Тепловые процессы в технике. 2025. Т. 17. № 5. С. 207–218
Thermal processes in engineering, 2025, vol. 17, no. 5, pp. 207–218

Научная статья
УДК 539.3
URL: https://tptmai.ru/publications.php?ID=185566
EDN: https://www.elibrary.ru/MBLJXG

Аналитические решения задач сложного теплообмена

Э.М. Карташов[1]✉, С.С. Крылов[2], Е.В. Ненахов[3]

[1]*МИРЭА-Российский технологический университет, Москва, Российская Федерация*
[1,2,3]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация*
[1]*professor.kartashov@gmail.com*✉

Аннотация. Статья посвящена развитию достаточно редкого метода расщепления интегрального преобразования Фурье-Ханкеля при нахождении точного аналитического решения обобщенной третьей краевой задачи с переменным во времени коэффициентом теплообмена и переменной во времени температуры окружающей среды $(\partial T / \partial n)\big|_{\Gamma} = h(t)\left[T_{\Gamma} - T_c(t)\right], t > 0$. Такие случаи в аналитической теплофизике относятся к сложному теплообмену. Обобщение заключается в том, что исходная задача рассматривается одновременно в трех системах координат: декартовой (полупространство, ограниченное плоской поверхностью), цилиндрической (пространство, ограниченное изнутри цилиндрической полостью), сферической (пространство, ограниченное изнутри сферической полостью). Используется развитое для этих целей обобщенное интегральное преобразование одновременно в трех системах координат и метод его расщепления применительно к задаче сложного теплообмена. В качестве иллюстрации рассмотрен частный случай в декартовых координатах и установлен быстрый рост пикаровского процесса.

Ключевые слова: интегральное преобразование обобщенного типа, метод расщепления, аналитическое решение тепловой задачи, нестационарная задача теплообмена, сложный теплообмен

Для цитирования. Карташов Э.М., Крылов С.С., Ненахов Е.В. Аналитические решения задач сложного теплообмена // Тепловые процессы в технике. 2025. Т. 17. № 5. С. 207–218. URL: https://tptmai.ru/publications.php?ID=185566

Original article

Analytical solutions to complex heat transfer problems

E.M. Kartashov[1]✉, S.S. Krylov[2], E.V. Nenakhov[3]

[1]*MIREA-Russian Technological University, Moscow, Russian Federation*
[1,2,3]*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*
[1]*professor.kartashov@gmail.com*✉

Abstract. The article is devoted to the development of a rather rare method of splitting the Fourier-Hankel integral transform when finding an exact analytical solution to a generalized third boundary

value problem with a time-varying heat transfer coefficient and a time-varying ambient temperature $(\partial T / \partial n)\big|_{\Gamma} = h(t)\left[T_{\Gamma} - T_c(t)\right], t > 0$. Such cases in analytical thermal physics are related to complex heat transfer. The generalization consists in the fact that the original problem is considered simultaneously in three coordinate systems: Cartesian (a half-space bounded by a flat surface), cylindrical (a space bounded from within by a cylindrical cavity), and spherical (a space bounded from within by a spherical cavity). A generalized integral transform developed for these purposes simultaneously in three coordinate systems and a method of splitting it are used as applied to the problem of complex heat transfer. As an illustration, a special case in Cartesian coordinates is considered and a rapid growth of the Picard process is established.
Based on the developed special mathematical apparatus, an exact analytical solution is obtained for the generalized third boundary value problem of thermal conductivity with time-varying heat transfer coefficient and ambient temperature simultaneously in three coordinate systems. The obtained results constitute the scientific novelty of the work and are new in analytical thermal physics.

Keywords: generalized integral transform, splitting method, analytical solution of a heat problem, nonstationary heat exchange problem, complex heat exchange

For citation. Kartashov E.M., Krylov S.S., Nenakhov E.V. Analytical solutions to complex heat transfer problems. *Thermal processes in engineering*. 2025, vol. 17, no. 5, pp. 207–218. (In Russ.). URL: https://tptmai.ru/publications.php?ID=185566

Введение

Начиная с 50-х годов прошлого столетия в огромном числе публикаций авторов различных направлений (математиков, физиков, механиков химиков-последние изучали процессы диффузии в металлах в физической химии) предпринимались попытки получить точное или приближенное аналитическое решение задачи сложного теплообмена при произвольном законе $h(t)$ и его частных зависимостях: экспоненциальной, степенной, корневой, линейной, периодической, импульсной, пульсирующей и т.д. Использовались многочисленные подходы классических дифференциальных уравнений математической физики [1, 8]. Однако, несмотря на многообразие подходов, каждый из них в конечном счете приводил к приближенному решению задачи либо к наиболее удачному первому приближению пикаровского процесса (также приближенному решению). Специфика таких задач заключалась в относительной простоте исходных математических моделей и вычислительных трудностях получения их аналитических решений и при этом очевидной значимостью применения получаемых соотношений в многочисленных практических ситуациях. По существу, данная проблема остается открытой до сих пор.

Рассмотрим обобщенную постановку задачи в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{2m+1}{x}\frac{\partial T}{\partial x}\right), x > x_0, t > 0,\\
&T(x,t)\big|_{t=0} = T_0, x \ge x_0,\\
&\left|T(x,t)\right| < \infty, x \ge x_0, t \ge 0,\\
&\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} =\\
&= h(t)\left[T(x,t)\big|_{x=x_0} - \varphi(t)\right], t > 0.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Здесь $m = -1/2; 0; 1/2$ соответственно для декартовой, цилиндрической и сферической систем координат. Функции $h(t), \varphi(t)$ – неотрицательные и абсолютно интегрируемые на полупространстве $[0, +\infty)$. В этом случае выполняются условия теоремы существования и единственности решения рассматриваемой задачи (1), то есть существует и является единственным решение $T(x,t) \in L^2[x_0, \infty) \times L^1[0, \infty)$ [8]. Нахождению этого решения и посвящена настоящая работа.

Аналитическое решение задачи (1) получим методом расщепления интегрального преобразования Фурье обобщенного типа. Предварительно разовьем указанный математический аппарат. При этом следует специально подчеркнуть, что классические подходы к развитию теории интегральных преобразований основаны на спектральных задачах на собственные значения и собственные функции [5, 6], что связано с длительными преобразованиями. В данном случае, учитывая специфику обобщенной постановки задачи (1) предлагается принципиально новый подход, основанный на применении операционного исчисления и специальной постановки тепловой задачи.

Эта постановка имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{2m+1}{x}\frac{\partial T}{\partial x}\right), \\ &x > x_0, t > 0, \\ &T(x,t)\big|_{t=0} = f(x), x \ge x_0; \\ &|T(x,t)| < \infty, x \ge x_0, t \ge 0, \\ &\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} = hT(x,t)\big|_{x=x_0}, t > 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

В пространстве изображений по Лапласу $\overline{T}(x,p) = \int\limits_0^\infty T(x,t)\exp(-pt)dt$ операционное решение задачи (2) имеет вид:

$$\overline{T}(x,p) = \frac{x^{-m}}{a} \times$$
$$\times\Bigg\{ I_m(x\sqrt{p/a})\int\limits_x^\infty \rho^{m+1} f(\rho)K_m(\rho\sqrt{p/a})d\rho +$$
$$+K_m(x\sqrt{p/a})\int\limits_{x_0}^x \rho^{m+1} f(\rho)I_m(\rho\sqrt{p/a})d\rho + \quad (3)$$
$$+\frac{\sqrt{p/a}I_{m+1}(x_0\sqrt{p/a}) - hI_m(x_0\sqrt{p/a})}{\sqrt{p/a}K_{m+1}(x_0\sqrt{p/a}) + hK_m(x_0\sqrt{p/a})}\times$$
$$\times K_m(x\sqrt{p/a})\int\limits_{x_0}^\infty \rho^{m+1} f(\rho)K_m(\rho\sqrt{p/a})d\rho \Bigg\}.$$

Здесь: $I_\nu(z), K_\nu(z)$ – модифицированные функции Бесселя. Оригинал изображения (3) вычислим с помощью интеграла Римана–Меллина по известным правилам его вычисления [1]

$$T(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \overline{T}(x,p)\exp(pt)dp. \quad (4)$$

При этом используем соотношения из теории функций Бесселя:

$$K_m(ix) = \frac{1}{2}\pi i\exp\left(-\frac{im\pi}{2}\right)\left[-J_m(x) + iY_m(x)\right],$$
$$K_m(-ix) = \frac{1}{2}\pi i\exp\left(\frac{im\pi}{2}\right)\left[J_m(x) + iY_m(x)\right],$$
$$I_m(ix) = \exp\left(\frac{im\pi}{2}\right)J_{m(x)}; \quad (5)$$
$$I_m(-ix) = \exp\left(-\frac{im\pi}{2}\right)J_m(x).$$

Здесь $J_\nu(z), Y_\nu(z)$ – функции Бесселя. После длительных вычислений находим:

$$T(x,t) = \int\limits_0^\infty \frac{\Psi(\lambda,x)\exp(-a\lambda^2 t)\lambda d\lambda}{\left[\lambda J_{m+1}(\lambda x_0) + hJ_m(\lambda x_0)\right]^2 + \left[\lambda Y_{m+1}(\lambda x_0) + hY_m(\lambda x_0)\right]^2}\times \int\limits_{x_0}^\infty \rho^{2m+1} f(\rho)\Psi(\lambda,\rho)d\rho. \quad (6)$$

Здесь:

$$\Psi(\lambda,x) = x^{-m}\times$$
$$\times\left\{\lambda\left[J_m(\lambda x)Y_{m+1}(\lambda x_0) - Y_m(\lambda x)J_{m+1}(\lambda x_0)\right] + h\left[J_m(\lambda x)Y_m(\lambda x_0) - Y_m(\lambda x)J_m(\lambda x_0)\right]\right\} \quad (7)$$

При $t = 0$ находим из (6):

$$f(x) = \int\limits_0^\infty \frac{\Psi(\lambda,x)\lambda d\lambda}{\left[\lambda J_{m+1}(\lambda x_0) + hJ_m(\lambda x_0)\right]^2 + \left[\lambda Y_{m+1}(\lambda x_0) + hY_m(\lambda x_0)\right]^2}\times \int\limits_0^\infty \rho^{2m+1} f(\rho)\Psi(\lambda,\rho)d\rho.$$

Отсюда следует: если

$$\bar{f}(\lambda) = \int_{x_0}^{\infty} \rho^{2m+1} f(\rho)\Psi(\lambda,\rho)d\rho,$$

то

$$f(x) = \int_0^{\infty} \bar{f}(\lambda) \frac{\Psi(\lambda,x)\lambda d\lambda}{\left|\lambda J_{m+1}(\lambda x_0) + hJ_m(\lambda x_0)\right|^2 + \left[\lambda Y_{m+1}(\lambda x_0) + hY_m(\lambda x_0)\right]^2}.$$

Таким образом, построено обобщенное интегральное преобразование функции $T(x,t)$ для третьей краевой задачи (2):

$$\bar{T}(\lambda,t) = \int_{x_0}^{\infty} \rho^{2m+1} T(\rho,t)\Psi(\lambda,\rho)d\rho \tag{8}$$

с формулой обращения

$$T(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{\bar{T}(\lambda,t)\Psi(\lambda,x)}{\left[\lambda J_{m+1}(\lambda x_0) + hJ_m(\lambda x_0)\right]^2 + \left[\lambda Y_{m+1}(\lambda x_0) + hY_m(\lambda x_0)\right]^2}\lambda d\lambda, \tag{9}$$

$$\Psi(\lambda,x) = x^{-m} \times \{\lambda\left[J_m(\lambda x)Y_{m+1}(\lambda x_0) - Y_m(\lambda x)J_{m+1}(\lambda x_0)\right] + h\left[J_m(\lambda x)Y_m(\lambda x_0) - Y_m(\lambda x)J_m(\lambda x_0)\right]\} \tag{10}$$

При этом изображение оператора $\Delta T(x,t)$ имеет вид:

$$\int_{x_0}^{\infty} \rho^{2m+1}\Delta T(\rho,t)\Psi(\lambda,\rho)d\rho = \frac{2x_0^{-m}}{\pi}\left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - hT(x,t)\right]\Bigg|_{x=x_0} - \lambda^2\bar{T}(\lambda,t). \tag{11}$$

Имея обобщенное интегральное преобразование (8)–(11) нетрудно выписать точное аналитическое решение задачи (2), включая все неоднородности как в уравнении (внутренний нестационарный источник теплоты), так и в краевых условиях (наличие начальной температуры и температуры окружающей среды). Из (8)–(11) нетрудно получить соответствующие преобразования в цилиндрических координатах при $m = 0$ и в декартовых при $m = -1/2$.

Построение точного аналитического решения обобщенной задачи методом расщепления интегрального преобразования

Задачу (1) рассмотрим в безразмерных переменных:

$$\left.\begin{aligned} &\rho = x / x_0; \\ &F_0 = at / x_0^2; \\ &Bi(F_0) = \frac{\alpha(t)x_0}{\lambda^*}; \\ &\Theta(\rho,F_0) = \frac{T(x,t) - T_0}{T_c^* - T_0}; \\ &T_c(F_0) = \frac{\varphi(t) - T_0}{T_c^* - T_0}, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

где T_c^* – выбранная единица масштаба. Теперь можно записать задачу (1) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Theta}{\partial F_0} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\rho^2} + \frac{2m+1}{\rho}\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}, \\ &\rho > 1, F_0 > 0, \\ &\Theta(\rho,F_0)\Big|_{F_0=0} = 0, \rho \ge 1; \\ &\left|\Theta(\rho,F_0)\right| < \infty, \rho \ge 1, F_0 \ge 0, \\ &\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1} = \\ &= Bi(F_0)\left[\Theta(\rho,F_0)\Big|_{\rho=1} - T_c(F_0)\right], \\ &F_0 > 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Обобщенное интегральное преобразование (8)–(11) запишем в виде:

$$\overline{\Theta}(\lambda, F_0) = \\ = \int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho, F_0)K(\rho, \lambda, F_0)d\rho, \tag{14}$$

$$K(\rho,\lambda,F_0) = \\ = \rho^{-m}\left\{\lambda\left[J_m(\lambda\rho)Y_{m+1}(\lambda) - Y_m(\lambda\rho)J_{m+1}(\lambda)\right] + \right. \\ \left. + Bi(F_0)\left[J_m(\lambda\rho)Y_m(\lambda) - Y_m(\lambda\rho)J_m(\lambda)\right]\ \right\} = \\ = \left[Bi(F_0)Y_m(\lambda) + \lambda Y_{m+1}(\lambda)\right]\left[\rho^{-m}J_m(\lambda\rho)\right] - \\ - \left[Bi(F_0)J_m(\lambda) + \lambda J_{m+1}(\lambda)\right]\left[\rho^{-m}Y_m(\lambda\rho)\right]. \tag{15}$$

Обозначим:

$$\left.\begin{aligned} \alpha(\lambda, F_0) &= Bi(F_0)Y_m(\lambda) + \lambda Y_{m+1}(\lambda), \\ \beta(\lambda, F_0) &= Bi(F_0)J_m(\lambda) + \lambda J_{m+1}(\lambda). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Тогда формула обращения для преобразования (14) будет иметь вид:

$$\Theta(\rho, F_0) = \\ = \int_0^\infty \overline{\Theta}(\lambda, F_0)\frac{K(\rho, \lambda, F_0)}{\alpha^2(\lambda, F_0) + \beta^2(\lambda, F_0)}\lambda d\lambda. \tag{17}$$

При этом

$$K(\rho, \lambda, F_0) = \\ = \alpha(\lambda, F_0)\left[\rho^{-m}J_m(\lambda\rho)\right] - \\ - \beta(\lambda, F_0)\left[\rho^{-m}Y_m(\lambda\rho)\right], \tag{18}$$

$$\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Delta\Theta(\rho, F_0)K(\rho, \lambda, F_0)d\rho = \\ = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\partial\Theta(\rho, F_0)}{\partial\rho} - Bi(F_0)\Theta(\rho, F_0)\right]\Bigg|_{\rho=1} - \\ - \lambda^2\overline{\Theta}(\lambda, F_0). \tag{19}$$

Введем ряд важных обозначений:

$$\left.\begin{aligned} &\omega(\lambda, F_0) = \alpha(\lambda, F_0) + i\beta(\lambda, F_0), \\ &\overline{\omega}(\lambda, F_0) = \alpha(\lambda, F_0) - i\beta(\lambda, F_0), \\ &H_0^{(1)}(\lambda\rho) = \left[J_m(\lambda\rho) + iY_m(\lambda\rho)\right](\rho^{-m}), \\ &H_0^{(2)}(\lambda\rho) = \left[J_m(\lambda\rho) - iY_m(\lambda\rho)\right](\rho^{-m}), \\ &A(\lambda, F_0) = \\ &= \int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho, F_0)H_0^{(1)}(\lambda\rho)d\rho, \\ &\overline{A}(\lambda, F_0) = \\ &= \int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho, F_0)H_0^{(2)}(\lambda\rho)d\rho. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Тогда можно записать:

$$\overline{\Theta}(\lambda, F_0) = \\ = \frac{1}{2}\left[\omega(\lambda, F_0)A(\lambda, F_0) + \overline{\omega}(\lambda, F_0)\overline{A}(\lambda, F_0)\right] \tag{21}$$

или

$$\overline{\Theta}(\lambda, F_0) = \mathrm{Re}\left[\omega(\lambda, F_0)A(\lambda, F_0)\right]. \tag{22}$$

Дальнейшая цель – перевести исходную задачу (13) в пространство изображений (14). Вначале запишем интегральное преобразование левой части уравнения в (13):

$$\frac{\partial\overline{\Theta}(\lambda, F_0)}{\partial F_0} = \\ = \int_1^\infty \rho^{2m+1}\frac{\partial\Theta(\rho, F_0)}{\partial F_0}K(\rho, \lambda, F_0)d\rho = \\ = \frac{1}{2}\left[\omega(\lambda, F_0)\frac{\partial A(\lambda, F_0)}{\partial F_0} + \overline{\omega}(\lambda, F_0)\frac{\partial\overline{A}(\lambda, F_0)}{\partial F_0}\right].$$

Изображение оператора $\Delta\Theta(\rho, F_0)$ в (19) будет иметь вид:

$$\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Delta\Theta(\rho,F_0)K(\rho,\lambda,F_0)d\rho =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial\rho} - Bi(F_0)\Theta(\rho,F_0)\right]\Big|_{\rho=1} -$$
$$-\lambda^2\overline{\Theta}(\lambda,F_0) = \tag{23}$$
$$= -\frac{2}{\pi}Bi(F_0)T_c(F_0) - \lambda^2\overline{\Theta}(\lambda,F_0) = -\frac{1}{2}\lambda^2 \times$$
$$\times\left[\omega(\lambda,F_0)A(\lambda,F_0) + \overline{\omega}(\lambda,F_0)\overline{A}(\lambda,F_0)\right] -$$
$$-\frac{2}{\pi}Bi(F_0)T_c(F_0).$$

Теперь исходную задачу (13) можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega(\lambda,F_0)\frac{\partial A(\lambda,F_0)}{\partial F_0} + \overline{\omega}(\lambda,F_0)\frac{\partial \overline{A}(\lambda,F_0)}{\partial F_0} + \\
&+\lambda^2\left[\omega(\lambda,F_0)A(\lambda,F_0) + \overline{\omega}(\lambda,F_0)\overline{A}(\lambda,F_0)\right] = \\
&= -\frac{4}{\pi}Bi(F_0)T_c(F_0), F_0 > 0, \\
&A(\lambda,0) = \overline{A}(\lambda,0) = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\omega(\lambda,F_0)\frac{\partial A(\lambda,F_0)}{\partial F_0} + \lambda^2\omega(\lambda,F_0)A(\lambda,F_0) + \right.\\
&\left.+\frac{2}{\pi}Bi(F_0)T_c(F_0)\right] = -\left[\overline{\omega}(\lambda,F_0)\frac{\partial \overline{A}(\lambda,F_0)}{\partial F_0} + \right.\\
&+\lambda^2\overline{\omega}(\lambda,F_0)\overline{A}(\lambda,F_0) + \\
&\left.+\frac{2}{\pi}Bi(F_0)T_c(F_0)\right], F_0 > 0, \\
&A(\lambda,0) = \overline{A}(\lambda,0) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Рассмотрим подробнее равенство (24). После преобразований получим важное соотношение:

$$\int_1^\infty \rho^{2m+1}\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial F_0}K(\rho,\lambda,F_0)d\rho +$$
$$+\lambda^2\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)d\rho + \tag{26}$$
$$+\frac{2}{\pi}Bi(F_0)T_c(F_0) = W(\lambda,F_0) = 0.$$

Теперь раскроем левую часть уравнения в (25). Находим:

$$\left[\alpha(\lambda,F_0) + i\beta(\lambda,F_0)\right]\int_1^\infty \rho^{2m+1}\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial F_0}\times$$
$$\times\left[(J_m(\lambda\rho) + iY_m(\lambda\rho))\rho^{-m}\right]d\rho +$$
$$+\lambda^2\left[\alpha(\lambda,F_0) + i\beta(\lambda,F_0)\right]\times$$
$$\times\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)\times$$
$$\times\left[(J_m(\lambda\rho) + iY_m(\lambda\rho))\rho^{-m}\right]d\rho +$$
$$+\frac{2}{\pi}Bi(F_0)T_c(F_0) =$$
$$= \int_1^\infty \rho^{2m+1}\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial F_0}K(\rho,\lambda,F_0)d\rho +$$
$$+\lambda^2\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)K(\rho,\lambda,F_0)d\rho +$$
$$+\frac{2}{\pi}Bi(F_0)T_c(F_0) + i\left\{\int_1^\infty \rho^{2m+1}\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial F_0}\times\right.$$
$$\times\left[\beta(\lambda,F_0)(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m}) + \right.$$
$$\left.+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\right]d\rho +$$
$$+\lambda^2\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)\left[\beta(\lambda,F_0)(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m}) + \right.$$
$$\left.\left.+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\right]d\rho\right\} =$$
$$= W(\lambda,F_0) + i\Psi(\lambda,F_0) = i\Psi(\lambda,F_0).$$

Здесь:

$$\Psi(\lambda,F_0)=$$
$$=\int_1^\infty \rho^{2m+1}\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial F_0}\Big[\beta(\lambda,F_0)\times$$
$$\times(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\Big]d\rho+ \tag{27}$$
$$+\lambda^2\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)\Big[\beta(\lambda,F_0)(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})+$$
$$+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\Big]d\rho.$$

Теперь искомая задача сводится к следующей задаче Коши

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial A(\lambda,F_0)}{\partial F_0}+\lambda^2 A(\lambda,F_0)=\\&=-\frac{2}{\pi}\frac{Bi(F_0)}{\omega(\lambda,F_0)}T_c(F_0)+i\frac{\Psi(\lambda,F_0)}{\omega(\lambda,F_0)},\\&F_0>0,\\&A(\lambda,0)=0,\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

с решением в виде:

$$A(\lambda,F_0)=$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{F_0}\frac{Bi(\tau)T_c(\tau)}{\omega(\lambda,\tau)}\exp\Big[-\lambda^2(F_0-\tau)\Big]d\tau+ \tag{29}$$
$$+i\int_0^{F_0}\frac{\Psi(\lambda,\tau)}{\omega(\lambda,\tau)}\exp\Big[-\lambda^2(F_0-\tau)\Big]d\tau.$$

При этом

$$\frac{1}{\omega(\lambda,\tau)}=\frac{\alpha(\lambda,\tau)-i\beta(\lambda,\tau)}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}.$$

Принципиальное равенство для дальнейших исследований имеет вид:

$$\overline{\Theta}(\lambda,F_0)=\mathrm{Re}\big[\omega(\lambda,F_0)A(\lambda,F_0)\big] \tag{30}$$

Раскроем $\Psi(\lambda, F_0)$:

$$\Psi(\lambda,F_0)=\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Delta\Theta(\rho,F_0)\big[\beta(\lambda,F_0)\times$$
$$\times(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\Big]d\rho+$$
$$+\lambda^2\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)\big[\beta(\lambda,F_0)\times$$
$$\times(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\Big]d\rho=$$
$$=\int_1^\infty \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^{2m+1}\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial\rho})\big[\beta(\lambda,F_0)\times \tag{31}$$
$$\times(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\Big]d\rho+$$
$$+\lambda^2\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)\Big[\beta(\lambda,F_0)(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})+$$
$$+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\Big]d\rho.$$

Интегрируя дважды по частям (первый интеграл в (31)) и учитывая соотношения

$$\frac{1}{\rho^{2m+1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^{2m+1}\frac{\partial(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})}{\partial\rho}\right]=$$
$$=-\lambda^2(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m}),$$
$$\frac{\partial}{\partial\rho}\Big[J_m(\lambda\rho)\rho^{-m}\Big]=-\lambda\Big[J_{m+1}(\lambda\rho)\rho^{-m}\Big],$$

справедливые также и для $\Big[Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m}\Big]$, устанавливаем, что

$$\Psi(\lambda,F_0)=$$
$$=-\Big\{\Theta(1,F_0)\Big[\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)\Big]-$$
$$-Bi(F_0)T_c(F_0)\times \tag{32}$$
$$\times\big[\beta(\lambda,F_0)J_m(\lambda)+\alpha(\lambda,F_0)Y_m(\lambda)\big]$$

Используем теперь (30). Перемножая $\omega(\lambda,F_0)$ из (20) и $A(\lambda,F_0)$ из (29), выделяем действительную часть и после длительных преобразований приходим к результату:

$$\overline{\Theta}(\lambda,F_0)=$$
$$=(-\frac{2}{\pi})\left\{\int_0^{F_0}\left[\frac{Bi(\tau)T_c(\tau)\alpha(\lambda,\tau)}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}\alpha(\lambda,F_0)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{Bi(\tau)T_c(\tau)\beta(\lambda,\tau)}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}\beta(\lambda,F_0)\right]\times$$
$$\left.\times\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]d\tau\quad\right\}-$$
$$-\int_0^{F_0}\Theta(1,\tau)\left[\alpha(\lambda,F_0)\beta(\lambda,\tau)-\beta(\lambda,F_0)\alpha(\lambda,\tau)\right]\times$$
$$\times\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]d\tau+$$
$$+\int_0^{F_0}\left\{Bi(\tau)T_c(\tau)\left[\beta(\lambda,\tau)J_m(\lambda)+\alpha(\lambda,\tau)Y_m(\lambda)\right]\times\right.$$
$$\times\frac{\left[\beta(\lambda,\tau)\alpha(\lambda,F_0)-\alpha(\lambda,\tau)\beta(\lambda,F_0)\right]}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}\times$$
$$\left.\times\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]\quad\right\}d\tau.$$

Теперь по теореме обращения (17) можно записать искомую функцию $\Theta(\rho,F_0)$ – решение задачи (13):

$$\Theta(\rho,F_0)=$$
$$=\int_0^{\infty}\overline{\Theta}(\lambda,F_0)\frac{K(\rho,\lambda,F_0)}{\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)}\lambda d\lambda=$$
$$=(-\frac{2}{\pi})\int_0^{F_0}Bi(\tau)T_c(\tau)d\tau\int_0^{\infty}\frac{K(\rho,\lambda,F_0)}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}\times$$
$$\times\frac{\alpha(\lambda,F_0)\alpha(\lambda,\tau)+\beta(\lambda,F_0)\beta(\lambda,\tau)}{\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)}\times\qquad(33)$$
$$\times\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]\lambda d\lambda+\int_0^{F_0}Bi(\tau)T_c(\tau)d\tau\times$$
$$\times\int_0^{\infty}\frac{K(\rho,\lambda,F_0)\left[\beta(\lambda,\tau)J_m(\lambda)+\alpha(\lambda,\tau)Y_m(\lambda)\right]}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}\times$$
$$\times\frac{\beta(\lambda,\tau)\alpha(\lambda,F_0)-\alpha(\lambda,\tau)\beta(\lambda,F_0)}{\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)}\times$$
$$\times\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]\lambda d\lambda-\int_0^{F_0}\Theta(1,\tau)d\tau\times$$
$$\times\int_0^{\infty}\frac{K(\rho,\lambda,F_0)\left[\alpha(\lambda,F_0)\beta(\lambda,\tau)-\beta(\lambda,F_0)\alpha(\lambda,\tau)\right]}{\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)}\times$$
$$\times\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]\lambda d\lambda.$$

Правая часть (33) зависит от неизвестной величины $\Theta(1,F_0)$. Полагая в (33) $\rho=1$ и используя соотношение $J_m(z)Y_{m+1}(z)-J_{m+1}(z)Y_m(z)=$ $=-2/(\pi z)$, приходим к интегральному уравнению Вольтера второго рода относительно $\Theta(1,F_{0)})$:

$$\Theta(1,F_0)=\Theta_1(F_0)+\frac{2}{\pi}\int_0^{F_0}\Theta_2(\tau,F_0)\Theta(1,\tau)d\tau,\qquad(34)$$

где

$$\Theta_1(F_0)=(\frac{2}{\pi})^2\int_0^{F_0}Bi(\tau)T_c(\tau)d\tau\times$$
$$\times\int_0^{\infty}\frac{\alpha(\lambda,F_0)\alpha(\lambda,\tau)+\beta(\lambda,F_0)\beta(\lambda,\tau)}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}\times$$
$$\times\frac{\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]}{\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)}\lambda d\lambda-$$
$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{F_0}Bi(\tau)T_c(\tau)d\tau\times\qquad(35)$$
$$\times\int_0^{\infty}\frac{\beta(\lambda,\tau)J_m(\lambda)+\alpha(\lambda,\tau)Y_m(\lambda)}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}\times$$
$$\times\frac{\beta(\lambda,\tau)\alpha(\lambda,F_0)-\alpha(\lambda,\tau)\beta(\lambda,F_0)}{\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)}\times$$
$$\times\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]\lambda d\lambda,$$

$$\Theta_2(\tau,F_0)=$$
$$=\int\limits_0^\infty \frac{\alpha(\lambda,F_0)\beta(\lambda,\tau)-\beta(\lambda,F_0)\alpha(\lambda,\tau)}{\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)}\times$$
$$\times\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]\lambda d\lambda. \quad (36)$$

Решение интегрального уравнения (34) можно представить в виде пикаровского процесса последовательных приближений:

$$\Theta(1,F_0)=\Psi_0(F_0)+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{\pi})^n\Psi_n(F_0), \quad (37)$$

где

$$\Psi_0(F_0)=\Theta_1(F_0),\Psi_n(F_0)=$$
$$=\int\limits_0^{F_0}\Theta_2(\tau,F_0)\Psi_{n-1}(\tau)d\tau. \quad (38)$$

Из (37)–(38) находим искомую величину в виде

$$\Theta(1,F_0)=\Theta_1(F_0)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{\pi})^n\int\limits_0^{F_0}\Theta_2(\tau,F_0)d\tau\int\limits_0^{\tau}\Theta_2(\tau_1,\tau)d\tau_1\ldots \quad (39)$$
$$\ldots\int\limits_0^{\tau_{n-2}}\Theta_2(\tau_{n-1},\tau_{n-2})\Theta_1(\tau_{n-1})d\tau_{n-1},$$

чем и завершается длительная (и достаточно напряженная в силу специфики самой проблемы) процедура нахождения точного аналитического решения обобщенной задачи (13) сложного теплообмена. Следует отметить, что это решение (в обобщенной форме) – первое в литературе по аналитической теплофизике.

В качестве приложения развитого подхода при решении задачи (1) рассмотрим в (1) случай декартовых координат: $m=-1/2, x_0=0, \varphi(t)=T_c$. При этом необходимо учесть, что

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{2/\pi}\sin z/\sqrt{z},$$
$$J_{-1/2}(z)=\sqrt{2/\pi}\cos z/\sqrt{z},$$
$$Y_{1/2}(z)=-\sqrt{2/\pi}\cos z/\sqrt{z},$$
$$Y_{-1/2}(z)=\sqrt{2/\pi}\sin z/\sqrt{z}.$$

В безразмерных переменных

$$z=x/l; F_0=at/l^2;\ Bi(F_0)=\alpha(t)l/\lambda^*;$$
$$\Theta(z,F_0)=\frac{T(x,t)-T_0}{T_c-T_0},$$

где l – выбранная единица масштаба, имеем задачу

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Theta(z,F_0)}{\partial F_0}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}, z>0, F_0>0,\\
&\Theta(z,F_0)\Big|_{F_0=0}=0, z\ge 0;\\
&\left|\Theta(z,F_0)\right|<\infty, z\ge 0, F_0\ge 0;\\
&\frac{\partial\Theta(z,F_0)}{\partial z}\Big|_{z=0}=Bi(F_0)\left[\Theta(z,F_0)-1\right],\\
&F_0>0.
\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Опуская длительные преобразования перехода от обобщенных координат к декартовым, получим следующее аналитическое решение задачи (40):

$$\Theta(z,F_0)=$$
$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{F_0}Bi(\tau)d\tau\int\limits_0^{\infty}\left[\cos\xi z+\frac{Bi(F_0)}{\xi}\sin\xi z\right]\times$$
$$\times\frac{\xi^2}{\xi^2+Bi^2(F_0)}\exp\left[-\xi^2(F_0-\tau)\right]d\xi+$$
$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{F_0}\Theta(0,\tau)\left[Bi(F_0)-Bi(\tau)\right]d\tau\times \quad (41)$$
$$\times\int\limits_0^{\infty}\left[\cos\xi z+\frac{Bi(F_0)}{\xi}\sin\xi z\right]\times$$
$$\times\frac{\xi^2}{\xi^2+Bi^2(F_0)}\exp\left[-\xi^2(F_0-\tau)\right]d\xi,$$

где

$$\Theta(0,F_0)=\Theta_1(F_0)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{\pi})^n\int_0^{F_0}\Theta_2(F_0,\tau)d\tau\times$$
$$\times\int_0^{\tau}\Theta_2(\tau,\tau_1)d\tau_1... \qquad (42)$$
$$...\int_0^{\tau_{n-2}}\Theta_1(\tau_{n-1})\Theta_2(\tau_{n-2},\tau_{n-1})d\tau_{n-1},$$

$$\left.\begin{array}{c}\Theta_1(F_0)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{F_0}Bi(\tau)\Psi_0(F_0,\tau)d\tau,\\ \Theta_2(F_0,\tau)=\\ =\left[Bi(F_0)-Bi(\tau)\right]\Psi_0(F_0,\tau),\\ \Psi_0(F_0,\tau)=\dfrac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{F_0-\tau}}-\\ -\dfrac{\pi Bi(F_0)}{2}\times\exp\left[Bi^2(F_0)(F_0-\tau)^2\right]\times\\ \times\Phi^*\left[Bi(F_0)(F_0-\tau)^2\right].\end{array}\right\} \qquad (43)$$

Одним из доказательств справедливости найденного соотношения (41) является рассмотрение в (41) частного классического случая $Bi(F_0)=Bi=const$. Для этого случая соотношение (41) автоматически дает классическое решение

$$\Theta(z,F_0)=\Phi^*(\frac{z}{2\sqrt{F_0}})-$$
$$-\exp(Biz-Bi^2F_0)\Phi^*(\frac{z}{2\sqrt{F_0}}+BiF_0),$$

где $\Phi^*(z)=1-\Phi(z),\Phi(z)$ – функция Лапласа.

Можно показать, что при выполнении условия $|Bi(F_0)|\le M/2$ ряд (42) сходится равномерно при всех $F_0>0$ в любом конечном промежутке изменения F_0 и мажорируется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}M^{n+1}d_{n+1}}{\pi^n}(\sqrt{F_0})^{n+1},$$

$$d_{n+1}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\pi^{-1/2}2^{(n+1/2)}}{(n+1)!!},n=2k+1\\ \dfrac{2^{(n+1/2)}}{(n+1)!!},n=2k,\end{array}\right.$$

сходимость которого при всех $F_0>0$ легко проверить по признаку Даламбера. В качестве численного примера возьмем $Bi(F_0)=\exp(-F_0)$ и выпишем ряд последовательных приближений для $\Theta(0,F_0)$ из (42):

$$\Theta_0(0,F_0)=\Theta_1(F_0);$$
$$\Theta_1(0,F_0)=\int_0^{F_0}\Theta_2(F_0,\tau)\Theta_1(\tau)d\tau;$$
$$\Theta_2(0,F_0)=$$
$$=\int_0^{F_0}\Theta_2(F_0,\tau)d\tau\int_0^{\tau}\Theta_2(\tau,\tau_1)\Theta_1(\tau_1)d\tau_1.$$

На рис. 1 приведены результаты численного счета приближений температурной функции $\Theta(z,F_0):\Psi_1=\Theta_1(z,F_0),\Psi_2=\Theta_1(z,F_0)+\Theta_2(z,F_0)$, $\Psi_3=\Theta_1(z,F_0)+\Theta_2(z,F_0)+\Theta_3(z,F_0)$ и т.д., рассчитанных в зависимости от критерия F_0 для точек а) $z=0{,}707$; б) $z=2$. Из рисунка видно, что первое и второе приближения берут в вилку третье приближение; второе и третье приближения берут в вилку четвертое приближение и т.д., что свидетельствует о достаточно быстрой сходимости процесса итерации для $\Theta(z,t)$, так что с достаточной для практики точностью можно ограничиться третьим приближением. Что касается сферических координат, то этот случай сводится к рассмотренному в декартовых координатах с помощью подстановки $W(z,F_0)=z\Theta(z,F_0)$.

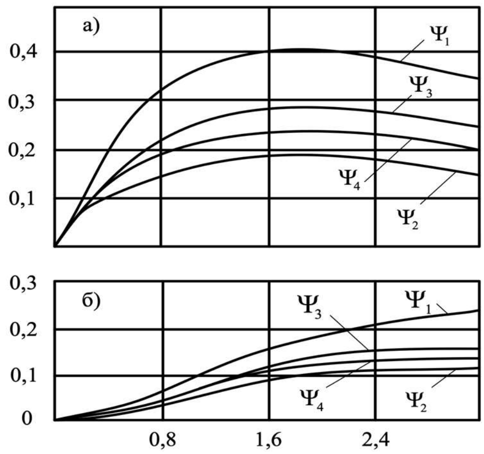

Рис. 1. Приближения температурной функции $\Theta(z, F_0)$ в зависимости от F_0 в точках а) $z = 0,707$; б) $z = 2$

Заключение

Представлено развитие метода расщепления обобщенного интегрального преобразования Фурье применительно к нахождению точного аналитического решения температурной задачи сложного теплообмена – при произвольной зависимости от времени коэффициента теплообмена и температуры окружающей среды в обобщенных координатах. Метод распространен на декартовы и сферические координаты. Полученные результаты являются новыми в аналитической теплофизике. Дальнейшее обобщение приведенной теории – переход к локально-неравновесному теплообмену, где учитывается конечная скорость распространения теплоты [11–17].

Список источников

1. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 540 с.
2. Аттетков А.В., Волков И.К. Формирование температурных полей в области, ограниченной изнутри цилиндрической поверхностью // Вестник МГТУ им. Баумана. Серия Машиностроение. 1999. № 1; С. 50–55.
3. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральное преобразование и операционное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1996. 228 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
5. Карташов Э.М. Метод интегральных преобразований в аналитической теории теплопроводности твердых тел // Известия РАН, серия Энергетика. 1993. № 2. С. 99–127.
6. Карташов Э.М. Расчеты температурных полей в твердых телах на основе улучшения сходимости рядов Фурье-Ханкеля // Известия РАН, серия Энергетика. 1993. № 3. С. 106–125.
7. Формалев В.Ф. Уравнения математической физики. М.: URSS, 2020. 646 с.
8. Новиков В.С. Аналитические методы теории переноса // Промышленная теплотехника. 1989. 11(5). С. 11–54.
9. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений тепломассопереноса. М.: Инфра-М, 2013. 391 с.
10. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
11. Савельева Ю.И. Разработка и анализ математической модели термомеханики структурно-чувствительных материалов. Автореферат диссертации на соиск. уч. ст. д.ф.м.н. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2023. 32 с.
12. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002. 168 с.
13. Кирсанов Ю.А. Моделирование теплофизических процессов. СПб.: Политехника, 2022. 230 с.
14. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Математические модели локально-неравновесного теплопереноса с учетом пространственно временной нелокальности // Инженерно-физический журнал. 2015. № 88(2). С. 393-408.
15. Карташов Э.М. Развитие обобщенных модельных представлений теплового удара для локально-неравновесных процессов переноса теплоты // Российский технологический журнал. 2023. Т. 11. № 3. С. 70–85.
16. Карташов Э.М. Развитие модельных представлений термической реакции вязкоупругих тел на температурное поле // Российский технологический журнал. 2024. Т. 12. № 6; С. 80–90.
17. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В. Разработка и исследование сильно неравновесной модели теплообмена и жидкости с учетом пространственно-временной нелокальности и диссипации энергии // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24. № 6. С. 929–935.

References

1. Kartashov EM. *Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids*. Moscow: Higher school; 2001.540 p. (In Russ.).
2. Attetkov AV, Volkov IK. Formation of temperature fields in a region bounded from the inside by a cylindrical surface. *Vestnik MGTU im. Baumana. Seriya Mashinostroenie*. 1999;(1):50–55. (In Russ.).
3. Volkov IK, Kanatnikov AN. *Integral transformation and operational calculus*. Moscow: MGTU im. Baumana; 1996. 228 p. (In Russ.).
4. Lykov AV. *Theory of thermal conductivity*. Moscow: Higher school; 1967. 600 p. (In Russ.).
5. Kartashov EM. *Method of integral transformations in the analytical theory of thermal conductivity of solids*. Izvestiya RAN, seriya Energetika. 1993;(2):99–127. (In Russ.).
6. Kartashov EM. Calculations of temperature fields in solids based on improving the convergence of Fourier-

Hankel series. *Izvestiya RAN, seriya Energetika*. 1993; (3):106–125. (In Russ.).
7. Formalev VF. *Equations of mathematical physics*. Moscow: URSS; 2020. 646 p. (In Russ.).
8. Novikov VS. Analytical methods of transfer theory. *Promyshlennaya teplotekhnika*. 1989;(11 (5)):11–54. (In Russ.).
9. Kudinov IV, Kudinov VA. *Analytical solutions of parabolic and hyperbolic heat and mass transfer equations*. Moscow: Infra-M; 2013. 391 p. (In Russ.).
10. Ladyzhenskaya OA, Solonnikov VA, Ural'tseva NN. *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Moscow: Nauka; 1967. 736 p. (In Russ.).
11. Savel'eva YuI. *Development and analysis of a mathematical model of thermomechanics of structure-sensitive materials. Abstract of a dissertation for a Ph.D. in Physics and Mathematics*. Moscow: Bauman Moscow State Technical University; 2023. 32 p. (In Russ.).
12. Zarubin VS, Kuvyrkin GN. *Mathematical models of thermomechanics*. Moscow: Fizmatlit; 2002. 168 p. (In Russ.).
13. Kirsanov YuA. *Modeling of thermophysical processes*. Saint Petersburg: Politekhnika; 2022. 230 p. (In Russ.).
14. Kudinov IV, Kudinov VA. Mathematical models of locally nonequilibrium heat transfer taking into account spatiotemporal nonlocality. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*. 2015;(88(2)):393–408. (In Russ.).
15. Kartashov EM. Development of generalized model representations of thermal shock for locally nonequilibrium heat transfer processes. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal*. 2023;11(3).70–85. (In Russ.).
16. Kartashov EM. Development of model representations of the thermal response of viscoelastic bodies to a temperature field. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal*. 2024; 12(6):80–90. (In Russ.).
17. Kudinov VA, Eremin AV, Kudinov IV. Development and study of a highly nonequilibrium model of heat and fluid transfer taking into account spatiotemporal nonlocality and energy dissipation. *Teplofizika i aeromekhanika*. 2017;24(6):929–935. (In Russ.).