискерсов  $\rho_b = 50\%$ .

**Таблица 3.3** Улучшение эффективных динамических свойств композитов с двумя диаметрами вискерсов ( $r_b = 20$  нм и 200 нм)

Объемная доля	Эффективные свойства ( $r_b = 20$ нм и 200 нм)		Модуль накопления		Модуль Потерь	
			ГПа	%	ГПа	%
50% ( $\Delta/R \approx 0,33$ )	$E_{33}^{eff}$	200 нм	132,21	0,09	0,0060	3,4
		20 нм	132,09		0,0058	
	$E_{11}^{eff}$	200 нм	16,34	2,1	0,0115	0,9
		20 нм	16,01		0,0114	
	$\mu_{23}^{eff}$	200 нм	7,12	2,4	0,0102	1
		20 нм	6,95		0,0101	
	$\mu_{12}^{eff}$	200 нм	6,08	2	0,0055	1,9
		20 нм	5,96		0,0054	
	$K_{12}^{eff}$	200 нм	12,70	2,3	0,0038	5,6
		20 нм	21,42		0,0036	
25% ( $\Delta/R \approx 0,89$ )	$E_{33}^{eff}$	200 нм	69,81	0,2	0,0087	2,4
		20 нм	69,67		0,0085	
	$E_{11}^{eff}$	200 нм	14,04	3,5	0,0117	2,6
		20 нм	13,57		0,0114	
	$\mu_{23}^{eff}$	200 нм	4,63	2,7	0,0079	1,3

	$\mu_{12}^{eff}$	20 нм	4,51	3,1	0,0078	1,8
		200 нм	5,30		0,0058	
		20 нм	5,14		0,0057	
	$K_{12}^{eff}$	200 нм	10,58	4,1	0,0031	6,9
		20 нм	10,16		0,0029	
	10% ( $\Delta/R \approx$ 1,95)	$E_{33}^{eff}$	200 нм	32,07	0,38	0,0098
20 нм			31,95	0,0097		
$E_{11}^{eff}$		200 нм	11,36	3,9	0,0110	2,8
		20 нм	10,93		0,0107	
$\mu_{23}^{eff}$		200 нм	3,44	1,8	0,0065	3,2
		20 нм	3,38		0,0063	
$\mu_{12}^{eff}$		200 нм	4,45	3,5	0,0058	1,8
		20 нм	4,30		0,0057	
$K_{12}^{eff}$		200 нм	8,04	4,8	0,0026	8,3
		20 нм	7,67		0,0024	

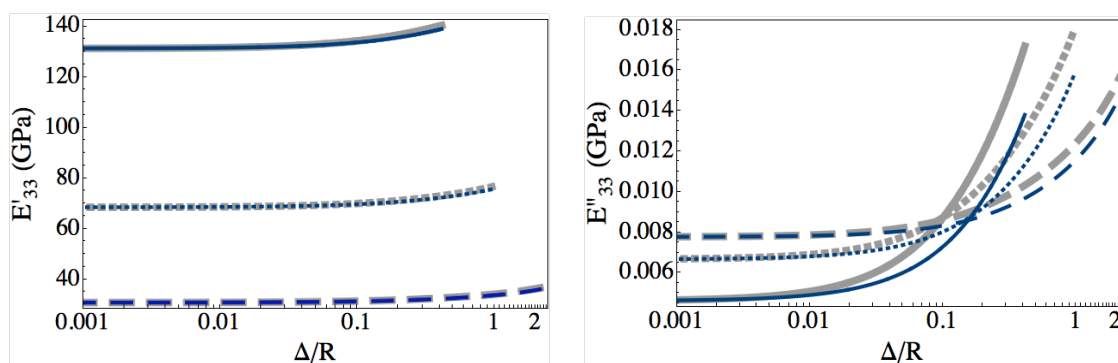
\* Приведенное соотношение  $\Delta/R$  принято на оптимальной величине модуля потерь для каждой рассмотренной объемной доли волокон.

Графики и данные, приведенные на рис. 3.3 и табл. 3.3 указывают на незначительность влияния диаметра вискерсов на эффективные динамические свойства вискеризованного волокнистого композита. Можно видеть, что улучшение составляет меньше чем 5% для всех модулей, когда диаметр вискерсов увеличивается на 900%. Однако, как следует из формулы (2.8), при увеличении диаметра, концентрация вискерсов в вискеризованном межфазном слое повышается и поэтому, величина эффективных динамических свойств возрастает, хотя и немного.

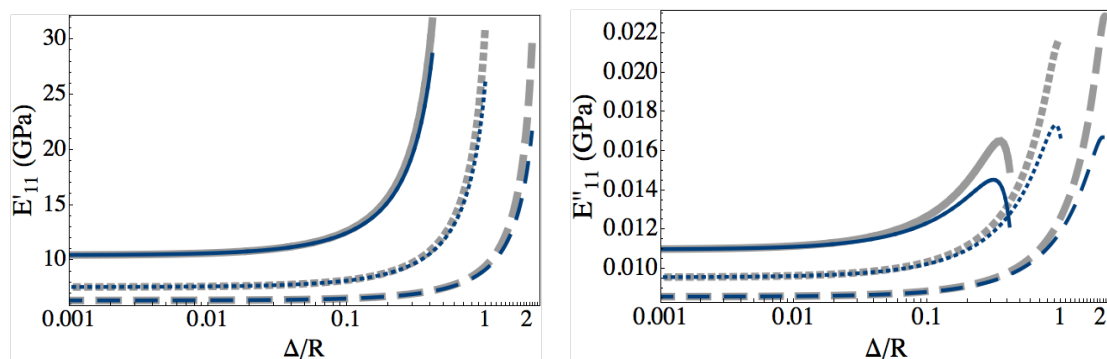
### 3.4 Анализ влияния свойства (типа материала) вискерсов

В этом разделе рассматривается влияния свойств (типа материалов) вискерсов на эффективные динамические свойства вискеризованного волокнистого

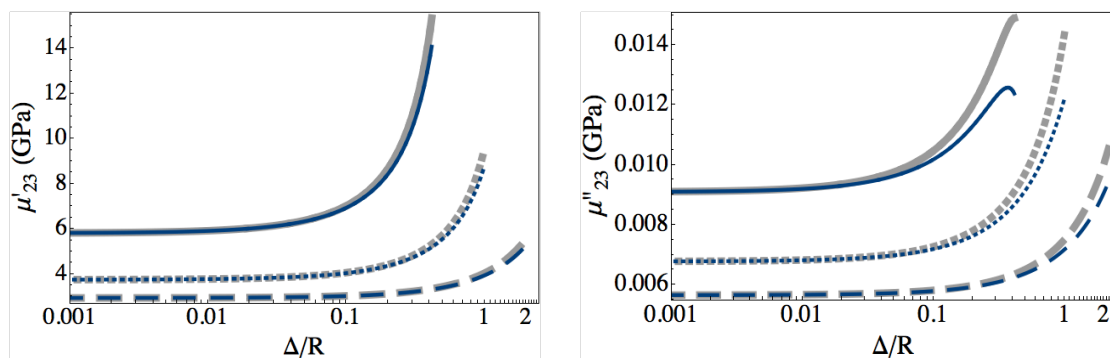
композита с различными концентрациями волокон  $V_f$  : 10%, 25%, 40% и 50%. Исследуются нанопроволоки оксид цинка и углеродные нанотрубки (УНТ). Как и ранее, характеристики композита определяются следующими параметрами: диаметр волокна и вискерсов — 5,2 мкм и 50 нм, соответственно. Поверхности волокон окружены вискерсами с максимальной плотностью (плотность — 100%). Материальные параметры фаз даны в табл. 2.2 и для УНТ ( $E = 1100$  ГПа и  $\nu = 0,16$  [93]). Для простоты, УНТ считается как полное цилиндрическое тело. Результаты исследования приведены на рис. 3.4 и табл. 3.4.



а) Модули накопления и потерь продольного Юнга

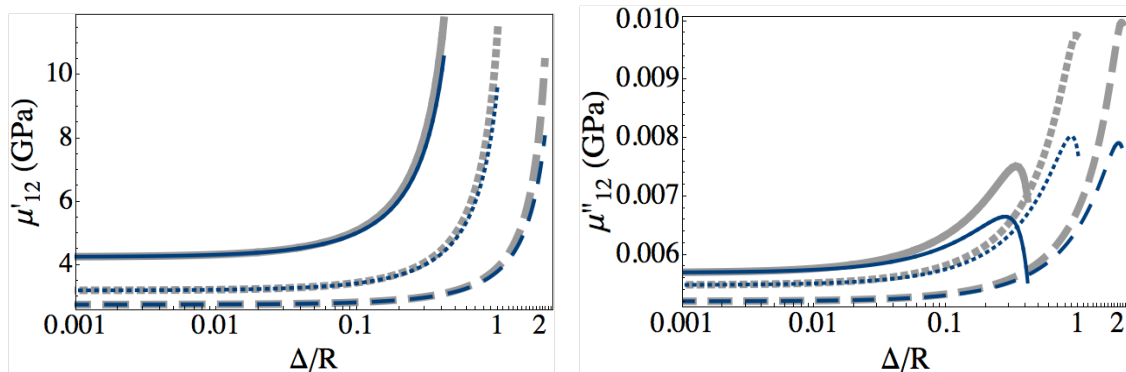


б) Модули накопления и потерь поперечного Юнга

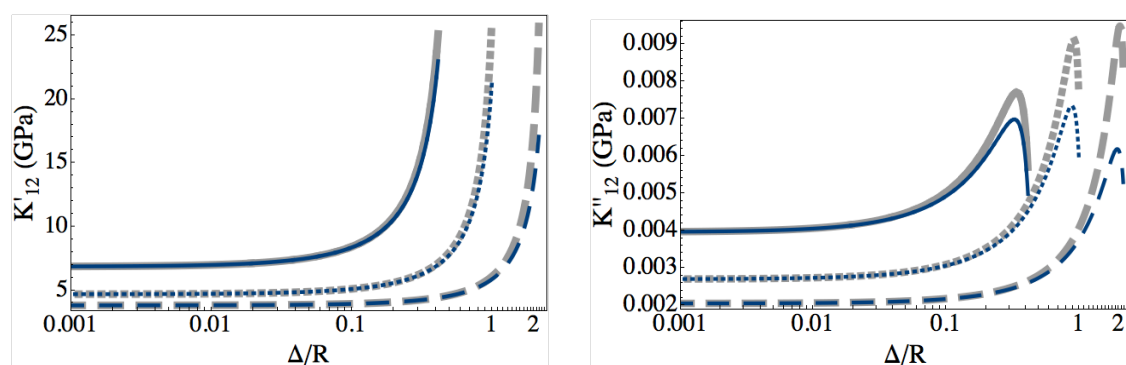


в) Модули накопления и потерь продольного сдвига





г) Модули накопления и потерь поперечного сдвига



д) Объемные модули накопления и потерь плоской деформации

**Рис. 3.4** Зависимости эффективных динамических свойств вискеризованного волокнистого композита от свойств и длины вискерсов, и объемной доли волокон для: а) продольных модулей Юнга накопления и потерь; б) поперечных модулей Юнга накопления и потерь; в) продольных модулей сдвига накопления и потерь; г) поперечных модулей сдвига накопления и потерь, и д) объемных модулей плоской деформации накопления и потерь. *Тип материалов вискерсов: толстая линия — УНТ, и тонкая линия — нанопроволоки оксида цинка*; объемная доля волокон: прямая линия —  $V_f = 50\%$ , штриховая линия —  $V_f = 25\%$ , и пунктирная линия —  $V_f = 10\%$ ; и отношение длины вискерса к радиусу волокна  $\Delta/R$  где  $\Delta = r_{(2)} - r_{(1)}$  — длина вискерса, и  $R$  — радиус волокна ( $R = r_{(1)} = 5,2$  мкм). Плотность вискерсов  $\rho_b = 100\%$ .

**Таблица 3.4** Различие эффективных динамических свойств композитов с двумя типами материалов вискерсов (УНТ и нанопроволоки ZnO)

Объемная доля	Эффективные свойства (УНТ и ZnO)		Модуль накопления		Модуль Потерь	
			ГПа	%	ГПа	%
50% ( $\Delta/R \approx 0,33$ )	$E_{33}^{eff}$	УНТ	138,91	0,9	0,0152	25
		ZnO	137,65		0,0122	
	$E_{11}^{eff}$	УНТ	22,54	6	0,0164	13
		ZnO	21,26		0,0145	
	$\mu_{23}^{eff}$	УНТ	11,85	6	0,0141	13
		ZnO	11,20		0,0125	
	$\mu_{12}^{eff}$	УНТ	8,68	7	0,0075	14
		ZnO	8,14		0,0066	
	$K_{12}^{eff}$	УНТ	16,42	4,7	0,0077	10
		ZnO	15,69		0,0070	
25% ( $\Delta/R \approx 0,89$ )	$E_{33}^{eff}$	УНТ	76,05	1,3	0,0173	15
		ZnO	75,11		0,0151	
	$E_{11}^{eff}$	УНТ	23,32	13	0,0208	21
		ZnO	20,69		0,0172	
	$\mu_{23}^{eff}$	УНТ	8,43	7	0,0131	14
		ZnO	7,88		0,0115	
	$\mu_{12}^{eff}$	УНТ	8,86	14	0,0096	20
		ZnO	7,90		0,0080	
	$K_{12}^{eff}$	УНТ	17,45	13,4	0,0090	23
		ZnO	15,39		0,0073	
10% ( $\Delta/R \approx 1,95$ )	$E_{33}^{eff}$	УНТ	36,09	1,5	0,0151	6,3
		ZnO	35,55		0,0142	
	$E_{11}^{eff}$	УНТ	21,21	22	0,0213	28
		ZnO	17,36		0,0166	
	$\mu_{23}^{eff}$	УНТ	5,48	5,4	0,0099	10
		ZnO	5,20		0,0090	

	$\mu_{12}^{eff}$	УНТ	7,94	19	0,0096	22
		ZnO	6,67		0,0079	
	$K_{12}^{eff}$	УНТ	16,37	28	0,0092	48
		ZnO	12,80		0,0062	

\* Приведенное соотношение  $\Delta/R$  принято на оптимальной величине модуля потерь для каждой рассмотренной объемной доли волокон.

Следует отметить интересный факт в связи оценкой влияния свойств вискерсов в межфазном слое. Для конечных или высоких концентраций волокон и в случаях, где концентрация волокон мала, а длина вискерсов также мала - меньше радиуса волокон, не следует ожидать значительного увеличения эффективных свойств композита с УНТ по сравнению с композитом, в котором вискеризация обеспечивается нанопроволоками оксида цинка, несмотря на то, что свойства углеродных нанотрубок (УНТ) значительно выше свойств нанопроволок оксида цинка. Причина этого факта связана с тем, что в этих случаях окончательные эффективные свойства вискеризованного волокнистого композита диктуются свойствами волокна. Тем не менее, увеличение является более высоким на модулях потерь по сравнению с модулями накопления хотя и немного.

В случае маленьких концентраций волокон окончательные эффективные динамические свойства композита зависят от свойств – либо матрицы, либо вискеризованного межфазного слоя, т.е. зависят от длины вискерсов. Если длина вискерсов близка к радиусу или больше радиуса волокна, то окончательные свойства конечно диктуются свойствами вискеризованного межфазного слоя. Тогда повышение эффективных свойств композита с УНТ будет значительным по сравнению с композитом, армированным волокнами, вискеризованными нанопроволоками оксида цинка. Кроме того, имеет место более значительное увеличение объемного модуля плоской деформации из-за присутствия УНТ по сравнению с другими модулями упругости, т.к. УНТ во много раз более жесткие чем нанопроволоки из оксида цинка в направлении волокна.

### 3.5 Выводы к главе 3

В главе 3 решена задача определения эффективных динамических свойств вискеризованных волокнистых композитов с учетом объемной доли волокон и влияния длины, плотности, диаметра, концентрации и свойства вискерсов. Проведено параметрическое исследование эффектов объемной доли волокон, и длины, плотности, диаметра, объемной доли и типа материала вискерсов на эффективные динамические свойства композитов. Разработана компьютерная программа на символьном языке «МАТЕМАТИКА», которая может являться основой для широкого использования полученных результатов в прикладных прочностных и проектировочных расчетах.

Получена оценка влияния вискерсов на эффективные свойства рассматриваемых композитов. Показано, что длина и плотность вискерсов значительно влияет на величины эффективных свойств композитов, а диаметр вискерсов влияет на эффективные свойства незначительно. С одной стороны, эффект влияния типа материала зависит от отношения длины вискерсов к радиусу волокна. Т.е. если длина вискерсов при сравнении между УНТ и оксидом цинка, больше, чем радиус волокна, то влияние свойств вискерсов может быть существенным.

Следовательно, полученные результаты позволяют утверждать, что помимо улучшения упругих и демпфирующих свойств материалов вискеризованные волокнистые композиты будут обладать повышенной трещиностойкостью и усталостной прочностью, так как эти свойства контролируются именно трансверсальными и сдвиговыми свойствами. Известно, что интерфейс между волокном и матрицей играет важную роль на процессы деформирования композита, процессы роста поврежденности и на сценарии разрушения [1,116,117]. Кроме того, более высокая прочность интерфейса ведет к повышению прочности, ударной прочности композита [118], а также обеспечивает лучшее сопротивление развитию микродефектов и микротрещин на межфазных границах, которые, как известно, формируют трансверсальные матричные растрескивания, приводящие к межслойным трещинам [119,120]. Ожидается, что улучшение трансверсальных и сдвиговых характеристик волокнистых композитов позволит создать на их основе

современные multifункциональные слоистые композиты с высокими механическими характеристиками, и значительной устойчивостью к росту поврежденности. Подобные материалы являются, безусловно, полезными для аэрокосмической промышленности.

## **Заключение — Основные научные и прикладные результаты диссертационной работы**

Наиболее существенные научные и выводы, полученные в диссертации заключаются в следующем.

1. На основе континуальной модели и метода самосогласованного поля Эшелби (метод трех фаз) развита прикладная модель деформирования трансверсальных изотропных вискеризованных волокнистых многослойных композитов, учитывающих микро- или наноструктуру вискерсов, выращенных на поверхностях волокон.
2. Предложена модель вискеризованного межфазного слоя на поверхности волокон, как трансверсально изотропного слоя с цилиндрической изотропией, учитывающая геометрические и механические характеристики микроструктуры.
3. Разработан метод определения эффективных свойств волокнистых композитов с вискеризованными (функциональными) волокнами, основанный на процедуре Эшелби трех фаз, позволяющий в рамках единого подхода найти аналитическое решение проблемы. Показано, что предложенный метод является более точными и полными для всех возможных концентраций волокон по сравнению с другими известными методами оценки эффективных свойств вискеризованных композитов (метод двух фаз и метод комплексных потенциалов).
4. Разработан метод и алгоритм расчета эффективных динамических свойств волокнистых композитов с вискеризованными (функциональными) волокнами, основанный на методе Эшелби трех фаз и методе комплексных модулей.
5. Установлено, важные прикладные эффекты вискеризованных композитов: а) присутствие вискерсов, приводит к увеличению эффективных механических и динамических свойств композитов, особенно, их сдвиговых и трансверсальных характеристик, б) для всех известных типов вискеризованных композитов длина и плотность вискерсов являются наиболее существенными параметрами структуры, влияющими на эффективные свойства композитов (механические свойства композита могут быть увеличены более чем на 103%, 93%, 91%, и 129% для поперечного модуля Юнга, продольного и поперечного модуля сдвига, и объемного модуля плоской деформации соответственно), в) модуль потерь может

быть также существенно увеличен, до 102%, 93%, 61%, 52%, и 195% для продольного и поперечного модуля Юнга, продольного и поперечного модуля сдвига, и объемного модуля плоской деформации соответственно), и г) проведенный анализ позволяет дать прогноз новых классов композитов, в которых за счет образования вискерсов могут быть реализованы высокие механические свойства и одновременно повышенные свойства демпфирования.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### ПРИЛОЖЕНИЕ А. Материал, конфигурация и свойства компонентов вискеризованных волокнистых композитов

Таблица А.1 Параметры материалов и конфигурация УНТ-вискеризованных волокнистых композитов [5,93]

	ФАЗА		
	Базовое Волокно	Вискерс	Матрица
<b>Материалы</b>	Углеродное Т-650	УНТ	Эпоксидная
<b>Размеры</b>			
- Диаметр (мкм)	5 мкм	0,00051 – 0,00085	—
- Длина (мкм)	—	1 – 2	—
<b>Свойства</b>			
- Продольный модуль Юнга, $E_L$ (ГПа)	241	1100	3
- Поперечный модуль Юнга, $E_T$ (ГПа)	14,5	—	—
- Модуль продольного сдвига, $\mu_L$ (ГПа)	22,8	—	—
- Модуль поперечного сдвига, $\mu_L$ (ГПа)	4,8	—	—
- Коэффициент Пуассона, $\nu_{LT}$	0,27	0,14	0,3



**Таблица А.2** Параметры материалов и конфигурация нанопроволоки-вискеризованных волокнистых композитов [4,7,45,102,103,124,125]

	<b>ФАЗА</b>			
	<b>Базовое Волокно</b>	<b>Покры- тие</b>	<b>Вискерс</b>	<b>Матрица</b>
<b>Материалы</b>	Углеродное IM7	Оксид Цинка	Оксид Цинка	Эпоксид- ная
<b>Размеры</b>				
- Диаметр (мкм)	5,2 мкм	—	0,05 – 0,2	—
- Длина (мкм)	—	—	0,2 – 2	—
- Толщина (нм)	—	< 200 <sup>13</sup>	—	—
<b>Свойства</b>				
- Продольный модуль Юнга, $E_L$ (ГПа)	256,76	140 <sup>14</sup>	140 <sup>7</sup>	2,5 – 3,0
- Поперечный модуль Юнга, $E_T$ (ГПа)	25,51	—	—	—
- Модуль продольного сдвига, $\mu_L$ (ГПа)	22,06	—	—	—
- Модуль поперечного сдвига, $\mu_L$ (ГПа)	9,25	—	—	—
- Коэффициент Пуассона, $\nu_{LT}$	0,289	0,35 <sup>7</sup>	0,35 <sup>7</sup>	0,25 – 0,38

<sup>13</sup> Толщина покрытия зависит от роста и размера нанопроволоки [4,7].

<sup>14</sup> Свойства ZnO принимаются свойствами сыпучих материалов. В последнее время ряд исследований показывают, что свойства нанопроволок зависят от своего диаметра. Например, значение модуля Юнга оксида цинка нанопроволоки увеличивается когда их диаметр меньше чем ~100 nm и можно повышаться до 249 ГПа когда диаметр меньше чем ~40 nm. Если больше чем ~100 nm, то значение модуля Юнга является модулем сыпучих материалов [103,104].

**Таблица А.3** Параметры материалов и конфигурация композитов на основе алюминия, армированные непрерывными волокнами  $Al_2O_3$ , вискеризованными Муллитами

	<b>ФАЗА</b>			
	<b>Базовое Волокно</b>	<b>Вискерс</b>	<b>Межфазный слой</b>	<b>Матрица</b>
<b>Материалы</b>	Nextel 610 $Al_2O_3$	Муллит $Al_6Si_2O_{13}$	$MgAl_2O_4$ (МФС из шпинели)	Алюминия В95 (200 °С )
<b>Размеры</b>				
- Диаметр (мкм)	12 мкм	0,050	—	—
- Длина (нм)	—	0,050 – 0,1	—	—
- Толщина (мкм)	—	—	0,2 – 1,5	—
<b>Свойства</b>				
- Модуль Юнга, $E_L$ (ГПа)	380	143	250	74
- Коэффициент Пуассона, $\nu$	0,22	0,23	0,26	0,33

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Трансверсально-изотропная среда

В этом разделе определим тензор модулей упругости и податливости для трансверсально-изотропной среды и их отношения с инженерными константами [35,105].

### Б.1 Трансверсально-изотропная среда с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси $-3$ или $-z$

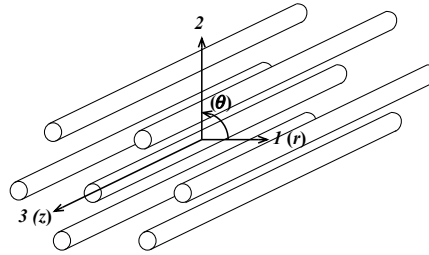


Рис. Б.1 Система трансверсально-изотропной среды где ось 3 — ось симметрии.

Допустим, что ось 3 — ось плоскости изотропии (см. рис Б.1). Тогда соотношение напряжения-деформации можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.1})$$

Видно из (Б.1), что пять упругих констант  $C_{11} = C_{22}, C_{12}, C_{13} = C_{23}, C_{33}$  и  $C_{44}$  обозначают пять независимых эффективных свойств трансверсальной изотропной среды с осью плоскости симметрии, направленной вдоль оси 3 ( $z$ ). Так как эти упругие константы редко используются в практике, определим их соотношение с физическими константами.

Представим состояние одноосного нагружения вдоль оси 3, при котором —  $\sigma_{33} \neq 0$  и  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$ . В этом нагружении —  $\sigma_{33} = E_{33} \varepsilon_{33}$ , поэтому из третьей строки уравнения (Б.1) имеем

$$E_{33} = C_{13} \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} + C_{13} \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} + C_{33} ,$$

где  $E_{33}$  — продольный модуль Юнга. Далее, из первой и второй строки (Б.1) получаем отношения

$$\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} = \frac{-C_{13}}{C_{11} + C_{12}} , \quad \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} = \frac{-C_{13}}{C_{11} + C_{12}} .$$

Таким образом, продольный модуль Юнга является

$$E_{33} = C_{33} - \frac{2C_{13}^2}{C_{11} + C_{12}} , \quad (\text{Б.2})$$

и также, определяются соотношения *коэффициентов Пуассона* (т.е. по изменению поперечных размеров образца при этом нагружении):

$$\nu_{31} = \frac{-\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} = \frac{C_{13}}{C_{11} + C_{12}} = \frac{-\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} = \nu_{32} , \quad (\text{Б.3})$$

где в обозначении  $\nu_{ij}$  принято, что первый индекс относится к направлению приложения деформации (напряжения), а второй — к направлению вызванной им поперечной деформации.

Далее рассмотрим состояние, когда  $\varepsilon_{33} = 0, \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon^0$ . Пусть  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma^0$ , тогда из (Б.1) находим, что  $\sigma^0 = 2K_{12}\varepsilon^0$ . Величину  $K_{12}$ , которая называется *объемным модулем упругости при плоском деформированном состоянии* или просто *объемным модулем плоской деформации*, найдем как

$$K_{12} = \frac{C_{11} + C_{12}}{2} = K_{21} . \quad (\text{Б.4})$$

И в конце концов, модули продольного и поперечного сдвига, которые можно получить прямо из (Б.1), выражаются, соответственно, следующим образом

$$\mu_{23} = \mu_{32} = C_{44} = C_{55} = \mu_{13} = \mu_{31} , \quad (\text{Б.5})$$

$$\mu_{12} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = C_{66} = \mu_{21} . \quad (\text{Б.6})$$

Соотношения (Б.2) — (Б.6) можно преобразовать:

$$\begin{aligned}
C_{33} &= E_{33} + 4v_{31}^2 K_{12}, \\
C_{13} &= 2K_{12} v_{31}, \\
C_{11} &= \mu_{12} + K_{12}, \\
C_{12} &= -\mu_{12} + K_{12}, \\
C_{44} &= \mu_{13} = \mu_{23}.
\end{aligned} \tag{Б.7}$$

Помимо пяти независимых эффективных констант, определенных по формулам (Б.2-6), можно найти и другие константы, например, когда на тело действует одноосное нагружение в направлении, перпендикулярном оси плоскости изотропии. В связи с этим, находим

$$E_{11} = C_{11} + \frac{C_{13}^2(-C_{11} + C_{12}) + C_{12}(-C_{33}C_{12} + C_{13}^2)}{C_{33}C_{11} - C_{13}^2}, \tag{Б.8}$$

$$v_{13} = \frac{-\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = \frac{C_{13}(C_{11} - C_{12})}{C_{33}C_{11} - C_{13}^2}, \quad v_{12} = \frac{-\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{C_{33}C_{12} - C_{13}^2}{C_{33}C_{11} - C_{13}^2}. \tag{Б.9}$$

Из свойств симметрии среды следует также, что

$$E_{11} = E_{22}, \quad v_{23} = v_{13}, \quad v_{32} = v_{31}, \quad v_{21} = v_{12}. \tag{Б.10}$$

Однако, надо отметить, что  $v_{31} \neq v_{13}$  и  $v_{32} \neq v_{23}$ ; из ранее выведенных формул легко найти связь между этими константами

$$\frac{v_{31}}{E_{33}} = \frac{v_{13}}{E_{11}}, \quad \frac{v_{32}}{E_{33}} = \frac{v_{23}}{E_{22}}. \tag{Б.11}$$

Полезными могут также оказаться следующие соотношения:

$$E_{11} = \frac{4\mu_{12}K_{12}}{K_{12} + \mu_{12} + 4v_{31}^2\mu_{12}K_{12}/E_{33}}, \tag{Б.12}$$

$$v_{12} = \frac{K_{12} - \mu_{12} - 4v_{31}^2\mu_{12}K_{12}/E_{33}}{K_{12} + \mu_{12} + 4v_{31}^2\mu_{12}K_{12}/E_{33}}, \tag{Б.13}$$

$$v_{13} = \frac{4v_{31}^2\mu_{12}K_{12}}{E_{33}(K_{12} + \mu_{12}) + 4v_{31}^2\mu_{12}K_{12}}, \tag{Б.14}$$

$$v_{31}^2 = \left( -v_{12} - \frac{1}{4} \frac{E_{11}}{K_{12}} + \frac{1}{4} \frac{E_{11}}{\mu_{12}} \right) \frac{E_{33}}{E_{11}}. \tag{Б.15}$$

При определении формул (Б.7), можно использовать другие формулы. Тогда нужно сначала определить следующие отношения [105]:

$$\begin{aligned}
E_{33} &= E_L, & E_{11} &= E_{22} = E_T, \\
\mu_{13} &= \mu_{31} = \mu_{23} = \mu_{32} = \mu_L, & \mu_{12} &= \mu_{21} = \mu_T, \\
\nu_{12} &= \nu_{21} = \nu_T, \\
\nu_{31} &= \nu_{32} = \nu_{LT}, \\
\nu_{13} &= \nu_{23} = \nu_{TL}.
\end{aligned} \tag{Б.16}$$

и тензор податливости  $S_{ij}$  имеет форму

$$\begin{bmatrix}
1/E_T & -\nu_T/E_T & -\nu_{LT}/E_L & 0 & 0 & 0 \\
-\nu_T/E_T & 1/E_T & -\nu_{LT}/E_L & 0 & 0 & 0 \\
-\nu_{TL}/E_T & -\nu_{TL}/E_T & 1/E_L & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/\mu_L & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_L & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_T
\end{bmatrix},$$

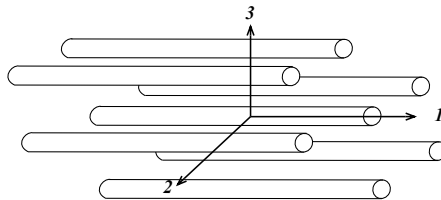
где  $\mu_T = E_T/2(1 + \nu_T)$ . Таким образом, соотношения между упругими константами жесткости и инженерными константами можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= C_{22} = E_T(1 - \nu_{TL}\nu_{LT})\Upsilon, & C_{33} &= E_L(1 - \nu_T^2)\Upsilon, & C_{12} &= E_T(\nu_T + \nu_{TL}\nu_{LT})\Upsilon, \\
C_{13} &= C_{23} = E_T(\nu_{LT} + \nu_T\nu_{LT})\Upsilon = E_L(\nu_{TL} + \nu_T\nu_{TL})\Upsilon, & C_{44} &= \mu_L, & C_{66} &= \mu_T,
\end{aligned} \tag{Б.17}$$

где

$$\Upsilon = \frac{1}{1 - \nu_T^2 - 2\nu_{TL}\nu_{LT} - 2\nu_T\nu_{TL}\nu_{LT}}.$$

## **Б.2 Трансверсально-изотропная среда с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси 1**



**Рис. Б.2** Система трансверсально-изотропной среды где ось 1 — ось симметрии.

Соотношение напряжения-деформации такой среды (см. рис. Б.2) можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.18})$$

Пятью независимыми эффективными константами трансверсальной изотропной сред с осью плоскости симметрии, направленной вдоль оси 1 являются  $C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{23}$  и  $C_{66}$ . Тогда соотношения между этими независимыми константами и физическими константами даются в следующем виде:

$$E_{11} = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}, \quad (\text{Б.19})$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}, \quad (\text{Б.20})$$

$$K_{23} = \frac{C_{22} + C_{23}}{2}, \quad (\text{Б.21})$$

$$\mu_{12} = \mu_{31} = C_{66}, \quad (\text{Б.22})$$

$$\mu_{23} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2}, \quad (\text{Б.23})$$

$$E_{22} = C_{22} + \frac{C_{12}^2(-C_{22} + C_{23}) + C_{23}(-C_{11}C_{23} + C_{12}^2)}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}, \quad (\text{Б.24})$$

$$\nu_{21} = \frac{C_{12}(C_{22} - C_{23})}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}, \quad \nu_{23} = \frac{C_{11}C_{23} - C_{12}^2}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}. \quad (\text{Б.25})$$

Из свойств симметрии среды следует также, что

$$\begin{aligned} E_{22} = E_{33}, \quad \nu_{21} = \nu_{31}, \quad \nu_{12} = \nu_{13}, \quad \nu_{23} = \nu_{32}, \\ \frac{\nu_{21}}{E_{22}} = \frac{\nu_{12}}{E_{11}}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_{33}} = \frac{\nu_{13}}{E_{11}}. \end{aligned} \quad (\text{Б.26})$$

Соотношения (Б.19) – (Б.23) можно преобразовать:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= E_{11} + 4v_{12}^2 K_{23}, \\
C_{12} &= 2K_{23}v_{12}, \\
C_{22} &= \mu_{23} + K_{23}, \\
C_{23} &= -\mu_{23} + K_{23}, \\
C_{66} &= \mu_{12} = \mu_{13}.
\end{aligned} \tag{Б.27}$$

Полезными могут также оказаться следующие отношения:

$$E_{22} = \frac{4\mu_{23}K_{23}}{K_{23} + \mu_{23} + 4v_{12}^2\mu_{23}K_{23}/E_{11}}, \tag{Б.28}$$

$$v_{23} = \frac{K_{23} - \mu_{23} - 4v_{12}^2\mu_{23}K_{23}/E_{11}}{K_{23} + \mu_{23} + 4v_{12}^2\mu_{23}K_{23}/E_{11}}, \tag{Б.29}$$

$$v_{21} = \frac{4v_{12}^2\mu_{23}K_{23}}{E_{11}(K_{23} + \mu_{23}) + 4v_{12}^2\mu_{23}K_{23}}, \tag{Б.30}$$

$$v_{12}^2 = \left( -v_{23} - \frac{1}{4} \frac{E_{22}}{K_{23}} + \frac{1}{4} \frac{E_{22}}{\mu_{23}} \right) \frac{E_{11}}{E_{22}}, \tag{Б.31}$$

Другие формулы для определения упругих модулей (Б.27):

$$\begin{aligned}
E_{11} &= E_L, \quad E_{22} = E_{33} = E_T, \\
\mu_{12} &= \mu_{21} = \mu_{13} = \mu_{31} = \mu_L, \quad \mu_{23} = \mu_{32} = \mu_T, \\
v_{23} &= v_{32} = v_T, \\
v_{12} &= v_{13} = v_{LT}, \\
v_{21} &= v_{31} = v_{TL}.
\end{aligned} \tag{Б.32}$$

$$\begin{aligned}
C_{22} = C_{33} &= E_T(1 - v_{TL}v_{LT})\Upsilon, \quad C_{11} = E_L(1 - v_T^2)\Upsilon, \quad C_{23} = E_T(v_T + v_{TL}v_{LT})\Upsilon, \\
C_{12} = C_{13} &= E_T(v_{LT} + v_Tv_{LT})\Upsilon = E_L(v_{TL} + v_Tv_{TL})\Upsilon, \quad C_{66} = \mu_L, \quad C_{44} = \mu_T.
\end{aligned} \tag{Б.33}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ В. Изотропная среда



В случае полной изотропии остаются две независимые компоненты  $C_{ij}$  [35]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Можно записать (B.1) в виде [89]:

$$\sigma_{ij} = \lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad (\text{B.2})$$

где  $\delta_{kl}\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kk} = \Theta$  — объемная деформация;  $\delta_{kl}$  — дельта Кронекера ( $\delta_{kl} = 1$  если  $k = l$  и  $\delta_{kl} = 0$  если  $k \neq l$ );  $\lambda$  и  $\mu$  — константы Ламе. Тогда соотношение (B.1) преобразует в форму:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Сравнивая (B.1) с (B.3), находим:

$$C_{11} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = \lambda, \quad (\text{B.4})$$

Также, объемный модуль сжатия имеет форму:

$$k = \lambda + \frac{2\mu}{3}. \quad (\text{B.5})$$

Полезными могут также оказаться следующие отношения [105]:

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (\text{B.6})$$

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}, \quad \nu = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}. \quad (\text{B.7})$$

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (\text{B.8})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Г. Доказательство теорем средней деформации и среднего напряжения

### Б.1 Теорема средней деформации [28,34,36]

Преобразую соотношение Коши (1.11) в формулу (1.2), имеем

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_V (u_{i,j} + u_{j,i}) dV. \quad (\text{Г.1})$$

С помощью теоремы Гаусса-Остроградского<sup>15</sup> формула (Г.1) принимает вид

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_S (u_i n_j + u_j n_i) dS. \quad (\text{Г.2})$$

Используя граничное условие вектора перемещений с теоремой Гаусса-Остроградского в формуле (Г.2), получаем

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij} \rangle &= \frac{1}{2V} \int_S (\varepsilon_{ik}^0 x_k n_j + \varepsilon_{jk}^0 x_k n_i) dS = \\ &= \frac{1}{2V} \int_V \left( (\varepsilon_{ik}^0 x_k)_{,j} + (\varepsilon_{jk}^0 x_k)_{,i} \right) dV = \\ &= \frac{1}{2V} \int_V \left( (\varepsilon_{ik,j}^0 x_k + \varepsilon_{ik}^0 x_{k,j}) + (\varepsilon_{jk,i}^0 x_k + \varepsilon_{jk}^0 x_{k,i}) \right) dV = \\ &= \frac{1}{2V} \int_V (\varepsilon_{ik}^0 x_{k,j} + \varepsilon_{jk}^0 x_{k,i}) dV = \frac{1}{2V} \int_V (\varepsilon_{ik}^0 \delta_{kj} + \varepsilon_{jk}^0 \delta_{ki}) dV = \\ &= \frac{1}{2V} \int_V (\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ji}^0) dV = \frac{\varepsilon_{ij}^0}{V} \int_V dV. \end{aligned}$$

Итак, с учетом соотношения (1.4), теорема средней деформации имеет вид

$$\bar{\varepsilon}_{ij} \equiv \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0. \quad (\text{Г.3})$$

Для случая неидеального контакта между фазами или пустот формула (Г.3) имеет дополнительный член [36], например, рассмотрим для простоты двухфазный материал, имеем

<sup>15</sup> Теорема Гаусса-Остроградского, также называется теоремой о дивергенции, дает преобразование материала по объему в интеграл по поверхности, например, для векторного поля:  $\int_V u_{j,k} dV = \int_S u_j n_k dS$  [101].

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \left[ \int_{V_1} (u_{i,j}^{(1)} + u_{j,i}^{(1)}) dV + \int_{V_2} (u_{i,j}^{(2)} + u_{j,i}^{(2)}) dV \right], \quad (\Gamma.4)$$

где  $^{(1)}$  и  $^{(2)}$  обозначают фазу 1 и 2 в композите, соответственно;  $V_1$  и  $V_2$  — объем фаз 1 и 2. Используя теорему Гаусса-Остроградского, запишем (Г.4) в виде

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \left[ \int_{S_1} (u_i^{(1)} n_j + u_j^{(1)} n_i) dS + \int_{S_2} (u_i^{(2)} n_j + u_j^{(2)} n_i) dS \right], \quad (\Gamma.5)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — поверхности, ограничивающие фазы 1 и 2. Видно по рис. 1.18, поверхности  $S_1$  и  $S_2$  имеют интерфейсы  $S_{1-2}$  и внешнюю поверхность  $S$ . Итак, представим (Г.5) в виде:

$$\begin{aligned} 2V \langle \varepsilon_{ij} \rangle &= \int_{S_1} (u_i^{(1)} n_j + u_j^{(1)} n_i) dS - \int_{S_{2-1}} (u_i^{(2)} n_j + u_j^{(2)} n_i) dS + \int_{S_{2-II}} (u_i^{(2)} n_j + u_j^{(2)} n_i) dS = \\ &= - \int_{S_{1-2}} (u_i^{(1)} n_j + u_j^{(1)} n_i) dS + \int_{S_{1-2}} (u_i^{(2)} n_j + u_j^{(2)} n_i) dS + \int_S (u_i n_j + u_j n_i) dS. \end{aligned} \quad (\Gamma.6)$$

Если мы учитываем то, что интерфейс  $S_{1-2}$  в (Г.6) неидеальный (т.е.,  $[u_i] = u_i^{(2)} - u_i^{(1)} \neq 0$ ), то получаем:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} \equiv \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0 - \frac{1}{V} \int_V ([u_i] n_j - [u_j] n_i) dS_{1-2}. \quad (\Gamma.7)$$

Видно, что если интерфейс  $S_{1-2}$  является идеальным, то формула (Г.7) приводится к формуле (Б.3).

## Б.2 Теорема среднего напряжения [28,34,36]

Сначала рассмотрим уравнение равновесия без массовых сил, данное в (1.10):

$$\sigma_{ij,j} = 0,$$

откуда следует, что производные моменты напряжений являются

$$\left( \sigma_{ij} x_k \right)_{,j} = \sigma_{ik,j} x_k + \sigma_{ij} x_{k,j} = \sigma_{ij} \delta_{jk} = \sigma_{ij}. \quad (\Gamma.8)$$

Представляя (Г.8) в (1.1), получаем

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \left( \sigma_{ij} x_k \right)_{,j} dV. \quad (\Gamma.9)$$

Используя теорему Гаусса-Остроградского и граничное условие вектора напряжений на границах ячейки, имеем

$$\begin{aligned}
V\langle\sigma_{ij}\rangle &= \int_S \sigma_{ij} x_k n_j dS = \\
&= \int_S (\sigma_{ij} n_j) x_k dS = \int_S t_i x_k dS = \sigma_{ik}^0 \int_S x_j n_k dS = \\
&= \sigma_{ik}^0 \int_V x_{j,k} dV = \sigma_{ik}^0 \delta_{jk} \int_V dV.
\end{aligned}$$

Итак, вместе с уравнением (1.3) можно записать теорему среднего напряжения в виде

$$\bar{\sigma}_{ij} \equiv \langle\sigma_{ij}\rangle = \sigma_{ij}^0. \quad (\text{Г.10})$$

#### ПРИЛОЖЕНИЕ Д. Теорема и формула Клапейрона

Вывод этой теории основан на монографии Демидова [89]. Пусть упругое тело ограничено поверхностью  $S$  и имеет объем  $V$ , находится в равновесии под действием массовых сил  $f_i$  и поверхностных сил  $t_i$ . Работа этих внешних сил имеет вид:

$$A = \int_V \rho f_i u_i dV + \int_S t_i u_i dS, \quad (\text{Д.1})$$

где  $\rho$  — массовая плотность; и  $\rho f_i$  — объемная сила. Последний интеграл, учитывая  $t_i = \sigma_{ij} n_j$ , преобразуем по формуле Гаусса-Остроградского:

$$\int_S t_i u_i dS = \int_S \sigma_{ij} u_i n_j dS = \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV.$$

Преобразуем интеграл в правой часть последнего равенство:

$$\begin{aligned}
\int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV &= \int_V (\sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j}) dV = \\
&= \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV + \int_V \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dV = \\
&= \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV,
\end{aligned}$$

где учтено, что  $\sigma_{ij} \omega_{ij} = 0$ , так как  $\sigma_{ij}$  — симметричный тензор, а  $\omega_{ij}$  — кососимметричный тензор. Итак, равенство (Д.1) приведем к виду:

$$A = \int_V (\sigma_{ij,j} + \rho f_i) u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV. \quad (\text{Д.2})$$

Из (Д.2) и, приняв во внимание дифференциальные уравнение равновесия:  $\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0$  и формулу Грина:  $\sigma_{ij} = \partial W / \partial \varepsilon_{ij}$ , получим

$$A = \int_V \varepsilon_{ij} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} dV. \quad (\text{Д.3})$$

Таким образом, равенство (Д.3) является *теоремой Клапейрона* для любого упругого тела. В этом контексте  $W$  — *удельный упругий потенциал*, который при изотермическом деформировании определяется свободной энергией  $F = U - T_0 s$  (где  $U$  — удельная внутренняя энергия;  $T$  — постоянная температура; и  $s$  — энтропия)<sup>16</sup> и представляет собой *удельную потенциальную энергию деформации* или *плотность энергии деформации*.

Если упругое тело подчиняется закону Гука, то упругий потенциал является квадратной функцией  $\varepsilon_{ij}$ . В этом случае, учитывая уравнение равновесия и *формулу Клапейрона*:

$$W(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} = W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (\text{Д.4})$$

равенства (Д.2) и (Д.3) приведем к виду

$$\int_V W dV = \frac{1}{2} A. \quad (\text{Д.5})$$

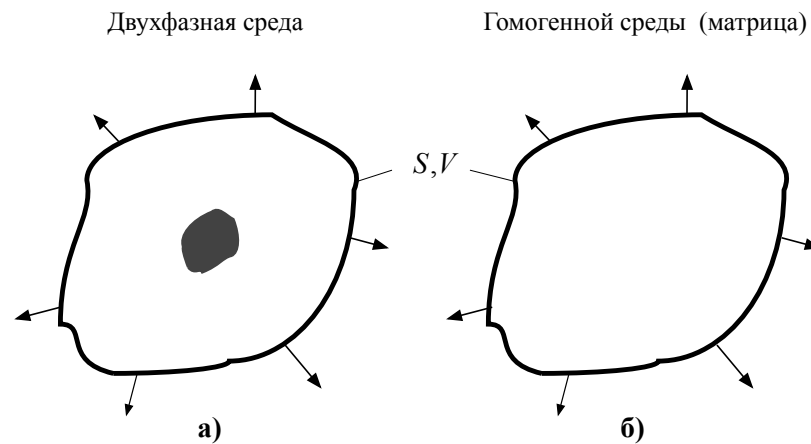
Следовательно, согласно теореме Клапейрона для линейно-упругого тела, *работа деформации равна половине работы внешних сил на произведенных ими перемещениях*.

## **ПРИЛОЖЕНИЕ Е. Интегральная формула Эшелби**

Известная формула, выведенная Эшелби [29] для вычисления энергии деформирования, преобразует обычное интегрирование по объему к интегрированию по поверхности частного вида. Согласно Кристенсену [35], это упрощение очень удобно при определении эффективных свойств композитов. В принципе эта формула связывает энергию деформации между средами с включением и без включения (рис. Е.1).

<sup>16</sup> В случае линейных твердых тел (в отличие от газообразных тел) величина  $T_0 s$  значительно меньше величины  $U$  и поэтому, соотношения между  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  (т.е. упругие постоянные или тензор жесткости) определяемые формулой Грина, при изотермическом и адиабатическом процессах не будут существенными различиями [89].

Здесь, показывается процедура, которая приводит к замечательной формуле Эшелби.



**Рис. Е.1** Схемы: а) к задаче о включении в бесконечной средой, заданной векторами перемещений, и б) к вспомогательной задаче для однородной среды (матрица без включения)

Рассмотри сначала гетерогенное тело (матрица с включением) с заданными на поверхности граничными условиями в перемещениях и пренебрегаются массовые силы (см. рис. Е.1.а). Плотность энергии деформации в такой среде определяется следующим образом:

$$W = \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad (\text{Е.1})$$

и плотность энергии деформации гомогенного тела (см. рис. Е.1.б) имеет вид:

$$W^0 = \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 dV, \quad (\text{Е.2})$$

где  $V$  — объем ячейки; и величины с верхними индексами “0” соответствуют полям переменных к задаче однородного тела, а без верхних индексов — к задаче композита.

Выражение (Е.1) вместе с (Е.2) можно переписать в виде

$$W = W^0 + \frac{1}{2V} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0) dV. \quad (\text{Е.3})$$

Применяя теорему Гаусса-Остроградского вместе с уравнениями равновесия  $\sigma_{ij,j} = 0$  и  $\sigma_{ij,j}^0 = 0$  к (Е.3), находим

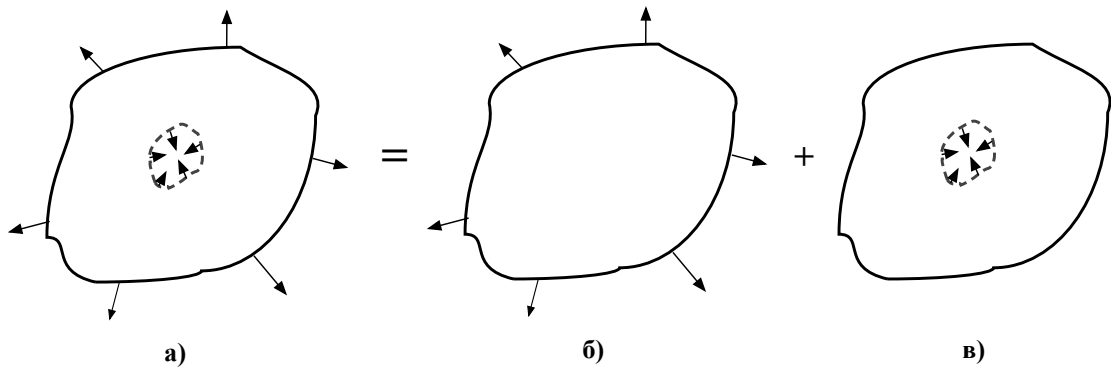
$$W = W^0 + \frac{1}{2V} \int_S (\sigma_{ij} u_i - \sigma_{ij}^0 u_i^0) n_j dS, \quad (\text{E.4})$$

где  $S$  — поверхности ячейки. Теперь, поскольку на поверхностях двух тел граничные условия обеих задач одинаковы, т.е.  $\sigma_{ij}^0 u_i n_j = \sigma_{ij}^0 u_i^0 n_j$  на  $S$ , можно переписать (E.4) в виде

$$W = W^0 + \frac{1}{2V} \int_S \sigma_{ij}^0 (u_{ij} - u_{ij}^0) n_j dS. \quad (\text{E.5})$$

Итак, формула (E.5) представляет собой промежуточную форму искомого результата. Для преобразования интеграла в (E.5) к другой форму решим вспомогательную задачу.

Рассмотрим гомогенное тело той же формы, что и на рис E.1.a, в котором эффект, связанный с наличием включения, учтен путем введения внутренних сил, распределенных некоторым образом (рис. E.2.a). Легко показать, что иллюстрируемая E.2.a задача о действии частной системы внутренних сил, приложенных по поверхности включения, дает в точности то же самое состояние полей переменных в области вне включения, что и задача, иллюстрируемая рис. E.1.a.



**Рис. E.2** Схема суперпозиции решений.

Далее задачу, соответствующую рис. E.2.a, можно представить как суперпозицию двух задач, показанных на рис. E.2.б и E.2.в. Видно, что задача E.2.б равна задаче E.1.б. Обозначим поля переменных для задачи E.2.a с верхними знаками “^”, и для задачи E.2.c с верхними штрихами “’”. Используем условия, что  $\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\epsilon}_{ij}$  и  $\hat{u}_i$  идентичны  $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, u_i$  соответственно, вне области, включающей

внутренние силы, т.е. вне включения. При помощи метода суперпозиции задачи E.2.a = E.2.б + E.2.в теперь можно записать

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij}, \\ \hat{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon'_{ij}, \\ \hat{u}_i &= u_i^0 + u'_i.\end{aligned}\tag{E.6}$$

Теперь используя (E.6), плотность энергии деформации в задаче, соответствующей рис. E.2.a, можно записать в виде

$$\begin{aligned}\hat{W} &= \frac{1}{2V} \int_V (\sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij})(\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon'_{ij}) dV = \\ &= W^0 + W' + W^{INT},\end{aligned}\tag{E.7}$$

где  $W^0$  определяется согласно (E.2) и

$$W' = \frac{1}{2V} \int_V \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} dV,\tag{E.8}$$

$$W^{INT} = \frac{1}{2V} \int_V (\sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij} + \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}^0) dV.\tag{E.9}$$

Здесь член  $W^{INT}$  описывает эффект плотности энергии взаимодействия двух напряженных состояний для схем нагружения, показанных на рис. E.2.б и в.

Плотность энергии взаимодействия (E.9) можно записать в более удобной форме. Используя соотношения напряжение-деформация и симметрию  $C_{ijkl} = C_{klij}$ , запишем второй член в подынтегральном выражении (E.9) в виде:

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}^0 &= C_{ijkl} \varepsilon'_{kl} \varepsilon_{ij}^0 = \\ &= C_{klij} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon'_{kl} = \\ &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 \varepsilon'_{ij} = \\ &= \sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij}.\end{aligned}\tag{E.10}$$

Подставляя (E.10) в (E.9) и применяя теорему Гаусса-Остроградского и уравнения равновесия  $\sigma'_{ij,j} = 0$  в  $V$ , получаем

$$W^{INT} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij} dV = \frac{1}{V} \int_S \sigma_{ij}^0 u'_i n_j dS.\tag{E.11}$$

Формула (E.11) связана с интегральным членом в (E.5) поскольку  $u_i = \hat{u}_i$ , и поэтому можно записать (E.5) в виде



$$W = W^0 + \frac{1}{2V} \int_S \sigma_{ij}^0 u'_i n_j dS = W^0 + \frac{1}{2} W^{INT}. \quad (E.12)$$

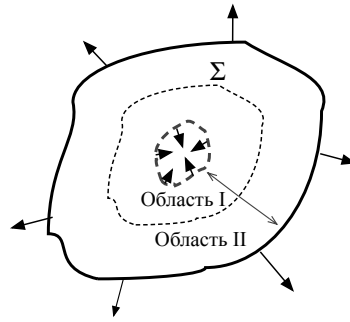
В заключение рассмотрим наиболее подходящие для использования в (E.12) формы записи  $W^{INT}$ . Возвращаясь к формуле (E.11) для  $W^{INT}$ , разделим, как показано на рис. E.3, область интегрирования по объему на две части с поверхностью раздела  $\Sigma$ . Поверхность  $\Sigma$  берется вне области внутренних сил. С учетом этого разделения областей и соотношения (E.10) уравнение (E.11) примет вид:

$$\begin{aligned} W^{INT} &= \frac{1}{V} \int_{V_I} \sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij} dV + \frac{1}{V} \int_{V_{II}} \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} dV = \\ &= \frac{1}{V} \int_{V_I} \sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij} dV + \frac{1}{V} \int_{V_{II}} \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} dV. \end{aligned} \quad (E.13)$$

С помощью теоремы Гаусса-Остроградского в сочетании с уравнениями равновесия  $\sigma_{ij,j}^0 = 0$  в  $V_I$  и  $\sigma'_{ij,j} = 0$  в  $V_{II}$  (но не в  $V_I$ ) можно записать (E.13) в следующем виде

$$W^{INT} = \frac{1}{V} \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^0 u'_i n_j dS - \frac{1}{V} \int_{\Sigma} \sigma'_{ij} u_i n_j dS + \frac{1}{V} \int_S \sigma'_{ij} u_i n_j dS. \quad (E.14)$$

где знак минус, входящий в (E.14), связан с тем, что положительное направление единичного вектора нормали к  $\Sigma$  противоположно для двух областей.



**Рис. E.3** Положение промежуточной поверхности  $\Sigma$ , по которой производится интегрирование.

Однако,  $\sigma'_{ij} n_j = 0$  на  $S$  (см. рис. E.2.в), поэтому имеем

$$W^{INT} = \frac{1}{V} \int_{\Sigma} (\sigma_{ij}^0 u'_i - \sigma'_{ij} u_i) n_j dS. \quad (E.15)$$

Использование соотношения (E.6) приводит (E.15) к виду

$$W^{INT} = \frac{1}{V} \int_{\Sigma} (\sigma_{ij}^0 \hat{u}_i - \hat{\sigma}_{ij} u_{ij}^0) n_j dS. \quad (E.16)$$

Так как в основной задаче, соответствующей Е.2.а, переменные  $\hat{\sigma}_{ij}$  и  $\hat{u}_i$  идентичны  $\sigma_{ij}$  и  $u_i$  вне области, включающей внутренние силы, то с уравнением (Е.16) и (Е.12) приводится известная формула Эшелби

$$W = W^0 + \frac{1}{2V} \int_{S_i} (\sigma_{ij}^0 u_i - \sigma_{ij} u_i^0) n_j dS, \quad (\text{Е.17})$$

где  $\Sigma$  берется по поверхности включения. Далее умножая с  $V$ , получается оригинальная формула Эшелби по энергии деформации взаимодействия:

$$U = U^0 + \frac{1}{2} \int_{S_i} (\sigma_{ij}^0 u_i - \sigma_{ij} u_i^0) n_j dS, \quad (\text{Е.18})$$

где  $S_i$  — контакт поверхности между включением и матрицей;  $\sigma_{ij}, u_i$  — компоненты тензора напряжений и вектора перемещений включения или матрицы (среда с включением) в контакте фаз; и  $\sigma_{ij}^0, u_i^0$  — компоненты тензора напряжений и вектора перемещений матрицы (среда без включения) в контакте фаз.

Можно показать, что соответствующее решения задачи с заданными перемещениями на наружной границе имеет вид

$$U = U^0 + \frac{1}{2} \int_{S_i} (\sigma_{ij} u_i^0 - \sigma_{ij}^0 u_i) n_j dS. \quad (\text{Е.19})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Ж. Доказательство $D_2^{N+1} = 0$ при использовании интегральной формулы Эшелби

### Ж.1 Задача всестороннего нагружения поперек ячейки

Из равенств (2.82), (2.83), (2.87), (2.90), (2.91) и (2.92), имеем

$$\frac{1}{2} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} (\sigma_{ij}^{N+1} u_i^{eff} - \sigma_{ij}^{eff} u_i^{N+1}) r_N d\theta dz = 0, \quad (\text{Ж.1})$$

где

$$\begin{aligned} u_r^{eff} &= \varepsilon_0 r, & u_r^{N+1} &= D_1^{N+1} r + D_2^{N+1} r^{-1}, \\ \sigma_{rr}^{eff} &= 2K_{12}^{eff} \varepsilon_0, & \sigma_{rr}^{N+1} &= 2D_1^{N+1} K_{12}^{N+1} - 2D_2^{N+1} \mu_{12}^{N+1} r^{-2}. \end{aligned} \quad (\text{Ж.2})$$

Итак,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2\pi L r_N \left[ \left( 2D_1^{N+1} K_{12}^{N+1} - 2D_2^{N+1} \mu_{12}^{N+1} r_N^{-2} \right) (\varepsilon_0 r_N) - \left( 2K_{12}^{eff} \varepsilon_0 \right) \left( D_1^{N+1} r_N + D_2^{N+1} r_N^{-1} \right) \right] = 0 \\ &\Rightarrow D_1^{N+1} \left( K_{12}^{N+1} - K_{12}^{eff} \right) \varepsilon_0 r_N^2 - D_2^{N+1} \left( \mu_{12}^{N+1} + K_{12}^{eff} \right) \varepsilon_0 = 0. \end{aligned}$$

Поскольку  $K_{12}^{N+1} = K_{12}^{eff}$ , получаем

$$\begin{aligned} &\Rightarrow D_2^{N+1} \left( \mu_{12}^{N+1} + K_{12}^{eff} \right) \varepsilon_0 = 0 \\ &\Rightarrow D_2^{N+1} = 0. \end{aligned} \tag{Ж.3}$$

## Ж.2 Задача чистого сдвига вдоль ячейки (волокон)

Из уравнений (2.46), (2.47), (2.51), (2.54), (2.55) и (2.56), имеем

$$\frac{1}{2} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} \left( \sigma_{rz}^{N+1} u_r^{eff} - \sigma_{rz}^{eff} u_z^{N+1} \right) r_N d\theta dz = 0, \tag{Ж.4}$$

где

$$\begin{aligned} u_z^{eff} &= 2\varepsilon_0 r_N \cos\theta, & u_z^{N+1} &= \left( D_1^{N+1} r_N + D_2^{N+1} r_N^{-1} \right) \cos\theta, \\ \sigma_{rz}^{eff} &= 2\mu_{23}^{eff} \varepsilon_0 \cos\theta, & \sigma_{rz}^{N+1} &= \mu_{23}^{N+1} \left( D_1^{N+1} - D_2^{N+1} r_N^{-2} \right) \cos\theta. \end{aligned} \tag{Ж.5}$$

Итак,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \pi L r_N \left[ \left( \mu_{23}^{N+1} D_1^{N+1} \varepsilon_0 r_N - \mu_{23}^{N+1} D_2^{N+1} \varepsilon_0 r_N^{-1} \right) - \left( \mu_{23}^{eff} D_1^{N+1} \varepsilon_0 r_N + \mu_{23}^{eff} D_2^{N+1} r_N^{-1} \right) \right] = 0 \\ &\Rightarrow D_1^{N+1} \left( \mu_{23}^{N+1} - \mu_{23}^{eff} \right) \varepsilon_0 r_N - D_2^{N+1} \left( \mu_{23}^{N+1} + \mu_{23}^{eff} \right) \varepsilon_0 r_N^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Так как  $\mu_{23}^{N+1} = \mu_{23}^{eff}$ , имеем

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2D_2^{N+1} \mu_{23}^{N+1} \varepsilon_0 r_N^{-1} = 0 \\ &\Rightarrow D_2^{N+1} = 0. \end{aligned} \tag{Ж.6}$$

## Ж.3 Задача одноосном растяжении вдоль волокон

Из уравнений (2.132), (2.133), (2.137), (2.140), (2.141) и (2.142), получаем

$$\frac{1}{2} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} \left( \sigma_{zz}^{N+1} u_z^{eff} - \sigma_{zz}^{eff} u_z^{N+1} \right) r_N d\theta dz = 0, \tag{Ж.7}$$

где

$$\begin{aligned} u_z^{eff} &= \varepsilon_0 z, & u_z^{N+1} &= \varepsilon_0 z, \\ \sigma_{zz}^{eff} &= E_{33}^{eff} \varepsilon_0, & \sigma_{zz}^{N+1} &= 4K_{12}^{N+1} v_{31}^{N+1} D_1^{N+1} + 4K_{12}^{N+1} \left( v_{31}^{N+1} \right)^2 \varepsilon_0 + E_{33}^{N+1} \varepsilon_0. \end{aligned} \tag{Ж.8}$$

Итак,

$$\Rightarrow 4\pi L^2 \varepsilon_0 r_N \left[ \left( 4K_{12}^{N+1} v_{31}^{N+1} D_1^{N+1} + 4K_{12}^{N+1} (v_{31}^{N+1})^2 \varepsilon_0 + E_{33}^{N+1} \varepsilon_0 \right) - E_{33}^{eff} \varepsilon_0 \right] = 0$$

Поскольку  $E_{33}^{N+1} = E_{33}^{eff}$ ,  $K_{12}^{N+1} = K_{12}^{eff}$ ,  $v_{31}^{N+1} = v_{31}^{eff}$ , получаем

$$\Rightarrow D_1^{N+1} = -v_{31}^{eff} \varepsilon_0. \quad (\text{Ж.9})$$

На основании уравнений (2.64), (2.67) и (2.74) имеем

$$\Rightarrow D_2^{N+1} = 0. \quad (\text{Ж.10})$$

#### **Ж.4 Задача чистого сдвига в плоскости изотропии**

Из уравнений (2.205), (2.206), (2.110), (2.111), имеем

$$\frac{1}{2} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} \left( \sigma_{rr}^{N+1} u_r^{eff} + \sigma_{r\theta}^{N+1} u_\theta^{eff} - \sigma_{rr}^{eff} u_r^{N+1} - \sigma_{r\theta}^{eff} u_\theta^{N+1} \right) r_N d\theta dz = 0, \quad (\text{Ж.11})$$

где

$$\begin{aligned} u_r^{N+1}(r, \theta) &= \frac{1}{4\mu_{12}^{N+1}} \left( 2r + (\eta^{N+1} + 1) \frac{D_2^{N+1}}{r} + \frac{D_4^{N+1}}{r^3} \right) \sin 2\theta, \\ u_\theta^{N+1}(r, \theta) &= \frac{1}{4\mu_{12}^{N+1}} \left( 2r + (\eta^{N+1} - 1) \frac{D_2^{N+1}}{r} - \frac{D_4^{N+1}}{r^3} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_{rr}^{N+1}(r, \theta) &= \left( 1 - \Gamma^{N+1} \frac{D_2^{N+1}}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{D_4^{N+1}}{r^4} \right) \sin 2\theta, \\ \sigma_{r\theta}^{N+1}(r, \theta) &= \left( 1 + \frac{D_2^{N+1}}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{D_4^{N+1}}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ u_r^{eff} &= \frac{r \sin 2\theta}{2\mu_{12}^{eff}}, & u_\theta^{eff} &= \frac{r \cos 2\theta}{2\mu_{12}^{eff}}, \\ \sigma_{rr}^{eff} &= \sin 2\theta, & \sigma_{r\theta}^{eff} &= \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (\text{Ж.12})$$

Итак,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \pi L r_N \left[ \frac{1}{8\mu_{12}^{eff}} \left( 4r_N - 4\Gamma^{N+1} \frac{D_2^{N+1}}{r_N} - 6 \frac{D_4^{N+1}}{r_N^3} \right) + \frac{1}{8\mu_{12}^{eff}} \left( 4r_N + 4 \frac{D_2^{N+1}}{r_N} + 6 \frac{D_4^{N+1}}{r_N^3} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4\mu_{12}^{N+1}} \left( 2r_N + (\eta^{N+1} + 1) \frac{D_2^{N+1}}{r_N} + \frac{D_4^{N+1}}{r_N^3} \right) - \frac{1}{4\mu_{12}^{N+1}} \left( 2r_N + (\eta^{N+1} - 1) \frac{D_2^{N+1}}{r_N} - \frac{D_4^{N+1}}{r_N^3} \right) \right] = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2\mu_{12}^{eff}} \left( r_N - \Gamma^{N+1} \frac{D_2^{N+1}}{r_N} \right) + \frac{1}{2\mu_{12}^{eff}} \left( r_N + \frac{D_2^{N+1}}{r_N} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2\mu_{12}^{N+1}} \left( r_N + \frac{(\eta^{N+1} + 1) D_2^{N+1}}{2 r_N} \right) - \frac{1}{2\mu_{12}^{N+1}} \left( r_N + \frac{(\eta^{N+1} - 1) D_2^{N+1}}{2 r_N} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Так как  $\mu_{12}^{N+1} = \mu_{12}^{eff}$ , получаем

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow D_2^{N+1} \frac{(1 - \Gamma^{N+1} - \eta^{N+1})}{r_N} = 0 \\
&\Rightarrow D_2^{N+1} = 0.
\end{aligned} \tag{Ж.13}$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Доказательство выражения $W^{RVE}$

#### 3.1 Задача всестороннего нагружения поперек ячейки

Из соотношения (2.117) имеем  $W^{RVE} = W^{(1)} + W^{(2)} + W^{(3)}$ . Определяем плотность энергии деформации:

А) Для волокна,  $W^{(1)}$

$$W^{(1)} = \frac{1}{2V} \int_0^{r_{(1)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2L} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV = \frac{1}{2V} \int_0^{r_{(1)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2L} (\sigma_{rr}^{(1)} \varepsilon_{rr}^{(1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(1)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}) dV, \tag{3.1}$$

где  $V$  — объем ячейки. С помощью (2.68), (2.69), (2.70) и (2.71) соотношение (3.1) имеет вид

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2V} \int_0^{r_{(1)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2L} \left[ \left( D_1^{(1)} (\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) r^{\lambda_{(1)}-1} + D_2^{(1)} (-\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) r^{-\lambda_{(1)}-1} \right) \times \right. \\
&\quad \times \left( \lambda_{(1)} D_1^{(1)} r^{\lambda_{(1)}-1} - \lambda_{(1)} D_2^{(1)} r^{-\lambda_{(1)}-1} \right) + \\
&\quad + \left( D_1^{(1)} (\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}) r^{\lambda_{(1)}-1} + D_2^{(1)} (-\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}) r^{-\lambda_{(1)}-1} \right) \times \\
&\quad \left. \times \left( D_1^{(1)} r^{\lambda_{(1)}-1} - D_2^{(1)} r^{-\lambda_{(1)}-1} \right) \right] dV = \\
&= \frac{1}{r_N^2} \int_0^{r_{(1)}} \left[ 2(D_1^{(1)})^2 (C_{22}^{(1)} + \lambda_{(1)} C_{12}^{(1)}) r^{2\lambda_{(1)}-1} + 2(D_2^{(1)})^2 (C_{22}^{(1)} - \lambda_{(1)} C_{12}^{(1)}) r^{-2\lambda_{(1)}-1} \right] dr = \\
&= \frac{1}{r_N^2} \left[ (D_1^{(1)})^2 (C_{22}^{(1)} + \lambda_{(1)} C_{12}^{(1)}) \frac{r^{2\lambda_{(1)}}}{\lambda_{(1)}} + (D_2^{(1)})^2 (C_{22}^{(1)} - \lambda_{(1)} C_{12}^{(1)}) \frac{r^{-2\lambda_{(1)}}}{-\lambda_{(1)}} \right]_0^{r_{(1)}}.
\end{aligned}$$

Итак,

$$W^{(1)} = \frac{1}{r_N^2} \left[ \left( \frac{C_{22}^{(1)}}{\lambda_{(1)}} + C_{12}^{(1)} \right) (D_1^{(1)})^2 (r_{(1)}^{2\lambda_{(1)}} - r_{(0)}^{2\lambda_{(1)}}) + \left( \frac{C_{22}^{(1)}}{-\lambda_{(1)}} + C_{12}^{(1)} \right) (D_2^{(1)})^2 (r_{(1)}^{-2\lambda_{(1)}} - r_{(0)}^{-2\lambda_{(1)}}) \right]. \quad (3.2)$$

Б) Для вискеризованного межфазного слоя,  $W^{(2)}$

$$W^{(2)} = \frac{1}{2V} \int_{r_{(1)}}^{r_{(2)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2L} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV = \frac{1}{2V} \int_{r_{(1)}}^{r_{(2)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2L} (\sigma_{rr}^{(2)} \varepsilon_{rr}^{(2)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)}) dV. \quad (3.3)$$

Аналогично с формулой (3.2) равенство (3.3) принимает вид

$$W^{(2)} = \frac{1}{r_N^2} \left[ \left( \frac{C_{22}^{(2)}}{\lambda_{(2)}} + C_{12}^{(2)} \right) (D_1^{(2)})^2 (r_{(2)}^{2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{2\lambda_{(2)}}) + \left( \frac{C_{22}^{(2)}}{-\lambda_{(2)}} + C_{12}^{(2)} \right) (D_2^{(2)})^2 (r_{(2)}^{-2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{-2\lambda_{(2)}}) \right]. \quad (3.4)$$

В) Для матрицы,  $W^{(3)}$

$$W^{(3)} = \frac{1}{2V} \int_{r_{(2)}}^{r_{(3)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2L} \sigma_{ij}^{(3)} \varepsilon_{ij}^{(3)} dV = \frac{1}{2V} \int_{r_{(2)}}^{r_{(3)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2L} (\sigma_{rr}^{(3)} \varepsilon_{rr}^{(3)} + \sigma_{\theta\theta}^{(3)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(3)}) dV. \quad (3.5)$$

Аналогично с формулой (3.2) равенство (3.5) принимает вид

$$W^{(3)} = \frac{1}{r_N^2} \left[ \left( \frac{C_{22}^{(3)}}{\lambda_{(3)}} + C_{12}^{(3)} \right) (D_1^{(3)})^2 (r_{(3)}^{2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{2\lambda_{(3)}}) + \left( \frac{C_{22}^{(3)}}{-\lambda_{(3)}} + C_{12}^{(3)} \right) (D_2^{(3)})^2 (r_{(3)}^{-2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{-2\lambda_{(3)}}) \right]. \quad (3.6)$$

Таким образом, на основании (3.2), (3.4) и (3.6), плотность энергии деформации гетерогенного композита

$$\begin{aligned}
W^{RVE} = & \frac{1}{r_N^2} \left[ \left( \frac{C_{22}^{(1)}}{\lambda_{(1)}} + C_{12}^{(1)} \right) (D_1^{(1)})^2 (r_{(1)}^{2\lambda_{(1)}} - r_{(0)}^{2\lambda_{(1)}}) + \right. \\
& \left. + \left( \frac{C_{22}^{(1)}}{-\lambda_{(1)}} + C_{12}^{(1)} \right) (D_2^{(1)})^2 (r_{(1)}^{-2\lambda_{(1)}} - r_{(0)}^{-2\lambda_{(1)}}) \right] + \\
& + \frac{1}{r_N^2} \left[ \left( \frac{C_{22}^{(2)}}{\lambda_{(2)}} + C_{12}^{(2)} \right) (D_1^{(2)})^2 (r_{(2)}^{2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{2\lambda_{(2)}}) + \right. \\
& \left. + \left( \frac{C_{22}^{(2)}}{-\lambda_{(2)}} + C_{12}^{(2)} \right) (D_2^{(2)})^2 (r_{(2)}^{-2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{-2\lambda_{(2)}}) \right] + \\
& + \frac{1}{r_N^2} \left[ \left( \frac{C_{22}^{(3)}}{\lambda_{(3)}} + C_{12}^{(3)} \right) (D_1^{(3)})^2 (r_{(3)}^{2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{2\lambda_{(3)}}) + \right. \\
& \left. + \left( \frac{C_{22}^{(3)}}{-\lambda_{(3)}} + C_{12}^{(3)} \right) (D_2^{(3)})^2 (r_{(3)}^{-2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{-2\lambda_{(3)}}) \right].
\end{aligned} \tag{3.7}$$

### 3.2 Задача чистого сдвига вдоль ячейки (волокон)

Определяем плотность энергии деформации:

A) Для волокна,  $W^{(1)}$

$$W^{(1)} = \frac{1}{2V} \int_0^{r_{(1)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2L} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV = \frac{1}{2V} \int_0^{r_{(1)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2L} (\sigma_{\theta z}^{(1)} \varepsilon_{\theta z}^{(1)} + \sigma_{rz}^{(1)} \varepsilon_{rz}^{(1)}) dV, \tag{3.8}$$

где  $V$  — объем ячейки. С помощью (2.32), (2.33), (2.34) и (2.35) соотношение (3.8) имеет вид

$$\begin{aligned}
W^{(1)} &= \frac{1}{2V} \int_0^{r_{(1)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2L} [2\sigma_{\theta z}^{(1)} \varepsilon_{\theta z}^{(1)} + 2\sigma_{rz}^{(1)} \varepsilon_{rz}^{(1)}] dV \\
&= \frac{1}{2V} \int_0^{r_{(1)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2L} \left[ (C_{44}^{(1)}(D_1^{(1)} r^{\lambda_{(1)}-1} + D_2^{(1)} r^{-\lambda_{(1)}-1})(-\sin\theta) \right) \left( (D_1^{(1)} r^{\lambda_{(1)}-1} + D_2^{(1)} r^{-\lambda_{(1)}-1})(-\sin\theta) \right) + \right. \\
&\quad \left. + (C_{55}^{(1)}(\lambda_{(1)} D_1^{(1)} r^{\lambda_{(1)}-1} + (-\lambda_{(1)}) D_2^{(1)} r^{-\lambda_{(1)}-1})(\cos\theta) \right) \left( (\lambda_{(1)} D_1^{(1)} r^{\lambda_{(1)}-1} + (-\lambda_{(1)}) D_2^{(1)} r^{\lambda_{(1)}-1})(\cos\theta) \right) \right] dV \\
&= \frac{1}{2r_N^2} \int_0^{r_{(1)}} \left[ (C_{44}^{(1)} + \lambda_{(1)}^2 C_{55}^{(1)}) \left( (D_1^{(1)})^2 r^{2\lambda_{(1)}-1} \right) + (C_{44}^{(1)} + \lambda_{(1)}^2 C_{55}^{(1)}) \left( (D_2^{(1)})^2 r^{-2\lambda_{(1)}-1} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2(C_{44}^{(1)} - \lambda_{(1)}^2 C_{55}^{(1)}) (D_1^{(1)} D_2^{(1)}) \frac{1}{r} \right] dr \\
&= \frac{1}{2r_N^2} \left[ (C_{44}^{(1)} + \lambda_{(1)}^2 C_{55}^{(1)}) \left( (D_1^{(1)})^2 \frac{r^{2\lambda_{(1)}}}{2\lambda_{(1)}} \right) + (C_{44}^{(1)} + \lambda_{(1)}^2 C_{55}^{(1)}) \left( (D_2^{(1)})^2 \frac{r^{-2\lambda_{(1)}}}{-2\lambda_{(1)}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2(C_{44}^{(1)} - \lambda_{(1)}^2 C_{55}^{(1)}) (D_1^{(1)} D_2^{(1)} \ln r) \right]_0^{r_{(1)}}.
\end{aligned}$$

С помощью равенств  $\lambda_{(i)}^2 = C_{22}^{(i)} / C_{11}^{(i)}$ , имеем

$$W^{(1)} = \frac{1}{2r_N^2} \left[ C_{44}^{(1)} \left( \frac{(D_1^{(1)})^2}{\lambda_{(1)}} (r_{(1)}^{2\lambda_{(1)}} - r_{(0)}^{2\lambda_{(1)}}) + \frac{(D_2^{(1)})^2}{-\lambda_{(1)}} (r_{(1)}^{-2\lambda_{(1)}} - r_{(0)}^{-2\lambda_{(1)}}) \right) \right]. \quad (3.9)$$

Б) Для вискеризованного межфазного слоя,  $W^{(2)}$

Аналогично с (3.9), получаем

$$\begin{aligned}
W^{(2)} &= \frac{1}{2V} \iiint_V [2\sigma_{\theta z}^{(2)} \varepsilon_{\theta z}^{(2)} + 2\sigma_{rz}^{(2)} \varepsilon_{rz}^{(2)}] dV \\
&= \frac{1}{2r_N^2} \left[ C_{44}^{(2)} \left( \frac{(D_1^{(2)})^2}{\lambda_{(2)}} (r_{(2)}^{2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{2\lambda_{(2)}}) + \frac{(D_2^{(2)})^2}{-\lambda_{(2)}} (r_{(2)}^{-2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{-2\lambda_{(2)}}) \right) \right]. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

В) Для матрицы,  $W^{(3)}$

$$\begin{aligned}
W^{(3)} &= \frac{1}{2V} \iiint_V [2\sigma_{\theta z}^{(3)} \varepsilon_{\theta z}^{(3)} + 2\sigma_{rz}^{(3)} \varepsilon_{rz}^{(3)}] dV \\
&= \frac{1}{2r_N^2} \left[ C_{44}^{(3)} \left( \frac{(D_1^{(3)})^2}{\lambda_{(3)}} (r_{(3)}^{2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{2\lambda_{(3)}}) + \frac{(D_2^{(3)})^2}{-\lambda_{(3)}} (r_{(3)}^{-2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{-2\lambda_{(3)}}) \right) \right]. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Таким образом, на основании (3.9), (3.10) и (3.11), плотность энергии деформации гетерогенного композита



$$\begin{aligned}
W^{RVE} = & \frac{1}{2r_N^2} \left[ C_{44}^{(1)} \left( \frac{(D_1^{(1)})^2}{\lambda_{(1)}} (r_{(1)}^{2\lambda_{(1)}} - r_{(0)}^{2\lambda_{(1)}}) + \frac{(D_2^{(1)})^2}{-\lambda_{(1)}} (r_{(1)}^{-2\lambda_{(1)}} - r_{(0)}^{-2\lambda_{(1)}}) \right) \right] + \\
& + \frac{1}{2r_N^2} \left[ C_{44}^{(2)} \left( \frac{(D_1^{(2)})^2}{\lambda_{(2)}} (r_{(2)}^{2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{2\lambda_{(2)}}) + \frac{(D_2^{(2)})^2}{-\lambda_{(2)}} (r_{(2)}^{-2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{-2\lambda_{(2)}}) \right) \right] + \\
& + \frac{1}{2r_N^2} \left[ C_{44}^{(3)} \left( \frac{(D_1^{(3)})^2}{\lambda_{(3)}} (r_{(3)}^{2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{2\lambda_{(3)}}) + \frac{(D_2^{(3)})^2}{-\lambda_{(3)}} (r_{(3)}^{-2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{-2\lambda_{(3)}}) \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.12}$$

### 3.3 Задача одноосного растяжения вдоль волокон

На основании (2.133–2.138) определяем плотность энергии деформации:

А) Для волокна,  $W^{(1)}$

$$W^{(1)} = \frac{1}{2V} \int_0^{r_{(1)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2L} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV = \frac{1}{2V} \int_0^{r_{(1)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2L} (\sigma_{rr}^{(1)} \varepsilon_{rr}^{(1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(1)} \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(1)} \varepsilon_{zz}^{(1)}) dV, \tag{3.13}$$

где  $V$  — объем ячейки.

$$\begin{aligned}
W^{(1)} = & \frac{1}{2V} \int_V \left[ \left( D_1^{(1)} (\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) r^{\lambda_{(1)}-1} + D_2^{(1)} (-\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) r^{-\lambda_{(1)}-1} + (C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) v^{(1)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(1)} \varepsilon_0 \right) \times \right. \\
& \times \left( \lambda_{(1)} D_1^{(1)} r^{\lambda_{(1)}-1} + (-\lambda_{(1)}) D_2^{(1)} r^{\lambda_{(2)}-1} + v^{(1)} \varepsilon_0 \right) + \\
& + \left( D_1^{(1)} (\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}) r^{\lambda_{(1)}-1} + D_2^{(1)} (-\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}) r^{-\lambda_{(1)}-1} + (C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}) v^{(1)} \varepsilon_0 + C_{23}^{(1)} \varepsilon_0 \right) \times \\
& \times \left( D_1^{(1)} r^{\lambda_{(1)}-1} + D_2^{(1)} r^{\lambda_{(2)}-1} + v^{(1)} \varepsilon_0 \right) + \\
& + \left( D_1^{(1)} (\lambda_{(1)} C_{13}^{(1)} + C_{23}^{(1)}) r^{\lambda_{(1)}-1} + D_2^{(1)} (-\lambda_{(1)} C_{13}^{(1)} + C_{23}^{(1)}) r^{-\lambda_{(1)}-1} + (C_{13}^{(1)} + C_{23}^{(1)}) v^{(1)} \varepsilon_0 + C_{33}^{(1)} \varepsilon_0 \right) \times \\
& \left. \times (\varepsilon_0) \right] r dr d\theta dz =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2V} \int_V \left[ \left( D_1^{(1)} \right)^2 \left[ \lambda_{(1)}^2 C_{11}^{(1)} + \lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} \right] r^{2\lambda_{(1)}-2} + D_1^{(1)} D_2^{(1)} \left[ -\lambda_{(1)}^2 C_{11}^{(1)} + \left( -\lambda_{(1)} \right) C_{12}^{(1)} \right] r^{-2} + \right. \\
&\quad + D_1^{(1)} \left[ \lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)} \right] \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{\lambda_{(1)}-1} + D_2^{(1)} D_1^{(1)} \left[ -\lambda_{(1)}^2 C_{11}^{(1)} + \lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} \right] r^{-2} + \\
&\quad + \left( D_2^{(1)} \right)^2 \left[ \lambda_{(1)}^2 C_{11}^{(1)} + \left( -\lambda_{(1)} \right) C_{12}^{(1)} \right] r^{2\lambda_{(1)}-2} + D_2^{(1)} \left[ -\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)} \right] \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{-\lambda_{(1)}-1} + \\
&\quad + \left( C_{11}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{12}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{13}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \right) \left( \lambda_{(1)} D_1^{(1)} r^{\lambda_{(1)}-1} \right) + \\
&\quad + \left( C_{11}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{12}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{13}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \right) \left( -\lambda_{(1)} D_1^{(1)} r^{-\lambda_{(1)}-1} \right) + \\
&\quad + \left( C_{11}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{12}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{13}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \right) \left( \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \right) + \\
&\quad + \left( D_1^{(1)} \right)^2 \left[ \lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} \right] r^{2\lambda_{(1)}-2} + D_1^{(1)} D_2^{(1)} \left[ \lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} \right] r^{-2} + \\
&\quad + D_1^{(1)} \left[ \lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} \right] \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{\lambda_{(1)}-1} + D_2^{(1)} D_1^{(1)} \left[ -\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} \right] r^{-2} + \\
&\quad + \left( D_2^{(1)} \right)^2 \left[ -\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} \right] r^{-2\lambda_{(1)}-2} + D_2^{(1)} \left[ -\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} \right] \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{-\lambda_{(1)}-1} + \\
&\quad + \left( C_{12}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{22}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{23}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \right) \left( D_1^{(1)} r^{\lambda_{(1)}-1} \right) + \\
&\quad + \left( C_{12}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{22}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{23}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \right) \left( D_2^{(1)} r^{-\lambda_{(1)}-1} \right) + \\
&\quad + \left( C_{12}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{22}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{23}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \right) \left( \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \right) + \\
&\quad + D_1^{(1)} \left[ \lambda_{(1)} C_{13}^{(1)} + C_{23}^{(1)} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{\lambda_{(1)}-1} + D_2^{(1)} \left[ -\lambda_{(1)} C_{13}^{(1)} + C_{23}^{(1)} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{-\lambda_{(1)}-1} + \\
&\quad \left. + \left( C_{13}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{23}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{33}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \right) \boldsymbol{\varepsilon}_0 \right] r dr d\theta dz.
\end{aligned}$$

Поскольку  $\lambda_{(1)}^2 = C_{22}^{(1)} / C_{11}^{(1)}$ , имеем

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2V} \int_V \left[ 2(D_1^{(1)})^2 [\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}] r^{2\lambda_{(1)}-2} + 2(D_2^{(1)})^2 [-\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}] r^{-2\lambda_{(1)}-2} + \right. \\
&\quad + D_1^{(1)} [\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}] \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{\lambda_{(1)}-1} + D_1^{(1)} [\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}] \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{\lambda_{(1)}-1} + \\
&\quad + D_2^{(1)} [-\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}] \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{-\lambda_{(1)}-1} + D_1^{(1)} [-\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}] \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{-\lambda_{(1)}-1} + \\
&\quad + (C_{11}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{12}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{13}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0) (\lambda_{(1)} D_1^{(1)} r^{\lambda_{(1)}-1}) + \\
&\quad + (C_{12}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{22}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{23}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0) (D_1^{(1)} r^{\lambda_{(1)}-1}) + \\
&\quad + (C_{11}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{12}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{13}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0) (-\lambda_{(1)} D_2^{(1)} r^{-\lambda_{(1)}-1}) + \\
&\quad + (C_{12}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{22}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{23}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0) (D_2^{(1)} r^{-\lambda_{(1)}-1}) + \\
&\quad + (C_{11}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{12}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{13}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0) (\mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \\
&\quad + (C_{12}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{22}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{23}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0) (\mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \\
&\quad + (C_{13}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{23}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{33}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0) (\boldsymbol{\varepsilon}_0) + \\
&\quad \left. + D_1^{(1)} [\lambda_{(1)} C_{13}^{(1)} + C_{23}^{(1)}] \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{\lambda_{(1)}-1} + D_2^{(1)} [-\lambda_{(1)} C_{13}^{(1)} + C_{23}^{(1)}] \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{-\lambda_{(1)}-1} \right] r dr d\theta dz.
\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
A_1^{(1)} &= C_{11}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{12}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{13}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0, \\
A_2^{(1)} &= C_{12}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{22}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{23}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0, \\
A_3^{(1)} &= C_{13}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{23}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + C_{33}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0.
\end{aligned}$$

и переставляя их в интеграле, имеем

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2V} \int_V \left[ 2(D_1^{(1)})^2 [\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}] r^{2\lambda_{(1)}-2} + 2(D_2^{(1)})^2 [-\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}] r^{-2\lambda_{(1)}-2} + \right. \\
&\quad + [(A_1^{(1)} + A_2^{(1)}) \mathbf{v}^{(1)} + A_3^{(1)}] \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \\
&\quad + 2D_1^{(1)} [\lambda_{(1)} C_{13}^{(1)} + C_{23}^{(1)}] \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{\lambda_{(1)}-1} + 2D_2^{(1)} [-\lambda_{(1)} C_{13}^{(1)} + C_{23}^{(1)}] \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{-\lambda_{(1)}-1} + \\
&\quad + 2D_1^{(1)} [(\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) + (\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)})] \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{\lambda_{(1)}-1} + \\
&\quad \left. + 2D_2^{(1)} [(-\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) + (-\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)})] \mathbf{v}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 r^{-\lambda_{(1)}-1} \right] r dr d\theta dz =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2V} \int_V \left[ 2(D_1^{(1)})^2 [\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}] r^{2\lambda_{(1)}-1} + 2(D_2^{(1)})^2 [-\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}] r^{-2\lambda_{(1)}-1} + \right. \\
&\quad \left. + [(A_1^{(1)} + A_2^{(1)})v^{(1)} + A_3^{(1)}] \varepsilon_0 + \right. \\
&\quad \left. + 2D_1^{(1)} \left[ ((\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) + (\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}))v^{(1)} + (\lambda_{(1)} C_{13}^{(1)} + C_{23}^{(1)}) \right] \varepsilon_0 r^{\lambda_{(1)}} + \right. \\
&\quad \left. + 2D_2^{(1)} \left[ ((-\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) + (-\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}))v^{(1)} + (-\lambda_{(1)} C_{13}^{(1)} + C_{23}^{(1)}) \right] \varepsilon_0 r^{-\lambda_{(1)}} \right] dr d\theta dz.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
W^{(1)} &= \frac{1}{2r_N^2} \left[ (D_1^{(1)})^2 \left( C_{12}^{(1)} + \frac{C_{22}^{(1)}}{\lambda_{(1)}} \right) (r_{(1)}^{2\lambda_{(1)}} - r_{(0)}^{2\lambda_{(1)}}) + (D_2^{(1)})^2 \left( C_{12}^{(1)} + \frac{C_{22}^{(1)}}{-\lambda_{(1)}} \right) (r_{(1)}^{-2\lambda_{(1)}} - r_{(0)}^{-2\lambda_{(1)}}) + \right. \\
&\quad \left. + 2D_1^{(1)} \varepsilon_0 \left[ ((\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) + (\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}))v^{(1)} + (\lambda_{(1)} C_{13}^{(1)} + C_{22}^{(1)}) \right] \left( \frac{r_{(1)}^{\lambda_{(1)}+1} - r_{(0)}^{\lambda_{(1)}+1}}{1 + \lambda_{(1)}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2D_2^{(1)} \varepsilon_0 \left[ ((-\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) + (-\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}))v^{(1)} + (-\lambda_{(1)} C_{13}^{(1)} + C_{22}^{(1)}) \right] (Z^{(1)}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_0 [(A_1^{(1)} + A_2^{(1)})v^{(1)} + A_3^{(1)}] (r_{(1)}^2 - r_{(0)}^2) \right],
\end{aligned}$$

где

(3.13)

$$\mathbf{Z}^{(1)} = \begin{cases} \ln r_{(1)} & , \lambda_{(1)} = 1 \\ \frac{r_{(1)}^{-\lambda_{(1)}+1} - r_{(0)}^{-\lambda_{(1)}+1}}{1 - \lambda_{(1)}} & , \lambda_{(1)} \neq 1 \end{cases}, \quad \mathbf{v}^{(1)} = \begin{cases} 0 & , \lambda_{(1)} = 1 \\ \frac{C_{13}^{(1)} - C_{23}^{(1)}}{C_{22}^{(1)} - C_{11}^{(1)}} & , \lambda_{(1)} \neq 1 \end{cases},$$

$$\lambda_{(1)} = \begin{cases} 1 & , C_{22}^{(1)} = C_{11}^{(1)} \\ \sqrt{\frac{C_{22}^{(1)}}{C_{11}^{(1)}}} & , C_{22}^{(1)} \neq C_{11}^{(1)} \end{cases}.$$

Б) Для вискеризованного межфазного слоя,  $W^{(2)}$

$$\begin{aligned}
W^{(2)} &= \frac{1}{2r_N^2} \left[ (D_1^{(2)})^2 \left( C_{12}^{(2)} + \frac{C_{22}^{(2)}}{\lambda_{(2)}} \right) (r_{(2)}^{2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{2\lambda_{(2)}}) + (D_2^{(2)})^2 \left( C_{12}^{(2)} + \frac{C_{22}^{(2)}}{-\lambda_{(2)}} \right) (r_{(2)}^{-2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{-2\lambda_{(2)}}) + \right. \\
&\quad \left. + 2D_1^{(2)} \varepsilon_0 \left[ ((\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) + (\lambda_{(2)} C_{12}^{(2)} + C_{22}^{(2)}))v^{(2)} + (\lambda_{(2)} C_{13}^{(2)} + C_{22}^{(2)}) \right] \left( \frac{r_{(2)}^{\lambda_{(2)}+1} - r_{(1)}^{\lambda_{(2)}+1}}{1 + \lambda_{(2)}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2D_2^{(2)} \varepsilon_0 \left[ ((-\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) + (-\lambda_{(2)} C_{12}^{(2)} + C_{22}^{(2)}))v^{(2)} + (-\lambda_{(2)} C_{13}^{(2)} + C_{22}^{(2)}) \right] (Z^{(2)}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_0 [(A_1^{(2)} + A_2^{(2)})v^{(2)} + A_3^{(2)}] (r_{(2)}^2 - r_{(1)}^2) \right].
\end{aligned}$$

(3.14)

В) Для матрицы,  $W^{(3)}$

$$\begin{aligned}
 W^{(3)} = & \frac{1}{2r_N^2} \left[ (D_1^{(3)})^2 \left( C_{12}^{(3)} + \frac{C_{22}^{(3)}}{\lambda_{(3)}} \right) \left( r_{(3)}^{2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{2\lambda_{(3)}} \right) + (D_2^{(3)})^2 \left( C_{12}^{(3)} + \frac{C_{22}^{(3)}}{-\lambda_{(3)}} \right) \left( r_{(3)}^{-2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{-2\lambda_{(3)}} \right) + \right. \\
 & + 2D_1^{(3)} \varepsilon_0 \left[ \left( (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) + (\lambda_{(3)} C_{12}^{(3)} + C_{22}^{(3)}) \right) v^{(3)} + (\lambda_{(3)} C_{13}^{(3)} + C_{22}^{(3)}) \right] \left[ \frac{r_{(3)}^{\lambda_{(3)}+1} - r_{(2)}^{\lambda_{(3)}+1}}{1 + \lambda_{(3)}} \right] + \quad (3.15) \\
 & + 2D_2^{(3)} \varepsilon_0 \left[ \left( (-\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) + (-\lambda_{(3)} C_{12}^{(3)} + C_{22}^{(3)}) \right) v^{(3)} + (-\lambda_{(3)} C_{13}^{(3)} + C_{22}^{(3)}) \right] \left( Z^{(3)} \right) + \\
 & \left. + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left[ (A_1^{(3)} + A_2^{(3)}) v^{(3)} + A_3^{(3)} \right] \left( r_{(3)}^2 - r_{(2)}^2 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Таким образом, на основании (3.13), (3.14) и (3.15), плотность энергии деформации гетерогенного композита

$$\begin{aligned}
W^{RVE} = & \frac{1}{2r_N^2} \left[ (D_1^{(1)})^2 \left( C_{12}^{(1)} + \frac{C_{22}^{(1)}}{\lambda_{(1)}} \right) \left( r_{(1)}^{2\lambda_{(1)}} - r_{(0)}^{2\lambda_{(1)}} \right) + (D_2^{(1)})^2 \left( C_{12}^{(1)} + \frac{C_{22}^{(1)}}{-\lambda_{(1)}} \right) \left( r_{(1)}^{-2\lambda_{(1)}} - r_{(0)}^{-2\lambda_{(1)}} \right) + \right. \\
& + 2D_1^{(1)} \varepsilon_0 \left[ \left( (\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) + (\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}) \right) v^{(1)} + (\lambda_{(1)} C_{13}^{(1)} + C_{22}^{(1)}) \right] \left[ \frac{r_{(1)}^{\lambda_{(1)}+1} - r_{(0)}^{\lambda_{(1)}+1}}{1 + \lambda_{(1)}} \right] + \\
& + 2D_2^{(1)} \varepsilon_0 \left[ \left( (-\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) + (-\lambda_{(1)} C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}) \right) v^{(1)} + (-\lambda_{(1)} C_{13}^{(1)} + C_{22}^{(1)}) \right] (Z^{(1)}) + \\
& + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left[ (A_1^{(1)} + A_2^{(1)}) v^{(1)} + A_3^{(1)} \right] (r_{(1)}^2 - r_{(0)}^2) \\
& + (D_1^{(2)})^2 \left( C_{12}^{(2)} + \frac{C_{22}^{(2)}}{\lambda_{(2)}} \right) \left( r_{(2)}^{2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{2\lambda_{(2)}} \right) + (D_2^{(2)})^2 \left( C_{12}^{(2)} + \frac{C_{22}^{(2)}}{-\lambda_{(2)}} \right) \left( r_{(2)}^{-2\lambda_{(2)}} - r_{(1)}^{-2\lambda_{(2)}} \right) + \\
& + 2D_1^{(2)} \varepsilon_0 \left[ \left( (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) + (\lambda_{(2)} C_{12}^{(2)} + C_{22}^{(2)}) \right) v^{(2)} + (\lambda_{(2)} C_{13}^{(2)} + C_{22}^{(2)}) \right] \left[ \frac{r_{(2)}^{\lambda_{(2)}+1} - r_{(1)}^{\lambda_{(2)}+1}}{1 + \lambda_{(2)}} \right] + \\
& + 2D_2^{(2)} \varepsilon_0 \left[ \left( (-\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) + (-\lambda_{(2)} C_{12}^{(2)} + C_{22}^{(2)}) \right) v^{(2)} + (-\lambda_{(2)} C_{13}^{(2)} + C_{22}^{(2)}) \right] (Z^{(2)}) + \\
& + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left[ (A_1^{(2)} + A_2^{(2)}) v^{(2)} + A_3^{(2)} \right] (r_{(2)}^2 - r_{(1)}^2) + \\
& + (D_1^{(3)})^2 \left( C_{12}^{(3)} + \frac{C_{22}^{(3)}}{\lambda_{(3)}} \right) \left( r_{(3)}^{2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{2\lambda_{(3)}} \right) + (D_2^{(3)})^2 \left( C_{12}^{(3)} + \frac{C_{22}^{(3)}}{-\lambda_{(3)}} \right) \left( r_{(3)}^{-2\lambda_{(3)}} - r_{(2)}^{-2\lambda_{(3)}} \right) + \\
& + 2D_1^{(3)} \varepsilon_0 \left[ \left( (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) + (\lambda_{(3)} C_{12}^{(3)} + C_{22}^{(3)}) \right) v^{(3)} + (\lambda_{(3)} C_{13}^{(3)} + C_{22}^{(3)}) \right] \left[ \frac{r_{(3)}^{\lambda_{(3)}+1} - r_{(2)}^{\lambda_{(3)}+1}}{1 + \lambda_{(3)}} \right] + \\
& + 2D_2^{(3)} \varepsilon_0 \left[ \left( (-\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) + (-\lambda_{(3)} C_{12}^{(3)} + C_{22}^{(3)}) \right) v^{(3)} + (-\lambda_{(3)} C_{13}^{(3)} + C_{22}^{(3)}) \right] (Z^{(3)}) + \\
& + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left[ (A_1^{(3)} + A_2^{(3)}) v^{(3)} + A_3^{(3)} \right] (r_{(3)}^2 - r_{(2)}^2) \left. \right].
\end{aligned}$$

(3.16)

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Васильев В.В., Тарнопольский Ю.М.: *Композиционные материалы. Справочник*. Машиностроение, Москва (1990) 512 с.
2. Лурье С.А., Дудченко А.А.: *Введение в механику нанокомпозитов*. МАИ–ПРИНТ, Москва (2010) 160 с.
3. Kim J.K., Mai Y.W.: *Engineered interfaces in fiber reinforced composites*. Elsevier Science Ltd. (1998) pp. 18–33.
4. Lin Y., Ehlert G.J., Sodano H.A.: *Increase interface strength in carbon fiber composites through a ZnO nanowire interphase*. *Advan. Funct. Mater.* 19:16 (2009) pp. 2654–2660.
5. Sager R.J., Klein P.J., Lagoudas D.C., Zhang Q., Liu J., Dai L.: *Effect of carbon nanotubes on the interfacial shear strength of T650 carbon fiber in an epoxy matrix*. *Compos. Sci. Technol.* 69 (2009) pp. 898–904.
6. Wang Y., Tang Z., Liang X., Liz-Marzan L.M., Kotov N.A.: *SiO<sub>2</sub>-Coated CdTe nanowires: bristled nano centipedes*. *Nano Letters* 4:2 (2004) pp. 225–231.
7. Galan U., Lin Y., Ehlert G.J., Sodano H.A.: *Effect of ZnO nanowire morphology on the interfacial strength of nanowire coated fibers*. *Compos. Sci. Technol.* 71 (2011) pp. 946–954.
8. Garcia E.J., Wardle B.L., Hart A.J., Yamamomj N.: *Fabrication and multifunctional properties of a hybrid laminate with aligned carbon nanotubes grown in situ*. *Compos. Sci. Technol.* 68:9 (2008) pp. 2034–2041.
9. Sharma S.P., Lakkad S.C.: *Compressive strength of carbon nanotubes grown on carbon fiber reinforced epoxy matrix multi-scale hybrid composites*. *Surface & Coatings Technology* 205 (2010) pp. 350–355.
10. Veedu V.P., Cao A., Li X., Ma K., Soldano C., Kar S., Ajayan P.M., Ghasemi-Nejhad M.N.: *Multifunctional composites using reinforced laminae with carbon nanotube forests*. *Nature materials* 5 (2006) pp. 457–462.
11. Alipour Skandani A., Masghouni N., Case S.W., Leo D.J., Al-Haik M.: *Enhanced vibration damping of carbon fibers-ZnO nanorods hybrid composites*. *Applied Physics Letters* 101:073111 (2012) pp. 1–4.

12. Lu P., Feng Y.Y., Zhang P., Chen H.M., Zhao N., Feng W.: *Increasing interfacial strength in carbon fiber/epoxy composites by controlling the orientation and length of fiber carbon nanotubes grown on the fibers*. Carbon 49 (2011) pp. 4665–4673.
13. Agnihotri P., Basu S., Kar K.K.: *Effect of carbon nanotube length and density on the properties of carbon nanotubes coated carbon fiber/polyester composites*. Carbon 49 (2011) pp. 3098–3106.
14. Gibson R.F.: *A review of recent research on mechanics of multifunctional composite materials and structures*. Compos. Struct. 92 (2010) pp. 2793–2810.
15. Goan J.C., Prosen S.P.: *Interfacial bonding in graphite fiber-resin composites, Interfaces of composites*. American Society of Testing, New York (1969) pp. 3–26.
16. Katz H.S., Milewski J.V. (eds): *Handbook of fillers and reinforcements for plastics*. Van Nostrand Reinhold Company, New York N.Y. (1978).
17. Narusberg V.L. & Riekstin'sh A.I.: *Evaluating the effect of whiskerization of the fibers of composites on the fundamental frequency of a laminated cylindrical shell*. Mechanics of Materials 23:6 (1988) pp. 727-732 [Translated from Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov, No. 6, Nov-Dec 1987, pp. 1022–1027].
18. Sharma S.P., Lakkad S.C.: *Compressive strength of carbon nanotubes grown on carbon fiber reinforced epoxy matrix multi-scale hybrid composites*. Surface & Coatings Technology 205 (2010) pp. 350–355.
19. Steiner S.A., Li R., Wardle B.L.: *Circumventing the mechanochemical origins of strength loss in the synthesis of hierarchical carbon fibers*. ACS Appl. Mater. Interf. 5:11 (2013) pp. 4892–4903.
20. Sealy C., *Nanocentipedes could make strong composites*. Materials Today (Apr 2004) pp. 15.
21. Guz I.A., Rodger A.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J.: *Predicting the properties of micro- and nanocomposites: From the microwhiskers to the bristled nanocentipedes*. Phil. Trans. R. Soc. A 366 (2008) pp. 1827–1833.
22. Fei W., Kuiry S.C., Seal S.: *Advanced catalyst system prepared from a whiskered aluminium-coating metallic alloy substrate*. US 8247034 B2, US Patents (US 13/224,848), Aug 21, 2012.



23. Daniel I.M., Ishai O.: *Engineering mechanics of composite materials*. Oxford University Press, New York (1994) 394 с.
24. Markoz K.Z.: *Elementary micromechanics of heterogeneous media. Heterogeneous Media - Modeling and Simulation*, Birkhauser, Boston (1992) pp. 1–162.
25. Седов Л.И.: *Механика сплошной среды – Том 1*. Наука, Москва (1983) 491 с.
26. Седов Л.И.: *Механика сплошной среды – Том 2*. Наука, Москва (1984) 560 с.
27. Zohdi T.I., Wriggers P.: *An introduction to computational micromechanics*. Springer, Berlin. 2<sup>nd</sup> ed. (2008) 195 с.
28. Nemat-Nasser S., Hori M.: *Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials*. Elsevier (1999) 786 с.
29. Eshelby J.D.: *The continuum theory of lattice defects*. Progress in Solid State Physics. Vol. 3. (1956).
30. Eshelby J.D.: *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusions, and related problem*. Proc. Royal of Society A. Vol. 241:1226 (1957) pp. 376–396.
31. Ванин Г.А.: *Микромеханика композиционных материалов*. Н. Думка, Киев (1985) 302 с.
32. Hashin Z.: *The elastic moduli of fiber-reinforced materials*. J. Appl. Mech. 31 (1964) pp. 223–232.
33. Riccardi A., Montheillet F.: *A generalized self-consistent methods for solids containing randomly-oriented spheroidal inclusions*. Acta Mechanica 133 (1999) pp. 39–56.
34. Mura T.: *Micromechanics of defects in solids*. Kluwers, 2<sup>nd</sup> ed. (1991) 587 с.
35. Кристенсен Р.М.: *Введение в механику композитов*. Мир, Москва (1982) 334 с.
36. Aboudi J., Arnold S.M., Bednarczyk B.A.: *Micromechanics of composite materials – A generalized multiscale analysis approach*. Elsevier (2013) 984 с.
37. Hill R.: *A self-consistent mechanics of composite materials*. J. Mech. Phys. Solids. 13 (1965) pp. 213–222.
38. Budiansky B.: *On the elastic moduli on some heterogeneous materials*. J. Mech. Phys. Solids 13 (1965) pp. 223–227.

39. Christensen R.M.: *A critical evaluation of for a class of micromechanics models*. J Mech Phys Solids 38:3 (1990) pp. 379–404.
40. McLaughlin R.: *A Study of the Differential Scheme for Composite Materials*. Int. J. Eng. Sci. 15 (1977) pp. 237–244.
41. Mori T., Tanaka K.: *Average Stress in Matrix and Average Energy of Materials With Misfitting Inclusions*. Acta Metall. 21:5 (1973) pp. 571–574.
42. Benveniste Y.: *A New Approach to the Application of Mori-Tanaka's Theory in Composite Materials*. Mech. Mater. 6 (1987) pp. 147–157.
43. Hashin Z.: *The elastic moduli of heterogeneous materials*. J. Appl. Mech. 29:1 (1962) pp. 143–150.
44. Christensen R.M., Lo KH.: *Solutions for Effective Shear Properties in Three Phase Sphere and Cylinder Models*. J. Mech. Phys. Solids 27 (1979) pp. 315–330.
45. Lurie S., Minhat M.: *Application of generalized self-consistent method to predict effective elastic properties of bristled fiber composites*. Composites: Part B. 61 (2014) pp. 26–40.
46. Gusev A.A., Lurie S.A.: *Loss amplification effect in multiphase materials with viscoelastic interfaces*. Macromolecules 42:14 (2009) pp. 5372–5377.
47. Бахвалов Н.С., Панащенко Г.П.: *Осреднение процессов в периодических средах: Математические задачи механики композиционных материалов*. Наука, Москва (1984) 352 с.
48. Победря Б.Е.: *Механика композиционных материалов*. Изд-во Моск. Ун-та, Москва (1984) 336 с.
49. Meguid S., Kalamkarov A.L.: *Asymptotic homogenization of elastic composite materials with a regular structure*. Int. J. Solids Struct. 31:3 (1994) pp. 303–316.
50. Andrianov I.V., Danishevs'ky V.V., Guillet A., Pareige P.: *Effective properties and micro-mechanical response of filamentary composite wires under longitudinal shear*. Euro. J. Mech. A/Solids 24 (2005) pp. 195–206.
51. Herve E., Zaoui A.: *N-layered inclusion-based micromechanical model*. Int. J. Eng. Sci. 31:1 (1993) pp. 1–10.
52. Herve E., Zaoui A.: *Elastic behavior of multiply coated fiber reinforced composites*. Int. J. Eng. Sci. 33:10 (1995) pp. 1419–1433.

53. Hashin Z.: *Thin interphase/imperfect interface in elasticity in application to coated fiber composites*. J. Mech. Phys. Solids 50 (2002) pp. 2509–2537.
54. Walpole L.J.: *A coated inclusion in an elastic medium*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 83 (1978) pp. 495–506.
55. Лурье С.А., Соляев Ю.О.: *Модифицированный метод Эшелби в задаче определения эффективных свойств со сферическими микро- и нановключениями*. УДК 539.3, Москва (2010) pp. 80–90.
56. Lurie S.A., Volkov-Bogorodsky D., Zubov V., Tuchkova N.: *Advanced theoretical and numerical multiscale modelling of cohesion/adhesion interactions in continuum mechanics and its applications for filled composites*. Comp. Mater. Sci. 45 (2009) pp. 709–714.
57. Hashin Z.: *Analysis of properties of fiber composites with anisotropic constituents*. J. Appl. Mech. 46 (1979) pp. 543–550.
58. Hashin Z.: *Thermoelastic properties and conductivity of carbon/carbon fiber composites*. Mech. Mater. 8 (1990) pp. 293–308.
59. Cohen D., Hyer M.W.: *Residual stresses in cross-ply composite tubes*. Virginia Polytechnic Institute and State University CCMS-84-04 (1984)
60. Avery W.B., Herakovich C.T.: *Effect of fiber anisotropy on thermal stresses in fibrous composites*. J. Appl. Mech. 53 (1986) pp. 751–756.
61. Tsukrov I., Drach B.: *Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers*. Int. J. Eng. Sci. 47 (2010) pp. 25–33.
62. Tsukrov I., Drach B., Gross T.S.: *Effective stiffness and thermal expansion coefficients of unidirectional composites with fibers surrounded by cylindrically orthotropic matrix layers*. Int. J. Eng. Sci. 58 (2012) pp. 129–143.
63. Finegan I.C., Gibson R.F.: *Analytical modeling of damping at micromechanical level in polymer composites reinforced with coated fibers*. Compos. Sci. Technol. 60 (2000) pp. 1077–1084.
64. Neagu R.C., Bourban P.E., Manson J.E.: *Micromechanics and damping properties of composite integrating shear thickening fluids*. Compos. Sci. Technol. 69 (2009) pp. 515–522.

65. Lurie S., Minhat M., Tuchkova N., Soliaev J.: *On remarkable loss amplification mechanism in fiber reinforced laminated composite materials*. Appl. Compos. Mater. (Jan 2014) DOI. 10.1007/s10443-013-9371-2.
66. Chandra R., Singh S.P. and Gupta K.: *Damping studies in fiber-reinforced composites – a review*. Compos. Struct. 46 (1999) pp. 41–51.
67. Chandra, R., Singh, S.P., Gupta, K.: *A study of damping in fiber-reinforced composites*. J. Sound Vib. 262 (2003) pp. 475–496.
68. Hashin Z.: *Complex moduli of viscoelastic composites – I. General theory and application to particulate composites*. Int. J. Solids Struct. 6 (1970) pp. 539-552.
69. Hashin Z.: *Complex moduli of viscoelastic composites – II. Fiber reinforced materials*. Int. J. Solids Struct. 6 (1970) pp. 797-807.
70. Zinove'v P.A., Ermakov Y.N.: *Anisotropy of the dissipative properties of fiber composites*// Mech. Mater. 21:5 (1986) pp. 555-563. [Translated from Mekhanika Kompozitnykh Materialov 5 (1985) pp. 816-825.
71. Saravanos D.A., Chamis C.C.: *Unified micromechanics of damping for unidirectional fiber reinforced composites*. NASA Technical Memorandum 102107 (Aug 1989) 28 c.
72. Chaturvedi S.K., Tzeng G.Y.: *Micromechanical modelling of material damping in discontinuous fiber three-phase polymer composites*. Compos. Eng. 1:1 (1991) pp. 49-60.
73. Hwang S.J., Gibson R.F.: *Prediction of fiber-matrix interphase effects on damping of composites using micromechanical strain energy finite element modeling*. Compos. Eng. 3:10 (1993) pp. 975-984.
74. Fisher F.T., Brinson L.C.: *Viscoelastic interphases in polymer-matrix composites: Theoretical models and finite element analysis*. Compos. Sci. Technol. 61 (2001) pp. 731-748.
75. Finegan, I.C., Gibson, R.F.: *Recent research on enhancement of damping in polymer composites*. Compos. Struct. 44 (1999) pp. 89–98.
76. Jones, D.I.G.: *Handbook of viscoelastic vibration damping*. Wiley, Chichester (2001).

77. Meaud, J., Sain, T., Hulbert, G.M., Waas, A.M.: *Analysis and optimal design of layered composites with high stiffness and high damping*. Int. J. Solids Struct. 50 (2013) pp. 1342–1353.
78. Remillit, C.: *Damping mechanism of polymers filled with elastic particles*. J. Mech. Mater. 39 (2007) pp. 525–537.
79. Meaud, J., Sain, T., Hulbert, G.M., Waas, A.M.: *Analysis and optimal design of layered composites with high stiffness and high damping*. Int. J. Solids Struct. 50 (2013) pp. 1342–1353.
80. Lakes, R.S.: *High damping composite materials: Effect of structural hierarchy*. J. Compos. Mater. 36:3 (2003) pp. 287–297.
81. Berthelot, J.M., Assarar, M., Sefrani, Y., Mahi, A.E.: *Damping of composite materials and structures*. Compos. Struct. 85 (2008) pp. 189–204.
82. Yu, L., Ma, Y., Zhou, C., Xu, H.: *Damping efficiency of the coating structure*. Int. J. Solids Struct. 42 (2005) pp. 3045– 3058.
83. Fisher, F.T., Brinson, L.C.: *Viscoelastic interphases in polymer-matrix composites: theoretical model and finite element analysis*. Compos. Sci. Technol. 61 (2001) pp. 731–748.
84. Wei, P.J., Huang, Z.P.: *Dynamic effective properties of the particle reinforced composites with viscoelastic interphase*. Int. J. Solids Struct. 41 (2004) 6993–7007.
85. Guz I.A., Rodger A.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J.: *Predicting the properties of micro- and nanocomposites: from the microwhiskers to the bristled nanocentipedes*. Philos. Trans. R. Soc. A 366 (2008) pp. 1827–1833.
86. Guz I.A., Rushchitsky J.J., Guz A.N.: *Mechanical models for nanomaterials. Handbooks of nanophysics – principles and methods*, CRC vol. 24 (2011) pp. 1–12.
87. Мусхелишвили Н.И.: *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Наука, Москва (1996) 707 с.
88. Ванин Г.А.: *Микромеханика композиционных материалов*. Нау. Думка, Киев (1985) 302 с.
89. Демидов С.П.: *Теория упругости*. Высш. Школа, Москва (1979) 432 с.

90. Guz I.A., Rushchitsky J.J., Guz A.N.: *Effect of a special reinforcement on the elastic properties of micro- and nanocomposites with polymer matrix*. The Aeronautical Journal 117:1196 (2013) pp. 1019-1036.
91. Guz I.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J.: *Modelling properties of micro- and nanocomposites with brush-like reinforcement*. Materialwissenschaft und Werkstofftechnik (Materials Science and Engineering Technology) 40:3 (2009) pp. 154-160.
92. Kundawal S.I., Ray M.C.: *Micromechanical analysis of fuzzy fiber reinforced composites*. Int. J. Mech. Mater. Des. 7 (2011) pp. 149-166.
93. Chatzigeorgiou G., Siedel G.D., Lagoudas D.: *Effective mechanical of “fuzzy fiber” composites*. Composites B 43 (2012) pp. 2577–2593.
94. Chatzigeorgiou G., Efendiev Y., Lagoudas D.C.: *Homogenization of aligned fuzzy fiber composites*. Int. J. Solids Struct. 48:19 (2011) pp. 2668–2680.
95. Hill R.: *Elastic Properties of Reinforced Solids: Some Theoretical Principles*. J. Mech. Phys. Solids 11 (1963) pp. 357-372.
96. Seidel G.D.: *Micromechanics modeling of the multifunctional nature of carbon nanotube-polymer nanocomposites*. Graduate thesis, Texas A&M University (2007).
97. Jansson S.: *Homogenized nonlinear constitutive properties and local stress concentrations for composites with periodic internal structure*, Int. J. Solids Struct. 29:17 (1992) pp. 2181–2200.
98. Лехницкий С.Г.: *Теория упругости анизотропного тела*. Наука, Москва (1977) 416 с.
99. Победря П.Е.: *Лекции по тензорному анализу*. Изд-во Моск. Ун-та, Москва (1896) 264 с.
100. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.: *Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости*. МАИ, Москва (2009) 112 с.
101. Мейз Д.: *Теория и задачи механики сплошных сред*. (3-е) УРСС, Москва (2010) 320 с.
102. Kumar R.S., Talreja R.: *A continuum damage model for linear viscoelastic composite materials*. Mech. Mater. 35 (2003) pp. 463–80.

103. Asthana A., Momeni K., Prasad A., Yap Y.K., Yassar R.S.: *In-situ observation of size- scale effects on the mechanical properties of ZnO nanowires*. Nanotechnology 22 (2011) pp. 1–10.
104. Stan G., Ciobanu C.V., Parthangal P.M., Cook R.F.: *Diameter-dependent radial and tangential elastic moduli of ZnO nanowires*. Nanoletters, 7:12 (2007) pp. 3691-3697.
105. Bower A.F.: *Applied mechanics of solids*. CRC Press (2010) 794 с.
106. Бугров Я.С., Никольский С.М.: *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник для вузов*. 2–е изд, Наука. Москва (1985) 464 с.
107. Барененков Г.С., Демидович В.П., Ефименко В.А., Коган С.М., Лунц Г.С.б Поршнева Е.Ф., Сычева Е.П., Фролов С.В., Шостак Р.Я., Япольский А.Р.: *Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов*. Под редю Демидовича Б.П. АСТ:Астрель, Москва (2007) 495 с.
108. Kreyzig E.: *Advanced engineering mathematics*. 9-е ed. Wiley, Singapore (2006).
109. Кристенсен Р.М.: *Введение в теорию вязкоупругости*. Мир, Москва (1974) 338 с.
110. Christensen R.M.: *Viscoelastic properties of heterogeneous media*. J. Mech. Phys. Solids 17 (1969) pp. 23-41.
111. Саврук М.П.: *Двумерные задачи упругости для тел с трещинами*. Наук. Думка, Киев, 1981.
112. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И.: *Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалов периодической структурой*. УРСС, Москва (2003) 376 с.
113. S.A. Lurie, M. Minhat, N. Tuchkova. *Estimation of effective dynamic properties of bristled fiber composite materials based on self-consistent Eshelby method*. Принята к печати для «Journal of Engineering Mathematics – S.I. Fibre-reinforced Material Mechanics II, 2014».
114. J. Vantomne: *A parametric study of material damping in fiber reinforced plastics*. Composites B 26 (1995) pp. 147-153.
115. J.J. Yuan, J.M. Kennedy, D.D. Edie: *Modeling the dynamic response of the fiber/matrix interphase in continuous fiber composite materials*. Fiber, matrix and

- interface*, ASTM STP 1290, Eds. Sprag CJ, Drzal LT, American Society of Testing and Materials (1996) pp. 67-83.
116. Tarelja R., Singh C.V.: *Damage and failure of composite materials*. Cambridge University Press, Cambridge (2012) 304 p.
  117. Черепанов Г.П.: *Механика разрушения композиционных материалов*. Наука, Москва (1983) 296 с.
  118. Sockalingam S., Nilakantan G.: *Fiber-matrix interface characterization through microbond test*. A review, Int'l. J. of Aeronautical & Space Sci. 13:3 (2012) pp. 282-295.
  119. Joffe R., Mattson D.: *NCF Cross-ply laminate: Damage accumulation and degradation of elastic properties*. Fracture of Nano and Engineering Materials and Structures (2006) pp. 1281-1282.
  120. Vasiliev V.V., Morozov E.V.: *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. Elsevier, Oxford. (2013) 3<sup>rd</sup> ed. 818 p.
  121. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А.: *Пространственно-армированные композиционные материалы. Справочник*. Машиностроение, Москва (1987) 224 с.
  122. Жигун И.Г., Поляков В.А.: *Свойства пространственно-армированных пластиков*. Зинатние, Рига (1978) 215 с.
  123. Шермергор Г.Д.: *Теория упругости микронеоднородных материалов*. Наука, Москва (1977) 400 с.
  124. Ehlert G.J.: *Development of a zinc oxide nanowires interphase for enhanced structural composites*. PhD thesis University of Florida, Florida (2012) 247 p.
  125. Tack J.L.: *Thermodynamic and mechanical properties of EPON 862 with curing agent detda by molecular simulation*. Master thesis Texas A&M University, Texas (2006) 39 p.
  126. ASTM D 5379/D 5379M – 05, *Standard Test Method for Shear Properties of Composite Materials by the V-Notched Beam Method*, Published March 2005; Annual Book of ASTM Standards. P 201-213.