

Научная статья

УДК 629.7

URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=185002>

EDN: <https://www.elibrary.ru/LVDRZZ>



Оценка энергетических затрат межорбитального перехода с эллиптической орбиты на геометрически устойчивую орбиту вокруг Марса

Роман Викторович Ельников¹, Глеб Евгеньевич Жуков²✉

^{1, 2} Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Российская Федерация

¹ elnikov_rv@mail.ru

² zhykov99@gmail.com✉

Аннотация. Рассмотрен перевод космического аппарата на полярную околокруговую геометрически устойчивую орбиту вокруг Марса. Такая орбита может быть использована для эффективного зондирования планеты.

Предполагается, что перелет космического аппарата (КА) в грависфере Марса осуществляется с промежуточной эллиптической орбиты с помощью двигательной установки малой тяги. Оптимизируются параметры промежуточной орбиты.

Проанализированы характеристики целевой геометрически устойчивой («замороженной») орбиты и влияние нецентральности гравитационного поля Марса на ее эволюцию. Получены зависимости энергетических и временных затрат, требуемых для осуществления перелета.

Ключевые слова: перелет с малой тягой, оптимальный межорбитальный перелет, формализм принципа максимума Понтрягина, геометрически устойчивая орбита Марса, солнечно-синхронная орбита, дистанционное зондирование Марса

Финансирование: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10206, <https://rscf.ru/project/22-79-10206/>

Для цитирования: Ельников Р.В., Жуков Г.Е. Оценка энергетических затрат межорбитального перехода с эллиптической орбиты на геометрически устойчивую орбиту вокруг Марса // Вестник Московского авиационного института. 2025. Т. 32. № 2. С. 164–172. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=185002>

Original article

Energy Consumption Assessment of the Inter-Orbital Transfer from the Elliptical Orbit to the Geometrically-Stable Orbit around Mars

Roman V. El'nikov¹, Gleb E. Zhukov²✉

^{1, 2} Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

¹ elnikov_rv@mail.ru

² zhykov99@gmail.com✉

© Ельников Р.В., Жуков Г.Е., 2025

Abstract

The article considers the spacecraft transfer to a polar, near-circular, frozen sun-synchronous orbit (SSO) around Mars. Such an orbit may be utilized for the effective planet probing. It is assumed that the spacecraft overflight in the Martian gravitational sphere from a highly elliptical orbit is performed by a low-thrust propulsion system. The authors solve the problem of the optimal parameters determining of an intermediate orbit, which ensure delivery of the spacecraft of maximum weight.

The authors analyzed characteristics of the target frozen orbit, and Mars gravitational field non-centrality impact on its evolution. Dependencies of the energy and temporal expenditures required for the transfer are obtained.

Geometrically stable orbits differ in that they have virtually no change in the profile of the spacecraft areodetic flight altitude from revolution to revolution. Such orbits are employed in practice for the planet remote probing.

An algorithm for the frozen solar-synchronous orbits parameters computing in the geopotential model with account for the seventh zonal harmonic was described in [8]. As a result, D.Y. Vinogradov and E.A. Davydov derived analytical relationships for parameters computing of such orbits, ensuring stable patterns of sub-satellite point altitude variations over the first few hundred revolutions of the spacecraft passive motion.

Transfer to such orbits was as well considered by several authors [9–12]. Application of low-thrust engines at that is the most feasible approach since payload delivering to Martian orbits requires significant energy consumption. Low-thrust engines allow significant fuel consumption reduction for the transfer maneuvers [12]. However, the control program determining for such spacecraft is a highly complex and nontrivial task. There are studies in the domestic sources on the transfers to highly elliptical orbits, such as those of the Moon [13], but unfortunately, similar works for Mars are almost nonexistent. One of the goals of this study is to address this gap. The approach being proposed is, on the one hand, relatively simple to implement, and on the other hand, highly effective and in demand, without compromising performance.

This article examines parameters selection for a frozen multiple-repeat sun-synchronous Martian orbit to achieve full coverage of the planet equator [14–16], as well as assesses the impact of Mars gravitational field non-centrality on the frozen condition. The authors consider the flat optimal interorbital transfer by the low-thrust engine from the intermediate elliptical orbit to the target frozen sun-synchronous orbit around Mars. It is assumed that the spacecraft is impulsively transferred from the interplanetary flyby orbit to an intermediate elliptical orbit. Its further motion (“twisting” to the working near-circular orbit) is being performed by the low-thrust propulsion system. To estimate the energy costs of a low-thrust interorbital transfer between an intermediate elliptical orbit and a near-circular operational trajectory, an approximation of a grid of dimensionless characteristic velocities for planar transfer (without inclination change) is used. The grid parameters are the radii of the apocenter and pericenter of the intermediate elliptical orbit. This grid was obtained by solving the interorbital transfer problem within the Pontryagin’s maximum principle [17]. A similar approach has been considered before, for example, in [18]. The authors of that study derived a table of dimensionless characteristic velocities on a three-dimensional grid of pericenter radius, apocenter radius, and inclination of the intermediate orbit when solving the time-optimal averaged interorbital transfer problem. The dependencies obtained in [18] are widely used in mission design and ballistic analysis for the rapid estimation of the final spacecraft mass when using an electric propulsion system (EPS). The article analyzes characteristics of the multiple-repeat sun-synchronous orbits and the Martian gravitational potential effect on the orbit evolution. Estimation of both energy and temporal costs of a low-thrust transfer revealed that the considered class of operational orbits enables stable remote probing of the planet due to minimal variations in the areodetic altitude profile.

Universal dependencies for the energy costs estimation of transferring from an intermediate elliptical orbit to the target near-circular orbit were derived.

Keywords: low-thrust transfer, optimal interorbital transfer, Pontryagin’s maximum principle inter-orbital transfer, Martian frozen orbit, sun-synchronous orbit, remote sensing of Mars

Funding: the research was financed by the Russian Science Foundation Grant No. 22-79-10206, <https://rscf.ru/project/22-79-10206>

For citation: El’nikov R.V., Zhukov G.E. Energy Consumption Assessment of the Inter-Orbital Transfer from the Elliptical Orbit to the Geometrically-Stable Orbit around Mars. *Aerospace MAI Journal*. 2025;32(2):164–172. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=185002>

List of Figures

Fig. 1. To the target hardware capture angle determining: γ – minimum value of the spacecraft angle of site; δ – the target hardware capture angle value; ψ – acquisition range of Mars surface; ψ_{lim} – limit capture angle (at $\gamma = 0^\circ$); h – the spacecraft orbit altitude; $RM = 3389.5$ km – average Mars radius

Fig. 2. Intermediate orbit optimal characteristics change: *a* — optimal radii change; *b* — characteristic velocity change
 Fig. 3. Profile of geometrically stable orbit

Введение

Геометрически устойчивые орбиты (ГУО) отличаются тем, что у них практически отсутствует изменение профиля планетодезической высоты полета КА от витка к витку. Такие орбиты широко применяются на практике для дистанционного зондирования планеты. Вопросы, связанные с определением номинальных параметров ГУО, которые в зарубежной литературе часто называют замороженными, рассматривались многими авторами, например в работах [1–6]. В отечественной литературе свойства геометрической устойчивости впервые были описаны П.Е. Эльясбергом и Б.В. Кугаенко [7]. Авторы данной работы исследовали эволюцию орбит с малыми эксцентриситетами под влиянием первых шести зональных гармоник разложения геопотенциала.

В работе [8] был описан алгоритм расчета параметров геометрически устойчивых солнечно-синхронных орбит (ССО) в модели геопотенциала с учетом седьмой зональной гармоники. В итоге Д.Ю. Виноградовым и Е.А. Давыдовым были получены аналитические соотношения для вычисления параметров таких орбит, обладающих незначительными изменениями профиля высот подспутниковых точек на первые несколько сотен витков пассивного движения КА.

Перелет на подобные орбиты также рассматривался рядом авторов [9–12]. При этом использование двигателя малой тяги является наиболее целесообразным, поскольку доставка полезного груза на Марсианские орбиты требует больших энергетических затрат. Двигатели малой тяги позволяют существенно сократить затраты топлива на совершение транспортной операции [12], однако определение программы управления такими аппаратами является весьма трудоемкой и нетривиальной задачей. В отечественной литературе существуют работы по перелетам к ГУО, например, Луны [13], но, к сожалению, практически отсутствуют подобные статьи для Марса. Одной из целей данной работы является устранение подобного стечения обстоятельств. Предлагается рассмотреть, с одной стороны, достаточно простую с точки зрения реализации, а с другой — очень востребованную и неуступающую в результативности методику.

В данной работе рассматривается выбор параметров геометрически устойчивой кратной солнечно-синхронной Марсианской орбиты для полного покрытия экватора планеты [14–16], а

также производится оценка влияния нецентральности гравитационного поля Марса на геометрическую устойчивость. Рассматривается плоский оптимальный межорбитальный перелет с помощью двигателя малой тяги с промежуточной эллиптической орбиты на целевую геометрически устойчивую ССО вокруг Марса. Предполагается, что с межпланетной подлетной траектории КА импульсно переводится на промежуточную эллиптическую орбиту. Его дальнейшее движение («скрутка» на рабочую околокруговую орбиту) осуществляется с помощью электроракетной двигательной установки (ЭРДУ). Для оценки энергетических затрат межорбитального перелета с малой тягой между промежуточной эллиптической орбитой и околокруговой рабочей траекторией используется аппроксимация сетки безразмерных характеристических скоростей плоского перелета (без изменения наклона). Параметрами сетки являются радиусы апоцентра и перицентра промежуточной эллиптической орбиты. Данная сетка получена в результате решения задачи межорбитального перехода в рамках формализма принципа максимума Понтрягина [17]. Подобный подход уже рассматривался, например, в работе [18]. В отличие от работы [18] в данной статье рассматривается плоский перелет между промежуточной и целевой орбитами, не используется усреднение, а также был рассмотрен больший диапазон высот промежуточной орбиты. Авторы работы [18] получили таблицу безразмерных характеристических скоростей на трехмерной сетке значений радиуса перицентра, радиуса апоцентра и наклона промежуточной орбиты при решении задачи быстрогодействия усредненного межорбитального перехода. Полученные в работе [18] зависимости широко используются в проектно-баллистическом анализе для быстрой оценки конечной массы КА при перелете с ЭРДУ.

Анализ выбора кратных солнечно-синхронных орбит

В данном разделе кратко изложен алгоритм определения угла захвата целевой аппаратурой, а также алгоритм расчета параметров кратных ССО.

На рис. 1 представлены основные геометрические характеристики, необходимые для расчета углов захвата (δ) целевой аппаратуры (ЦА).

На данном рисунке в точке O располагается центр Марса, в точке b находится КА.

В случае, когда $\gamma > 0$ и $\delta < \pi/2 - \psi_n$, угол захвата может быть найден по формуле:

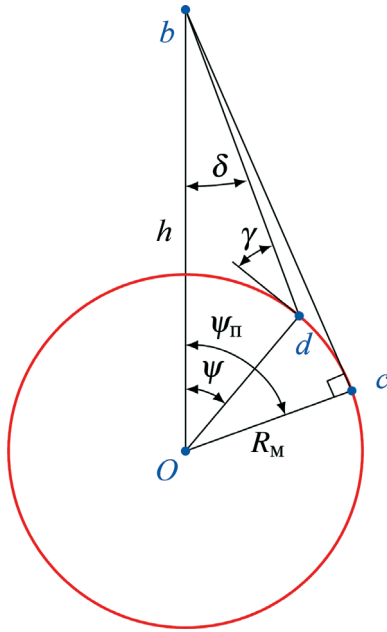


Рис. 1. К определению угла захвата ЦА:
 γ – минимальная величина угла места КА (на краю полосы захвата); δ – величина угла захвата ЦА; ψ – угол зоны захвата поверхности Марса; ψ_{π} – предельный угол захвата (при $\gamma = 0^\circ$); h – высота орбиты КА; R_M – средний радиус Марса, 3389.5 км

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \delta - \gamma. \quad (1)$$

Ширина полосы захвата связана с данным углом соотношением вида:

$$L = 2\psi R_M, \quad (2)$$

При этом из треугольника odb получаем также угол захвата по формуле:

$$\delta = \arcsin \left(\frac{R_M}{R_M + h} \cos \gamma \right). \quad (3)$$

Таким образом, зная среднюю высоту орбиты и ширину полосы, возможно определить угол захвата ЦА.

Подробный алгоритм расчета кратных ССО представлен в учебном издании [15].

Для определения большой полуоси a орбиты используется формула:

$$f(a) = T_\infty \left(\frac{N}{n} \right) + \frac{3\pi R_e^2 J_2}{2\sqrt{\mu a}} (1 + 5 \cos^2 i) - 2\pi \frac{a^{1.5}}{\sqrt{\mu}}, \quad (4)$$

где N – период замыкания трассы, сутки; n – число полных витков за период замыкания; $T_{cc} = 88775$ с – солнечные сутки; $R_e = 3396,2$ км – экваториальный радиус Марса; $\mu = 42828,37$ км³/с² – гравитационный параметр Марса; $J_2 = 0,001958744$ – вторая

зональная гармоника Марса.

Косинус угла наклонения ССО, входящий в формулу (4), рассчитывается по формуле:

$$\cos i = \frac{-\omega_c}{1,5 J_2 R_e^2 \sqrt{\mu}} a^{\frac{7}{2}}, \quad (5)$$

где $\omega_c = 1,05855 \cdot 10^{-7}$ 1/с – средняя угловая скорость орбитального движения Марса вокруг Солнца в плоскости эклиптики.

Подставляя формулу (5) в (4) и решая уравнение $f(a) = 0$ при различных N и n , получаем параметры кратной ССО.

Дополнительно по формулам (6) и (7) определяются суточное смещение трассы на экваторе $L_{сут}$ и межвитковое расстояние на экваторе $L_{мв}$:

$$L_{сут} = 2\pi R_3 \frac{m}{n}, \quad (6)$$

где $m = n - n_{nc}N$ – дополнительное число витков до замыкания трассы; n_{nc} – целое число витков в сутки;

$$L_{мв} = \frac{N}{n}. \quad (7)$$

Далее были рассмотрены рациональные варианты кратных ССО, полученных с использованием алгоритма, описанного выше, обеспечивающих непрерывное покрытие экватора полосами захвата по 400 км при съемке в нади́р.

Алгоритм определения геометрически устойчивых солнечно-синхронных орбит

Важным свойством геометрически устойчивых орбит является то, что оскулирующий эксцентриситет и аргумент перигея таких орбит остаются квазипостоянными при фиксированных значениях аргумента широты. Таким образом, профиль изменения модуля радиуса-вектора КА и планетодезической высоты полета для геометрически устойчивых орбит остается квазипостоянным во времени.

Для определения эксцентриситета e и аргумента перигея ω используется следующая методика. Подробно алгоритм формирования геометрически устойчивых околокруговых ССО рассматривался в статье [8].

Поскольку околокруговые ССО имеют малый эксцентриситет, то с помощью формулы (8) целесообразно перейти от элементов e и ω к элементам e_1 и e_2 [19]:

$$e_1 = e \sin \omega; \quad e_2 = e \cos \omega. \quad (8)$$

В восходящем узле орбиты элементы e_1 и e_2 совершают гармонические колебания относительно своих средних значений e_1^{cp} и e_2^{cp} , которые не зависят от начальных значений e_1^0 , e_2^0 и определяются наклонением плоскости орбиты, ее большой полу-

осью, и коэффициентами c_{n0} зональных гармоник, $2 \leq n \leq 7$.

Если задать начальные значения $e_1^{\text{cp}} = e_1^{\text{cp}}$ и $e_2^0 = e_2^{\text{cp}}$, то амплитуды гармонических колебаний в восходящем узле орбиты обращаются в нули. В этом случае значения элементов e_1^{cp} и e_2^{cp} в восходящих узлах орбиты остаются постоянными в течение длительных интервалов времени.

Для описания условия устойчивости модели гравитационного потенциала Марса, учитывающей зональные гармоники с коэффициентами J_2, J_3, J_5 и J_7 , используется формула для расчета e_1 и e_2 в случае коротко- и долгопериодических возмущений:

$$\begin{aligned} e_1 &= \gamma_2 \left(\frac{3}{2} - s^2 \right); \\ e_2 &= s \left(\frac{1}{2} \frac{\gamma_3}{\gamma_2} - \frac{5}{8} \frac{8 - 28s^2 + 21s^2}{4 - 5s^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{35}{256} \frac{\gamma_7}{\gamma_2} \frac{64 - 432s^2 + 792s^4 - 429s^6}{4 - 5s^5} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\gamma_i = J_i(-Re/a)_i$, $i = 2, 3, 5, 7$ — коэффициенты зональных гармоник в модели ГПЗ.

Поскольку короткопериодические возмущения являются периодическими функциями аргумента широты u с постоянной амплитудой, то оскулирующие элементы эксцентриситета и аргумента перицентра будут неизменными при фиксированном значении u . Соответственно неизменными во времени будут профиль $r(u)$ радиального удаления орбиты и ее высотный профиль $h(u)$ относительно общего эллипсоида.

Оскулирующие переменные в восходящем узле орбиты, обеспечивающие условие геометрической устойчивости, определяются по формуле:

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{e_1^2 + e_2^2}; \\ \omega &= \text{sign}(e_2) \arccos \frac{e_1}{e_2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Оптимальное управление

Для решения задачи перелета между двумя фазовыми точками за минимальное время в рамках формализма принципа максимума Понтрягина [17] необходимо минимизировать соответствующий функционал вида:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt \rightarrow \min. \quad (11)$$

Движение центра масс КА рассматривается в ареоцентрической экваториальной системе координат. Интегрирование происходит в обратном

времени от момента, когда КА находится на целевой орбите (ЦО) t_0 до момента, когда КА попадает на промежуточную орбиту t_f :

$$\begin{cases} \frac{dV_r}{dt} = \frac{V_n^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{P}{m} \sin(\theta); \\ \frac{dV_n}{dt} = -\frac{V_n V_r}{r} + \frac{P}{m} \cos(\theta); \\ \frac{dr}{dt} = V_r; \\ \frac{d\beta}{dt} = \frac{V_n}{r}; \\ \frac{d\psi_{V_r}}{dt} = \psi_{V_n} \frac{V_n}{r} - \psi_r; \\ \frac{d\psi_{V_n}}{dt} = \frac{1}{r} [\psi_{V_n} V_r - 2\psi_{V_r} V_n - \psi_\beta]; \\ \frac{d\psi_r}{dt} = \frac{1}{r^2} \left[V_n (\psi_\beta - V_r \psi_{V_n}) + \psi_{V_r} \left(V_n^2 - \frac{2\mu}{r} \right) \right]; \\ \frac{d\psi_\beta}{dt} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где $m = m_{\text{ЦО}} - (P_{\text{ЭРДУ}}/w_{\text{ЭРДУ}})t$ — масса КА; $m_{\text{ЦО}}$ — масса КА на целевой орбите; $w_{\text{ЭРДУ}}$ — удельный импульс ЭРДУ; $P_{\text{ЭРДУ}}$ — тяга ЭРДУ; V_r и V_n — радиальная и нормальная составляющие вектора скорости; r — радиус-вектор КА; β — полярный угол; θ — тангаж.

Гамильтониан задачи быстрогодействия будет иметь следующий вид:

$$H = -1 + \psi_{V_r} \frac{dV_r}{dt} + \psi_{V_n} \frac{dV_n}{dt} + \psi_r \frac{dr}{dt} + \psi_\beta \frac{d\beta}{dt}. \quad (13)$$

Закон управления вектором тяги определяется из условия максимума гамильтониана (13) по управлению:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\psi_{V_r}}{\sqrt{\psi_{V_r}^2 + \psi_{V_n}^2}}; \\ \cos \theta &= \frac{\psi_{V_n}}{\sqrt{\psi_{V_r}^2 + \psi_{V_n}^2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Краевые и начальные условия в рамках рассматриваемой задачи представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} h_e(t_f) &= V_r^2 + V_n^2 - 2\frac{\mu}{r} = h_e^*; \\ V_n(t_0) &= V_{\text{ЦО}}; V_r(t_0) = 0; \\ r(t_0) &= r_{\text{ЦО}}; \beta(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где h_e^* — требуемое значение константы энергии на правом конце траектории.

Решив систему уравнений вида (16), можно получить условия трансверсальности

$$\mathbf{p}(t_f) = v \frac{\partial h_e(t_f)}{\partial \mathbf{x}(t_f)}, \quad (16)$$

где $\mathbf{x} = [V_r \ V_n \ r \ \beta]^T$ – вектор фазовых переменных; $\mathbf{p} = [\psi_{V_r} \ \psi_{V_n} \ \psi_r \ \psi_\beta]^T$ – вектор сопряженных переменных; v – множитель Лагранжа.

Интегрируя систему уравнений (12), можно получить вектор невязок $\mathbf{g}$ на правом конце траектории – см. уравнение (17).

В качестве выбираемых параметров выступает набор сопряженных переменных на левом конце и момент завершения перелета:

$$\mathbf{p}_0 = [\psi_{V_r}(t_0) \ \psi_{V_n}(t_0) \ \psi_r(t_0) \ \psi_\beta(t_0)]^T, t_f \quad (18)$$

Задача поиска оптимального управления сводится к решению системы уравнений вида:

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}_0, t_f) = 0. \quad (19)$$

Для вычисления оптимальных значений характеристической скорости для совершения межорбитального перелета используется формула (20). Для определения оптимальных радиусов – формулы (21):

$$V_{\text{хар}} = -w \ln \left[1 - \frac{Pt}{m_{\text{ЦО}} w} \right]; \quad (20)$$

$$a = -\frac{\mu}{h_e}; e = \sqrt{1 + h_e \frac{(V_n r)^2}{\mu^2}}; R_{\alpha, \pi} = a(1 \pm e), \quad (21)$$

где $V_{\text{хар}}$ – характеристическая скорость; $R_{\alpha, \pi}$ – радиусы апоцентра и перигея.

Анализ численных результатов

Главное требование к КА дистанционного зондирования Марса – обеспечение полного покрытия экватора за 20 суток, связанное с особенностью работы комплекса ЦА для решения интересующих научных задач дистанционного зондирования. Причем для обеспечения требуемого разрешения съемки на краю полосы обзора, КА имеет ограничение на разворот $\pm 40^\circ$ по крену при съемке объектов Марса.

Орбита, удовлетворяющая данным ограничениям, имеет следующие параметры: период замыка-

ния 16 суток (212 витков), драконический период 111,67 мин, межвитковый интервал 1610 км, средняя высота 280 км, большая полуось 3654,92 км, наклонение $92,554^\circ$, эксцентриситет 0,008, аргумент перигея 276° .

Для выбора кратной ССО рассматривались различные варианты с периодами замыкания от 11 до 30 суток с использованием алгоритма, описанного выше, при высотах орбит не выше 350 км. Орбиты с периодами свыше 30 суток не рассматривались, так как в процессе анализа оказалось сложно добиться их геометрической устойчивости, а при высоте ниже 250 км существенно возрастали энергетические затраты для их поддержания. Далее в работе был выбран вариант со средней высотой 280 км, как лежащий в середине рассматриваемого диапазона высот и имеющий наименьший период замыкания для данной высоты, равный 16 суткам.

В работе [6] были получены аналитические соотношения для определения параметров около-круговых ГУО у Марса, основанные на формулах Лагранжа и преобразованиях Ли. Авторы работы [6] получили семейство марсианских орбит с малым эксцентриситетом и аргументом перигея около 270° . Этот результат близок к параметрам марсианской ГУО, полученным в данной статье (эксцентриситет 0,008 и аргумент перигея 276°).

Также в работе [20] рассматривалось численное определение параметров марсианских ГУО. В работе [20] были получены солнечно-синхронные ГУО с наклонением $97,754^\circ$, эксцентриситетом от 0,007 до 0,008 и аргумент перигея между 274° и 276° . Эти параметры также очень близки к описанным здесь результатам.

Решение задачи перелета за минимальное время для участка перелета с малой тягой было получено для 200 промежуточных орбит с постоянным шагом. У каждой из этих орбит отличалось значение константы энергии начиная с $-11,72 \text{ км}^2/\text{с}^2$, совпадающего с конечной орбитой, до нуля (не включая ноль). Далее рассмотрим безразмерную версию оптимальных параметров. Пусть гравитационный параметр будет равен 1, а единица безразмерного радиуса будет равна радиусу целевой орбиты. Тогда единица скорости будет равна местной круговой скорости конечной орбиты, а единица безразмерного времени может быть определена как результат деления единицы радиуса на скорость. На рис. 2

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}_0, t_f) = \left[h_e(t_f) - h_e^* \quad \frac{\psi_{V_r}(t_f) - V_r(t_f)}{\psi_{V_n}(t_f) - V_n(t_f)} \quad \frac{\psi_{V_r}(t_f) - V_r(t_f)r^2(t_f)}{\psi_r(t_f) - \mu} \quad H(t_f) \quad \psi_\beta(t_f) \right]^T. \quad (17)$$

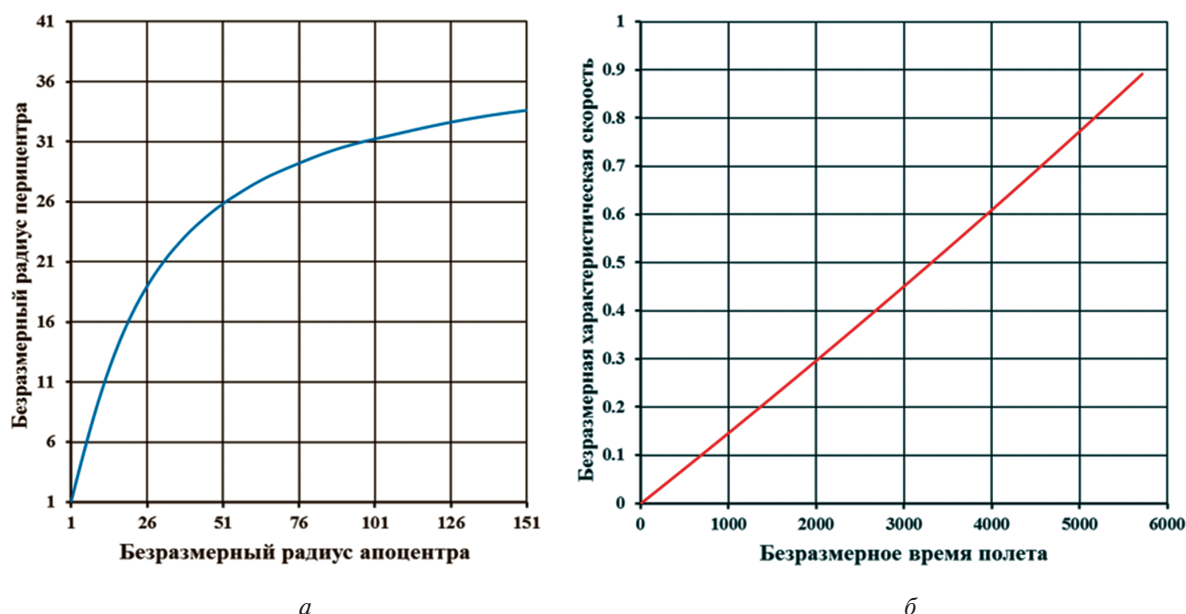


Рис. 2. Изменение оптимальных характеристик промежуточной орбиты:

а – изменение оптимальных радиусов; б – изменение характеристической скорости

показаны изменения оптимальных параметров промежуточной орбиты. С помощью полученных данных можно быстро получить оценку энергетических затрат для осуществления перелета на целевую орбиту.

Если сравнить полученный результат с работой [18], рассмотрев орбиту с безразмерными радиусами апогея и перигея, равными 3,94515 (для нулевого изменения наклона), то можно получить следующие результаты. По таблице авторов работы [18] значение безразмерной характеристической скорости составило 0,496. Для описанной в этой работе методики результат составил 0,495, что также подчеркивает эффективность представленного подхода.

На рис. 3 показано изменение ареодезической высоты подспутниковой точки для первых 200 витков под действие нецентральной гравитационной Марса модели Mars50c [21] (порядок и степень разложения 21 на 21). Как можно заметить, профиль ареодезической высоты подспутниковой точки практически не изменяется от витка к витку, что удовлетворяет условию геометрической устойчивости.

Выводы

Была рассмотрена задача вывода КА на полярную околокруговую ГУО вокруг Марса с помощью двигателя малой тяги. Предложенный подход может быть использован для анализа маневров комбинированной схемы выведения.

Методика предполагает переход с высокоэллиптической орбиты на желаемую ГУО, при этом

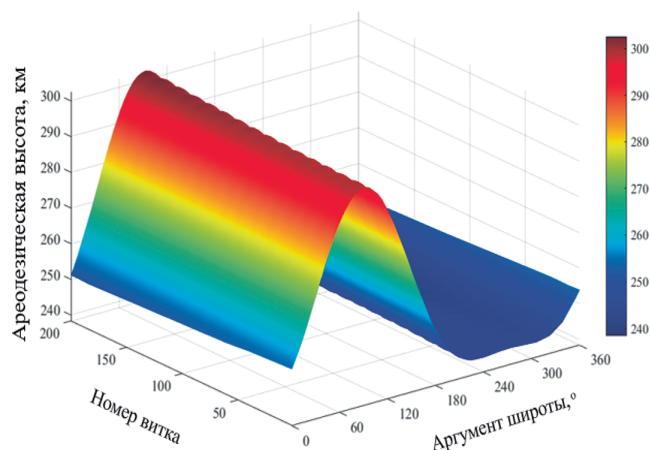


Рис. 3. Профиль геометрически устойчивой орбиты

параметры промежуточных орбит оптимизируются для максимизации доставки полезной нагрузки. Использовались аналитические соотношения для определения параметров ГУО.

Проведен анализ характеристик ГУО и влияния марсианского гравитационного потенциала на эволюцию орбиты. Оценены энергетические и временные затраты на перелет с малой тягой, показавшие, что рассмотренный класс рабочих орбит позволяет стабильно проводить дистанционное зондирование планеты благодаря минимальной вариации ареодезического профиля высоты.

Получены универсальные зависимости для оценки энергетических затрат при перелете с промежуточной эллиптической орбиты на целевую околокруговую орбиту.

Полученные результаты демонстрируют работоспособность представленного метода для марсианских миссий.

Список источников

1. Wang Y., Lu P., Fu T. Transfers to Frozen Orbits Around Planetary Moons Using Manifolds of Averaged Dynamics // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2024. Vol. 47. No. 2, pp. 262–278. DOI: 10.2514/1.G007774
2. Wu Z., Jiang F., Li J. Artificial Martian frozen orbits and sun-synchronous orbits using continuous low-thrust control // *Astrophysics and Space Science*. 2014. Vol. 352, pp. 503–514. DOI: 10.1007/s10509-014-1962-3
3. Noullez A., Tsiganis K. Design of low-altitude Martian orbits using frequency analysis // *Advances in Space Research*. 2021. Vol. 67. No. 1, pp. 477–495. DOI: 10.1016/j.asr.2020.10.032
4. Cinelli M., Ortore E., Mengali G., et al. Lunar orbits for telecommunication and navigation services // *Astrodynamic*. 2024. Vol. 8. No. 1, pp. 209–220. DOI: 10.1007/s42064-023-0191-3
5. Ortore E., Cinelli M., Circi C. Optimal initial conditions for science orbits around Ganymede // *Advances in Space Research*. 2023. Vol. 72. No. 8, pp. 3308–3320. DOI: 10.1016/j.asr.2023.06.019
6. Liu X., Baoyin H., Ma X. Analytical investigations of quasi-circular frozen orbits in the Martian gravity field // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2011. Vol. 109, pp. 303–320. DOI: 10.1007/s10569-010-9330-2
7. Кугаенко Б.В., Эльясберг П.Е. Эволюция почти круговых орбит ИСЗ под влиянием зональных гармоник // *Космические исследования*. 1968. Т. VI. № 2. С. 186–202.
8. Виноградов Д.Ю., Давыдов Е.А. Методика формирования устойчивых околокруговых солнечно-синхронных орбит при длительных сроках существования космического аппарата // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2017. № 6(66). DOI: 10.18698/2308-6033-2017-6-1630
9. Константинов М.С., Мин Т. Метод оптимизации траектории выведения КА с электроракетной двигательной установкой на ГСО. // *Вестник Московского авиационного института*. 2009. Т. 16. № 5. С. 282–290. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=12386>
10. Петухов В.Г. Оптимизация многоритмовых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // *Космические исследования*. 2004. Т. 42. № 3. С. 260–279.
11. Петухов В.Г., Паинг Сое Т.У. Оптимизация многоритмовых траекторий межорбитального перелета с идеально-регулируемым двигателем малой тяги // *Известия Российской академии наук. Энергетика*. 2019. № 3. С. 140–154.
12. Петухов В.Г. Методы оптимального управления в проектировании траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками // *X Поляховские чтения: Материалы международной научной конференции по механике (23–27 сентября 2024; Санкт-Петербург)*. СПб.: Изд-во ВВМ, 2024. С. 41–45.
13. Shirobokov M., Trofimov S., Ovchinnikov M. Lunar Frozen Orbits for Small Satellite Communication/Navigation Constellations // *72nd International Astronautical Congress (25–29 October 2021; Dubai, UAE)*. Paper IAC-21.C1.4.6.
14. Razoumny Yu.N. Locally Geostationary Orbits: Optimal Geometry of Elliptic Orbit for Earth Coverage // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2019. Vol. 56. No. 4, pp. 1017–1023. DOI: 10.2514/1.A33699
15. Чернов А.А., Чернявский Г.М. Орбиты спутников дистанционного зондирования Земли. Лекции и упражнения. –М.: Радио и связь, 2004. –200 с.
16. Разумный Ю.Н., Самусенко О.Е., Неуен Н.К. Анализ оптимальных вариантов двухъярусных спутниковых систем непрерывного обзора сферического слоя околоземного космического пространства // *Вестник Московского авиационного института*. 2018. Т. 25. № 3. С. 171–181.
17. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
18. Konstantinov M.S., Petukhov V.G. Easy engineering technique of optimal electric propulsion trajectory estimation // *57th International Astronautical Congress (02–06 October 2006; Valencia, Spain)*. DOI: 10.2514/6.IAC-06-C4.4.06
19. Константинов М.С., Каменков Е.Ф., Перелыгин Б.П. и др. Механика космического полета: Учебник / Под ред. В.П. Мишина. М.: Машиностроение, 1989. 406 с.
20. Ельников Р.В., Жуков Г.Е. Методика поддержания геометрически устойчивых солнечно-синхронных орбит с помощью электроракетных двигателей // *Космонавтика и ракетостроение*. 2024. № 3(136). С. 5–19.
21. Konopliv A.S., Sjogren W.L. The JPL Mars Gravity Field, Mars50c, Based Upon Viking and Mariner 9 Doppler Tracking Data. NASA-CR-198881. Jet Propulsion Laboratory. California Institute of Technology. Pasadena, California, 1995. 83 p.

References

1. Wang Y, Lu P, Fu T. Transfers to Frozen Orbits Around Planetary Moons Using Manifolds of Averaged Dynamics. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2024;47(2):262–278. DOI: 10.2514/1.G007774
2. Wu Z, Jiang F, Li J. Artificial Martian frozen orbits and sun-synchronous orbits using continuous low-thrust control. *Astrophysics and Space Science*. 2014;352:503–514. DOI: 10.1007/s10509-014-1962-3
3. Noullez A, Tsiganis K. Design of low-altitude Martian orbits using frequency analysis. *Advances in Space Research*. 2021;67(1):477–495. DOI: 10.1016/j.asr.2020.10.032
4. Cinelli M, Ortore E, Mengali G, et al. Lunar orbits for telecommunication and navigation services.

- Astrodynamics*. 2024;8(1):209–220. DOI: 10.1007/s42064-023-0191-3
5. Ortore E, Cinelli M, Circi C. Optimal initial conditions for science orbits around Ganymede. *Advances in Space Research*. 2023;72(8):3308–3320. DOI: 10.1016/j.asr.2023.06.019
 6. Liu X, Baoyin H, Ma X. Analytical investigations of quasi-circular frozen orbits in the Martian gravity field. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2011;109:303–320. DOI: 10.1007/s10569-010-9330-2
 7. Kugaenko BV, El'yasberg PE. Evolution of almost circular orbits of satellites under the influence of zonal harmonics. *Kosmicheskie issledovaniya*. 1968;VI(2):186–202. (In Russ.).
 8. Vinogradov DYU, Davydov EA. Techniques of shaping steady near-circular solar-synchronous orbits for the long term existence of the spacecraft. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2017(6). (In Russ.). DOI: 10.18698/2308-6033-2017-6-1630
 9. Konstantinov MS, Min T. A trajectory optimization method to solve a problem of spacecraft insertion into geostationary orbit using electric thrusters. *Aerospace MAI Journal*. 2009;16(5):282–290. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=12386>
 10. Petukhov VG. Optimization of multi-orbit transfers between noncoplanar elliptic orbits. *Cosmic Research*. 2004;42(3):250–268. (In Russ.).
 11. Petukhov VG, Paing Soe TU. Optimization of multi-turn trajectories of interorbital flight with an ideally controlled low-thrust engine. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Energetika*. 2019(3):140–154. (In Russ.).
 12. Petukhov VG. Optimal control methods in designing spacecraft trajectories with electric rocket propulsion systems. *International Scientific Conference on Mechanics "X Polyakhov's Reading" (September 23–27, 2024, Saint-Petersburg)*. St. Petersburg: VVM; 2024. p. 41–45. (In Russ.).
 13. Shirobokov M, Trofimov S, Ovchinnikov M. Lunar Frozen Orbits for Small Satellite Communication/Navigation Constellations. *72nd International Astronautical Congress (October 25–29, 2021; Dubai, UAE)*. Paper IAC-21.C1.4.6.
 14. Razoumny YuN. Locally Geostationary Orbits: Optimal Geometry of Elliptic Orbit for Earth Coverage. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2019;56(4):1017–1023. DOI: 10.2514/1.A33699
 15. Chernov AA, Chernyavskii GM. *Orbits of Earth remote sensing satellites. Lectures and exercises*. Moscow: Radio i svyaz', 2004. 200 p. (In Russ.).
 16. Razoumny YN, Samusenko OE, Nguyen NQ. Optimal options analysis of two-tier satellite systems for near-earth space spherical layer continuous coverage. *Aerospace MAI Journal*. 2018;25(3):171–181. (In Russ.).
 17. Pontryagin LS, Boltyanskii VG, Gamkrelidze RV, et al. *Mathematical theory of optimal processes*. Moscow: Nauka; 1976. 392 p. (In Russ.).
 18. Konstantinov MS, Petukhov VG. Easy engineering technique of optimal electric propulsion trajectory estimation. *57th International Astronautical Congress (October 02–06, 2006; Valencia, Spain)*. DOI: 10.2514/6.IAC-06-C4.4.06
 19. Konstantinov MS, Kamenkov EF, Perelygin BP, et al. *Mechanics of space flight*. Moscow: Mashinostroenie; 1989. 406 p. (In Russ.).
 20. Elnikov RV, Zhukov GE. Methodology for Designing Frozen Sun-Synchronous Orbits by the Operation of Electric Propulsion Systems. *Kosmonavtika i raketostroenie*. 2024(3):5–19. (In Russ.).
 21. Konopliv AS, Sjogren WL. *The JPL Mars Gravity Field, Mars50c, Based Upon Viking and Mariner 9 Doppler Tracking Data*. NASA-CR-198881. Jet Propulsion Laboratory. California Institute of Technology. Pasadena, California; 1995. 83 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию / Received 27.03.2025
 Одобрена после рецензирования / Revised 21.04.2025
 Принята к публикации / Accepted 23.04.2025