

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



ФАН ТУНГ ШОН

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ТЕРМОУПРУГОМ
СЛОЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕХНОЛОГИЙ ГЛУБОКОГО
МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ**

1.1.8 – «Механика деформируемого твердого тела»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

Федотенков Григорий Валерьевич

Москва 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ.....	13
ГЛАВА 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЫ.....	24
1.1. Общая система уравнений линейной нестационарной термоупругости	24
1.2. Математическая модель термоупругой среды.....	26
1.3. Начальные и граничные условия в задачах термоупругости	28
1.4. Одномерные нестационарные задачи термоупругости	30
ГЛАВА 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕСТЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ	34
2.1. Традиционные аналитические и численные методы решения задач нестационарной термоупругости	34
2.1.1. Метод Фурье и интегральное преобразование Лапласа	34
2.1.2. Метод конечных разностей.....	42
2.2. Метод решения, основанный на технологии глубокого машинного обучения.....	49
ГЛАВА 3. РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ	69
3.1. Задача с неоднородными начальными условиями	70
3.2. Воздействие поверхностной нагрузки на термоупругий слой с учётом массовых сил и источников тепла.....	80
3.3. Воздействие тепловых потоков на границы термоупругого слоя	93
ГЛАВА 4. ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕРМОУПРУГОГО СЛОЯ ИЛИ СТЕРЖНЯ	105
4.1. Математическая постановка обратных коэффициентных задач.....	105

4.2. Метод решения обратных коэффициентных задач с применением технологии PINN	110
4.3. Обратная задача идентификации коэффициента α	112
4.3. Обратная задача идентификации коэффициента β	117
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	119
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	120

Список основных физических величин и параметров, используемых в уравнениях термоупругости

Обозначение	Описание	Размерность (СИ)
u	Перемещение	м (метр)
$\dot{u}$	Скорость	м/с (метр в секунду)
$\ddot{u}$	Ускорение	м/с ² (метр в секунду в квадрате)
x	Координата	м (метр)
t	Время	с (секунда)
ϑ	Приращение температуры	К (Кельвин)
ρ	Плотность материала	кг/м ³
c_ε	Удельная теплоёмкость	Дж/(кг·К)
E	Модуль Юнга	Па (Н/м ²)
ν	Коэффициент Пуассона	Безразмерная
α_T	Коэффициент линейного теплового расширения	1/К
κ	Коэффициент теплопроводности	Вт/(м·К)
F	Массовая сила	м/с ²
Q	Массовый источник тепла	Вт/кг
σ	Напряжение	Па (Н/м ²)
ε	Деформация	Безразмерная
T_0	Начальная температура	К (Кельвин)
γ	Коэффициент теплоотдачи	Вт/(м ² ·К)

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия наблюдается значительный прогресс в области исследований волновых процессов в различных средах и конструктивных элементах. Эти исследования играют важную роль в различных отраслях, таких как аэрокосмическая, строительная, энергетическая и оборонная промышленность. Термоупругие элементы конструкций, подвергающиеся внешним воздействиям – температурным колебаниям, силовым нагрузкам и вибрациям, – характеризуются сложной волновой динамикой, которая существенно влияет на структурную целостность и ресурс материалов, а также на безопасность и эффективность инженерных систем.

Актуальность исследования волновых процессов в термоупругих элементах конструкций связана с необходимостью более точного прогнозирования их поведения в условиях эксплуатации. Традиционные методы анализа, основанные на классических физических моделях, хотя и предоставляют важные теоретические инструменты, часто сталкиваются с ограничениями при рассмотрении сложных нелинейных и многослойных структур. В этих случаях современные методы анализа, такие как технологии глубокого машинного обучения (ГМО), предлагают новые возможности для более точного моделирования и предсказания поведения систем в условиях сложных воздействий.

Глубокое машинное обучение, благодаря своей способности к обработке больших объемов данных и выявлению скрытых закономерностей, открывает новые горизонты в изучении динамических процессов в сложных системах. Использование ГМО для анализа волновых процессов в термоупругих элементах конструкций позволяет создавать более точные модели, которые учитывают широкий спектр факторов, таких как нелинейность, диссипативные эффекты и многослойность структуры. Эти

модели могут применяться для более точного прогнозирования поведения материалов и конструкций, что особенно важно в условиях жестких эксплуатационных требований.

Целью диссертационной работы является исследование волновых процессов в термоупругом слое с использованием технологий глубокого машинного обучения с целью разработки новых методов математического моделирования, анализа и прогнозирования динамических деформаций и температурных полей в условиях термомеханического воздействия.

Методы исследования. В диссертационной работе используются аналитические (метод Фурье, преобразование Лапласа), численные (МКР) и машинные подходы (PINNs). Особое внимание уделяется верификации решений: сравнение с аналитическими решениями для простых случаев, контроль сходимости относительно МКР-расчетов.

Научная новизна работы. Научная новизна исследования заключается в разработке новых методов моделирования, анализа и прогнозирования волновых процессов в термоупругих слоях с применением технологий глубокого машинного обучения. Основные элементы новизны включают:

- построение математических моделей, объединяющих классические уравнения термоупругости с нейросетевыми алгоритмами, что позволяет учитывать нелинейные эффекты и сложные граничные условия, трудно описываемые традиционными методами.

- создание архитектур нейронных сетей, адаптированных для решения задач динамической термоупругости: физически информированные нейросети (PINNs) с встроенными уравнениями переноса тепла и упругих волн.

- разработку и реализацию алгоритмов решения обратных задач, позволяющих восстанавливать параметры материала (коэффициенты теплопроводности, модули упругости) с использованием методов глубокого обучения.

Достоверность результатов исследования.

Достоверность обеспечена строгим теоретическим фундаментом (аппарат уравнений термоупругости), верификацией на аналитических решениях и перекрёстной проверкой независимыми численными методами (метод конечных разностей).

Теоретическая и практическая ценность работы: работа имеет важное прикладное значение, заключающееся в разработке методов анализа волновых процессов в термоупругих слоях с использованием технологий глубокого обучения, а также в реализации этих методов и исследовании влияния тепловых и механических факторов.

Полученные результаты могут быть применены в инженерных расчетах тонкостенных конструкций, работающих в условиях термомеханических нагрузок, включая элементы авиационных и космических систем, микроэлектронные устройства и smart-конструкции, где критически важными являются вопросы надежности и устойчивости.

Исследование вносит вклад в развитие методов математического моделирования термоупругих процессов путем интеграции классических подходов механики сплошной среды с современными технологиями машинного обучения. Разработанные алгоритмы и методики расширяют возможности анализа сложных волновых процессов в тонких слоях.

Основные результаты, выносимые на защиту:

- разработан и реализован единый PINN-подход для связанной нестационарной термоупругости; выполнена верификация на аналитических решениях и методе конечных разностей, показаны хорошая сходимость и согласованность;

- с помощью предложенного подхода построены решения прямых задач нестационарной термоупругости. Показано, что PINN корректно воспроизводит поля перемещений и приращений температур при широком наборе начальных и граничных условий и различных вариантах силового и

температурного нагружения, обеспечивая точность и устойчивость на уровне метода конечных разностей;

– разработана схема решения обратных задач: идентификация одного неизвестного параметра (например, α или β) как обучаемой константы по показаниям виртуального датчика, подтверждена устойчивость к шуму, проведён анализ чувствительности и продемонстрирована практическая применимость для калибровки тонкостенных конструкций.

Апробация основных результатов работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Российских и Международных конференциях и симпозиумах:

- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Калужская обл., 2022, 2023, 2024, 2025 г.г.).

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, МГУ, 2024, 2025 г.).

- XII Международная научно-практическая конференция, посвященная 160-летию Белорусской железной дороги, Белорусский государственный университет транспорта, Республика Беларусь, г. Гомель 2022 г.

- Проблемы безопасности на транспорте: Материалы XIII международной научно-практической конференции, посвященной Году качества. Гомель 2024 г.

- 51 международная школа-конференция «Актуальные проблемы механики», Великий Новгород, 2024г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6-ти статьях, четыре из которых в статьях, рецензируемых в международной базе данных SCOPUS, две в журналах, включенных в Перечень ВАК РФ, а также в 5-ти тезисах докладов.

Структура и объём диссертации. Диссертация включает введение, четыре главы, заключение и список литературы. Объём диссертации составляет 140 страниц. Диссертация содержит 61 рисунок, 2 таблицы. Список публикаций включает 143 позиции.

Краткое содержание диссертации.

Введение

Показана актуальность исследования нестационарных волновых процессов в термоупругих элементах (слой/стержень) для задач аэрокосмического и смежных направлений. Сформулированы цель и задачи, очерчены ограничения классических численных подходов и мотивирована интеграция методов глубокого обучения, в частности PINN, как универсального инструмента для решения прямых и обратных задач. Дана структура работы.

Современное состояние исследований

Приведён обзор применения глубокого обучения и PINN в механике деформируемого твёрдого тела и термомеханике: выделены преимущества (универсальность нейросетевой аппроксимации, встроенные физические ограничения) и вызовы (подбор архитектуры, обобщающая способность, масштабирование). Намечены направления дальнейших исследований и интеграции машинного обучения с традиционным моделированием.

Глава 1. Уравнения движения термоупругой среды

Сформулирована замкнутая система линейной нестационарной термоупругости: уравнения движения, соотношения Коши и Дюамеля–Неймана, баланс тепла и закон теплопроводности. Дано изложение векторно-тензорной записи и интерпретация переменных (перемещения, приращение температуры, напряжения/деформации, тепловые потоки, источники и т.д.). Для классической модели через исключение энтропии и теплового потока получена система в перемещениях и приращении температуры; отдельно приведён изотропный частный случай (связь через

параметры Ламе). Оговорено, что помимо закона Фурье могут быть рассмотрены более общие модели теплопроводности. Также систематизированы типы начальных и граничных условий, используемых далее.

Глава 2. Методы решения нестационарных задач термоупругости

Построены три взаимодополняющих подхода к решению:

- аналитический: метод Фурье (разделение переменных) в сочетании с преобразованием Лапласа по времени для построения эталонных решений.
- численный: метод конечных разностей (FDM), описана разностная схема и алгоритм.
- глубокое машинное обучение: метод на основе PINN, где уравнения, начальные и граничные условия, а также дополнительные данные входят в состав функции потерь; обучение организовано на наборах внутренних коллокаций и точках начальных/граничных условий.

Обсуждены преимущества PINN: универсальность к прямым/обратным задачам, устойчивость к шуму, адаптивность к сложной геометрии и переменным параметрам. Предусмотрены этапы верификации по проверочному набору и метрикам (например, среднеквадратическое отклонение).

Глава 3. Решения прямых нестационарных задач термоупругости

Проведено сравнение результатов, полученных PINN, с аналитикой и численным методом (метод конечных разностей), что обеспечивает комплексную проверку корректности и эффективности подхода.

Рассмотрены три постановки:

3.1. Задача с ненулевыми начальными условиями при однородных уравнениях и граничных условиях – наглядный тест воспроизведения свободных волн.

3.2. Слой под действием поверхностной нагрузки при наличии массовых сил и внутренних источников тепла; аналитический метод напрямую неприменим – проводится сопоставление FDM и PINN.

3.3. Воздействие тепловых потоков на обе границы при жёстком закреплении; анализируются траектории обучения, функция потерь и СКО. Показана сходимость PINN к эталонным решениям.

Глава 4. Обратные коэффициентные нестационарные задачи для слоя/стержня

4.1. Постановка. Ставится задача идентификации одного из коэффициентов термоупругой модели по точечным наблюдениям. Подчёркнута некорректность задачи и введена стохастическая модель измерений (аддитивный, относительный и комбинированный шум).

4.2. Метод PINN для обратных задач. Система PDE используется как жёсткое физическое ограничение; нейросетевые аппроксимации строятся отдельно для перемещения и приращения температуры. Неизвестный коэффициент разыскивается в виде константы и включается в вектор обучаемых параметров; при этом неизвестен только один коэффициент (либо α при фиксированных β , κ ; либо β при фиксированных α , κ). Обучение ведётся на четырёх наборах точек (внутренние точки коллокации, начальные точки коллокации, граничные точки коллокации, точки, соответствующие моментам времени регистрации показаний датчика). Метрики качества: PDE-невязки, ошибка на датчике, физическая правдоподобность оценки.

4.3. Идентификация α (пример). Рассмотрен слой в поле массовых сил и внутренних источников тепла; на границах — заданные во времени тепловые потоки; механически – жёсткое закрепление; начальные условия – неоднородные. Истинные данные генерируются аналитически/высокоточно и «зашумляются». Датчик расположен в одной точке; приведены сценарии без шума и с шумом.

4.4. Идентификация β (пример). Аналогичная процедура для другого коэффициента: приводятся графики процесса обучения (без шума/с шумом) и таблица «истина $\rightarrow$ восстановлено $\rightarrow$ относительная ошибка». Получены ошибки порядка 0.42 % (без шума) и 1.09 % (с шумом), что подтверждает устойчивость метода.

Заключение и основные результаты

Сформулированы три ключевых результата: (1) создан и верифицирован единый PINN-подход к связанной нестационарной термоупругости; (2) показана корректная реконструкция полей для широкого спектра начальных/граничных условий и режимов нагружения с точностью и устойчивостью уровня FDM; (3) разработана и проверена схема обратной идентификации одного параметра модели как обучаемой константы, продемонстрирована устойчивость к шуму и практическая применимость.

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ

В последние десятилетия значительный прогресс в области искусственного интеллекта (ИИ) и технологий машинного обучения привел к настоящей революции в различных областях науки и техники. Методы, такие как нейронные сети и глубокое машинное обучение, стали незаменимыми инструментами для решения сложных задач, которые ранее были недоступны традиционными методами. Этот прогресс открыл новые направления исследований, включая моделирование сложных физических процессов, таких как волны в термоэластичных структурных элементах.

Нейронные сети, особенно глубокие нейронные сети, продемонстрировали выдающиеся способности в обработке больших объемов данных и обучении на их основе для достижения высокой точности в сложных задачах. Эти достижения не ограничиваются только промышленными приложениями, но также распространяются на такие области, как наука о материалах, физика и теплотехника. Например, современные модели распознавания речи и машинного перевода достигли точности, сравнимой с человеческой, благодаря глубоким нейронным сетям, что подчеркивает огромный потенциал этой технологии в решении сложных задач [1 - 5]

Одной из основных проблем при исследовании волновых процессов в термоэластичных структурных элементах являются нелинейные и сложные свойства управляющих уравнений. Эти уравнения часто сложно решать традиционными методами, такими как метод конечных элементов или другие численные методы. Поэтому применение методов машинного обучения, особенно глубокого обучения, для решения этих задач стало перспективным направлением исследований, привлекающим внимание множества ученых. Методы глубокого обучения на основе физически информированных нейронных сетей (PINNs) открыли новые горизонты в моделировании

физических процессов. PINNs не просто представляют собой модель машинного обучения, но и интегрируют физические законы в процесс обучения, что позволяет нейронной сети точнее обучаться и предсказывать сложные процессы. Этот метод преобразует задачу решения уравнений в частных производных (PDEs) в задачу оптимизации функции потерь, где начальные условия, граничные условия и другие ограничения рассматриваются как условия оптимизации [89, 104].

Кроме того, применение теоремы Колмогорова и теоремы универсальной аппроксимации в построении физических информированных моделей машинного обучения предоставило надежную математическую основу для этого метода. Теорема Колмогорова утверждает, что любая непрерывная функция нескольких переменных может быть представлена в виде композиции непрерывных одно переменных функций и сложения. Это означает, что теоретически нейронные сети могут аппроксимировать любую непрерывную функцию с произвольной точностью при достаточном количестве скрытых слоев и нейронов в сети [6, 9, 26, 27].

Однако проектирование оптимальной архитектуры и настройка гиперпараметров нейронной сети для достижения наилучшей производительности остаются большими вызовами. Несмотря на то, что теорема универсальной аппроксимации предоставляет теоретическую основу для возможности аппроксимации нейронной сетью, она не дает конкретных рекомендаций по созданию архитектуры сети или выбору подходящего алгоритма обучения [69]. Поэтому разработка методов глубокого обучения для решения задач, связанных с волнами в термоэластичных структурных элементах, требует не только глубокого понимания теории машинного обучения, но и умелого применения этих методов на практике.

В заключение, исследование и разработка методов глубокого обучения, позволяющих моделировать и решать сложные задачи, связанные с волнами в термоэластичных структурных элементах, открывают перспективные

направления для современной науки и техники. Эти методы не только помогают решать сложные задачи, но и предоставляют новые мощные инструменты для исследования и разработки передовых технологий в будущем.

Научные и технологические основы

Исследование волновых процессов в термоэластичных структурных элементах требует прочной научной и технологической основы, не только в области физики, но и включающей передовые математические методы и современные технологии машинного обучения. В этом разделе мы подробно рассмотрим основные научные аспекты и технологии, необходимые для понимания и решения проблем, связанных с волнами в термоэластичных системах.

Физическая основа термоэластичных процессов связана со сложным взаимодействием температуры, деформации и напряжений в материале. Когда структурный элемент подвергается воздействию источника тепла, изменение температуры вызывает расширение или сжатие материала, что в свою очередь приводит к внутренним напряжениям. Эти напряжения, если они превышают упругий предел материала, могут привести к необратимой деформации или даже разрушению структуры. Это особенно важно в системах с жесткими рабочими условиями, таких как в аэрокосмической промышленности, энергетике и высоковольтных электронных устройствах [8, 118].

Основные уравнения, описывающие термоэластичные процессы, включают уравнения равновесия сил, уравнения сохранения энергии и уравнения структурного материала. В многих случаях эти уравнения имеют нелинейный вид, что усложняет их решение. Особенно, когда учитываются нелинейные эффекты, такие как нелинейность температуры или материала, решение этих уравнений требует мощных численных методов, где глубокое обучение может играть важную роль [39, 56, 101, 139, 138].

Машинное обучение, особенно глубокие модели машинного обучения, такие как искусственные нейронные сети, продемонстрировало свою мощь в решении сложных задач, которые ранее были труднодоступны. Благодаря способности обрабатывать и обучаться на огромных объемах данных, модели машинного обучения могут не только аппроксимировать нелинейные функции, но и интегрировать физические законы в процесс обучения через модели, такие как PINNs (Physics-Informed Neural Networks).

PINNs расширили возможности машинного обучения в решении задач, связанных с уравнениями в частных производных (PDEs), часто встречающимися в моделировании термоэластичных процессов. Вместо прямого решения PDEs, PINNs преобразуют задачу в задачу оптимизации, в которой граничные условия и начальные условия интегрированы в функцию потерь. Это позволяет нейронной сети эффективно находить приближенные решения PDEs, используя вычислительные мощности современных компьютерных систем [137].

Одним из заметных приложений PINNs является моделирование и прогнозирование тепловых и механических волн в термоэластичных материалах. Благодаря способности интегрировать физические законы в модель машинного обучения, PINNs могут предоставлять точные прогнозы о поведении волн в сложных ситуациях, таких как при больших деформациях или резких изменениях температуры. Это помогает повысить точность и надежность моделей симуляций и уменьшить зависимость от традиционных численных методов [40, 62, 67, 104].

Методы машинного обучения, особенно нейронные сети, основаны на прочной математической основе, включая теорему Колмогорова и теорему универсальной аппроксимации. Теорема Колмогорова утверждает, что любая непрерывная функция может быть представлена в виде комбинации непрерывных одно переменных функций. Это предоставляет теоретическую основу для способности нейронных сетей аппроксимировать любую

непрерывную функцию при достаточном количестве скрытых слоев и нейронов [39, 56, 101].

Теорема универсальной аппроксимации (Universal Approximation Theorem) также показывает, что нейронная сеть с как минимум одним скрытым слоем может аппроксимировать любую непрерывную функцию с произвольной точностью. Однако эта теорема не предоставляет конкретных рекомендаций по созданию архитектуры сети или выбору алгоритма обучения. Это ставит перед нами задачу проектирования нейронных сетей так, чтобы они могли не только аппроксимировать, но и оптимизировать производительность машинного обучения [84].

Применение этих теорем на практике требует тонкой настройки модели и выбора гиперпараметров, а также глубокого понимания как математической теории, так и современных методов машинного обучения. Это особенно важно при применении к сложным задачам, таким как моделирование волн в термоэластичных структурных элементах, где как нелинейность, так и физические ограничения играют ключевую роль в определении поведения системы [77, 81, 82, 85].

Применение нейронных сетей для решения дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП)

Дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП) играют ключевую роль в моделировании множества физических явлений, от динамики жидкостей и термодинамики до механики твёрдых тел и электромагнетизма. ДУЧП часто имеют высокую нелинейность и сложность, что требует эффективных численных методов решения. Однако традиционные методы решения ДУЧП требуют значительных вычислительных ресурсов и могут быть непрактичны для систем с высокой размерностью. В этом контексте искусственные нейронные сети (ИНС) становятся мощным инструментом, предлагающим новый подход к решению ДУЧП с выдающимися результатами.

Решение дифференциальных уравнений в частных производных обычно основывается на численных методах, таких как метод конечных элементов (МКЭ), метод конечных разностей (МКР) и метод конечных объёмов (МКОБ). Эти методы имеют общую цель — аппроксимировать решение ДУЧП на вычислительной сетке. Однако их точность сильно зависит от разрешающей способности сетки, и при увеличении размерности задачи количество элементов или узлов сетки растёт экспоненциально, что приводит к так называемому «проклятию размерности». Это делает решение ДУЧП для сложных систем неосуществимым, особенно когда требуется моделирование в реальном времени или обработка больших данных [142].

Другой значительной проблемой традиционных методов является интеграция нелинейных или сложных краевых условий. Это часто требует переработки сетки или численных алгоритмов, что увеличивает вычислительную сложность и легко может привести к ошибкам, если не будет обработано должным образом. Кроме того, эти методы также сталкиваются с трудностями при решении ДУЧП с неточными начальными условиями или с коэффициентами, изменяющимися со временем [29]

Искусственные нейронные сети, обладая способностью обучаться на данных и аппроксимировать сложные нелинейные функции, были исследованы и применены для решения ДУЧП. В этом подходе, вместо того чтобы решать ДУЧП традиционными численными методами, нейронные сети обучаются для нахождения решений ДУЧП на основе данных, полученных от ДУЧП или аналогичных задач.

Одним из наиболее популярных подходов является использование глубоких нейронных сетей (ГНС) для аппроксимации решений ДУЧП. Здесь нейронная сеть строится так, чтобы представлять решение ДУЧП как функцию входных переменных (таких как время и пространство). Сеть обучается путём оптимизации функции потерь, основанной на ДУЧП и краевых и начальных условиях. Этот метод позволяет сети учиться

удовлетворять условиям ДУЧП без необходимости пошаговых вычислений во времени или пространстве, как это требуется в традиционных методах [20, 31, 41].

Одним из ключевых инструментов в этой области являются физически информированные нейронные сети (PINNs). PINNs представляют собой тип нейронных сетей, специально разработанных для решения ДУЧП. Они отличаются от традиционных моделей машинного обучения тем, что PINNs интегрируют физические законы непосредственно в функцию потерь, позволяя сети естественным образом находить решения ДУЧП без необходимости в исходных данных. PINNs продемонстрировали свою мощь в решении задач, связанных с динамикой жидкостей, теплопередачей и даже задач обратных задач, где параметры модели должны оцениваться на основе наблюдаемых данных [23, 26].

Нейронные сети, особенно PINNs, предлагают множество преимуществ при решении ДУЧП по сравнению с традиционными методами. Во-первых, они минимизируют проблему проклятия размерности. Нейронные сети могут обрабатывать задачи с высокой размерностью без необходимости создания детализированных сеток, как в МКЭ или МКР. Это экономит вычислительные ресурсы и позволяет решать задачи с большой размерностью, которые ранее были труднодоступны.

Во-вторых, PINNs обеспечивают высокую гибкость в интеграции краевых условий и нелинейных параметров. Вместо необходимости переработки сетки или численных алгоритмов, сложные краевые условия могут быть добавлены непосредственно в функцию потерь, что снижает сложность решения таких задач [33, 49, 64, 125].

Тем не менее, нейронные сети также имеют ограничения, которые следует учитывать. Одним из самых больших вызовов является оптимизация этих сетей для достижения точных решений ДУЧП. Процесс обучения нейронной сети требует настройки множества гиперпараметров и может

занимать много времени для поиска оптимальной структуры сети и алгоритма. Более того, из-за сложной и нелинейной природы функций потерь PINNs процесс обучения может легко застревать в локальных минимумах, что приводит к неточным решениям [19, 72, 105, 106, 120].

Методы глубокого машинного обучения для задач термоупругости

Глубокие нейронные сети, особенно такие модели, как сверточные нейронные сети (Convolutional Neural Networks - CNNs) и рекуррентные нейронные сети (Recurrent Neural Networks - RNNs), стали важным инструментом для решения сложных задач. Глубокие нейронные сети обладают способностью обучаться на данных с высокой точностью благодаря многослойной структуре и нелинейным активационным функциям. Применение DNNs разнообразно, включая задачи распознавания изображений, обработки семантики и анализа временных данных [22, 47, 73, 79, 107].

В контексте моделирования термоэластичных процессов DNNs могут использоваться для аппроксимации нелинейных функций, связанных с напряжениями, деформациями и температурами. Применение глубоких нейронных сетей позволяет решать задачи, с которыми традиционные численные методы могут сталкиваться с трудностями. В частности, оптимизация гиперпараметров нейронной сети и проектирование соответствующей архитектуры являются важными для обеспечения того, чтобы модель могла точно изучать и предсказывать характеристики системы [30, 123, 124, 129].

Нейронные сети, учитывающие физику (PINNs), представляют собой выдающуюся технологию интеграции физических законов в модели машинного обучения. PINNs доказали свою способность решать уравнения в частных производных (PDEs) за счет интеграции граничных условий и начальных условий в функцию потерь. Это не только помогает модели

машинного обучения усваивать физические законы, но и улучшает вычислительную эффективность и точность предсказаний [23, 67, 102, 104].

В случае задач термоэластичности PINNs могут быть применены для моделирования взаимодействия между температурой и напряжением в структурных элементах. PINNs позволяют решать сложные уравнения PDEs, оптимизируя функцию потерь, в которую интегрированы физические законы, такие как теорема о сохранении энергии и уравнения структуры материалов. Таким образом, PINNs могут предоставлять точные предсказания поведения волн в термоэластичных системах [40, 48].

Оптимизация является важной частью обучения моделей машинного обучения, включая DNNs и PINNs. Техники оптимизации, такие как градиентный спуск, Adam и другие улучшенные методы, играют ключевую роль в настройке параметров нейронной сети для минимизации функции потерь. В случае PINNs методы оптимизации должны обрабатывать не только граничные и начальные условия, но также обеспечивать соблюдение физических законов [24, 54].

Выбор подходящего алгоритма оптимизации и настройка гиперпараметров модели критически важны для достижения наилучшей производительности. Это включает в себя выбор размера пакета, скорости обучения и структуры нейронной сети. Современные методы оптимизации, такие как стохастический градиентный спуск (Stochastic Gradient Descent - SGD) и его варианты, широко применяются для обучения глубоких моделей машинного обучения [75, 113].

Применение и вызовы

Методы глубокого машинного обучения, особенно PINNs, находят применение в различных областях промышленности и исследований. В аэрокосмической отрасли моделирование термоэластичных процессов помогает улучшить проектирование и характеристики структур, подвергающихся нагрузкам. В энергетике эти модели могут способствовать

оптимизации работы теплопередающих устройств и минимизации ущерба от нежелательных процессов [51, 111, 140].

Кроме того, модели глубокого машинного обучения имеют применение в таких областях, как медицина и наука о материалах. В медицине моделирование физиологических и биохимических процессов может способствовать разработке новых методов лечения и повышению точности диагностики. В науке о материалах изучение и предсказание свойств новых материалов может привести к передовым технологическим приложениям [38, 90, 141].

Несмотря на впечатляющие результаты методов глубокого машинного обучения и PINNs, существует множество вызовов, которые необходимо решить. Одним из крупных вызовов является проектирование архитектуры нейронных сетей и настройка гиперпараметров для достижения наилучшей производительности. Вопросы точности, способности к обобщению и обработки больших задач требуют решения [28, 99, 107].

Направления будущих исследований могут включать разработку новых методов машинного обучения для улучшения аппроксимации и решения более сложных задач. Исследования также должны сосредоточиться на интеграции методов машинного обучения с инструментами анализа данных и традиционного моделирования для оптимизации процессов проектирования и предсказания в областях науки и техники [90, 100].

Применение методов глубокого обучения, таких как нейронные сети и PINNs, к моделированию и решению задач, связанных с волнами в термоэластичных структурных элементах, открывает новые возможности для научных и инженерных исследований. Эти методы не только позволяют решать сложные задачи, но и предоставляют новые подходы к моделированию и анализу физических процессов, что может существенно повысить точность и эффективность вычислительных решений.

Будущие исследования и разработки в этой области могут сосредоточиться на улучшении методов обучения, интеграции более сложных физических моделей и разработке новых архитектур для нейронных сетей. Это позволит не только решать существующие проблемы более эффективно, но и открывать новые направления для применения технологий машинного обучения в научных и инженерных задачах.

ГЛАВА 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЫ

1.1. Общая система уравнений линейной нестационарной термоупругости

Замкнутая система уравнений линейной термоупругости включает в себя [8]:

- уравнения движения

$$\nabla_j \sigma^{ij} + \rho F^i = \rho \ddot{u}^i. \quad (1.1)$$

- линеаризованное уравнение производства энтропии

$$\rho T_0 \dot{S} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho Q. \quad (1.2)$$

- соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i). \quad (1.3)$$

- соотношения Дюамеля-Неймана

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \Lambda^{ij} \vartheta, \quad S = \frac{\Lambda^{ij}}{\rho} \varepsilon_{ij} + \frac{c_\varepsilon}{T_0} \vartheta. \quad (1.4)$$

- закон теплопроводности, связывающий тепловой поток $\mathbf{q} = q^i \mathbf{e}_i$ с приращением температуры $\vartheta = T - T_0$:

$$q^i = f(\vartheta). \quad (1.5)$$

Здесь и далее $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ – вектор перемещений, $\vartheta = T - T_0$ – приращение температуры, T и T_0 – актуальная и начальная температуры, ρ – плотность среды, $\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ – тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$ – тензор деформаций, S – удельная энтропия, $\mathbf{C} = C^{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l$ – тензор упругих постоянных, $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ – тензор температурных постоянных, $\mathbf{q} = q^i \mathbf{e}_i$ – вектор объёмной плотности теплового потока, Q – массовая плотность тепловых источников, не связанных с теплопереносом, $\mathbf{F} = F^i \mathbf{e}_i$ – вектор массовой плотности внешних

массовых сил, c_ε – коэффициент удельной теплоёмкости при постоянной деформации, ∇_i – оператор набла (оператор ковариантного дифференцирования), $f(\vartheta)$ – некоторая функция, зависящая от приращения температуры ϑ и определяющая тот или иной закон теплопроводности.

В данной работе, не касаясь различных обобщений упругой части системы уравнений (1.1)-(1.5), наряду с классической теорией теплопроводности, рассмотрим несколько типов более общих моделей, основанных на различных обобщениях закона теплопроводности (1.5).

1.2. Математическая модель термоупругой среды

Теплопроводность в классической термоупругой среде описывается классическим законом теплопроводности Фурье

$$q^i(\mathbf{x}, t) = -\kappa^{ij} \nabla_j \vartheta(\mathbf{x}, t). \quad (1.6)$$

где κ^{ij} – компоненты тензора теплопроводности.

Исключая из уравнений (1.1)-(1.4), (1.6) энтропию S , приходим к системе уравнений классической термоупругости:

$$\begin{aligned} \nabla_j \sigma^{ij} + \rho F^i &= \rho \ddot{u}^i, \\ T_0 \Lambda^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho c_\varepsilon \dot{\vartheta} &= -\nabla_i q^i + \rho Q, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \quad \sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \Lambda^{ij} \vartheta, \quad q^i = -\kappa^{ij} \nabla_j \vartheta. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Первое из соотношений (1.7) – система трёх уравнений движения сплошной среды, второе – уравнение теплового баланса, третья группа равенств – геометрические соотношения Коши, далее – соотношения Дюамеля-Неймана и закон теплопроводности Фурье. Из этой системы можно исключить деформации и напряжения, а также плотность теплового потока.

Подставляя соотношения Коши в закон Гука, имеем

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \frac{1}{2} C^{ijkl} (\nabla_k u_l + \nabla_l u_k) - \Lambda^{ij} \vartheta = \\ &= \frac{1}{2} C^{ijkl} \nabla_k u_l + \frac{1}{2} C^{ijkl} \nabla_l u_k - \Lambda^{ij} \vartheta = C^{ijkl} \nabla_k u_l - \Lambda^{ij} \vartheta. \end{aligned}$$

Полученное равенство подставляем в уравнения движения.

Далее из второго уравнения в (1.7) исключаем тепловой поток, воспользовавшись законом Фурье (1.6). Приходим к уравнению теплопроводности с учетом деформаций

$$\nabla_i (\kappa^{ij} \nabla_j \vartheta) - T_0 \Lambda^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho F^{(J)} = \rho c_\varepsilon \dot{\vartheta}. \quad (1.8)$$

Используя здесь соотношения Коши, в результате получаем замкнутую систему уравнений задачи линейной термоупругости в перемещениях

$$\begin{aligned}\nabla_j (C^{ijkl} \nabla_l u_k) - \nabla_j (\Lambda^{ij} \vartheta) + \rho F^i &= \rho \ddot{u}^i, \\ \nabla_i (\kappa^{ij} \nabla_j \vartheta) - T_0 \Lambda^{ij} \nabla_i \dot{u}_j + \rho Q &= \rho c_\varepsilon \dot{\vartheta}.\end{aligned}\quad (1.9)$$

Наиболее простой вид эти уравнения приобретают в случае однородной изотропной среды. В этом случае первое из них называется *уравнением Ламе*. Для изотропного материала справедливы следующие связи материальных констант с упругими параметрами Ламе λ и μ (g^{ij} – компоненты метрического тензора):

$$C^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}), \quad \Lambda^{ij} = \Lambda g^{ij}, \quad \kappa^{ij} = \kappa g^{ij}. \quad (1.10)$$

Используя (1.10) находим:

$$\nabla_j \sigma^{ij} = \nabla_j (C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \Lambda^{ij} \vartheta) = (\lambda + \mu) g^{ij} \nabla_j \nabla_k u^k + \mu g^{jk} \nabla_j \nabla_k u^i - \Lambda g^{ij} \vartheta$$

Подставляя $\nabla_j \sigma^{ij}$ в первое уравнение (1.7), получаем

$$\begin{aligned}\rho \ddot{u}^i &= (\lambda + \mu) g^{ij} \nabla_j \nabla_l u^l + \mu g^{jl} \nabla_j \nabla_l u^i - \Lambda g^{ij} \nabla_j \vartheta + \rho F^i, \\ \rho c_\varepsilon \dot{\vartheta} &= \kappa g^{ij} \nabla_i \nabla_j \vartheta - T_0 \Lambda g^{ij} \nabla_i \dot{u}_j + \rho F^{(J)}.\end{aligned}\quad (1.11)$$

В векторной форме эти уравнения запишутся так:

$$\begin{aligned}\rho \ddot{\mathbf{u}} &= (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} - \Lambda \text{grad} \vartheta + \rho \mathbf{F}, \\ \rho c_\varepsilon \dot{\vartheta} &= \kappa \Delta \vartheta - T_0 \Lambda \text{div} \dot{\mathbf{u}} + \rho Q.\end{aligned}\quad (1.12)$$

1.3. Начальные и граничные условия в задачах термоупругости

Начальные и граничные условия являются важной частью постановки задачи термоупругости. Они определяют взаимодействие тела с внешними воздействиями и обеспечивают корректность математической модели, описывающей механическое и тепловое поведение материала. Ниже приводятся начальные и основные типы граничных условий для задач термоупругости

1. Начальные условия.

Начальные условия определяют начальное состояние системы в момент времени $t = 0$, включая начальные значения перемещений, скоростей и температуры:

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = u_i^0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = v_i^0(\mathbf{x}), \quad \vartheta(\mathbf{x}, 0) = \vartheta_0(\mathbf{x}). \quad (1.13)$$

где $u_i^0(\mathbf{x})$ – начальное распределение перемещений, $v_i^0(\mathbf{x})$ – начальное распределение скоростей, $\vartheta_0(\mathbf{x})$ – начальное распределение приращения температуры.

2 Граничные условия.

Граничные условия накладываются на границу тела Γ и могут быть различными в зависимости от типа взаимодействия с внешней средой.

2.1. Граничные условия для механических величин.

Условия Дирихле (заданные перемещения):

$$u_i = u_i^*(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u. \quad (1.14)$$

где $u_i^*(\mathbf{x}, t)$ — заданное перемещение на части границы Γ_u .

Условия Неймана (заданные поверхностные силы):

$$\sigma^{ij} n_j = P^i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t. \quad (1.15)$$

где $P^i(\mathbf{x}, t)$ – внешняя поверхностная сила, а n_j – компоненты вектора внешней нормали к границе Γ_t .

2.2 Граничные условия для температурного поля

Условия Дирихле (заданная температура):

$$\vartheta = \vartheta^*(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_T. \quad (1.16)$$

где $\vartheta^*(\mathbf{x}, t)$ – заданное значение температуры на части границы Γ_T .

Условия Неймана (заданный тепловой поток):

$$\kappa^{ij} \nabla_j \vartheta n_i = q(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q. \quad (1.17)$$

где $q(\mathbf{x}, t)$ – заданная плотность теплового потока через границу Γ_q .

Условия конвективного теплообмена (условия третьего рода):

$$\kappa^{ij} \nabla_j \vartheta n_i = \gamma(\vartheta - \vartheta_\infty), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_h. \quad (1.18)$$

где γ – коэффициент теплоотдачи на части границы Γ_h , ϑ_∞ – температура окружающей среды.

1.4. Одномерные нестационарные задачи термоупругости

Далее рассмотрим основные уравнения и соотношения термоупругости в случае одномерных задач по пространственным переменным. Положим, что все заданные и искомые функции зависят только от времени и от одной координаты x декартовой прямоугольной системы координат. При этом вектор перемещений имеет одну отличную от нуля компоненту $\mathbf{u} = (u(x, t), 0, 0)^T$. Все заданные и искомые функции зависят только от координаты $x \in [0, L]$ и времени t . Это приводит к следующим упрощениям:

- тензор напряжений σ^{ij} становится скаляром $\sigma = \sigma^{11}$ (все другие компоненты равны нулю);
- тензор деформаций ε_{ij} имеет только одну ненулевую компоненту $\varepsilon = \varepsilon_{11}$;
- Тензор температурных постоянных Λ^{ij} также сводится к одной независимой компоненте, так как нет поперечных температурных напряжений: $\Lambda = \Lambda^{11} = \frac{E\alpha_T}{1-2\nu}$, где E – модуль Юнга, α_T – коэффициент линейного температурного расширения, ν – коэффициент Пуассона;
- То же самое происходит и с тензором упругих постоянных C^{ijkl} , который в одномерном случае сводится к скаляру $C^{1111} = E$.

Запишем основные уравнения термоупругой среды в одномерной постановке.

Линейная одномерная теория термоупругости.

Уравнение движения

$$\rho \ddot{u} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{E\alpha_T}{1-2\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \rho F. \quad (1.19)$$

Уравнение теплопроводности

$$\rho c_\varepsilon \dot{\vartheta} = \kappa \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{T_0 E \alpha_T}{1 - 2\nu} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \rho Q. \quad (1.20)$$

Система уравнений (1.19), (1.20) дополняется начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x), \quad \vartheta|_{t=0} = \vartheta_0(x). \quad (1.21)$$

На границах $x = 0$ и $x = L$ могут быть наложены различные граничные условия.

Граничные условия для механических величин.

- Условия Дирихле (заданные перемещения):

$$u(0, t) = u_1(t), \quad u(L, t) = u_2(t). \quad (1.22)$$

- Условия Неймана (заданные поверхностные усилия):

$$\begin{aligned} \sigma(0, t) &= \sigma_1(t), \quad \sigma(L, t) = \sigma_2(t), \\ \sigma(x, t) &= E \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{E \alpha}{1 - 2\nu} \vartheta. \end{aligned} \quad (1.23)$$

- Смешанные условия (комбинация условий Дирихле и Неймана).

Граничные условия для температурного поля.

- Условия Дирихле (заданное приращение температуры):

$$\vartheta(0, t) = \vartheta_1(t), \quad \vartheta(L, t) = \vartheta_2(t). \quad (1.24)$$

- Условия Неймана (заданный тепловой поток):

$$-\kappa \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0} = q_1(t), \quad -\kappa \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=L} = q_2(t). \quad (1.25)$$

- Условия третьего рода (конвективный теплообмен):

$$-\kappa \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0, L} = \gamma(\vartheta - \vartheta_\infty) \quad (1.26)$$

где γ – коэффициент теплообмена, ϑ_∞ – температура окружающей среды.

Далее для проведения практических расчётов удобно ввести безразмерную систему величин (звёздочкой обозначены размерные параметры):

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{L}, \quad t = \frac{c_0 t^*}{L}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad u = \frac{u^*}{L}, \quad \vartheta = \frac{\vartheta^*}{T_0}, \quad \kappa = \frac{\kappa^*}{L \rho c c_\varepsilon}, \\ \alpha &= \frac{\alpha_T^* T_0}{1 - 2\nu}, \quad \beta = \frac{c^2}{c_\varepsilon} \frac{\alpha_T^*}{(1 - 2\nu)}, \quad F = \frac{F^* L}{c^2}, \quad Q = \frac{L Q^*}{T_0 c c_\varepsilon}, \quad \sigma = \frac{\sigma^*}{E}, \\ q &= \frac{q^*}{\kappa \rho c c_\varepsilon T_0}, \quad h = \frac{h^*}{\kappa \rho c c_\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Тогда в безразмерных величинах (1.27) система уравнений одномерной задачи связанной линейной термоупругости следующий вид.

Уравнение движения

$$\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + F. \quad (1.28)$$

Уравнение теплопроводности

$$\dot{\vartheta} = \kappa \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + Q. \quad (1.29)$$

Задача (1.28), (1.29) дополняется начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x), \quad \vartheta|_{t=0} = \vartheta_0(x). \quad (1.30)$$

Граничные условия (1.22)-(1.26) в безразмерной форме запишутся так.

Граничные условия для механических величин.

- Условия Дирихле (заданные перемещения):

$$u|_{x=0} = u_1(t), \quad u|_{x=1} = u_2(t). \quad (1.31)$$

где $u_1(t)$, $u_2(t)$ – заданные безразмерные функции времени.

- Условия Неймана (заданные поверхностные усилия):

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \vartheta \Big|_{x=0} = \sigma_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \vartheta \Big|_{x=1} = \sigma_2(t). \quad (1.32)$$

где $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ – заданные безразмерные функции времени.

- Смешанные условия (комбинация условий Дирихле и Неймана).

Граничные условия для температурного поля.

- Условия Дирихле (заданное приращение температуры):

$$\vartheta|_{x=0} = \vartheta_1(t), \quad \vartheta|_{x=1} = \vartheta_2(t). \quad (1.33)$$

где $\vartheta_1(t)$, $\vartheta_2(t)$ – заданные безразмерные функции времени.

- Условия Неймана (заданный тепловой поток):

$$-\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\bigg|_{x=0} = q_1(t), \quad -\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\bigg|_{x=1} = q_2(t). \quad (1.34)$$

где $q_1(t)$, $q_2(t)$ – заданные безразмерные функции времени.

- Условия третьего рода (конвективный теплообмен):

$$-\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\bigg|_{x=0,1} = \gamma(\vartheta - \vartheta_\infty). \quad (1.35)$$

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕСТЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

2.1. Традиционные аналитические и численные методы решения задач нестационарной термоупругости

В этом пункте даны основы некоторых аналитических и численных методов решения нестационарных задач термоупругости. В качестве инструмента для построения аналитических решений использован метод Фурье разделения переменных в сочетании с интегральным преобразованием Лапласа по времени. Для построения численных решений предлагается использовать метод конечных разностей, алгоритм которого также описан в этом пункте.

2.1.1. Метод Фурье и интегральное преобразование Лапласа

Метод Фурье разделения переменных и интегральное преобразование Лапласа по времени являются основой для построения точных решений задач нестационарной термоупругости.

Рассмотрим основные аспекты применения аналитических методов на примере задач одномерной линейной термоупругости [8].

Решение исходной задачи разыскивается в виде:

$$u(x,t)=V(x)W(t), \quad \vartheta(x,t)=\Phi(x)\Psi(t). \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в однородные уравнения (1.28) (1.29) после разделения первого из полученных уравнений на $V(x)W(t)$, а второго – на $\Phi(x)\Psi(t)$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{W}(t)}{W(t)} &= \frac{V''(x)}{V(x)} - \alpha \frac{\Phi'(x)\Psi(t)}{V(x)W(t)}, \\ \frac{\dot{\Psi}(t)}{\Psi(t)} &= \kappa \frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} - \beta \frac{V'(x)\dot{W}(t)}{\Phi(x)\Psi(t)}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Штрихом здесь и далее обозначены производные по пространственной переменной x , а точкой по времени t .

Очевидно, что уравнения (2.2) выполняются, в частности, когда их левые и правые части не зависят от переменных x и t :

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{W}(t)}{W(t)} &= \frac{V''(x)}{V(x)} - \alpha b \frac{\Phi'(x)}{V(x)} = -a^2, \\ \frac{\dot{\Psi}(t)}{\Psi(t)} &= \kappa \frac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} - \beta \frac{c}{b} \frac{V'(x)}{\Phi(x)} = -a^2\omega.\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$a = \text{const} > 0, \quad \omega = \text{const}, \quad \frac{\Psi(t)}{W(t)} = b = \text{const}, \quad \frac{\dot{W}(t)}{\Psi(t)} = \frac{c}{b} = \text{const}.\quad (2.4)$$

Введённые постоянные ω , b и c будут определены далее.

Из (2.3) следуют уравнения для определения собственных функций $V(x)$ и $\Phi(x)$:

$$\begin{aligned}V''(x) - \alpha b \Phi'(x) + a^2 V(x) &= 0, \\ \kappa \Phi''(x) - \beta \frac{c}{b} V'(x) + a^2 \omega \Phi(x) &= 0.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Решения (2.5) разыскиваются в виде:

$$V(x) = V^* e^{\varpi x}, \quad \Phi(x) = \Phi^* e^{\varpi x}.\quad (2.6)$$

Подстановка (2.6) в (2.5) приводит к однородной системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\varpi^2 V^* - \alpha b \varpi \Phi^* + a^2 V^* &= 0, \\ \kappa \varpi^2 \Phi^* - \beta \frac{c}{b} \varpi V^* + a^2 \omega \Phi^* &= 0.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Для существования нетривиальных решений системы (2.7) требуется равенство нулю её определителя, откуда следует характеристическое уравнение относительно ϖ :

$$\begin{vmatrix} \varpi^2 + a^2 & -\alpha b \varpi \\ -\beta \frac{c}{b} \varpi & \kappa \varpi^2 + a^2 \omega \end{vmatrix} = \kappa \varpi^4 + (a^2 \omega + a^2 \kappa - \alpha \beta c) \varpi^2 + a^4 \omega = 0. \quad (2.8)$$

Это уравнение не содержит постоянную b . Поэтому, не нарушая общности, можно положить $b=1$.

Решение (2.8) имеет вид

$$\begin{aligned} \varpi &= \sqrt{\frac{-[a^2(\omega + \kappa) - \alpha \beta c] + \sqrt{[a^2(\omega + \kappa) - \alpha \beta c]^2 - 4\kappa a^4 \omega}}{2\kappa}} = \\ &= a \sqrt{\frac{-[\omega + \kappa - \frac{\alpha \beta c}{a}] + \sqrt{[\omega + \kappa - \frac{\alpha \beta c}{a}]^2 - 4\kappa a^2 \omega}}{2\kappa a}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь учитывается, что квадратный корень имеет два значения.

Теперь рассмотрим вытекающие из (2.3) независимые временные уравнения

$$\ddot{W}(t) + a^2 W(t) = 0, \quad \dot{\Psi}(t) + a^2 \omega \Psi(t) = 0. \quad (2.10)$$

Их общие решения имеют вид:

$$W(t) = C_1 e^{iat} + C_2 e^{-iat}, \quad \Psi(t) = C e^{-a^2 \omega t}. \quad (2.11)$$

Поскольку $\frac{\Psi(t)}{W(t)} = b = 1$, то

$$C_1 e^{iat} + C_2 e^{-iat} = C e^{-a^2 \omega t}. \quad (2.12)$$

Это равенство выполняется, например, при следующих условиях:
 $C_1 = 0, C_2 = C, \omega = i/a$:

$$W(t) = \Psi(t) = C e^{-iat}. \quad (2.13)$$

Из (2.13) и равенства $\frac{\dot{W}(t)}{\Psi(t)} = c$ следует $c = -ia$.

Таким образом четыре корня характеристического уравнения определяются формулой:

$$\varpi = a \sqrt{\frac{-[a\kappa + i(1 + \alpha\beta)] + \sqrt{[a\kappa + i(1 + \alpha\beta)]^2 - 4ika}}{2ka}}. \quad (2.14)$$

Выражение (2.14) содержит неизвестный положительный параметр a (см. (2.3)). Для его определения необходимо привлечь однородные граничные условия (1.31)-(1.35) и получить соответствующую задачу Штурма-Лиувилля для поиска собственных значений и собственных функций. Отметим [8], что аналитическое решение этой задачи при произвольных граничных условиях наталкивается на существенные математические трудности. Наиболее просто решение задачи Штурма-Лиувилля можно получить при следующих типах граничных условий.

1. Условия в перемещениях и тепловых потоках.

При этом:

$$V|_{x=0} = 0, V|_{x=1} = 0, \Phi'|_{x=0} = 0, \Phi'|_{x=1} = 0. \quad (2.15)$$

2. Условия в усилиях и изменениях температуры:

$$(V' - \alpha\Phi)|_{x=0} = 0, (V' - \alpha\Phi)|_{x=1} = 0, \Phi|_{x=0} = 0, \Phi|_{x=1} = 0. \quad (2.16)$$

3. На одной границе заданы перемещения и тепловой поток, а на другой – внешняя нагрузка и изменение температуры:

$$V|_{x=0} = 0, \Phi'|_{x=0} = 0, (V' - \alpha\Phi)|_{x=1} = 0, \Phi|_{x=1} = 0, \quad (2.17)$$

или, если поменять границы $x=0$ и $x=1$ местами:

$$(V' - \alpha\Phi)|_{x=0} = 0, \Phi|_{x=0} = 0, V|_{x=1} = 0, \Phi'|_{x=1} = 0. \quad (2.18)$$

В этих случаях система собственных функций состоит из синусов и косинусов, а решения исходной задачи можно искать в виде рядов Фурье:

– в случае (2.15):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \lambda_n x, \quad \vartheta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n(t) \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n; \quad (2.19)$$

– в случае (2.16):

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos \lambda_n x, \quad \vartheta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(t) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n; \quad (2.20)$$

– в случае (2.17):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \lambda_n x, \quad \vartheta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(t) \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi \frac{2n-1}{2}; \quad (2.21)$$

– в случае (2.18):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cos \lambda_n x, \quad \vartheta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(t) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi \frac{2n-1}{2}. \quad (2.22)$$

Во всех остальных случаях решение соответствующих задач Штурма-Лиувилля крайне затруднительно. Поэтому в случаях граничных условий отличных от (2.15)-(2.18) более рациональным представляется выбор других аналитических методов, например применение интегрального преобразования Лапласа по времени с последующим решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений без использования метода Фурье или численных методов, например, метода конечных разностей.

Интегральное преобразование Лапласа по времени является эффективным инструментом, применяемым к решению различных нестационарных задач, поставленных как в уравнениях в частных производных, так и в обыкновенных дифференциальных уравнениях [8]. Его можно применять непосредственно к исходной математической постановке задачи, либо на этапе, следующим за этапом разделения переменных с помощью метода Фурье.

Продemonстрируем процесс решения задачи линейной связанной термоупругости с использованием аналитических методов на примере задачи с граничными условиями (2.15). Не умаляя общности, начальные условия примем нулевыми (в противном случае всегда имеется возможность сведения исходной задачи к нулевым начальным условиям):

$$\begin{aligned}
\ddot{u} &= u'' - \alpha \vartheta' + F(x, t), \quad \dot{\vartheta} = \kappa \vartheta'' - \beta \dot{u}' + Q(x, t); \\
u|_{t=0} &= 0, \quad \dot{u}|_{t=0} = 0, \quad \vartheta|_{t=0} = 0; \\
u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad \vartheta'|_{x=0} = 0, \quad \vartheta'|_{x=1} = 0,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

где $F(x, t)$, $Q(x, t)$ – заданные массовые силы и массовые источники тепла.

Для решения задачи (2.23) используем метод Фурье. Разложим все заданные и искомые функции в ряды (2.19)

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \lambda_n x, \quad \vartheta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n(t) \cos \lambda_n x, \\
F(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \lambda_n x, \quad Q(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) \cos \lambda_n x, \\
f_n(t) &= 2 \int_0^1 F(x, t) \sin \lambda_n x dx, \quad q_n(t) = 2 \int_0^1 Q(x, t) \sin \lambda_n x dx, \quad \lambda_n = \pi n.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Подставляя (2.24) в (2.23) приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в коэффициентах рядов Фурье:

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_n &= -\lambda_n^2 u_n + \alpha \lambda_n \vartheta_n + f_n, \quad \dot{\vartheta}_n = -\kappa \lambda_n^2 \vartheta_n - \beta \lambda_n \dot{u}_n + q_n; \\
u_n|_{t=0} &= 0, \quad \dot{u}_n|_{t=0} = 0, \quad \vartheta_n|_{t=0} = 0.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Применяя интегральное преобразование Лапласа по времени (s – параметр этого преобразования), приходим к системе алгебраических уравнений относительно изображений по Лапласу коэффициентов рядов Фурье (верхний знак « L » у функции здесь и далее означает её изображение по Лапласу):

$$(s^2 + \lambda_n^2) u_n^L - \alpha \lambda_n \vartheta_n^L = f_n^L, \quad \beta s \lambda_n u_n^L + (s + \kappa \lambda_n^2) \vartheta_n^L = q_n^L, \tag{2.26}$$

решение которой имеет вид:

$$u_n^L = \frac{f_n^L (s + \kappa \lambda_n^2) + \alpha \lambda_n q_n^L}{(s^2 + \lambda_n^2)(s + \kappa \lambda_n^2) + \alpha \lambda_n \beta s \lambda_n}, \quad \vartheta_n^L = \frac{q_n^L - \beta s \lambda_n u_n^L}{s + \kappa \lambda_n^2}. \tag{2.27}$$

Как правило, аналитическое обращение интегрального преобразования Лапласа в подобных задачах не составляет большого труда и может быть

выполнено с помощью теории вычетов или с использованием таблиц интегральных преобразований [8].

В случае ненулевых начальных и/или граничных условий в наиболее простых случаях целесообразно провести редукцию задачи к однородным начальным и граничным условиям. В общем же случае можно поступить следующим образом.

Допустим, в постановке (2.23) начальные и граничные условия неоднородные:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' - \alpha \vartheta' + F(x, t), \quad \dot{\vartheta} = \kappa \vartheta'' - \beta \dot{u}' + Q(x, t); \\ u|_{t=0} &= U_0(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = V_0(x), \quad \vartheta|_{t=0} = \Theta_0(x); \\ u|_{x=0} &= U_1(t), \quad u|_{x=1} = U_2(t), \quad -\vartheta'|_{x=0} = \Theta_1(t), \quad -\vartheta'|_{x=1} = \Theta_2(t). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Сначала применим интегральное преобразование Лапласа по времени. Тем самым приведём задачу (2.28) к граничной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} s^2 u^L &= u''^L - \alpha \vartheta'^L + \tilde{F}^L(x, s), \quad s \vartheta^L = \kappa \vartheta''^L - \beta s u'^L + \tilde{Q}^L(x, t); \\ u^L|_{x=0} &= U_1^L(t), \quad u^L|_{x=1} = U_2^L(t), \quad -\vartheta'^L|_{x=0} = \Theta_1^L(t), \quad -\vartheta'^L|_{x=1} = \Theta_2^L(t); \\ \tilde{F}^L(x, s) &= F^L(x, s) + s u_0(x) + v_0(x), \quad \tilde{Q}^L(x, t) = Q(x, t) + \vartheta_0(x). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Умножим первое уравнение в (2.29) на $\sin \lambda_n x$, второе на $\cos \lambda_n x$ и проинтегрируем от 0 до 1. Интегралы, в которых содержатся производные функций преобразуем с помощью формулы интегрирования по частям и учтём граничные условия:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u''^L \sin \lambda_n x dx &= \cancel{u'^L \sin \lambda_n x|_0^1} - \lambda_n \int_0^1 u'^L \cos \lambda_n x dx = -\lambda_n \left(u^L \cos \lambda_n x|_0^1 + \lambda_n \int_0^1 u^L \sin \lambda_n x dx \right) = \\ &= -\lambda_n (-1)^n u^L|_{x=1} + \lambda_n u^L|_{x=0} - \frac{\lambda_n^2}{2} u_n^L = \lambda_n \left[(-1)^{n+1} U_2^L(s) + U_1^L(s) \right] - \frac{\lambda_n^2}{2} u_n^L, \\ \int_0^1 u'^L \cos \lambda_n x dx &= u^L \cos \lambda_n x|_0^1 + \frac{\lambda_n}{2} \int_0^1 u^L \sin \lambda_n x dx = (-1)^{n+1} U_2^L(s) + U_1^L(s) + \frac{\lambda_n}{2} u_n^L, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \mathfrak{Y}''^L \cos \lambda_n x dx = \mathfrak{Y}'^L \cos \lambda_n x \Big|_0^1 + \lambda_n \int_0^1 \mathfrak{Y}'^L \sin \lambda_n x dx = \\
& = (-1)^{n+2} q_2(t) - q_1(t) + \lambda_n \left[\cancel{\mathfrak{Y}^L \sin \lambda_n x \Big|_0^1} - \lambda_n \int_0^1 \mathfrak{Y}^L \cos \lambda_n x dx \right] = (-1)^{n+2} \Theta_2^L(s) - \Theta_1^L(s) - \frac{\lambda_n^2}{2} \mathfrak{Y}_n^L, \\
& \int_0^1 \mathfrak{Y}'^L \sin \lambda_n x dx = \cancel{\mathfrak{Y}^L \sin \lambda_n x \Big|_0^1} - \lambda_n \int_0^1 \mathfrak{Y}^L \cos \lambda_n x dx = -\lambda_n \mathfrak{Y}_n^L.
\end{aligned}$$

В результате получим систему алгебраических уравнений относительно изображений коэффициентов рядов (2.24):

$$\left(s^2 + \frac{\lambda_n^2}{2} \right) u_n^L - \alpha \lambda_n \mathfrak{Y}_n^L = F_n^L, \quad \beta s \frac{\lambda_n}{2} u_n^L + \left(s + \kappa \frac{\lambda_n^2}{2} \right) \mathfrak{Y}_n^L = Q_n^L; \quad (2.30)$$

$$F_n^L(s) = \int_0^1 \tilde{F}^L(x, s) \sin \lambda_n x dx + \lambda_n \left[(-1)^{n+1} U_2^L + U_1^L \right],$$

$$Q_n^L(s) = \int_0^1 \tilde{Q}^L(x, s) \cos \lambda_n x dx + \kappa \left[(-1)^{n+2} \Theta_2^L(s) - \Theta_1^L(s) \right] - \beta s \left[(-1)^{n+1} U_2^L(s) + U_1^L(s) \right].$$

Решая (2.30), находим изображения u_n^L , $\mathfrak{Y}_n^L$, а затем, с использованием теории вычетов, таблиц интегральных преобразований и теоремы о свёртке для преобразования Лапласа находим оригиналы.

Аналогичным образом можно построить решения задач с граничными условиями (2.16)-(2.18)

Отметим, что наиболее универсальным способом решения подобных задач является метод функций влияния (функций Грина) [8]. По сути, метод решения задач о функциях влияния совпадает с изложенным выше, но является более алгоритмичным и позволяет построить общее решение исходной задачи в квадратурах.

2.1.2. Метод конечных разностей

Среди разнообразия численных подходов к решению уравнений механики деформируемого твёрдого тела (в т.ч. связанной термоупругости) метод конечных разностей (МКР) является естественным выбором для областей простой геометрии и регулярных сеток. В рассматриваемом классе задач (одномерный стержень, слой или прямоугольная область, гладкие коэффициенты, стандартные граничные условия Дирихле/Неймана) МКР обеспечивает минимальные затраты реализации при гарантированной второй порядковой точности по пространству и прозрачной интерпретации аппроксимаций.

Можно указать на следующие преимущества МКР применительно к выбранному классу задач.

- Простота и прозрачность. Все операции — локальные линейные комбинации ближайших узлов; легко контролировать порядок точности и проводить апостериорную проверку сходимости.

- Применение простых алгоритмов решения задач линейной алгебры. В одномерном случае задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) со строго трёхдиагональной матрицей, решаемая прямыми методами; в 2D матрица системы имеет блочно-трёхдиагональную структуру. При этом можно воспользоваться известными эффективными алгоритмами.

- Энергетическая корректность. При симметричном построении операторов разностная схема наследует непрерывные балансы энергии для механической и температурной подсистем.

- Естественная работа со стандартными краевыми условиями. Условия Дирихле задаются непосредственно; условия Неймана — либо с помощью фиктивных узлов, либо односторонними шаблонами без ухудшения точности; периодические условия реализуются тривиально.

- Производительность. Регулярные сетки отлично векторизуются и распараллеливаются при вычислениях (SIMD, многопоточность, GPU). При этом единый шаблон для каждой внутренней точки облегчает оптимизацию.

- Гибкость порядка точности. При необходимости легко поднять порядок по пространству (шаблоны 4/6-го порядка) без изменения общей архитектуры кода.

Сопоставление с методом конечных элементов (МКЭ).

МКЭ универсален и предпочтителен при сложной геометрии, криволинейных границах, локальной адаптации сетки. Однако для *регулярных областей* (отрезок/прямоугольник), как в задачах диссертационного исследования, МКР имеет ряд практических преимуществ. Среди них:

- низкие расходы вычислительных ресурсов и памяти компьютера. Не требуются генерация и хранение сетки КЭ, интегрирование по элементам, сборка больших разреженных матриц глобальной системы;

- простая матрица оператора. В 1D — строгая трёхдиагональность без «хвостов» разреженности и без дополнительных степеней свободы (как у высоких порядков КЭ);

- сопоставимая точность на регулярных сетках: центральные разности второго порядка дают ту же асимптотику, что и линейные элементы МКЭ, при меньшей константе стоимости на степень свободы.

Оговорим ограничение: при сложной геометрии и локальных особенностях (трещины, острые углы) такие методы, как МКЭ или метод конечных объёмов становятся более подходящими. В данной работе таких сложностей нет, поэтому выбирается МКР.

Приведём пример построения разностной схемы для решения задачи линейной теории термоупругости.

Рассматривается связанная система уравнений линейной термоупругости (2.28) с соответствующими граничными и начальными

условиями на отрезке $x \in (0,1)$.

Построим численное решение $u(x,t)$, $\vartheta(x,t)$ методом прямых (MoL). Для этого проведём дискретизацию по пространству с помощью конечных разностей. Затем к полученной системе обыкновенных дифференциальных уравнений применим численное или аналитическое интегрирование по времени. В работе в качестве инструмента интегрирования по времени выбран метод Рунге-Кутты 4го порядка точности (RK-4).

Разобьём отрезок $x \in [0,1]$ равномерной сеткой

$$x_i = i\Delta_x, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad \Delta_x = \frac{1}{N}. \quad (2.31)$$

Введём следующие обозначения для сеточных приближений искомых функций

$$u_i(t) \approx u(x_i, t), \quad \theta_i(t) \approx \vartheta(x_i, t). \quad (2.32)$$

Для внутренних узлов $i = 1, \dots, N-1$ используем центральные разности второго порядка точности $O(h^2)$:

$$\begin{aligned} u''(x_i, t) &\approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta_x^2}, \quad \vartheta''(x_i, t) \approx \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta_x^2}, \\ \vartheta'(x_i, t) &\approx \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta_x}, \quad \dot{u}'(x_i, t) \approx \frac{\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_{i-1}}{2\Delta_x}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Из граничных условий в перемещениях имеем:

$$u_0(t) = U_1(t), \quad u_N(t) = U_2(t), \quad (2.34)$$

Эти значения используем во всех формулах, где участвуют u_0 , u_N . Для производной $(\dot{u})' = v'$ используются $v_0(t) = \dot{U}_1(t)$, $v_N(t) = \dot{U}_2(t)$ (при необходимости — численно дифференцируются U_1, U_2 по времени).

Для реализации граничных условий в тепловых потоках используем фиктивные узлы $\theta_{-1}, \theta_{N+1}$, чтобы сохранить центральные аппроксимации у крайних внутренних узлов:

$$\begin{aligned}
-\frac{\theta_1 - \theta_{-1}}{2\Delta_x} &= \Theta_1(t) \Rightarrow \theta_{-1} = \theta_1 + 2\Delta_x \Theta_1(t), \\
-\frac{\theta_{N+1} - \theta_{N-1}}{2\Delta_x} &= \Theta_2(t) \Rightarrow \theta_{N+1} = \theta_{N-1} - 2\Delta_x \Theta_2(t).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Из (2.35) следуют замкнутые формулы в крайних внутренних узлах:

$$g'_1 \approx \frac{\theta_2 - \theta_{-1}}{2\Delta_x} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\Delta_x} - \Theta_1(t), \quad g''_1 \approx \frac{\theta_2 - 2\theta_1 + \theta_{-1}}{\Delta_x^2} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta_x^2} + \frac{2}{\Delta_x} \Theta_1(t), \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
g'_{N-1} &\approx \frac{\theta_{N+1} - \theta_{N-2}}{2\Delta_x} = \frac{\theta_{N-1} - \theta_{N-2}}{2\Delta_x} - \Theta_2(t), \\
g''_{N-1} &\approx \frac{\theta_{N+1} - 2\theta_{N-1} + \theta_{N-2}}{\Delta_x^2} = \frac{\theta_{N-2} - \theta_{N-1}}{\Delta_x^2} - \frac{2}{\Delta_x} \Theta_2(t).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Далее для понижения порядка уравнений по времени, вводим узловую скорость $v_i(t) = \dot{u}_i(t)$. Тогда для $i = 1, \dots, N-1$ получаем полу-дискретную систему ОДУ:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_i &= v_i, \\
\dot{v}_i &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta_x^2} - \alpha \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta_x} + F_i(t), \\
\dot{\theta}_i &= \kappa \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta_x^2} - \beta \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta_x} + Q_i(t),
\end{aligned} \tag{2.38}$$

где $F_i(t) = F(x_i, t)$, $Q_i(t) = Q(x_i, t)$.

В строках $i = 1$ и $i = N-1$ вместо внешних значений используются подстановки (2.34) и (2.35) (а также $v_0 = \dot{U}_1$, $v_N = \dot{U}_2$), что приводит к формам (2.36)-(2.37).

Начальные условия на сетке:

$$u_i(0) = U_0(x_i), \quad v_i(0) = V_0(x_i), \quad \theta_i(0) = \Theta_0(x_i), \quad i = 1, \dots, N-1. \tag{2.39}$$

Далее проводится интегрирование по времени по методу Рунге–Кутты 4-го порядка (RK4). Для этого соберём вектор неизвестных $\mathbf{y}(t) = [\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{q}(t)]^T$, где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{N-1})^T$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{N-1})^T$, $\mathbf{q} = (\theta_1, \dots, \theta_{N-1})^T$.

Система (2.38) записывается в векторной форме $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}(t, \mathbf{y})$. Пусть $t^{n+1} = t^n + \Delta_t$, где Δ_t – шаг по времени, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Один шаг метода RK4:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{R}(t^n, \mathbf{y}^n), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{R}\left(t^n + \frac{\Delta_t}{2}, \mathbf{y}^n + \frac{\Delta_t}{2} \mathbf{k}_1\right), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{R}\left(t^n + \frac{\Delta_t}{2}, \mathbf{y}^n + \frac{\Delta_t}{2} \mathbf{k}_2\right), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{R}(t^n + \Delta_t, \mathbf{y}^n + \Delta_t \mathbf{k}_3), \\ \mathbf{y}^{n+1} &= \mathbf{y}^n + \frac{\Delta_t}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4). \end{aligned} \quad (2.40)$$

При вычислении $\mathbf{k}_j$ на каждом шаге по времени с номером n в правых частях $\mathbf{R}$ учитываются граничные представления (2.34)-(2.37).

Поскольку построенная разностная схема относится к типу явных разностных схем, для обеспечения сходимости требуется выполнение стандартных критериев Куранта-Фридрихса-Леви (CFL-ограничения):

– критерий сходимости разностной схемы для управления движением

$$\Delta_t \leq C_1 \Delta_x, \quad (2.41)$$

– критерий сходимости разностной схемы для управления теплопроводности:

$$\Delta_t \leq C_2 \frac{\Delta_x^2}{\kappa}. \quad (2.42)$$

Практически берут

$$\Delta_t = \min\{C_1 \Delta_x, C_2 \Delta_x^2 / \kappa\} \quad (2.43)$$

с коэффициентами запаса (обычно для RK4 принимается $C_1 \in [0.3, 0.6]$,

$$C_2 \approx \frac{1}{4\sqrt{3}}).$$

Итоговая реализация предложенного численного алгоритма состоит из следующих шагов:

1. Построение сетки $x_i = i\Delta_t$, задание шага Δ_x .
2. Инициализация внутренних узлов по (2.33).
3. Для каждого шага времени и на каждой стадии RK4:
 - (a) задание $u_0 = U_1(t)$, $u_N = U_2(t)$, $v_0 = \dot{U}_1(t)$, $v_N = \dot{U}_2(t)$;
 - (b) формирование фиктивных узлов (2.35) для θ ;
 - (c) вычисление конечных разностей (2.33) во внутренних узлах (с учётом конечно-разностных аппроксимаций краевых условий);
 - (d) формирование правых частей (2.38) и выполнение шага метода Рунге-Кутты (2.40).
4. Повторение пунктов 1-3 до достижения заданного конечного времени.

Построенный алгоритм основан на классическом методе прямых: производные по пространственной переменной аппроксимируются центральными разностями 2-го порядка (с корректной реализацией условий Неймана через фиктивные узлы), интегрирование по времени проводится по надёжной явной схеме Рунге–Кутты с естественными CFL-ограничениями.

Отметим некоторые преимущества метода прямых перед традиционным методом конечных разностей.

Универсальность: один и тот же «каркас» можно использовать с любыми интеграторами по времени.

Гибкость: можно выбрать оптимальный метод интегрирования по времени под конкретную задачу (жёсткие/нежёсткие системы, адаптивные шаги).

Точность: возможность использования высокопорядковых схем по времени без сложного вывода многомерных разностных аппроксимаций.

Прозрачность реализации: разделение задачи на два этапа – аппроксимация по пространству и решение системы ОДУ.

Численная устойчивость: устойчивость контролируется через CFL-условия или адаптивный выбор шага, а не через жёсткую привязку схемы

(устойчивость зависит не от конкретной разностной схемы по PDE, а от выбранного интегратора по времени).

Расширяемость: легко применять к многомерным задачам и системам уравнений (механика, теплопроводность, гидродинамика).

2.2. Метод решения, основанный на технологии глубокого машинного обучения

Метод решения задач с использованием технологий глубокого машинного обучения (ГМО) основан на применении физически информированных нейронных сетей (PINN), которые способны эффективно аппроксимировать решения сложных уравнений математической физики. Важным преимуществом этого подхода является интеграция физических законов в архитектуру нейронных сетей, что позволяет решать как прямые, так и обратные задачи, минимизируя ошибки аппроксимации и оптимизации.

Физически информированные нейронные сети (PINN) используют систему дифференциальных уравнений в качестве основного ограничения, вследствие чего процесс обучения модели эквивалентен решению задачи математической физики. Такой подход позволяет отказаться от явной сеточной аппроксимации, характерной для традиционных численных методов, и тем самым обеспечивает компактность и универсальность вычислительных алгоритмов.

Ключевым преимуществом метода является его универсальность: один и тот же программный код, при минимальных модификациях, может быть применён как для решения прямых задач, так и для постановок обратных задач. Особенно важно, что PINN демонстрируют устойчивость при работе с экспериментальными данными, содержащими погрешности, в то время как классические численные методы нередко теряют стабильность.

Дополнительным достоинством является адаптивность технологии к задачам с переменными физическими параметрами, сложной геометрией или высокой размерностью. Благодаря интеграции физических законов в архитектуру модели, PINN обеспечивают более корректное описание процессов по сравнению с чисто эмпирическими подходами машинного обучения. Это делает данный метод перспективным инструментом для

исследования широкого спектра задач механики деформируемого твёрдого тела, термомеханики и смежных областей.

Современные методы глубокого машинного обучения базируются на универсальной аппроксимационной способности нейронных сетей, позволяющих приближать сложные нелинейные зависимости с высокой точностью. Однако применение стандартных архитектур в задачах математической физики сопряжено с рядом трудностей, связанных с необходимостью соблюдения фундаментальных физических законов. Решение этой проблемы обеспечивают физически информированные нейронные сети (Physics-Informed Neural Networks, PINN), в которых физическая модель интегрируется в процесс обучения через специально построенную функцию потерь [21, 24, 68, 71, 94, 130, 133, 135].

Идея PINN заключается в том, что аппроксимация искомого решения задачи математической физики осуществляется нейронной сетью (или ансамблем сетей), где входными параметрами выступают пространственные координаты и время, а выходными — искомые физические величины (например, перемещения, напряжения или приращение температуры). Функция потерь в данном случае состоит из нескольких компонент:

- физико-математические ограничения (Physics Loss) — невязки исходных уравнений в частных производных (PDE), определяющих физическую модель;
- начальные и граничные условия (Initial/Boundary Loss) — отклонения от заданных условий на границах и в начальный момент времени;
- данные (Data Loss) — ошибки аппроксимации по экспериментальным или численным данным.

Отметим, что наличие всех трёх перечисленных составляющих функции потерь необязательно. Например, при решении прямых задач достаточно обойтись строгой математической постановкой, состоящей из уравнений, начальных и граничных условий. При решении обратных задач

дополнительно привлекаются ограничения, накладываемые третьим пунктом (Data Loss).

Таким образом, обучение PINN эквивалентно решению задачи математической оптимизации, при которой минимизируется совокупная невязка исходной математической постановки. В отличие от традиционных численных методов (метода конечных разностей, конечных элементов и др.), PINN не требует явной дискретизации пространства и времени, а решение состоит в поиске непрерывного представления (аппроксимации), задаваемого нейросетью. Это позволяет значительно сократить вычислительные затраты при увеличении размерности задачи и избежать эффекта «проклятия размерности», присущего сеточным методам. Это означает следующее.

В традиционных численных методах, например, в методе конечных разностей (МКР) или конечных элементов (МКЭ), пространство и время разбиваются на сетку: $x_i = i\Delta x$, $t_j = j\Delta t$. Решение вычисляется только в узлах сетки. Чтобы получить значения в других точках, приходится проводить интерполяцию на основе полученных узловых значений. Увеличение размерности задачи приводит к экспоненциальному росту числа узлов (так называемое «проклятие размерности»).

В методе PINN решение аппроксимируется нейронной сетью, например $u(x, t) \approx \mathcal{N}_u(x, t; \theta_u)$ (здесь и далее символом « $\mathcal{N}$ » будем обозначать нейросетевую аппроксимацию функции, θ_u — множество внутренних обучаемых переменных нейронной сети: веса и смещения). Эта сеть — непрерывная и гладкая функция от переменных x , t . Она может быть дифференцируема столько раз, сколько позволяют функции активации (например гиперболический тангенс $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$). Проверка выполнения уравнения и условий проводится в *наборах точек коллокации*, которые можно выбирать случайно и даже менять в процессе обучения. Это не сетка в классическом смысле, а всего лишь выборка точек для контроля

невязок. В результате мы получаем аналитически заданную аппроксимацию искомого решения $u(x, t)$ на всей области, а не только в узлах сетки.

Применение PINN особенно эффективно в задачах со сложными физическими параметрами, изменяющимися во времени и пространстве, при рассмотрении многослойных или анизотропных материалов, а также в задачах высокой размерности. Благодаря интеграции физических законов в архитектуру нейронной сети обеспечивается корректность получаемых решений и их согласованность с фундаментальными принципами механики и термодинамики.

В результате физически информированные нейронные сети выступают в качестве мощного и универсального инструмента математического моделирования, объединяющего преимущества глубокого обучения и строгих физических моделей. Их применение открывает новые возможности в исследовании задач механики деформируемого твёрдого тела, термомеханики, теплофизики, гидродинамики и смежных дисциплин.

Ниже представим алгоритм решения прямых нестационарных задач термоупругости с применением технологии PINN на примере математической постановки задачи, представленной формулами (2.28).

Опишем основные шаги метода PINN на примере задачи (2.28).

Алгоритм решения нестационарных задач с помощью PINN состоит из нескольких ключевых этапов.

1. *Построение нейросетевых аппроксимаций.* В данной работе применяется раздельная аппроксимация перемещения $u(x, t)$ и приращения температуры $\vartheta(x, t)$ с использованием двух независимых нейронных сетей [12]:

$$u(x, t) \approx \mathcal{N}_u(x, t; \theta_u), \quad \vartheta(x, t) \approx \mathcal{N}_\vartheta(x, t; \theta_\vartheta), \quad (2.44)$$

где θ_u и θ_ϑ – множества обучаемых переменных (весов и сдвигов) соответствующих сетей.

Наряду с предложенным подходом отметим, что существует возможность построения единой нейросетевой аппроксимации с несколькими выходами, позволяющей одновременно восстанавливать как поле перемещений $u(x,t)$, так и температурное поле $\vartheta(x,t)$. Такой вариант обладает несомненной компактностью и удобством реализации, однако предложенный выше подход, основанный на использовании отдельных аппроксимаций для каждой функции, имеет ряд существенных преимуществ. Отметим некоторые наиболее значимые из них.

1. Гибкость архитектуры. Каждая сеть может быть построена с учётом специфики аппроксимируемой функции: различная глубина, число нейронов, функции активации и регуляризация позволяют лучше адаптироваться к особенностям механических и тепловых полей.

2. Независимый контроль обучения. Процесс оптимизации можно вести отдельно для каждой сети, что облегчает диагностику и позволяет при необходимости фиксировать параметры одной аппроксимации, продолжая обучение другой.

3. Повышенная устойчивость. Разделение сетей снижает риск «конфликта интересов» при обучении, возникающего из-за различий в масштабах изменения искомых функций (например, различия в амплитуде колебаний или в характерных временах релаксации).

4. Вариативность методов оптимизации. Для разных физических полей можно применять различные алгоритмы оптимизации и стратегии подбора шага обучения, что расширяет возможности настройки.

5. Удобство решения обратных задач. При идентификации параметров среды или восстановлении нагрузок можно регулировать сложность и регуляризацию одной сети независимо от другой, повышая устойчивость метода к зашумлённым данным и некорректности постановки.

Нейронная сеть может рассматриваться как *аналитическая функция многих переменных*, построенная на композиции простых элементарных функций. При этом следует различать входные переменные (пространственные координаты и время: x, t), которые являются «не обучаемыми», неизменными, фиксированными. И внутренние «обучаемые» переменные (веса и сдвиги, обозначенные множествами θ_u и θ_s), которые способны изменяться в процессе «обучения» (математической оптимизации).

Таким образом, нейросетевая аппроксимация может быть интерпретирована как многоуровневая сложная аналитическая функция, где элементарные функции (функции активации) объединяются в композиции, создавая приближение к искомому решению с практически произвольной точностью.

Такой подход позволяет рассматривать PINN как разновидность обобщённого метода аппроксимации, в котором вместо явного построения базиса (например, как в методах Бубнова-Галёркина или спектральных методах) используется параметрически настраиваемая нелинейная функция.

Основными строительными блоками такой аппроксимации являются математические нейроны. Каждый математический нейрон представляет собой нелинейную функцию, включающую два последовательных этапа преобразования. На первом этапе выполняется *аффинное преобразование* вектора входных переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{N_{ki}})^T$:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{w}_i^k, b_i^k) = \sum_{j=1}^{N_{ki}} x_j w_{ij}^k + b_i^k, \quad (2.45)$$

где $\mathbf{w}_i^k = (w_{i1}^k, w_{i2}^k, \dots, w_{iN_{ki}}^k)^T$ – вектор весов нейронных связей, b_i^k – смещение (сдвиг, биас). На втором этапе осуществляется *нелинейное преобразование* при помощи функции активации $\phi_{ki}(H)$: (рис. 2.1).

Математические нейроны объединяются в *слои*, а совокупность таких слоёв образует *нейронную сеть* (рис. 2.1). Каждый математический нейрон

содержит внутренние переменные (обучаемые параметры), к которым относятся веса w_{ij}^k (определяющие силу связи между нейронами) и сдвиги b_i^k в нейронах.

Совокупность всех весов сети можно записать в виде трёхмерного массива:

$$\mathbf{W} = (w_{ij}^k), \quad (2.46)$$

где k – номер слоя, $i = \overline{1, M_k}$ – номер нейрона в k -том слое, $j = \overline{1, N_{ki}}$ – номер входа в i -тый нейрон k -того слоя

Совокупность всех сдвигов образует матрицу смещений:

$$\mathbf{B} = (b_i^k) \quad (2.47)$$

Множество обучаемых переменных – это объединение массива весов нейронных связей и матрицы сдвигов:

$$\theta_u = \mathbf{W}_u \cup \mathbf{B}_u, \quad (2.48)$$

здесь индекс « u » (или « ϑ ») обозначает какой функции (перемещению или приращению температуры) соответствует аппроксимация.

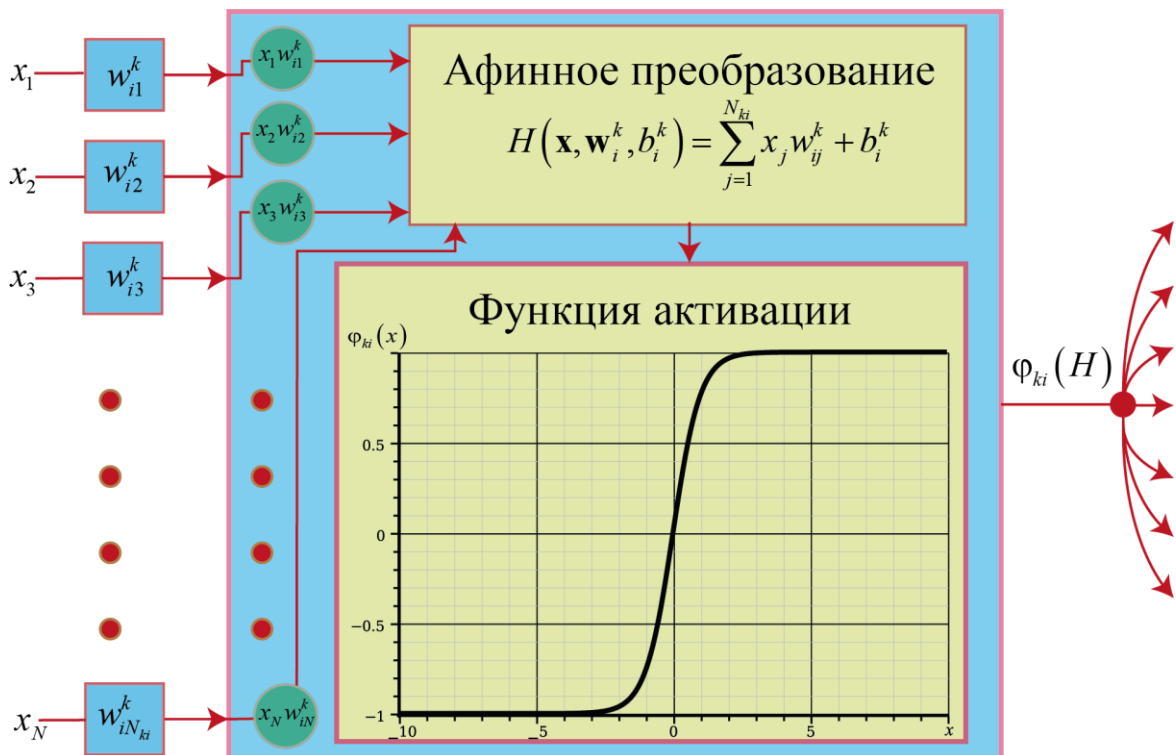


Рис 2.1. Математический (искусственный) нейрон.

Представленная на рисунке 2.2 математическая структура является типичной полносвязной нейросетевой аппроксимацией (глубокой нейронной сетью), используемой в данной диссертационной работе для решения поставленных задач.

Нейронная сеть состоит из следующих элементов:

- входной слой, содержащий два нейрона, которые принимают значения пространственной координаты x и времени t . Этот слой не содержит обучаемых параметров и выполняет роль передачи исходных данных;
- внутренние (скрытые) слои, каждый из которых включает определённое количество нейронов. Нейроны скрытых слоёв обладают обучаемыми параметрами – весами связей w_{ij}^k и смещениями b_i^k . За счёт нелинейных функций активации они обеспечивают возможность аппроксимации сложных зависимостей. Количество внутренних слоёв и нейронов в каждом слое может варьироваться и зависит от сложности решаемой задачи;
- выходной слой, содержащий один нейрон, значение которого соответствует аппроксимированному значению искомой функции. В представленном случае выход нейросети интерпретируется как приближение перемещения $u(x, t)$.

Таким образом, сеть реализует отображение

$$(x, t) \rightarrow \mathcal{N}_u(x, t; \theta_u) \approx u(x, t), \quad (2.49)$$

где аппроксимация осуществляется за счёт оптимизации обучаемых параметров внутренних слоёв.

Аналогичную структуру имеет нейросетевая аппроксимация функции приращения температуры:

$$(x, t) \rightarrow \mathcal{N}_\vartheta(x, t; \theta_\vartheta) \approx \vartheta(x, t). \quad (2.50)$$

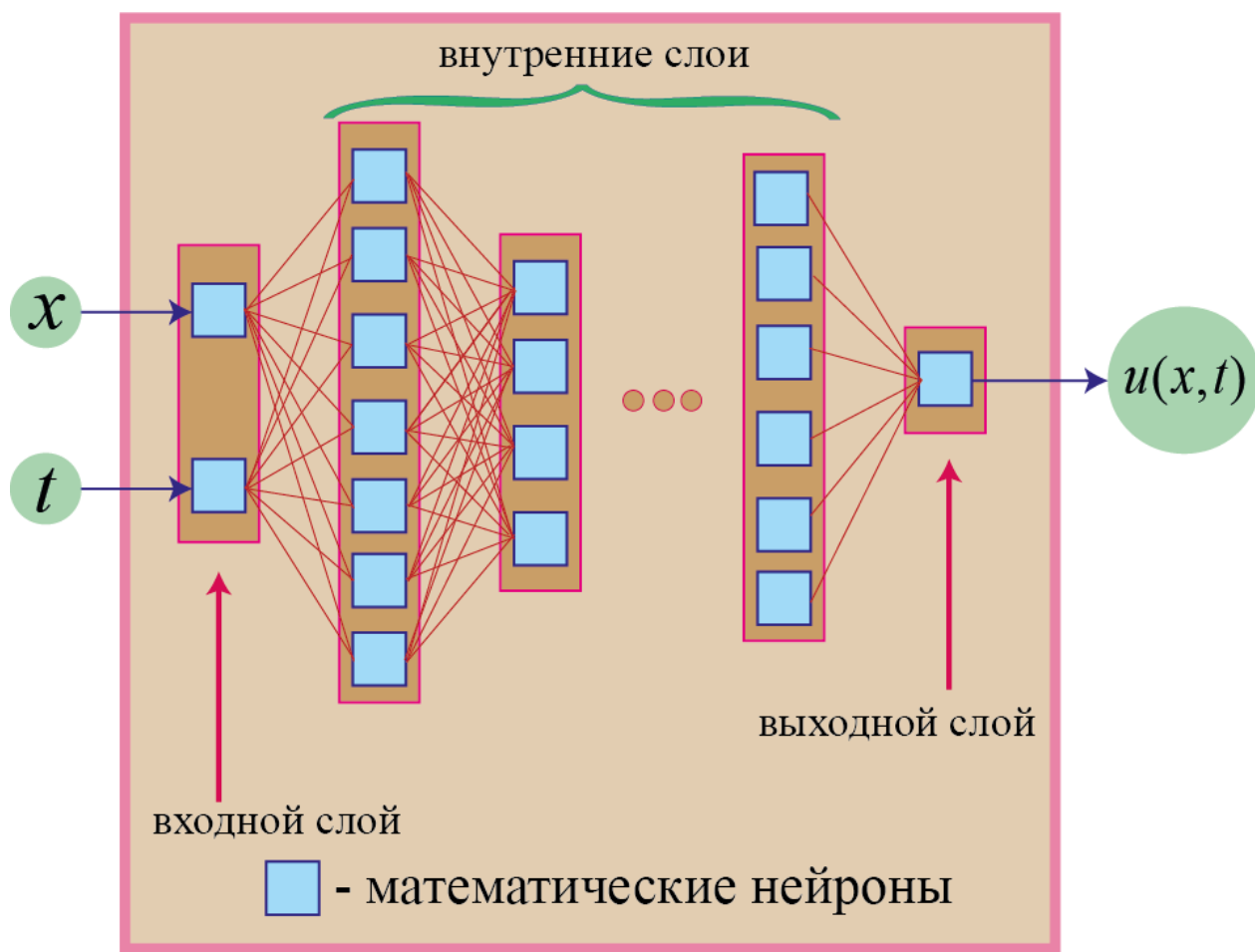


Рис 2.2. Нейронная сеть.

2. Определение функции потерь и множества точек коллокации.

При решении физико-математических задач методами глубокого машинного обучения, исходной задаче ставится в соответствие эквивалентная задача математической оптимизации. А именно, задача о поиске минимума целевой функции. Целевая функция представляет собой сумму норм невязок всех уравнений и соотношений, составляющих математическую постановку задачи. Следуя устоявшейся терминологии в области глубокого машинного обучения, целевую функцию будем называть функцией потерь. Она представляет собой однозначную функцию многих переменных. Этими переменными являются веса и сдвиги нейронной сети (обучаемые переменные). Отметим, что количество обучаемых переменных зависит не только от числа нейронов в сети, но и от числа связей между

нейронами. Поэтому число обучаемых переменных в глубоких нейронных сетях обычно значительно превышает число нейронов.

Таким образом, суть метода PINN состоит в том, что исходной начально-краевой задаче ставится в соответствие задача математической оптимизации, состоящая в поиске минимума функции потерь (невязки по уравнениям, начальным и граничным условиям) на объединённом множестве $\theta_u \cup \theta_g$ обучаемых переменных нейронных сетей $\mathcal{N}_u(x, t; \theta_u)$ и $\mathcal{N}_g(x, t; \theta_g)$ в точках коллокации.

Для этого вводятся следующие множества точек:

– внутренние точки (коллокации): множество $\Omega_r = \{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{N_r} \subset \Omega \times (0, t_{\max})$, где вычисляется невязка по уравнениям в частных производных (N_r – число внутренних точек коллокации, $t_{\max}$ – конечный момент времени);

– начальные точки: множество $\Omega_0 = \{(x_j, 0)\}_{j=1}^{N_0} \subset \Omega \times \{0\}$ для соблюдения начальных условий (N_0 – число начальных точек коллокации);

– граничные точки: множество $\Omega_b = \{(x_b, t_k)\}_{k=1}^{N_b}$, где $x_b = 0$ или $x_b = 1$, для применения граничных условий (N_b – число граничных точек коллокации).

В работе предложены следующие методы и алгоритмы генерации точек коллокации: равномерное распределение, модифицированное чебышёвское (косинусное) преобразование с параметром, степенное преобразование.

Исходно вводятся равномерные параметризации $u, v \in [0, 1]$ для пространства и времени: $u_i = \frac{i}{N_x - 1}$ ($i = 0, \dots, N_x - 1$), $v_j = \frac{j}{N_t - 1}$ ($j = 0, \dots, N_t - 1$). Далее задаются монотонные отображения плотности $f_x : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ и выполняется масштабирование внутрь физической области с малым отступом ε :

$$x = \varepsilon + (1 - 2\varepsilon) f_x(u), \quad t = t_{\min} + \varepsilon + (t_{\max} - t_{\min} - 2\varepsilon) f_t(v).$$

Отступ ε необходим, чтобы (i) исключить углы $(0, t_{\min})$, $(1, t_{\min})$ из одновременного попадания в множества Ω_0 и Ω_b , (ii) стабилизировать автодифференцирование производных у «жёсткой» границы, (iii) корректно задавать потоки при Неймановских условиях как предельные значения, а не «в точности на краю». Практически $\varepsilon \approx 10^{-3} - 10^{-2}$ (в безразмерной области $[0, 1] \times [t_{\min}, t_{\max}]$) оказывается достаточным; при наличии узких переходных областей (областей высоких градиентов) допустимо уменьшать до 10^{-4} с одновременным увеличением числа точек у границ. Под узкими переходными областями (областями с высокими градиентами) понимаются такие ситуации, когда решение резко меняется в очень узкой области по пространству и/или времени – настолько узкой, что стандартная равномерная сетка с текущим числом точек просто не «видит» этот перепад.

Равномерное распределение соответствует $f_x(u) = u$, $f_t(v) = v$. Это базовая, интерпретируемая конфигурация, удобная для контроля и визуализации; однако при наличии пограничных/начальных слоёв требует существенно большего числа узлов для той же точности.

Модифицированное чебышёвское (косинусное) преобразование по пространству строится как

$$f_x(u) = \left[\frac{1 - \cos(\pi u)}{2} \right]^k, \quad k > 0. \quad (2.51)$$

При $k = 1$ получаются узлы Chebyshev–Lobatto (косинусное растяжение) с симметричным сгущением к обоим концам интервала. Параметр $k \neq 1$ вводит управляемую асимметрию: $k > 1$ усиливает концентрацию точек ближе к левому краю $x = 0$, $0 < k < 1$ – ближе к правому $x = 1$. Такой режим рекомендуется, когда физика задачи намеренно несбалансирована по краям (например, фиксированная заделка и/или локальный нагрев с одной стороны), либо когда именно у одного края

ождается быстрое изменение решения. Типичные значения $k \in [1.5, 3]$ дают выраженное, но ещё устойчивое сгущение; однако, чрезмерное увеличение k сжимает «полезную» область в узкую полосу и зачастую ухудшает скорость обучения нейронных сетей.

Степенное преобразование удобно как симметричное сгущение по пространству и/или как акцент в нужной части временного интервала. Для пространства используем

$$f_x(u) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{sign} \left(u - \frac{1}{2} \right) \left| 2u - 1 \right|^{1/k} \right], \quad k > 0, \quad (2.52)$$

что обеспечивает симметричное относительно $x = \frac{1}{2}$ перераспределение: при $k > 1$ узлы сгущаются у обеих границ и редкуют в центре; при $k = 1$ сетка равномерна; при $0 < k < 1$ наблюдается сгущение к центру (редкий, но иногда полезный случай, если именно в центре ожидаются высокие градиенты). Для времени используется

$$f_t(v) = v^k, \quad k > 0,$$

где $k > 1$ даёт сгущение к ранним временам (важно при быстрых переходных процессах, импульсных нагрузках), $0 < k < 1$ — сгущение к поздним временам (акцент на установившейся стадии). Практические диапазоны: для ранних переходов $k \in [1.5, 3]$; для «поздних времён» $k \in (0.5, 1)$; для симметричного пространственного сгущения $k \approx 1.5-3$.

Внутренние точки PDE формируются прямым произведением $\{(x_i, t_j)\}$ из выбранных f_x, f_t и количества узлов N_x, N_t ; мощность выборки $N_r = N_x N_t$. Начальные условия берутся на линии $t = t_{\min}$, $x \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ (равномерно или случайно, N_0 — десятки/сотни точек, без попадания в углы). Граничные условия — на вертикалях $x = 0$ и $x = 1$ с временами $t \in [t_{\min} + \varepsilon, t_{\max}]$ по N_b точек на каждую сторону (углы исключены с помощью ε). Баланс наборов обычно выбирают с доминированием N_r , но при жёстких

граничных условиях имеет смысл увеличить N_b или временно усилить их веса в функции потерь; наличие сгущения у границ позволяет эти веса, наоборот, уменьшать, поскольку близлежащие внутренние точки уже «подхватывают» граничную информацию.

Почему сгущение реально помогает: локальная погрешность аппроксимации и ошибки производных сети максимальны там, где решение меняется быстрее; перераспределяя «бюджет точек» в пользу таких областей, мы снижаем систематическую компоненту функции потерь и даём оптимизатору более информативные градиенты при фиксированном N . Равномерная сетка остаётся полезным контролем, но для задач с выраженными областями высоких градиентов равномерность обычно неэкономична. Практические рецепты: для гладких профилей – равномерное x/t , $\varepsilon = 10^{-3}$; для симметричных пограничных слоёв – степенное f_x с $k \approx 2$ и равномерное t (или степенное f_t с $k > 1$, если важны ранние времена); для слоя у одного края – модифицированное чебышёвское f_x с $k \in [1.5, 3]$ (контролируя, к какому краю смещён акцент), а по времени – $f_t(v) = v^k$ с $k > 1$; для акцента на установившейся стадии – $f_t(v) = v^k$ с $k \in (0.5, 1)$ при умеренном пространственном сгущении.

Перейдём к определению функции потерь.

Функция потерь $\mathcal{L}$ включает (на примере задачи (2.28)):

Невязку по уравнению движения:

$$\mathcal{L}_u = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \left| \frac{\partial^2 \mathcal{N}_u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{N}_u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial \mathcal{N}_g}{\partial x} - F(x_i, t_i) \right|^2.$$

Невязку по уравнению теплопроводности:

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \left| \frac{\partial \mathcal{N}_g}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 \mathcal{N}_g}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 \mathcal{N}_u}{\partial x \partial t} - Q(x_i, t_i) \right|^2.$$

Невязку по начальным условиям:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{IC} &= \\ &= \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} \left(\left| \mathcal{N}_u(x_j, 0) - U_0(x_j) \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathcal{N}_u(x_j, 0)}{\partial t} - V_0(x_j) \right|^2 + \left| \mathcal{N}_g(x_j, 0) - \Theta_0(x_j) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Невязку по граничным условиям:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BC} &= \frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} \left\{ \left| \mathcal{N}_u(0, t_k) - U_1(t_k) \right|^2 + \left| \mathcal{N}_u(1, t_k) - U_2(t_k) \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial \mathcal{N}_g(0, t_k)}{\partial x} + \Theta_1(t_k) \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathcal{N}_g(1, t_k)}{\partial x} + \Theta_2(t_k) \right|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Общая функция потерь представляет собой сумму:

$$\mathcal{L}(\theta_u, \theta_g) = \mathcal{L}_u + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{IC} + \mathcal{L}_{BC}. \quad (2.53)$$

Таким образом функция потерь является суммой среднеквадратических отклонений невязок всех уравнений и соотношений на множестве точек коллокации.

С использованием различных методов организуется поиск минимума функции $\mathcal{L}(\theta_u, \theta_g)$ (или процесс «обучения» нейронных сетей) на множестве обучаемых параметров. На каждом шаге цикла весь объединённый набор точек $\mathcal{D} = \Omega_r \cup \Omega_0 \cup \partial\Omega_b$ проходит через процесс обучения. Операцию полного прохода всего множества коллокационных точек через процесс обучения будем называть «эпохой», следуя устоявшейся терминологии в области глубокого машинного обучения.

Путём изменения значений весов и сдвигов в нейронах можно изменять значения аппроксимации на выходе из нейронной сети. Именно поиск таких значений весов и сдвигов, при которых нейронная сеть будет аппроксимировать исходную функцию с заданной точностью в заданной области определения решения и является целью глубокого машинного обучения.

Отметим, что в случае дифференцируемых функций активации вся

нейронная сеть представляет собой дифференцируемую функций как по входным переменным, так и по внутренним параметрам (весам и сдвигам). Если же функция активации является аналитической, то нейронную сеть можно рассматривать как аналитическую функцию.

3. Методы и алгоритмы обучения нейронной сети.

Как указывалось ранее, целью метода обучения нейросетевых аппроксимаций является нахождение глобального минимума функции потерь (2.53) на многомерном пространстве $\theta = \theta_u \cup \theta_g$ обучаемых параметров. Поскольку функция потерь является дифференцируемой, для определения её глобального минимума можно воспользоваться каким-либо вариантом метода градиентного спуска или методами более высоких порядков. Ниже описаны два оптимизационных метода, используемых либо отдельно, либо последовательно: Adam и L-BFGS.

Пусть $\theta \in \mathbb{R}^d$ — вектор всех обучаемых параметров (объединение весов и смещений обеих сетей), а $\mathcal{L}(\theta)$ — дифференцируемая функция потерь, определённая в п. 2. Тогда задача обучения формулируется как

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^d} \mathcal{L}(\theta). \quad (2.54)$$

Обозначим градиент функции потерь на итерации n через

$$g_n = \nabla_{\theta} \mathcal{L}(\theta_{n-1}). \quad (2.55)$$

Метод Adam (Adaptive Moment Estimation). Adam является развитием метода стохастического градиентного спуска (SGD) и использует адаптивные шаги обучения для каждого параметра. Алгоритм Adam состоит в следующем.

Задаётся значение скорости градиентного спуска η .

Задаются значения параметров алгоритма (смещения) $\beta_1, \beta_2 \in [0,1)$.

Задаётся малая величина $\varepsilon \ll 1$ (стабилизатор).

Задаётся начальное значение θ_0 вектору обучаемых переменных θ .

Задаются начальные значения первого и второго момента градиента функции $L(\theta)$: $m_0 = 0$, $v_0 = 0$;

Для каждого параметра θ на n -й итерации вычисляется градиент функции потерь по формуле (2.55).

Далее формируются экспоненциально взвешенные скользящие средние (первый и второй моменты градиента):

$$m_n = \beta_1 m_{n-1} + (1 - \beta_1) g_n, \quad v_n = \beta_2 v_{n-1} + (1 - \beta_2) g_n^{\odot 2}, \quad (2.56)$$

где $a^{\odot 2}$ обозначает покомпонентный квадрат вектора a .

Вычисляются оценки первого и второго момента с поправкой на смещения (скорректированные оценки):

$$\hat{m}_n = \frac{m_n}{1 - \beta_1^n}, \quad \hat{v}_n = \frac{v_n}{1 - \beta_2^n}. \quad (2.57)$$

В отличие от классического метода градиентного спуска, в котором вектор переменных на итерации с номером n обновляется по формуле:

$$\theta^{(n+1)} = \theta^{(n)} - \eta g_n, \quad (2.58)$$

обновление параметров в методе Adam осуществляется так:

$$\theta^{(n+1)} = \theta^{(n)} - \eta \frac{\hat{m}_n}{\sqrt{\hat{v}_n} + \varepsilon}. \quad (2.59)$$

Метод Adam устойчив и эффективен при большом числе параметров, хорошо работает при разреженных и зашумлённых градиентах. Типичные значения гиперпараметров: $\eta = 10^{-3}$, $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 0.99$, $\varepsilon = 10^{-8}$. В процессе обучения часто используется уменьшение скорости обучения η по линейному закону:

$$\eta_k = \eta_0 - k \frac{\eta_0 - \eta_{end}}{E_p}, \quad \eta_0 = 10^{-2}, \quad \eta_{end} = 10^{-6}, \quad (2.60)$$

где η_0 , η_{end} – начальная и конечная скорость градиентного спуска, E_p – количество полных циклов (эпох) обучения.

Method L-BFGS (Limited-memory Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno).

Метод L-BFGS относится к семейству квазиньютоновских методов оптимизации, которые стремятся воспроизвести эффективность метода Ньютона, но без явного вычисления и хранения полной матрицы Гессе:

$$H(\theta) = \nabla_{\theta}^2 \mathcal{L}(\theta). \quad (2.61)$$

Пусть функция потерь $\mathcal{L}(\theta) = \mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)$, где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)^T \in \mathbb{R}^d$ — вектор параметров (весов и смещений).

Тогда матрица Гессе $H(\theta)$ определяется как квадратная матрица, элементы которой являются вторыми частными производными от функции потерь:

$$H(\theta) = \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]_{i,j=1}^d = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_1 \partial \theta_d} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_2 \partial \theta_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_d \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_d \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_d^2} \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Если $\mathcal{L} \in C^2$, то по теореме Шварца матрица $H(\theta)$ симметрична.

Как в данной работе, так и во многих других приложениях метода PINN функция потерь имеет вид среднеквадратичной ошибки (среднеквадратического отклонения – MSE):

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{N_m} \sum_{k=1}^N r_{km}(\theta)^2, \quad (2.63)$$

где $r_{kj}(\theta)$ – невязки в точках коллокации (индекс m определяет тип невязки: невязка уравнения, граничного или начального условия).

Тогда:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = 2 \sum_{m=1}^M \frac{1}{N_m} \sum_{k=1}^N r_{km}(\theta) \frac{\partial r_{km}(\theta)}{\partial \theta_i} \quad (2.64)$$

и элементы матрицы Гессе можно получить с помощью следующих формул:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = 2 \sum_{m=1}^M \left[\frac{1}{N_m} \sum_{k=1}^N \frac{\partial r_{km}(\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial r_{km}(\theta)}{\partial \theta_j} + r_{km}(\theta) \frac{\partial^2 r_{kmk}(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]. \quad (2.65)$$

В классическом методе Ньютона на итерации с номером n обновление переменных осуществляется по формуле:

$$\theta^{(n+1)} = \theta^{(n)} - H_n^{-1} g_n,$$

где H_n^{-1} – матрица, обратная к матрице Гессе.

Таким образом, метод Ньютона использует не только градиент, как в методе SGD, но и точную информацию о кривизне функции потерь.

Однако, в задачах с большим числом параметров хранение H_n и процесс вычисления обратной матрицы Гессе H_n^{-1} требуют очень большого количества памяти и вычислительных ресурсов.

Метод L-BFGS аппроксимирует H_n^{-1} , используя только несколько последних итераций (ограниченная память). Он относится к классу квазиньютоновских алгоритмов и использует информацию о кривизне функции потерь. На итерации n задаются векторы изменения параметров и градиента:

$$s_{n-1} = \theta_n - \theta_{n-1}, \quad y_{n-1} = g_n - g_{n-1}. \quad (2.66)$$

Основная идея заключается в аппроксимации обратной матрицы Гессе $H_n^{-1} \approx (\nabla^2 \mathcal{L}(\theta_n))^{-1}$ с использованием накопленной информации об изменении обучаемых переменных s_i и изменении градиента y_i . H_n^{-1} аппроксимируется с помощью последних m пар (s_i, y_i) , а не вычисляется явно. Таким образом, метод L-BFGS требует $O(md)$ памяти вместо $O(d^2)$, как в методе Ньютона.

В этом случае обновление обучаемых переменных осуществляется по формуле:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \eta_n p_n, \quad (2.67)$$

где p_n – вектор направления спуска, η_n – размер шага метода L-BFGS.

Вектор направления спуска $p_n \approx -H_n^{-1}g_n$ вычисляется с помощью алгоритма двухпетлевой рекурсии (two-loop recursion), который состоит в следующем:

– инициализация: $q \leftarrow g_n$;

– для $i = n-1, \dots, n-m$ (в обратном порядке):

$$\rho_i = \frac{1}{y_i^T s_i}, \quad \alpha_i = \rho_i s_i^T q, \quad q \leftarrow q - \eta_i y_i;$$

– масштабирование:

$$\gamma_n = \frac{s_{n-1}^T y_{n-1}}{y_{n-1}^T y_{n-1}}, \quad r \leftarrow \gamma_n q;$$

– для $i = n-m, \dots, n-1$ (в прямом порядке):

$$\beta_i = \rho_i y_i^T r, \quad r \leftarrow r + s_i(\alpha_i - \beta_i);$$

– направление поиска: $p_n = -r$.

Размер шага α_n подбирается методом линейного поиска так, чтобы выполнялись условия Армихо–Вольфе.

Условие Армихо (достаточного убывания):

$$\mathcal{L}(\theta_n + \eta_n p_n) \leq \mathcal{L}(\theta_n) + c_1 \eta_n g_n^T p_n, \quad c_1 \in (0, 10^{-1}].$$

Условие Вольфе (кривизны):

$$\nabla \mathcal{L}(\theta_n + \eta_n p_n)^T p_n \geq c_2 g_n^T p_n, \quad c_2 \in [c_1, 1).$$

После нахождения направления p_n и шага η_n выполняется обновление параметров по формуле (2.67).

Для минимизации функции потерь в процессе обучения нейронных сетей в данной работе используется комбинация двух методов градиентной оптимизации: Adam и L-BFGS [27]. На начальном этапе применяется метод Adam, который обеспечивает устойчивое и быстрое приближение к области минимума даже при неустойчивых или шумных градиентах. Он адаптивно регулирует шаг обучения для каждого параметра, что позволяет эффективно настраивать структуру нейросети в фазе начального приближения.

Метод обеспечивает быструю и точную сходимость, особенно на гладких участках функции. Он работает по всему набору данных, что делает его особенно эффективным в задачах PINN, где важна согласованность по всей области определения.

Такое сочетание (сначала Adam, затем L-BFGS) позволяет объединить преимущества обоих подходов: стабильность и гибкость на старте, высокую точность и быстрое достижение минимума на завершающем этапе обучения.

4. *Верификация точности обученных нейросетевых аппроксимаций на проверочном наборе точек.* Организуется проверочное множество Ω_p дискретных точек (x, t) , принадлежащих области Ω (проверочный набор):

$$\Omega_p = \left\{ (x, t) : x = x_m = mh_x, t = t_n = nh_t, m = \overline{0, N_x}, \right. \\ \left. n = \overline{0, N_t}, h_x = \frac{1}{N_x}, h_t = \frac{T}{N_t} \right\}, \quad (2.68)$$

где N_x и N_t – количества отрезков при равномерном разбиении интервалов изменения пространственной $x \in [0, 1]$ и временной $t \in [0, T]$ переменных.

Вычисляются значения решений u , ϑ , найденных каким-либо другим методом (аналитически или численно) и значения нейросетевых аппроксимаций (2.44) на проверочном наборе точек:

$$\hat{u} = u|_{(x,t) \in \Omega_p}, \quad \hat{\vartheta} = \vartheta|_{(x,t) \in \Omega_p}, \\ \hat{\mathcal{N}}_u = \mathcal{N}_u(x, t; \theta_u)|_{(x,t) \in \Omega_p}, \quad \hat{\mathcal{N}}_\vartheta = \mathcal{N}_\vartheta(x, t; \theta_\vartheta)|_{(x,t) \in \Omega_p}. \quad (2.69)$$

Определяются среднеквадратические отклонения решений, полученных разными методами, на множестве точек проверочного набора:

$$\Delta_u^2 = \frac{1}{N_x N_t} \sum_{(x,t) \in \Omega_p} (\hat{u} - \hat{\mathcal{N}}_u)^2, \quad \Delta_\vartheta^2 = \frac{1}{N_x N_t} \sum_{(x,t) \in \Omega_p} (\hat{\vartheta} - \hat{\mathcal{N}}_\vartheta)^2. \quad (2.70)$$

ГЛАВА 3. РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

В данной главе рассматриваются решения ряда модельных нестационарных задач термоупругости для упругого слоя (рис. 3.1), полученные с применением различных методов математического моделирования. Центральное внимание уделено сопоставлению результатов, построенных с использованием технологии физически информированных нейронных сетей (PINN), с решениями, полученными на основе классических численных методов вычислительной математики (в данной работе – методом конечных разностей, описанном в п. 2.1.2), а также с аналитическими решениями, построенными по методике п. 2.1.1. Такое сравнение обеспечивает комплексную оценку корректности и эффективности применения PINN, позволяя продемонстрировать его преимущества и ограничения по сравнению с традиционными подходами.

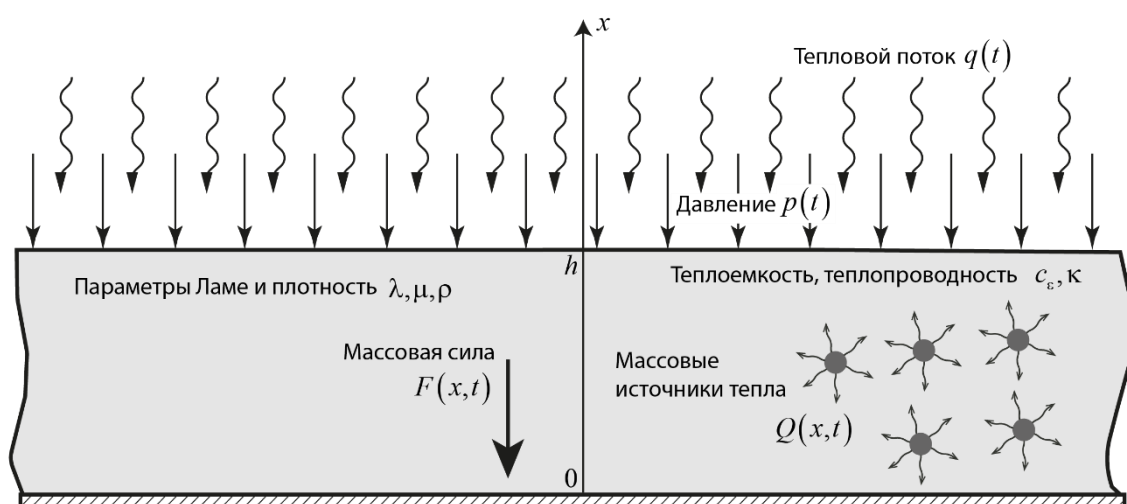


Рис 3.1. Схематическое изображение слоя под действием объёмных и поверхностных нагрузок.

3.1. Задача с неоднородными начальными условиями

Рассмотрим нестационарную термоупругую задачу для слоя с однородными уравнениями и граничными условиями, но с ненулевыми начальными условиями:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' - \alpha \vartheta', & \dot{\vartheta} &= \kappa \vartheta'' - \beta \dot{u}; \\ u(x, 0) &= \sin(\pi x), & \dot{u}(x, 0) &= 0, & \vartheta(x, 0) &= \cos(\pi x); \\ u(0, t) &= 0, & u(1, t) &= 0, & \vartheta'(0, t) &= 0, & \vartheta'(1, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Применим преобразование Лапласа по времени (L обозначает оператор интегрального преобразования Лапласа). Для функций

$$u^L(x, s) = L\{u(x, t)\}, \quad \vartheta^L(x, s) = L\{\vartheta(x, t)\}$$

получим систему:

$$\begin{aligned} s^2 u^L - s u(x, 0) - \dot{u}(x, 0) &= u_{xx}^L - \alpha \vartheta_x^L, \\ s \vartheta^L - \vartheta(x, 0) &= \kappa \vartheta_{xx}^L - \beta [s u_x^L - u_x(x, 0)]; \end{aligned}$$

Здесь и далее $f_x = \frac{df}{dx}$, $f_{xx} = \frac{d^2 f}{dx^2}$.

Так как $u(x, 0) = \sin(\pi x)$, имеем $u_x(x, 0) = \pi \cos(\pi x)$. Тогда

$$\begin{aligned} u_{xx}^L - \alpha \vartheta_x^L - s^2 u^L &= -s \sin(\pi x), \\ \kappa \vartheta_{xx}^L - \beta s u_x^L - s \vartheta^L &= (\beta \pi - 1) \cos(\pi x). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Граничные условия сохраняются в пространстве изображений:

$$u^L(0, s) = u^L(1, s) = 0, \quad \vartheta_x^L(0, s) = \vartheta_x^L(1, s) = 0.$$

Представим решения в виде рядов:

$$u^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^L(s) \sin(\lambda_n x), \quad \vartheta^L(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n^L(s) \cos(\lambda_n x), \quad (3.3)$$

где $\lambda_n = \pi n$.

Подставляя разложения (3.3) в (3.2), для каждого n приходим к системе:

$$(s^2 + \pi^2) u^L - \alpha \pi \vartheta^L = s \delta_{n1}, \quad \beta \pi s u^L + (s + \kappa \pi^2) \vartheta^L = (1 + \beta \pi) \delta_{n1}, \quad (3.4)$$

где δ_{n1} — символ Кронекера.

Для $n \neq 1$ получаем $u_n^L = \vartheta_n^L = 0$.

Рассмотрим случай $n = 1$.

По правилу Крамера получаем решение:

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= \begin{vmatrix} s^2 + \pi^2 & -\alpha\pi \\ \beta\pi s & s + \kappa\pi^2 \end{vmatrix} = (s^2 + \pi^2)(s + \kappa\pi^2) + \alpha\beta\pi^2 s, \\ \Delta_1(s) &= \begin{vmatrix} s & -\alpha\pi \\ 1 + \beta\pi & s + \kappa\pi^2 \end{vmatrix} = s(s + \kappa\pi^2) + \alpha\pi(1 + \beta\pi), \\ \Delta_2(s) &= \begin{vmatrix} s^2 + \pi^2 & s \\ \beta\pi s & 1 + \beta\pi \end{vmatrix} = (s^2 + \pi^2)(1 + \beta\pi) - \beta\pi s^2, \\ u_1^L(s) &= \frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)} = \frac{s(s + \kappa\pi^2) + \alpha\pi(1 + \beta\pi)}{(s^2 + \pi^2)(\kappa\pi^2 + s) + \alpha\beta\pi^2 s}, \\ \vartheta_1^L(s) &= \frac{\Delta_2(s)}{\Delta(s)} = \frac{(s^2 + \pi^2)(1 + \beta\pi) - \beta\pi s^2}{(s^2 + \pi^2)(\kappa\pi^2 + s) + \alpha\beta\pi^2 s}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Таким образом в пространстве изображений решение поставленной задачи имеет вид,

$$u^L(x, s) = u_1^L(s)\sin(\pi x), \quad \vartheta^L(x, s) = \vartheta_1^L(s)\cos(\pi x).\tag{3.6}$$

Следует отметить, что коэффициенты (3.6) являются правильными рациональными дробями, поэтому их оригиналы могут быть найдены методами комплексного анализа. В частности, применяется вторая теорема разложения для преобразования Лапласа, основанная на теории вычетов.

Пусть $f^L(s)$ — изображение по Лапласу. Тогда оригинал $f(t) = L^{-1}\{f^L(s)\}(t)$ представляется в виде

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \text{Res}(e^{st} f^L(s), s = s_k),\tag{1}$$

где $\{s_k\}$ — полюса функции $f^L(s)$, а $\text{Res}(\cdot, s_k)$ — вычет в точке $s = s_k$.

Корни $r_{1,j}$ кубического уравнения

$$(s^2 + \pi^2)(\kappa\pi^2 + s) + \alpha\beta\pi^2 = 0$$

определяют полюса $u_1^L(s), \vartheta_1^L(s)$. Тогда

$$u_1(t) = \sum_{j=1}^3 e^{r_{1,j}t} \frac{N_u(r_{1,j})}{\Delta'(r_{1,j})}, \quad \vartheta_1(t) = \sum_{j=1}^3 e^{r_{1,j}t} \frac{N_\vartheta(r_{1,j})}{\Delta'(r_{1,j})},$$

где

$$N_u(s) = s(s + \kappa\pi^2) + \alpha\pi(1 + \beta\pi), \quad N_\vartheta(s) = (s^2 + \pi^2)(1 + \beta\pi) - \beta\pi s^2,$$

$$\Delta'(s) = 2s(s + \kappa\pi^2) + (s^2 + \pi^2) + \alpha\beta\pi^2.$$

Для построения численного решения используется метод, изложенный в п. 2.1.2.

Материал слоя – сталь с размерными параметрами: $\rho = 7850$, $E = 210 \cdot 10^9$, $\nu = 0.3$, $\kappa^* = 58$, $c_\varepsilon = 482$, $h = 1$, $T_0 = 300$.

Значения соответствующих безразмерных параметров: $\alpha = 8.85 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 1.637$, $\kappa = 2.963 \cdot 10^{-9}$.

Конечный момент времени: $t_{\max} = 3$.

Шаг по координате: $\Delta_x = 2 \cdot 10^{-2}$.

Шаг по времени: $\Delta_t = 1.796 \cdot 10^{-2}$. Размер шага Δ_t удовлетворяет условию (2.43).

В случае построения решения методом PINN используются две нейросетевые аппроксимации для $\mathcal{N}_u$ и $\mathcal{N}_\vartheta$, соответствующие функциям перемещений u и изменению температуры ϑ . Каждая из аппроксимаций содержит 3 полносвязных внутренних слоя по 40 нейронов в каждом. В качестве функций активации используется гиперболический тангенс.

В этом примере используются равномерные распределения точек коллокаций по пространственной координате и по времени ($N_r = 5000$, $N_0 = N_b = 100$). Множество точек коллокации представлено на рис. 3.1.1.

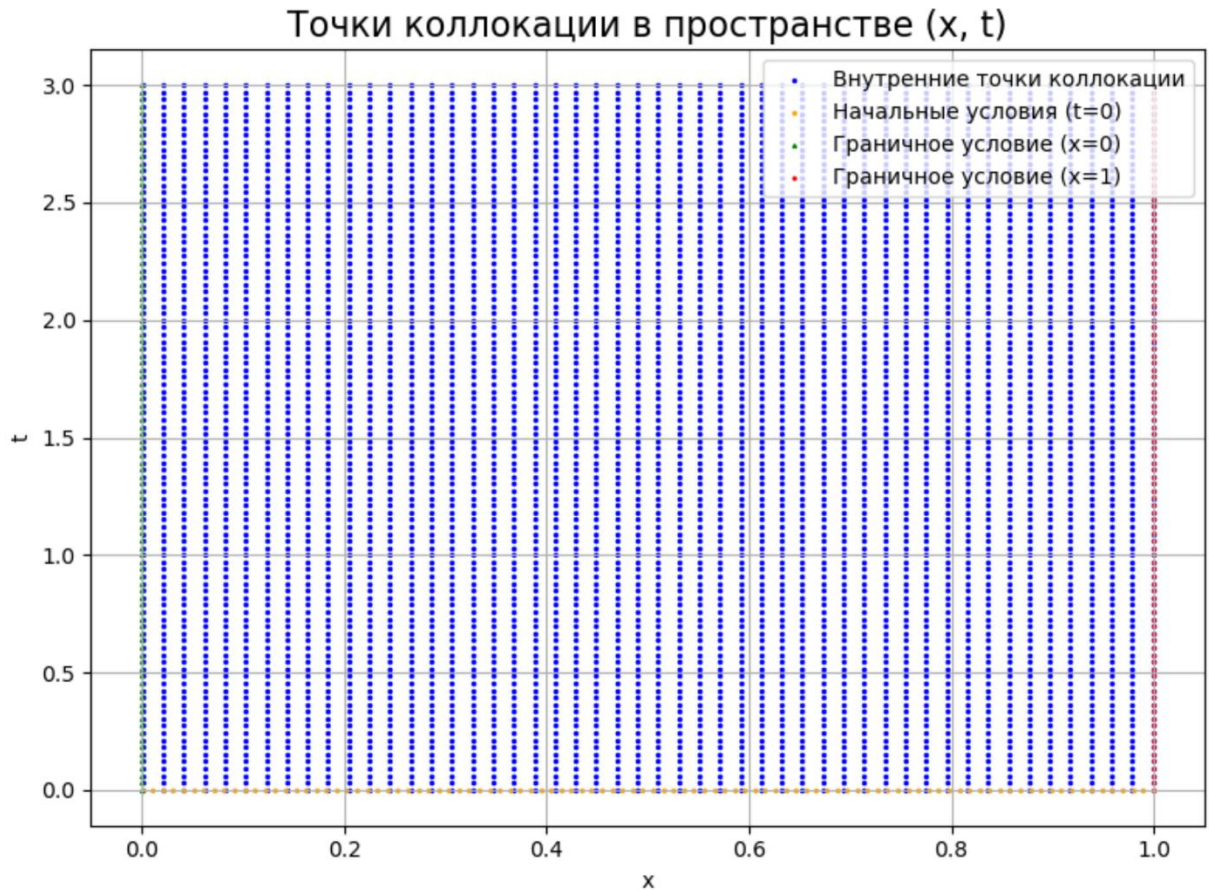


Рис 3.1.1. Множество точек коллокации.

Процесс обучения организован с применением двух методов. На начальном этапе – метод Adam (2000 эпох), затем 3000 итераций метода L-BFGS.

Верификация осуществлялась на проверочном наборе равномерно распределённых точек (51 точка по координате и 101 точка по времени).

На рис 3.1.2 а-г представлены распределения перемещений в различные моменты времени. Сплошная красная кривая – аналитическое решение, синяя пунктирная – решения с помощью метода конечных разностей, зелёная штрихпунктирная – решение, полученное с помощью метода PINN. Аналогичные результаты для приращения температуры представлены на рис 3.1.3 а-г.

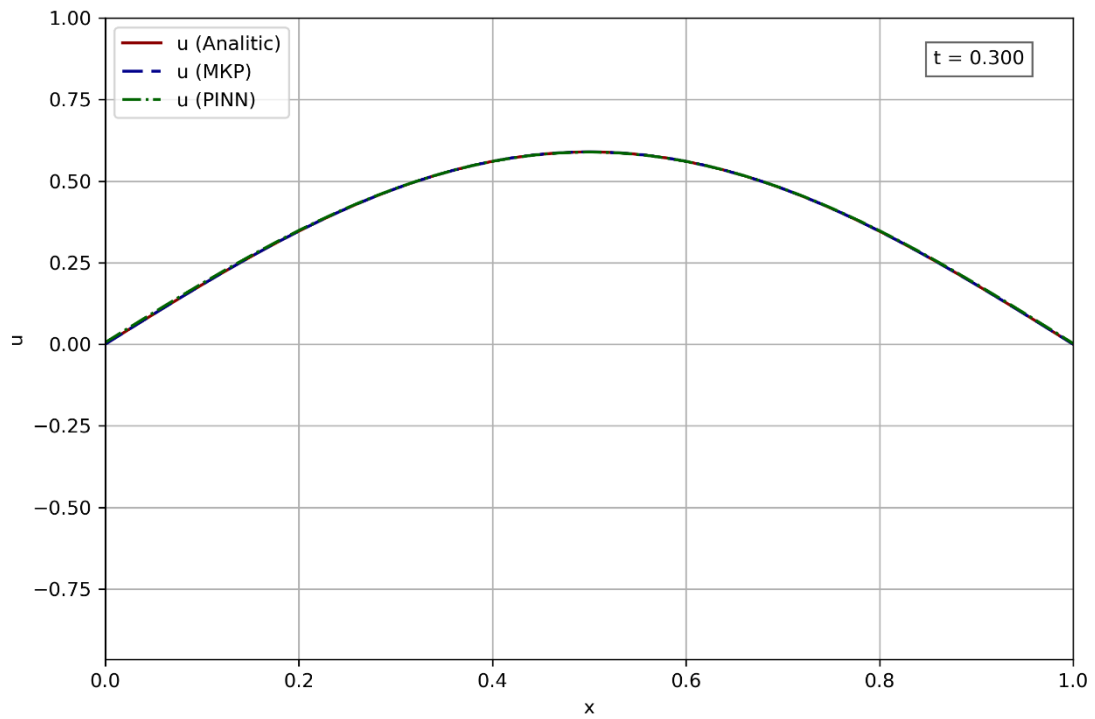


Рис 3.1.2 а. Распределение перемещений в момент времени $t = 0.3$.

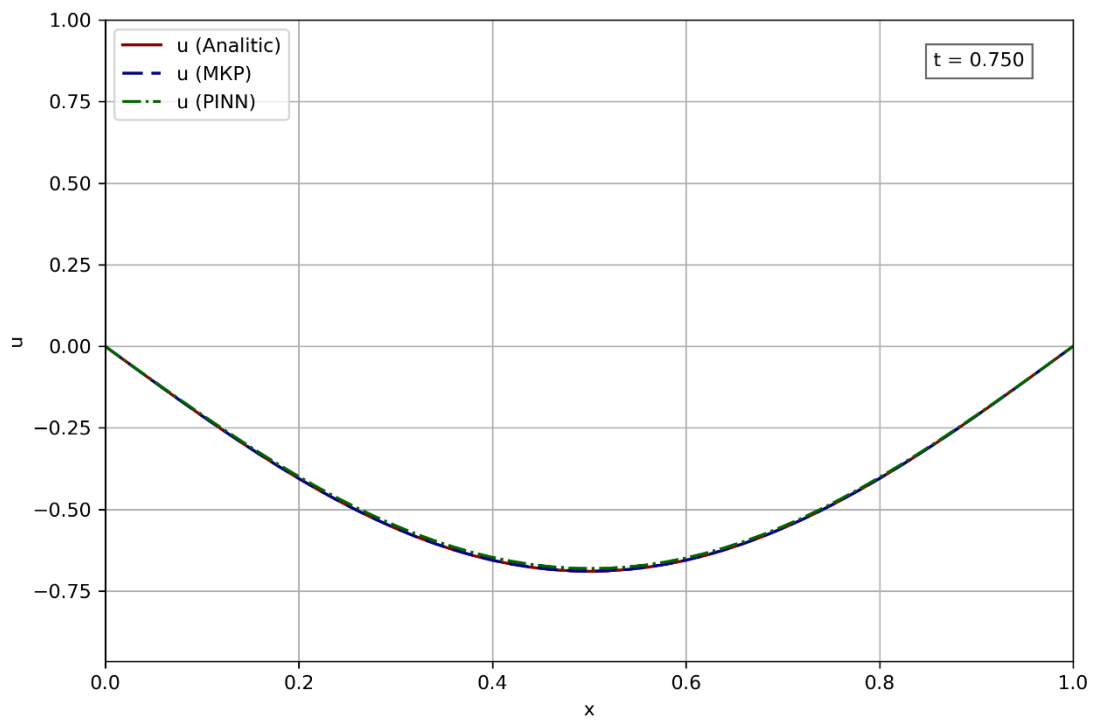


Рис 3.1.2 б. Распределение перемещений в момент времени $t = 0.75$.

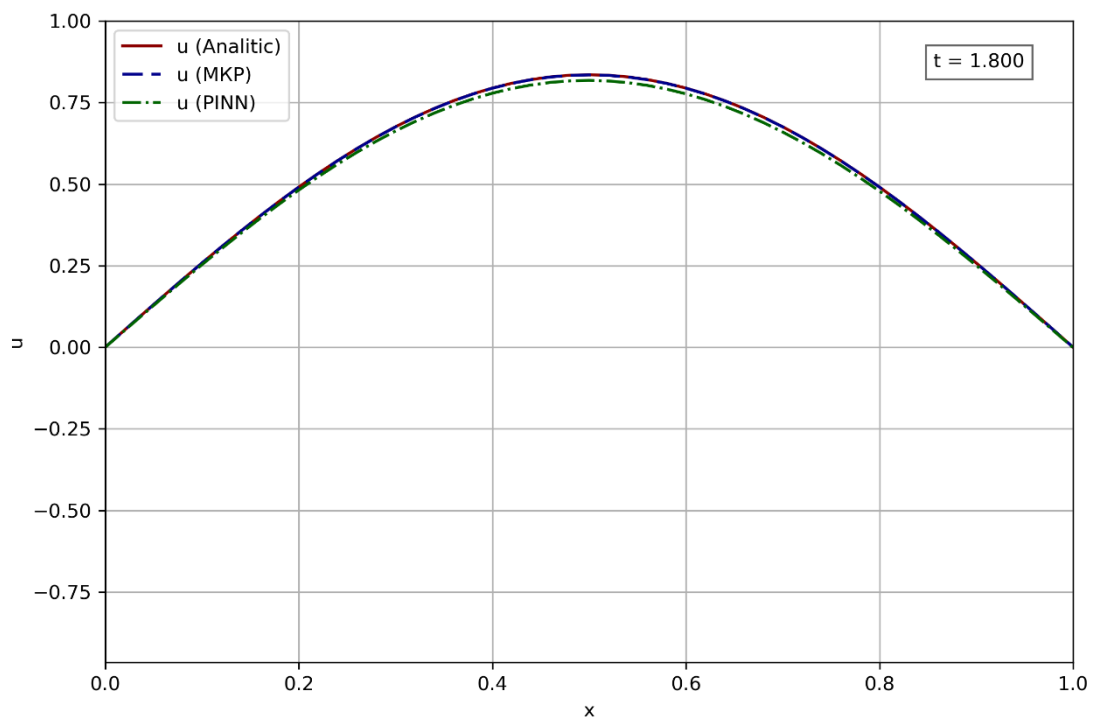


Рис 3.1.2 в. Распределение перемещений в момент времени $t = 1.8$.

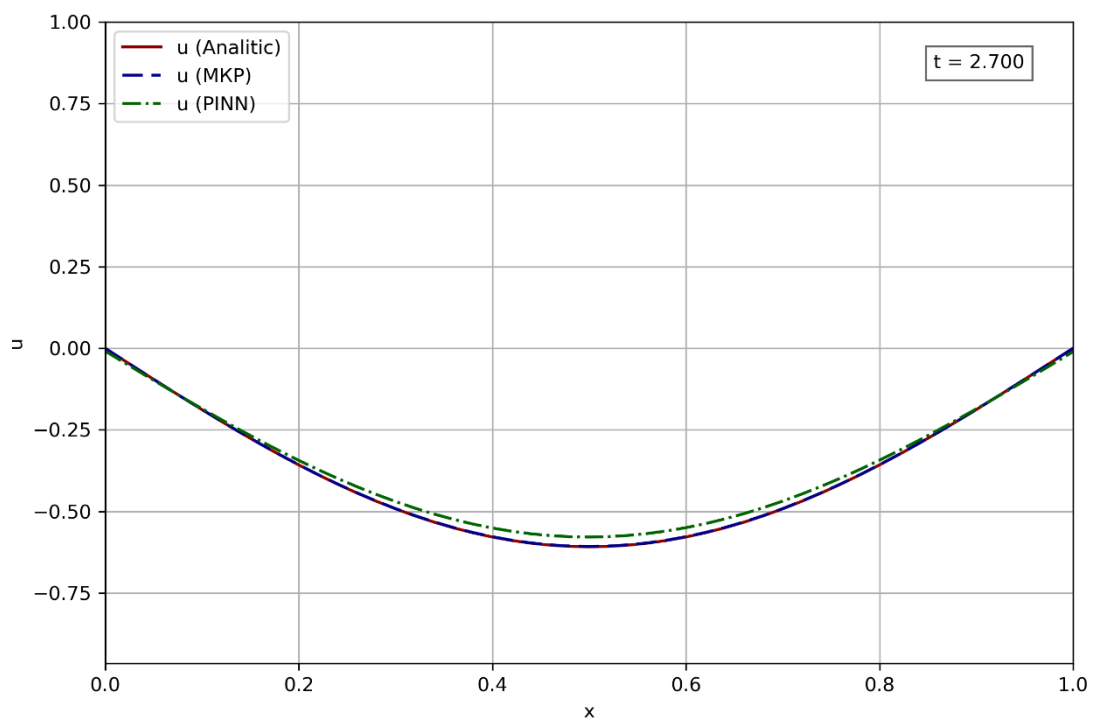


Рис 3.1.2 г. Распределение перемещений в момент времени $t = 2.7$.

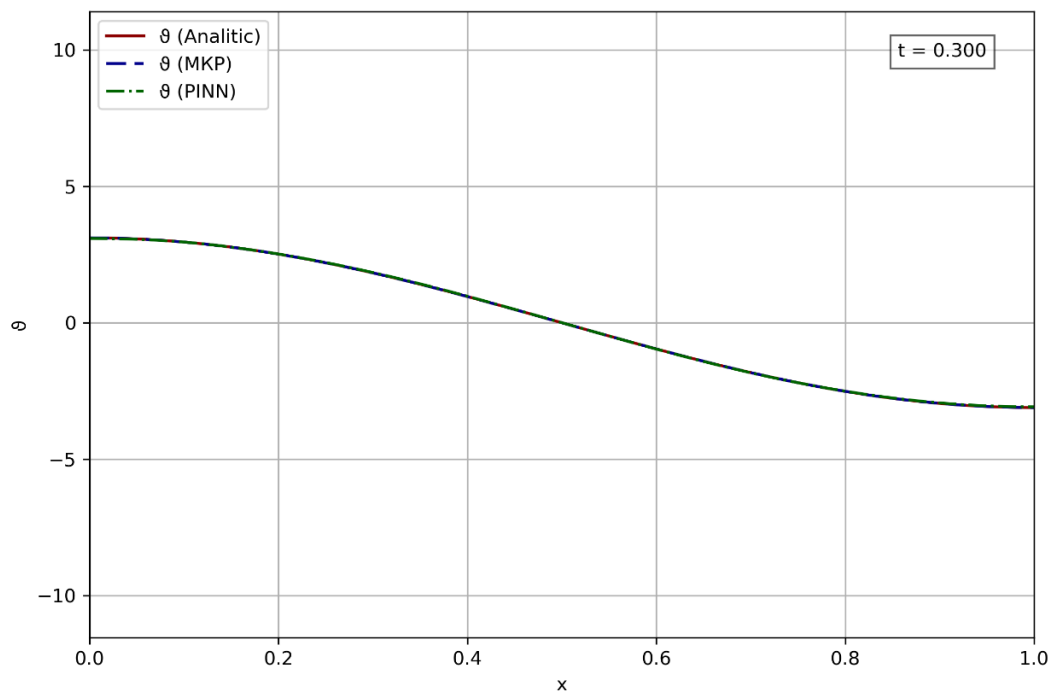


Рис 3.1.3 а. Распределение приращения температуры в момент времени $t = 0.3$.

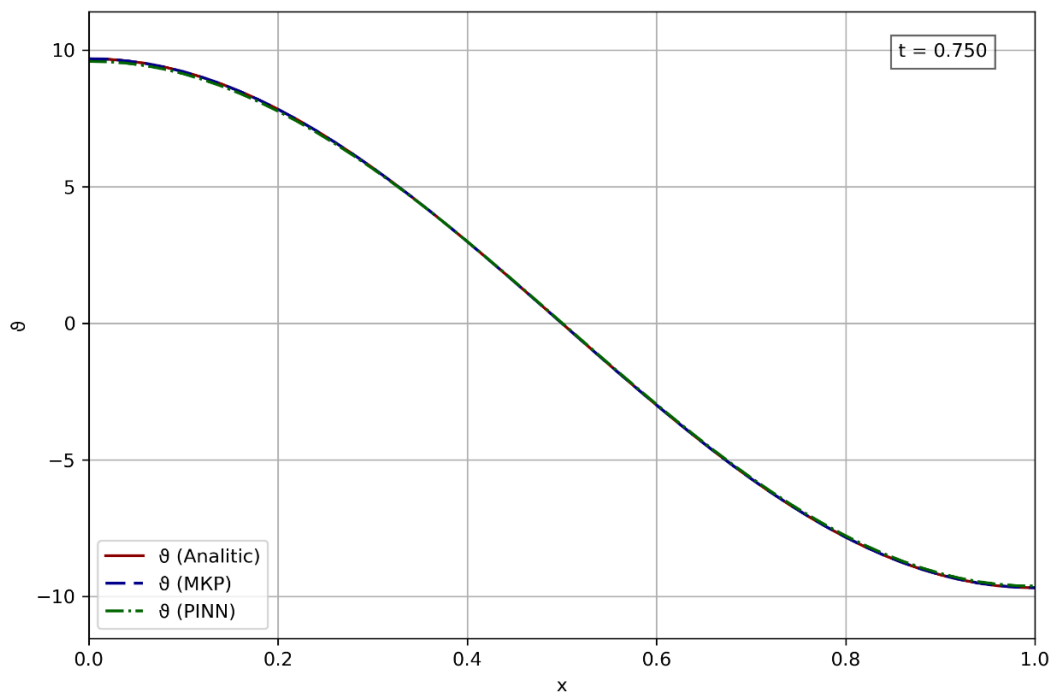


Рис 3.1.3 б. Распределение приращения температуры в момент времени $t = 0.75$.

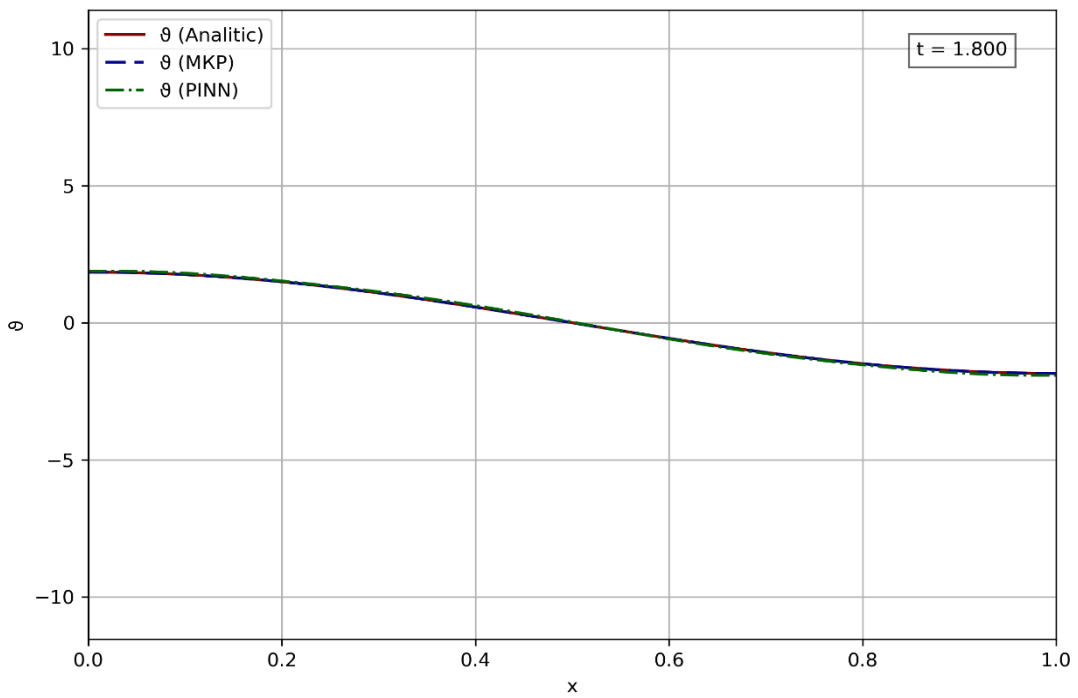


Рис 3.1.3 в. Распределение приращения температуры в момент времени $t = 1.8$.

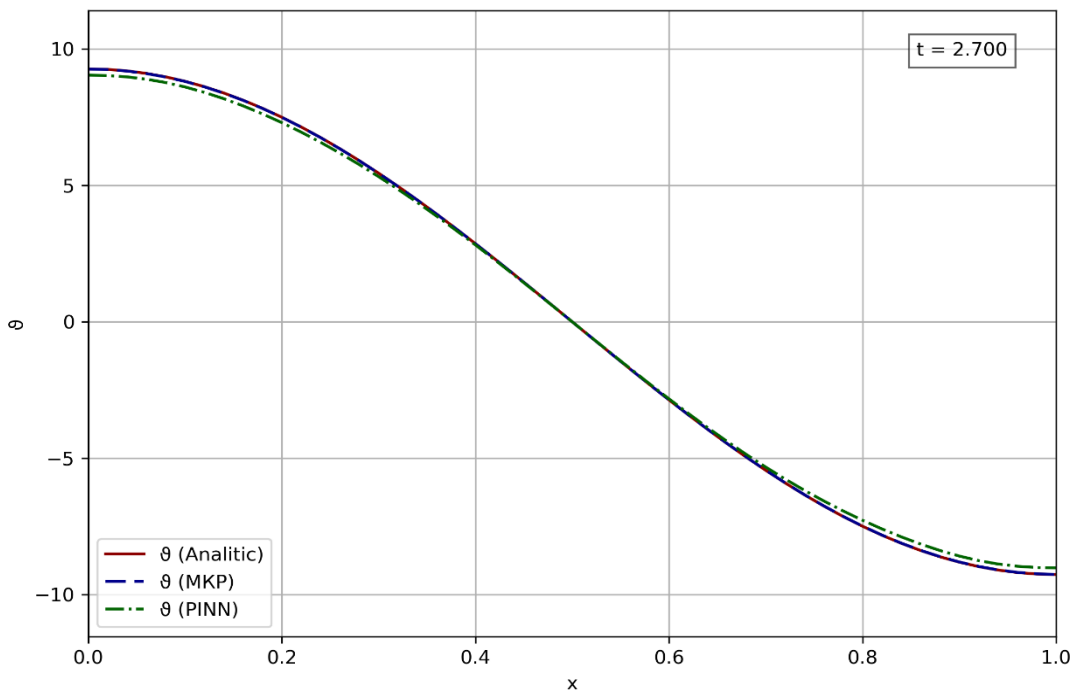


Рис 3.1.3 г. Распределение приращения температуры в момент времени $t = 2.7$.

Результаты анализа сходимости процесса обучения нейросетевых аппроксимаций представлены на рис. 3.1.2 а – 3.1.3 г. На рис. 3.1.4 представлен график функции потерь в зависимости от числа эпох обучения методом Adam ($\text{epoch} \in [0, 2000]$), а также от количества итераций метода L-BFGS ($\text{epoch} > 2000$). По оси ординат значения на графике представлены в логарифмическом масштабе. Видно, что подключение метода L-BFGS на втором этапе обучения положительно влияет на динамику сходимости аппроксимаций.

Рис. 3.1.5 и 3.1.6 представлены зависимости среднеквадратических отклонений аналитического решения и решения, полученного методом PINN в зависимости от числа эпох метода Adam и количества итерации метода L-BFGS. На рис. 3.1.5 представлен график Δ_u^2 , а на рис. 3.1.6 – Δ_g^2 (см. (2.70)).

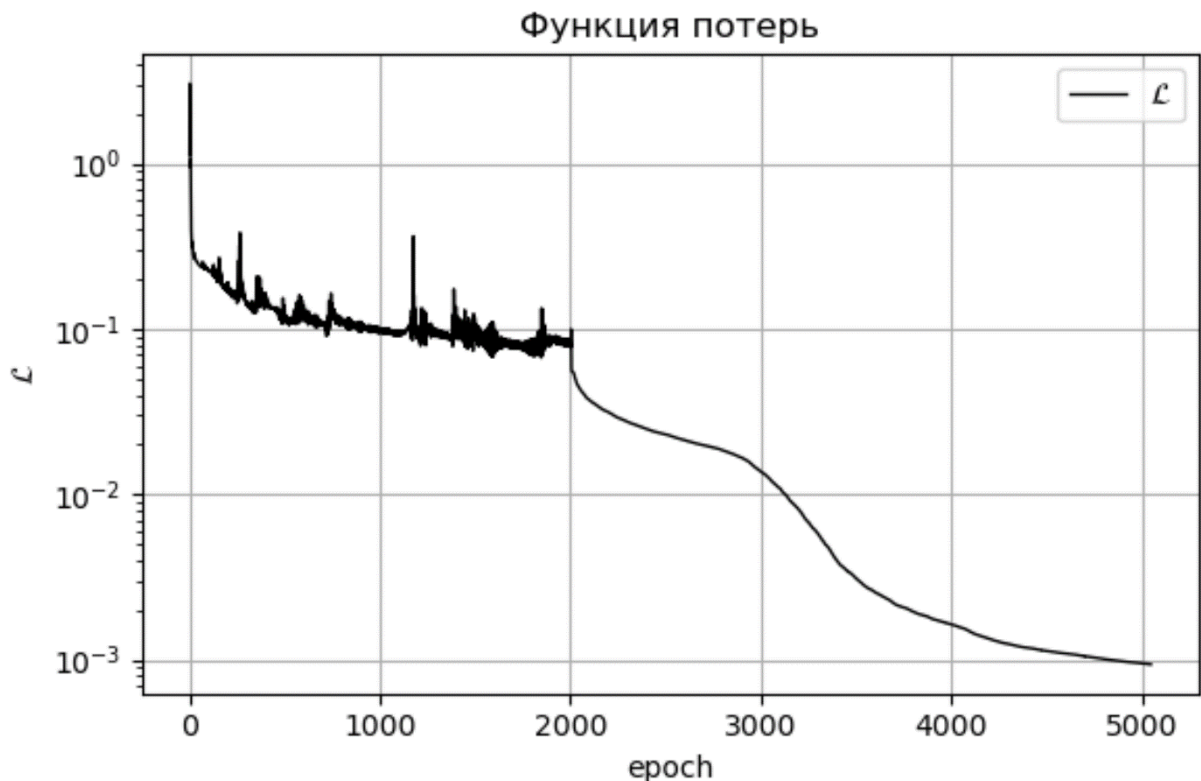


Рис 3.1.4. Функция потерь.

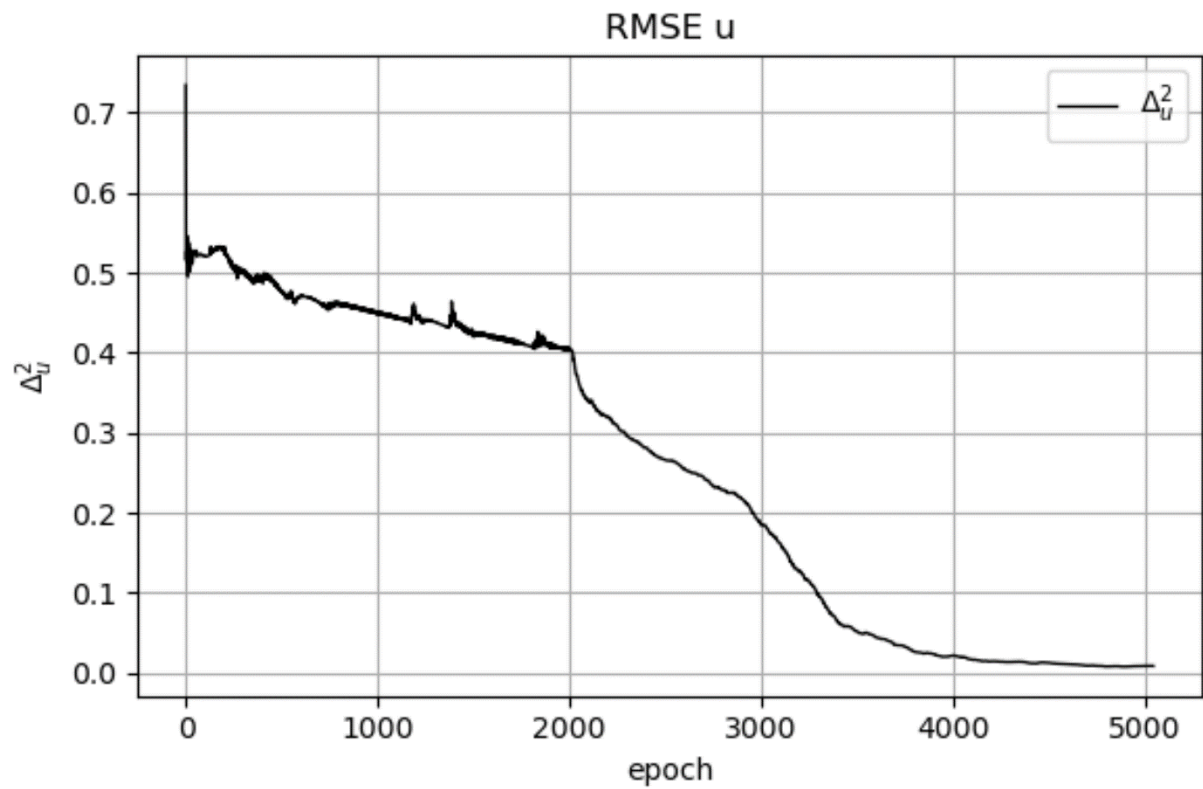


Рис 3.1.5 Среднеквадратическое отклонение Δ_u^2 .

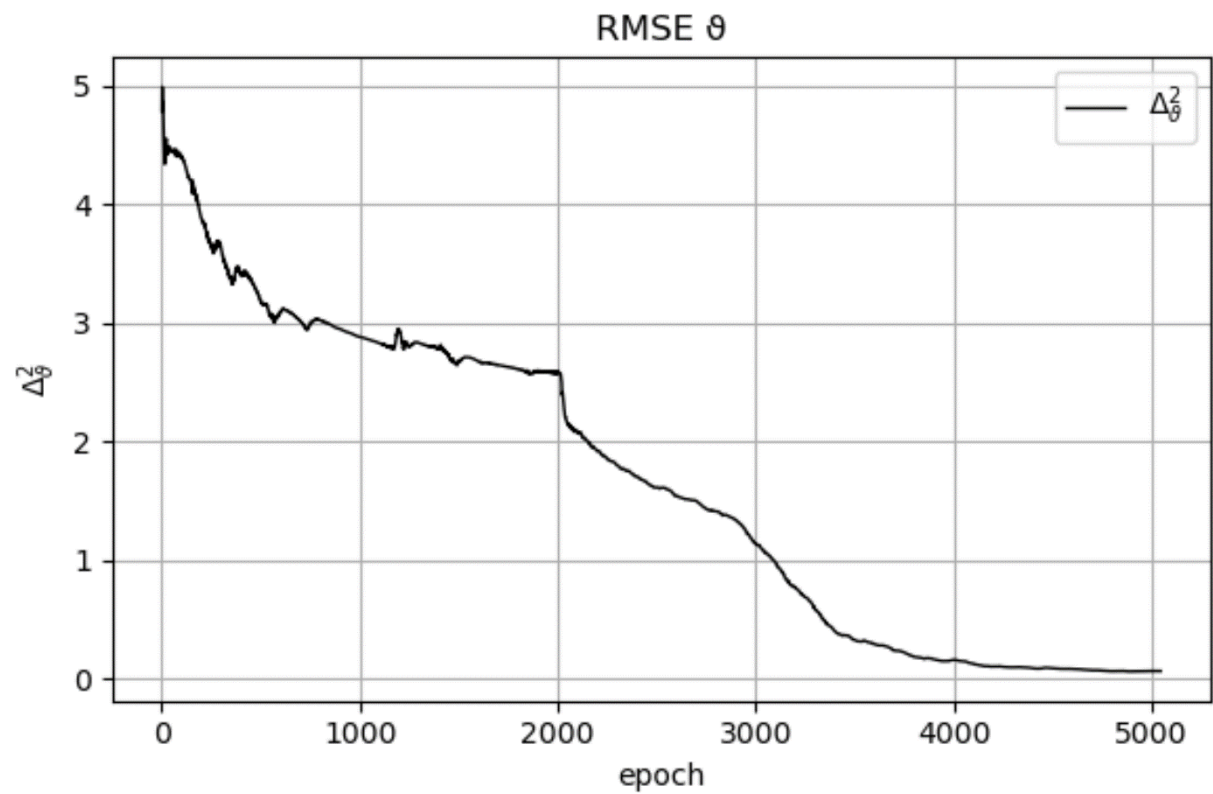


Рис 3.1.6 Среднеквадратическое отклонение Δ_θ^2 .

3.2. Воздействие поверхностной нагрузки на термоупругий слой с учётом массовых сил и источников тепла

Рассмотрим задачу о воздействии поверхностной нагрузки на свободную границу термоупругого слоя. В слое присутствуют массовые силы и источники тепла. На верхнюю границу $x=1$ действует поверхностное давление $p(t)$, тепловой поток отсутствует. Нижняя граница $x=0$ жестко закреплена и также находится в условии отсутствия теплового потока. Начальные условия нулевые (рис. 3.1).

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' - \alpha \vartheta' + F(x, t), \quad \dot{\vartheta} = \kappa \vartheta'' - \beta \dot{u}' + Q(x, t); \\ u|_{t=0} &= 0, \quad \dot{u}|_{t=0} = 0, \quad \vartheta|_{t=0} = 0; \\ u|_{x=0} &= 0, \quad \vartheta'|_{x=0} = 0, \quad u'|_{x=1} = -p(t), \quad \vartheta'|_{x=1} = 0; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$F(x, t) = \sin(x) \sin(t), \quad Q(x, t) = \cos(x) \sin(t), \quad p(t) = 0.1te^{-5t}.$$

Отметим, что вид граничных условий в данной задаче не позволяет напрямую воспользоваться методом Фурье для построения аналитического решения ввиду трудностей с поиском системы собственных функций. Поэтому в данной задаче для построения решений используем численный метод конечных разностей и метод PINN. Приведём сравнения результатов, полученных с помощью этих методов.

Для построения численного решения используется метод, изложенный в п. 2.1.2.

Материал слоя – сталь с размерными параметрами: $\rho = 7850$, $E = 210 \cdot 10^9$, $\nu = 0.3$, $\kappa^* = 58$, $c_\varepsilon = 482$, $h = 1$, $T_0 = 300$.

Значения соответствующих безразмерных параметров: $\alpha = 8.85 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 1.637$, $\kappa = 2.963 \cdot 10^{-9}$.

Конечный момент времени: $t_{\max} = 3$.

Шаг по координате: $\Delta_x = 2 \cdot 10^{-2}$.

Шаг по времени: $\Delta_t = 1.796 \cdot 10^{-2}$. Размер шага Δ_t удовлетворяет условию (2.43).

При решении задачи методом PINN (см. п. 2.2), как и ранее использованы две отдельные сетевые аппроксимации для перемещений и приращения температуры с тремя внутренними слоями по 40 нейронов в каждом.

Функция потерь в данной задаче выглядит так:

$$\mathcal{L}(\theta_u, \theta_\vartheta) = \mathcal{L}_u + \mathcal{L}_\vartheta + \mathcal{L}_{IC} + \mathcal{L}_{BC}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u &= \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \left| \frac{\partial^2 \mathcal{N}_u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{N}_u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial \mathcal{N}_\vartheta}{\partial x} \right|^2, \quad \mathcal{L}_\vartheta = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \left| \frac{\partial^2 \mathcal{N}_u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{N}_u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial \mathcal{N}_\vartheta}{\partial x} \right|^2, \\ \mathcal{L}_{IC} &= \frac{1}{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} \left(\left| \mathcal{N}_u(x_j, 0) \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathcal{N}_u(x_j, 0)}{\partial t} \right|^2 + \left| \mathcal{N}_\vartheta(x_j, 0) \right|^2 \right), \\ \mathcal{L}_{BC} &= \frac{1}{N_b} \sum_{k=1}^{N_b} \left\{ \left| \mathcal{N}_u(0, t_k) \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathcal{N}_u(1, t_k)}{\partial x} + p(t_k) \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathcal{N}_\vartheta(0, t_k)}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathcal{N}_\vartheta(1, t_k)}{\partial x} \right|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Нейросетевые модели $\mathcal{N}_u$ и $\mathcal{N}_\vartheta$ состоят из входного и выходного слоёв с двумя и одним нейроном соответственно, а также включают по 3 полносвязных внутренних слоя по 40 нейронов в каждом. Функции активации нейронов внутренних слоёв – гиперболический тангенс $\text{th}(\cdot)$.

При создании внутренних точек коллокации выбран вариант со сгущением к границам $x = 0, 1$ с использованием чебышёвского преобразования (2.51), а также с уплотнением к начальному моменту времени с помощью степенного преобразования (2.52): $N_r = 5000$.

Для граничных точек коллокации используется равномерное распределение: $N_0 = 200$, $N_b = 500$ (рис. 3.2.1)

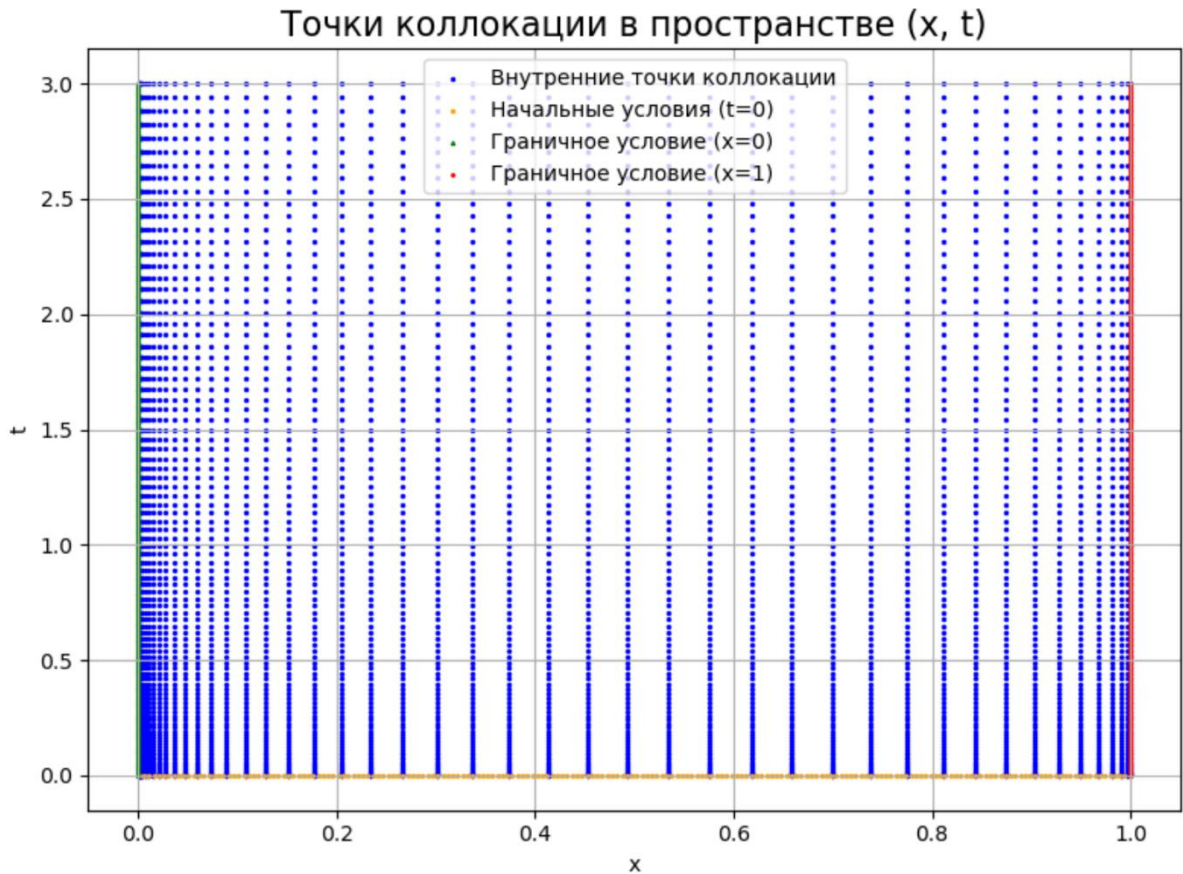


Рис 3.2.1. Точки коллокации.

Процесс обучения состоит из двух этапов: 2000 эпох метода Adam и 3000 итераций метода L-BFGS.

На рис 3.2.2 а-г представлены распределения перемещений в различные моменты времени. Сплошная кривая – решение, полученное с помощью метода PINN, пунктирная – решение с помощью метода конечных разностей. Аналогичные результаты для приращения температуры представлены на рис 3.2.3 а-г.

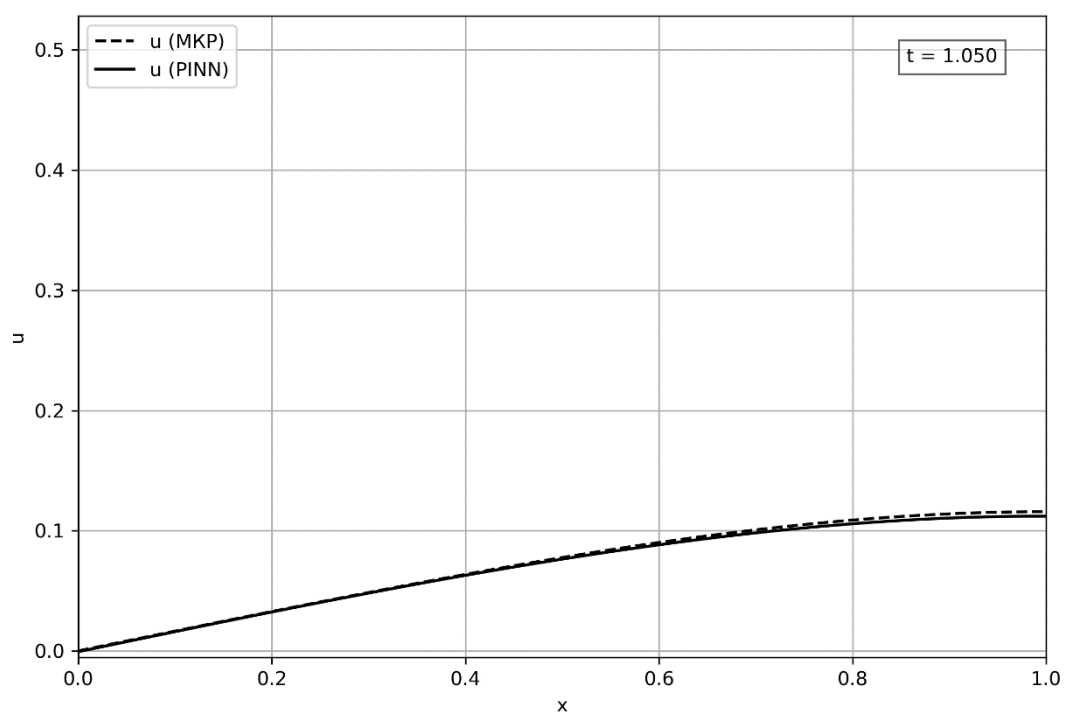


Рис 3.2.2 а. Распределение перемещений в момент времени $t = 1.05$.

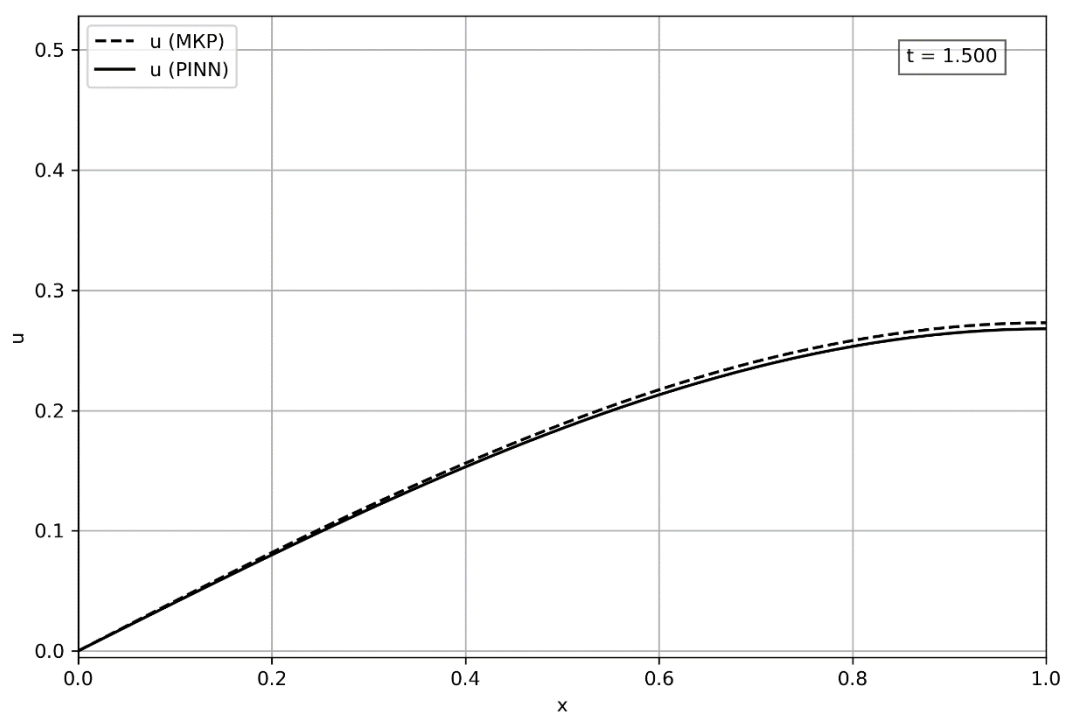


Рис 3.2.2. б. Распределение перемещений в момент времени $t = 1.5$.

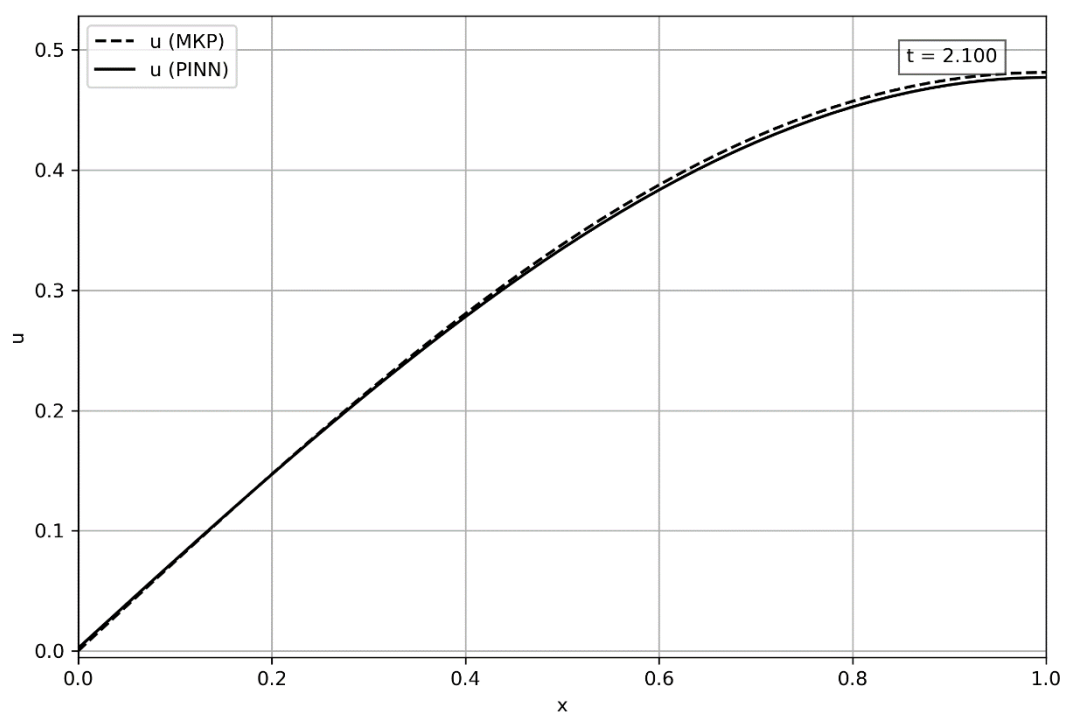


Рис 3.2.2. в. Распределение перемещений в момент времени $t = 2.1$.

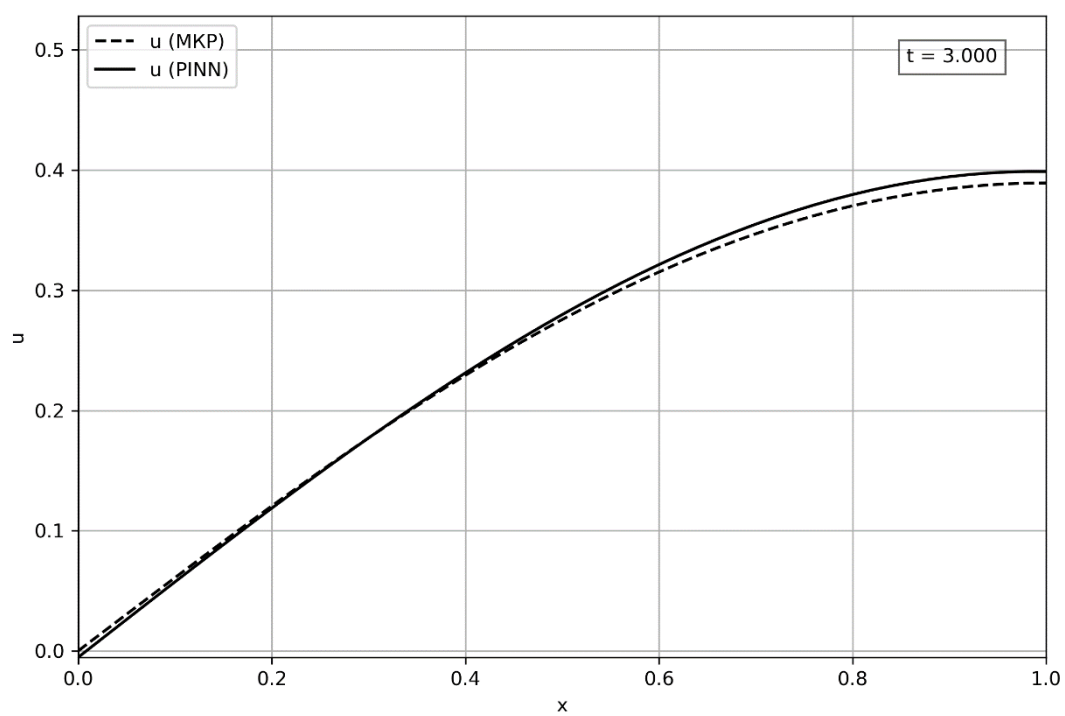


Рис 3.2.2. г. Распределение перемещений в момент времени $t = 3$.

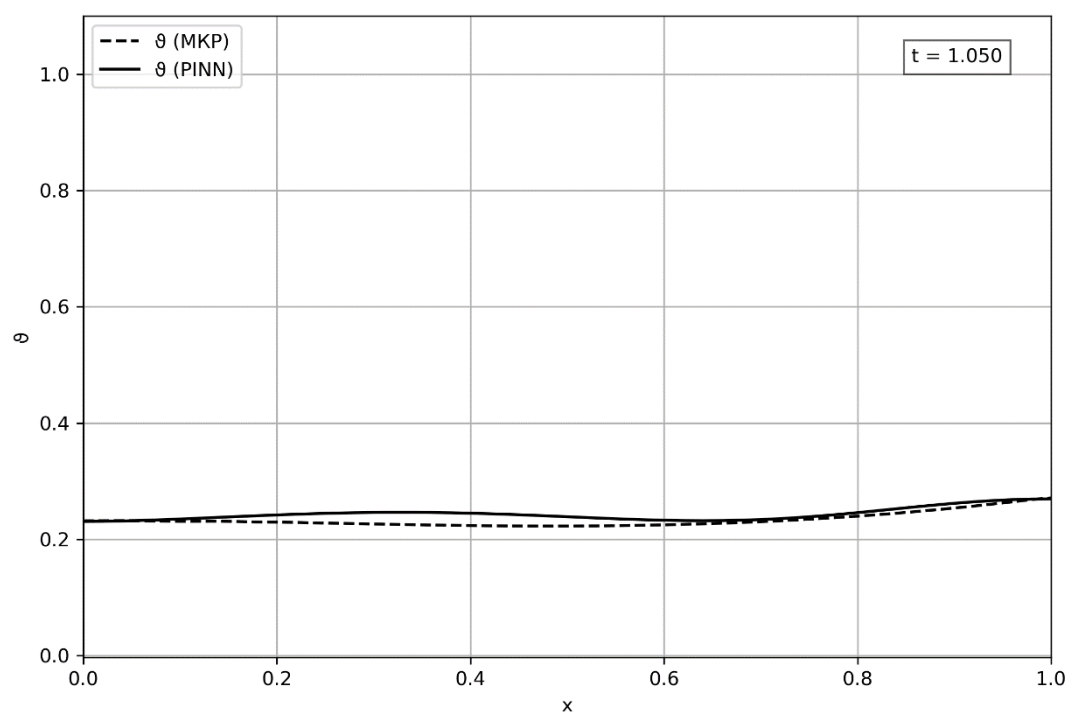


Рис 3.2.3 а. Распределение приращения температуры при $t = 1.05$.

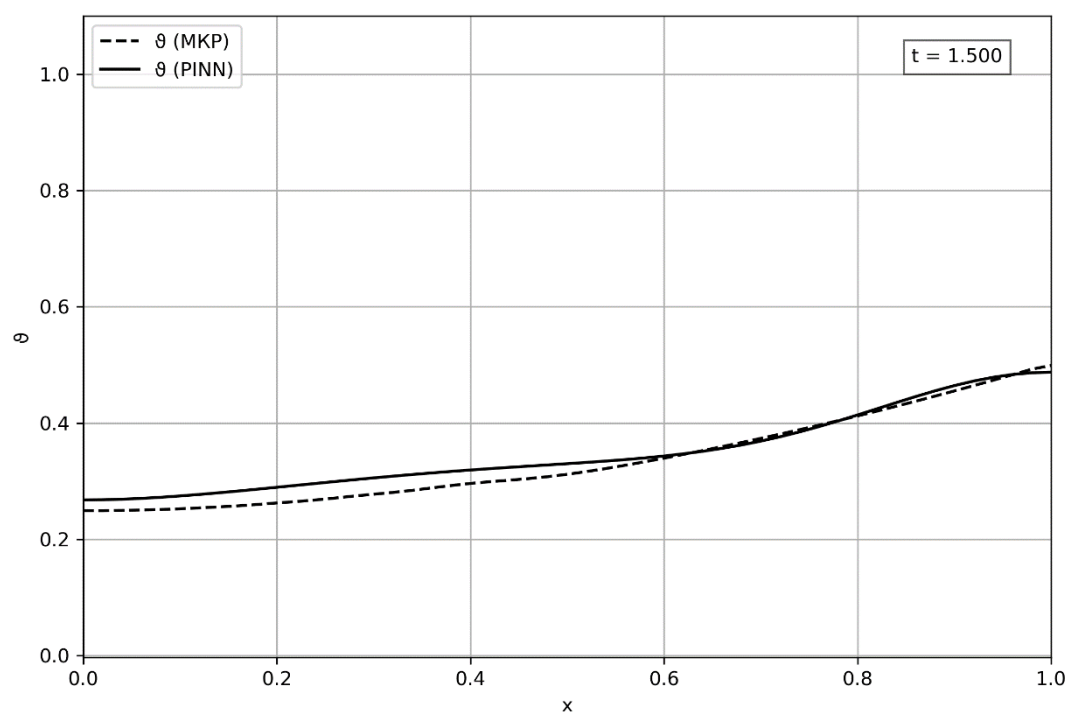


Рис 3.2.3 б. Распределение приращения температуры при $t = 1.5$.

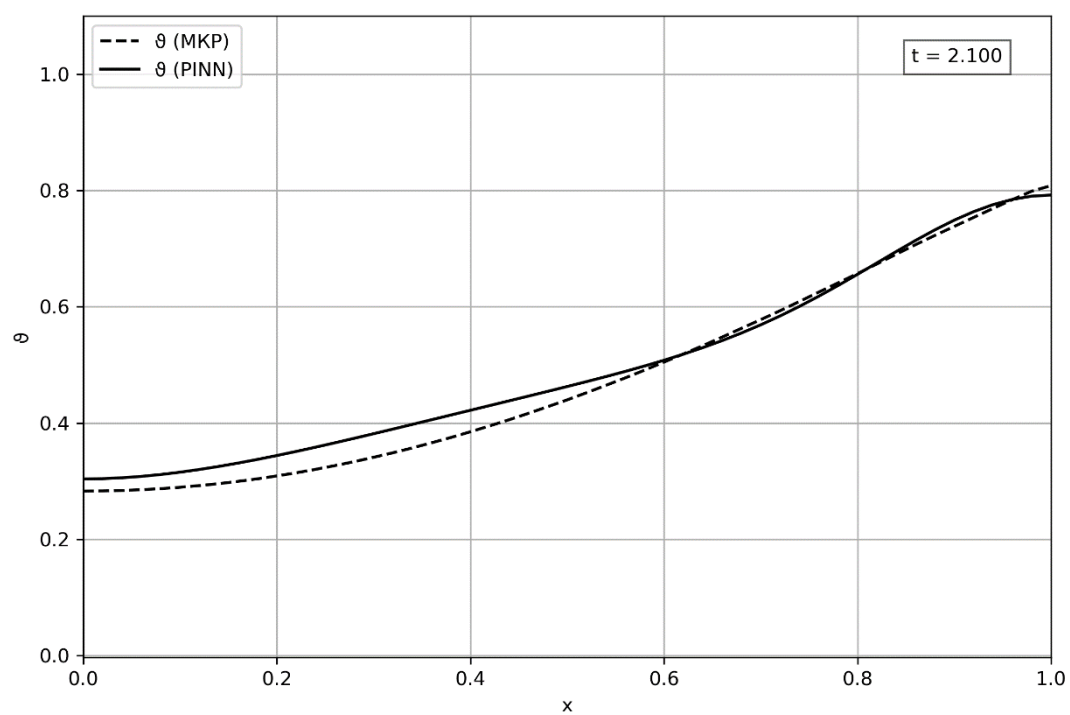


Рис 3.2.3 в. Распределение приращения температуры при $t = 2.1$.

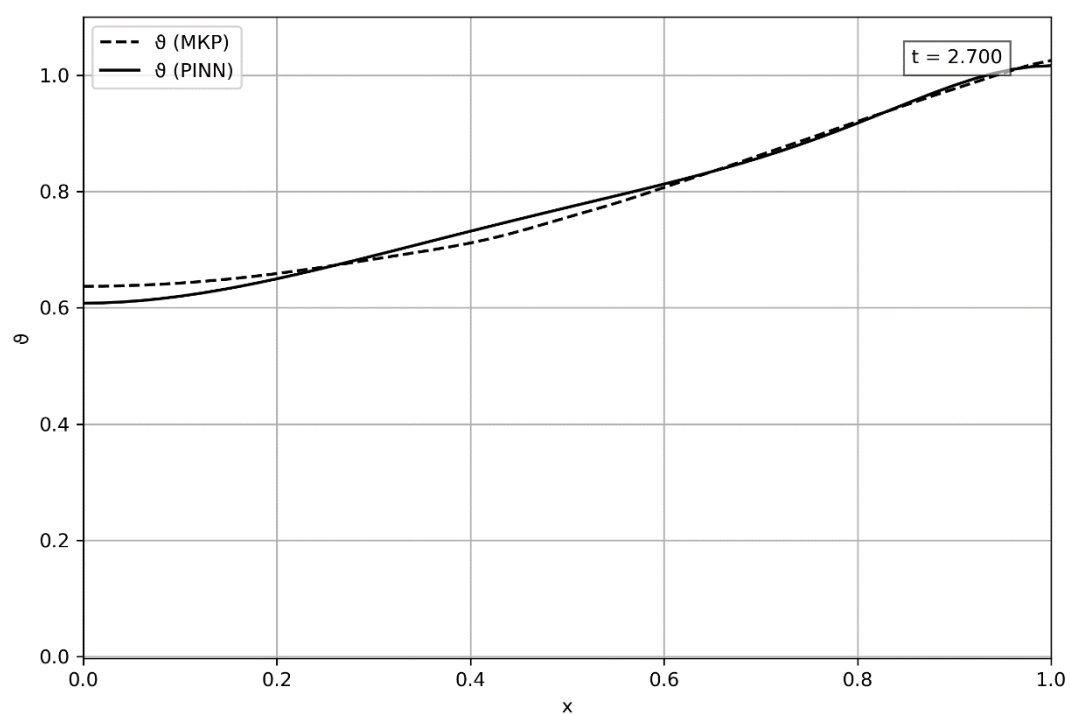


Рис 3.2.3. г. Распределение приращения температуры при $t = 2.7$

На рис 3.2.4 а-г представлены зависимости перемещений от времени в разных точках слоя. Сплошная кривая – решение, полученное с помощью метода PINN, пунктирная – решение с помощью метода конечных разностей.

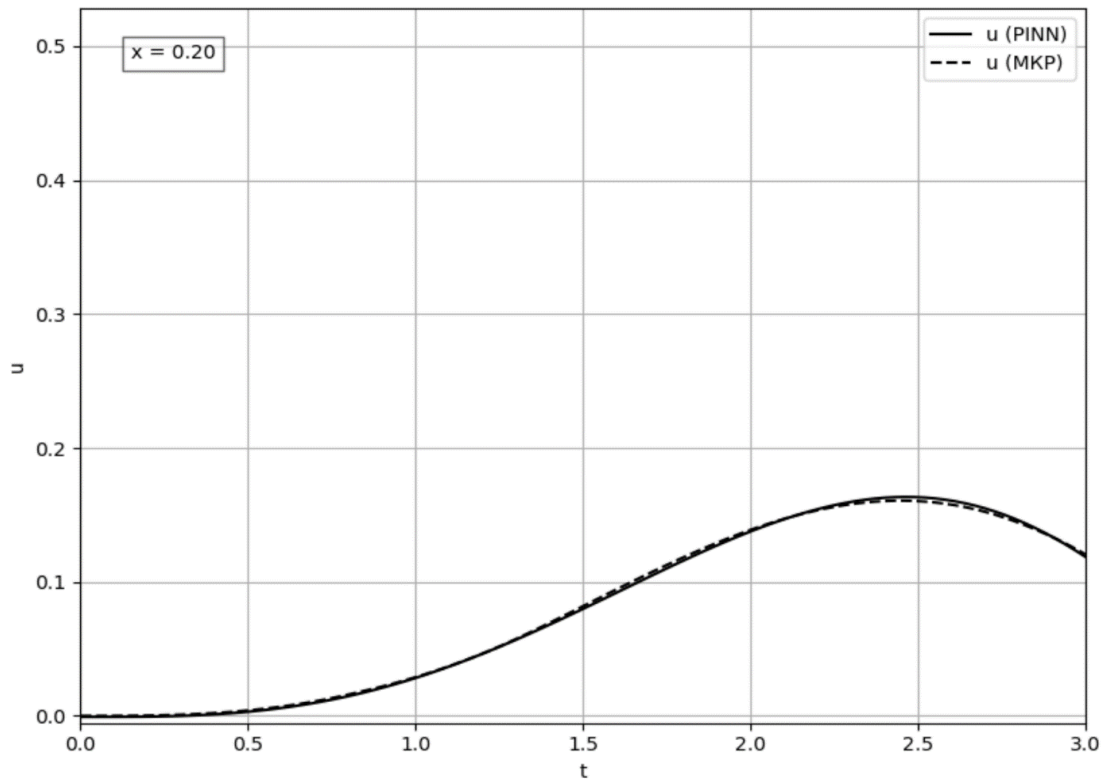


Рис 3.2.4 а. Зависимость перемещений от времени при $x = 0.2$.

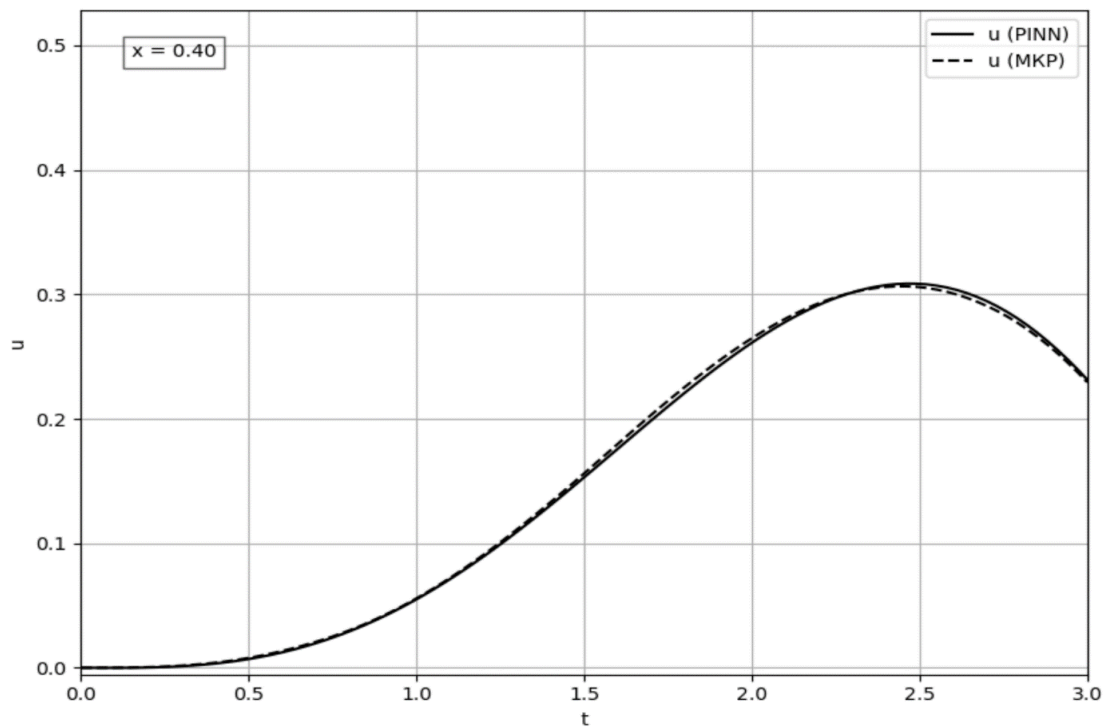


Рис 3.2.4. б. Зависимость перемещений от времени при $x = 0.4$.

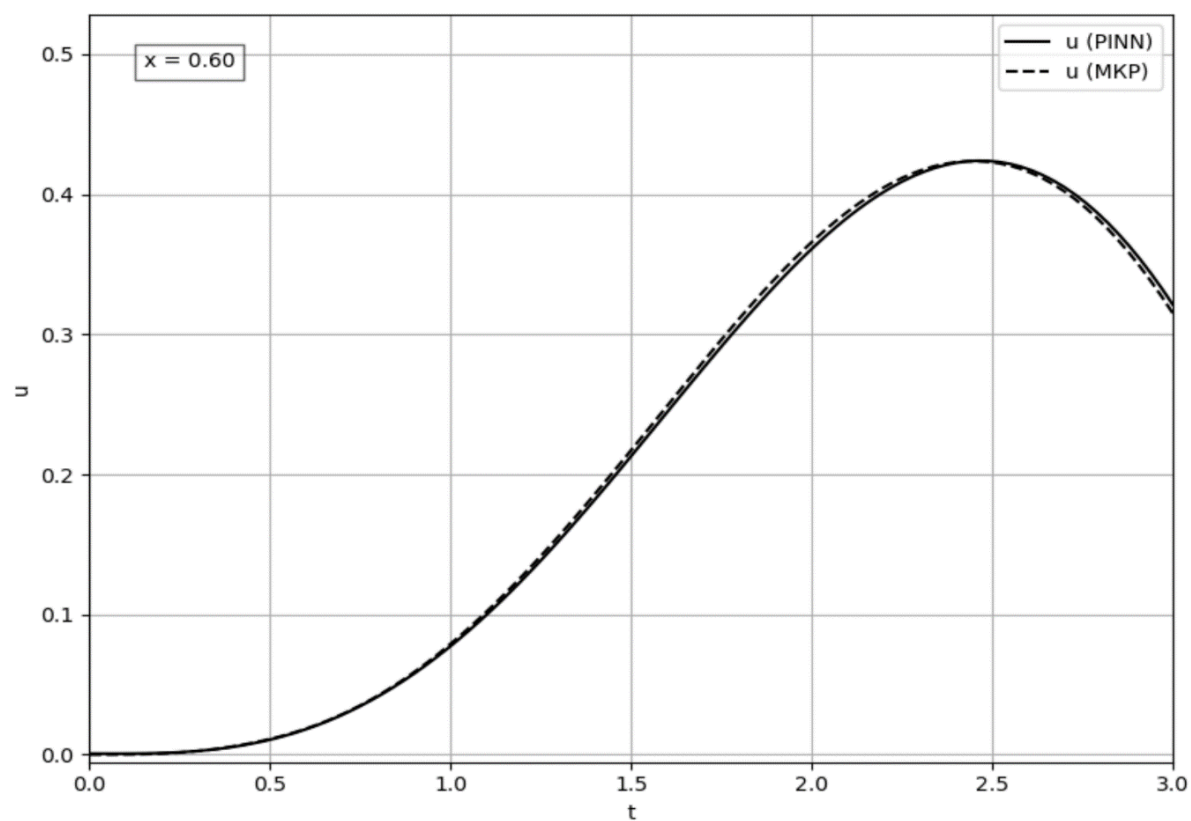


Рис 3.2.4. в. Зависимость перемещений от времени при $x = 0.6$.

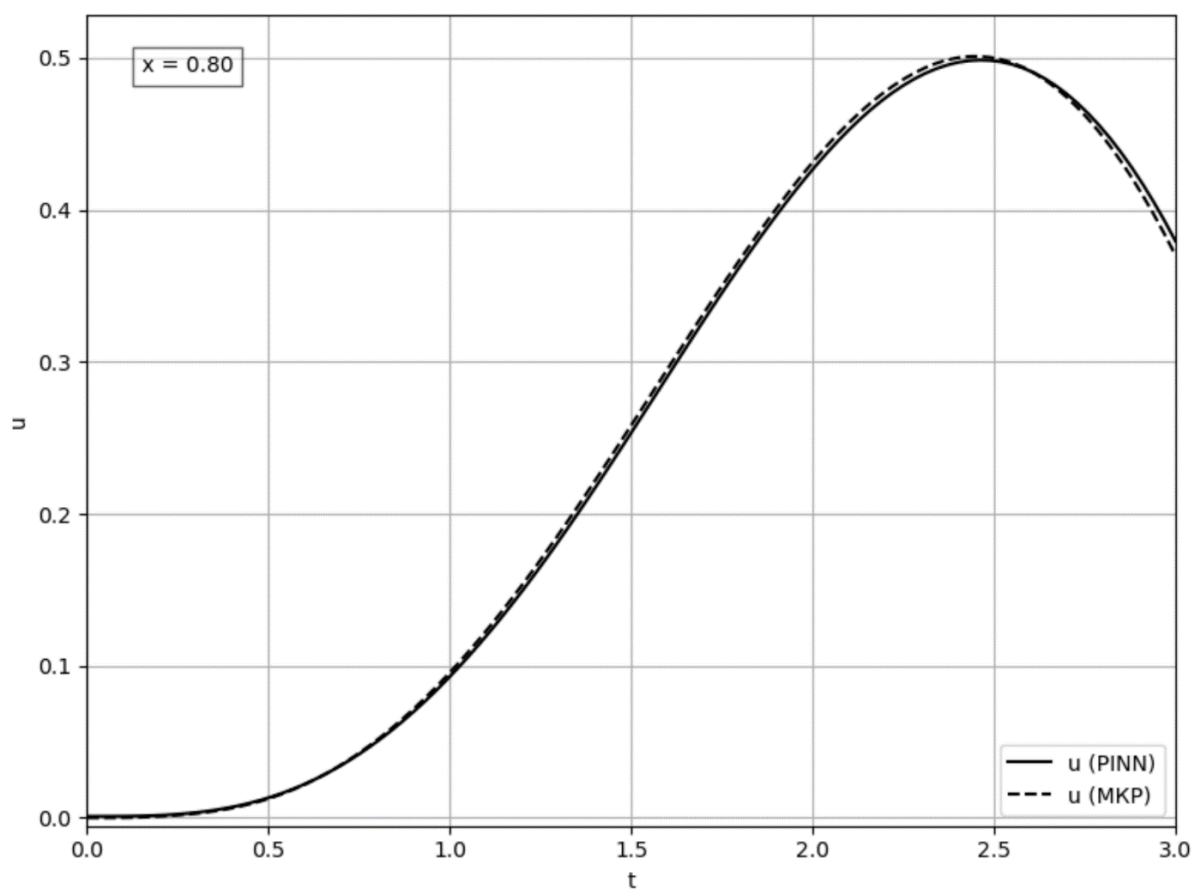


Рис 3.2.4. г. Зависимость перемещений от времени при $x = 0.8$.

Рис 3.2.5 а-г иллюстрирует зависимости приращения температуры от времени в разных точках слоя. Сплошная кривая – решение, полученное с помощью метода PINN, пунктирная – решение с помощью метода конечных разностей.

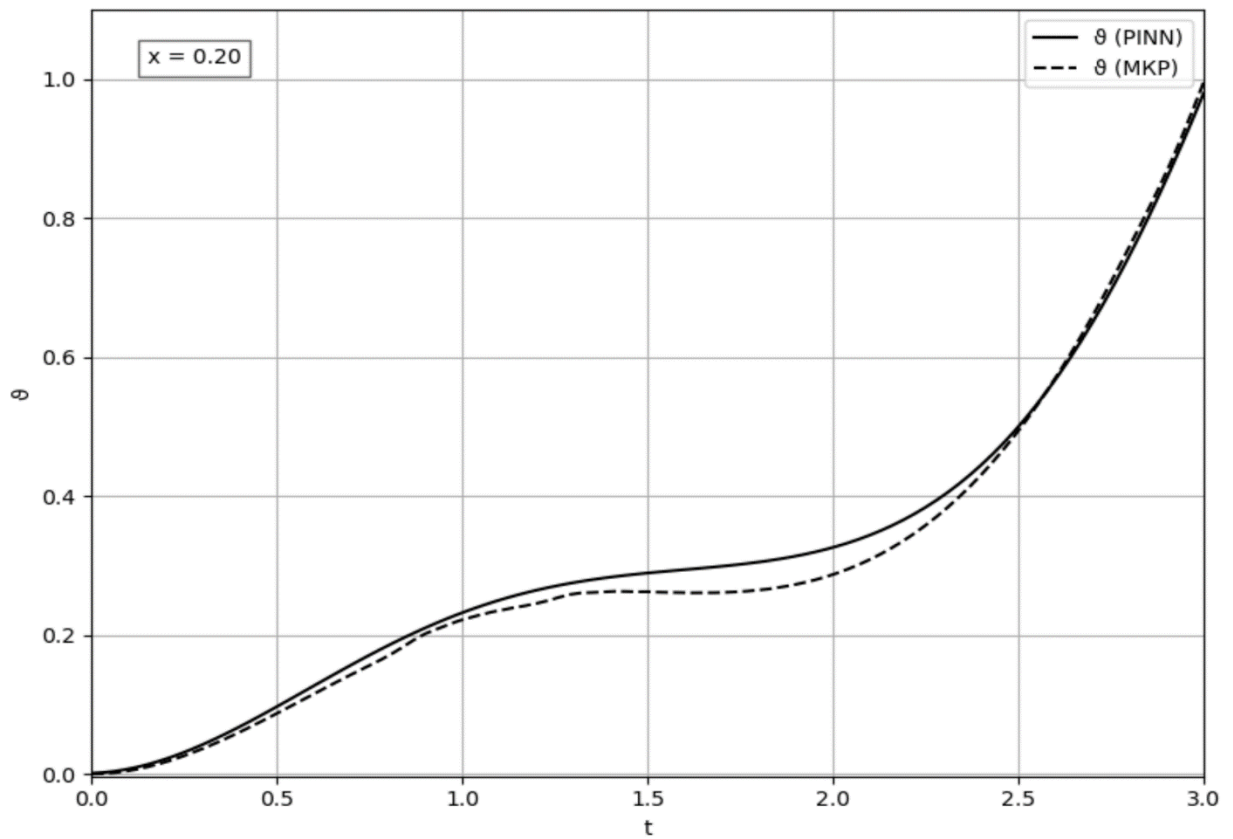


Рис 3.2.5 а. Зависимость приращения температуры от времени при $x = 0.2$.

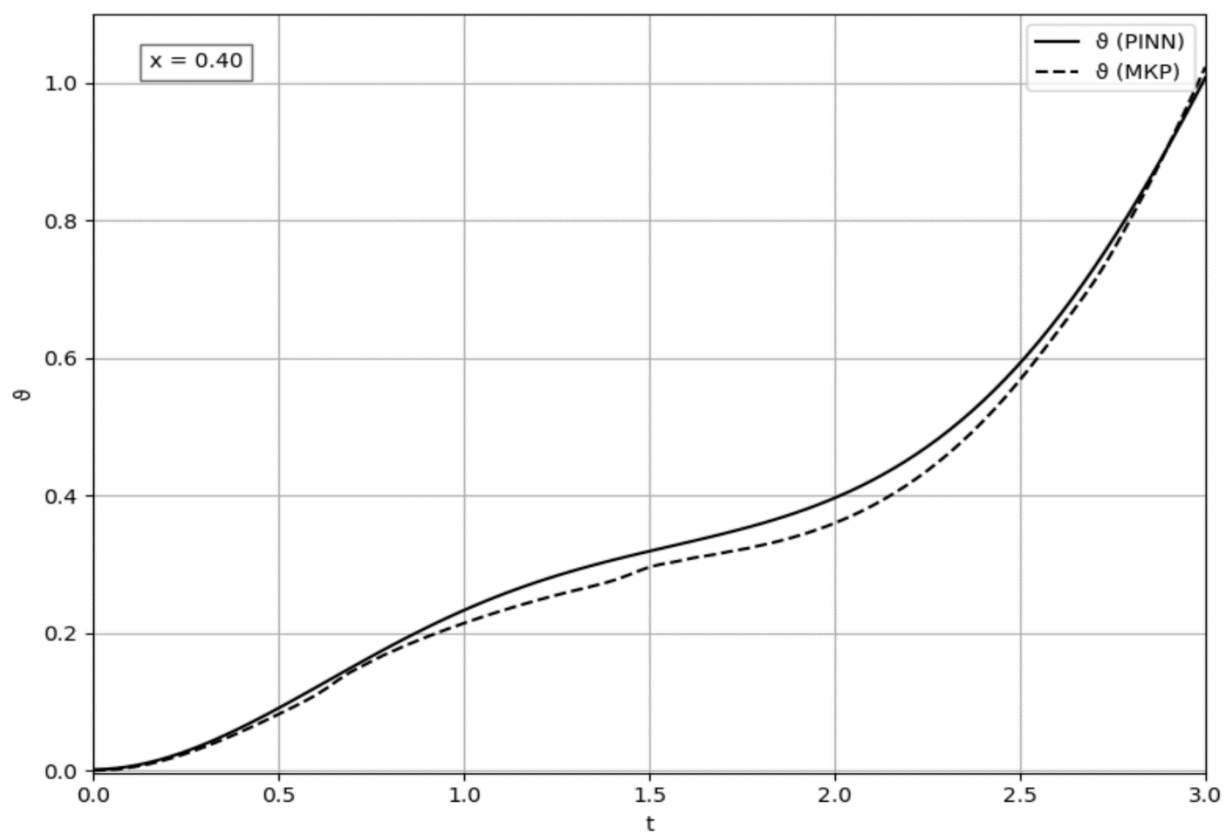


Рис 3.2.5 б. Зависимость приращения температуры от времени при $x = 0.4$.

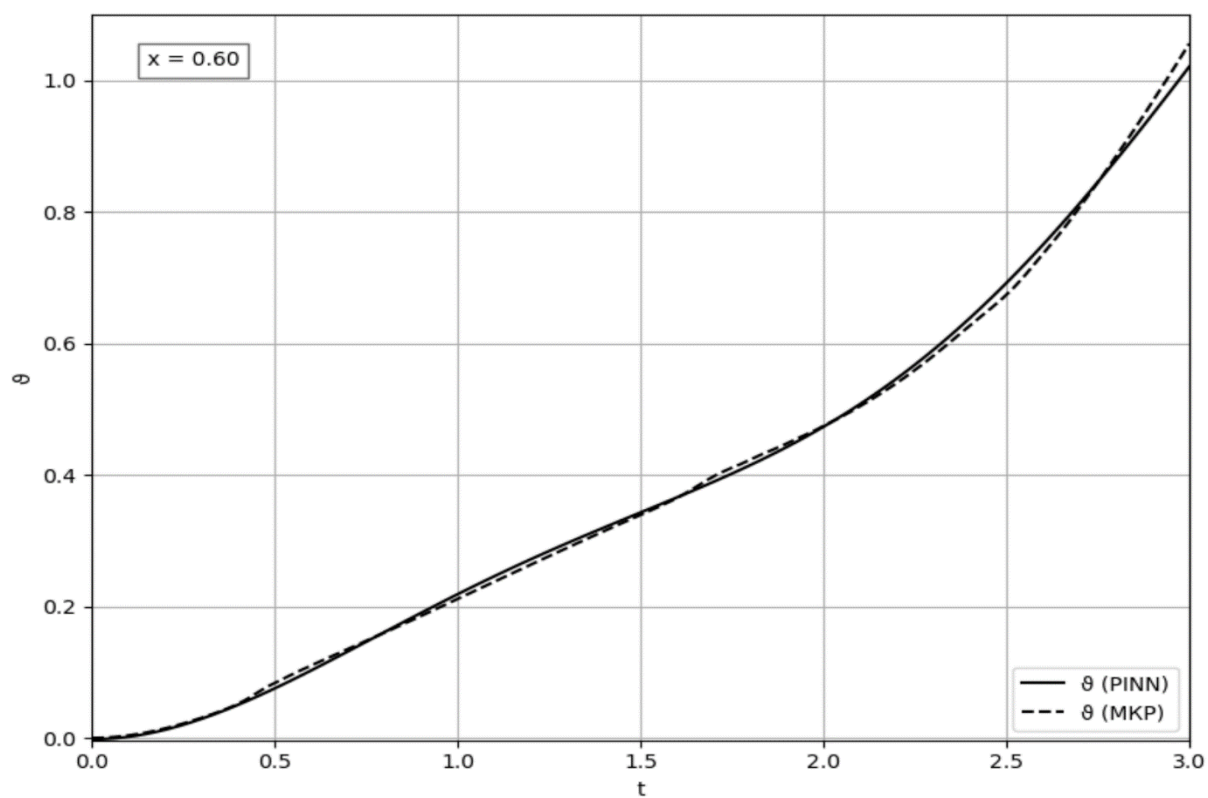


Рис 3.2.5 в. Зависимость приращения температуры от времени при $x = 0.6$.

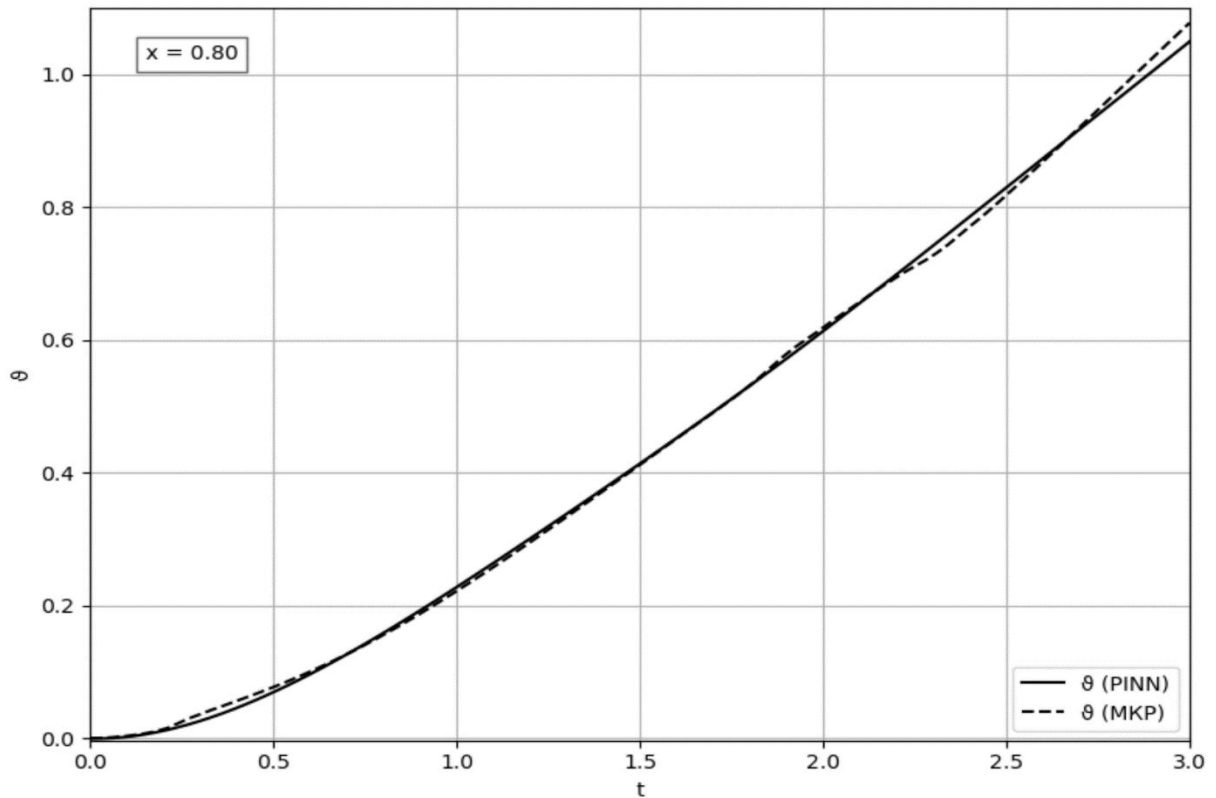


Рис 3.2.5 г. Зависимость приращения температуры от времени при $x = 0.8$.

Результаты анализа сходимости процесса обучения нейросетевых аппроксимаций представлены на рис. 3.2.2.а – 3.2.5.г. На рис. 3.2.6. представлен график функции потерь в зависимости от числа эпох обучения методом Adam ($\text{epoch} \in [0, 2000]$), а также от количества итераций метода L-BFGS ($\text{epoch} > 2000$). По оси ординат значения на графике представлены в логарифмическом масштабе. Видно, что подключение метода L-BFGS на втором этапе обучения положительно влияет на динамику сходимости аппроксимаций.

Рис. 3.2.7 и 3.2.8 представлены зависимости среднеквадратических отклонений аналитического решения и решения, полученного методом PINN в зависимости от числа эпох метода Adam и количества итерации метода L-BFGS. На рис. 3.2.7. представлен график Δ_u^2 , а на рис. 3.2.8. – Δ_g^2 (см. (2.70)).

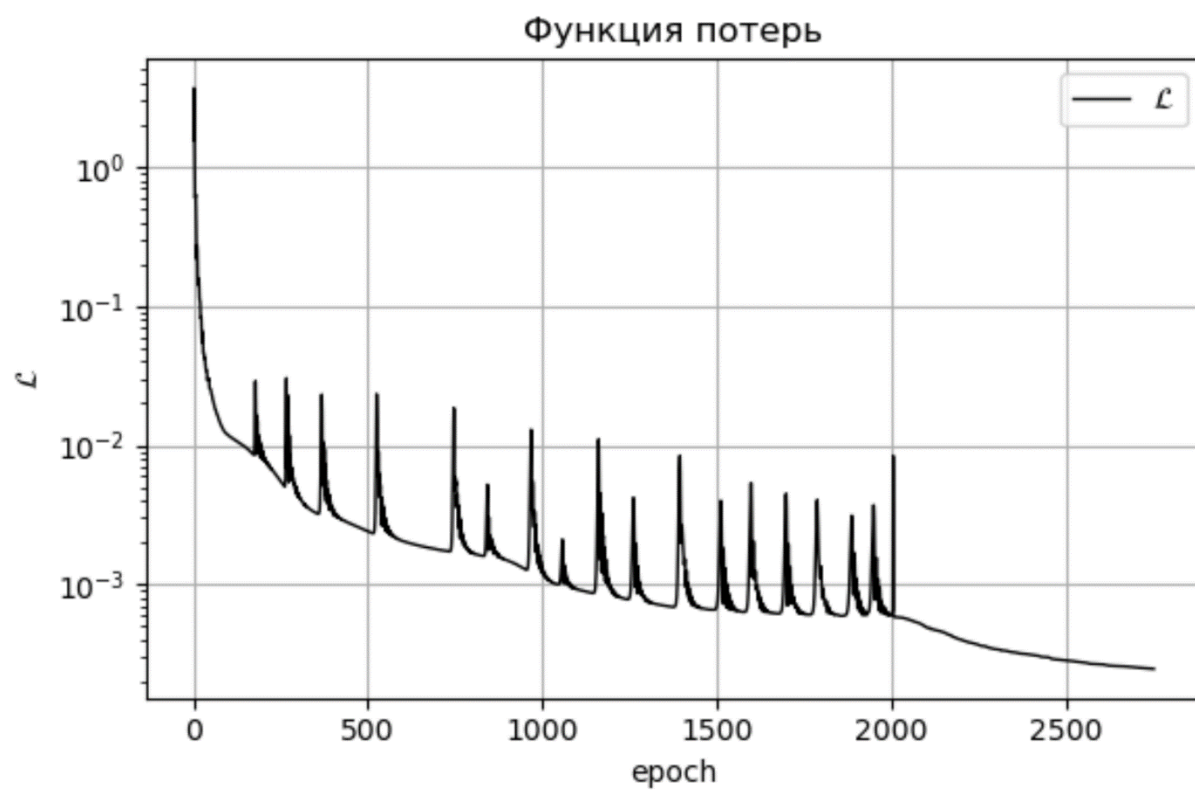
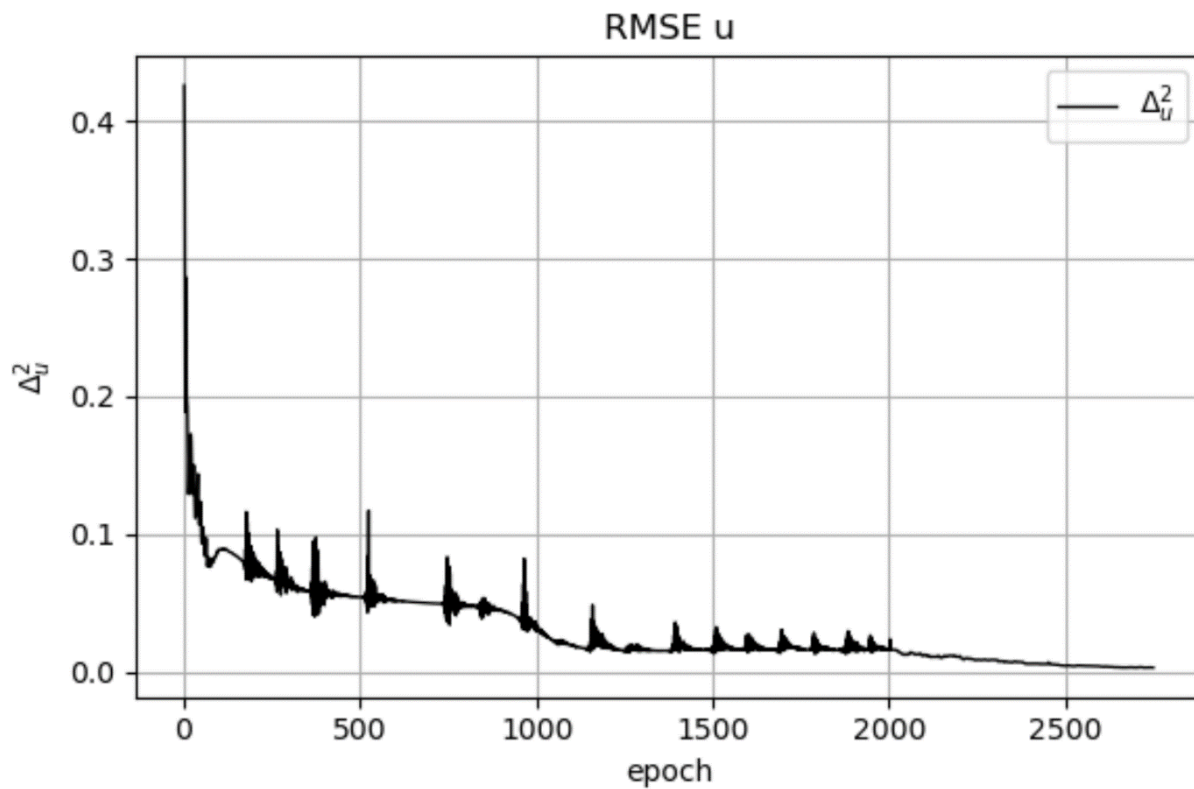


Рис 3.2.6. Функция потерь.

Рис 3.2.7. Среднеквадратическое отклонение Δ_u^2 .

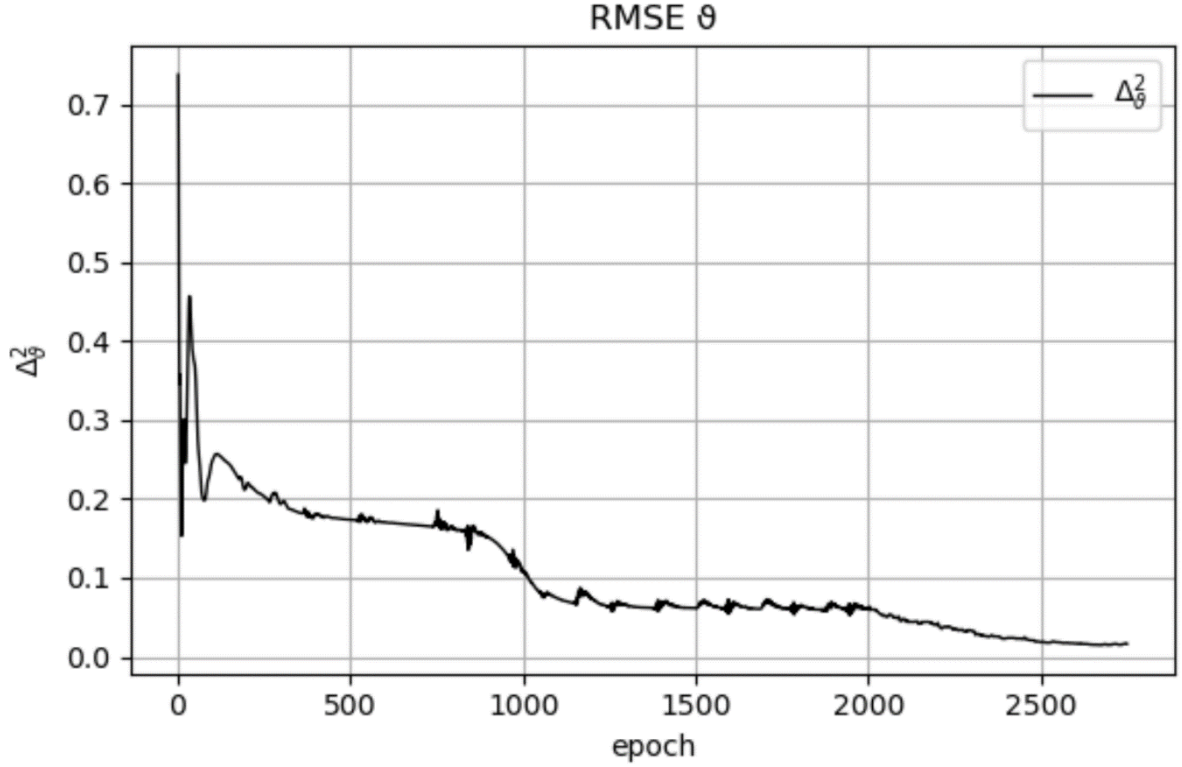


Рис 3.2.8. Среднеквадратическое отклонение Δ_{ϑ}^2 .

3.3. Воздействие тепловых потоков на границы термоупругого слоя

Рассматривается термоупругий слой, находящийся в поле массовых сил и внутренних источников тепла. На границы слоя $x=0$ и $x=1$ воздействуют тепловые потоки, зависящие от времени. При этом обе границы жестко закреплены. Начальные условия – не однородные:

$$\begin{aligned}
 \ddot{u} &= u'' - \alpha \vartheta' + F(x, t), \quad \dot{\vartheta} = \kappa \vartheta'' - \beta \dot{u}' + Q(x, t); \\
 u|_{t=0} &= \sin(\pi x), \quad \dot{u}|_{t=0} = 0, \quad \vartheta|_{t=0} = \cos(\pi x); \\
 u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad \vartheta'|_{x=0} = 0.1 \sin(t), \quad \vartheta'|_{x=1} = -0.1 \cos(t). \\
 F(x, t) &= \sin(\pi x) \cos(t), \quad Q(x, t) = x(1-x)e^{-t}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

При выполнении расчётов использовались те же параметры численного метода и метода PINN, что и в предыдущей задаче. За исключением того, что в этом случае нейросетевые аппроксимации $\mathcal{N}_u$ и $\mathcal{N}_{\vartheta}$ содержали 3 полносвязных внутренних слоя по 100 нейронов в каждом.

На рис 3.3.1 а-г представлены распределения перемещений в различные моменты времени. Сплошная кривая – решение, полученное с помощью метода PINN, пунктирная – решение с помощью метода конечных разностей. Аналогичные результаты для приращения температуры представлены на рис 3.3.2 а-г.

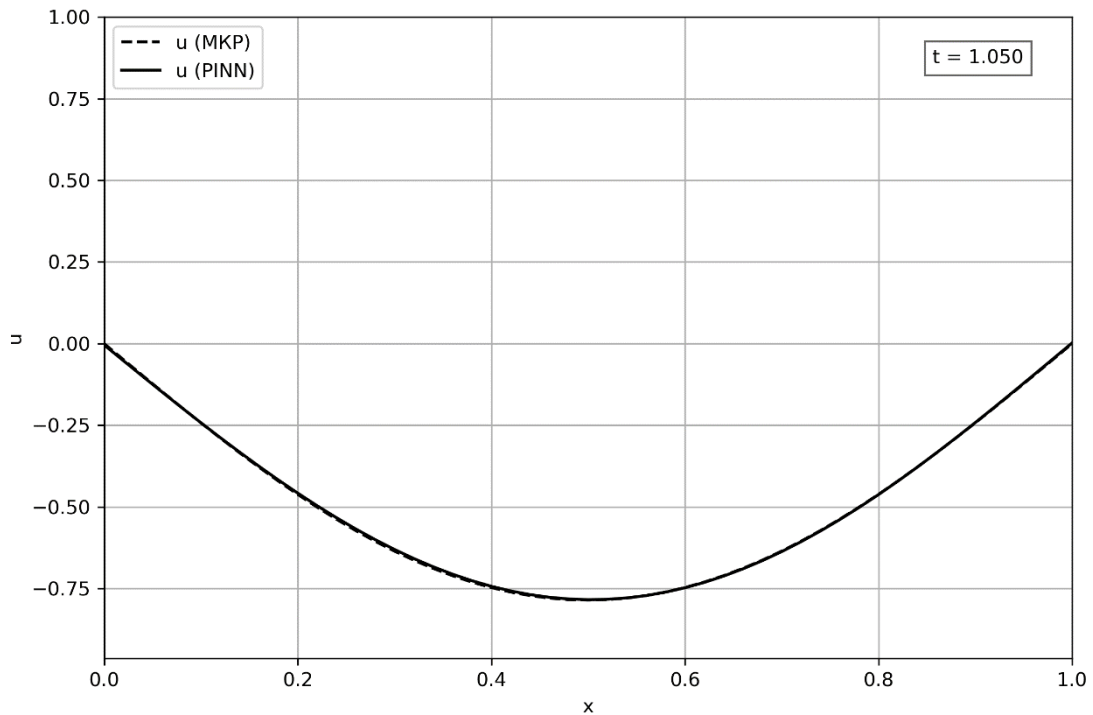


Рис. 3.3.1 а. Распределение перемещений в момент времени $t = 1.05$.

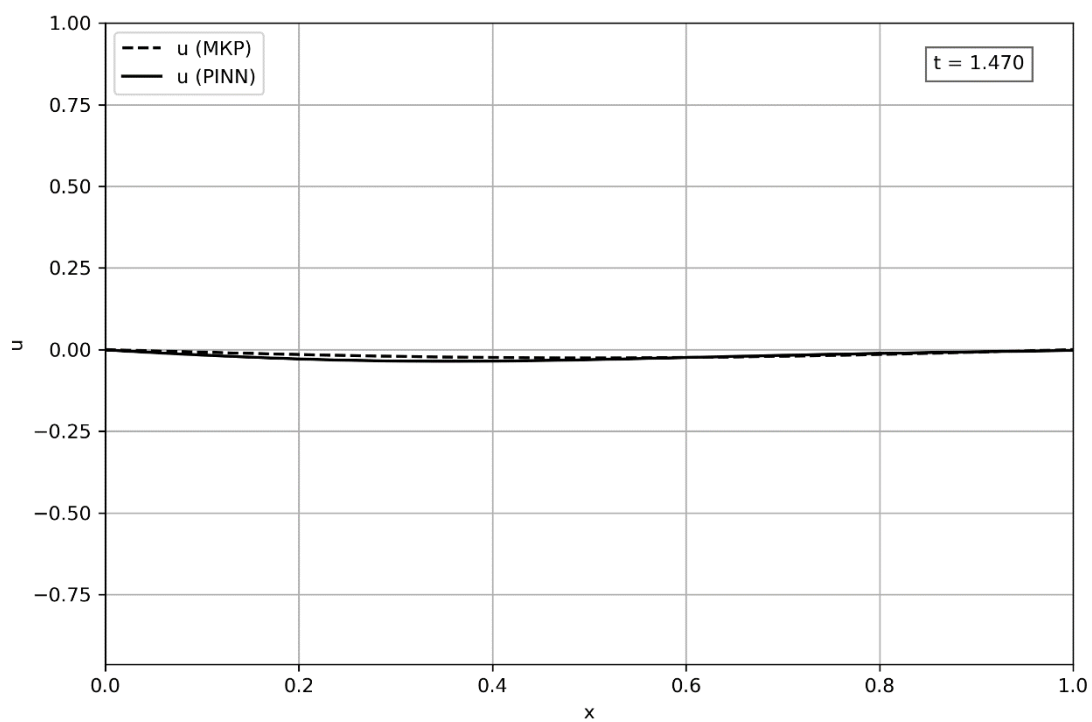


Рис. 3.3.1 б. Распределение перемещений в момент времени $t = 1.5$.

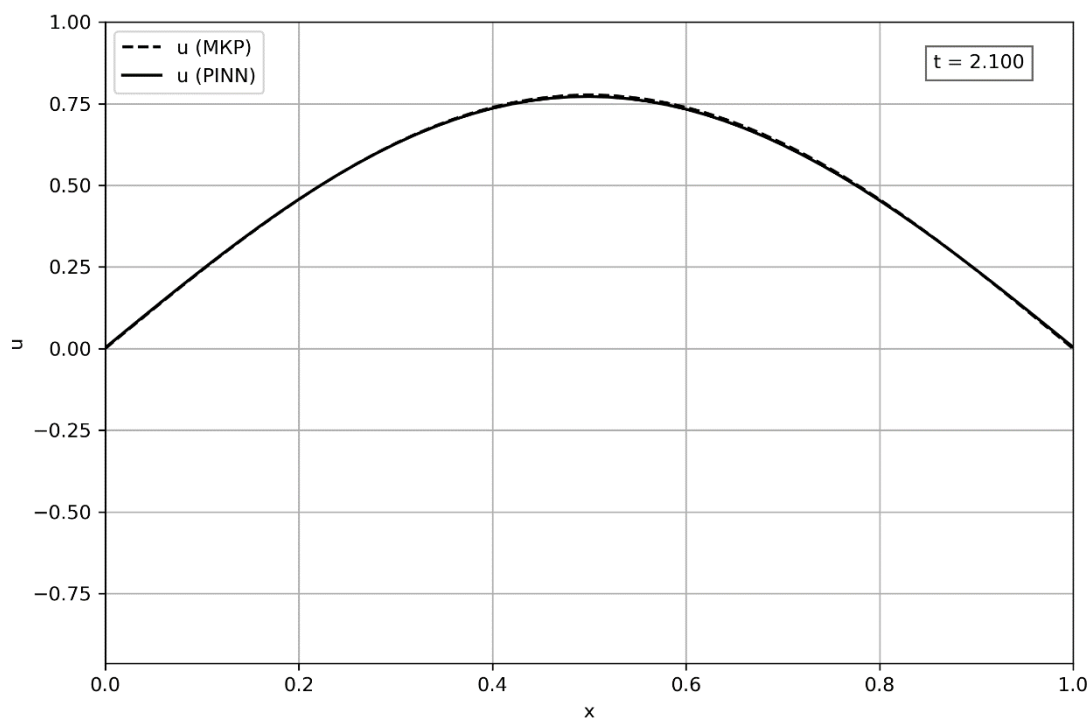


Рис. 3.3.1 в. Распределение перемещений в момент времени $t = 2.1$.

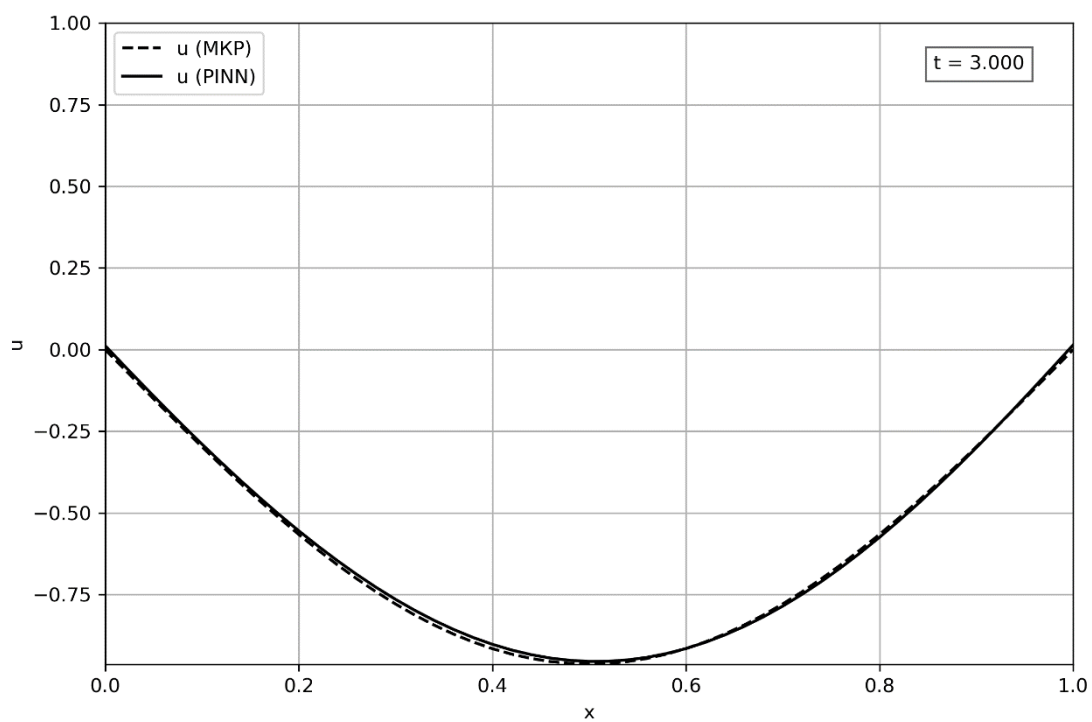


Рис. 3.3.1 г. Распределение перемещений в момент времени $t = 3$.

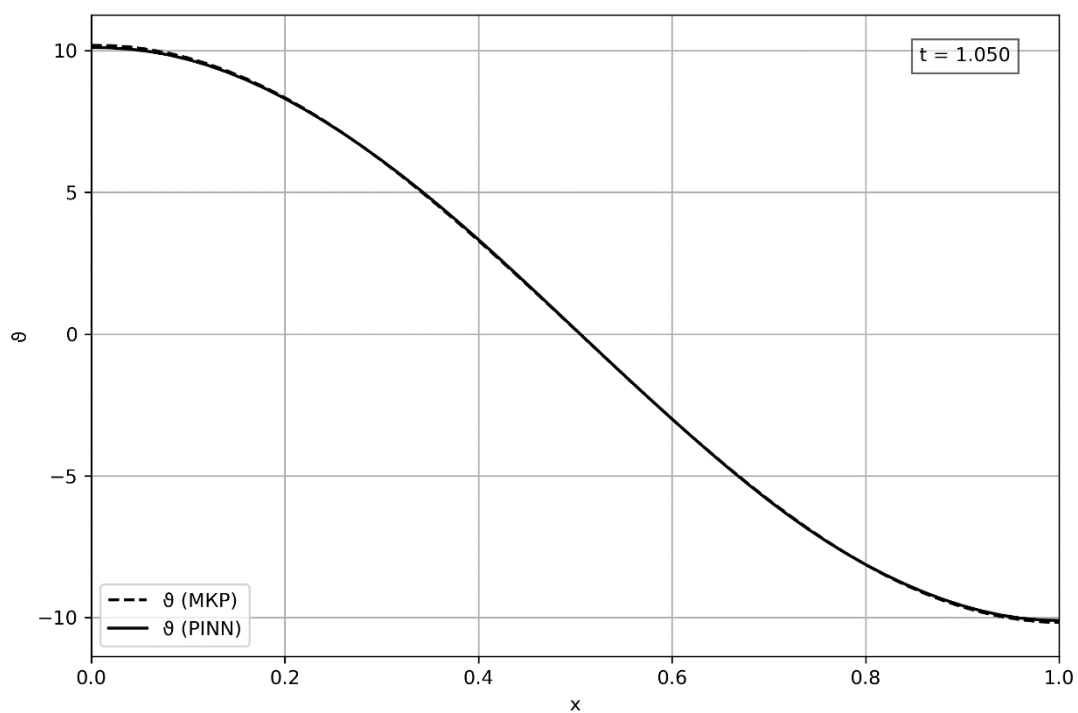


Рис. 3.3.2 а. Распределение приращения температуры при $t = 1.05$.

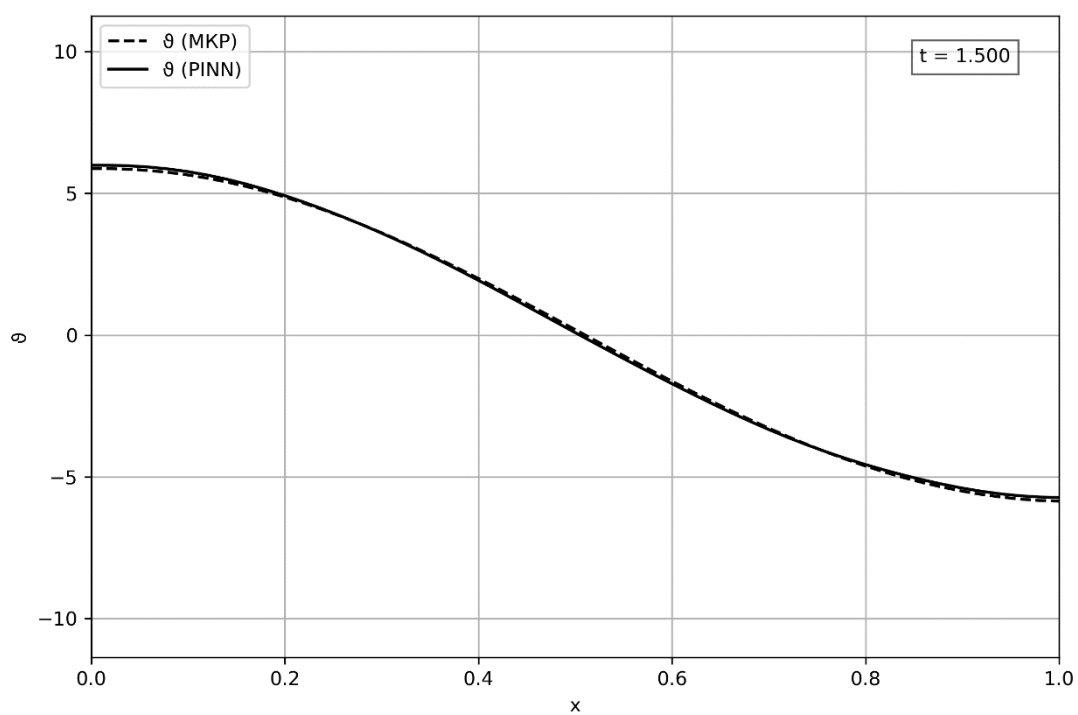


Рис. 3.3.2 б. Распределение приращения температуры при $t = 1.5$.

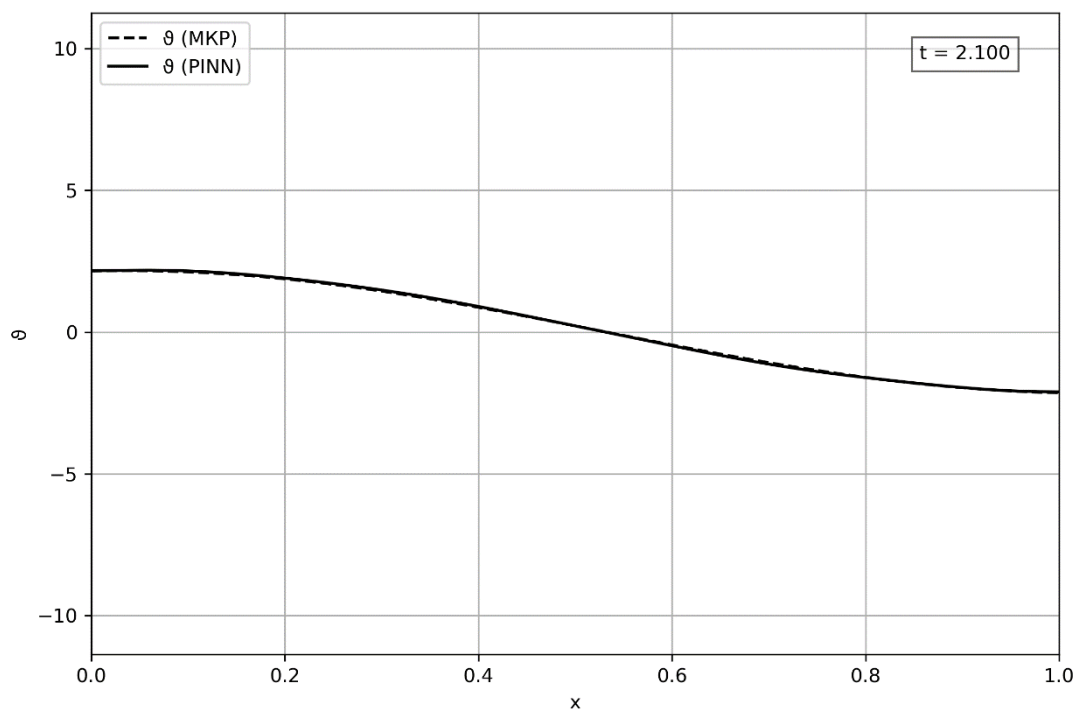


Рис. 3.3.2 в. Распределение приращения температуры при $t = 2.1$.

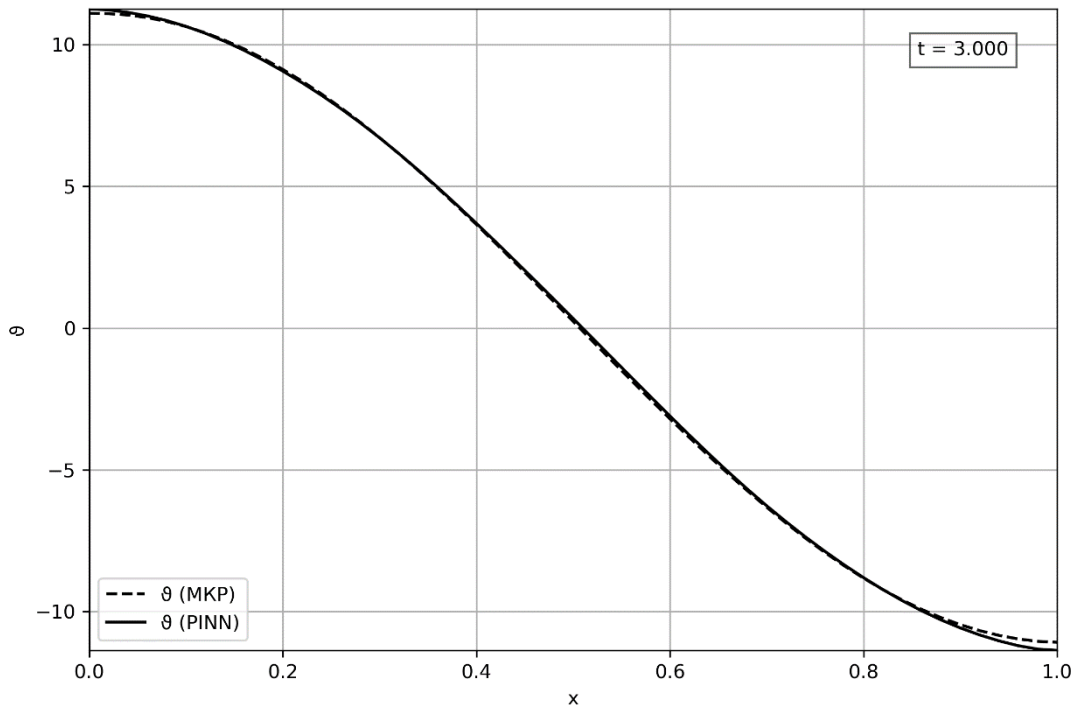


Рис. 3.3.2 г. Распределение приращения температуры при $t = 2.7$.

На рис 3.3.3 а-г представлены зависимости перемещений от времени в разных точках слоя. Сплошная кривая – решение, полученное с помощью метода PINN, пунктирная – решение с помощью метода конечных разностей.

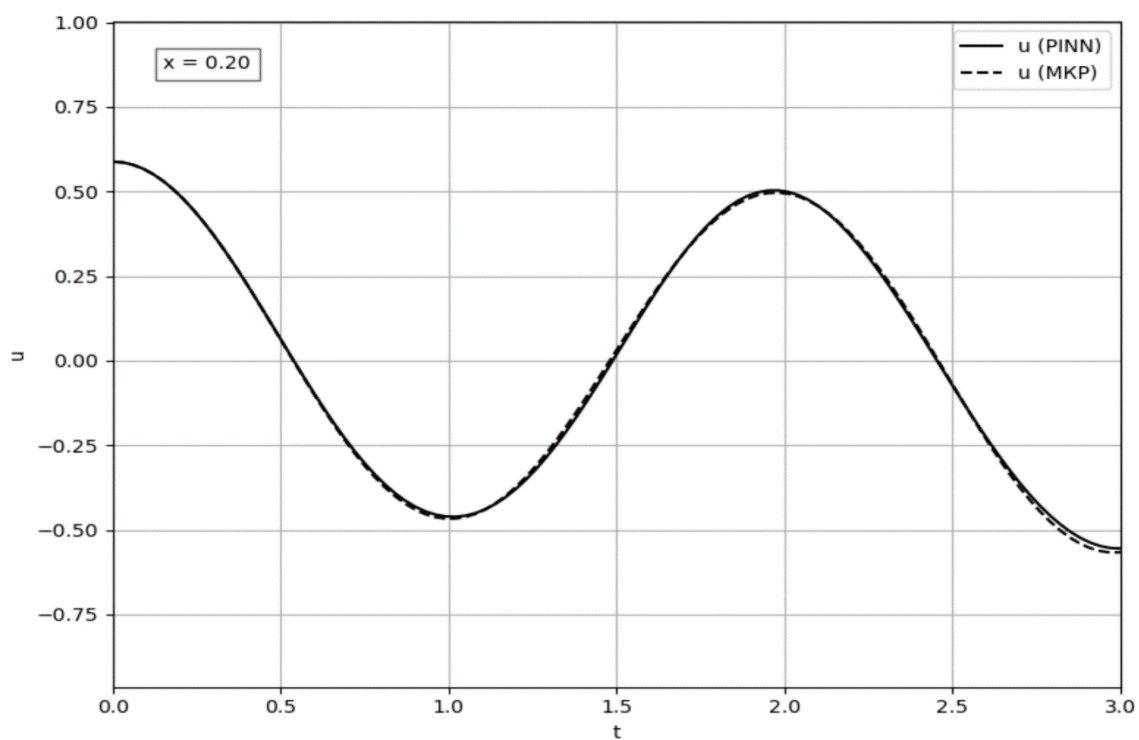


Рис. 3.3.3 а. Зависимость перемещений от времени при $x = 0.2$.

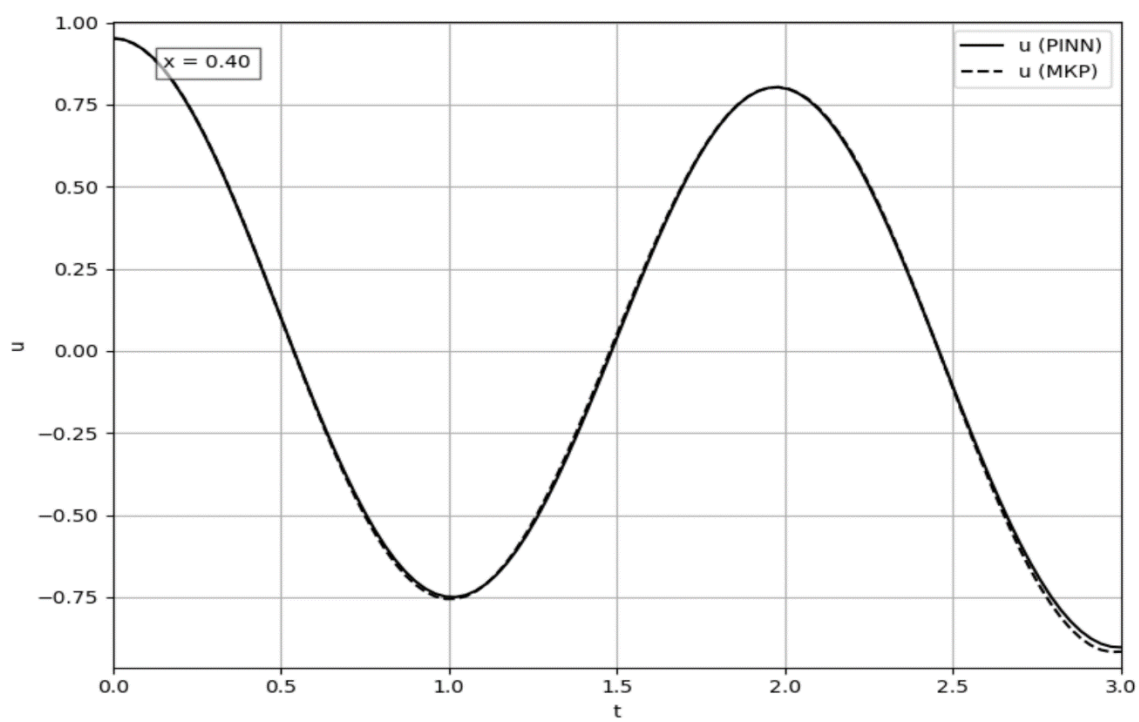


Рис. 3.3.3 б. Зависимость перемещений от времени при $x = 0.4$.

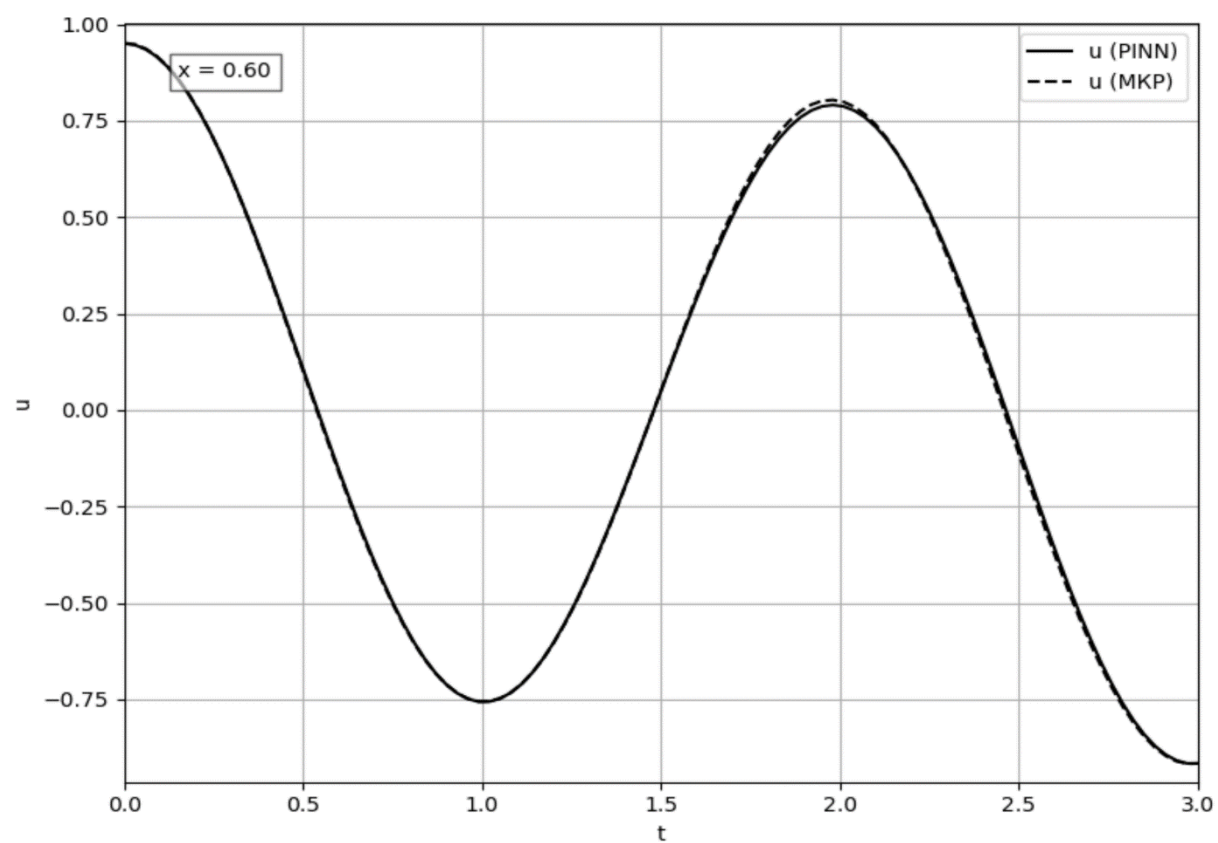


Рис. 3.3.3 в. Зависимость перемещений от времени при $x = 0.6$.

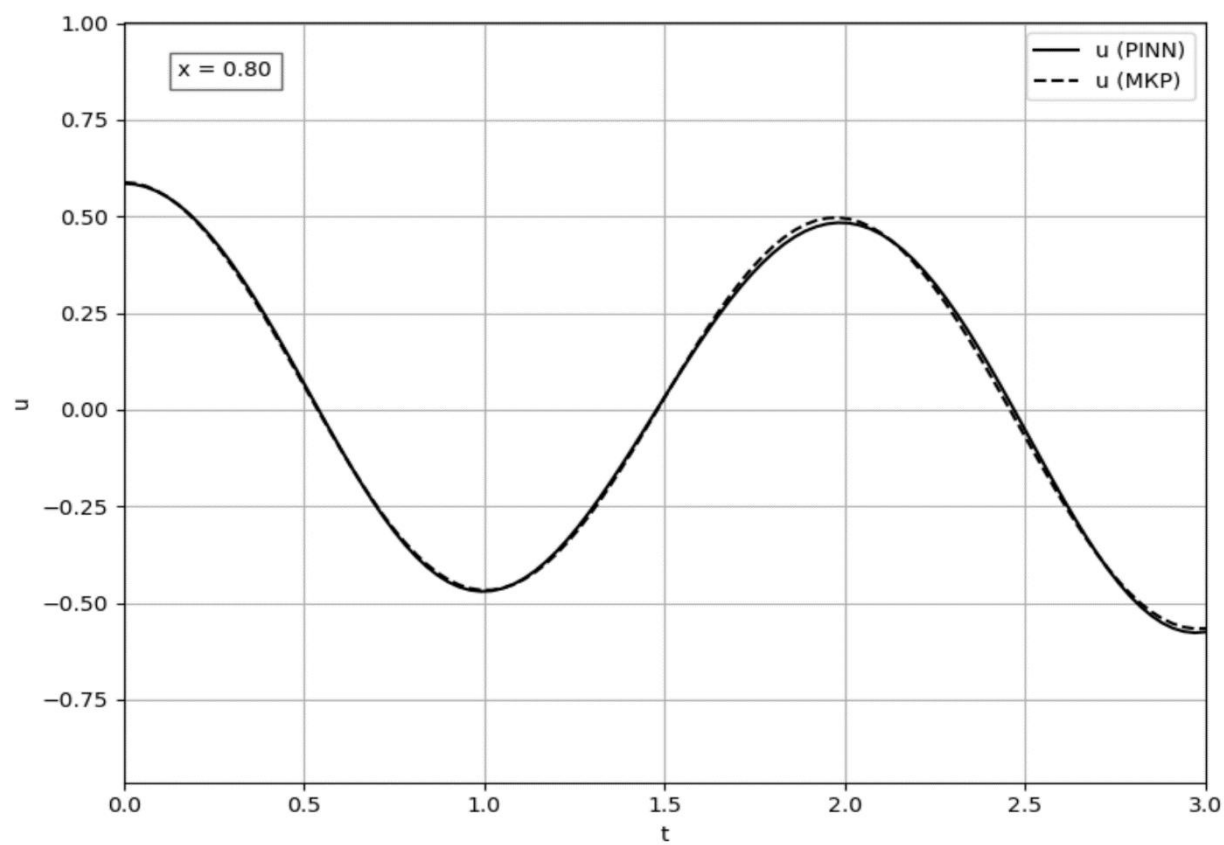


Рис. 3.3.3 г. Зависимость перемещений от времени при $x = 0.8$.

Рис 3.3.4 а-г иллюстрирует зависимости приращения температуры от времени в разных точках слоя. Сплошная кривая – решение, полученное с помощью метода PINN, пунктирная – решение с помощью метода конечных разностей.

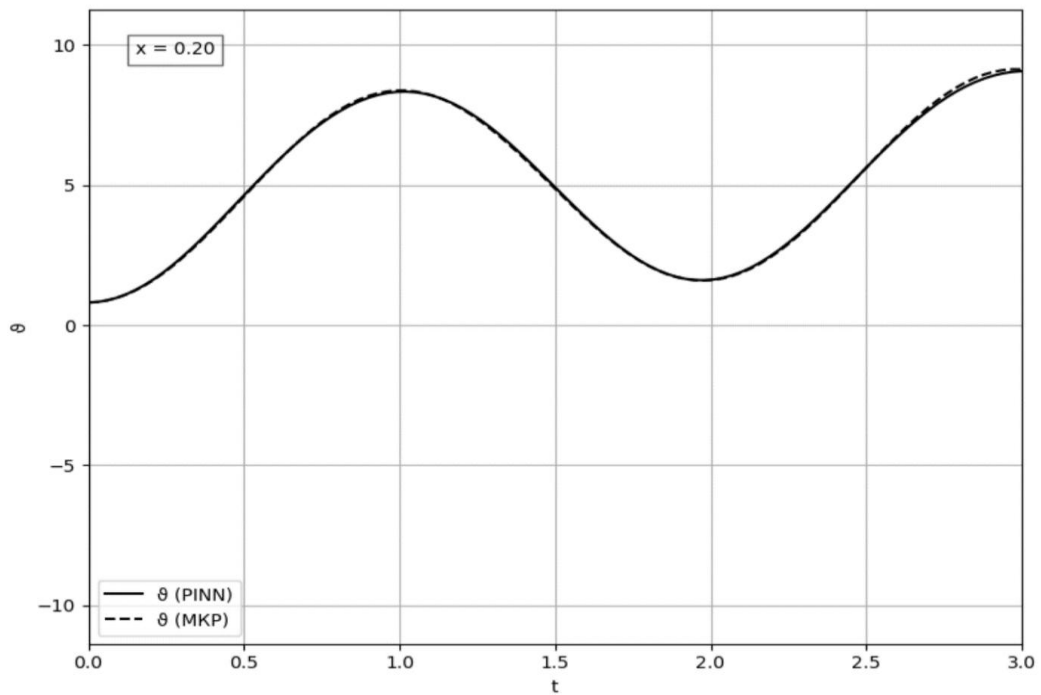


Рис. 3.3.4 а. Зависимость приращения температуры от времени при $x = 0.2$.

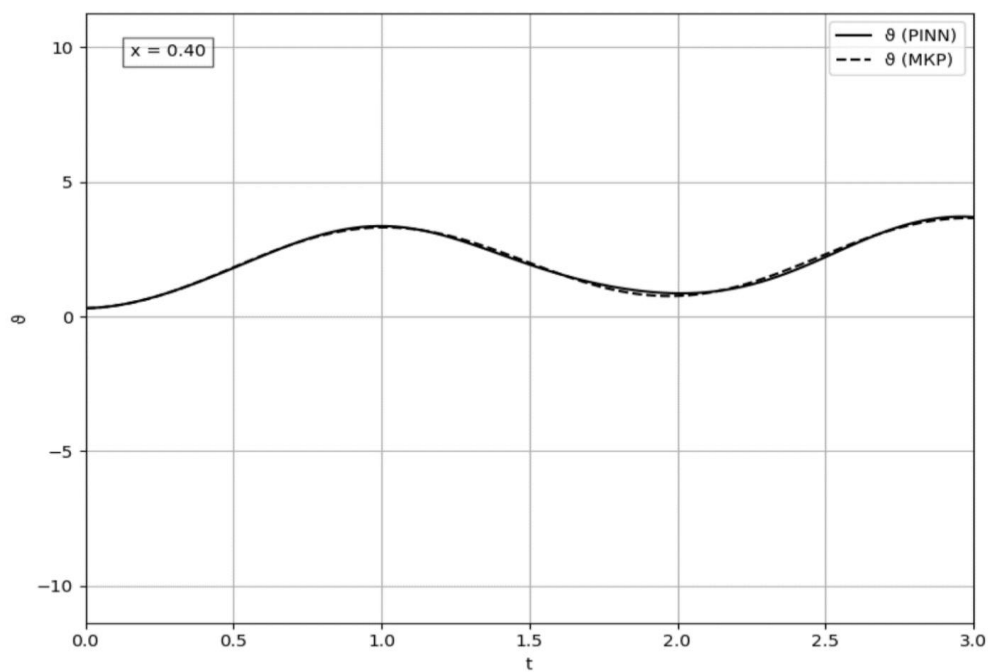


Рис. 3.3.4 б. Зависимость приращения температуры от времени при $x = 0.4$.

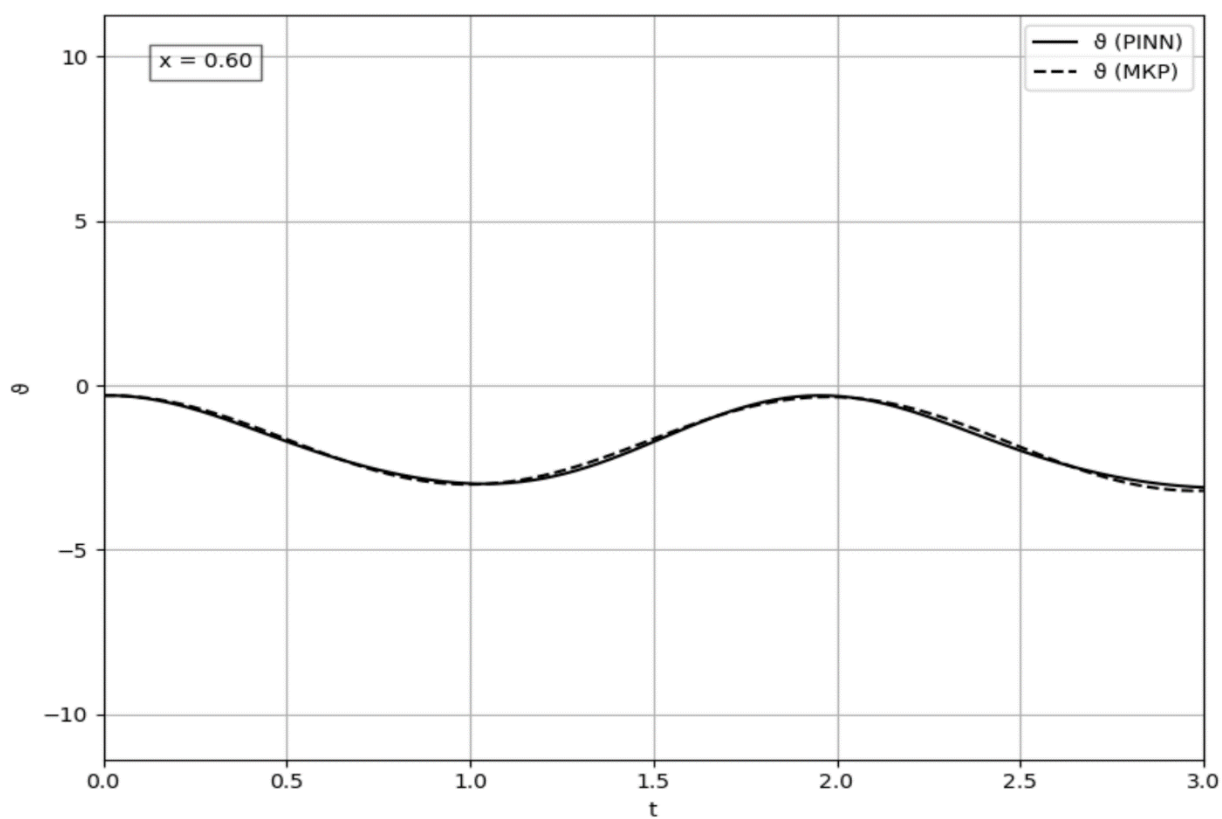


Рис. 3.3.4 в. Зависимость приращения температуры от времени при $x = 0.6$.

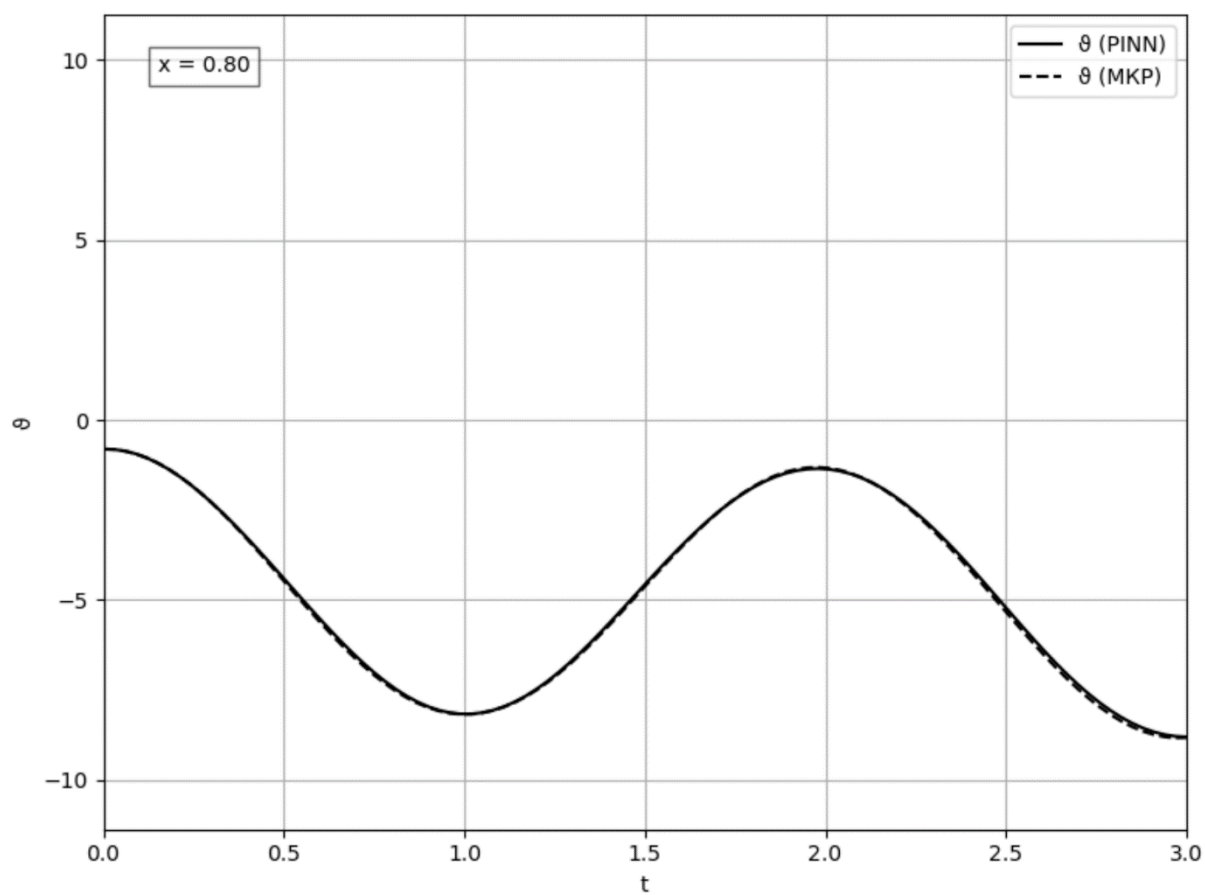


Рис. 3.3.4 г. Зависимость приращения температуры от времени при $x = 0.8$.

Результаты анализа сходимости процесса обучения нейросетевых аппроксимаций представлены на рис. 3.3.1.а – 3.3.4.г На рис. 3.3.5 представлен график функции потерь в зависимости от числа эпох обучения методом Adam ($\text{epoch} \in [0, 2000]$), а также от количества итераций метода L-BFGS ($\text{epoch} > 2000$). По оси ординат значения на графике представлены в логарифмическом масштабе. Видно, что подключение метода L-BFGS на втором этапе обучения положительно влияет на динамику сходимости аппроксимаций.

Рис. 3.3.6 и 3.3.7 представлены зависимости среднеквадратических отклонений аналитического решения и решения, полученного методом PINN в зависимости от числа эпох метода Adam и количества итерации метода L-BFGS. На рис. 3.3.6 представлен график Δ_u^2 , а на рис. 3.3.7 – Δ_g^2 (см. (2.70)).

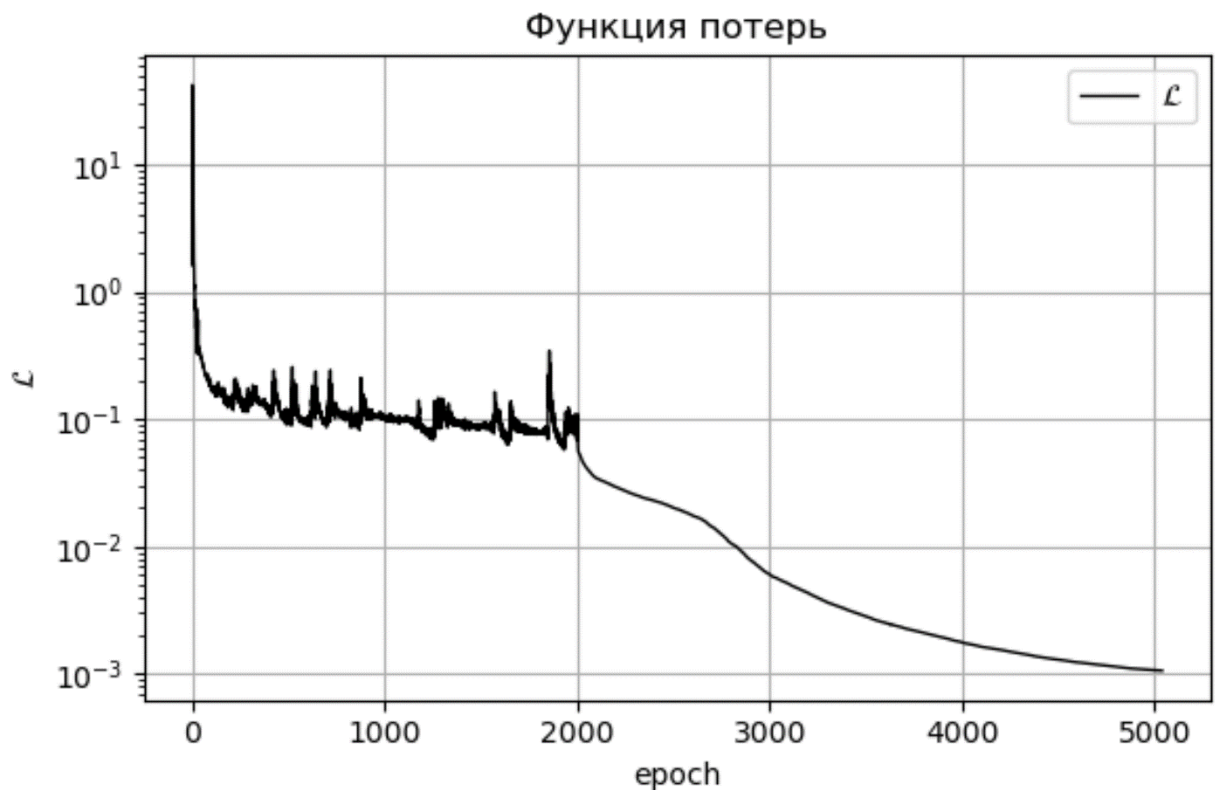


Рис. 3.3.5. Функция потерь.

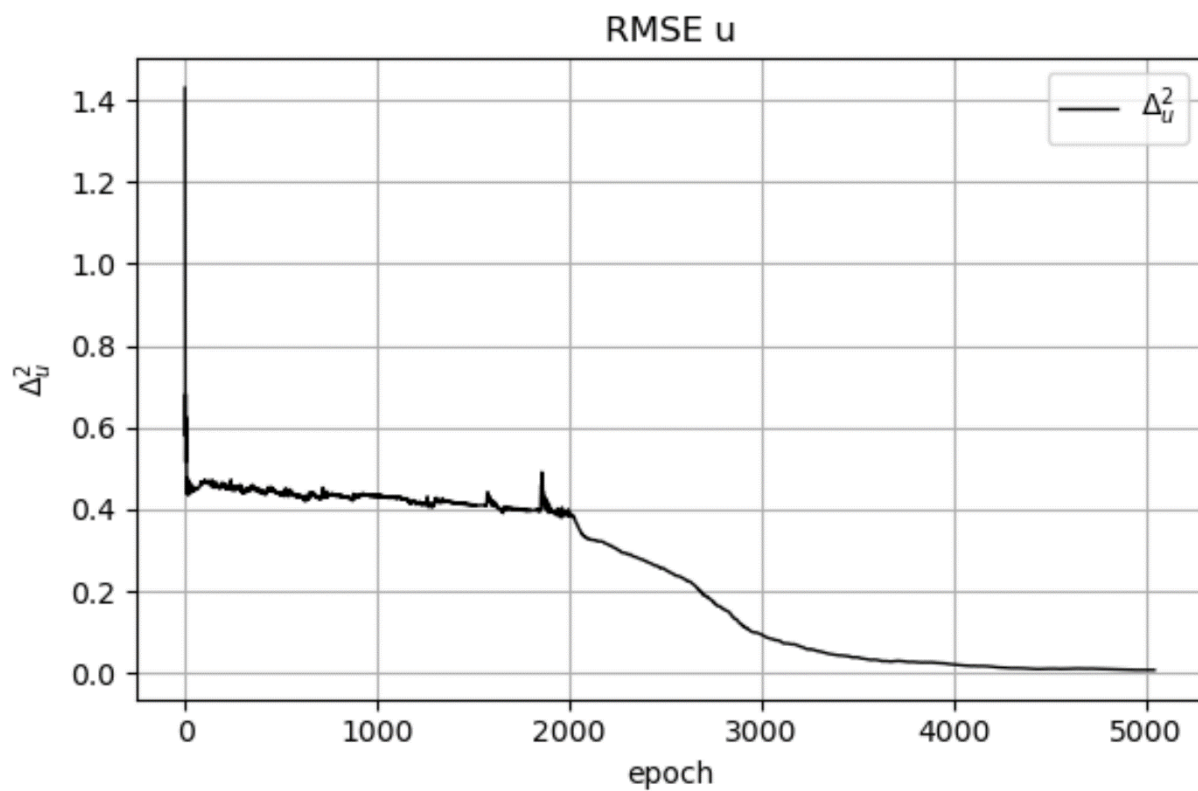


Рис. 3.3.6. Среднеквадратическое отклонение Δ_u^2 .

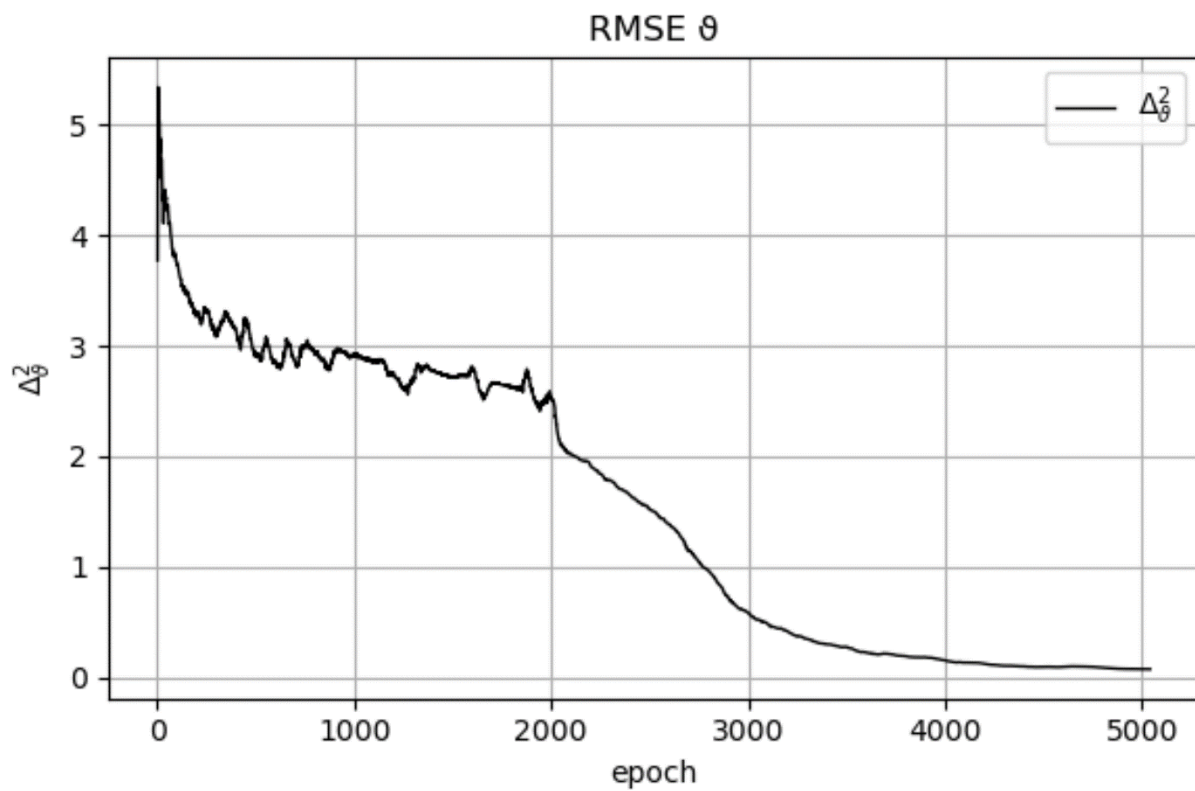


Рис. 3.3.7. Среднеквадратическое отклонение Δ_ϑ^2 .

ГЛАВА 4. ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕРМОУПРУГОГО СЛОЯ ИЛИ СТЕРЖНЯ

4.1. Математическая постановка обратных коэффициентных задач

Для описания движения термоупругого слоя используется система уравнений термоупругости (1.28)-(1.35). Заметим, что данная система уравнений с точностью до значений коэффициентов может быть использована для описания нестационарных термоупругих колебаний стержня. Поэтому далее для наглядности используем термин «термоупругий стержень», понимая, что та же одномерная модель применима и к термоупругому слою при надлежащем выборе параметров.

В обратной коэффициентной задаче полагается, что коэффициент α , β или κ в уравнениях (1.28)-(1.35) неизвестен.

Идентификация коэффициентов термоупругой модели по точечным наблюдениям относится к некорректным задачам: малые возмущения исходных данных могут приводить к существенным отклонениям оценок. Для анализа устойчивости вводится стохастическая модель измерений: «истинные» зависимости, полученные из решения прямой задачи, рассматриваются как детерминированные функции времени, а наблюдения – как их зашумлённые версии.

В прямых задачах все входные данные и параметры модели заданы; требуется вычислить отклик системы. Это вычислительно трудоёмко, но концептуально корректно: решение, как правило, существует, единственно и устойчиво к малым изменениям входов.

В обратных задачах задан наблюдаемый отклик системы, а часть входных данных или параметры неизвестны; требуется восстановить их по наблюдениям. Такая постановка обычно некорректна: разные наборы

параметров могут объяснять один и тот же отклик, а небольшая ошибка в данных способна резко изменить оценку.

Отсюда следует ключевое требование: без данных о наблюдении за решением обратная задача неразрешима. Нужны реальные или синтетически сгенерированные наблюдения, которые:

- сужают множество допустимых решений и обеспечивают идентифицируемость параметров;
- уменьшают неопределённость и повышают устойчивость оценок к шуму;
- позволяют проверять согласованность модели с реальностью (валидация на независительных режимах).

В работе использованы синтетические данные о наблюдениях, полученные из решения прямой задачи. Для этого:

- была задана физическая модель термоупругого стержня с конкретными начальными и граничными условиями и фиксированными значениями параметров; прямая задача решалась численно на нормированной области с устойчивой разностной/вариационной схемой и контролем сходимости;
- единственный датчик размещался в фиксированной точке стержня; наблюдения велись по двум каналам — перемещение и приращение температуры — на равномерной временной сетке в пределах заданного интервала;
- полученные из прямой задачи временные ряды в точке датчика рассматривались как «истинные» траектории без измерительных ошибок;
- для имитации реальных условий к этим траекториям добавлялся шум: использовалась комбинированная модель с аддитивной составляющей порядка 1 % и относительной (мультипликативной) составляющей порядка 5 %; шум имел нулевое среднее, считался независимым по времени и между

каналами; при необходимости значения ограничивались физически допустимым диапазоном;

– для оценки устойчивости результатов формировались несколько независимых реализаций зашумлённых наблюдений (разные генерации помех) и выполнялось усреднение показателей качества; для воспроизводимости фиксировались параметры генерации шума;

– итоговый набор наблюдений включал сами временные ряды по двум каналам, метаданные об расположении датчика, шаге дискретизации и уровнях шума, а также разбиение на подмножества для оценки и валидации. Такой подход исключает «преступление обратной задачи», делает испытания реалистичными и обеспечивает корректную калибровку регуляризации и весов при идентификации.

В качестве дополнительных (наблюдаемых) данных полагаем, что в некоторой заданной точке стержня с координатой $x_s \in (0,1)$ установлен датчик, измеряющий две величины (имеющий два канала измерений): продольное перемещение u и приращение температуры ϑ . Измерения выполняются в дискретные моменты времени

$$t_k = k\Delta t, \quad \Delta t = \frac{t_{\max}}{N-1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.1)$$

где N — число отсчётов, $t_{\max} > 0$ — горизонт наблюдения. «Истинные» (безошибочные) значения сигналов в точке x_s и моменты t_k определим как

$$s_k^{(u)} = u(x_s, t_k), \quad s_k^{(\vartheta)} = \vartheta(x_s, t_k), \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (4.2)$$

Наблюдаемые (зашумлённые) значения обозначим через

$$y_k^{(u)}, \quad y_k^{(\vartheta)}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (4.3)$$

Для компактности используем векторную запись. Обозначим

$$\mathbf{s}^{(u)} = (s_0^{(u)}, \dots, s_{N-1}^{(u)})^T, \quad \mathbf{y}^{(u)} = (y_0^{(u)}, \dots, y_{N-1}^{(u)})^T, \quad (4.4)$$

и аналогично $\mathbf{s}^{(\vartheta)}, \mathbf{y}^{(\vartheta)}$. Символ $(\cdot)^T$ означает транспонирование (вектор-столбец). Через I_N обозначается единичная матрица размера $N \times N$. Для

любой последовательности $(a_0, \dots, a_{N-1})$ обозначим $\text{diag}(a_0, \dots, a_{N-1})$ — диагональную матрицу с элементами a_k на главной диагонали. В частности,

$$D(\mathbf{s}^{(u)}) = \text{diag}(s_0^{(u)}, \dots, s_{N-1}^{(u)}), \quad D(\mathbf{s}^{(u)})^2 = \text{diag}[(s_0^{(u)})^2, \dots, (s_{N-1}^{(u)})^2]. \quad (4.5)$$

Статистические обозначения: $\mathbb{E}[\cdot]$ — математическое ожидание, $\text{Var}(\cdot)$ — дисперсия, $\text{Cov}(\cdot)$ — ковариационная матрица. Обозначение $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ означает нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2 ; $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$ — многомерное нормальное распределение с вектором средних $\mathbf{m}$ и ковариацией Σ . $\mathcal{N}(0, 1)$ — стандартное нормальное распределение. Предполагается независимость шумов по времени и (если не оговорено иначе) между каналами.

Ниже $\sigma_u > 0$ — уровень аддитивного шума (стандартное отклонение), $\rho_u > 0$ — уровень относительного (мультипликативного) шума (стандартное отклонение относительной ошибки). Случайные величины $\varepsilon_k^{(\cdot)}, \xi_k^{(\cdot)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ независимы при разных k и между собой.

В работе используются следующие модели шума.

1. *Аддитивный (гауссов) шум — гомоскедастичность:*

$$y_k^{(u)} = s_k^{(u)} + \sigma_u \varepsilon_k^{(u)}, \quad y_k^{(9)} = s_k^{(9)} + \sigma_9 \varepsilon_k^{(9)}. \quad (4.6)$$

Условные моменты (при фиксированных $s_k^{(\cdot)}$):

$$\mathbb{E}[y_k^{(\cdot)} | s_k^{(\cdot)}] = s_k^{(\cdot)}, \quad \text{Var}(y_k^{(\cdot)} | s_k^{(\cdot)}) = \sigma^2.$$

В векторной форме:

$$\mathbf{y}^{(u)} = \mathbf{s}^{(u)} + \sigma_u \mathbf{e}^{(u)}, \quad \mathbf{e}^{(u)} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I_N), \quad \text{Cov}(\mathbf{y}^{(u)} | \mathbf{s}^{(u)}) = \sigma_u^2 I_N. \quad (4.7)$$

Аналогичная модель используется для канала измерений $\mathfrak{g}$.

2. *Относительный (мультипликативный) шум — гетероскедастичность:*

$$y_k^{(u)} = s_k^{(u)}(1 + \rho_u \xi_k^{(u)}), \quad y_k^{(9)} = s_k^{(9)}(1 + \rho_9 \xi_k^{(9)}). \quad (4.8)$$

Тогда

$$\mathbb{E}[y_k^{(\cdot)} | s_k^{(\cdot)}] = s_k^{(\cdot)}, \quad \text{Var}(y_k^{(\cdot)} | s_k^{(\cdot)}) = \rho^2 (s_k^{(\cdot)})^2.$$

В относительной форме

$$\frac{y_k^{(\cdot)} - s_k^{(\cdot)}}{s_k^{(\cdot)}} = \rho \cdot \xi_k^{(\cdot)}, \quad \mathbb{E} = 0, \text{Var} = \rho^2.$$

В векторной записи для канала u

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(u)} &= \mathbf{s}^{(u)} + \rho_u D(\mathbf{s}^{(u)}) \mathbf{x}^{(u)}, \quad \mathbf{x}^{(u)} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I_N), \\ \text{Cov}(\mathbf{y}^{(u)} | \mathbf{s}^{(u)}) &= \rho_u^2 D(\mathbf{s}^{(u)})^2 = \text{diag}(\rho_u^2 (s_0^{(u)})^2, \dots, \rho_u^2 (s_{N-1}^{(u)})^2), \end{aligned} \quad (4.9)$$

и аналогично для канала измерений приращения температуры.

3. Комбинированный шум (аддитивный + относительный):

$$\begin{aligned} y_k^{(u)} &= s_k^{(u)} + \sigma_u \varepsilon_k^{(u)} + \rho_u s_k^{(u)} \xi_k^{(u)}, \\ y_k^{(g)} &= s_k^{(g)} + \sigma_g \varepsilon_k^{(g)} + \rho_g s_k^{(g)} \xi_k^{(g)}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $\varepsilon_k^{(\cdot)}, \xi_k^{(\cdot)} \sim \mathcal{N}(0,1)$ независимы. Тогда

$$\mathbb{E}[y_k^{(\cdot)} | s_k^{(\cdot)}] = s_k^{(\cdot)}, \quad \text{Var}(y_k^{(\cdot)} | s_k^{(\cdot)}) = \sigma^2 + \rho^2 (s_k^{(\cdot)})^2.$$

В векторной форме для канала u :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(u)} &= \mathbf{s}^{(u)} + \sigma_u \mathbf{e}^{(u)} + \rho_u D(\mathbf{s}^{(u)}) \mathbf{x}^{(u)}, \\ \text{Cov}(\mathbf{y}^{(u)} | \mathbf{s}^{(u)}) &= \sigma_u^2 I_N + \rho_u^2 D(\mathbf{s}^{(u)})^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Аналогичная модель имеет место для канала g .

4.2. Метод решения обратных коэффициентных задач с применением технологии PINN

Метод решения обратных задач с использованием физически информированных нейронных сетей (PINN) основан на том, что система уравнений термоупругости в одномерной области $x \in (0,1)$, $t \in (0, t_{\max}]$ (см. (1.28)-(1.35)) используется как жёсткое физическое ограничение при обучении нейросетевых аппроксимаций полей. При этом искомые функции, как и ранее, представляются двумя отдельными нейросетевыми моделями

$$u(x,t) \approx \mathcal{N}_u(x,t;\theta_u), \quad \vartheta(x,t) \approx \mathcal{N}_\vartheta(x,t;\theta_\vartheta),$$

где $\mathcal{N}_u, \mathcal{N}_\vartheta$ — нейросети с обучаемыми параметрами $\theta_u, \theta_\vartheta$.

В данной работе коэффициенты системы (1.28)-(1.35) разыскиваются в виде констант (постоянные во времени и пространстве величины). Они включаются в процесс обучения как *дополнительные обучаемые переменные*. В обратной постановке предполагается, что неизвестен один коэффициент из пары (α, β) : рассматриваются либо задачи идентификации α при фиксированных известных β и κ , либо задачи идентификации β при фиксированных известных α и κ . Значение κ предполагается заданным (известным) и везде постоянным.

Обучение ведётся на трёх типах наборов точек:

- внутренние коллокации $\Omega_r = \{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{N_r} \subset (0,1) \times (0, t_{\max})$ — для контроля невязок уравнений (1.28), (1.29);
- начальные точки на $t = 0$ — для условий $u(x,0)$, $\dot{u}(x,0)$, $\vartheta(x,0)$;
- граничные точки на $x = 0$ и $x = 1$ — для условий на перемещение/нагрузку и температуру/тепловой поток.

Дополнительно используются наблюдения единственного датчика в точке $x_s \in (0,1)$ в моменты $t_k = k\Delta_{ts}$, $\Delta_{ts} = t_{\max} / (N_s - 1)$, $k = 0, \dots, N_s - 1$:

$$u_k^{(s)} = u(x_s, t_k), \quad \vartheta_k^{(s)} = \vartheta(x_s, t_k),$$

которые в реальном эксперименте зашумлены согласно п. 4.1 (аддитивная/относительная/комбинированная модели шума). Вектор наблюдений обозначим $\mathbf{y} = (\{u_k^{(s)}\}, \{\vartheta_k^{(s)}\})$.

Обучение PINN формулируется как задача минимизации суммарной невязки

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{pde}} + \mathcal{L}_{\text{ic}} + \mathcal{L}_{\text{bc}} + \mathcal{L}_{\text{data}},$$

где:

- $\mathcal{L}_{\text{pde}}$ – средняя квадратичная невязка уравнений (1.28), (1.29) в Ω_r ;
- $\mathcal{L}_{\text{ic}}$, $\mathcal{L}_{\text{bc}}$ – невязки начальных и граничных условий;
- $\mathcal{L}_{\text{data}}$ – невязка по данным датчика в (x_s, t_k) .

Оптимизация проводится в два этапа: стохастический адаптивный метод Adam до стабилизации $\mathcal{L}$, затем квазиньютоновский L-BFGS для более точного достижения минимума. Коллокации по x, t генерируются равномерно или со сгущением (косинусное/степенное отображения) в областях ожидаемо больших градиентов; угловые точки исключаются малым отступом от границ.

С учётом принятого допущения (неизвестен один коэффициент), используются две базовые постановки:

- *Определение α* : α обучается как постоянная величина, β и κ фиксированы известными константами.
- *Определение β* : β обучается как постоянная величина, α и κ фиксированы известными константами.

В обоих случаях результатом обучения являются непрерывные аппроксимации $u(x, t)$, $\vartheta(x, t)$, согласованные с (1.28)-(1.35), и оценка неизвестного коэффициента в виде константы. Качество решения проверяется по PDE-невязкам, по ошибке на датчике (включая независимые реализации шума) и по физической правдоподобности найденного значения.

4.3. Обратная задача идентификации коэффициента α

Рассматривается термоупругий слой, находящийся в поле массовых сил и внутренних источников тепла. На границы слоя $x=0$ и $x=1$ воздействуют тепловые потоки, зависящие от времени. При этом обе границы жестко закреплены. Начальные условия – не однородные:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' - \alpha \vartheta' + F(x, t), \quad \dot{\vartheta} = \kappa \vartheta'' - \beta \dot{u}' + Q(x, t); \\ u|_{t=0} &= \sin(\pi x), \quad \dot{u}|_{t=0} = 0, \quad \vartheta|_{t=0} = \cos(\pi x); \\ u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad \vartheta'|_{x=0} = 0, \quad \vartheta'|_{x=1} = 0, \\ F(x, t) &= 0, \quad Q(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Материал слоя – сталь с размерными параметрами: $\rho = 7850$, $E = 210 \cdot 10^9$, $\nu = 0.3$, $\kappa^* = 58$, $c_\varepsilon = 482$, $h = 1$, $T_0 = 300$.

Цель эксперимента: Идентификация коэффициента α (коэффициента термомеханической связи) по зашумленным данным датчика, в то время как другие параметры (включая κ и β) предполагаются известными и фиксированными: $\beta = 1.637$, $\kappa = 2.963 \cdot 10^{-9}$.

В отличие от классического подхода с решением прямой задачи с помощью разностной схемы, в данной работе «истинные» данные для валидации метода получаются из аналитического решения или высокоточного численного решения (с помощью Maple), которое считается эталонным (синтетические данные). Это позволяет исключить погрешность численного метода при генерации данных и сосредоточиться на оценке погрешности метода PINN.

Параметры эталонного решения: Для эталонного решения используется фиксированное значение коэффициента $\alpha_{ист} = 8.85 \cdot 10^{-3}$

Расположение датчика: Данные регистрируются в одной точке $x_s = 0.4$ (рис. 4.1).

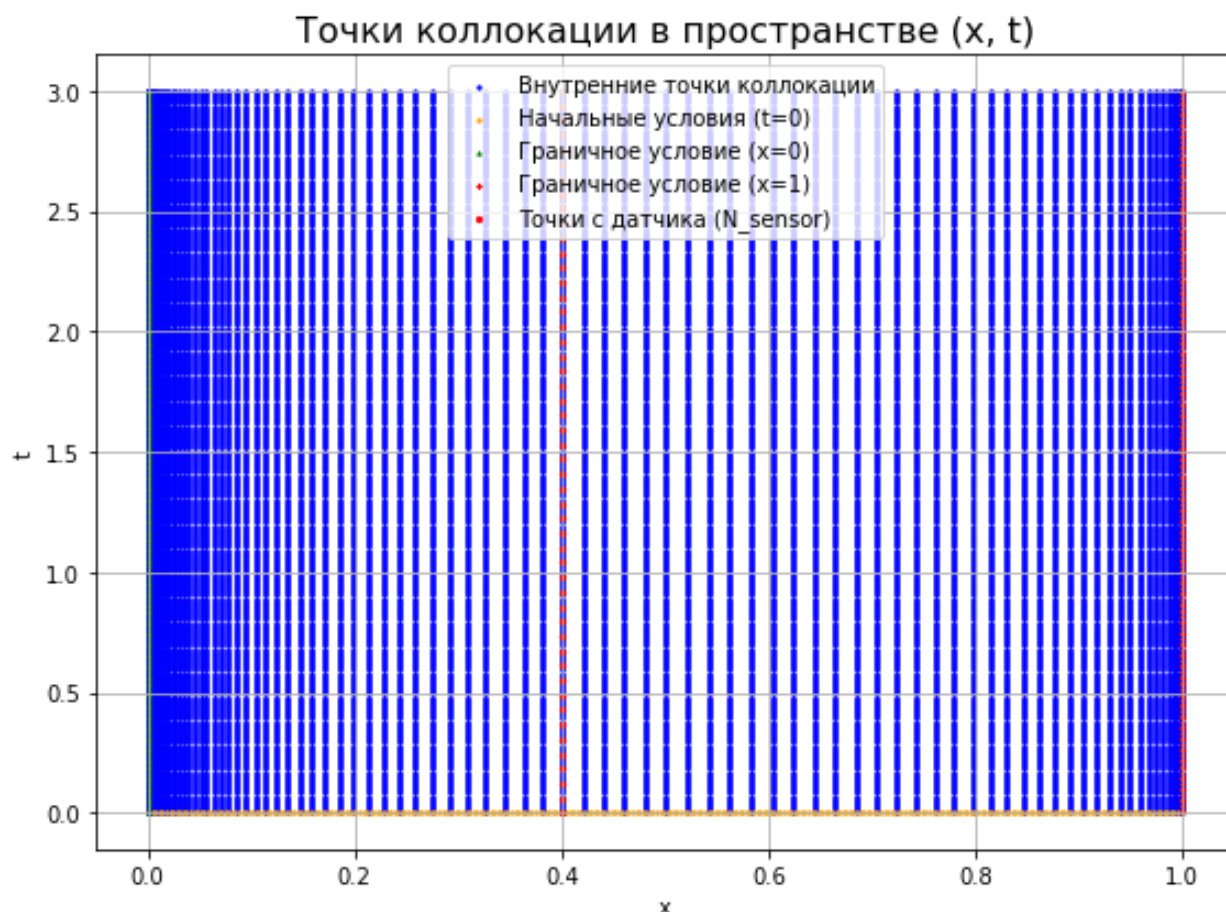


Рис. 4.1 Коллокационные точки и данные датчика

Зашумление данных: К «истинным» данным – зависимостям перемещения и приращению температуры в точке установки датчика от времени – применяется комбинированная модель шума: аддитивный шум уровня 1% и мультипликативный шум уровня 5%.

Конфигурация обучения PINN

Архитектура сети: нейросетевых моделей $\mathcal{N}_u(x, t; \theta_u) \approx u(x, t)$ и $\mathcal{N}_g(x, t; \theta_g) \approx g(x, t)$, используем архитектуру MLP (4 слоя: 2 - 40 - 40 - 1 нейронов, функции активации “tanh”). Таким образом нейросети имеют по 2 внутренних слоя.

Обучаемые параметры: В процессе обучения обновляются веса обеих нейросетей $\mathcal{N}_u(x, t; \theta_u)$, $\mathcal{N}_g(x, t; \theta_g)$ и коэффициент α (изначально инициализируется как $\alpha = 0.01$), передаваемый в функцию потерь в качестве дополнительной обучаемой переменной.

Функция потерь: Функция потерь включает невязки уравнений, начальных и граничных условий, а также среднеквадратичное отклонение от зашумленных данных датчика.

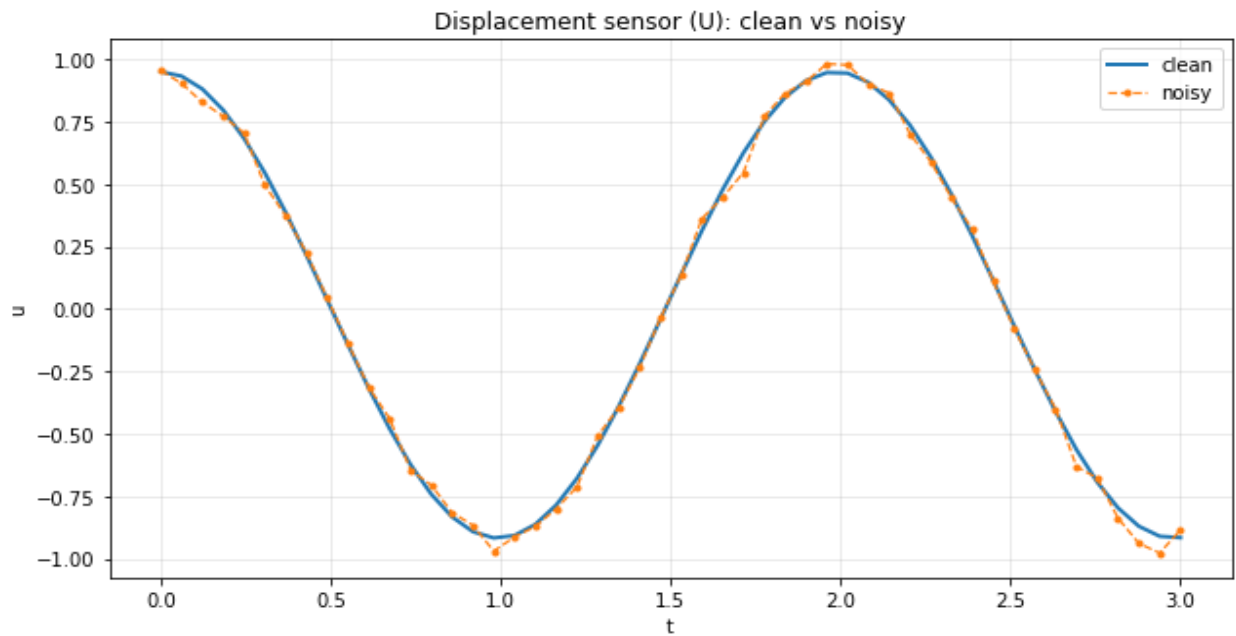


Рис. 4.2. Сравнение прогноза по методу PINN и зашумленных данных в точке измерения перемещений.

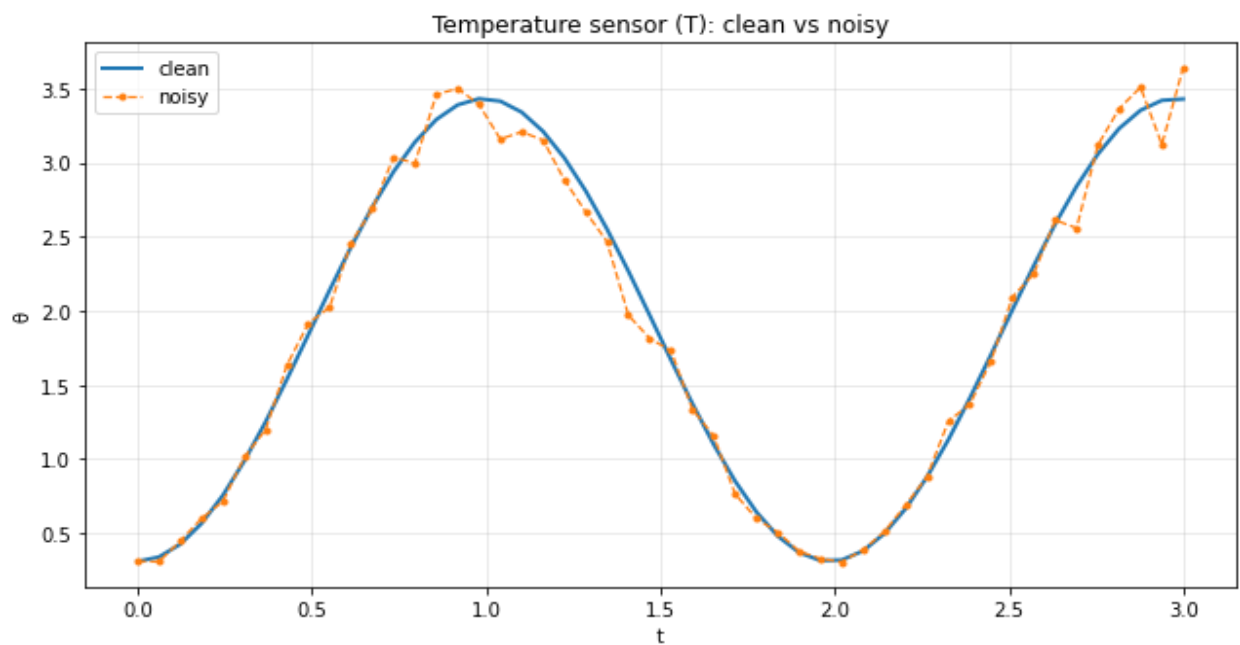


Рис. 4.3. Сравнение прогноза модели PINN и зашумленных данных в точке измерения температуры.

Процесс обучения организован с применением двух методов. На начальном этапе – метод Adam (2000 эпох), затем 3000 итераций метода L-BFGS.

Результаты обучения для случаев с шумом и без шума представлены в табл. 4.1 и на рис. 4.4, рис. 4.5.



Рис. 4.4. Восстановление параметра α в процессе обучения без шума.

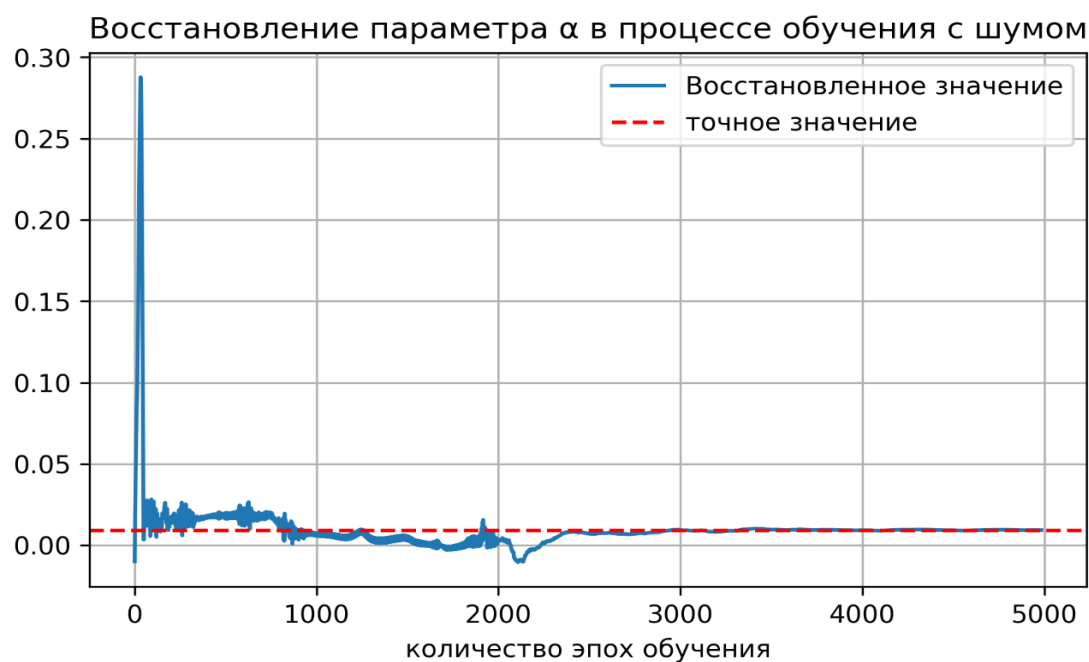


Рис. 4.5. Восстановление параметра α в процессе обучения с шумом.

Табл. 4.1. Восстановление значения параметра α

Сценарий	Истинное α	Восстановленное α	Относительная ошибка
Обучения без шума	0.00885	0.008715	1.53%
Обучения шумом	0.00885	0.0093	4.69%

Восстановленные значения параметра α можно считать достоверными как в идеальных, так и в зашумленных условиях. Метод PINN вновь подтверждает свою эффективность и практическую применимость для решения подобных задач.

4.4. Обратная задача идентификации коэффициента β

Продолжим рассматривать задачу (4.12) с аналогичными начальными и граничными условиями. Однако цель состоит в том, чтобы найти коэффициент β при известных α и κ : $\alpha = 8.85 \cdot 10^{-3}$, $\kappa = 2.963 \cdot 10^{-9}$.

Параметры эталонного решения: Для эталонного решения используется фиксированное значение коэффициента $\beta_{ист} = 1.637$.

Расположение датчика: Данные регистрируются в одной точке $x_{датчик} = 0.4$. На рис. 4.1.

Проведя шаги установки, аналогичные поиску α , мы получили результаты для β , представленные на Рисунках 4.6. – 4.7. и в Таблице 4.2.

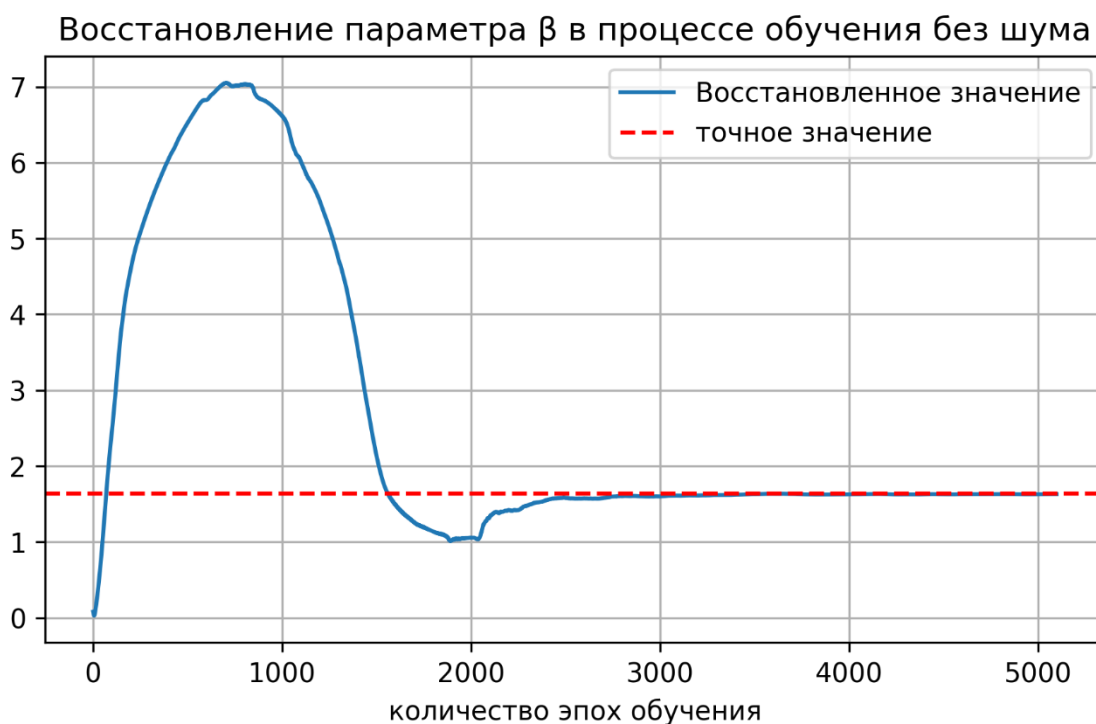


Рис. 4.6. Восстановление параметра β в процессе обучения без шума.

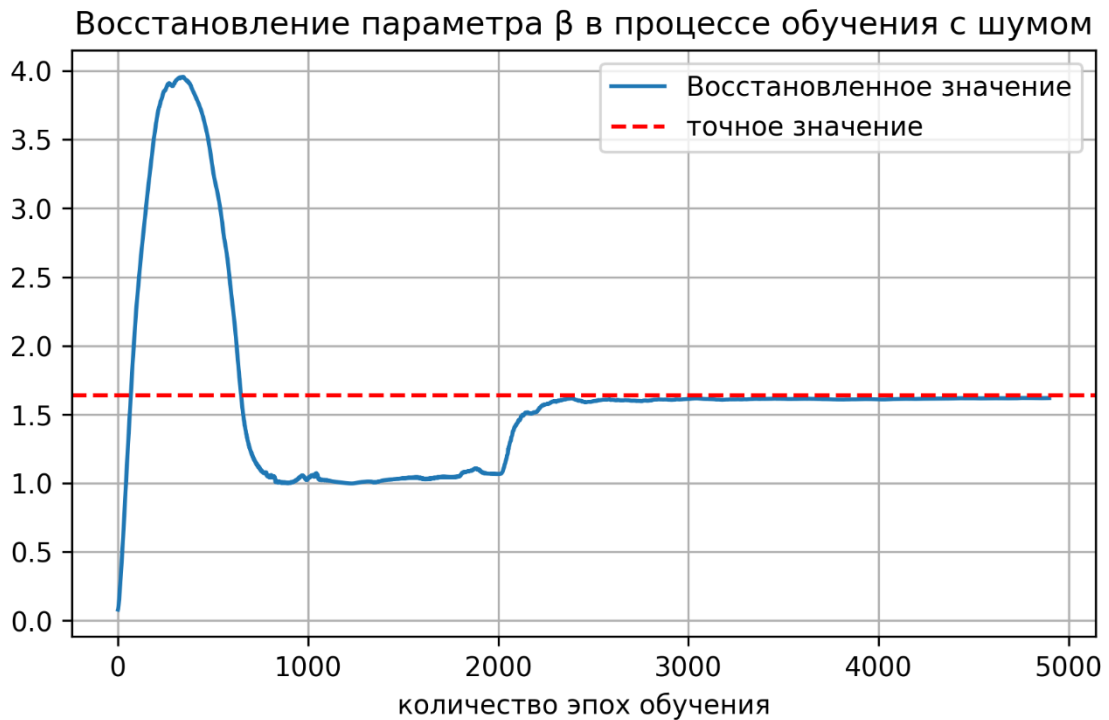


Рис. 4.7. Восстановление параметра β в процессе обучения с шумом.

Табл. 4.2. Восстановление значения параметра β .

Сценарий	Истинное β	Восстановленное β	Относительная ошибка
Обучения без шума	1.637	1.63	0.422%
Обучения с шумом	1.637	1.619	1.09%

Восстановленные значения параметра β можно считать надежными и достоверными как в идеальных, так и в зашумленных условиях. Метод PINN подтвердил свою эффективность для решения данной задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработан и реализован единый подход на основе методов глубокого машинного обучения и физически информированных нейронных сетей (PINN) для решения задач связанной нестационарной термоупругости; проведена верификация на тестах и сопоставление с аналитическим методом и методом конечных разностей, продемонстрированы хорошая сходимость и согласованность решений.

2. С помощью предложенного метода построены решения ряд прямых задач. Показано, что PINN корректно воспроизводит поля перемещений и приращений температур при широком наборе начальных и граничных условий, а также условий термосилового нагружения, обеспечивая точность на и устойчивость уровне метода конечных разностей.

3. Для обратных задач разработана и проверена схема идентификации одного неизвестного параметра модели (например, α или β) как обучаемой константы по показаниям датчика; показаны устойчивость к шуму, чувствительность и практическая применимость для идентификации параметров тонкостенных конструкций, работающих под воздействием как механических, так и тепловых нагрузок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ананенко, В. М.** Аналитическая модель определения параметров движения орбитального объекта по результатам его наблюдений с борта космического аппарата на основе нейронной сети [Электронный ресурс] / В. М. Ананенко // Труды МАИ. — 2023. — № 133. — Режим доступа: <https://trudymai.ru/published.php?ID=177668>.
2. **Касатиков, Н. Н.** Интеграция технологий искусственного интеллекта и интернета вещей для расширенного мониторинга и оптимизации энергетических объектов в умных городах [Электронный ресурс] / Н. Н. Касатиков, О. М. Брехов, Е. О. Николаева // Труды МАИ. — 2023. — № 131. — Режим доступа: <https://trudymai.ru/published.php?ID=175929>.
3. **Епифанов, А. А.** Применение методов глубокого обучения для решения дифференциальных уравнений в частных производных [Электронный ресурс] / А. А. Епифанов // Успехи кибернетики. — 2020. — Т. 1, № 4. — С. 22–28. — Режим доступа: <https://doi.org/10.51790/2712-9942-2020-1-4-3>.
4. **Малыгин, И. В.** Применение методов машинного обучения для классификации радиосигналов [Электронный ресурс] / И. В. Малыгин, С. А. Бельков, А. Д. Тарасов, М. Р. Усвятцов // Труды МАИ. — 2017. — № 96. — Режим доступа: <https://trudymai.ru/published.php?ID=85797>.
5. **Соколов, Д. Ю.** Применение искусственной нейронной сети для решения задач прогнозирования движения наземных объектов [Электронный ресурс] / Д. Ю. Соколов // Труды МАИ. — 2022. — № 123. — Режим доступа: <https://trudymai.ru/published.php?ID=165563>.
6. **Колмогоров, А. Н.** О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения [Электронный ресурс] / А. Н. Колмогоров // Доклады Академии наук СССР. — 1957. — Т. 114, № 5. — С. 953–956. — Режим доступа: <https://www.mathnet.ru/rus/dan22050>.

7. **Ефимов, Е. Н.** Разработка и исследование методики построения нейронных сетей на основе адаптивных элементов [Электронный ресурс] / Е. Н. Ефимов, Е. Н. Ефимов, Т. Я. Шевгунов // Труды МАИ. — 2012. — № 51. — Режим доступа: <https://trudymai.ru/published.php?ID=29159>.
8. **Земсков, А. В.** Одномерные нестационарные задачи термоупругости : учебное пособие / А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков. — Москва : Издательство МАИ, 2023. — 96 с.
9. **Вестяк, В. А.** Решение обратной одномерной коэффициентной задачи связанной термоупругости для однородного слоя [Электронный ресурс] / В. А. Вестяк, А. В. Земсков // Труды МАИ. — 2012. — № 53. — Режим доступа: <https://trudymai.ru/published.php?ID=29732>.
10. **Хайкин, С.** Нейронные сети: полный курс : учебное пособие / С. Хайкин. — 2-е изд. — Москва : Вильямс, 2006. — 1104 с.
11. **Шон, Ф. Т.** Моделирование процессов нестационарных колебаний и теплопроводности в слое с применением технологий глубокого машинного обучения [Электронный ресурс] / Ф. Т. Шон // Труды МАИ. — 2025. — № 140.
12. **Шон, Ф. Т.** Применение технологий машинного обучения к исследованию термоупругих волновых процессов [Электронный ресурс] / Ф. Т. Шон // Труды МАИ. — 2025. — № 142.
13. **Шон, Ф. Т.** Нестационарные колебания термоупругого слоя : тезисы доклада / Ф. Т. Шон, Г. В. Федотенков // Ломоносовские чтения – 2024 : Секция механики : [международная научная конференция, Москва, 20 марта – 4 апреля 2024 г.]. – Москва, 2024. – С. 151–152.
14. **Фан, Т. Ш.** Исследование нестационарных процессов в термоупругих телах методами глубокого машинного обучения : материалы доклада / Т. Ш. Фан, Г. В. Федотенков // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XIII Международной научно-практической конференции,

посвященной Году качества : [Гомель, 21–22 ноября 2024 г.] : в 2 ч. — Гомель, 2024. — Ч. 1. — С. 210–211.

15. **Фан, Т. Ш.** Исследование нестационарных процессов в термоупругом слое с применением технологий глубокого машинного обучения : тезисы доклада / Т. Ш. Фан, Г. В. Федотенков // Актуальные проблемы механики : 51-я школа-конференция памяти Д. А. Индейцева : [сборник аннотаций, 19–21 июня 2024 г.]. — [Б. м.], 2024. — С. 252.
16. **Кулаженкова, К. А.** Использование глубокого машинного обучения применительно к исследованию нестационарных процессов в твёрдых деформируемых телах / К. А. Кулаженкова, Т. Ш. Фан, Г. В. Федотенков // Материалы XXX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А. Г. Горшкова. — Москва : ООО «ТРП», 2024. — Т. 2. — С. 124–128.
17. **Ершова, А. Ю.** Физически информированные нейросети в решении задач механики деформируемого тела / А. Ю. Ершова, Т. Ш. Фан, Г. В. Федотенков // Материалы XXXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А. Г. Горшкова. — Москва : ООО «ТРП», 2025. — Т. 2. — С. 193–195.
18. **Jagtap, A. D.** Adaptive activation functions accelerate convergence in deep and physics-informed neural networks [Electronic resource] / A. D. Jagtap, K. Kawaguchi, G. E. Karniadakis // Journal of Computational Physics. — 2020. — Vol. 404. — Article 109136. — DOI: 10.1016/j.jcp.2019.109136. — URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1906.01170>
19. **Antonion, K.** Machine learning through physics-informed neural networks: progress and challenges [Electronic resource] / K. Antonion, X. Wang, M. Raissi, L. Joshie // Academic Journal of Science and Technology. — 2024. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:267966156>

20. **Beck, C.** An overview on deep learning-based approximation methods for partial differential equations [Electronic resource] / C. Beck, M. Hutzenthaler, A. Jentzen, B. Kuckuck // Discrete and Continuous Dynamical Systems - B. — 2023. — Vol. 28, No 6. — P. 3697-3746. — URL: <http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2022238>.
21. **Berg, J.** A unified deep artificial neural network approach to partial differential equations in complex geometries [Electronic resource] / J. Berg, K. Nyström // Neurocomputing. — 2018. — Vol. 317. — P. 28–41. — DOI: [10.1016/j.neucom.2018.06.056](https://doi.org/10.1016/j.neucom.2018.06.056).
22. **Bharadiya, J. P.** A Comprehensive Survey of Deep Learning Techniques Natural Language Processing [Electronic resource] / J. P. Bharadiya // European Journal of Technology. — 2023. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:258880271>.
23. **Billah, M.** Physics-Informed Deep Neural Network for Inverse Heat Transfer Problems in Materials [Electronic resource] / M. Billah, A. I. Khan, J. Liu, P. Dutta // Materials Today Communications. — 2023. — Vol. 35. — Article 106336. — ISSN 2352-4928. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2023.106336>.
24. **Blechschiidt, J.** Three Ways to Solve Partial Differential Equations with Neural Networks — A Review [Electronic resource] / J. Blechschiidt, O. G. Ernst // GAMM-Mitteilungen. — 2021. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:232013795>.
25. **Braun, J.** On a constructive proof of Kolmogorov's superposition theorem [Electronic resource] / J. Braun, M. Griebel // Constructive Approximation. — 2009. — Vol. 30. — DOI: 10.1007/s00365-009-9054-2.
26. **Cai, S.** Physics-informed neural networks (PINNs) for fluid mechanics: a review [Electronic resource] / S. Cai, Z. Mao, Z. Wang, M. Yin, G. E. Karniadakis // Acta Mechanica Sinica. — 2021. — Vol. 37. — P. 1727–1738. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:234789992>.

27. **Cai, S.** Physics-Informed Neural Networks (PINNs) for Heat Transfer Problems [Electronic resource] / S. Cai, Z. Wang, S. Wang, P. Perdikaris, G. Karniadakis // Journal of Heat Transfer. — 2021. — Vol. 143. — DOI: 10.1115/1.4050542.
28. **Capra, M.** Hardware and software optimizations for accelerating deep neural networks: Survey of current trends, challenges, and the road ahead [Electronic resource] / M. Capra, B. Bussolino, A. Marchisio, G. Masera, M. Martina, M. A. Shafique // IEEE Access. — 2020. — Vol. 8. — P. 225134-225180. — DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3037684.
29. **Chen, Z.** TENG: Time-Evolving Natural Gradient for Solving PDEs With Deep Neural Nets Toward Machine Precision [Electronic resource] / Z. Chen, J. McCarran, E. Vizcaino, M. Soljačić, D. Luo. — 2024. — URL: <https://arxiv.org/abs/2404.10771>.
30. **Cho, H.** Basic Enhancement Strategies When Using Bayesian Optimization for Hyperparameter Tuning of Deep Neural Networks [Electronic resource] / H. Cho, Y. Kim, E. Lee, D. Choi, Y. Lee, W. Rhee // IEEE Access. — 2020. — Vol. 8. — P. 52588-52608. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:214623889>.
31. **Cho, W.** Parameterized Physics-informed Neural Networks for Parameterized PDEs [Electronic resource] / W. Cho, M. Jo, H. Lim, K. Lee, D. Lee, S. Hong, N. Park. — 2024. — URL: <https://arxiv.org/abs/2408.09446>.
32. **Cybenko, G. V.** Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function [Electronic resource] / G. V. Cybenko // Mathematics of Control Signals and Systems. — 1989. — Vol. 2. — P. 303–314. — DOI: 10.1007/BF02551274.
33. **Dai, Y.** Numerical solutions of boundary problems in partial differential equations: A deep learning framework with Green's function [Electronic resource] / Y. Dai, Z. Li, Y. An, W. Deng // Journal of Computational Physics. — 2024. — Vol. 511. — Art. 113121. — DOI: 10.1016/j.jcp.2024.113121.

34. **Kingma, D. P.** Adam: A Method for Stochastic Optimization [Electronic resource] / D. P. Kingma, J. Ba. — arXiv:1412.6980. — 2017. — URL: <https://arxiv.org/abs/1412.6980>. — DOI: 10.48550/arXiv.1412.6980.
35. **Haghighat, E.** A physics-informed deep learning framework for inversion and surrogate modeling in solid mechanics [Electronic resource] / E. Haghighat, M. Raissi, A. Moure, H. Gomez, R. Juanes // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2021. — Vol. 379. — Art. 113741. — DOI: 10.1016/j.cma.2021.113741.
36. **Samaniego, E.** An energy approach to the solution of partial differential equations in computational mechanics via machine learning: concepts, implementation and applications [Electronic resource] / E. Samaniego [et al.] // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2020. — Vol. 362. — Art. 112790. — DOI: 10.1016/j.cma.2019.112790.
37. **Edalatifar, M.** Using Deep Learning to Learn Physics of Conduction Heat Transfer [Electronic resource] / M. Edalatifar, M. B. Tavakoli, M. Ghalambaz, F. Setoudeh // J. Therm. Anal. Calorim. — 2020. — P. 1–18. — DOI: 10.1007/s10973-020-09875-6.
38. **Elton, D. C.** Applying machine learning techniques to predict the properties of energetic materials [Electronic resource] / D. C. Elton, Z. Boukouvalas, M. S. Butrico [et al.] // Sci Rep. — 2018. — Vol. 8. — Art. 9059. — DOI: 10.1038/s41598-018-27344-x.
39. **Fallah, A.** Physics-Informed Neural Network for Solution of Nonlinear Differential Equations [Electronic resource] / A. Fallah, M. M. Aghdam // Nonlinear Approaches in Engineering Application / ed. R. N. Jazar, L. Dai. — Cham : Springer, 2024. — DOI: 10.1007/978-3-031-53582-6_5.
40. **Fang, R.** A Deep Learning Method for Solving Thermoelastic Coupling Problem [Electronic resource] / R. Fang, K. Zhang, K. Song, Y. Kai, Y. Li, B. Zheng // Zeitschrift für Naturforschung A. — 2024. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:269846524>.

41. **Fang, Z.** Ensemble Learning for Physics Informed Neural Networks: A Gradient Boosting Approach [Electronic resource] / Z. Fang, S. Wang, P. Perdikaris // ICLR 2024 Conference Paper. — 2024. — DOI: 10.48550/arXiv.2302.13143.
42. **Fedotenkov, G. V.** The inverse non-stationary problem of identification of defects in an elastic rod [Electronic resource] / G. V. Fedotenkov, Y. A. Vahterova, D. I. Makarevskii, T. Q. Thang // INCAS Bulletin. — 2021. — Vol. 13, Special Issue. — P. 57-66. — DOI: 10.13111/2066-8201.2021.13.S.6.
43. **Fedotenkov, G. V.** Identification of Non-stationary Load Upon Timoshenko Beam [Electronic resource] / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2019. — Vol. 40, No. 4. — P. 439-447. — DOI: 10.1134/S1995080219040061.
44. **Fedotenkov, G. V.** Application of machine learning technologies to the study of wave processes in structural elements [Electronic resource] / G. V. Fedotenkov, A. A. Kireenkov, Phan Tung Son // AIP Conf. Proc. 28 August 2025; 3177 (1): 070008. <https://doi.org/10.1063/5.0295295>.
45. **Fedotenkov, G. V.** Wave Dynamics in Thermoelastic Layers: A Machine Learning Approach [Electronic resource] / G. V. Fedotenkov, A. Yu. Ershova, P. T. Son // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2025. — Vol. 46, No. 6. — P. 2781-2796. — DOI: 10.1134/S1995080225608264.
46. **Vestyak, V. A.** Solution of Nonsteady Inverse Coefficient Problems for a Thermoelastic Layer by Machine Learning [Electronic resource] / V. A. Vestyak, A. Yu. Ershova, G. V. Fedotenkov, Phan Tung Son // Russian Engineering Research. — 2025. — Vol. 45, No. 4. — P. 546-549. — DOI: 10.3103/S1068798X2570042X.
47. **Garcia-Garcia, A.** A survey on deep learning techniques for image and video semantic segmentation [Electronic resource] / A. Garcia-Garcia, S. Orts-Escolano, S. Oprea, V. Villena-Martinez, P. Martinez-Gonzalez, J. Garcia-

- Rodriguez // Applied Soft Computing. — 2018. — Vol. 70. — P. 41-65. — ISSN 1568-4946. — DOI: 10.1016/j.asoc.2018.05.018.
48. **Go, M. S.** Physics-Informed Neural Network-Based Surrogate Model for a Virtual Thermal Sensor with Real-Time Simulation [Electronic resource] / M. S. Go, J. H. Lim, S. Lee // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2023. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:259440472>.
49. **Guo, Y.** Solving Partial Differential Equations Using Deep Learning and Physical Constraints [Electronic resource] / Y. Guo, X. Cao, B. Liu, M. Gao // Applied Sciences. — 2020. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:225343753>.
50. **Huang, H.** A deep learning approach for solving diffusion-induced stress in large-deformed thin film electrodes [Electronic resource] / H. Huang, Y. Li, Y. Xue, K. Zhang, F. Yang // J. Energy Storage. — 2023. — Vol. 63. — Art. 107037.
51. **Hamdan, A.** AI in renewable energy: A review of predictive maintenance and energy optimization [Electronic resource] / A. Hamdan, K. Ibekwe, V. Ilojiyanya, S. Sonko, E. Etukudoh // International Journal of Science and Research Archive. — 2024. — Vol. 11. — P. 718-729. — DOI: 10.30574/ijrsra.2024.11.1.0112.
52. **He, H.** An Unsupervised Learning Approach to Solving Heat Equations on Chip Based on Auto Encoder and Image Gradient [Electronic resource] / H. He, J. Pathak. — arXiv:2007.09684. — 2020. — URL: <https://arxiv.org/abs/2007.09684>.
53. **Hu, Y.** Neural-PDE: a RNN based neural network for solving time dependent PDEs [Electronic resource] / Y. Hu, T. Zhao, S. Xu, Z. Xu, L. Lin // Communications in Information and Systems. — 2022. — Vol. 22, No. 2. — P. 223-245. — DOI: 10.4310/CIS.2022.v22.n2.a3.
54. **Huang, B.** Applications of Physics-Informed Neural Networks in Power Systems - A Review [Electronic resource] / B. Huang, J. Wang // IEEE

- Transactions on Power Systems. — 2023. — Vol. 38. — P. 572-588. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:247736534>.
55. **Irrgang, C.** Towards neural Earth system modelling by integrating artificial intelligence in Earth system science [Electronic resource] / C. Irrgang, N. Boers, M. Sonnewald [et al.] // Nat. Mach. Intelligence. — 2021. — Vol. 3, No. 8. — P. 667-674. — DOI: 10.1038/s42256-021-00374-3.
 56. **Bramble, J.** Numerical Methods for Nonlinear Differential Equations [Electronic resource] / J. Bramble. — Springer, 2015. — DOI: 10.1007/978-3-319-13797-1.
 57. **Choi, J.** Unsupervised Legendre-Galerkin neural network for solving partial differential equations [Electronic resource] / J. Choi, N. Kim, Y. Hong // IEEE Access. — 2023. — Vol. 11. — P. 23433-23446. — DOI: 10.1109/ACCESS.2023.3244681.
 58. **Sirignano, J.** DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations [Electronic resource] / J. Sirignano, K. Spiliopoulos // Journal of Computational Physics. — 2018. — Vol. 375. — P. 1339-1364. — DOI: 10.1016/j.jcp.2018.08.029.
 59. **Jagtap, A. D.** Extended Physics-Informed Neural Networks (XPINNs): A Generalized Space-Time Domain Decomposition Based Deep Learning Framework for Nonlinear Partial Differential Equations [Electronic resource] / A. D. Jagtap, G. E. Karniadakis // Commun. Comput. Phys. — 2020. — Vol. 28, No. 5. — P. 2002-2041. — DOI: 10.4208/cicp.OA-2020-0164.
 60. **Jagtap, A. D.** Conservative Physics-Informed Neural Networks on Discrete Domains for Conservation Laws: Applications to Forward and Inverse Problems [Electronic resource] / A. D. Jagtap, E. Kharazmi, G. E. Karniadakis // Comput. Methods Appl. Mech. — 2020. — Vol. 365. — Art. 113028. — DOI: 10.1016/j.cma.2020.113028.
 61. **Javadi, Sh.** A deep learning approach based on a data-driven tool for classification and prediction of thermoelastic wave's band structures for

- phononic crystals [Electronic resource] / Sh. Javadi, S. M. Hosseini // Mechanics of Advanced Materials and Structures. — 2021. — Vol. 29, No. 27. — P. 6612-6625. — DOI: 10.1080/15376494.2021.1983088.
62. **Jin, X.** NSFnets (Navier-Stokes flow nets): Physics-informed neural networks for the incompressible Navier-Stokes equations [Electronic resource] / X. Jin, S. Cai, H. Li, G. E. Karniadakis // Journal of Computational Physics. — 2021. — Vol. 426. — Art. 109951. — DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109951.
63. **Eshkofti, K.** A gradient-enhanced physics-informed neural network (gPINN) scheme for the coupled non-fickian/non-fourierian diffusion-thermoelasticity analysis: a novel gPINN structure [Electronic resource] / K. Eshkofti, S. M. Hosseini // Eng. Appl. Artif. Intell. — 2023. — Vol. 126. — Art. 106908. — DOI: 10.1016/j.engappai.2023.106908.
64. **Kapoor, T.** Physics-informed neural networks for solving forward and inverse problems in complex beam systems [Electronic resource] / T. Kapoor, H. Wang, A. Núñez, R. Dollevoet. — arXiv:2303.01055. — 2023. — DOI: 10.48550/arXiv.2303.01055.
65. **Karimpouli, S.** Physics Informed Machine Learning: Seismic Wave Equation [Electronic resource] / S. Karimpouli, P. Tahmasebi // Geosci. Front. — 2020. — Vol. 11, No. 6. — P. 1993-2001. — DOI: 10.1016/j.gsf.2020.07.007.
66. **Karniadakis, G. E.** Physics-informed machine learning [Electronic resource] / G. E. Karniadakis, I. G. Kevrekidis, L. Lu [et al.] // Nature Reviews Phys. — 2021. — Vol. 3, No. 6. — P. 422-440. — URL: www.nature.com/articles/s42254-021-00314-5.
67. **Kharazmi, E.** Variational Physics-Informed Neural Networks For Solving Partial Differential Equations [Electronic resource] / E. Kharazmi, Z. Zhang, G. E. Karniadakis. — arXiv:1912.00873. — 2019. — URL: <https://arxiv.org/abs/1912.00873>.
68. **Kollmannsberger, S.** Physics-Informed Neural Networks [Electronic resource] / S. Kollmannsberger, D. D'Angella, M. Jokeit [et al.] // Deep Learning in

- Computational Mechanics. Studies in Computational Intelligence. — 2021. — Vol. 977. — P. 55-84. — DOI: 10.1007/978-3-030-76587-3_5.
69. **Krishnapriyan, A. S.** Characterizing Possible Failure Modes in Physics-Informed Neural Networks [Electronic resource] / A. S. Krishnapriyan, A. Gholami, S. Zhe, R. M. Kirby, M. W. Mahoney // 35th Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS 2021). — Sydney, Australia. — DOI: 10.48550/arXiv.2109.01050.
70. **Kwon, B.** Machine Learning for Heat Transfer Correlations [Electronic resource] / B. Kwon, F. Ejaz, L. K. Hwang // Int. Commun. Heat Mass Transfer. — 2020. — Vol. 116. — Art. 104694. — DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104694.
71. **Lagaris, I. E.** Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations [Electronic resource] / I. E. Lagaris, A. Likas, D. I. Fotiadis // IEEE Trans. Neural Networks. — 1998. — Vol. 9, No. 5. — P. 987-1000. — DOI: 10.1109/72.712178.
72. **Lawal, Z. K.** Physics-Informed Neural Network (PINN) Evolution and Beyond: A Systematic Literature Review and Bibliometric Analysis [Electronic resource] / Z. K. Lawal, H. Yassin, D. T. C. Lai, A. Che-Idris // Big Data Cogn. Comput. — 2022. — Vol. 6. — Art. 140. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:253826330>.
73. **LeCun, Y.** Deep Learning [Electronic resource] / Y. LeCun, Y. Bengio, G. E. Hinton // Nature. — 2015. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:3074096>.
74. **Lehmann, F.** Deep Neural Helmholtz Operators for 3D Elastic Wave Propagation and Inversion [Electronic resource] / F. Lehmann, F. Gatti, M. Bertin, D. Clouteau // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2023. — Vol. 398. — Art. 116718. — DOI: 10.1016/j.cma.2023.116718.
75. **Li, X.** On the Convergence of Stochastic Gradient Descent with Adaptive Stepsizes [Electronic resource] / X. Li, F. Orabona // International Conference

- on Artificial Intelligence and Statistics. — 2018. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:29159266>.
- 76.**Li, X.** Physical Informed Neural Networks with Soft and Hard Boundary Constraints for Solving Advection-Diffusion Equations Using Fourier Expansions [Electronic resource] / X. Li, J. Deng, W. Wu, S. Zhang, W. Li, Y.-G. Wang. — 2023. — DOI: 10.1016/j.camwa.2024.01.021.
- 77.**Li, Z.** Physics-Informed Neural Operator for Learning Partial Differential Equations [Electronic resource] / Z. Li, H. Zheng, N. Kovachki, D. Jin, H. Chen, B. Liu, K. Azizzadenesheli, A. Anandkumar. — arXiv:2111.03794. — 2023. — URL: <https://arxiv.org/abs/2111.03794>.
- 78.**Lihua, L.** Simulation physics-informed deep neural network by adaptive Adam optimization method to perform a comparative study of the system [Electronic resource] / L. Lihua // Engineering with Computers. — 2022. — Vol. 38, Suppl 2. — P. 1111-1130. — DOI: 10.1007/s00366-021-01301-1.
- 79.**Lim, B.** Time-series forecasting with deep learning: a survey [Electronic resource] / B. Lim, S. Zohren // Philosophical Transactions of the Royal Society A. — 2020. — Vol. 379. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:216562380>.
- 80.**Liu, Y.** Materials discovery and design using machine learning [Electronic resource] / Y. Liu, T. Zhao, W. Ju, S. Shi // Journal of Materiomics. — 2017. — Vol. 3, No. 3. — P. 159-177. — DOI: 10.1016/j.jmat.2017.08.002.
- 81.**Lu, L.** Learning nonlinear operators via DeepONet based on the universal approximation theorem of operators [Electronic resource] / L. Lu, P. Jin, G. Pang, Z. Zhang, G. E. Karniadakis // Nature Machine Intelligence. — 2019. — Vol. 3. — P. 218-229. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:233822586>.
- 82.**Lu, L.** DeepXDE: A Deep Learning Library for Solving Differential Equations [Electronic resource] / L. Lu, X. Meng, Z. Mao, G. E. Karniadakis // SIAM

- Review. — 2021. — Vol. 63, No. 1. — P. 208-228. — DOI: 10.1137/19M1274067.
- 83.**Lu, L.** Physics-informed neural networks with hard constraints for inverse design [Electronic resource] / L. Lu, R. Pestourie, W. Yao [et al.] // SIAM J. Sci. Comput. - 2021. - Vol. 43, No. 6. - P. 1105-1132. - DOI: 10.1137/21M1397908.
- 84.**Lu, Y.** A Universal Approximation Theorem of Deep Neural Networks for Expressing Probability Distributions [Electronic resource] / Y. Lu, J. Lu. — arXiv:2004.08867. — 2020. — URL: <https://arxiv.org/abs/2004.08867>.
- 85.**Lusch, B.** Deep learning for universal linear embeddings of nonlinear dynamics [Electronic resource] / B. Lusch, J. N. Kutz, S. L. Brunton // Nature Communications. - 2018. - Vol. 9, No. 1. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/s41467-018-07210-0>.
- 86.**Abadi, M.** TensorFlow: a system for Large-Scale machine learning [Electronic resource] / M. Abadi [et al.] // 12th USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation (OSDI 16). — 2016. — P. 265-283.
- 87.**Rasht-Behesht, M.** Physics-informed Neural Networks (PINNs) for wave propagation and full waveform inversions [Electronic resource] / M. Rasht-Behesht, C. Huber, K. Shukla, G. E. Karniadakis. — arXiv:2108.12035. — DOI: 10.48550/arXiv.2108.12035.
- 88.**Mackenzie, J. A.** A moving mesh method for the solution of the one-dimensional phase-field equations [Electronic resource] / J. A. Mackenzie, M. L. Robertson // Journal of Computational Physics. — 2002. — Vol. 181(2). — P. 526-544. — DOI: 10.1006/jcph.2002.7140.
- 89.**Miao, Z.** VC-PINN: Variable Coefficient Physical Information Neural Network for Forward and Inverse PDE Problems with Variable Coefficient [Electronic resource] / Z. Miao, Y. Chen. — arXiv:2305.07479. — 2023. — URL: <https://arxiv.org/abs/2305.07479>.

- 90.**Morgan, D.** Opportunities and challenges for machine learning in materials science [Electronic resource] / D. Morgan, R. Jacobs // Annual Review of Materials Research. — 2020. — Vol. 50. — DOI: 10.1146/annurev-matsci-070218-010015.
- 91.**Moseley, B.** Solving the Wave Equation with Physics-Informed Deep Learning [Electronic resource] / B. Moseley, A. Markham, T. Nissen-Meyer // J. Comput. Phys. — 2020. — Vol. 423. — Art. 109792. — DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109792.
- 92.**Kriegeskorte, N.** Neural network models and deep learning [Electronic resource] / N. Kriegeskorte, T. Golan // Curr. Biol. — 2019. — Vol. 29, No. 7. — P. R231-R236.
- 93.**Srivastava, N.** Dropout: a simple way to prevent neural networks from overfitting [Electronic resource] / N. Srivastava, G. Hinton, A. Krizhevsky, I. Sutskever, R. Salakhutdinov // J. Mach. Learn. Res. — 2014. — Vol. 15, No. 1. — P. 1929-1958.
- 94.**Owhadi, H.** Bayesian numerical homogenization [Electronic resource] / H. Owhadi // Multiscale Modeling & Simulation. — 2015. — Vol. 13, No. 3. — P. 812-828. — DOI: 10.1137/140974596.
- 95.**Pang, G.** fPINNs: Fractional Physics-Informed Neural Networks [Electronic resource] / G. Pang, L. Lu, G. E. Karniadakis // SIAM J. Sci. Comput. — 2019. — Vol. 41, No. 4. — P. 2603-2626. — DOI: 10.1137/18M1229845.
- 96.**Panghal, S.** Optimization free neural network approach for solving ordinary and partial differential equations [Electronic resource] / S. Panghal, M. Kumar // Engineering with Computers. — 2021. — Vol. 37. — P. 2989-3002. — DOI: 10.1007/s00366-020-00985-1.
- 97.**Sirignano, J.** DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations [Electronic resource] / J. Sirignano, K. Spiliopoulos // Journal of Computational Physics. — 2018. — Vol. 375. — P. 1339-1364. — DOI: 10.48550/arXiv.1708.07469.

98. **Perera, A. T. D.** Machine learning methods to assist energy system optimization [Electronic resource] / A. T. D. Perera, P. U. Wickramasinghe, V. M. Nik, J. L. Scartezzini // *Applied Energy*. — 2019. — Vol. 243. — P. 191-205. — DOI: 10.1016/j.apenergy.2019.03.202.
99. **Pramod, A.** Machine Learning and Deep Learning: Open Issues and Future Research Directions for the Next 10 Years [Electronic resource] / A. Pramod, H. Naicker, A. Tyagi // *Machine Learning and Deep Learning*. — 2021. — P. 463-490. — ISBN: 9781119785729. — DOI: 10.1002/9781119785750.ch18.
100. **Pugliese, R.** Machine learning-based approach: global trends, research directions, and regulatory standpoints [Electronic resource] / R. Pugliese, S. Regondi, R. Marini // *Data Science and Management*. — 2021. — Vol. 4. — P. 19-29. — DOI: 10.1016/j.dsm.2021.12.002.
101. **Raissi, M.** Deep Hidden Physics Models: Deep Learning of Nonlinear Partial Differential Equations [Electronic resource] / M. Raissi // *Journal of Machine Learning Research*. — 2018. — Vol. 19, No. 25. — P. 1-24. — DOI: 10.48550/arXiv.1801.06637.
102. **Raissi, M.** Physics Informed Deep Learning (Part I): Data-driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations [Electronic resource] / M. Raissi, P. Perdikaris, G. E. Karniadakis. — arXiv:1711.10561. — 2017. — URL: <https://arxiv.org/abs/1711.10561>.
103. **Raissi, M.** Physics Informed Deep Learning (Part II): Data-driven Discovery of Nonlinear Partial Differential Equations [Electronic resource] / M. Raissi, P. Perdikaris, G. E. Karniadakis. — arXiv:1711.10566. — 2017. — URL: <https://arxiv.org/abs/1711.10566>.
104. **Raissi, M.** Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations [Electronic resource] / M. Raissi, P. Perdikaris, G. E. Karniadakis // *J. Comput. Phys.* — 2019. — Vol. 378. — P. 686-707. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>.

105. **Rathore, P.** Challenges in Training PINNs: A Loss Landscape Perspective [Electronic resource] / P. Rathore, W. Lei, Z. Frangella, L. Lu, M. Udell. - 2024. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:267412759>.
106. **Raymond, S. J.** Applying physics-based loss functions to neural networks for improved generalizability in mechanics problems [Electronic resource] / S. J. Raymond, D. B. Camarillo. — arXiv:2105.00075. — 2021. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:233481412>.
107. **Roy, S.** Hyperparameter optimization for deep neural network models: a comprehensive study on methods and techniques [Electronic resource] / S. Roy, R. Mehera, R. K. Pal [et al.] // Innovations Syst Softw Eng. — 2023. — DOI: 10.1007/s11334-023-00540-3.
108. **He, R.** Phase field smoothing-PINN: A neural network solver for partial differential equations with discontinuous coefficients [Electronic resource] / R. He, Y. Chen, Z. Yang, J. Huang, X. Guan // Comput. Math. — 2024. — Vol. 171. — P. 188-203. — DOI: 10.1016/j.camwa.2024.07.024.
109. **Panghal, S.** Optimization free neural network approach for solving ordinary and partial differential equations [Electronic resource] / S. Panghal, M. Kumar // Eng. Comput. — 2021. — Vol. 37. — P. 2989-3002. — DOI: 10.1007/s00366-020-00985-1.
110. **Shi, S.** Simulation of thermoelastic coupling in silicon single crystal growth based on alternate two-stage physics-informed neural network [Electronic resource] / S. Shi, D. Liu, Z. Huo // Eng. Appl. Artif. Intell. — 2023. — Vol. 123. — Art. 106468. — DOI: 10.1016/j.engappai.2023.106468.
111. **Salari, A.** Predicting the performance of a heat sink utilized with an energy storage unit using machine learning approach [Electronic resource] / A. Salari, R. Ahmadi, M. S. Vafadaran, H. Shakibi, M. Sardarabadi // Journal of Energy Storage. — 2024. — Vol. 83. — Art. 110470. — DOI: 10.1016/j.est.2024.110470.

112. **Sirignano, J.** DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations [Electronic resource] / J. Sirignano, K. Spiliopoulos // J. Comput. Phys. — 2018. — Vol. 375. — P. 1339-1364. — DOI: 10.1016/j.jcp.2018.08.029.
113. **Sun, R. Y.** Optimization for Deep Learning: An Overview [Electronic resource] / R. Y. Sun // J. Oper. Res. Soc. China. — 2020. — Vol. 8. — P. 249-294. — DOI: 10.1007/s40305-020-00309-6.
114. **Swirszcz, G.** Local minima in training of neural networks [Electronic resource] / G. Swirszcz, W. M. Czarnecki, R. Pascanu. — arXiv:1611.06310. — 2017. — URL: <https://arxiv.org/abs/1611.06310>.
115. **Talaei Khoei, T.** Deep learning: systematic review, models, challenges, and research directions [Electronic resource] / T. Talaei Khoei, H. Ould Slimane, N. Kaabouch // Neural Comput & Applic. — 2023. — Vol. 35. — P. 23103-23124. — DOI: 10.1007/s00521-023-08957-4.
116. **Talbi, E.-G.** Automated Design of Deep Neural Networks [Electronic resource] / E.-G. Talbi // ACM Computing Surveys (CSUR). — 2021. — Vol. 54. — P. 1-37. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:233354174>.
117. **Dwivedi, V.** Distributed learning machines for solving forward and inverse problems in partial differential equations [Electronic resource] / V. Dwivedi, N. Parashar, B. Srinivasan // Neurocomputing. — 2021. — Vol. 420. — P. 299-316. — DOI: 10.1016/j.neucom.2020.09.006.
118. **Vahterova, Y. A.** The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length [Electronic resource] / Y. A. Vahterova, G. V. Fedotenkov // Journal of Applied Engineering Science. — 2020. — Vol. 18, No. 4. — P. 687-692. — DOI: 10.5937/jaes0-28073.
119. **Wang, S.** Deep Learning of Free Boundary and Stefan Problems [Electronic resource] / S. Wang, P. Perdikaris // J. Comput. Phys. — 2021. — Vol. 428. — Art. 109914. — DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109914.

120. **Wang, S.** Understanding and mitigating gradient pathologies in physics-informed neural networks [Electronic resource] / S. Wang, Y. Teng, P. Perdikaris. — arXiv:2001.04536. — 2020. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:210473546>.
121. **Wei, J.** Machine learning in materials science [Electronic resource] / J. Wei, X. Chu, X. Y. Sun, K. Xu, H. X. Deng, J. Chen, Z. Wei, M. Lei // InfoMat. — 2019. — Vol. 1, No. 3. — P. 338-358. — DOI: 10.1002/inf2.12028.
122. **Wessels, H.** The Neural Particle Method - An Updated Lagrangian Physics Informed Neural Network for Computational Fluid Dynamics [Electronic resource] / H. Wessels, C. Weißenfels, P. Wriggers // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2020. — Vol. 365. — Art. 113127. — DOI: 10.1016/j.cma.2020.113127.
123. **Wistuba, M.** A Survey on Neural Architecture Search [Electronic resource] / M. Wistuba, A. Rawat, T. Pedapati. — arXiv. — 2019. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:146120824>.
124. **Xiao, X.** Efficient Hyperparameter Optimization in Deep Learning Using a Variable Length Genetic Algorithm [Electronic resource] / X. Xiao, M. Yan, S. Basodi, C. Ji, Y. Pan. — arXiv. — 2020. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:219981838>.
125. **Xie, Y.** Automatic boundary fitting framework of boundary dependent physics-informed neural network solving partial differential equation with complex boundary conditions [Electronic resource] / Y. Xie, Y. Ma, Y. Wang // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2023. — Vol. 414. — Art. 116139. — DOI: 10.1016/j.cma.2023.116139.
126. **Diao, Y.** Solving multi-material problems in solid mechanics using physics-informed neural networks based on domain decomposition technology [Electronic resource] / Y. Diao, J. Yang, Y. Zhang, D. Zhang, Y. Du // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2023. — Vol. 413. — Art. 116120. — DOI: 10.1016/j.cma.2023.116120.

127. **Liang, Y.** A physics-informed recurrent neural network for solving time-dependent partial differential equations [Electronic resource] / Y. Liang, R. Niu, J. Yue, M. Lei // *Int. J. Comput. Methods.* — 2023. — Vol. 20. — Art. 2341003. — DOI: 10.1142/s0219876223410037.
128. **Xue, Y.** A physics-inspired neural network to solve partial differential equations-application in diffusion-induced stress [Electronic resource] / Y. Xue, Y. Li, K. Zhang, F. Yang // *Phys. Chem. Chem. Phys.* — 2022. — Vol. 24, No. 13. — P. 7937-7949. — DOI: 10.1039/d1cp04893g.
129. **Yang, L.** On Hyperparameter Optimization of Machine Learning Algorithms: Theory and Practice [Electronic resource] / L. Yang, A. Shami. — arXiv. — 2020. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:220919678>.
130. **Yang, L.** Physics-informed generative adversarial networks for stochastic differential equations [Electronic resource] / L. Yang, D. Zhang, G. E. Karniadakis // *SIAM J. Sci. Comput.* — 2020. — Vol. 42, No. 1. — P. 292-317. — DOI: 10.1137/18M1225409.
131. **Yang, L.** B-PINNs: Bayesian Physics-Informed Neural Networks for Forward and Inverse PDE Problems With Noisy Data [Electronic resource] / L. Yang, X. Meng, G. E. Karniadakis // *J. Comput. Phys.* — 2021. — Vol. 425. — Art. 109913. — DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109913.
132. **Yang, Y.** Physics-Informed Deep Generative Models [Electronic resource] / Y. Yang, P. Perdikaris. — arXiv:1812.03511. — 2018.
133. **Yarotsky, D.** Error bounds for approximations with deep relu networks [Electronic resource] / D. Yarotsky // *Neural Netw.* — 2017. — Vol. 94. — P. 103-114. — DOI: 10.1016/j.neunet.2017.07.002.
134. **Yu, T.** Hyper-Parameter Optimization: A Review of Algorithms and Applications [Electronic resource] / T. Yu, H. Zhu. — arXiv. — 2020. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:212675087>.
135. **Zhang, D.** Quantifying total uncertainty in physics-informed neural networks for solving forward and inverse stochastic problems [Electronic

- resource] / D. Zhang, L. Lu, L. Guo [et al.] // J. Comput. Phys. — 2019. — Vol. 397. — Art. 108850. — DOI: 10.1016/j.jcp.2019.07.048.
136. **Zhang, H.** Combining Physics-Informed Graph Neural Network and Finite Difference for Solving Forward and Inverse Spatiotemporal PDEs [Electronic resource] / H. Zhang, L. Jiang, X. Chu, Y. Wen, L. Li, J. Liu, Y. Xiao, L. Wang // Computer Physics Communications. — 2024. — Art. 109462. — DOI: 10.1016/j.cpc.2024.109462.
137. **Zhang, W.** Poroelastic Full Waveform Inversion as Training a Neural Network [Electronic resource] / W. Zhang, Z. Chen. — SSRN. — URL: <https://ssrn.com/abstract=4569571>. — DOI: 10.2139/ssrn.4569571.
138. **Zhang, W.** Physics Informed Neural Networks (PINNs) as intelligent computing technique for solving partial differential equations: Limitation and Future prospects [Electronic resource] / W. Zhang, W. Suo, J. Song, W. Cao. — 2024. — DOI: 10.48550/arXiv.2411.18240.
139. **Tadmor, E.** A review of numerical methods for nonlinear partial differential equations [Electronic resource] / E. Tadmor // Bulletin of the American Mathematical Society. — 2012. — Vol. 49. — P. 507-554. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:8086254>.
140. **Kim, I.** Machine Learning for Energy Systems Optimization [Electronic resource] / I. Kim, B. Kim, D. N. Sidorov // Energies. — 2022. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:249335710>.
141. **Vasudevan, R. K.** Machine learning for materials design and discovery [Electronic resource] / R. K. Vasudevan, G. Pilania, P. V. Balachandran // Journal of Applied Physics. — 2021. — Vol. 129. — Art. 070401. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:233922781>.
142. **Di Pietro, D. A.** Numerical Methods for PDEs [Electronic resource] / D. A. Di Pietro, A. Ern, L. Formaggia // Handbook of Differential Equations. — 2018. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:23149788>.

143. **Vakhterova, Ya. A.** Modeling Thermal Conductivity in a Rod Based on the Maxwell–Cattaneo Equation Using Deep Machine Learning [Electronic resource] / Ya. A. Vakhterova, E. L. Kuznetsova, Phan Tung Son // Russian Engineering Research. — 2025. — Vol. 45, No. 8. — P. 1168–1172. — DOI: 10.3103/S1068798X25701655.