

Научная статья
УДК 62.752, 621.534, 629.4.015, 51-74, 517.442
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=181873>

УПРУГИЕ СВЯЗИ В ФОРМИРОВАНИИ СТРУКТУРЫ И ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ ВИБРАЦИОННЫХ НАГРУЖЕНИЙ СИЛОВОЙ ПРИРОДЫ

**Андрей Владимирович Елисеев^{1✉}, Николай Константинович Кузнецов²,
Артем Сергеевич Миронов³**

^{1,2}Иркутский национальный исследовательский технический университет,
Иркутск, Россия

^{1,3}Иркутский государственный университет путей сообщения,
Иркутск, Россия

¹eavsh@ya.ru ✉

²knik@istu.edu

³art.s.mironov@mail.ru

Аннотация. Развивается методология учета дополнительных кинематических связей в задачах оценки, коррекции и формирования динамических состояний исполнительных органов технологических и транспортных машин, работающих в условиях интенсивных нагрузений. Цель исследования заключается в разработке семейства математических моделей в виде механических колебательных систем, в которых варьирование жесткости упругих элементов позволяло бы формировать множество динамических состояний. В качестве расчетных схем вибрационных

взаимодействий элементов технических объектов используются механические колебательные системы, образованные твердыми телами, взаимодействующими с учетом упругих связей. Ставится задача разработки математических моделей механических колебательных систем, допускающих преобразования в виде сочленений, представляющих собой предельный переход значений жесткостей упругих элементов к бесконечности, с целью определения оптимальных структурных и динамических особенностей технических объектов. Используются методы теоретической механики, дифференциальных уравнений, теории колебания, интегральных уравнений и методология структурного математического моделирования, основанная на сопоставлении механическим колебательным системам эквивалентных в динамическом отношении структурных схем система автоматического управления. Разработан подход к учету последовательных сочленений в относительных поступательных и вращательных формах движений. Доказана теорема о независимости результата сочленений от очередности последовательного применения частичных сочленений в формах поступательных и вращательных относительных движений. Показано, что сочленения, рассматриваемые как процесс увеличения жесткости взаимодействия двух твердых тел, проявляются неограниченным ростом одиночных собственных частот и частот динамического гашения колебаний соответствующих координат системы. Разрабатываемая методология построения математических моделей, в частности, ориентирована на конструктивно-технические решения в области виброиспытательного оборудования для оценки и формирования динамических состояний лонжеронов лопастей вертолетов.

Ключевые слова: структурное математическое моделирование, механические колебательные системы, передаточные функции, собственные частоты, частоты динамического гашения колебаний, коэффициенты жесткости, сочленение твердых тел

Для цитирования: Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Миронов А.С. Упругие связи в формировании структуры и динамики механических систем в условиях вибрационных нагрузений силовой природы // Труды МАИ. 2024.№ 137. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=181873>

Original article

ELASTIC TIES IN THE FORMATION OF THE STRUCTURE AND DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS UNDER CONDITIONS OF VIBRATIONAL LOADS OF A FORCEFUL NATURE

Andrey V. Eliseev¹ ✉, Nikolay K. Kuznetsov², Artem S. Mironov³

^{1,2}Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

^{1,3}Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

¹eavsh@ya.ru ✉

²knik@istu.edu

³art.s.mironov@mail.ru

Abstract. A methodology for accounting for additional kinematic links in the problems of dynamic states estimation, correction and formation of the technological and transport machines actuators, operating under conditions of intensive loadings is being developed.

The purpose of the study consists in developing a family of mathematical models in the form of mechanical oscillatory systems, in which the elastic elements stiffness varying would allow forming a plurality of dynamic states. Mechanical oscillatory systems formed by solid bodies interacting with account for elastic linkages are applied as computational schemes for vibration interactions of the technical objects elements. The problem of mechanical oscillatory systems mathematical models developing, enabling transformations in the form of joints representing the passage to the limit to the infinity of the elastic elements stiffness values to determine optimal structural and dynamic specifics of the engineering objects is being posed. The authors employ methods of theoretical mechanics, differential equations, vibration theory, integral equations and structural mathematical modeling methodology, based on comparing oscillatory systems to the dynamically equivalent structural diagrams of the automatic control systems. An approach to accounting for sequential joints in relative translational and rotational motion forms was developed. A theorem on the joining result independence from the order of sequential application of partial joints in the forms of translational and rotational relative movements was proven. The article demonstrates that the joints being considered as a process of the rigidity increasing while the two solids interaction, are being manifested by the unrestricted growth of the natural frequencies and frequencies of oscillations dynamic damping of the corresponding coordinates of the system. The methodology being developed for mathematical models constructing, is focused, in particular, on the design-and-technical solutions in the field of vibration testing equipment for the helicopter blade spars dynamic states assessing and forming.

Keywords: structural mathematical modeling, mechanical oscillatory systems, transfer functions, natural frequencies, frequencies of dynamic vibration damping, stiffness coefficients, articulation of solids

For citation: Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Mironov A.S. Elastic ties in the formation of the structure and dynamics of mechanical systems under conditions of vibrational loads of a forceful nature. *Trudy MAI*, 2024, no. 137. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=181873>

Введение

Проблемы обеспечения безопасности транспортных и технологических систем обращают внимание на задачи динамики технических объектов, находящихся в условиях интенсивных вибрационных нагрузений [1, 2]. Научно-методологической базой решения задач динамики служат теоретическая механика, теория колебаний, динамика машин, теория автоматического управления и др. В динамике технических объектов широкое распространение получили задачи учета вибрационных взаимодействий элементов транспортных и технологических машин, в частности, задачи вибрационной защиты и виброизоляции [3-5]. Вибрационные взаимодействия служат ключевым фактором реализации технологических процессов вибрационного упрочнения поверхностей, транспортировки сырья, ориентации деталей и т.д. [6-8]. Теория вибрационных взаимодействий получила своё развитие в решении задач волновой механики [9-11]. В свою очередь, развитие волновой механики имеет глубокую связь с развитием представлений о метаматериалах,

искусственно создаваемых материалов, обладающих специфическими свойствами [12-18]. Особенности моделирования метаматериалов связаны со свойствами периодичности их структуры [19].

Для оценки свойств метаматериалов разработана методологическая основа, реализующая структурный подход, который ориентирован на выделение в материале периодической структурной ячейки [20-23]. Вместе с тем, под структурой может пониматься не только относительное расположение образующих элементов, но и их функциональная специфика, отражающая особенности связей в виде представлений о типовых элементах.

В качестве методологического базиса моделирования структурных образований, учитывающих наличие типовых элементов, может быть использовано структурное математическое моделирование линейных систем, отличающееся тем, что механической колебательной системе сопоставляется схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления, образованной совокупностью элементов, обладающих различными свойствами в зависимости от частот внешнего возмущения [24-28]. В рамках задач оценки, формирования и коррекции динамических состояний механических колебательных систем существенное значение имеют упругие элементы, конечные изменения жесткостей которых служат существенным фактором динамических состояний [29-31]. Наравне с конечным изменением параметров жесткости возможно рассмотрение бесконечного увеличения жесткостей упругих элементов. Предельный переход жесткости в бесконечности получил специальное название сочленения. Под сочленением понимается бесконечное значение [32-35]. Варьирование жесткости

элементов системы открывает широкие возможности в формировании динамических и структурных свойств технических объектов [36].

В отраслях машиностроения, связанных с робототехникой, вибрационными и волновыми взаимодействиями, можно отметить тенденции к уменьшению размеров механических объектов в виде кинематических цепей, механизмов и машин, в частности, созданных на основе 3D- технологии. Уменьшение размеров механизмов и машин сопрягается с тенденциями укрупнения ячеек или периодических структур искусственно создаваемых механических метаматериалов с периодической структурой. Широкий класс механических метаматериалов проектируется в целях обеспечения специальных структурных свойств, к примеру, проявляющихся в отрицательных жесткостях, массах и коэффициентах Пуассона.

Разработка методологии построения математических моделей, позволяющих учитывать структурные и динамические свойства технического объекта на уровне структуры машины, отдельного звена и материала, из которого выполнены звенья машины, в целях многокритериальной оптимизации для достижения технического результата представляет собой актуальную крупную научно-техническую проблему.

Вместе с тем, вопросы реализации сочленений в механических колебательных системах, а также вопросы учета зависимости частот динамического гашения и собственных частот системы от характера изменения жесткостей элементов ещё не получили должного уровня детализации представлений задачах оценки, формирования и коррекции динамических состояний технических объектов.

Статья посвящается разработке методологических основ структурно-динамической оптимизации исполнительных органов технологических машин,

работающих в условиях вибрационных нагружений силовой природы, посредством введения кинематических связей в виде сочленений, реализуемых путем предельного перехода жесткостей упругих элементов к бесконечным значениям.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается механическая колебательная система, образованная двумя твердыми телами, взаимодействующими между собой и опорными поверхностями посредством упругих элементов (рис.1). Предполагается, что система совершает малые вынужденные установившиеся колебания относительно положения статического равновесия под действием двух синфазных гармонических сил.

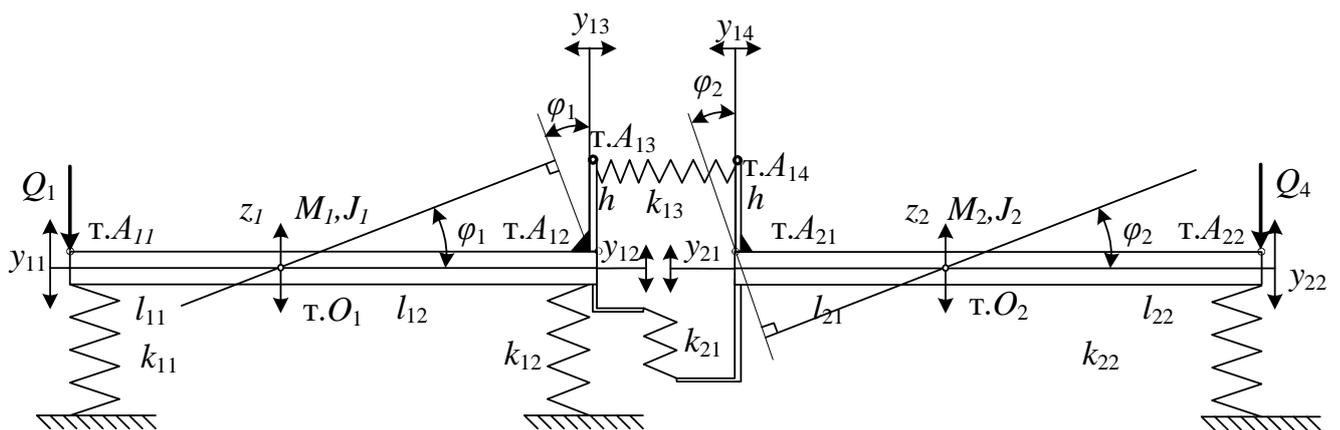


Рис.1. Механическая колебательная система с четырьмя степенями свободы: h - характеристика жесткости во вращательной форме движений

Первое твердое тело $A_{11}A_{12}$ с массой M_1 и моментом инерции J_1 имеет центр тяжести, который находится на отрезке $A_{11}A_{12}$ в т. O_1 , удаленной на расстояниях l_{11} и l_{12} от т. A_{11} и т. A_{12} - мест крепления упругих элементов k_{11} и k_{12} . Второе твердое тело $A_{21}A_{22}$ обладает массой M_2 и моментом инерции J_2 ; центр тяжести расположен на отрезке $A_{21}A_{22}$ в точке в т. O_1 , удаленной на расстояниях l_{21} и l_{22} от т. A_{21} и т. A_{22} -

местах крепления упруги элементов k_{21} и k_{22} . Внешние синфазные моногармонические силовые возмущения Q_L и Q_R приложены к тт. A_{11} и A_{22} соответственно. Элемент k_{21} определяет жесткость в поступательном относительном движении точек т. A_{12} и т. A_{22} . Элемент k_{13} определяет жесткость относительных вращательных колебаний. Предполагается, что к системе может быть применено сочленение - преобразование, заключающееся в переходе к бесконечному пределу значения жесткости упругого элемента.

Вариантами сочленений твердых тел являются простые частичные сочленение в точках т. A_{11} и т. A_{21} , реализуемые путем увеличения жесткости k_{21} в поступательных формах или жесткости k_{13} во вращательных формах. Под сложными сочленениями понимается последовательное применение простых. К примеру, если точки т. A_{11} и т. A_{21} уже предварительно сочленены в поступательных формах движения $k_{21} \rightarrow \infty$, то увеличение жесткости $k_{13} \rightarrow \infty$ приводит к сложному сочленению в поступательно-вращательных движениях.

Возможно осуществление сложного сочленения во вращательно-поступательной форме, когда вначале реализуется вращательное сочленение $k_{13} \rightarrow \infty$, а далее поступательное $k_{21} \rightarrow \infty$.

Задача заключается в разработке методологии построения математических моделей, учитывающих различные формы и последовательности сочленений, позволяющих оценивать, формировать и корректировать динамические состояния системы, включая особенности изменения собственных частот и частот динамического гашения колебаний в зависимости от жесткости упругих элементов.

II. Математическая модель. В качестве обобщенных координат основной инерциальной системы отсчета рассматриваются смещения $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$ точек $т.А_{11}, т.А_{12}, т.А_{21}, т.А_{22}$ относительно положений статического равновесия. В качестве обобщенных координат дополнительной системы координат рассматриваются смещения z_1, z_2 центров тяжести в точках $т.О_1$ и $т.О_2$ относительно положений статического равновесия и углы поворотов φ_1, φ_2 (рис.1). Основная $\{y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}\}$ и дополнительная $\{z_1, \varphi_1, z_2, \varphi_2\}$ системы координат связаны преобразованием:

$$y = U \cdot \psi, \quad (1)$$

где

$$y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix}, \quad (2) \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -l_{11} & 0 & 0 \\ 1 & -l_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_{21} \\ 0 & 0 & 1 & -l_{22} \end{pmatrix}, \quad (3) \quad \psi = \begin{pmatrix} z_1 \\ \varphi_1 \\ z_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Обратные зависимости координат ψ и y выражаются в виде:

$$\psi = V \cdot y, \quad (5)$$

где

$$V = U^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & -c_2 & -c_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Вспомогательные коэффициенты a_i, b_i и c_i связаны с метрическими параметрами l_{ij} выражениями:

$$a_1 = \frac{l_{12}}{l_{11} + l_{12}}, b_1 = \frac{l_{11}}{l_{11} + l_{12}}, c_1 = \frac{1}{l_{11} + l_{12}}, a_2 = \frac{l_{22}}{l_{21} + l_{22}}, b_2 = \frac{l_{21}}{l_{21} + l_{22}}, c_2 = \frac{1}{l_{21} + l_{22}}. \quad (7)$$

Кинетическая энергия системы в координатах ψ выражается формулой на основе скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$T = \frac{1}{2} \langle M_J \dot{\psi}, \dot{\psi} \rangle, \quad (8)$$

где матрица-инерционных коэффициентов имеет диагональное представление:

$$M_J = \begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & J_1 & & \\ & & M_2 & \\ 0 & & & J_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Кинетическая энергия (8) в основных координатах y (2) имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \langle V^* M_J V \dot{y}, \dot{y} \rangle, \quad (10)$$

где символ «*» - означает операцию транспонирования. Потенциальная энергия системы в координатах y с помощью скалярного произведения представляется в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \langle (K + k_{13} h^2 C) y, y \rangle, \quad (11)$$

где

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{12} + k_{21} & -k_{21} & 0 \\ 0 & -k_{21} & k_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{22} \end{pmatrix}, \quad (12) \quad C = \begin{pmatrix} c_1^2 & -c_1^2 & -c_1 c_2 & c_1 c_2 \\ -c_1^2 & c_1^2 & c_1 c_2 & -c_1 c_2 \\ -c_1 c_2 & c_1 c_2 & c_2^2 & -c_2^2 \\ c_1 c_2 & -c_1 c_2 & -c_2^2 & c_2^2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Дифференциальные уравнения Лагранжа 2-го рода с учетом выражений для кинетической и потенциальной энергии принимает вид:

$$V^* M_J V \ddot{y} + (K + k_{13} h^2 C) y = Q, \quad (14)$$

где

$$\ddot{y} = \begin{pmatrix} \ddot{y}_{11} \\ \ddot{y}_{12} \\ \ddot{y}_{21} \\ \ddot{y}_{22} \end{pmatrix}, \quad (15) \quad Q = \begin{pmatrix} Q_L \\ 0 \\ 0 \\ Q_R \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Интегральное преобразование Лапласа матричного выражения (14) с учетом нулевых начальных условий приводит к системе алгебраических уравнений относительно изображений:

$$(V^* M_J V p^2 + K + k_{13} h^2 C) \bar{y} = \bar{Q}, \quad (17)$$

где

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_{11} \\ \bar{y}_{12} \\ \bar{y}_{21} \\ \bar{y}_{22} \end{pmatrix}, \quad (18) \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_L \\ 0 \\ 0 \\ \bar{Q}_R \end{pmatrix}, \quad (19)$$

знак «-» над символом означает изображение Лапласа; $p=j\omega$ – комплексная переменная, $j=\sqrt{-1}$.

Система уравнений (17) используется для расчета результатов применения простых и сложных сочленений. Запишем систему (17) в виде, в котором жесткости k_{12} и k_{13} вынесены в качестве коэффициентов матриц:

$$(p^2 M + K_{(0)} + k_{21} G_{(21)} + k_{13} h^2 C) \bar{y} = \bar{Q}, \quad (20)$$

где

$$K_{(0)} = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{22} \end{pmatrix}, \quad (21) \quad G_{(21)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22) \quad M = V^* M_J V. \quad (23)$$

На основе системы алгебраических уравнений (20) строится обобщенная структурная схема методами, аналогичными для построения структурных схем

эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления [24].

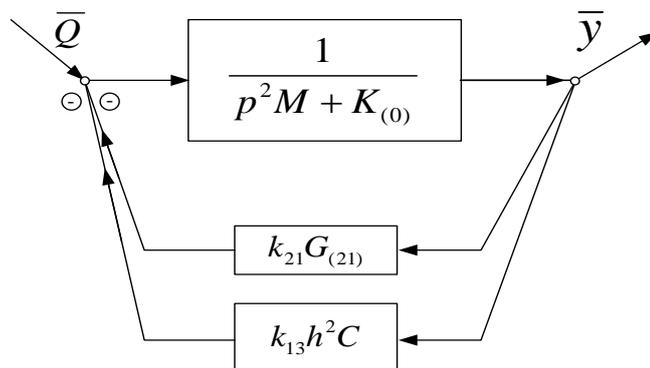


Рис. 2. Обобщенная структурная схема механической колебательной системы

Для оценки динамического состояния на основе обобщенной структурной схемы строится передаточная функция, в физическом смысле представляющая собой податливость - отношение амплитуды смещения к амплитуде силового возмущения:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_{11}}{\bar{Q}_L} \Big|_{\bar{Q}_R=0} . \quad (24)$$

Результаты применения преобразования системы в виде простых и сложных сочленений могут быть определены на основе алгебраической системы (20), структурной схемы (рис.2) и передаточной функции (24).

III. Простые сочленения твердых тел. Рассматривается простое сочленение

в формах поступательных или вращательных движений.

1. Сочленение в форме поступательных движений. Для расчета сочленения твердых тел системы в точках т.А₁₂ и т.А₂₁ в форме поступательных движений разделим выражение (20) на k₂₁ и перейдем к пределу k₂₁ → ∞:

$$G_{(21)} \bar{y} = 0 . \quad (25)$$

Выражение (25), с одной стороны, может быть интерпретировано как введение в систему дополнительных кинематических связей:

$$y_{12}=y_{21} \quad (26)$$

С другой стороны, введение дополнительных связей (26) может быть представлено как однородное уравнение. В свою очередь, система однородных уравнений может быть решена в том смысле, что четыре координаты вектора y выражаются через три координаты вектора $(y_{(21)})^I$, обозначающих смещения тт. A_{11} , A_{12} и A_{22} с учетом кинематической связи (26):

$$y = (G_{(21)})^I (y_{(21)})^I, \quad (27)$$

где

$$(y_{(21)})^I = \begin{pmatrix} y_{11}^I \\ y_{12}^I \\ y_{22}^I \end{pmatrix}, \quad (28) \quad (G_{(21)})^I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

С учетом зависимости (27) система (20) в координатах $(y_{(21)})^I$ принимает вид:

$$((G_{(21)})^I)^* (Mp^2 + K_{(0)} + k_{21}G_{(21)} + h^2k_{13}C)(G_{(21)})^I (y_{(21)})^I = ((G_{(21)})^I)^* \bar{Q}. \quad (30)$$

С учетом условий (25) система (30) принимает вид:

$$((G_{(21)})^I)^* (Mp^2 + K_{(0)} + h^2k_{13}C)(G_{(21)})^I (\bar{y}_{(21)})^I = ((G_{(21)})^I)^* \bar{Q}. \quad (31)$$

Результирующая система уравнений, отображающая сочленение $k_{21} \rightarrow \infty$:

$$\left[((G_{(21)})^I)^* M (G_{(21)})^I p^2 + ((G_{(21)})^I)^* (K_{(0)} + h^2k_{13}C)(G_{(21)})^I \right] (\bar{y}_{(21)})^I = ((G_{(21)})^I)^* \bar{Q}. \quad (32)$$

Под действием преобразования сочленения $k_{21} \rightarrow \infty$ в поступательной форме исходная механическая колебательная система (рис.1) с четырьмя степенями

свободы переходит в механическую колебательную систему с тремя степенями свободы (рис.3).

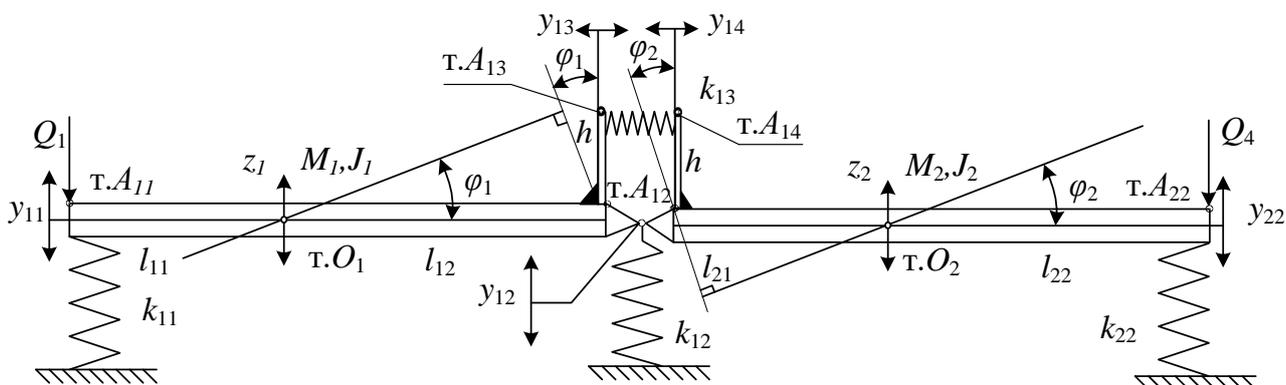


Рис.3. Результат частичного сочленения исходной системы в поступательных формах относительного движения

Механической колебательной системе (рис.3) может быть сопоставлена в соответствие обобщенная структурная схема (рис.4).

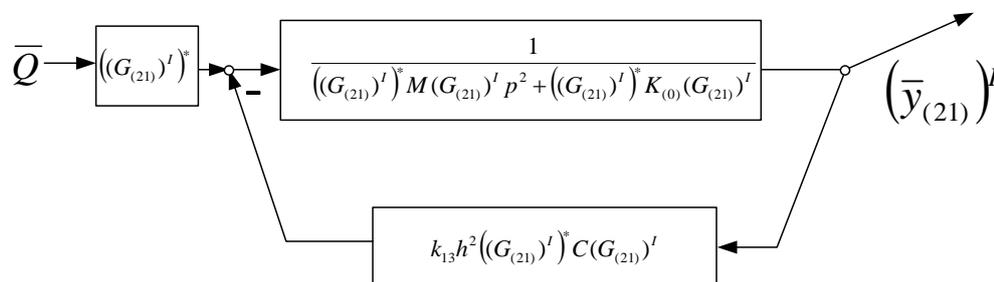


Рис.4. Обобщенная структурная схема механической колебательной системы с тремя степенями свободы.

Динамическое состояние системы может быть оценено на основе передаточной функции структурной схемы (рис.4):

$$W_{\Pi}(p) = \frac{\bar{y}_{11}}{\bar{Q}_L} \Big|_{\bar{Q}_R=0} . \quad (33)$$

Наравне с сочленениями в форме поступательных движений, могут быть рассмотрены простые сочленения в форме вращательных движений.

2. Сочленение в форме вращательных движений. Для определения результата сочленения $k_{13} \rightarrow \infty$ исходной системы с четырьмя степенями свободы (рис.1) разделим уравнение (20) на k_{13} . Перейдем к пределу $k_{13} \rightarrow \infty$ и получим:

$$Cy = 0. \quad (34)$$

Однородная система условий (34) имеет вид:

$$c_1 y_{11} - c_1 y_{12} - c_2 y_{21} + c_2 y_{22} = 0. \quad (35)$$

Решение системы (35) позволяет выразить четыре обобщенные координаты y через три координаты $(y_{(13)})''$ смещений точек $T.A_{11}$, $T.A_{21}$ и $T.A_{22}$:

$$y = G_{(13)}'' (y_{(13)})'', \quad (36)$$

где

$$G_{(13)}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c_1}{c_2} & -\frac{c_1}{c_2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (37) \quad y_{(13)}'' = \begin{pmatrix} y_{11}'' \\ y_{12}'' \\ y_{22}'' \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Переход к координатам $(y_{(13)})''$ после замены (36) в системе (20) к системе, в которой отсутствует жесткость k_{13} представляются в виде:

$$((G_{(13)})'')^* (Mp^2 + K_{(0)} + k_{21} G_{(21)}) (G_{(13)})'' (y_{(13)})'' = ((G_{(13)})'')^* \bar{Q}. \quad (39)$$

Система уравнений (39) отображает колебания системы (рис.1) в условиях (35), имеющих форму кинематических связей в виде:

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (40)$$

Механическая колебательная система (рис.1) в результате преобразования частичного сочленения $k_{13} \rightarrow \infty$ принимает вид (рис.5).

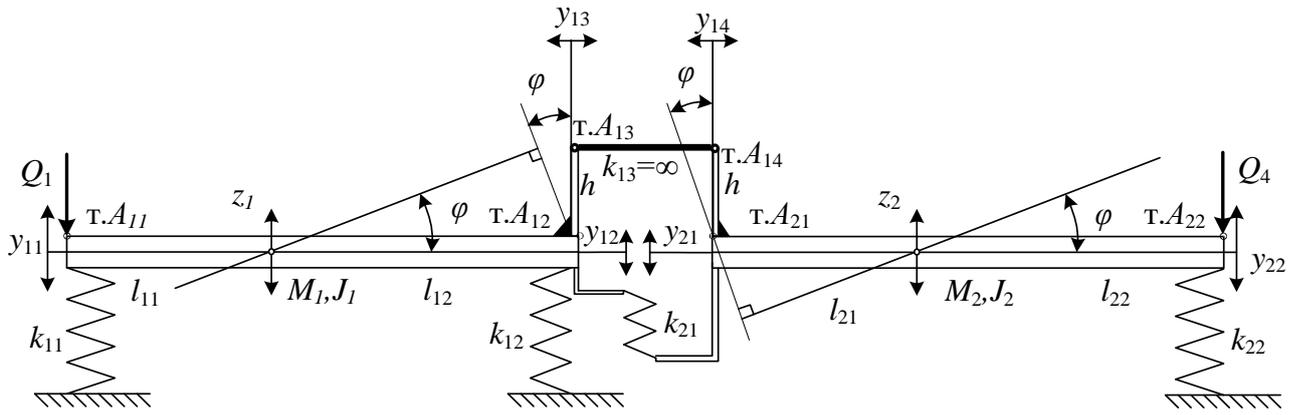


Рис.5. Результат преобразования системы на рис.1 с помощью частичного сочленения во вращательной форме колебаний $k_{13} \rightarrow \infty$

Обобщенная структурная схема (рис.6) механической колебательной системы (рис.5) строится на основе алгебраической системы (39).

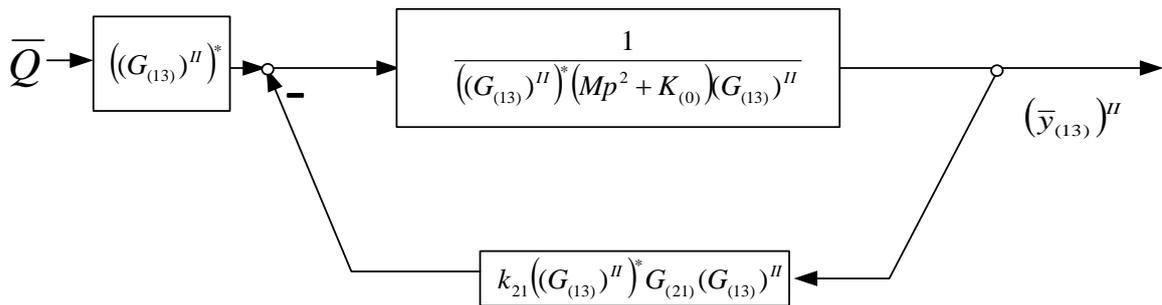


Рис.6. Обобщенная структурная схема механической колебательной системы с тремя степенями свободы

На основе структурной схемы (рис.6) строится семейство передаточных функций:

$$W_B(p) = \frac{\bar{y}_{11}''}{\bar{Q}_L} \Big|_{\bar{Q}_R=0}, \quad (41)$$

Механические колебательные системы (рис.3, рис.5), являющиеся результатом простых одиночных сочленений в поступательных или вращательных формах

движения путем предельного перехода $k_{21} \rightarrow \infty$ или $k_{13} \rightarrow \infty$ соответственно, могут быть подвергнуты дальнейшим преобразованиям сочленениям во вращательных или поступательных формах, в совокупности являющимися сложными формами сочленений.

IV. Сложные сочленения твердых тел. Последовательное выполнение сочленение двух простых одиночных сочленений образует сложные кратные сочленения. Рассмотрим варианты сложных сочленений, которые возможны для рассматриваемой механической колебательной системы (рис.1).

1. Сложное сочленение, образованное последовательным выполнением поступательного и вращательных простых сочленений. Система с тремя степенями свободы (рис.3) может быть дополнительно преобразована путем частичного сочленения $k_{13} \rightarrow \infty$ в форме относительного вращательного сочленения колебаний твердых тел $A_{11}A_{12}$ и $A_{21}A_{22}$. В результате деления выражения (32) на k_{13} и перехода к пределу $k_{13} \rightarrow \infty$ получены однородные условия:

$$(C_{21}^I)^* C(C_{21}^I) (y_{(21)}^I)^T = 0. \quad (42)$$

Выражение (42) может быть представлено в детализированном виде:

$$\begin{pmatrix} c_1^2 & -c_1^2 - c_1 c_2 & c_1 c_2 \\ -c_1^2 - c_1 c_2 & (c_1 + c_2)^2 & -c_2^2 - c_1 c_2 \\ c_1 c_2 & -c_2^2 - c_1 c_2 & c_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11}^I \\ y_{12}^I \\ y_{22}^I \end{pmatrix} = 0. \quad (43)$$

Однородная система (43) определяет связь между переменными $y_{11}^I, y_{12}^I, y_{22}^I$:

$$c_1 y_{11}^I - (c_1 + c_2) y_{12}^I + c_2 y_{22}^I = 0. \quad (44)$$

Связь (44) может быть представлена как зависимость вектора $(y_{(21)}^I)^T$ от вектора $(y_{(13)}^I)^T$ меньшей размерности:

$$(y_{(21)})' = G_{(13)}' (y_{(13)})', \quad (45)$$

где

$$(y_{(13)})' = \begin{pmatrix} y_{11}' \\ y_{12}' \end{pmatrix}, \quad (46) \quad G_{(12)}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c_1}{c_1 + c_2} & \frac{c_2}{c_1 + c_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

В результате дополнительного сочленения твердых тел во вращательных формах движений получается система уравнений, отображающая движение твердого тела с двумя степенями свободы:

$$((G_{(13)})')^* ((G_{(21)})')^* (Mp^2 + K_{(0)}) G_{(21)}' (G_{(13)})' (y_{(13)})' = ((G_{(13)})')^* ((G_{(21)})')^* \bar{Q}. \quad (48)$$

Расчетная схема, отображающая результат сложного сочленения в виде последовательного выполнения двух простых сочленений $k_{21} \rightarrow \infty$ и $k_{13} \rightarrow \infty$, представляет собой механическую колебательную систему с двумя степенями свободы, а именно твердое тело, установленное на упругие опоры и совершающее плоские вертикальные и угловые колебания относительно положения статического равновесия (рис.7).

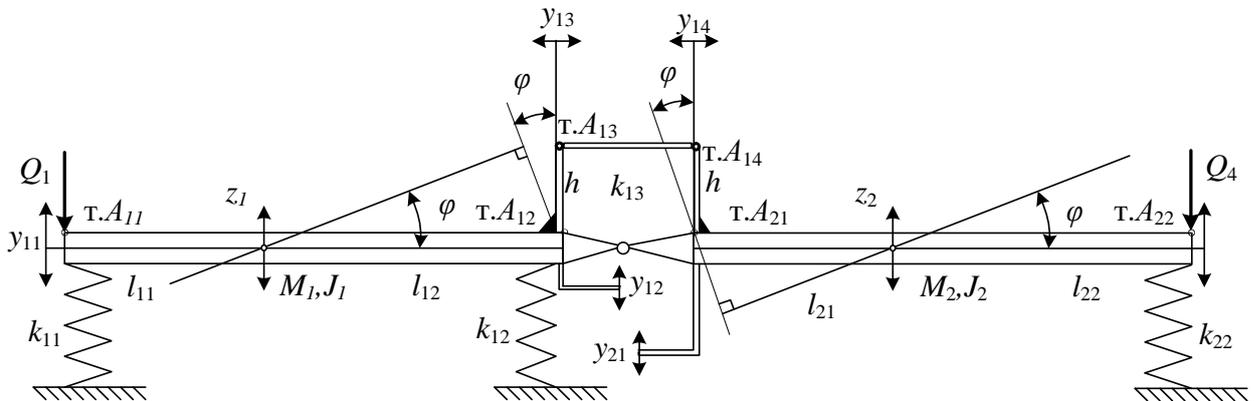


Рис.7. Результат частичного сочленения $k_{13} \rightarrow \infty$ во вращательных относительных движениях

В рамках структурного подхода механической колебательной системе (рис.7) сопоставляется обобщенная структурная схема, показанная на рис.8.

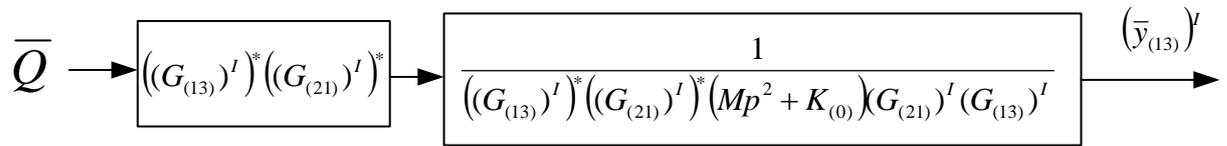


Рис.8. Обобщенная структурная схема механической колебательной системы с двумя степенями свободы

Возможен вариант сложного сочленения, выполненного в обратной последовательности: вначале во вращательной форме $k_{13} \rightarrow \infty$, далее в поступательной форме движений $k_{21} \rightarrow \infty$.

2. *Сложное сочленение, образованное последовательным выполнением вращательных и поступательных простых сочленений.* Рассматривается система, представляющая собой результат простого сочленения во вращательных формах движений (рис.7). Для определения результата сочленения $k_{21} \rightarrow \infty$ разделим выражение (39) на k_{21} . Переход к пределу $k_{21} \rightarrow \infty$ приводит к системе условий однородных уравнений:

$$((G_{(13)})'')^* G_{(21)} (G_{(13)})'' (y_{(13)})'' = 0. \quad (49)$$

Матричное выражение (49) эквивалентно уравнению:

$$\frac{c_1}{c_2} \bar{y}_{11} - (1 + \frac{c_1}{c_2}) \bar{y}_{12} + \bar{y}_{22} = 0. \quad (50)$$

Зависимость (50) может быть представлена как возможность выразить три координаты $(y_{(13)})''$ системы через две независимых $(y_{(21)})''$ координаты:

$$y_{(13)}'' = G_{(21)}'' y_{(21)}'', \quad (51)$$

где

$$G_{(21)}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & c_2 \\ c_1 + c_2 & c_1 + c_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (52) \quad y_{(21)}'' = \begin{pmatrix} y_{11}'' \\ y_{22}'' \end{pmatrix}. \quad (53)$$

С учетом преобразования координат (51) система алгебраических уравнений (39) принимает вид:

$$((G_{(21)})'')^* ((G_{(13)})'')^* (Mp^2 + K_{(0)}) G_{(13)}'' (G_{(21)})'' (y_{(21)})'' = ((G_{(21)})'')^* ((G_{(13)})'')^* \bar{Q}. \quad (54)$$

Результатом сочленения $k_{21} \rightarrow \infty$ является твердое тело, установленное на три упругие опоры и обладающее двумя степенями свободы (рис.9).

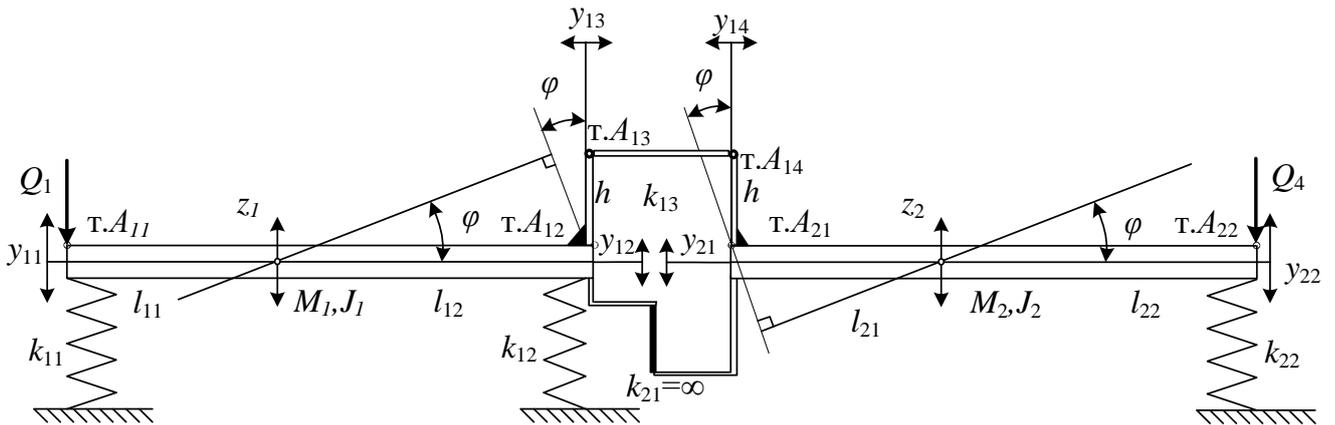


Рис.9. Результат последовательного применения двух частичных сочленений во вращательных и поступательных формах относительного движения

Обобщенная структурная схема (рис.10) механической колебательной системы (рис.9) строится на основе алгебраической системы.

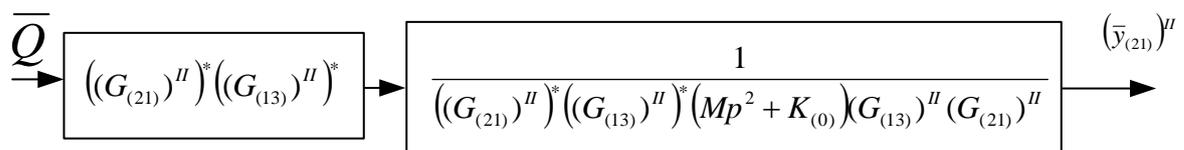


Рис.10. Обобщенная структурная схема механической колебательной системы

Для оценки динамических состояний системы используем семейство передаточных функций, построенных на основе обобщенной структурной схемы (рис.8):

$$W_B(p) = \frac{\bar{y}_{11}''}{Q_L} \Big|_{\bar{q}_r=0}, \quad (55)$$

Таким образом, сложные сочленения могут быть реализованы в виде двух различных порядков реализации простых сочленений; первый порядок предполагает сочленение вначале в поступательных формах движений с учетом $k_{21} \rightarrow \infty$, а затем сочленение во вращательных формах движения $k_{13} \rightarrow \infty$; второй порядок предполагает выполнение сочленений в очередности вращательного $k_{13} \rightarrow \infty$ и поступательного $k_{21} \rightarrow \infty$ формах движений.

Возникает вопрос о зависимости использования частичных сочленений от их очередности применения к системе. Ниже будет показано, что результаты сложных сочленений преобразований системы не зависят от выбора очередности простых сочленений-

3. О независимости результата преобразования системы от порядка двух последовательных частичных сочленений. Докажем следующую теорему:

Если для системы существуют частичные сочленения $k_1 \rightarrow \infty$ и $k_2 \rightarrow \infty$, то результат последовательного применения двух частичных сочленений $k_1 \rightarrow \infty$, $k_2 \rightarrow \infty$ или $k_2 \rightarrow \infty$, $k_1 \rightarrow \infty$ не зависит от их порядка.

Доказательство. Рассмотрим сначала порядок сочленений в виде очередности $k_{21} \rightarrow \infty$, $k_{13} \rightarrow \infty$. Поступательное сочленение $k_{21} \rightarrow \infty$ предполагает использование связи между координатами:

$$y = G_{(21)}^I y_{(21)}^I. \quad (56)$$

Вращательное сочленение $k_{13} \rightarrow \infty$ предполагает связь координат в виде:

$$y_{(21)}^I = G_{(13)}^I y_{(13)}^I. \quad (57)$$

Последовательное выполнение поступательного и вращательного сочленений с учетом очередности (56), (57) предполагает связь координат:

$$y = G_{(21)}^I G_{(13)}^I (y_{(13)}^I)^I, \quad (58)$$

где

$$G_{(21)}^I G_{(13)}^I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c_1}{c_1 + c_2} & \frac{c_2}{c_1 + c_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Наравне с двумя последовательными сочленениями $k_{21} \rightarrow \infty$, $k_{13} \rightarrow \infty$ могут быть выполнены сочленения в обратном порядке $k_{13} \rightarrow \infty$, $k_{21} \rightarrow \infty$. В случае выполнения сочленений в порядке $k_{13} \rightarrow \infty$, $k_{21} \rightarrow \infty$ вращательное сочленение k_{13} приводит к замене переменных:

$$y = G_{(13)}^{II} y_{(13)}^{II}. \quad (60)$$

Дальнейшее поступательное сочленение $k_{21} \rightarrow \infty$ представляется заменой переменных:

$$y_{(13)}^{II} = G_{(21)}^{II} y_{(21)}^{II}. \quad (61)$$

Последовательное выполнение вращательного и поступательного частичных сочленений приводит к композиции замен переменных (60), (61):

$$y = G_{(13)}'' G_{(21)}'' (y_{(21)})'', \quad (62)$$

где

$$G_{(13)}'' G_{(21)}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c_1}{c_1 + c_2} & \frac{c_2}{c_1 + c_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Равенство выражений (59) и (63)

$$G_{(21)}' G_{(13)}' = G_{(13)}'' G_{(21)}''. \quad (64)$$

доказывает независимость результат двух последовательных сочленений от их порядка. **Теорема доказана.**

На основе теоремы может быть введено понятие суперпозиции сочленений двух твердых тел и развиты представления о частичных и полных, а также простых и сложных сочленениях твердых тел, взаимодействующих посредством варьируемых упругих связей.

Ключевым вопросом, связанным с изменением жесткости системы, является изменение собственных частот системы и частот динамического гашения колебаний.

V. Численный эксперимент. Особенности изменений собственных частот системы и частот динамического гашения колебаний в зависимости от жесткостей. Рассмотрим механическую колебательную систему (рис.1.) системы с параметрами, приведенными в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Параметры механической колебательной системы рис.1

$M_1, \text{ кг}$	$J_1, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$M_2, \text{ кг}$	$J_2, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$k_{11}, \text{ Н/м}$	$k_{12}, \text{ Н/м}$	$k_{13}, \text{ Н/м}$	$k_{21}, \text{ Н/м}$	$k_{22}, \text{ Н/м}$
20	12	35	45	10^3	$15 \cdot 10^3$	10^3	10^3	$27 \cdot 10^3$

Таблица 2. Метрические характеристики системы на рис.1

$l_{11}, \text{ м}$	$l_{12}, \text{ м}$	$l_{21}, \text{ м}$	$l_{22}, \text{ м}$
0,2	0,8	0,7	0,3

Фиксируем значение жесткости k_{13} (таблица 1); будем увеличивать жесткость $k_{21} \rightarrow \infty$ для системы с четырьмя степенями свободы (рис.1). Для значений k_{21} и k_{13} собственные частоты системы (рис.1) определяются из равенства нулю знаменателя амплитудно-частотной характеристики передаточной функций (24):

$$|-\omega^2 M + K_{(0)} + k_{21} G_{(21)} + k_{13} h^2 C| = 0 . \quad (65)$$

Увеличение жесткости $k_{21} \rightarrow \infty$ приводит к росту одиночной собственной частоты (рис.11а, линия 4). Частоты динамического гашения колебаний координаты y_{11} определяются как корни числителя амплитудно-частотной характеристики передаточной функции (24). Одна из частот динамического гашения колебаний координаты y_{11} также неограниченно возрастает (рис.11б, линия 3). Если же наоборот фиксировать коэффициент k_{21} , а увеличивать $k_{13} \rightarrow \infty$, то так же реализуется рост одной собственной частоты (см. рис.11д, линия 4) и одной частоты динамического гашения колебаний (см. рис.11е, линия 3).

Рассмотрим результат простого сочленения $k_{21} \rightarrow \infty$ в поступательных формах (рис.3).-Собственные частоты ω системы находятся из условий:

$$\left| \left((G_{(21)})^t \right)^* \left(-M\omega^2 + (K_{(0)} + h^2 k_{13} C) \right) (G_{(21)})^t \right| = 0 . \quad (66)$$

Увеличение жесткости $k_{13} \rightarrow \infty$ приводит к неограниченному росту одной из собственных частот (рис.11в, линия 3) и одной частоты динамического гашения колебаний координаты y_{11}^I (см. рис.11з, линия 2).

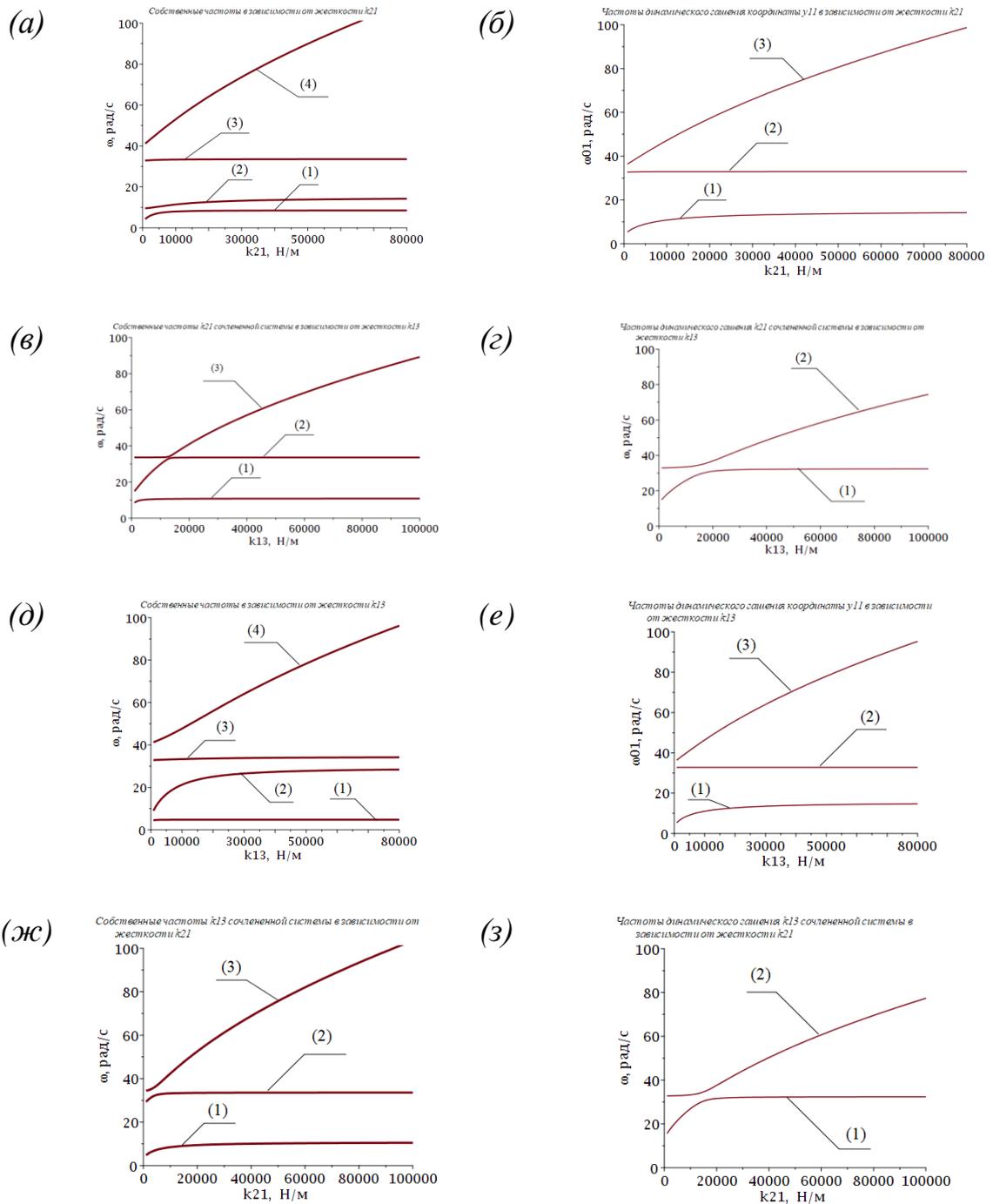


Рис.11. Характерные частоты системы: (а),(в),(д),(ж) - собственные

частоты; $(\delta), (\varepsilon), (e), (z)$ - частоты динамического гашения колебаний

Для системы, являющейся результатом сочленения $k_{13} \rightarrow \infty$ (см. рис.7) во вращательных формах относительных колебаний, увеличение жесткости $k_{21} \rightarrow \infty$ в поступательных относительных формах движения проявляется в росте одной собственной частоты (см. рис.11ж) и одной частоты динамического гашения координаты y_{11}'' (см. рис.11з). По мере увеличения жесткости $k_{21} \rightarrow \infty$ увеличивается одна частота динамического гашения колебаний координаты y_{11}'' (см. рис.11з).

Увеличение жесткости, проявляющееся в одновременном неограниченном возрастании одной собственной частоты и одной частоты динамического гашения колебаний, приводит к потере одной степени свободы. Одновременное увеличение двух жесткостей k_{21} и k_{13} , проявляющееся в неограниченном росте двух собственных частот и двух частот динамического гашения колебаний, приводит к потере двух степеней свободы и т.д.

Выводы

1. Разработана концепция структурных преобразований механических колебательных систем путем сочленений, которые представляют собой предельные переходы к бесконечности жесткостей упругих элементов и которые могут интерпретироваться как введение в систему дополнительных кинематических связей. Разработанная концепция может быть обобщена и на механические колебательные системы с произвольным числом степеней свободы.

2. Показано, что увеличение жесткости упругих элементов связано с неограниченным возрастанием единичных собственных частот и частот

динамического гашения колебаний обобщенных координат, а уменьшение их жесткости будет приводить к снижению собственных частот системы и частот динамического гашения колебаний, что отображает процесс увеличения числа степеней свободы.

3. Рассмотрены три уровня структурных подходов: первый - уровень типовых звеньев, таких как интегрирующие и дифференцирующие звенья первого и второго порядков; второй - уровень структурных схем, отражающих воздействия со стороны одиночных моногармонических воздействий, приложенных к конкретным точкам системы, а третий - уровень обобщенной структурной схемы, отображающей матричные представления о динамических взаимодействиях.

4. Разработанная концепция может быть использована для определения оптимальных структур и динамических особенностей механических колебательных систем, на основе варьирования внешних амплитудно-частотных возмущений, а также параметров жесткости, формирующих структуру системы, с целью обеспечения технического результата в рамках требований конкретных прикладных задач.

5. Предложенная концепция может быть применена и для решения следующих задач: разработки математических моделей процессов вибрационного испытания длинномерных деталей авиационный, транспортных и технологических машин; разработки датчиков или сенсорных систем для оценки вибрационных взаимодействий элементов технологических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагрузений; разработки периодических структурных образований с заданными механическими свойствами и т.д.

Список источников

1. Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты. Тематический блок «Безопасность железнодорожного транспорта» Москва, 2021. Том Раздел II. Техногенная безопасность подвижного состава железнодорожного транспорта / Под ред. Н.А. Махутова. - М.: МГОФ «Знание», 2021. - 740 с.
2. Ганиев Р.Ф. Нелинейные резонансы и катастрофы. Надежность, безопасность и бесшумность. – М.: R & C Dynamics, 2013. - 591 с.
3. Челомей В.Н. Вибрации в технике: справочник в 6 томах. – М.: Машиностроение, 1981. Т. 6. - 456 с.
4. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C., CRC Press, 2000, 957 p.
5. Harris, C.M., Crede C.E. Shock and Vibration Handbook. New York, McGraw Hill Book Co, 2002, 1457 p.
6. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов. - М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных технологий, 2006. - 176 с.
7. Копылов Ю.Р. Динамика процессов виброударного упрочнения: монография. – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2011. –568 с.
8. Блехман И.И. Теория вибрационных процессов и устройств. Вибрационная механика и вибрационная техника. - СПб.: ИД «Руда и Металлы», 2013. - 640 с.

9. Глазунов В.А. Новые робототехнические системы параллельной структуры и вопросы их динамической точности // XVI Всероссийская мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2023) (Волгоград, 11–15 сентября 2023): сборник трудов. – Волгоград: Волгоградский государственный технический университет, 2023. Т. 1. С. 16-19.
10. Ганиев Р.Ф. Фундаментальные и прикладные проблемы нелинейной волновой механики и машиностроения. Прорывные волновые технологии и волновое машиностроение // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 6. С. 3-33. DOI: [10.1134/S0235711919060051](https://doi.org/10.1134/S0235711919060051)
11. Глазунов В.А. Филиппов Г.С., Ганиев Р.Ф. Актуальные проблемы машиноведения и пути их решения. Волновые и аддитивные технологии, станкостроение, роботехника // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 5. С. 16-25. DOI: [10.31857/S023571190001553-9](https://doi.org/10.31857/S023571190001553-9)
12. Zadpoor A.A. Mechanical meta-materials // Materials Horizons, 2016, vol. 3 (5), pp. 371–381. DOI: [10.1039/C6MH00065G](https://doi.org/10.1039/C6MH00065G)
13. Аджибеков А.А., Жуков А.А., Алексеев О.А. Экспериментальный стенд для сборки и испытаний антенных модулей на основе микроминиатюрных слоистых метаматериалов // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=69728>
14. Бобровницкий Ю.И. Томилина Т.М. Поглощение звука и метаматериалы (обзор) // Акустический журнал. 2018. Т. 64. № 5. С. 517-525. DOI: [10.1134/S0320791918040020](https://doi.org/10.1134/S0320791918040020)

15. Yang T., Jiang X., Huang Y., Tian Q., Zhang L., Dai Z., Zhu H. Mechanical sensors based on two-dimensional materials: Sensing mechanisms, structural designs and wearable applications // *iScience*, 2022, vol. 25 (1), pp. 103728. DOI: [10.1016/j.isci.2021.103728](https://doi.org/10.1016/j.isci.2021.103728)
16. Schurger B., Frankovsky P., Janigova S., Bocko J., Kolodziej A. Mechanical metamaterials: Properties and classification // *Acta Mechatronica*, 2023, vol. 8 (3), pp. 29–35. DOI: [10.22306/am.v8i3.98](https://doi.org/10.22306/am.v8i3.98)
17. Liu Chenyang, Xi Zhang, Jiahui Chang, You Lyu, Jianan Zhao, Song Qiu. Programmable mechanical metamaterials: basic concepts, types, construction strategies—a review // *Frontiers in Materials*, 2024, vol. 11. URL: <https://doi.org/10.3389/fmats.2024.1361408>
18. Nicolás Contreras, Xihong Zhang, Hong Hao, Francisco Hernández. Application of elastic metamaterials/meta-structures in civil engineering: A review // *Composite Structures*, 2024, vol. 327, pp. 117663. DOI: [10.1016/j.compstruct.2023.117663](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117663)
19. Банах Л.Я., Павлов И.С. Колебания периодических систем, состоящих из одинаковых подсистем произвольной структуры // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2023. № (4) 3. С. 11. DOI: [10.31857/S0235711923040053](https://doi.org/10.31857/S0235711923040053)
20. Ерофеев В.И., Павлов И.С. Механика и акустика метаматериалов: математическое моделирование, экспериментальные исследования, перспективы применения в машиностроении // *Проблемы прочности и пластичности*. 2021. Т. 83. № 4. С. 391-414. DOI: [10.32326/1814-9146-2021-83-4-391-414](https://doi.org/10.32326/1814-9146-2021-83-4-391-414)
21. Erofeev V.I., Pavlov I.S. Structural Modeling Of Metamaterials // *Advanced Structured Materials*, 2021, vol. 144, pp. 1-20.

22. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Леонтьева А.В. Нелинейная локализованная волна в метаматериале, математическая модель которого получена методом альтернативной континуализации // Проблемы прочности и пластичности. 2022. Т. 84. № 2. С. 157-167.
23. Ерофеев В.И., Корсаков М.И. Математическая модель метаматериала, задаваемого как нелинейно-упругая двухмассовая цепочка с центром симметрии, описывающая формирование несинусоидальных продольных волн деформации // XXXV сессия Российского акустического общества (Москва, 13–17 февраля 2023): сборник трудов. – М.: Изд-во ГЕОС, 2023. С. 991-995.
24. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. - Иркутск: ИГУ, 2008. – 523 с.
25. Кузнецов Н.К. Динамика управляемых машин с дополнительными связями. - Иркутск: Изд-во Иркутского государственного. технического университета, 2009. - 288 с.
26. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. – Новосибирск: Наука, 2011. – 384 с.
27. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Сочленения звеньев в динамике механических колебательных систем: монография. – Иркутск: ИрГУПС, 2012. – 156 с.
28. Елисеев С.В., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Хоменко А.П. Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин. – Новосибирск: Наука, 2021. – 679 с.

29. Krot P., Shiri H., Dabek P., Zimroz R. Diagnostic s of Bolted Joints in Vibrating Screens Based on a Multi-Body Dynamical Model // Materials, 2023, vol. 16 (17), pp. 5794. DOI: [10.2139/ssrn.4431443](https://doi.org/10.2139/ssrn.4431443)
30. Зотов А.Н., Токарев А.П. Динамический гаситель колебаний с регулируемой жесткостью // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2023. № 6. С. 3-10. DOI: [10.31857/S0235711923050176](https://doi.org/10.31857/S0235711923050176)
31. Зотов А.А., Нагорнов А.Ю., Волков А.Н., Попов В.О. Анализ динамических характеристик трехслойных оболочек с дискретным наполнителем // Труды МАИ. 2021. № 121. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=162654>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-07](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-07)
32. Елисеев С.В., Гордеева А.А., Фомина И.В. Динамические свойства колебательных систем при предельных значениях параметров // Вестник Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления. 2011. № 4 (35). С. 12.
33. Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В., Ситов И.С. Механические колебательные системы с поступательными движениями. Возможные формы сочленения звеньев // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. № 12. С. 35.
34. Елисеев С.В., Белокобыльский С.В., Лончих П.А. Изменение динамических свойств механических колебательных систем при введении в них сочленений звеньев // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. № 4. С. 40.
35. Елисеев С.В., Пискунова В.А., Савченко А.А. Взаимодействие твердых тел в колебательных системах с упругими связями и сочленениями при действии

внешнего вибрационного возмущения // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 1. С. 245-262.

36. Сорокин Д.В., Бабкина Л.А., Бразговка О.В. Проектирование узлов различного назначения на основе топологической оптимизации // Космические аппараты и технологии. 2022. Т. 6. № 2. С. 61-82. DOI: [10.26732/j.st.2022.2.01](https://doi.org/10.26732/j.st.2022.2.01)

References

1. Makhutov N.A. *Bezopasnost' Rossii. Pravovye, sotsial'no-ekonomicheskie i nauchno-tekhnicheskie aspekty* (Security of Russia. Legal, socio-economic, scientific and technical aspects. Thematic block "Safety of railway transport"), Moscow, 2021. Volume Section II, Tekhnogennaya bezopasnost' podvizhnogo sostava zheleznodorozhnogo transporta (Technogenic safety of railway rolling stock), Moscow, Moscow State Educational Institution Znanie, 2021, 740 p.
2. Ganiev R.F. *Nelineinye rezonansy i katastrofy. Nadezhnost', bezopasnost' i besshumnost'* (Nonlinear resonances and catastrophes. Reliability, safety and quietness), Moscow, R&C Dynamics, 2013, 591 p.
3. Chelomei V.N. *Vibratsii v tekhnike: spravochnik* (Protection from vibrations and shocks), Moscow, Mashinostroenie, 1981, 456 p.
4. Clarence W. de Silva. *Vibration. Fundamentals and Practice*, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C., CRC Press, 2000. 957 p.
5. Harris, S.M., Srede C.E. *Shock and Vibration Handbook*, New York, McGraw - Hill Book So, 2002, 1457 p.

6. Panovko G.Ya. *Dinamika vibratsionnykh tekhnologicheskikh protsessov* (Dynamics of vibrational technological processes), Moscow-Izhevsk, NITs «Regularnaya i khaoticheskaya dinamika», Institut komp'yuternykh tekhnologii, 2006, 176 p.
7. Kopylov Yu.R. *Dinamika protsessov vibroudarnogo uprochneniya* (Dynamics of vibration shock hardening processes), Voronezh, IPTs «Nauchnaya kniga», 2011, 568 p.
8. Blekhman I.I. *Teoriya vibratsionnykh protsessov i ustroystv. Vibratsionnaya mekhanika i vibratsionnaya tekhnika* (Theory of vibration processes and devices. Vibration mechanics and vibration technology, Saint Petersburg, ID «Ruda i Metally», 2013, 640 p.
9. Glazunov V.A. *XVI Vserossiiskaya mul'tikonferentsiya po problemam upravleniya (MKPU-2023): sbornik trudov*. Volgograd, Volgogradskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2023, vol. 1, pp. 16-19.
10. Ganiev R.F. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2019, no. 6, pp. 3-33. DOI: [10.1134/S0235711919060051](https://doi.org/10.1134/S0235711919060051)
11. Glazunov V.A. Filippov G.S., Ganiev R.F. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2018, no. 5, pp. 16-25. DOI: [10.31857/S023571190001553-9](https://doi.org/10.31857/S023571190001553-9)
12. Zadpoor A.A. Mechanical meta-materials, *Materials Horizons*, 2016, vol. 3 (5), pp. 371–381. DOI: [10.1039/C6MH00065G](https://doi.org/10.1039/C6MH00065G)
13. Adzhibekov A.A., Zhukov A.A., Alekseev O.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 87. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=69728>
14. Bobrovnitskii Yu.I. Tomilina T.M. *Akusticheskii zhurnal*, 2018, vol. 64, no. 5, pp. 517-525. DOI: [10.1134/S0320791918040020](https://doi.org/10.1134/S0320791918040020)

15. Yang T., Jiang X., Huang Y., Tian Q., Zhang L., Dai Z., Zhu H. Mechanical sensors based on two-dimensional materials: Sensing mechanisms, structural designs and wearable applications, *iScience*, 2022, vol. 25 (1), pp. 103728. DOI: [10.1016/j.isci.2021.103728](https://doi.org/10.1016/j.isci.2021.103728)
16. Schurger B., Frankovsky P., Janigova S., Bocko J., Kolodziej A. Mechanical metamaterials: Properties and classification, *Acta Mechatronica*, 2023, vol. 8 (3), pp. 29–35. DOI: [10.22306/am.v8i3.98](https://doi.org/10.22306/am.v8i3.98)
17. Liu Chenyang, Xi Zhang, Jiahui Chang, You Lyu, Jianan Zhao, Song Qiu. Programmable mechanical metamaterials: basic concepts, types, construction strategies—a review, *Frontiers in Materials*, 2024, vol. 11. URL: <https://doi.org/10.3389/fmats.2024.1361408>
18. Nicolás Contreras, Xihong Zhang, Hong Hao, Francisco Hernández. Application of elastic metamaterials/meta-structures in civil engineering: A review, *Composite Structures*, 2024, vol. 327, pp. 117663. DOI: [10.1016/j.compstruct.2023.117663](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117663)
19. Banakh L.Ya., Pavlov I.S. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2023, no. (4) 3, pp. 11. DOI: [10.31857/S0235711923040053](https://doi.org/10.31857/S0235711923040053)
20. Erofeev V.I., Pavlov I.S. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2021, vol. 83, no. 4, pp. 391-414. DOI: [10.32326/1814-9146-2021-83-4-391-414](https://doi.org/10.32326/1814-9146-2021-83-4-391-414)
21. Erofeev V.I., Pavlov I.S. Structural Modeling Of Metamaterials // *Advanced Structured Materials*, 2021, vol. 144, pp. 1-20.
22. Erofeev V.I., Kolesov D.A., Leont'eva A.V. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2022, vol. 84, no. 2, pp. 157-167.
23. Erofeev V.I., Korsakov M.I. *XXXV sessiya Rossiiskogo akusticheskogo obshchestva: sbornik trudov*, Moscow, Izd-vo GEOS, 2023, pp. 991-995.

24. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. *Dinamicheskii sintez v obobshchennykh zadachakh vibrozashchity i vibroizolyatsii tekhnicheskikh ob'ektov* (Dynamic synthesis in generalized problems of vibration protection and vibration isolation of technical objects), Irkutsk, IGU, 2008, 523 p.
25. Kuznetsov N.K. *Dinamika upravlyaemykh mashin s dopolnitel'nymi svyazyami* (Dynamics of controlled machines with additional connections), Irkutsk, Izd-vo Irkutskogo gosudarstvennogo. tekhnicheskogo universiteta, 2009, 288 p.
26. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. *Mekhatronnye podkhody v dinamike mekhanicheskikh kolebatel'nykh sistem* (Mechatronic approaches in the dynamics of mechanical oscillatory systems), Novosibirsk, Nauka, 2011, 384 p.
27. Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. *Sochleneniya zven'ev v dinamike mekhanicheskikh kolebatel'nykh sistem: monografiya* (Articulations of links in the dynamics of mechanical oscillatory systems), Irkutsk, IrGUPS, 2012, 156 p.
28. Eliseev S.V., Eliseev A.V., Bol'shakov R.S., Khomenko A.P. *Metodologiya sistemnogo analiza v zadachakh otsenki, formirovaniya i upravleniya dinamicheskim sostoyaniem tekhnologicheskikh i transportnykh mashin* (Methodology of system analysis in the tasks of assessment, formation and management of the dynamic state of technological and transport machines), Novosibirsk, 2021, 679 p.
29. Krot P., Shiri H., Dabek P., Zimroz R. Diagnostic s of Bolted Joints in Vibrating Screens Based on a Multi-Body Dynamical Model, *Materials*, 2023, vol. 16 (17), pp. 5794. DOI: [10.2139/ssrn.4431443](https://doi.org/10.2139/ssrn.4431443)
30. Zotov A.N., Tokarev A.P. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2023, no. 6, pp. 3-10. DOI: [10.31857/S0235711923050176](https://doi.org/10.31857/S0235711923050176)

31. Zotov A.A., Nagornov A.Yu., Volkov A.N., Popov V.O. *Trudy MAI*, 2021, no. 121.
URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=162654>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-07](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-07)
32. Eliseev C.B., Gordeeva A.A., Fomina I.V. *Vestnik Vostochno-Sibirskogo gosudarstvennogo universiteta tekhnologii i upravleniya*, 2011, no. 4 (35), pp. 12.
33. Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V., Sitov I.S. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana*, 2012, no. 12, pp. 35.
34. Eliseev S.V., Belokobyl'skii S.V., Lontsikh P.A. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana*, 2012, no. 4, pp. 40.
35. Eliseev S.V., Piskunova V.A., Savchenko A.A. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana*, 2013, no. 1. S. 245-262.
36. Sorokin D.V., Babkina L.A., Brazgovka O.V. *Proektirovanie uzlov razlichnogo naznacheniya na osnove topologicheskoi optimizatsii // Kosmicheskie apparaty i tekhnologii*. 2022. T. 6. № 2. С. 61-82. DOI: [10.26732/j.st.2022.2.01](https://doi.org/10.26732/j.st.2022.2.01)

Статья поступила в редакцию 28.06.2024

Одобрена после рецензирования 04.07.2024

Принята к публикации 28.08.2024

The article was submitted on 28.06.2024; approved after reviewing on 04.07.2024; accepted for publication on 28.08.2024