

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи



Симкина Анастасия Вячеславовна

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ И АППРОКСИМАЦИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ
МНОЖЕСТВ 0-УПРАВЛЯЕМОСТИ И ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ
ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА
УПРАВЛЕНИЕ

Специальность 2.3.1.

Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
Д. Н. Ибрагимов

Москва, 2026 год

Оглавление

Введение	4
1 Построение оценок предельных множеств 0-управляемости для линейных дискретных систем с ограниченным управлением	16
1.1 Постановка задачи	17
1.2 Декомпозиция линейной системы	17
1.3 Построение оценок предельных множеств 0-управляемости	31
1.4 Внешняя оценка предельного множества 0-управляемости на основе принципа сжимающих отображений	38
1.5 Примеры	43
1.6 Выбор шага квантования	48
1.7 Выводы по главе 1	55
2 Построение оценок предельных множеств достижимости для линейных дискретных систем с ограниченным управлением	57
2.1 Постановка задачи	57
2.2 Декомпозиция линейной системы	58
2.3 Построение оценок предельных множеств достижимости	66
2.4 Внешняя оценка предельного множества достижимости на основе принципа сжимающих отображений	73
2.5 Примеры	75
2.6 Выводы по главе 2	81
3 Построение внешних оценок предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных почти периодических дискретных систем	82
3.1 Постановка задачи	82
3.2 Предельные множества 0-управляемости и достижимости для $n = 2$	83
3.3 Оценки предельных множеств 0-управляемости и достижимости в общем случае	90
3.4 Оптимальная аппроксимация предельных множеств достижимости линейных дискретных почти периодических систем	91
3.5 Выводы по главе 3	92
4 Программа для построения внешних оценок предельных множеств 0-управляемости и предельных множеств достижимости	95
4.1 Описание программы для ЭВМ	95
4.2 Система управления аэростатом	97
4.3 Система стабилизации уровня глюкозы в плазме крови	99

4.4	Оценки предельного множества достижимости для системы демпфирования	101
4.5	Выводы по главе 4	104
	Заключение	105
	Список литературы	106

Введение

Диссертация посвящена исследованию предельных множеств 0-управляемости и достижимости линейных дискретных автономных систем с геометрическими ограничениями на управление. Алгоритмы построения предельных множеств (или их оценок) строятся на основе их аналогов за конечное число шагов. В теории оптимального управления важное место занимает анализ геометро-топологических свойств множеств достижимости (ограниченность, замкнутость, выпуклость и др.). Для линейных непрерывных систем выпуклость множества достижимости вытекает из свойств интеграла Ауманна [95] и является следствием теоремы Ляпунова о векторной мере, доказанной в 1940-м году [53]. 1950-е гг. ознаменовались становлением современной математической теории оптимального управления. Толчок к развитию математической теории процессов управления был получен благодаря результатам академика Л.С. Понтрягина и его сотрудников: В.Г. Болтянского, Р.В. Гамкредидзе, Е.Ф. Мищенко, а следом за ними и других исследователей. В частности, были выведены необходимые условия оптимальности для функционалов различного вида, получившие название принципа максимума Понтрягина [70, 71]. Значительный вклад в теорию оптимального управления сделан Н. Н. Красовским. Впервые с задачами оптимального управления он познакомился на научном семинаре Л. С. Понтрягина во время пребывания в докторантуре. В дальнейшие годы, математическая теория процессов управления достигла широкого распространения с различными приложениями. Активную роль в развитии теории процессов управления сыграли именно сотрудники Н.Н. Красовского: А.Б. Куржанский [49–51], А.И. Субботин [47], М.И. Гусев [115], В.Н. Ушаков [84], М.С. Никольский [60], В.А. Комаров [40, 41], Т.Ф. Филишова [86, 87] и другие. В том числе были продолжены исследования задач управления в условиях неопределенности [50], оценки и нахождения множеств достижимости при различных типах ограничений на состояния и параметры системы [20]. Также ими была развита теория множеств и трубок достижимости при неопределенности [52]. При обратном времени эти трубки совпадают по своим основным свойствам с понятиями альтернированного интеграла Л.С.Понтрягина [72, 73] и моста Н.Н.Красовского [47, 85].

Классические исследования множеств достижимости связаны с системами с геометрическими (позиционными) ограничениями, которые требуют, чтобы управляющий сигнал в любой момент времени не выходил за границы допустимой области. С помощью них учитываются конструктивные возможности управляемого устройства (нельзя отклонять рули более чем на определенный угол, двигатель имеет ограниченную тягу и так далее). Впервые свойства множеств достижимости и управляемости для случая геометрических ограничений были получены в трудах Красовского Н.Н. и развиты в работах Субботина А.И. [46, 47], Куржанского А.Б. [50], Черноусько Ф.Л. [93] и др.

Возможность вычисления множеств достижимости управляемых систем и их оценок позволяет решать такие важные проблемы, как определение оптимальных управлений и траекторий, нахождение экстремальных значений функционалов и многие другие [41, 50, 61, 64]. Кроме того, различные методы построения множеств достижимости могут быть использованы для решения ряда важных практических задач, в которых необходимо описать процесс распространения невзаимодействующих возмущений в неоднородной анизотропной среде [35], в частности, это касается таких областей как геометрическая оптика, моделирование травления и осаждения, технологии микроэлектронных систем [22].

Методы построения и оценивания предельного множества 0-управляемости особенно важны при решении задачи быстродействия, которая занимает одно из центральных мест в теории оптимального управления, в частности, линейная проблема быстродействия, систематическое исследование которой впервые дано в работах Гамкрелидзе Р.В. [14, 15]. Он впервые применил для решения методы, основанные на принципе максимума Понтрягина [70, 120], который дает необходимое условие оптимальности. Исследованием задач быстродействия занимались Болтянский В.Г., Моисеев Н.Н., Евтушенко Ю.Г. и др. [1, 9, 21, 28, 57, 70]. Эта задача имеет свои особенности для дискретного времени, тогда как в непрерывном случае её решение уже давно известно и основывается на использовании релейного управления [9, 70]. Для дискретных систем используется подход, основанный на применении множеств 0-управляемости. Подробные методы решения данной задачи изложены в [25, 26, 29, 74]. Однако в этих работах предполагается разрешимость исходной задачи быстродей-

ствия, но не приводятся необходимые и достаточные условия выполнимости этого факта. С другой стороны, имея возможность построить предельное множество 0-управляемости или его оценку, можно определить, разрешима ли задача быстрогодействия в принципе для ряда начальных состояний.

Для непрерывных систем известны результаты, в которых получены разного рода количественные соотношения, позволяющие строить множества достижимости конкретных управляемых систем. Знание множеств достижимости позволяет эффективно решать сложные задачи, поскольку основные вычислительные трудности оказываются сосредоточены именно на этапе их нахождения. В связи с этим особого внимания заслуживают эффективные методы аппроксимации указанных множеств. Основной вопрос, который рассматривался во многих работах—какой математической конструкцией может быть охарактеризована динамика множества достижимости. Для описания эволюции множеств достижимости в фазовом пространстве системы используются четыре способа представления множеств в конечномерном пространстве. Используются поточечное описание множеств, представление множеств в виде линий уровня гладких функций, задание их опорными функциями и с помощью параметрического описания границы множества. В случае когда множество достижимости выпукло, оно полностью определяется своей опорной функцией и его динамику отражает дифференциальное уравнение для опорной функции [62]. Способ представления множеств достижимости, основанный на аппарате опорных функций и опорных гиперплоскостей, получил свое развитие в работах [7, 16].

В статье [64] был рассмотрен подход к описанию множеств достижимости с помощью параметрических уравнений. Еще один возможный подход к описанию эволюции множества достижимости – задание его с помощью множества уровня гладкой функции, определенной на фазовом пространстве системы. Этот подход использовался, например, в работе [42]. Особенности границы множества достижимости рассматриваются в [19, 88]; так, в [19] исследуются особенности границы множества достижимости для гладкой двумерной управляемой системы, а в [88] – для линейной нестационарной системы со скалярным управлением. В работах [8, 63] исследовалась связь между гладкостью границы множества достижимости и наблюдаемостью систем.

Поскольку точное построение множеств достижимости, как правило, является очень сложной задачей, были разработаны различные численные методы для их аппроксимации. Многообразие различных методик было создано для получения как можно более точных приближений [3, 23, 54, 60, 96, 98, 102], в частности, с использованием политопов с большим числом вершин или объединений большого числа точек. Однако такие методы могут требовать значительных вычислений, особенно для систем большой размерности. Другие методики основаны на оценке множеств с помощью областей фиксированной формы [126–129] и активно применяются для дискретных систем.

Начиная с основополагающих работ Куржанского [133, 134, 136], Черноушко [93] и Швеппе [141], получила развитие техника аппроксимации множеств достижимости с помощью конечнопараметрических множеств, в частности эллипсоидов. В этих исследованиях были получены внешние и внутренние эллипсоидальные оценки, выражаемые через решения специальных эволюционных уравнений. Важным результатом, доказанным в работах [133, 136], стала возможность достижения сколь угодно точных двусторонних приближений для множеств достижимости и многозначных интегралов путем пересечения внешних и объединения внутренних эллипсоидальных оценок при варьировании управляющих параметров. Основное преимущество данного подхода заключается в том, что они позволяют получать приближенные решения с использованием относительно простых инструментов. Дальнейшее развитие эллипсоидальных методов аппроксимации, включая их распространение на отдельные классы нелинейных систем, представлено в работах [16, 61, 68, 86, 87, 109]. Одно из направлений развития этого подхода связано с работами [69, 94, 101] и состоит в построении общей квадратичной функции Ляпунова, который приводит к построению инвариантных эллипсоидов [90, 91, 138]. Также на основе непрерывных кусочно-квадратичных функций Ляпунова известен подход к построению внешних и внутренних оценок множеств достижимости гибридных систем [82]. Параллельно с эллипсоидальными оценками разрабатывались альтернативные подходы к оценке множеств достижимости с использованием другого класса конечнопараметрических множеств - параллелотопов [44, 125]. Алгоритмы построения множеств достижимости, основанные на дискретных аппроксимациях, изучались в [16, 96, 116, 117].

В [2, 51, 115] исследовались свойства и алгоритмы построения информационных множеств в задачах оценивания и идентификации при интегральных ограничениях на возмущения, эти множества являются аналогами множеств достижимости в задачах управления. В работе Пацко В.С. и Федотова А.А. [67] описана физическая визуализация множеств достижимости с использованием 3D-печати.

Проблема построения множеств достижимости для дискретных систем активно развивается в последнее время. В работах используется метод описания множеств достижимости системой линейных неравенств [107, 119, 137]. Также для построения границ множеств достижимости используется принцип максимума для дискретных систем [103, 118, 122]. Исследование геометрических свойств множеств достижимости линейных дискретных систем с ограничениями на управление приведено в работах [99, 104, 108, 140]. На сегодняшний день активно развиваются методы оценки множеств достижимости для различных классов дискретных систем [77, 83]. Для дискретных систем, как и для непрерывных, используется подход к построению множеств достижимости с помощью эллипсоидальных аппроксимаций [132, 134]. В работе [114] исследуется связь множеств достижимости и 0-управляемости для линейных дискретных переключаемых систем. В статьях [105, 123] приведены оценки множеств 0-управляемости линейных дискретных систем с насыщением. Также известны аналитические представления множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и ограничениями на функцию управления в смысле l_∞ -нормы. В частности, доказано, что при линейных ограничениях на управление множества достижимости и 0-управляемости за конечное число шагов представляют собой многогранники [29].

Для предельных аналогов тематика оценивания представляет собой относительно новое направление исследований, что подтверждается ограниченным количеством публикаций в данной области. Несмотря на растущий интерес к проблеме, многие аспекты остаются недостаточно изученными, что определяет актуальность настоящего исследования. Для предельных множеств сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности [80, 104, 106]. Однако большинство работ либо сосредоточены на исследовании общих свойств предельных множеств достижимости и 0-управляемости [104, 106, 114, 121, 124], либо рассматривают системы с неогра-

ническим управлением [99, 113, 114, 121, 124]. В ряде частных случаев предложены конструктивные методы формирования внешних оценок на основе аппарата опорных полупространств [43] или принципа максимума [112]. Для систем с суммарными ограничениями на управление получено описание предельных множеств достижимости и 0-управляемости в виде многогранников для случая ограничений в смысле l_1 -нормы [31]. При выборе l_p -нормы с произвольным значением параметра $p \in (1; +\infty)$ сформулированы и доказаны общие свойства предельных множеств достижимости и 0-управляемости [32]. В частности, доказано их представление в виде проекций суперэллипсоидальных множеств конечной [97, 142] и бесконечной размерностей. Это тесно связано со строго выпуклым анализом [4, 76], выпуклым программированием [100], теорией нормированных пространств [39] и линейных операторов [18]. В [31] для линейных дискретных систем со скалярным управлением, на которое наложено суммарное ограничение 1-го порядка, показано, что в случае устойчивых систем возможно явным образом найти предельное множество достижимости, представляющее собой выпуклый, симметричный относительно нуля многогранник. Для ограничений более высокого порядка описание предельных множеств достижимости и 0-управляемости получено посредством использования опорных полупространств [32].

Объектом исследования являются линейные системы с дискретным временем и ограниченным управлением. **Предметом исследования** являются методы построения и оценивания предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных систем с дискретным временем и ограниченным управлением.

В работе поставлена следующая **цель**. Для линейных систем с дискретным временем и геометрическими ограничениями на управление разработать алгоритмы точного построения и внешнего оценивания предельных множеств 0-управляемости и достижимости.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**.

Для линейных систем с дискретным временем и геометрическими ограничениями на управление

1) сформулировать и доказать необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств 0-управляемости и достижимости линейной дискретной автономной системы с ограниченным управлением с компактным множеством допу-

стимых значений управления, во внутренность которого входит начало координат;

2) сформулировать и доказать утверждения, позволяющие декомпозировать задачу построения предельного множества 0 -управляемости и предельного множества достижимости;

3) разработать алгоритм построения внешних оценок предельных множеств 0 -управляемости и предельных множеств достижимости на основе аппарата опорных полупространств;

4) разработать алгоритм построения внешних оценок предельных множеств 0 -управляемости и предельных множеств достижимости на основе принципа сжимающих отображений;

5) разработать алгоритм построения внешних оценок предельных множеств 0 -управляемости и предельных множеств достижимости для почти периодических систем;

6) разработать программу, реализующую эти алгоритмы;

7) при помощи разработанного математического аппарата решить ряд модельных примеров и прикладных задач.

Методы исследования. Для решения поставленных задач используются методы математического моделирования, выпуклого анализа, функционального анализа. Различные численные методы решения задач выпуклого программирования применяются для реализации программы и для проведения вычислительных экспериментов.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических формулировок и доказательств утверждений, подтверждением полученных теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. Полученные в диссертационной работе результаты по задаче построения предельных множеств 0 -управляемости и достижимости являются новыми, в частности, разработаны алгоритмы построения оценок предельных множеств, позволяющие строить оценки с любой наперед заданной точностью.

Практическая ценность исследования связана с возможностью применения разработанных методов при проектировании различных систем управления (например, систем демпфирования и систем управлением движения летательных аппара-

тов), построения управляющих устройств для стабилизации различных объектов.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит введение, 4 главы, заключение и список используемой литературы. Объем работы в страницах – 119, число рисунков – 24, число таблиц – 1, число использованных источников – 159.

Содержание диссертации

Во введении дан подробный обзор имеющихся работ по выбранной теме диссертационного исследования и смежным темам, сформулирована цель работы, аргументирована ее научная новизна и практическая ценность, а также в сжатом виде изложено содержание глав диссертации.

В первой главе сформулирована постановка задачи построения предельных множеств 0 -управляемости (или их оценок) для линейной дискретной системы с геометрическими ограничениями на управление. Решение поставленной задачи осуществляется посредством класса множеств 0 -управляемости, где каждое множество 0 -управляемости за N шагов состоит из тех и только из тех начальных состояний системы, из которых она может быть переведена в 0 за N шагов. Предельное множество 0 -управляемости представимо в виде счётного объединения конечных аналогов. Доказан ряд лемм, который позволяет при помощи декомпозиционного подхода решать поставленную задачу для n -мерной системы за счет ее декомпозиции на подсистемы меньшей размерности, что удается сделать благодаря переходу в вещественный жорданов базис. Особенности построения внешних оценок предельных множеств 0 -управляемости связаны с собственными значениями матрицы системы. Доказаны леммы о построении внешних оценок предельных множеств 0 -управляемости на основе аппарата опорных полупространств для действительных и комплексно-сопряженных собственных значений.

Рассмотрена задача построения внешней оценки предельного множества 0 -управляемости на основе аппарата сжимающих отображений. Так как множества 0 -управляемости за N шагов допускают рекуррентное соотношение, что напоминает метод простой итерации, для использования которого необходимо определить метрическое пространство, в данном случае вводится пространство компактов с метрикой Хаусдорфа. Оно является полным, следовательно, у сжимающего отображения в таком пространстве существует единственная неподвижная точка. Сформулированы

и доказаны две теоремы, в которых даны условия того, что отображение сжимающее (или же является сжимающим композиция отображений M раз), и погрешность метода простой итерации. Также доказана теорема о внешних оценках на основе принципа сжимающих отображений, которая позволяет строить оценки предельных множеств 0 -управляемости с любой наперед заданной точностью. Приведены модельные примеры.

Выбор шага квантования M , который определяет, при каком значении M отображение, определяющее внешнюю оценку, является сжимающим, обосновывается с помощью методов численного анализа. Шаг M напрямую влияет на точность построения оценок и используется в вычислении коэффициента сжатия, который рассчитывается как операторная норма матрицы A^{-M} . Сформулирована оптимизационная задача минимизации погрешности внешней оценки предельного множества 0 -управляемости \mathcal{X}_∞ в зависимости от шага M , которая решена средствами численного анализа. Был проверен ряд расчётов для двумерных систем с различными собственными значениями. Установлены оптимальные значения шага M , обеспечивающие минимальную погрешность при ограничении на максимальное число шагов N_{\max} .

Во второй главе сформулирована постановка задачи построения предельных множеств достижимости (или их оценок) для системы из главы 1. Решение поставленной задачи осуществляется посредством класса множеств достижимости, где каждое множество достижимости за N шагов состоит из тех и только из тех состояний системы, в которые систему можно перевести из 0 за N шагов. Известно, что предельное множество достижимости представимо в виде счётного объединения конечных аналогов. Доказан ряд лемм, которые позволяют решить поставленную задачу для n -мерной системы за счет ее декомпозиции на подсистемы меньшей размерности, что удается сделать благодаря переходу в вещественный жорданов базис. Особенности построения внешних оценок предельных множеств достижимости связаны с собственными значениями матрицы системы. Доказано свойство выпуклости предельного множества, что позволяет построить вид опорного полупространству к предельному множеству. На основе этого свойства доказаны леммы о построении внешних оценок предельных множеств достижимости на основе аппарата опорных

полупространств для действительных и комплексно-сопряженных собственных значений.

Рассмотрена задача построения внешней оценки предельного множества достижимости на основе аппарата сжимающих отображений. Так как множества достижимости за N шагов допускают рекуррентное соотношение, что напоминает метод простой итерации, для использования которого необходимо определить метрическое пространство, в данном случае вводится пространство компактов с метрикой Хаусдорфа. Оно является полным, следовательно, у сжимающего отображения в таком пространстве существует единственная неподвижная точка. Сформулированы и доказаны две теоремы, в которых даны условия того, что отображение сжимающее (или же является сжимающим композиция отображений M раз), и погрешность метода простой итерации. Также доказана теорема о структуре внешних оценок на основе принципа сжимающих отображений, которая позволяет строить оценки предельных множеств достижимости с любой наперед заданной точностью. Приведены модельные примеры.

В третьей главе рассмотрен частный случай системы, описанной в главе 1. В данном случае рассматривается линейная дискретная почти периодическая n -мерная система. Почти периодическими называются системы, матрицы которых обладают только комплексно-сопряженными собственными значениями. Ставится задача построения оценок предельных множеств 0 -управляемости и достижимости для таких систем. На основе принципа декомпозиции задача построения предельных множеств разбивается на $\frac{n}{2}$ аналогичных задач размерности 2. Для двумерных периодических систем (когда аргумент является рациональным делителем π) доказана теорема, позволяющая построить предельные множества 0 -управляемости и достижимости в явном виде. Эта теорема обобщается за счёт использования свойств метрики Хаусдорфа в пространстве компактов на случай почти периодических систем, когда внешнюю оценку предельного можно построить как сумму предельного множества вспомогательной периодической системы и погрешности. Точность приближения в смысле расстояния Хаусдорфа оценивается при помощи представления всех рассматриваемых множеств в качестве неподвижных точек сжимающих отображений. Проведен численный анализ погрешности внешней оценки предельного множества при огра-

ничении на вычислительные ресурсы, который позволил определить оптимальное значение параметра, характеризующего наиболее точную оценку.

Четвертая глава посвящена описанию программы, которая реализует алгоритмы, разработанные в главах 1-3.

Для демонстрации эффективности работы программы решаются задачи построения предельного множества 0 -управляемости спутника, задача построения предельных множеств достижимости для системы демпфирования высотного сооружения и задача построения предельного множества достижимости для системы стабилизации уровня глюкозы в плазме крови.

В заключении приведены основные научные результаты, полученные автором работы.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Результаты диссертационной работы соответствуют пунктам 1, 2, 5 паспорта специальности 2.3.1.:

1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.
2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.
5. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

Основные результаты работы, выносимые на защиту. 1. Разработан алгоритм построения оценок предельных множеств 0 -управляемости и достижимости, основанный на аппарате опорных полупространств. [147, 148, 153, 157, 158]

2. Разработан алгоритм построения внешней оценки предельных множеств 0 -управляемости и достижимости на основе принципа сжимающих отображений с любой наперед заданной точностью. [145, 146, 149, 152, 154, 155, 159, 160]

3. Разработан алгоритм построения внешней оценки предельных множеств 0 -управляемости и достижимости для почти периодических систем. [151, 156, 161]

4. Программа, реализующая полученные алгоритмы, при помощи которой решены задачи построения предельных множеств в задаче демпфирования высотного

сооружения в зоне сейсмической активности и нормализации уровня глюкозы в плазме крови. [162]

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях: международные научные конференции «Авиация и космонавтика» (Москва, 2020, 2023, 2024 гг.); международные научные конференции «Гагаринские чтения» (Москва, 2021, 2022, 2024); XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (Москва, 2024 г.); XXII Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Дивноморское, 2023 г.); XXV международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2021 г.); Всероссийская конференция «Теория управления и математическое моделирование» (Ижевск, 2025 г.).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 работах, из которых 3 работы опубликованы в периодических изданиях, индексируемых в международных системах цитирования **Web of Science** или **Scopus** [145, 146, 151], 4 работы в изданиях, рекомендованных **ВАК** [147–150], и 10 работ в других научных изданиях и материалах конференций [152–161]. Получено государственное свидетельство о регистрации программы для ЭВМ [162].

Личный вклад. Все результаты диссертации получены лично автором. Из результатов, опубликованных в соавторстве, в диссертацию включен только материал, вклад соискателя в котором был определяющим.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность научному руководителю Д. Н. Ибрагимову за ценные комментарии и замечания, профессору В. Н. Синицину за помощь в организации, профессорам С. В. Иванову, К. В. Семенихину за полезную критику и замечания при подготовке диссертационной работы, а также за другую помощь, оказанную автору в процессе исследований и написания диссертации.

Глава 1. Построение оценок предельных множеств 0-управляемости для линейных дискретных систем с ограниченным управлением

Глава 1 посвящена исследованию предельных множеств 0-управляемости для линейных дискретных систем с геометрическими ограничениями на управление. Основное внимание уделяется разработке методов построения и анализа данных множеств, включая их декомпозицию, изучение свойств выпуклости и разработку алгоритмов внешнего оценивания.

Основные разделы главы организованы следующим образом:

- В разделе 1.1 приводится постановка задачи для n -мерной линейной дискретной системы с выпуклым компактным множеством допустимых управлений, содержащим ноль в своей относительной внутреннейности. Даются определения множеств 0-управляемости за конечное число шагов и их предельного аналога.
- Раздел 1.2 посвящен декомпозиционному подходу анализа системы. Доказывается возможность разложения исходной задачи на подзадачи меньшей размерности.
- В разделе 1.3 исследуются свойства выпуклости предельных множеств. Доказывается, что множество 0-управляемости является открытым и выпуклым. На основе этих свойств представлены внешние оценки предельных множеств 0-управляемости.
- Раздел 1.4 представляет метод построения внешних оценок на основе принципа сжимающих отображений.
- В разделе 1.5 представлены модельные примеры, на которых проиллюстрированы теоретические результаты, полученные в предыдущих разделах главы.
- В разделе 1.6 проводится численный анализ зависимости точности оценок от выбора параметров алгоритма из раздела 1.4.
- В разделе 1.7 сформулированы выводы по главе 1.

1.1 Постановка задачи

Рассматривается n -мерная линейная автономная дискретная система управления (A, \mathcal{U}) с ограниченным управлением:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x(k), u(k) \in \mathbb{R}^n$ – векторы состояния и управления соответственно, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое компактное множество допустимых значений управления, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица системы (1.1). Предполагается, что $0 \in \text{ri } \mathcal{U}$.

Определим семейство множеств 0-управляемости $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$, где каждое $\mathcal{X}(N)$ представляет собой множество тех начальных состояний, из которых посредством выбора допустимого управления систему (1.1) можно перевести в начало координат за N шагов:

$$\mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Требуется построить предельное множество 0-управляемости \mathcal{X}_{∞} , т.е. множество тех начальных состояний, из которых систему (A, \mathcal{U}) можно перевести в начало координат за любое конечное число шагов:

$$\mathcal{X}_{\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N}, u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}.$$

С учетом (1.2) также справедливо представление

$$\mathcal{X}_{\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}(N). \tag{1.3}$$

1.2 Декомпозиция линейной системы

Как будет продемонстрировано далее, структура предельного множества 0-управляемости системы (1.1) определяется свойствами матрицы системы A . В [80, теорема 2] доказано, что \mathcal{X}_{∞} представляет собой цилиндрическое множество, ориентированное вдоль собственных векторов матрицы A , соответствующих собственным значениям, которые по модулю не превосходят 1. Поэтому процесс построения \mathcal{X}_{∞} связан с переходом в базис собственных и присоединенных векторов A . В связи с

чем в разделе 1.2 рассмотрены свойства системы (1.1) и множеств вида (1.2) и (1.3), связанные с различными линейными преобразованиями системы координат.

Введем следующее инвариантное подпространство:

$$\mathbb{L}_{>1} = \text{Lin}\{h_i: h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| > 1\}.$$

Справедлив следующий критерий ограниченности предельного множества (1.3)

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть множество \mathcal{X}_∞ определяется соотношением (1.3). Тогда \mathcal{X}_∞ ограничено тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$ и $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}_{>1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1.

Если $\det A = 0$, то существует собственный вектор $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, соответствующий собственному значению 0. Тогда по определению (1.3) верно включение $\text{Lin}\{h\} \subset \mathcal{X}_\infty$. Следовательно, множество \mathcal{X}_∞ неограниченное.

Теперь предположим, что $\det A \neq 0$. Разобьём элементы вещественного жорданова базиса $h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{m,1}, \dots, h_{m,n_m}$, где $h_{i,j} \in \mathbb{R}^n$ – присоединенный вектор матрицы A ранга j , соответствующий значению $\lambda_i \in \mathbb{C}$ матрицы A , или $h_{i,j} = (h_{i,j}^{re}, h_{i,j}^{im}) \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ – действительная и мнимая части присоединенного вектора матрицы A ранга j , соответствующего собственному значению $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Тогда вещественная жорданова форма матрицы A состоит из m клеток, а n_i и $2n_i$ – размерность i -й клетки в зависимости от типа собственного значения. Причем в силу [89, Раздел 3.1] верно представление:

$$A = S\Lambda S^{-1}, \text{ где}$$

$$S = (h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{m,1}, \dots, h_{m,n_m}),$$

$$\Lambda = \text{diag}(J_1, \dots, J_m).$$

Для всех $i = \overline{1, m}$ жорданова клетка $J_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ имеет один из следующих двух видов:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \lambda_i \in \mathbb{R},$$

$$J_i = \begin{pmatrix} r_i A_{\varphi_i} & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_i A_{\varphi_i} & I & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & r_i A_{\varphi_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_i \times 2n_i}, \quad \lambda_i = r_i e^{i\varphi_i} \in \mathbb{C}, \quad A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i) & \sin(\varphi_i) \\ -\sin(\varphi_i) & \cos(\varphi_i) \end{pmatrix}.$$

Для любого $u(k-1) \in \mathcal{U}$ верно разложение

$$u(k-1) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} \alpha_{i,j}(k),$$

где $\alpha_{i,j}(k) \in \mathbb{R}$, если $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и $\alpha_{i,j}(k) \in \mathbb{R}^2$, если $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Тогда справедливо следующее представление:

$$S^{-1}u(k-1) = (h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{m,1}, \dots, h_{m,n_m})^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} \alpha_{i,j}(k) =$$

$$= S^{-1} \underbrace{(h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{m,1}, \dots, h_{m,n_m})}_S \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{1,n_1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{m,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{m,n_m}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{1,n_1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{m,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{m,n_m}(k) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Заметим, что для жордановых клеток J_i справедливо следующее представление:

$$J_i = \lambda_i I + P, \quad \text{где } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда}$$

$$J_i^{-k} = (\lambda_i I + P)^{-k} = \sum_{l=0}^{n_i-1} (-1)^l C_{k+l-1}^l \lambda_i^{-(k+l)} P^l.$$

Введем новое обозначение β_i :

$$\beta_i = \sum_{k=1}^N J_i^{-k} \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{n_i-1} (-1)^l C_{k+l-1}^l \lambda_i^{-(k+l)} P^l \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$(P^l x)_j = \begin{cases} x_{j+l}, l \leq n_i - j \\ 0, j \geq n_i - j. \end{cases}$$

Тогда

$$\beta_{i,j} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{n_i-j} (-1)^l C_{k+l-1}^l \lambda_i^{-(l+k)} \alpha_{i,j+l}(k) = \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=l}^N (-1)^l C_{k+l-1}^l \lambda_i^{-(k+l)} \alpha_{i,j+l}(k)$$

Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}_{>1}$, т.е. $\alpha_{i,j} = 0$, если $|\lambda_i| \leq 1$. Получим

$$\begin{aligned} |\beta_{i,j}| &= \left| \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=l}^N (-1)^l C_{k+l-1}^l \lambda_i^{-(k+l)} \alpha_{i,j+l}(k) \right| \leq \\ &\leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=l}^N C_{k+l-1}^l |\lambda_i^{-(k+l)}| |\alpha_{i,j+l}(k)| \leq \begin{cases} \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=l}^N C_{k+l-1}^l |\lambda_{\min}^{-(k+l)}| \alpha_{\max}, |\lambda_i| > 1, \\ 0, |\lambda_i| \leq 1 \end{cases} \leq \\ &\leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \frac{\alpha_{\max}}{(\lambda_{\min} - 1)^{l+1}} \leq \sum_{l=0}^n \frac{\alpha_{\max}}{(\lambda_{\min} - 1)^{l+1}} \end{aligned}$$

$$\lambda_{\min} = \min\{|\lambda| : \lambda - \text{собственное значение } A \text{ и } |\lambda| > 1\},$$

$$\alpha_{\max} = \max_{u \in \mathcal{U}} \max_{i=1, m} \max_{j=1, n_i} \|\alpha_{i,j}\|.$$

Рассмотрим теперь случай комплексно-сопряженных собственных значений.

В этом случае для жордановой клетки J_i справедливо следующее соотношение:

$$J_i = \text{diag}(r_i A_{\varphi_i}, \dots, r_i A_{\varphi_i}) + P^2.$$

Тогда

$$J_i^{-k} = (\text{diag}(r_i A_{\varphi_i}, \dots, r_i A_{\varphi_i}) + P^2)^{-k} = \sum_{l=0}^{n_i-1} (-1)^l C_{k+l-1}^l \text{diag}(r_i A_{\varphi_i}, \dots, r_i A_{\varphi_i})^{-(l+k)} P^{2l}.$$

Аналогично вещественному случаю для $\lambda_i \in \mathbb{C}$ получим

$$\beta_i = \sum_{k=1}^N J_i^{-k} \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{n_i-1} (-1)^l C_{k+l-1}^l \text{diag}(r_i A_{\varphi_i}, \dots, r_i A_{\varphi_i})^{-(k+l)} P^{2l} \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix}.$$

Учтём, что $\alpha_{i,j}(k) \in \mathbb{R}^2$ и получим

$$\begin{aligned} \beta_{i,j} &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{n_i-j} (-1)^l C_{k+l-1}^l (r_i A_{\varphi_i})^{-(k+l)} \alpha_{i,j+l}(k) = \\ &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=1}^N (-1)^l C_{k+l-1}^l (r_i A_{\varphi_i})^{-(k+l)} \alpha_{i,j+l}(k). \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}_{>1}$, т.е. $\alpha_{i,j} = 0$, если $|\lambda_i| \leq 1$. Получим

$$\begin{aligned} \|\beta_{i,j}\| &\leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=1}^N C_{k+l-1}^l \|r_i^{-k} A_{-k\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(k)\| = \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=1}^N C_{k+l-1}^l r_i^{-k} \|\alpha_{i,j+l}(k)\| \leq \\ &\leq \begin{cases} \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=1}^{\infty} C_{k+l-1}^l \lambda_{\min}^{-(k+l)} \alpha_{\max}, & |\lambda_i| > 1, \\ 0, & |\lambda_i| \leq 1. \end{cases} \leq \\ &\leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \frac{\alpha_{\max}}{(\lambda_{\min} - 1)^{l+1}} \leq \sum_{l=0}^n \frac{\alpha_{\max}}{(\lambda_{\min} - 1)^{l+1}}. \end{aligned}$$

Если $x(N) = 0$, то из (1.1) следуют соотношения

$$\|x(0)\| = \|S \sum_{k=1}^N \Lambda^{-k} S^{-1} u(k-1)\| \leq \|S\| \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \|\beta_{i,j}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|S\| \left(n \sum_{l=0}^n \frac{\alpha_{\max}}{(\lambda_{\min} - 1)^{l+1}} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Следовательно, по определению 1.3 множество \mathcal{X}_{∞} ограничено.

Пусть $\mathcal{U} \not\subset \mathbb{L}_{>1}$. Тогда найдется $u \in \mathcal{U}$ такой, что в его разложении по базису h_1, \dots, h_n $\alpha_{i,j} \neq 0$ для $0 < |\lambda_i| \leq 1$, $j = \overline{1, n_i}$. Без ограничения общности будем полагать, что

$$\alpha_{i,j+1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0 \text{ или } j = n_i.$$

Если $\lambda_i \in \mathbb{R}$, рассмотрим следующее управление

$$u(k) = \begin{cases} u, & k \in \{0, 2, 4, \dots\}, \\ 0, & k \in \{1, 3, 5, \dots\}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^N \Lambda^{-k} S^{-1} u(k-1) \right\| &= \|S^{-1} x(0)\| \leq \|S^{-1}\| \|x(0)\|, \\ \|x(0)\| &\geq \frac{1}{\|S^{-1}\|} \cdot \left\| \sum_{k=1}^{2N} \Lambda^{-k} S^{-1} u(k-1) \right\| \geq \frac{1}{\|S^{-1}\|} \|\beta_{i,j}\| = \\ &= \frac{1}{\|S^{-1}\|} \left| \sum_{k=1}^{2N} \lambda_i^{-k} \alpha_{i,j}(k) \right| = \frac{1}{\|S^{-1}\|} \sum_{k=1}^N \lambda_i^{-2k} |\alpha_{i,j}| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Если $\lambda_i \in \mathbb{C}$ и $\frac{\varphi_i}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, то рассмотрим возрастающую последовательность $\{k_1, k_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$ такую, что

$$(-\varphi_i k_N + \theta) \pmod{2\pi} \in [0; \frac{\pi}{6}), \text{ где } \alpha_{i,j} = \|\alpha_{i,j}\| \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Такая последовательность существует, поскольку в силу теоремы Вейля $\text{sl}\{\varphi_i k \pmod{2\pi} : k \in \mathbb{N}\} = [0; 2\pi]$.

Если $\varphi_i = 2\pi \frac{K'}{K''}$, то положим $k_N = NK''$. В обоих случаях выберем управление следующим образом:

$$u(k-1) = \begin{cases} u, & k \in \{k_1, k_2, k_3, \dots\}, \\ 0, & k \notin \{k_1, k_2, k_3, \dots\}. \end{cases}$$

Тогда для $\varphi_i = 2\pi \frac{K'}{K''}$

$$\begin{aligned} \|x(k_N)\| &\geq \frac{1}{\|S^{-1}\|} \|\beta_{i,j}\| = \frac{1}{\|S^{-1}\|} \left\| \sum_{k=1}^{k_N} r_i^{-k} A_{-k\varphi_i} \alpha_{i,j}(k) \right\| = \\ &= \frac{1}{\|S^{-1}\|} \left\| \sum_{k=1}^N r_i^{-kK''} A_{-k2\pi K'} \alpha_{i,j} \right\| = \frac{1}{\|S^{-1}\|} \sum_{k=1}^N r_i^{-kK''} \|\alpha_{i,j}\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Если $\frac{\varphi_i}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, то

$$\begin{aligned} \|x(k_N)\| &\geq \frac{1}{\|S^{-1}\|} \|\beta_{i,j}\| = \frac{1}{\|S^{-1}\|} \left\| \sum_{k=1}^{k_N} r_i^{-k} A_{-k\varphi_i} \alpha_{i,j}(k) \right\| = \frac{1}{\|S^{-1}\|} \left\| \sum_{q=1}^N r_i^{-k_q} A_{-k_q\varphi_i} \alpha_{i,j}(k) \right\| \geq \\ &\geq \frac{1}{\|S^{-1}\|} \sum_{q=1}^N r_i^{-k_q} \|\alpha_{i,j}\| \cdot |\cos(-k_q\varphi_i + \theta)| \geq \frac{1}{2\|S^{-1}\|} \sum_{q=1}^N r_i^{-k_q} \|\alpha_{i,j}\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, во всех трёх случаях множество \mathcal{X}_∞ оказывается неограниченным.

Теорема 1.1 доказана.

Пусть (A_1, \mathcal{U}_1) и (A_2, \mathcal{U}_2) – n_1 -мерная и n_2 -мерная системы вида (1.1). Обозначим через $(A_1, \mathcal{U}_1) \times (A_2, \mathcal{U}_2)$ систему (A, \mathcal{U}) размерности $n_1 + n_2$, где

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}.$$

ЛЕММА 1.1. Пусть через $\{\mathcal{X}_i(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и $\mathcal{X}_{i,\infty}$ обозначены классы множеств θ -управляемости и предельное множество θ -управляемости соответственно системы (A_i, \mathcal{U}_i) , $i \in \{1, 2\}$, также $(A, \mathcal{U}) = (A_1, \mathcal{U}_1) \times (A_2, \mathcal{U}_2)$.

Тогда

- 1) $\mathcal{X}(N) = \mathcal{X}_1(N) \times \mathcal{X}_2(N)$, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- 2) $\mathcal{X}_{\infty} = \mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1. Обозначим через $x_{0,1} \in \mathbb{R}^{n_1}$ и $x_{0,2} \in \mathbb{R}^{n_2}$ начальные состояния системы (A_1, \mathcal{U}_1) и (A_2, \mathcal{U}_2) соответственно. Тогда $x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$ – начальное состояние системы (A, \mathcal{U}) .

1. В силу рекуррентных соотношений (1.1) верно, что для всех $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x(N) &= A^N x_0 + A^{N-1} u(0) + A^{N-2} u(1) + \dots + u(N-1) = \\ &= \begin{pmatrix} A_1^N & O \\ O & A_2^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1^{N-1} & O \\ O & A_2^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} u_1(N-1) \\ u_2(N-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1^N x_{01} + A_1^{N-1} u_1(0) + \dots + u_1(N-1) \\ A_2^N x_{02} + A_2^{N-1} u_2(0) + \dots + u_2(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(N) \\ x_2(N) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда $x(N) = 0$ тогда и только тогда, когда существуют $u_1(0), \dots, u_1(N-1) \in \mathcal{U}_1$ и $u_2(0), \dots, u_2(N-1) \in \mathcal{U}_2$ такие, что $x_1(N) = 0$, $x_2(N) = 0$. Данные равенства в силу определения (1.2) эквивалентны включению $x_{0,1} \in \mathcal{X}_1(N)$, $x_{0,2} \in \mathcal{X}_2(N)$. Следовательно,

$$\mathcal{X}(N) = \mathcal{X}_1(N) \times \mathcal{X}_2(N).$$

2. Пусть $x_0 \in \mathcal{X}_{\infty}$. Тогда согласно (1.3) существует $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ такой, что

$$x_0 \in \mathcal{X}(\tilde{N}) = \mathcal{X}_1(\tilde{N}) \times \mathcal{X}_2(\tilde{N}) \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}_1(N) \times \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}_2(N) = \mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}.$$

Тогда $\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$.

Пусть $x_0 \in \mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$. Следовательно, существуют $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $x_0 \in \mathcal{X}_1(\tilde{N}_1) \times \mathcal{X}_2(\tilde{N}_2) \subset \mathcal{X}_1(\tilde{N}) \times \mathcal{X}_2(\tilde{N})$, где $\tilde{N} = \max\{\tilde{N}_1, \tilde{N}_2\}$. Тогда в силу пункта 1 леммы 1.1

$$x_0 \in \mathcal{X}(\tilde{N}) \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}(N) = \mathcal{X}_\infty.$$

Откуда $\mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty} \subset \mathcal{X}_\infty$.

Окончательно получаем, что $\mathcal{X}_\infty = \mathcal{X}_{1,\infty} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$.

ЛЕММА 1.2. Пусть $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det S \neq 0$, (A, \mathcal{U}) – n -мерная система вида (1.1), через $\{\mathcal{X}'(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и \mathcal{X}'_∞ обозначены класс множеств θ -управляемости и предельное множество θ -управляемости соответственно системы $(S^{-1}AS, S^{-1}\mathcal{U})$.

Тогда

- 1) $\mathcal{X}(N) = S\mathcal{X}'(N)$, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- 2) $\mathcal{X}_\infty = S\mathcal{X}'_\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.2. 1. Пусть $\{y(k)\}_{k=0}^N$ – траектория системы $(S^{-1}AS, S^{-1}\mathcal{U})$, т.е. $y(N)$ согласно (1.1) для начального состояния $y_0 \in \mathbb{R}^n$ допускает следующее представление:

$$\begin{aligned} y(N) &= S^{-1}ASy(N-1) + v(N-1) = \dots = \\ &= S^{-1}A^N S y_0 + S^{-1}A^{N-1} S v(0) + \dots + v(N-1), \end{aligned}$$

где $v(0), \dots, v(N-1) \in S^{-1}\mathcal{U}$.

В силу (1.2) $y_0 \in \mathcal{X}'(N)$ тогда и только тогда, когда $y(N) = 0$, т.е.

$$S^{-1}A^N S y_0 + S^{-1}A^{N-1} S v(0) + \dots + v(N-1) = 0,$$

$$A^N S y_0 + A^{N-1} S v(0) + \dots + S v(N-1) = 0,$$

что в силу (1.2) эквивалентно включению $Sy_0 \in \mathcal{X}(N)$, так как по построению $Sv(0), \dots, Sv(N-1) \in \mathcal{U}$. Откуда следует равенство $\mathcal{X}(N) = S\mathcal{X}'(N)$.

2. Пусть $x_0 \in \mathcal{X}_\infty$. В силу (3) существует $\tilde{N} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $x_0 \in \mathcal{X}(\tilde{N})$, что эквивалентно включению $x_0 \in S\mathcal{X}'(\tilde{N})$ согласно пункту 1 леммы 1.2. Следовательно, $S^{-1}x_0 \in \mathcal{X}'(\tilde{N})$. Тогда $S^{-1}x_0 \in \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}'(N) = \mathcal{X}'_\infty$, т.е. $x_0 \in S\mathcal{X}'_\infty$. Тогда $\mathcal{X}_\infty \subset S\mathcal{X}'_\infty$.

Пусть $x_0 \in S\mathcal{X}'_\infty$, тогда $S^{-1}x_0 \in \mathcal{X}'_\infty$. В силу (1.3) существует $\tilde{N} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $S^{-1}x_0 \in \mathcal{X}'(\tilde{N})$. Тогда $x_0 \in S\mathcal{X}'(\tilde{N})$, что эквивалентно включению $x_0 \in \mathcal{X}(\tilde{N})$ в силу пункта 1 леммы 1.2. Согласно соотношениям (1.3) также верно включение $x_0 \in \mathcal{X}_\infty$. Тогда $S\mathcal{X}'_\infty \subset \mathcal{X}_\infty$.

Окончательно получаем, что $S\mathcal{X}'_\infty = \mathcal{X}_\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Общую постановку вида (1.1) можно свести к частному случаю $0 \in \text{int } \mathcal{U}$ для класса управляемых систем.

Для произвольного $M \in \mathbb{N}$ введем обозначение

$$\mathcal{U}_M = \mathcal{U} + A\mathcal{U} + \dots + A^{M-1}\mathcal{U}.$$

Предельные множества 0-управляемости (1.3) систем (A, \mathcal{U}) и (A^M, \mathcal{U}_M) совпадают.

ЛЕММА 1.3. Пусть $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)},$$

при этом все собственные значения матрицы A_1 не превосходят по модулю 1. Через $\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ обозначена проекция выпуклого компактного тела $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ на n_2 -мерное подпространство:

$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_2}.$$

$n_2 \times (n_1+n_2)$

Тогда для $(n_1 + n_2)$ -мерной системы (A, \mathcal{U}) справедливо равенство

$$\mathcal{X}_\infty = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathcal{X}_{2,\infty},$$

где $\mathcal{X}_{2,\infty}$ – предельное множество 0-управляемости системы (A_2, \mathcal{U}_2) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.3. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathcal{X}_{2,\infty}$. Тогда $x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix}$,

где $x_{0,1} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_{0,2} \in \mathcal{X}_{2,\infty}$, откуда согласно (1.3) существует $\tilde{N} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что

$x_{0,2} \in \mathcal{X}_2(\tilde{N})$, что согласно (1.2) эквивалентно существованию $u_2^*(0), \dots, u_2^*(\tilde{N} - 1) \in \mathcal{U}_2$ таких, что $x_2(\tilde{N}) = 0$. Тогда для системы (A, \mathcal{U}) найдутся $u(0), \dots, u(\tilde{N} - 1) \in \mathcal{U}$ такие, что $u(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2^*(k) \end{pmatrix}$, $k = \overline{0, \tilde{N} - 1}$. В силу (1.1) для $x(\tilde{N})$ верно представление

$$x(\tilde{N}) = \begin{pmatrix} A_1^{\tilde{N}} x_{0,1} + A_1^{\tilde{N}-1} u_1(0) + \dots + u_1(\tilde{N} - 1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

С учётом леммы 1.1 достаточно показать, что найдётся такое $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, что $\mathcal{U}_1 \times \{0\} \subset \mathcal{U}$ и $\mathcal{X}_{1,\infty} = \mathbb{R}^{n_1}$, где $\mathcal{X}_{1,\infty}$ – предельное множество 0-управляемости системы (A_1, \mathcal{U}_1) .

Обозначим через $S \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ матрицу перехода в вещественный жорданов базис матрицы A_1 . Поскольку $0 \in \text{int}\mathcal{U}$, то существует $u_{\max} > 0$ такое, что $S[-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1} \times \{0\} \subset \mathcal{U}$. При этом в силу невырожденности матрицы S и леммы 1.2 верно равенство $\mathcal{X}_{1,\infty} = \mathbb{R}^{n_1}$ для случая $\mathcal{U}_1 = S[-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1}$ тогда и только тогда, когда $S^{-1}\mathcal{X}_{1,\infty} = \mathbb{R}^{n_1}$, где $S^{-1}\mathcal{X}_{1,\infty}$ – предельное множество 0-управляемости системы $(S^{-1}A_1S, [-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1})$. При этом согласно теореме о вещественной жордановой форме [89, теорема 3.4.5] верно равенство

$$S^{-1}A_1S = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & J_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\tilde{n}_1} \end{pmatrix},$$

где жордановы клетки J_i , соответствующие действительным собственным значениям $\lambda_i \in \mathbb{R}$ матрицы A_1 , имеют вид

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}, \quad (1.4)$$

а жордановы клетки J_i , соответствующие комплексным собственным значениям $\lambda_i \in \mathbb{C}$ матрицы A_1 , имеют вид

$$J_i = \begin{pmatrix} r_i A_{\varphi_i} & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_i A_{\varphi_i} & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_i A_{\varphi_i} & I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_i A_{\varphi_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m_i \times 2m_i}, A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

где $r_i = |\lambda_i|$, $\varphi_i = \arg(\lambda_i)$.

Таким образом, в силу леммы 1.1 достаточно показать, что для $|\lambda_i| \leq 1$ предельные множества 0-управляемости системы $(J_i, [-u_{\max}; u_{\max}]^{m_i})$ для случая (1.4) и системы $(J_i, [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m_i})$ для случая (1.5) совпадают с \mathbb{R}^{m_i} и \mathbb{R}^{2m_i} соответственно, для всех $i = \overline{1, \tilde{n}_1}$.

Пусть $J \in \mathbb{R}^{m \times m}$ удовлетворяет (1.4). Тогда для всех $N \geq m$ верно

$$J^N = \begin{pmatrix} \lambda^N & N\lambda^{N-1} & C_N^2 \lambda^{N-2} & \dots & C_N^{m-1} \lambda^{N-m+1} \\ 0 & \lambda^N & N\lambda^{N-1} & \dots & C_N^{m-2} \lambda^{N-m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^N \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

где через C_N^m обозначено число сочетаний из N по m :

$$C_N^m = \frac{N!}{(N-m)!m!}.$$

Обозначим через $\{y(k)\}_{k=1}^N$ и $\{v(k-1)\}_{k=1}^N$ траекторию и управление системы $(J, [-u_{\max}; u_{\max}]^m)$ соответственно. Тогда

$$y(N) = J^N y_0 + \sum_{k=0}^{N-1} J^k v(N-k-1).$$

Если обозначить $z_0 = J^N y_0$, то в силу (1.6) для каждой i -й координаты z_0 верно, что

$$z_{0,i} = \sum_{j=0}^{m-i} \lambda^{N-j} C_N^j y_{0,j+i}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Предположим, что $|\lambda| < 1$. Тогда для $N \geq 2m$ верно, что

$$\begin{aligned} |z_{0,i}| &\leq \sum_{j=0}^{m-i} |\lambda^{N-j} y_{0,j+i} C_N^j| \leq \sum_{j=0}^{m-1} |\lambda^{N-j}| \max_{i=\overline{1,m}} |y_{0,i}| C_N^j \leq \\ &\leq m |\lambda^{N-m+1}| \max_{i=\overline{1,m}} |y_{0,i}| C_N^{m-1} \leq \\ &\leq m \max_{i=\overline{1,m}} |y_{0,i}| |\lambda|^{N-m+1} \frac{N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-m+2)}{(m-1)!} \leq \\ &\leq m \max_{i=\overline{1,m}} |y_{0,i}| |\lambda|^{N-m+1} \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Тогда найдётся $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $i = \overline{1, m}$

$$-u_{\max} < z_{0,i} < u_{\max}.$$

Выберем $v(0) = \dots = v(\tilde{N} - 2) = 0$ и $v(\tilde{N} - 1) = -z_0 \in [-u_{\max}; u_{\max}]^m$. Получим, что $y(\tilde{N}) = 0$, т.е. $y_0 \in \mathcal{X}'(\tilde{N})$. Откуда в силу произвольности $y_0 \in \mathbb{R}^m$ и соотношения (1.3) следует, что $\mathcal{X}'_{\infty} = \mathbb{R}^m$.

Предположим, что $|\lambda| = 1$. Тогда в силу (1.6) для некоторого $N_m \in \mathbb{N}$ и m -й координаты $y(N_m)$ верно соотношение

$$y_m(N_m) = \lambda^{N_m} y_m(0) + \sum_{k=0}^{N_m-1} \lambda^k v_m(N_m - k - 1).$$

Определим $N_m \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось неравенство $|y_m(0)| \leq N_m u_{\max}$. Тогда можно выбрать $v(0), \dots, v(N_m - 1) \in [-u_{\max}; u_{\max}]^m$, исходя из следующего условия:

$$v_m(N_m - k - 1) = -\frac{\lambda^{N_m} y_m(0)}{\lambda^k N_m} \in [-u_{\max}; u_{\max}], k = \overline{0, N_m - 1}.$$

Получим, что

$$y_m(N_m) = \lambda^{N_m} y_m(0) + \sum_{k=0}^{N_m-1} \lambda^k \frac{-\lambda^{N_m} y_m(0)}{\lambda^k N_m} = 0.$$

Применим метод математической индукции. Покажем, что если на некотором шаге N у вектора y последние i координат нулевые, то можно подобрать допустимое управление, которое позволит обнулить дополнительную $i + 1$ координату, т.е. предположим, что для некоторого $N \in \mathbb{N}$ и $i = \overline{1, m - 1}$ верны соотношения $y_m(N) = \dots = y_{m-i+1}(N) = 0$. Тогда если $v_m(N + N_{m-i} - k - 1) = \dots = v_{m-i+1}(N + N_{m-i} - k - 1) = 0$, $k = \overline{0, N_{m-i} - 1}$, то согласно (1.6)

$$y_{m-i}(N + N_{m-i}) = \lambda^{N_{m-i}} y_{m-i}(N) + \sum_{k=0}^{N_{m-i}-1} \lambda^k v_{m-i}(N + N_{m-i} - k - 1),$$

где $N_{m-i} \in \mathbb{N}$ выбирается из условия $|y_{m-i}(N)| \leq N_{m-i} u_{\max}$. Тогда можно доопределить $v(N), \dots, v(N + N_{m-i} - 1) \in [-u_{\max}; u_{\max}]^m$ так, чтобы

$$v_{m-i}(N + N_{m-i} - k - 1) = \frac{-\lambda^{N_{m-i}} y_{m-i}(N)}{N_{m-i} \lambda^k}, k = \overline{0, N_{m-i} - 1}.$$

Получим, что

$$y_{m-i}(N + N_{m-i}) = \lambda^{N_{m-i}} y_{m-i}(N) + \sum_{k=0}^{N_{m-i}-1} \lambda^k \frac{-\lambda^{N_{m-i}} y_{m-i}(N)}{N_{m-i} \lambda^k} = 0,$$

$$y_m(N + N_{m-i}) = \dots = y_{m-i+1}(N + N_{m-i}) = 0.$$

Тогда согласно методу математической индукции найдётся $N \in \mathbb{N}$ такой, что $y(N) = 0$, т.е. $y_0 \in \mathcal{X}'(N)$. Откуда в силу произвольности $y_0 \in \mathbb{R}^m$ и соотношения (1.3) следует, что $\mathcal{X}'_\infty = \mathbb{R}^m$.

Пусть $J \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ удовлетворяет случаю (1.5). Тогда для всех $N \geq m$

$$J^N = \begin{pmatrix} r^N A_{N\varphi} & N r^{N-1} A_{(N-1)\varphi} & \dots & C_N^{m-1} r^{N-m+1} A_{(N-m+1)\varphi} \\ 0 & r^N A_{N\varphi} & \dots & C_N^{m-2} r^{N-m+2} A_{(N-m+2)\varphi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r^N A_{N\varphi} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Обозначим через $\{y(k), v(k-1), y_0\}_{k=1}^N$ процесс управления системы $(J, [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m})$. Тогда

$$y(N) = J^N y_0 + \sum_{k=0}^{N-1} J^k v(N-k-1).$$

Если обозначить $z_0 = J^N y_0$, то в силу (1.7) для каждого i -го двухмерного подвектора z_0 верно, что

$$z_{0,i} = \sum_{j=0}^{m-i} C_N^j r^{N-j} A_{(N-j)\varphi} y_{0,j+i} \in \mathbb{R}^2, \quad i = \overline{1, m},$$

где $z_0 = (z_{0,1}^T, \dots, z_{0,m}^T)^T$, $y_0 = (y_{0,1}^T, \dots, y_{0,m}^T)^T$.

Предположим, что $r < 1$. Тогда для $N \geq 2m$ верно, что

$$\begin{aligned} \|z_{0,i}\| &\leq \sum_{j=0}^{m-i} \|r^{N-j} A_{(N-j)\varphi} y_{0,j+i} C_N^j\| \leq \sum_{j=0}^{m-1} r^{N-j} \|A_{(N-j)\varphi} y_{0,i}\| C_N^j \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-1} r^{N-j} \max_{i=\overline{1,m}} \|y_{0,i}\| C_N^j \leq m r^{N-m+1} \max_{i=\overline{1,m}} \|y_{0,i}\| \frac{N(N-1) \dots (N-m+2)}{(m-1)!} \leq \\ &\leq m r^{N-m+1} \max_{i=\overline{1,m}} \|y_{0,i}\| \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Тогда найдётся $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $i = \overline{1, m}$

$$\|z_{0,i}\| < u_{\max}.$$

Выберем $v(0) = \dots = v(\tilde{N}-2) = 0$ и $v(\tilde{N}-1) = -z_0 \in [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m}$. Получим, что $y(\tilde{N}) = 0$, т.е. $y_0 \in \mathcal{X}'(\tilde{N})$. Откуда в силу произвольности $y_0 \in \mathbb{R}^{2m}$ и соотношения (1.3) следует, что $\mathcal{X}'_\infty = \mathbb{R}^{2m}$.

Предположим, что $r = 1$. Тогда в силу (1.7) для некоторого $N_m \in \mathbb{N}$ и m -го двухмерного подвектора $y(N_m)$ верно соотношение

$$y_m(N_m) = A_{N_m\varphi} y_m(0) + \sum_{k=0}^{N_m-1} A_{k\varphi} v_m(N_m - k - 1).$$

Определим $N_m \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|y_m(0)\| \leq N_m u_{\max}$. Тогда можно выбрать $v(0), \dots, v(N_m - 1) \in [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m}$, исходя из равенства

$$v_m(N_m - k - 1) = -\frac{A_{(N_m-k)\varphi} y_m(0)}{N_m} \in [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m}, k = \overline{0, N_m - 1}.$$

Получим, что

$$y_m(N_m) = A_{N_m\varphi} y_m(0) + \sum_{k=0}^{N_m-1} \frac{-A_{N_m\varphi} y_m(0)}{N_m} = 0.$$

Предположим, что для некоторого $N \in \mathbb{N}$ и $i = \overline{1, m-1}$ верны соотношения $y_m(N) = \dots = y_{m-i+1}(N) = 0$. Тогда если $v_m(N + N_{m-i} - k - 1) = \dots = v_{m-i+1}(N + N_{m-i} - k - 1) = 0$, $k = \overline{0, N_{m-i} - 1}$, то согласно (1.7)

$$y_{m-i}(N + N_{m-i}) = A_{N_{m-i}\varphi} y_{m-i}(N) + \sum_{k=0}^{N_{m-i}-1} A_{k\varphi} v_{m-i}(N + N_{m-i} - k - 1),$$

где $N_{m-i} \in \mathbb{N}$ выбирается из условия $\|y_{m-i}(N)\| \leq N_{m-i} u_{\max}$. Тогда можно доопределить $v(N), \dots, v(N + N_{m-i} - 1) \in [-u_{\max}; u_{\max}]^{2m}$ так, чтобы

$$v_{m-i}(N + N_{m-i} - k - 1) = \frac{-A_{(N_{m-i}-k)\varphi} y_{m-i}(N)}{N_{m-i}}, k = \overline{0, N_{m-i} - 1}.$$

Получим, что

$$y_{m-i}(N + N_{m-i}) = A_{N_{m-i}\varphi} y_{m-i}(N) + \sum_{k=0}^{N_{m-i}-1} \frac{-A_{N_{m-i}\varphi} y_{m-i}(N)}{N_{m-i}} = 0,$$

$$y_m(N + N_{m-i}) = \dots = y_{m-i+1}(N + N_{m-i}) = 0.$$

Тогда согласно методу математической индукции найдётся $N \in \mathbb{N}$ такой, что $y(N) = 0$, т.е. $y_0 \in \mathcal{X}'(N)$. Откуда в силу произвольности $y_0 \in \mathbb{R}^{2m}$ и соотношения (1.3) следует, что $\mathcal{X}'_{\infty} = \mathbb{R}^{2m}$.

Леммы, доказанные в разделе 1.2, определяют структуру предельного множества 0-управляемости произвольной системы вида (1.1). Согласно лемме 1.3 каждое множество \mathcal{X}_{∞} представляет собой цилиндрическое множество, ориентированное вдоль собственных и присоединенных векторов матрицы A , соответствующих собственным значениям, не превосходящим 1 по модулю. Для перехода в вещественный жорданов базис матрицы A можно воспользоваться леммой 1.2. При этом процедура построения \mathcal{X}_{∞} в силу блочно-диагонального вида вещественной жордановой формы матрицы с учётом леммы 1.1 может быть сведена к построению аналогичных множеств для подсистем меньшей размерности с матрицами вида (1.4) и (1.5).

1.3 Построение оценок предельных множеств 0-управляемости

В разделе 1.3 рассмотрен метод построения оценок множества \mathcal{X}_∞ , основанный на аппарате опорных полупространств и свойствах выпуклых множеств. Для этого сформулируем и докажем теорему, гарантирующую, что для произвольной системы вида (1.1) множество \mathcal{X}_∞ является выпуклым.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Для любой n -мерной системы (A, \mathcal{U}) верно, что \mathcal{X}_∞ – относительно открытое и выпуклое множество.

В силу лемм 1.1, 1.2 и 1.3 задачу построения предельного множества 0-управляемости можно рассматривать исключительно для систем, собственные значения матриц которых строго больше 1. Поскольку в силу замечания 1.2 \mathcal{X}_∞ выпукло, то его замыкание можно представить в виде пересечения всех опорных к нему полупространств [76, теорема 18.8]. Сформулируем в виде леммы 1.4 вид опорного полупространства к \mathcal{X}_∞ .

ЛЕММА 1.4. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, \mathcal{X}_∞ определяется соотношениями (1.3).

Тогда для всех $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнены следующие соотношения:

$$1) \mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{H}_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (p, x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \max_{u_k \in \mathcal{U}} (-(A^{-k})^T p, u_k) \right\};$$

$$2) x^* = - \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} u_k^* \in \text{cl } \mathcal{X}_\infty \cap \partial \mathcal{H}_p, \text{ где}$$

$$u_k^* = \arg \max_{u_k \in \mathcal{U}} (-(A^{-k})^T p, u_k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.4.

Поскольку все собственные значения матрицы A по модулю больше 1, то существует $\|A^{-1}\| = \alpha < 1$. Пусть $R = \max_{u \in \mathcal{U}} \|u\|$. Из определения (1.3) следует, что

$$\begin{aligned} \rho_H(\mathcal{X}(N), \text{cl } \mathcal{X}_\infty) &= \sup_{y \in \mathcal{X}_\infty} \inf_{x \in \mathcal{X}(N)} \|x - y\| = \\ &= \sup_{\substack{M \geq N+1 \\ u(0), \dots, u(M-1) \in \mathcal{U}}} \inf_{\tilde{u}(0), \dots, \tilde{u}(N-1) \in \mathcal{U}} \left\| - \sum_{k=1}^N A^{-k} \tilde{u}(k) + \sum_{k=1}^M A^{-k} u(k) \right\| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{M \geq N+1 \\ u(0), \dots, u(M-1) \in \mathcal{U}}} \left\| - \sum_{k=1}^N A^{-k} u(k) + \sum_{k=1}^M A^{-k} u(k) \right\| = \sup_{\substack{M \geq N+1 \\ u(0), \dots, u(M-1) \in \mathcal{U}}} \left\| \sum_{k=N+1}^M A^{-k} u(k) \right\| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{\substack{M \geq N+1 \\ u(0), \dots, u(M-1) \in \mathcal{U}}} \sum_{k=N+1}^M \|A^{-1}\|^k \|u(k)\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha^k R = \frac{\alpha^{N+1}}{1-\alpha} R \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда по [4, лемма 1.11.4] для опорных функций $s(p, \mathcal{X}(N)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} s(p, \text{cl } \mathcal{X}_{\infty})$ поточечно. Тогда можно использовать [4, следствие 1.17.2], из которого следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $N \geq \tilde{N}$

$$\partial s(p, \mathcal{X}(N)) \subset \partial s(p, \text{cl } \mathcal{X}_{\infty}) + \mathcal{B}_{\varepsilon}(0). \quad (1.8)$$

По [4, теорема Моро-Рокафеллара 1.16.5], [30, лемма 1] и по определению субдифференциала для опорной функции

$$x_N^* = - \sum_{k=1}^N A^{-k} u_k^* \in \partial s(p, \mathcal{X}(N)).$$

Тогда с учетом (1.8)

$$x^* = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N^* \in \partial s(p, \text{cl } \mathcal{X}_{\infty}).$$

Также из определения опорной точки и опорного вектора следует п.1.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, \mathcal{X}_{∞} определяется соотношениями (1.3).

Тогда для всех $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнены следующие соотношения:

1. $\mathcal{X}_{\infty} \subset \mathcal{H}_{-p} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (p, x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \min_{u_k \in \mathcal{U}} (-(A^{-k})^T p, u_k) \right\}$;
2. $x^* = - \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} u_k^* \in \text{cl } \mathcal{X}_{\infty} \cap \partial \mathcal{H}_{-p}$, где

$$u_k^* = \arg \min_{u_k \in \mathcal{U}} (-(A^{-k})^T p, u_k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.1.

Для доказательства достаточно записать положения леммы 1.4 для вектора $-p$.

Если матрица A не приведена к вещественной жордановой форме, то можно перейти в вещественный жорданов базис матрицы A . В данном базисе построить оценку предельного множества 0-управляемости и затем по лемме 1.2 получить оценку предельного множества 0-управляемости в первоначальном базисе.

ЛЕММА 1.5. Пусть для n -мерной системы (A, \mathcal{U}) выполнено условие

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

где $|\lambda| > 1$, $u_{i,\max} = \max_{u \in \mathcal{U}} u_i$, $u_{i,\min} = \min_{u \in \mathcal{U}} u_i$, $i = \overline{1, n}$.

Тогда

$$\mathcal{X}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in (x_{i,\min}; x_{i,\max})\}.$$

Причем

1) если $\lambda > 1$, то

$$x_{i,\min} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\min\{(-1)^{j+1}u_{i+j,\min}; (-1)^{j+1}u_{i+j,\max}\}}{(\lambda - 1)^{j+1}},$$

$$x_{i,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\max\{(-1)^{j+1}u_{i+j,\min}; (-1)^{j+1}u_{i+j,\max}\}}{(\lambda - 1)^{j+1}};$$

2) если $\lambda < -1$, то

$$x_{i,\min} = \sum_{j=0}^{n-i} \left(\frac{u_{i+j,\min} - u_{i+j,\max}}{2(|\lambda| - 1)^{j+1}} + \frac{u_{i+j,\min} + u_{i+j,\max}}{2(|\lambda| + 1)^{j+1}} \right),$$

$$x_{i,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \left(\frac{u_{i+j,\max} - u_{i+j,\min}}{2(|\lambda| - 1)^{j+1}} + \frac{u_{i+j,\min} + u_{i+j,\max}}{2(|\lambda| + 1)^{j+1}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.5. Пусть $p = (0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)^T \in \mathbb{R}^n$,

где 1 соответствует i -й координате вектора p . Тогда для произвольного $k \in \mathbb{N}$

$$A^{-k} = \begin{pmatrix} \lambda^{-k} & (-1)k\lambda^{-k-1} & (-1)^2k(k+1)\lambda^{-k-2}\frac{1}{2} & \dots & (-1)^{n-1}\frac{(k+n-2)!}{(n-1)!(k-1)!}\lambda^{-k-n+1} \\ 0 & \lambda^{-k} & (-1)k\lambda^{-k-1} & \dots & (-1)^{n-2}\frac{(k+n-3)!}{(n-2)!(k-1)!}\lambda^{-k-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^{-k} \end{pmatrix},$$

$$-(A^{-k})^T p = - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda^{-k} \\ (-1)k\lambda^{-k-1} \\ \vdots \\ (-1)^{n-i} \frac{(k+n-i-1)!}{(k-1)!(n-i)!} \lambda^{-k-n+i} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (-(A^{-k})^T p, u) &= -(\lambda^{-k}u_i - k\lambda^{-k-1}u_{i+1} + \dots + (-1)^{n-i}\lambda^{-k-n+i}C_{k+n-i-1}^{n-i}u_n) = \\ &= -\sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-k-j}(-1)^j u_{j+i} C_{k+j-1}^j = \sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-k-j}(-1)^{j+1} u_{j+i} C_{k+j-1}^j. \end{aligned}$$

1. Рассмотрим случай $\lambda > 1$. Так как $u_i \in [u_{i,\min}; u_{i,\max}]$, для всех $k \in \mathbb{N}$ будут верны неравенства

$$(-(A^{-k})^T p, u) \leq \sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-k-j} C_{k+j-1}^j \max\{(-1)^{j+1}u_{j+i,\min}; (-1)^{j+1}u_{j+i,\max}\},$$

$$-(-(A^{-k})^T p, u) \leq -\sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-k-j} C_{k+j-1}^j \min\{(-1)^{j+1}u_{j+i,\min}; (-1)^{j+1}u_{j+i,\max}\}.$$

Верны равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} \lambda^{-k-j} C_{k+j-1}^j = \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k-j} C_{k+j-1}^j = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{(\lambda-1)^{j+1}}.$$

С учётом леммы 1.4 и следствия 1.1 из этого следует, что для всех $x \in \mathcal{X}_{\infty}$ верны неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\min\{(-1)^{j+1}u_{j+i,\min}; (-1)^{j+1}u_{j+i,\max}\}}{(\lambda-1)^{j+1}} &\leq (p, x) \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\max\{(-1)^{j+1}u_{j+i,\min}; (-1)^{j+1}u_{j+i,\max}\}}{(\lambda-1)^{j+1}}. \end{aligned}$$

Поскольку \mathcal{X}_∞ открыто в силу замечания 1.2 данные неравенства выполняются строго, т.е.

$$\mathcal{X}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in (x_{i,\min}; x_{i,\max})\}.$$

2. Рассмотрим случай $\lambda < -1$. Для всех $k \in \mathbb{N}$ верно

$$\begin{aligned} (-(A^{-k})^T p, u) &= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-k-j} (-1)^{-k-j+j+1} u_{j+i} C_{k+j-1}^j = \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-k-j} (-1)^{-k+1} u_{j+i} C_{k+j-1}^j. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \max_{u \in \mathcal{U}} (-(A^{-(2k-1)})^T p, u) &= \max_{u \in \mathcal{U}} \left(\sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} (-1)^{-(2k-1)+1} u_{j+i} C_{(2k-1)+j-1}^j \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} u_{i+j, \max} C_{(2k-1)+j-1}^j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{u \in \mathcal{U}} (-(A^{-2k})^T p, u) &= \max_{u \in \mathcal{U}} \left(\sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} (-1)^{-2k+1} u_{j+i} C_{2k+j-1}^j \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} (-u_{i+j, \min}) C_{2k+j-1}^j. \end{aligned}$$

Тогда согласно лемме 1.4 для любого $x \in \mathcal{X}_\infty$ верны соотношения

$$\begin{aligned} (p, x) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} u_{i+j, \max} C_{(2k-1)+j-1}^j - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} u_{i+j, \min} C_{2k+j-1}^j = \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} u_{i+j, \max} \left(\frac{1}{2(|\lambda| + 1)^{j+1}} + \frac{1}{2(|\lambda| - 1)^{j+1}} \right) - \\ &- \sum_{j=0}^{n-i} u_{i+j, \min} \left(\frac{1}{2(|\lambda| - 1)^{j+1}} + \frac{1}{2(|\lambda| + 1)^{j+1}} \right) = \\ &= x_{i, \max}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
\min_{u \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-(2k-1)})^T p, u \right) &= \min_{u \in \mathcal{U}} \left(\sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} (-1)^{-(2k-1)+1} u_{j+i} C_{(2k-1)+j-1}^j \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} u_{j+i, \min} C_{(2k-1)+j-1}^j, \\
\min_{u \in \mathcal{U}} \left(-(A^{-2k})^T p, u \right) &= \min_{u \in \mathcal{U}} \left(\sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} (-1)^{-2k+1} u_{j+i} C_{2k+j-1}^j \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} (-u_{j+i, \max}) C_{2k+j-1}^j.
\end{aligned}$$

Тогда согласно следствию 1.1 для любого $x \in \mathcal{X}_\infty$ верны соотношения

$$\begin{aligned}
(p, x) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-(2k-1)-j} u_{i+j, \min} C_{(2k-1)+j-1}^j - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} |\lambda|^{-2k-j} u_{i+j, \max} C_{2k+j-1}^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-i} u_{i+j, \min} \left(\frac{1}{2(|\lambda| + 1)^{j+1}} + \frac{1}{2(|\lambda| - 1)^{j+1}} \right) - \\
&\quad - \sum_{j=0}^{n-i} u_{i+j, \max} \left(\frac{1}{2(|\lambda| - 1)^{j+1}} + \frac{1}{2(|\lambda| + 1)^{j+1}} \right) = \\
&= x_{i, \min}.
\end{aligned}$$

Поскольку \mathcal{X}_∞ открыто в силу замечания 1.2, то

$$x_{i, \min} < (p, x) < x_{i, \max},$$

$$\mathcal{X}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in (x_{i, \min}; x_{i, \max})\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть в условиях леммы 1.5 $n = 1$.

Тогда

$$\mathcal{X}_\infty = \left(\frac{-u_{1, \max} - \max\{\lambda u_{1, \max}; \lambda u_{1, \min}\}}{|\lambda|^2 - 1}, \frac{-u_{1, \min} - \min\{\lambda u_{1, \max}; \lambda u_{1, \min}\}}{|\lambda|^2 - 1} \right).$$

ЛЕММА 1.6. Пусть для $2n$ -мерной системы (A, \mathcal{U}) выполнено условие

$$A = \begin{pmatrix} rA_\varphi & I & \cdots & O \\ O & rA_\varphi & \ddots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & I \\ O & O & \cdots & rA_\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $r > 1$, $\varphi \in [0; 2\pi)$, $r_{i,\max} = \max_{u \in \mathcal{U}} \|(u_{2i-1} \ u_{2i})^T\|_{\mathbb{R}^2}$, $i = \overline{1, n}$.

Тогда

$$R_{i,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{r_{i+j,\max}}{(r-1)^{j+1}},$$

$$\mathcal{X}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^{2n} : \|(x_{2i-1} \ x_{2i})^T\|_{\mathbb{R}^2} < R_{i,\max}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.6. Пусть $p = (0 \ 0 \ \dots \ \tilde{p} \ \dots \ 0)^T \in \mathbb{R}^{2n}$, $\tilde{p} = (p_1 \ p_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $p_1^2 + p_2^2 = 1$, где \tilde{p} соответствует $(2i-1)$ -й и $2i$ -й координатам вектора p .

Тогда для произвольного $k \in \mathbb{N}$

$$A^{-k} = \begin{pmatrix} r^{-k}A_{-k\varphi} & -kr^{-k-1}A_{(-k-1)\varphi} & \cdots & (-1)^{n-1}C_{n+k-2}^{n-1}r^{-k-n+1}A_{(-k-n+1)\varphi} \\ 0 & r^{-k}A_{-k\varphi} & \cdots & (-1)^{n-2}C_{n+k-3}^{n-2}r^{-k-n+2}A_{(-k-n+2)\varphi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r^{-k}A_{-k\varphi} \end{pmatrix},$$

$$-(A^{-k})^T p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r^{-k}A_{-k\varphi}\tilde{p} \\ -kr^{-k-1}A_{(-k-1)\varphi}\tilde{p} \\ \vdots \\ (-1)^{n-i}C_{k+n-i-1}^{n-i}r^{-k-n+i}A_{(-k-n+i)\varphi}\tilde{p} \end{pmatrix}.$$

Пусть $u^i \in \mathbb{R}^2$, $i = \overline{1, n}$, $u = (u^1{}^T, \dots, u^n{}^T)^T \in \mathbb{R}^{2n}$. Тогда

$$\begin{aligned} (-(A^{-k})^T p, u) &= -(r^{-k}(A_{-k\varphi}\tilde{p}, u^i) + (-1)kr^{-k-1}(A_{(-k-1)\varphi}\tilde{p}, u^{i+1}) + \dots + \\ &+ (-1)^{n-i}C_{k+n-i-1}^{n-i}r^{-k-n+i}(A_{(-k-n+i)\varphi}\tilde{p}, u^n)) = \\ &= -\sum_{j=0}^{n-i} r^{-k-j}(A_{(-k-j)\varphi}\tilde{p}, u^{i+j})C_{k+j-1}^j \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{j=0}^{n-i} r^{-k-j} \|(A_{(-k-j)\varphi} \tilde{P})\| \|u^{i+j}\| C_{k+j-1}^j = \sum_{j=0}^{n-i} r^{-k-j} \|u^{i+j}\| C_{k+j-1}^j \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-i} r^{-k-j} r_{i+j, \max} C_{k+j-1}^j, \end{aligned}$$

Тогда в силу леммы 1.4 для любого $x \in \mathcal{X}_\infty$ верны соотношения

$$\begin{aligned} (p, x) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} r^{-k-j} r_{i+j, \max} C_{k+j-1}^j = \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k-j} r_{i+j, \max} C_{k+j-1}^j = \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} \frac{r_{i+j, \max}}{(r-1)^{j+1}} \end{aligned}$$

Поскольку \mathcal{X}_∞ в силу замечания 1.2 открыто, то

$$\mathcal{X}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^{2n} : \|(x_{2i-1} x_{2i})^T\|_{\mathbb{R}^2} < R_{i, \max}\}.$$

Леммы 1.5 и 1.6 позволяют построить внешние оценки предельного множества 0-управляемости системы (1.1) в направлении каждого из собственных и присоединенных векторов. При этом для построения соответствующих опорных гиперплоскостей, ограничивающих \mathcal{X}_∞ , достаточно вычислить собственные значения матрицы A . В случае, если полученных ограничений на \mathcal{X}_∞ недостаточно, можно воспользоваться леммой 1.4 для построения произвольной опорной гиперплоскости.

1.4 Внешняя оценка предельного множества 0-управляемости на основе принципа сжимающих отображений

В данном разделе рассмотрим случай, когда предельное множество 0-управляемости \mathcal{X}_∞ системы (A, \mathcal{U}) ограничено, что в силу леммы 1.4 эквивалентно тому, что все собственные значения матрицы A по модулю строго больше 1. Откуда следует, что матрица A обратима [89, утверждение 1.1.7] и справедлива следующая лемма, определяющая структуру множеств 0-управляемости системы (A, \mathcal{U}) .

ЛЕММА 1.7. [30, лемма 1] Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$. Тогда для всех $N \in \mathbb{N}$ множество 0-управляемости (1.2) системы (A, \mathcal{U}) удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{X}(N) = - \sum_{k=1}^N A^{-k} \mathcal{U}.$$

Лемма 1.7 может быть также сведена к эквивалентным рекуррентным соотношениям следующего вида:

$$\mathcal{X}(N) = A^{-1}\mathcal{X}(N-1) + (-A^{-1}\mathcal{U}).$$

Обозначим через \mathbb{K}_n множество всех компактов в \mathbb{R}^n , а через ρ_H – расстояние Хаусдорфа [48, раздел 3.5]:

$$\mathbb{K}_n = \{\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n : \mathcal{X} \text{ – компакт}\},$$

$$\rho_H(x, y) = \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\| \right\}.$$

Если учесть, что \mathcal{U} – выпуклый компакт в \mathbb{R}^n , то каждое множество вида (1.2) также является выпуклым компактом, т.к. представимо в виде алгебраической суммы линейных преобразований компактов [37, раздел 3.8, свойство 3]. Тогда в метрическом пространстве (\mathbb{K}_n, ρ_H) можно определить отображение $T: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ следующего вида:

$$T(\mathcal{X}) = A^{-1}\mathcal{X} + (-A^{-1}\mathcal{U}). \quad (1.9)$$

С учетом леммы 1.7 и соотношения (1.9), если отображение T либо $\underbrace{T \circ \dots \circ T}_M$ для некоторого $M \in \mathbb{N}$ являются сжимающими, предел последовательности множеств 0-управляемости (1.2) в пространстве (\mathbb{K}_n, ρ_H) , может быть определён посредством принципа сжимающих отображений [39, раздел 4.1]. Также принцип сжимающих отображений позволяет оценить погрешность приближения предельной точки при помощи метода простой итерации. С другой стороны, предельная точка с точностью до замыкания в силу (1.3) должна совпадать с \mathcal{X}_∞ .

Сформулируем данный факт в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, семейство $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^\infty$ определяется соотношениями (1.2), множество \mathcal{X}_∞ определяется соотношением (1.3), отображение T имеет вид (1.9). Тогда*

- 1) *существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $T^M = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_M$ является сжимающим с некоторым коэффициентом сжатия $\alpha \in [0; 1)$;*

2) $\text{cl } \mathcal{X}_\infty$ – единственная неподвижная точка отображения T в пространстве (\mathbb{K}_n, ρ_H) ;

3) справедлива оценка

$$\rho_H(\text{cl } \mathcal{X}_\infty, \mathcal{X}(NM)) \leq \frac{\alpha^N}{1 - \alpha} \rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Рассмотрим для некоторых $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\mathcal{C} \in \mathbb{K}_n$ отображение вида

$$\tilde{T}(\mathcal{X}) = B\mathcal{X} + \mathcal{C}.$$

Покажем, что если $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – сжатие с коэффициентом сжатия $\beta \in [0; 1)$, то $\tilde{T} : \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ также является сжатием.

$$\begin{aligned} \rho_H(\tilde{T}(\mathcal{X}), \tilde{T}(\mathcal{Y})) &= \max \left\{ \sup_{x \in \tilde{T}(\mathcal{X})} \inf_{y \in \tilde{T}(\mathcal{Y})} \rho(x, y); \sup_{y \in \tilde{T}(\mathcal{Y})} \inf_{x \in \tilde{T}(\mathcal{X})} \rho(x, y) \right\} = \\ &= \max \left\{ \sup_{\substack{c_1 \in \mathcal{C} \\ x \in \mathcal{X}}} \inf_{\substack{c_2 \in \mathcal{C} \\ y \in \mathcal{X}'}} \|Bx + c_1 - By - c_2\|; \sup_{\substack{c_2 \in \mathcal{C} \\ y \in \mathcal{X}'}} \inf_{\substack{c_1 \in \mathcal{C} \\ x \in \mathcal{X}}} \|Bx + c_1 - By - c_2\| \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ \sup_{\substack{c_1 \in \mathcal{C} \\ x \in \mathcal{X}}} \inf_{\substack{c_2 \in \mathcal{C} \\ y \in \mathcal{X}'}} (\|B(x - y)\| + \|c_1 - c_2\|); \sup_{\substack{c_2 \in \mathcal{C} \\ y \in \mathcal{X}'}} \inf_{\substack{c_1 \in \mathcal{C} \\ x \in \mathcal{X}}} (\|B(x - y)\| + \|c_1 - c_2\|) \right\} = \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{X}'} \|B(x - y)\|; \sup_{y \in \mathcal{X}'} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|B(x - y)\| \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{X}'} \beta \|x - y\|, \sup_{y \in \mathcal{X}'} \inf_{x \in \mathcal{X}} \beta \|x - y\| \right\} = \beta \rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{X}'). \end{aligned}$$

Тогда \tilde{T} – сжатие с коэффициентом β .

С учётом (1.9) верно равенство

$$T^M(\mathcal{X}) = A^{-M} \mathcal{X} + \sum_{k=1}^M (-A^{-k} \mathcal{U}) = \tilde{T}(\mathcal{X}),$$

где $B = A^{-M}$, $\mathcal{C} = \sum_{k=1}^M (-A^{-k} \mathcal{U})$.

Поскольку все собственные значения матрицы A по модулю строго больше 1, то все собственные значения матрицы A^{-1} по модулю строго меньше 1. Тогда согласно [76, теорема 5.6.12] $\|A^{-k}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Тогда по определению предела для $\alpha \in [0; 1)$ найдётся $M \in \mathbb{N}$ такой, что $\|A^{-M}\| < \alpha$. Поскольку справедливо неравенство

$$\|A^{-M}(x - y)\| \leq \|A^{-M}\| \cdot \|x - y\| < \alpha\|x - y\|,$$

A^{-M} является сжатием с коэффициентом $\alpha \in [0; 1)$. Тогда $T^M : \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ также является сжатием с коэффициентом α .

В силу леммы 1.7 для любого $N \in \mathbb{N}$ верно, что $\mathcal{X}(N) \subset \mathcal{X}(N+1)$, также $\mathcal{X}(N)$ – компакт. Тогда согласно [48, следствие А.3.4]

$$\rho_H(\mathcal{X}_\infty, \mathcal{X}(N)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (1.10)$$

С другой стороны, согласно [48, теорема А.3.9] метрическое пространство (\mathbb{K}_n, ρ_H) полное. Тогда сжимающее отображение \tilde{T} имеет единственную неподвижную точку $\mathcal{X}^* \in \mathbb{K}_n$, которая может быть найдена методом простой итерации:

$$\mathcal{X}^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{(\tilde{T} \circ \dots \circ \tilde{T})}_N(\mathcal{X}), \quad (1.11)$$

где $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ произвольный. Выберем $\mathcal{X} = \{0\}$. Тогда с учетом леммы 1.7

$$\underbrace{(\tilde{T} \circ \dots \circ \tilde{T})}_N(\{0\}) = - \sum_{k=1}^{M \cdot N} A^{-k} \mathcal{U} = \mathcal{X}(NM).$$

В силу единственности предельной точки и формул (1.10) и (1.11)

$$\text{cl } \mathcal{X}_\infty = \text{cl } \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}(N) = \mathcal{X}^*.$$

При этом погрешность в методе простой итерации может быть оценена следующим соотношением [5, теорема 2, §1, гл. VII] :

$$\rho_H(\text{cl } \mathcal{X}_\infty, \mathcal{X}(NM)) \leq \frac{\alpha^N}{1 - \alpha} \rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}).$$

Значение коэффициента сжатия α из теоремы 1.2 вообще говоря зависит от выбора нормы в пространстве \mathbb{R}^n и, как следствие, от ассоциированной с ней операторной нормы матрицы A^{-1} . Например, известны следующие оценки величины α при выборе различных норм в \mathbb{R}^n [39, глава II, параграф 4, раздел 2]:

$$\alpha_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|; \quad \alpha_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}; \quad \alpha_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (1.12)$$

Методы, позволяющие в общем случае определить, при каком значении $M \in \mathbb{N}$ отображение T^M окажется сжимающим, на данный момент неизвестны. Однако с учётом оценок (1.12) величина M может быть определена численно посредством последовательного вычисления α для различных значений $M \in \mathbb{N}$.

Также выбор нормы в пространстве \mathbb{R}^n влияет на значение расстояния Хаусдорфа в \mathbb{K}_n , что в конечном счете определяет структуру внешних оценок множества \mathcal{X}_∞ . Данный факт сформулирован в виде следующего следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго больше 1, семейство $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^\infty$ определяется соотношениями (1.2), множество \mathcal{X}_∞ определяется соотношением (1.3), величина $M \in \mathbb{N}$ выбрана так, чтобы T^M являлось сжимающим отображением с коэффициентами сжатия $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_\infty \in [0; 1)$, которые ассоциированы с нормам $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ в пространстве \mathbb{R}^n соответственно. Тогда*

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + \operatorname{conv}\left\{\underbrace{(0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)}_i^T : r \in \{-R_1, R_1\}, i = \overline{0, n-1}\right\},$$

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq R_2^2\right\},$$

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + \left\{x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=\overline{1, n}} |x_i| \leq R_\infty\right\},$$

$$R_p = \frac{\alpha_p^N}{1 - \alpha_p} \max_{x \in \mathcal{X}(M)} \|x\|_p, \quad p \in \{1, 2, \infty\}, N \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.3. В силу пункта 3 теоремы 1.2

$$\rho_H(\operatorname{cl} \mathcal{X}_\infty, \mathcal{X}(NM)) \leq \frac{\alpha_p^N}{1 - \alpha_p^N} \rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}) = R_p, \quad p \in \{1; 2; \infty\}.$$

Тогда в силу определения расстояния Хаусдорфа

$$\mathcal{X}_\infty \subset \operatorname{cl} \mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + \mathcal{B}_{R_p}(0),$$

где

$$\mathcal{B}_{R_1}(0) = \operatorname{conv}\left\{\underbrace{(0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)}_i^T : r \in \{-R_1, R_1\}, i = \overline{0, n-1}\right\},$$

$$\mathcal{B}_{R_2}(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq R_2 \right\},$$

$$\mathcal{B}_{R_\infty}(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=1, n} |x_i| \leq R_\infty \right\}.$$

Следствие 1.3 доказано.

Следствие 1.3 позволяет построить внешние оценки множества \mathcal{X}_∞ с любой наперед заданной точностью. В отличие от результатов раздела 1.2 данные оценки не соприкасаются с предельным множеством 0-управляемости и имеют весьма сложную структуру, поскольку представляют собой сумму по Минковскому различных множеств. Для получения более точных оценок можно использовать оба подхода одновременно:

$$\mathcal{X}_\infty \subset \hat{\mathcal{X}}_\infty^1 \cap \hat{\mathcal{X}}_\infty^2,$$

где $\hat{\mathcal{X}}_\infty^1$ – внешняя оценка \mathcal{X}_∞ , построенная на основе лемм 1.4, 1.5, 1.6, $\hat{\mathcal{X}}_\infty^2$ – внешняя оценка, построенная согласно следствию 1.3.

1.5 Примеры

Продемонстрируем теоретические результаты предыдущих разделов на примерах различных дискретных систем.

ПРИМЕР 1.1. Пусть матрица системы $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Множество допустимых значений управления имеет вид $\mathcal{U} = [-1; 1]^5$. Оценим предельное множество 0-управляемости системы (A, \mathcal{U}) . Матрица A представима в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & O \\ O & A_2 & O \\ O & O & A_3 \end{pmatrix},$$

где $A_1 = \left(\frac{1}{2}\right)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

По лемме 1.3 для предельного множества 0-управляемости системы (A, \mathcal{U}) справедливо равенство

$$\mathcal{X}_\infty = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathcal{X}_{23,\infty},$$

где $\mathcal{X}_{23,\infty}$ – предельное множество 0-управляемости системы $(A_{23}, \mathcal{U}_{23})$,

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}, \mathcal{U}_{23} = [-1; 1]^4.$$

Предельное множество 0-управляемости $\mathcal{X}_{23,\infty}$ по лемме 1.1 представимо в виде

$$\mathcal{X}_{23,\infty} = \mathcal{X}_{2,\infty} \times \mathcal{X}_{3,\infty},$$

где $\mathcal{X}_{2,\infty}$ – предельное множество 0-управляемости подсистемы (A_2, \mathcal{U}_2) , $\mathcal{U}_2 = [-1; 1]^2$, $\mathcal{X}_{3,\infty}$ – предельное множество 0-управляемости подсистемы (A_3, \mathcal{U}_3) , $\mathcal{U}_3 = [-1; 1]^2$.

Рассмотрим подсистему (A_2, \mathcal{U}_2) . У матрицы A_2 существует единственное собственное значение $\lambda_2 = 2$ кратности 2. Тогда (A_2, \mathcal{U}_2) удовлетворяет условиям леммы 1.5. Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{2,\infty} &\subset \bigcap_{i=1}^2 \{x \in \mathbb{R}^2 : x_i \in (x_{i,\min}; x_{i,\max})\}. \\ x_{1,\min} &= \sum_{j=0}^{2-1} \frac{\min\{(-1)^{j+1}u_{1+j,\min}; (-1)^{j+1}u_{1+j,\max}\}}{(\lambda_2 - 1)^{j+1}} = \\ &= \min\{(-1)u_{1,\min}; (-1)u_{1,\max}\} + \min\{(-1)^2u_{2,\min}; (-1)^2u_{2,\max}\} = (-1) + (-1) = -2, \\ x_{1,\max} &= \sum_{j=0}^{2-1} \frac{\max\{(-1)^{j+1}u_{1+j,\min}; (-1)^{j+1}u_{1+j,\max}\}}{(\lambda_2 - 1)^{j+1}} = \\ &= \max\{(-1)u_{1,\min}; (-1)u_{1,\max}\} + \max\{(-1)^2u_{2,\min}; (-1)^2u_{2,\max}\} = 1 + 1 = 2, \\ x_{2,\min} &= \sum_{j=0}^{2-2} \frac{\min\{(-1)^{j+1}u_{2+j,\min}; (-1)^{j+1}u_{2+j,\max}\}}{(\lambda_2 - 1)^{j+1}} = \\ &= \min\{(-1)u_{2,\min}; (-1)u_{2,\max}\} = -1, \\ x_{2,\max} &= \sum_{j=0}^{2-2} \frac{\max\{(-1)^{j+1}u_{2+j,\min}; (-1)^{j+1}u_{2+j,\max}\}}{(\lambda_2 - 1)^{j+1}} = \\ &= \max\{(-1)u_{2,\min}; (-1)u_{2,\max}\} = 1, \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{X}_{2,\infty} \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (-2; 2)\} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \in (-1; 1)\} = (-2; 2) \times (-1; 1).$$

Рассмотрим подсистему (A_3, \mathcal{U}_3) . У матрицы A_3 существует два комплексно-сопряженных собственных значения $\lambda_3 = (3 - 3i)\sqrt{2}$, $\lambda_4 = (3 + 3i)\sqrt{2}$. Матрица A_3 представима в виде

$$A_3 = rA_\varphi = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

где $r = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Тогда по лемме 1.6

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{3,\infty} &\subset \{x \in \mathbb{R}^2 : \|(x_1 \ x_2)^T\|_{\mathbb{R}^2} < R_{1,\max}\}, \\ r_{1,\max} &= \max_{u \in \mathcal{U}_3} \|(u_1 \ u_2)^T\|_{\mathbb{R}^2} = \max_{u \in \mathcal{U}_3} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{2}, \\ R_{1,\max} &= \sum_{j=0}^{1-1} \frac{r_{1+j,\max}}{(r-1)^{j+1}} = \frac{r_{1,\max}}{(6-1)} = \frac{\sqrt{2}}{5}. \end{aligned}$$

Из этого следует, что $\mathcal{X}_{3,\infty} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|(x_1 \ x_2)^T\|_{\mathbb{R}^2} < \frac{\sqrt{2}}{5}\right\}$.

Тогда согласно леммам 1.1 и 1.3 предельное множество 0-управляемости системы (A, \mathcal{U}) можно оценить следующим образом:

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathbb{R}^2 \times (-2; 2) \times (-1; 1) \times \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \frac{\sqrt{2}}{5}\right\}.$$

ПРИМЕР 1.2. Построим для подсистемы (A_2, \mathcal{U}_2) из примера 1.1 оценку предельного множества 0-управляемости $\mathcal{X}_{2,\infty}$ согласно теореме 1.2 и следствию 1.3. В качестве значения параметра, определяющего норму в \mathbb{R}^2 , выберем $p = 1$, т.е.

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|.$$

Тогда

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \|A_2^{-1}\| = \alpha_1 = \frac{3}{4},$$

т.е. $M = 1$. Согласно лемме 1.7

$$\mathcal{X}(M) = -A_2^{-1}\mathcal{U}_2 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\},$$

$$\max_{x \in \mathcal{X}(M)} \|x\|_1 = \frac{5}{4},$$

$$R_1(N) = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^N}{1 - \frac{3}{4}} \cdot \frac{5}{4} = 5 \left(\frac{3}{4}\right)^N.$$

Построим внешние оценки для различных N .

$$\hat{\mathcal{X}}_{2,\infty} = \sum_{k=1}^N A_2^{-k} \mathcal{U}_2 + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} R_1(N) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R_1(N) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ R_1(N) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -R_1(N) \end{pmatrix} \right\}.$$

Оценки $\hat{\mathcal{X}}_{2,\infty}$ для случаев $N = 2$ и $N = 10$ представлены на рисунках 1.1 и 1.2.

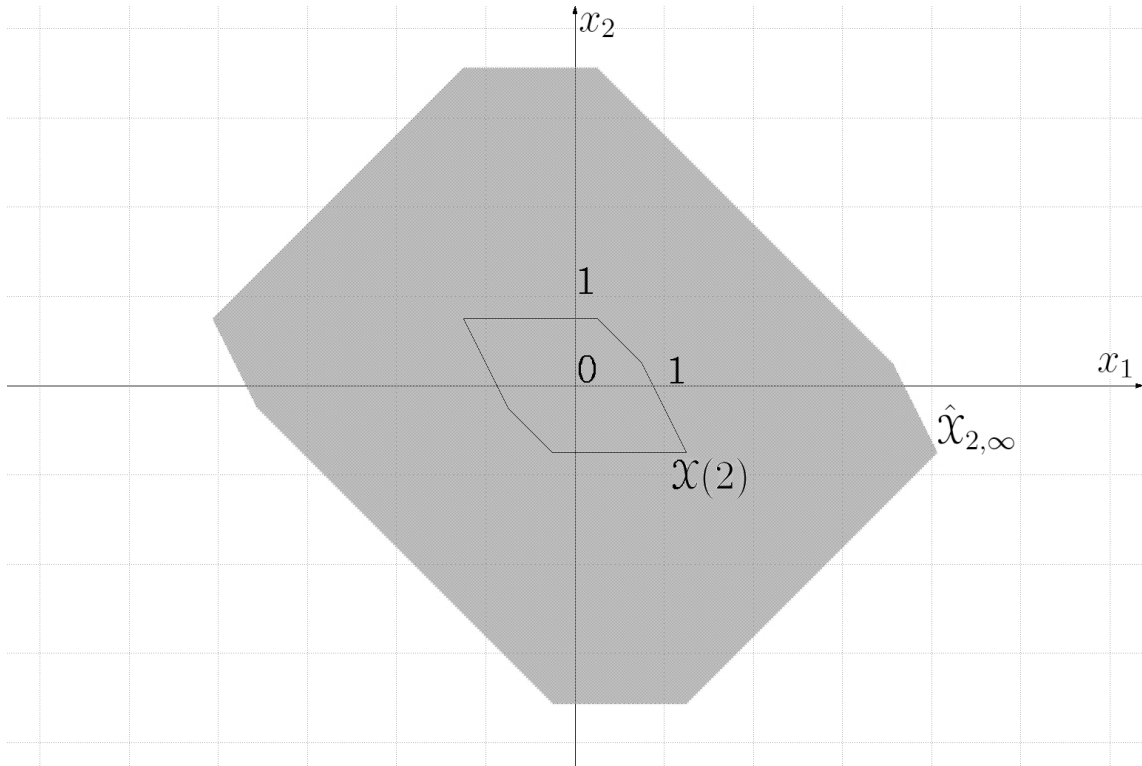


Рисунок 1.1. Оценка $\hat{\mathcal{X}}_{2,\infty}$ для случая $N = 2$ (серым цветом).

ПРИМЕР 1.3. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0.5 & -3.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & -2.5 \end{pmatrix}.$$

Пусть множество допустимых значений управления имеет вид $\mathcal{U} = [-1; 1]^3$. Матрица A имеет единственное собственное значение $\lambda_1 = -3$ кратности 3, которому соответствуют собственный вектор h_1 и присоединные векторы h_2, h_3 :

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

где $u_{i,\max} = \max_{u \in S^{-1}\mathcal{U}} u_i = 1.5$, $u_{i,\min} = \min_{u \in S^{-1}\mathcal{U}} u_i = -1.5$, $i = \overline{1, 3}$.

$$y_{1,\min} = -\frac{21}{16}, y_{1,\max} = \frac{21}{16}, y_{2,\min} = -\frac{9}{8}, y_{2,\max} = \frac{9}{8}, y_{3,\min} = -\frac{3}{4}, y_{3,\max} = \frac{3}{4}.$$

Тогда

$$\mathcal{X}'_\infty \subset \left(-\frac{21}{16}; \frac{21}{16}\right) \times \left(-\frac{9}{8}; \frac{9}{8}\right) \times \left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right).$$

В силу (1.13) верно включение

$$\mathcal{X}_\infty \subset \text{int conv} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{39}{16} \\ -\frac{33}{16} \\ -\frac{15}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{39}{16} \\ -\frac{9}{16} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} \\ -\frac{33}{16} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} \\ -\frac{9}{16} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{9}{16} \\ -\frac{15}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{33}{16} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{39}{16} \\ \frac{9}{16} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{39}{16} \\ \frac{33}{16} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix} \right\}.$$

1.6 Выбор шага квантования

Теорема 1.2 из раздела 1.4 позволяет строить оценки с любой наперёд заданной точностью R_p . Погрешность зависит от выбора шага квантования M и параметра p пространства \mathbb{R}_p^n , который определяет норму, ассоциированную с нормой пространства Хаусдорфа \mathbb{K}_n . В данном разделе представлен метод подбора параметра M посредством численного анализа. В качестве параметров p рассматриваются 1 и ∞ , так как в этом случае оценки будут представлять собой многогранники, что упрощает суммирование по Минковскому для подсчета множеств 0-управляемости. Параметр M влияет на подсчёт коэффициента сжатия α_p и $\max_{x \in \mathcal{X}(M)} \|x\|_p$. Коэффициент сжатия α_p рассчитывается как операторная норма матрицы A^{-M} и зависит от выбора шага квантования M :

$$\alpha_p = \|A^{-M}\| = \sup_{\|x\|_p \leq 1} \|A^{-M}x\|_p \quad (1.14)$$

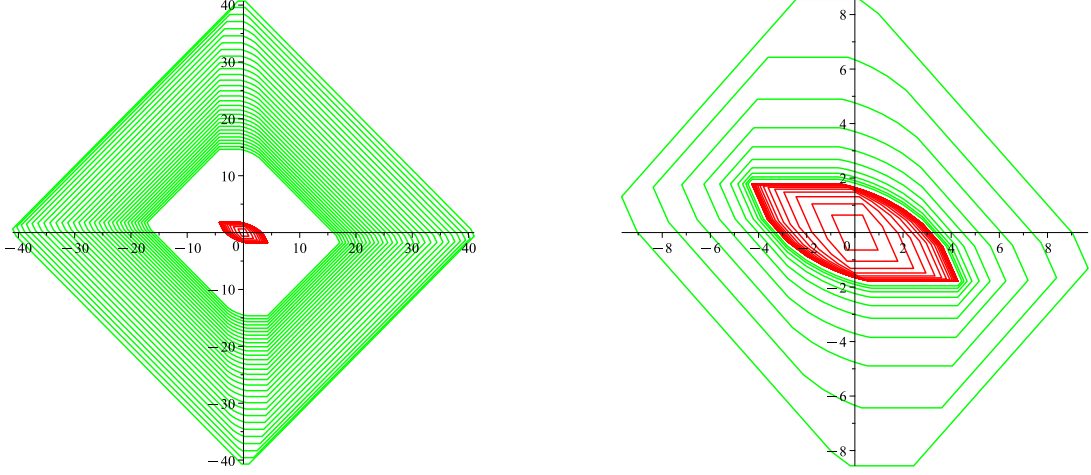
$$A^{-M} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Зафиксируем значение N_{\max} . Целью главы является минимизация погрешности внешней оценки предельного множества 0-управляемости от параметра M при ограничении $NM \leq N_{\max}$, то есть следует решить следующую оптимизационную задачу:

$$\frac{\alpha^N}{1 - \alpha} \rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}) \rightarrow \min_{M, N: MN \leq N_{\max}}. \quad (1.15)$$

В общем случае решить задачу (1.15) не представляется возможным. По этой причине выбор оптимального значения M будем осуществлять на основе анализа экспериментальных данных. Рассмотрим на примере двумерной системы с собственным значением 1.56 кратности 2 актуальность поставленной задачи (1.15), сравнив оценки для различных значений параметра M . Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1.56 & 0.78 \\ 0 & 1.56 \end{pmatrix}, \mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$



а) $p = 1$, $M = 1$, $\alpha_1 = 0.9615$, $N_{\max} = 30$ б) $p = 1$, $M = 3$, $\alpha_\infty = 0.6585$, $N_{\max} = 30$

Рисунок 1.3. Внутренняя оценка \mathcal{X}_∞ красным цветом, внешняя оценка $\hat{\mathcal{X}}_\infty$ зелёным цветом

Как видно из рисунка 1.3, выбор значения M влияет на погрешность внешних оценок предельного множества 0-управляемости. Истинное предельное множество 0-управляемости лежит в зазоре между внутренней оценкой (множества 0-управляемости за N шагов) и внешней оценкой. При $M = 3$ точность оценивания оказывается значительно выше, чем при $M = 1$, что определяет целесообразность решения задачи (1.15).

Для решения поставленной задачи рассмотрим системы разной размерности с различными типами собственных значений матрицы системы.

ПРИМЕР 1.4. Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5.22 & 0.27 \\ 0.82 & 1.09 \end{pmatrix}, \mathcal{U}_1 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Матрица A_1 имеет действительные собственные значения $\lambda_1 = 5.27$ и $\lambda_2 = 1.04$. Рассмотрим зависимость погрешности R_p от выбора значения $M = \overline{1, 50}$ при $N_{\max} = 100$.

В случае с $p = 1$ отображение T^M становится сжимающим, начиная с $M = 1$, а в случае $p = \infty$ – начиная с $M = 4$. Следовательно, для рисунка 1.4(б) параметры $M < 4$ исключены. Для рисунка 1.4(а) для сохранения масштаба исключены из рассмотрения параметры $M = 1$ и $M = 2$.

Из графика видно, что скачкообразный рост возникает при уменьшении значения целой части $\frac{N_{\max}}{M}$. Например, при переходе от $M = 20$ к $M = 21$ погрешность

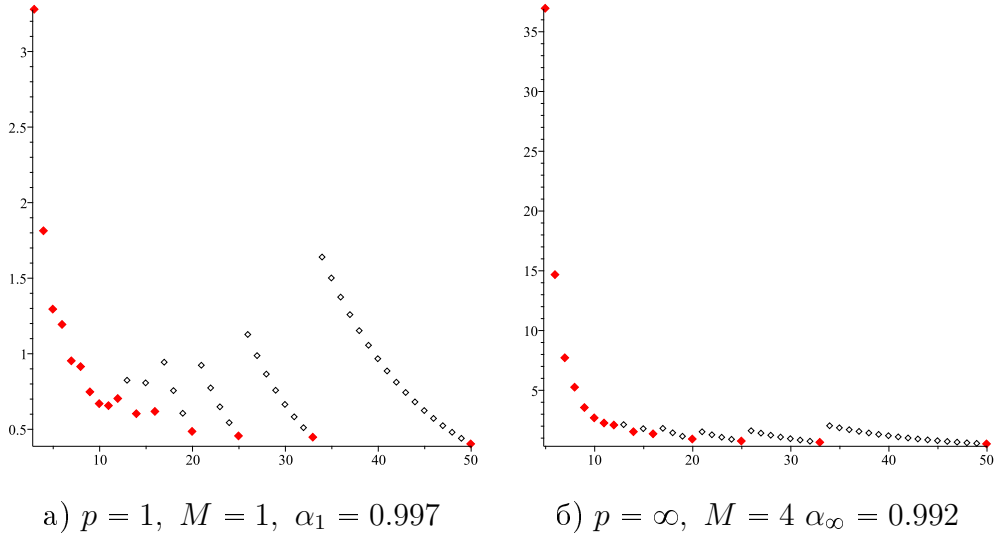


Рисунок 1.4. Зависимость R_p от выбора M для (A_1, \mathcal{U}_1)

R_p растет. Связано это с тем, что оптимальное значение N при решении задачи (1.15) имеет вид

$$N = \left\lceil \frac{N_{\max}}{M} \right\rceil M.$$

Т.е. последнее множество 0-управляемости, используемое для построения внешней оценки предельного множества, имеет номер N , а множества с номерами $N + 1, \dots, N_{\max}$ фактически никак не используются. Значения M , после которых происходит изменение целой части $\frac{N_{\max}}{M}$, на рисунке рисунке 1.4 выделены красным цветом. Начиная с некоторого M_0 , красные точки начинают монотонно убывать, в связи с чем для минимизации погрешности нужно брать самое большое значение M , в этом случае это 50.

Проверим, есть ли зависимость результатов численного моделирования от выбора множества допустимых значений управлений \mathcal{U} . Для этого рассмотрим при той же матрице A_1 следующее множество \mathcal{U}_2 :

$$\mathcal{U}_2 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -0.43 \\ 0.86 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.93 \\ 0.31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.73 \\ -0.59 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.51 \\ -1.1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0.42 \\ -0.86 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.93 \\ -0.31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.74 \\ 0.59 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.52 \\ 1.1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Аналогичные численные расчеты представлены на рисунке 1.5.

Результаты для системы (A_1, \mathcal{U}_2) идентичны результатам для системы (A_1, \mathcal{U}_1) .

ПРИМЕР 1.5. Пусть

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.55 & 1.21 \\ -1.21 & -0.55 \end{pmatrix}, \mathcal{U}_1 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

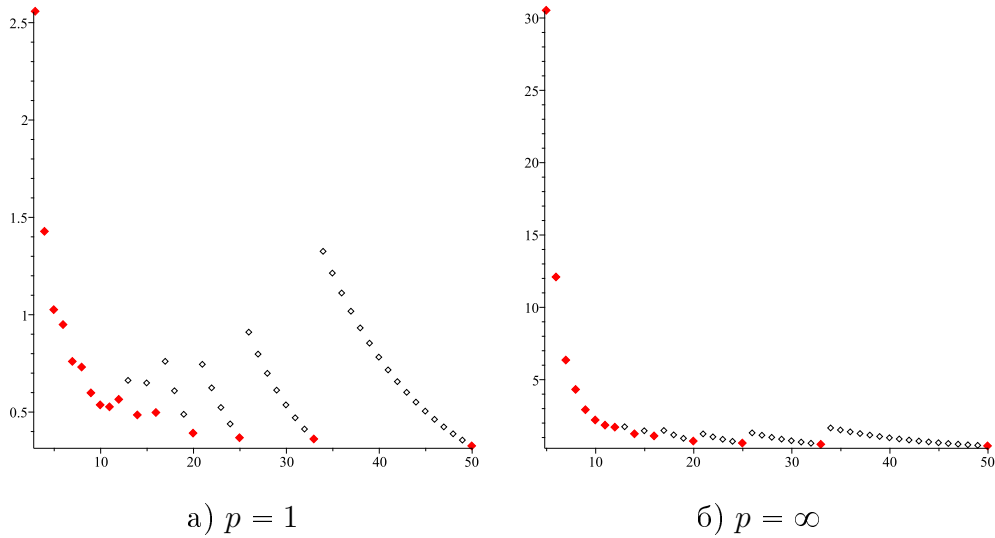


Рисунок 1.5. Зависимость R_p от выбора M для системы (A_1, \mathcal{U}_2) .

Матрица A_2 имеет комплексно-сопряженные собственные значения $\lambda_1 = -0.55 + 1.21i$ и $\lambda_2 = -0.55 - 1.21i$. Рассмотрим зависимость погрешности R_p от выбора значения $M = \overline{1, 50}$ при $N_{\max} = 100$.

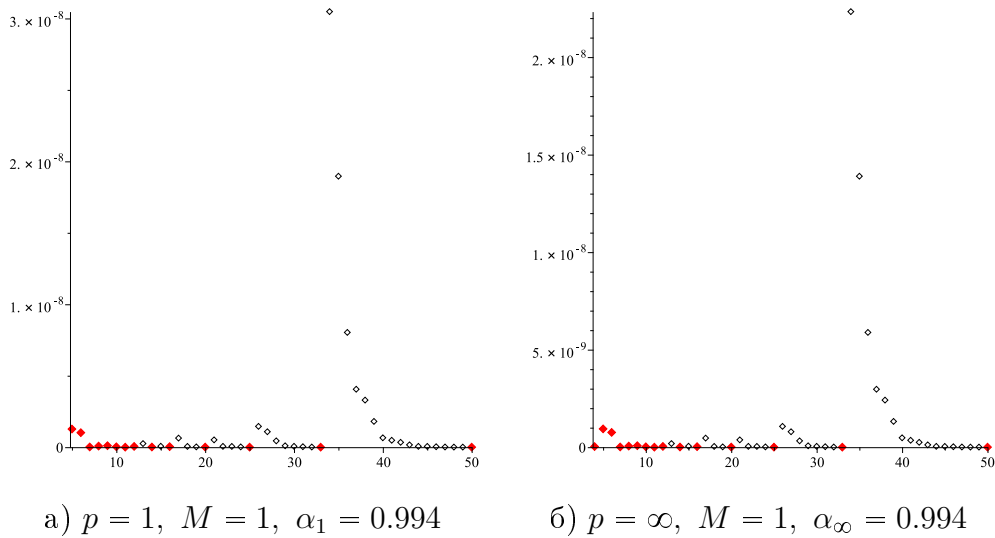


Рисунок 1.6. Зависимость R_p от выбора M для системы (A_2, \mathcal{U}_1) .

Отображение T^M является сжимающим для $M = 1$ в случае $p = 1$ и является сжимающим для $M = 4$ в случае $p = \infty$. Следовательно, для рисунке 1.6 (б) параметры $M < 4$ исключены. Для рисунка 1.6 (а) для сохранения масштаба исключены из рассмотрения параметры $M = 1, M = 2, M = 3$.

Из графика видно, что скачкообразный рост возникает при уменьшении значения целой части $\frac{N_{\max}}{M}$. Например, при переходе от $M = 25$ к $M = 26$ погрешность R_p растет. Связано это с тем, что оптимальное значение N при решении задачи (1.15)

имеет вид

$$N = \left\lceil \frac{N_{\max}}{M} \right\rceil M.$$

Т.е. последнее множество 0-управляемости, используемое для построения внешней оценки предельного множества, имеет номер N , а множества с номерами $N + 1, \dots, N_{\max}$ фактически никак не используются. Значения M , после которых происходит изменение целой части $\frac{N_{\max}}{M}$, на рисунке 1.6 выделены красным цветом. Начиная с некоторого M_0 , красные точки начинают монотонно убывать, в связи с чем для минимизации погрешности нужно брать самое большое значение M , в этом случае это 50.

Проверим, есть ли зависимость результатов численного моделирования от выбора множества допустимых значений управлений \mathcal{U} . Для этого рассмотрим при той же матрице A_2 следующее множество \mathcal{U}_2 :

$$\mathcal{U}_2 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -0.43 \\ 0.86 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.93 \\ 0.31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.73 \\ -0.59 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.51 \\ -1.1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0.42 \\ -0.86 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.93 \\ -0.31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.74 \\ 0.59 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.52 \\ 1.1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Аналогичные численные расчеты представлены на рисунке 1.7.

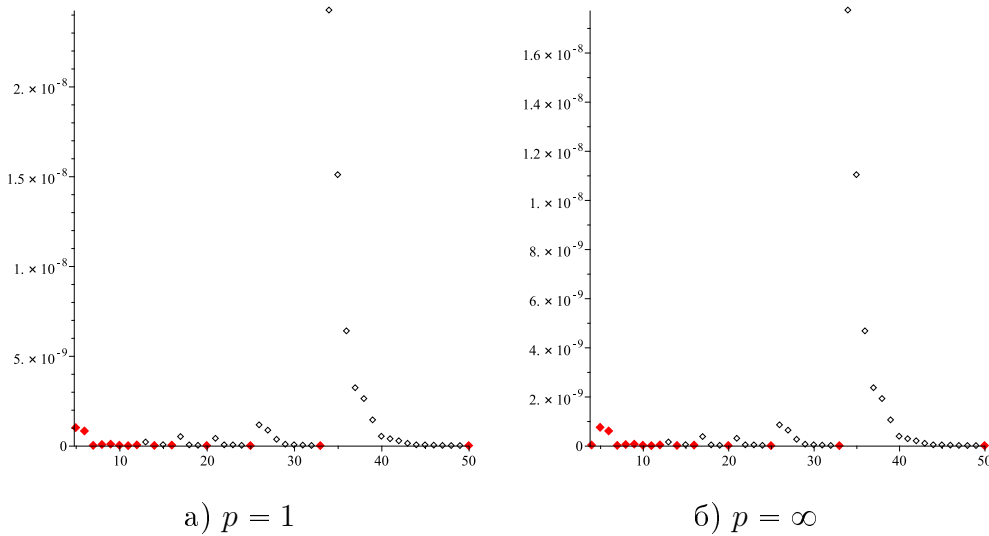


Рисунок 1.7. Зависимость R_p от выбора M для системы (A_2, \mathcal{U}_2) .

Результаты для системы (A_2, \mathcal{U}_2) идентичны результатам для системы (A_2, \mathcal{U}_1) .

ПРИМЕР 1.6. Пусть

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1.51 & 0 \\ 0.75 & 1.51 \end{pmatrix}, \mathcal{U}_1 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Матрица A_3 имеет единственное собственное значение кратности 2 $\lambda_1 = 1.51$. Рассмотрим зависимость погрешности R_p от выбора значения $M = \overline{1, 50}$ при $N_{\max} = 100$.

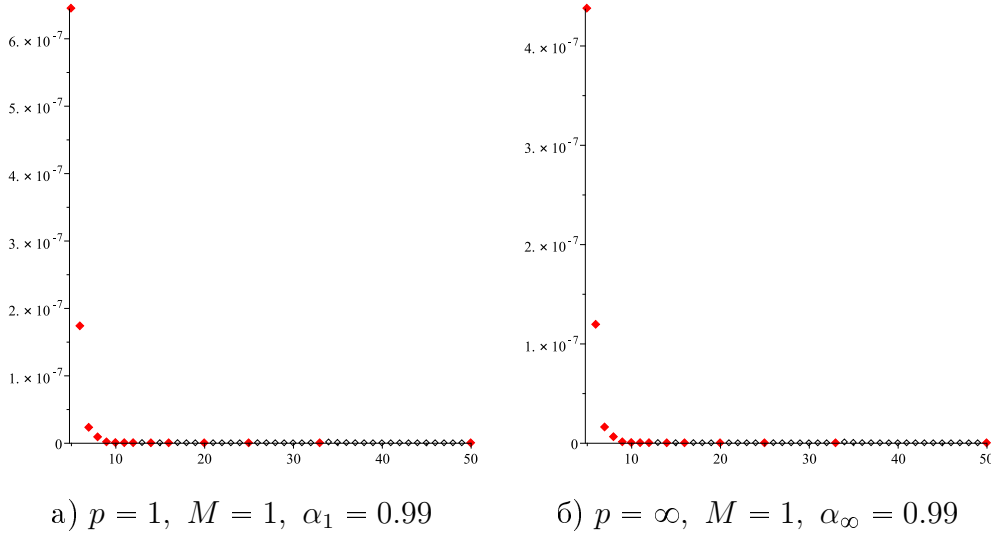


Рисунок 1.8. Зависимость R_p от выбора M для (A_3, \mathcal{U}_1) .

Отображение T^M является сжимающим для $M = 1$ в случае $p = 1$ и $p = \infty$. Для рисунка 1.8 для сохранения масштаба исключены из рассмотрения параметры $M < 4$.

Из графика видно, что скачкообразный рост возникает при уменьшении значения целой части $\frac{N_{\max}}{M}$. Например, при переходе от $M = 20$ к $M = 21$ погрешность R_p растёт. Связано это с тем, что оптимальное значение N при решении задачи (1.15) имеет вид

$$N = \left\lceil \frac{N_{\max}}{M} \right\rceil M.$$

Т.е. последнее множество 0-управляемости, используемое для построения внешней оценки предельного множества, имеет номер N , а множества с номерами $N + 1, \dots, N_{\max}$ фактически никак не используются. Значения M , после которых происходит изменение целой части $\frac{N_{\max}}{M}$, на рисунке 1.8 выделены красным цветом. Начиная с некоторого M_0 , красные точки начинают монотонно убывать, в связи с чем для минимизации погрешности нужно брать самое большое значение M , в этом случае это 50.

Проверим, есть ли зависимость результатов численного моделирования от выбора множества допустимых значений управлений \mathcal{U} . Для этого рассмотрим при той же матрице A_3 следующее множество \mathcal{U}_2 :

$$\mathcal{U}_2 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -0.43 \\ 0.86 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.93 \\ 0.31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.73 \\ -0.59 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.51 \\ -1.1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0.42 \\ -0.86 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.93 \\ -0.31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.74 \\ 0.59 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.52 \\ 1.1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Аналогичные численные расчеты представлены на 1.9.

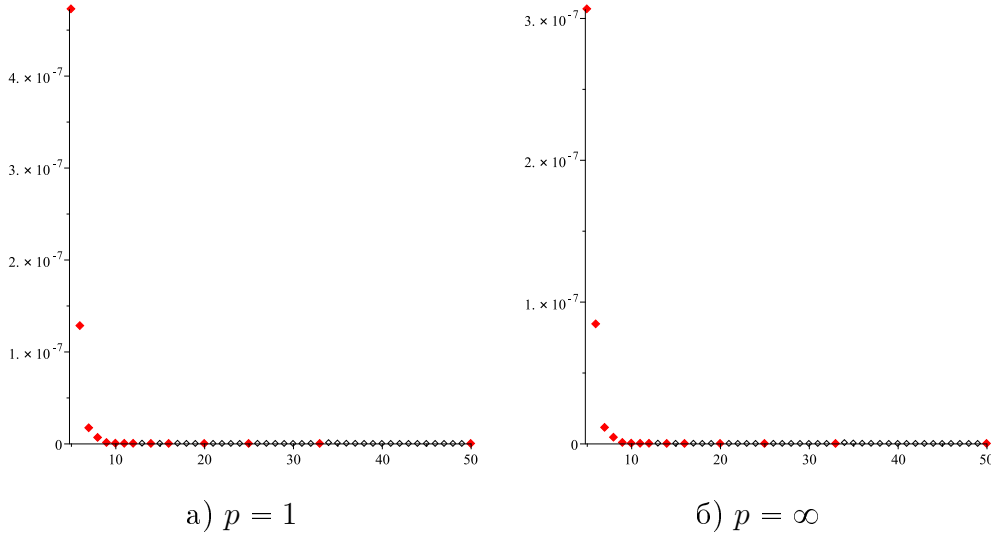


Рисунок 1.9. Зависимость R_p от выбора M для (A_3, \mathcal{U}_2) .

Результаты для системы (A, \mathcal{U}_2) идентичны результатам для системы (A, \mathcal{U}_1) .

ПРИМЕР 1.7. Рассмотрим трёхмерную систему с действительными собственными значениями. Пусть

$$A_4 = \begin{pmatrix} -0.553 & 0 & 1.208 \\ 0 & 1.33 & 0 \\ -1.208 & 0 & -0.553 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}_3 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Матрица A_4 имеет собственные значения $\lambda_1 = -0.55 + 1.2i$, $\lambda_2 = -0.55 - 1.2i$, $\lambda_3 = 1.33$. Рассмотрим зависимость погрешности R_p от выбора значения $M = \overline{1, 35}$ при $N_{\max} = 36$.

Отображение T^M является сжимающим для $M = 1$ в случае $p = 1$ и $p = \infty$. Для рисунка 1.10 для сохранения масштаба исключены из рассмотрения параметры $M < 3$.

Из графика видно, что скачкообразный рост возникает при уменьшении значения целой части $\frac{N_{\max}}{M}$. Например, при переходе от $M = 18$ к $M = 19$ погрешность

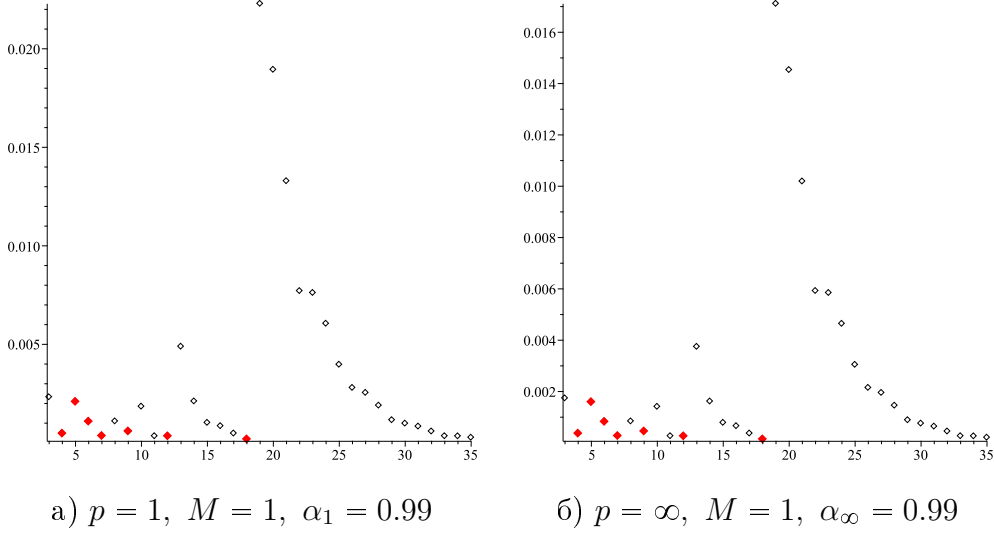


Рисунок 1.10. Зависимость R_p от выбора M для (A_4, \mathcal{U}_3) .

R_p растет. Связано это с тем, что оптимальное значение N при решении задачи (1.15) имеет вид

$$N = \left\lceil \frac{N_{\max}}{M} \right\rceil M.$$

Т.е. последнее множество 0-управляемости, используемое для построения внешней оценки предельного множества, имеет номер N , а множества с номерами $N + 1, \dots, N_{\max}$ фактически никак не используются. Значения M , после которых происходит изменение целой части $\frac{N_{\max}}{M}$, на рисунке 1.10 выделены красным цветом. Начиная с некоторого M_0 , красные точки начинают монотонно убывать, в связи с чем для минимизации погрешности нужно брать самое большое значение M , в этом случае это 50.

Проверим, есть ли зависимость результатов численного моделирования от выбора множества допустимых значений управлений \mathcal{U} . Для этого рассмотрим при той же матрице A_4 следующее множество \mathcal{U}_4 :

$$\mathcal{U}_4 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1.15 \\ 1.03 \\ -1.09 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.74 \\ 1.68 \\ -2.97 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.73 \\ 0.55 \\ -0.24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.15 \\ -1.03 \\ 1.09 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.73 \\ -0.55 \\ 0.24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.74 \\ -1.68 \\ 2.97 \end{pmatrix} \right\}.$$

Результаты для системы (A_4, \mathcal{U}_4) идентичны результатам для системы (A_4, \mathcal{U}_3) .

1.7 Выводы по главе 1

1. Получено явное описание структуры предельных множеств 0-управляемости для линейных дискретных систем с геометрическими ограничениями на управление. Установлено, что данные множества представляют собой цилиндрические множества, ориентированные вдоль собственных подпространств матрицы системы, соответствующих устойчивым модам.

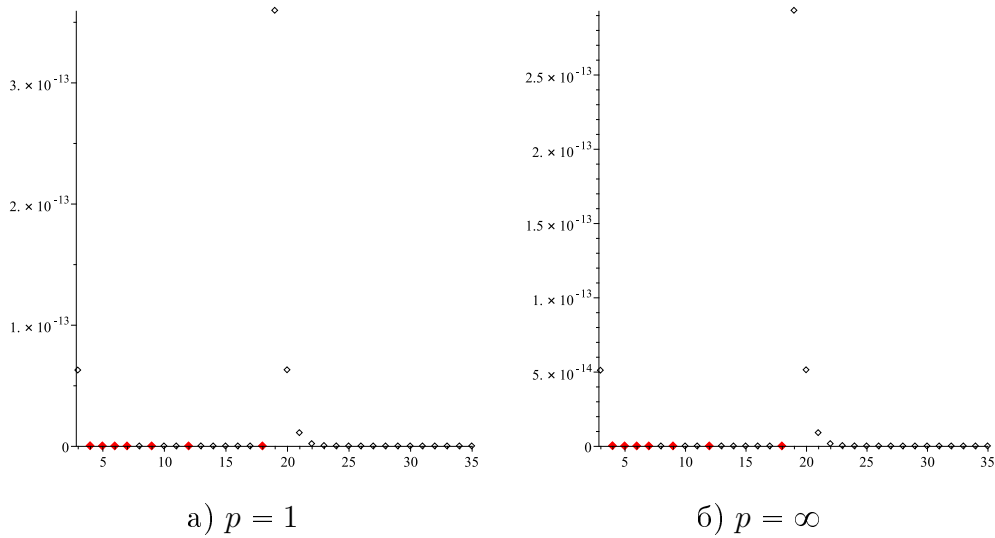


Рисунок 1.11. Зависимость R_p от выбора M для трехмерной системы.

2. Доказаны фундаментальные свойства предельных множеств 0-управляемости, такие как их ограниченность, выпуклость и открытость. Разработана методика декомпозиции исходной задачи на подсистемы меньшей размерности, что существенно упрощает анализ и построение оценок.

3. Предложен алгоритм построения внешних оценок предельных множеств 0-управляемости на основе аппарата опорных полупространств. Получены аналитические выражения для опорных функций, позволяющие эффективно вычислять оценки множеств управляемости.

4. Разработан алгоритм приближенного построения предельных множеств 0-управляемости, основанный на принципе сжимающих отображений. Доказана сходимость итерационной процедуры и получены оценки точности приближения в метрике Хаусдорфа.

5. Проведен численный анализ зависимости точности оценок от параметров алгоритма. Экспериментально установлены оптимальные значения шага квантования, обеспечивающие минимальную погрешность при заданных вычислительных ресурсах. Исследовано влияние выбора нормы в пространстве состояний на качество получаемых оценок.

Основные результаты главы 1 опубликованы в [145, 147, 149, 150, 154, 156–160].

Глава 2. Построение оценок предельных множеств достижимости для линейных дискретных систем с ограниченным управлением

В данной главе исследуются методы построения предельных множеств достижимости для линейных дискретных систем с ограниченным управлением. Основное внимание уделяется разработке алгоритмов оценивания этих множеств.

Глава организована следующим образом:

- В разделе 2.1 представлена постановка задачи, включающая описание системы и основные определения.
- Раздел 2.2 посвящен декомпозиции линейной системы. Доказано, что исходную задачу можно разложить на подзадачи меньшей размерности.
- В разделе 2.3 представлена оценка предельного множества достижимости на основе опорных полупространств.
- Раздел 2.4 представляет метод построения внешних оценок на основе принципа сжимающих отображений.
- В разделе 2.5 представлены модельные примеры, на которых проиллюстрированы теоретические результаты, полученные в предыдущих разделах главы.
- В разделе 2.6 сформулированы выводы по главе 2.

2.1 Постановка задачи

Рассматривается n -мерная линейная автономная дискретная система управления (A, \mathcal{U}) с ограниченным управлением вида (1.1).

Обозначим через $\{\mathcal{Y}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ семейство множеств достижимости, где каждое $\mathcal{Y}(N)$ представляет собой множество тех состояний, в которые посредством выбора допустимого управления систему (1.1) можно перевести из начала координат за N шагов:

$$\mathcal{Y}(N) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(0) = 0, x(N) = x\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Требуется построить предельное множество достижимости \mathcal{Y}_{∞} , т.е. множество тех состояний, в которые систему (A, \mathcal{U}) можно перевести из начала координат за любое конечное число шагов:

$$\mathcal{Y}_{\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N}, \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = x, x(0) = 0\}.$$

С учетом (2.1) также справедливо представление

$$\mathcal{Y}_\infty = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}(N). \quad (2.2)$$

2.2 Декомпозиция линейной системы

Структура предельного множества достижимости системы (1.1) определяется свойствами матрицы системы A . В [80, теорема 1] доказано, что \mathcal{Y}_∞ представляет собой цилиндрическое множество, ориентированное вдоль собственных векторов A , соответствующих собственным значениям, которые по модулю не меньше 1. По этой причине процесс построения \mathcal{Y}_∞ связан с переходом в жорданов базис A . Рассмотрим свойства системы (1.1) и множеств вида (2.1) и (2.2), связанные с различными линейными преобразованиями системы координат.

Введем следующее инвариантное подпространство:

$$\mathbb{L}_{<1} = \text{Lin}\{h_i : h_i \text{ соответствует собственному значению } \lambda, |\lambda| < 1\},$$

Справедлив следующий критерий ограниченности предельного множества (2.2).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть множество \mathcal{Y}_∞ и определяется соотношением (2.2). Тогда \mathcal{Y}_∞ ограничено тогда и только тогда, когда $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}_{<1}$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1.

Разобьём элементы вещественного жорданова базиса $h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{m,1}, \dots, h_{m,n_m}$, где $h_{i,j} \in \mathbb{R}^n$ – присоединенный вектор матрицы A ранга j , соответствующий значению $\lambda_i \in \mathbb{C}$ матрицы A , или $h_{i,j} = (h_{i,j}^{\text{re}}, h_{i,j}^{\text{im}}) \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ – действительная и мнимая части присоединенного вектора матрицы A ранга j , соответствующего собственному значению $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Тогда вещественная жорданова форма матрицы A состоит из m клеток, а n_i и $2n_i$ – размерность i -й клетки в зависимости от типа собственного значения. Причем в силу [89, Раздел 3.1] верно представление:

$$\begin{aligned} A &= SAS^{-1}, \text{ где} \\ S &= (h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{m,1}, \dots, h_{m,n_m}), \\ \Lambda &= \text{diag}(J_1, \dots, J_m). \end{aligned}$$

Для всех $i = \overline{1, m}$ жорданова клетка $J_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ имеет один из следующих двух видов:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \lambda_i \in \mathbb{R},$$

$$J_i = \begin{pmatrix} r_i A_{\varphi_i} & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_i A_{\varphi_i} & I & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & r_i A_{\varphi_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_i \times 2n_i}, \lambda_i = r_i e^{i\varphi_i} \in \mathbb{C}, A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i) & \sin(\varphi_i) \\ -\sin(\varphi_i) & \cos(\varphi_i) \end{pmatrix}.$$

Для любого $u(N - k - 1) \in \mathcal{U}$ верно разложение

$$u(N - k - 1) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} \alpha_{i,j}(k),$$

где $\alpha_{i,j}(k) \in \mathbb{R}$, если $\lambda_i \in \mathbb{R}$ и $\alpha_{i,j}(k) \in \mathbb{R}^2$, если $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Тогда справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} S^{-1}u(N - k - 1) &= (h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{m,1}, \dots, h_{m,n_m})^{-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} \alpha_{i,j}(k) = \\ &= S^{-1} \underbrace{(h_{1,1}, \dots, h_{1,n_1}, \dots, h_{m,1}, \dots, h_{m,n_m})}_S \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{m,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{m,n_m}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{1,n_1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{m,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{m,n_m}(k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Заметим, что для жордановых клеток J_i справедливо следующее представление:

$$J_i = \lambda_i I + P, \text{ где } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \text{ Тогда } J_i^k = (\lambda_i I + P)^k = \sum_{l=0}^k C_k^l \lambda_i^{k-l} P^l.$$

Введем новое обозначение β_i :

$$\begin{aligned} \beta_i &= \sum_{k=0}^{N-1} J_i^k \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^k C_k^l \lambda_i^l P^{k-l} \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix}, \text{ где} \\ (P^l x)_j &= \begin{cases} x_{j+l}, l \leq n_i - j \\ 0, j \geq n_i - j. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда

$$\beta_{i,j} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\min\{k, n_i - j\}} C_k^l \lambda_i^{k-l} \alpha_{i,j+l}(k) = \sum_{l=0}^{n_i - j} \sum_{k=l}^{N-1} C_k^l \lambda_i^{k-l} \alpha_{i,j+l}(k) = \sum_{l=0}^{n_i - j} \sum_{k=0}^{N-1-l} C_{k+l}^l \lambda_i^k \alpha_{i,j+l}(k+l).$$

Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}_{<1}$, т.е. $\alpha_{i,j} = 0$, если $|\lambda_i| \geq 1$. Получим

$$|\beta_{i,j}| = \left| \sum_{l=0}^{n_i - j} \sum_{k=0}^{N-1-l} C_{k+l}^l \lambda_i^k \alpha_{i,j+l}(k+l) \right| \leq \sum_{l=0}^{n_i - j} \sum_{k=0}^{N-1-l} C_{k+l}^l |\lambda_i^k| |\alpha_{i,j+l}(k+l)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+l}^l |\lambda_i^k| |\alpha_{i,j+l}(k+l)| \leq \begin{cases} \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+l}^l \lambda_{\max}^k \alpha_{\max}, & |\lambda_i| < 1, \\ 0, & |\lambda_i| \geq 1 \end{cases} \leq \\ &\leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \frac{\alpha_{\max}}{(1-\lambda_{\max})^{l+1}} \leq \frac{n_i \alpha_{\max}}{(1-\lambda_{\max})^{n_i}} \leq \frac{n \alpha_{\max}}{(1-\lambda_{\max})^n}, \\ &\lambda_{\max} = \max\{|\lambda| : \lambda - \text{собственное значение } A \text{ и } |\lambda| < 1\}, \\ &\alpha_{\max} = \max_{u \in \mathcal{U}} \max_{i=1, m} \max_{j=1, n_i} \|\alpha_{i,j}\|. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай комплексно-сопряженных собственных значений. В этом случае для жордановой клетки J_i справедливо следующее соотношение:

$$J_i = \text{diag}(r_i A_{\varphi_i}, \dots, r_i A_{\varphi_i}) + P^2.$$

Тогда

$$J_i^k = (\text{diag}(r_i A_{\varphi_i}, \dots, r_i A_{\varphi_i}) + P^2)^k = \sum_{l=0}^k C_k^l \text{diag}(r_i A_{\varphi_i}, \dots, r_i A_{\varphi_i})^l P^{2(k-l)}.$$

Аналогично вещественному случаю для $\lambda_i \in \mathbb{C}$ получим

$$\beta_i = \sum_{k=0}^{N-1} J_i^k \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^k C_k^l \text{diag}(r_i A_{\varphi_i}, \dots, r_i A_{\varphi_i})^{k-l} P^{2l} \begin{pmatrix} \alpha_{i,1}(k) \\ \vdots \\ \alpha_{i,n_i}(k) \end{pmatrix}.$$

Учтём, что $\alpha_{i,j}(k) \in \mathbb{R}^2$ и получим

$$\begin{aligned} \beta_{i,j} &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\min\{k, n_i-j\}} C_k^l (r_i A_{\varphi_i})^{k-l} \alpha_{i,j+l}(k) = \\ &= \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=l}^{N-1} C_k^l (r_i A_{\varphi_i})^{k-l} \alpha_{i,j+l}(k) = \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-1-l} C_{k+l}^l r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(k+l). \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{L}_{<1}$, т.е. $\alpha_{i,j} = 0$, если $|\lambda_i| \geq 1$. Получим

$$\begin{aligned} \|\beta_{i,j}\| &\leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-1-l} C_{k+l}^l \|r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j+l}(k+l)\| = \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{N-1-l} C_{k+l}^l r_i^k \|\alpha_{i,j+l}(k+l)\| \leq \\ &\leq \begin{cases} \sum_{l=0}^{n_i-j} \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+l}^l \lambda_{\max}^k \alpha_{\max}, & |\lambda_i| < 1, \\ 0, & |\lambda_i| \geq 1. \end{cases} \leq \\ &\leq \sum_{l=0}^{n_i-j} \frac{\alpha_{\max}}{(1-\lambda_{\max})^{l+1}} \leq \frac{n_i \alpha_{\max}}{(1-\lambda_{\max})^{n_i}} \leq \frac{n \alpha_{\max}}{(1-\lambda_{\max})^n}. \end{aligned}$$

Верны соотношения

$$\|x(N)\| = \|S \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda^k S^{-1} u(N-k-1)\| \leq \|S\| \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} \|\beta_{i,j}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|S\| \left(n \frac{n^2 \alpha_{max}^2}{(1 - \lambda_{max})^{2n}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\|S\| n^{\frac{3}{2}} \alpha_{max}}{(1 - \lambda_{max})^n}.$$

Следовательно, по определению 2.2 множество \mathcal{Y}_∞ ограничено.

Пусть $\mathcal{U} \not\subset \mathbb{L}_{<1}$. Тогда найдется $u \in \mathcal{U}$ такой, что в его разложении по базису h_1, \dots, h_n $\alpha_{i,j} \neq 0$ для $|\lambda_i| \geq 1$, $j = \overline{1, n_i}$. Без ограничения общности будем полагать, что

$$\alpha_{i,j+1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0 \text{ или } j = n_i.$$

Если $\lambda_i \in \mathbb{R}$, рассмотрим следующее управление

$$u(N-k-1) = \begin{cases} u, & k \in \{0, 2, 4, \dots\}, \\ 0, & k \in \{1, 3, 5, \dots\}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda^k S^{-1} u(N-k-1) \right\| &= \|S^{-1} x(N)\| \leq \|S^{-1}\| \|x(N)\|, \\ \|x(2N)\| &\geq \frac{1}{\|S^{-1}\|} \cdot \left\| \sum_{k=0}^{2N-1} \Lambda^k S^{-1} u(N-k-1) \right\| \geq \frac{1}{\|S^{-1}\|} \|\beta_{i,j}\| = \\ &= \frac{1}{\|S^{-1}\|} \left| \sum_{k=0}^{2N-1} \lambda_i^k \alpha_{i,j}(k) \right| = \frac{1}{\|S^{-1}\|} \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_i^{2k} |\alpha_{i,j}| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Если $\lambda_i \in \mathbb{C}$ и $\frac{\varphi_i}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, то рассмотрим возрастающую последовательность $\{k_1, k_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$ такую, что

$$(\varphi_i k_N + \theta) \pmod{2\pi} \in [0; \frac{\pi}{6}), \text{ где } \alpha_{i,j} = \|\alpha_{i,j}\| \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Такая последовательность существует, поскольку в силу теоремы Вейля $\text{cl}\{\varphi_i k \pmod{2\pi} : k \in \mathbb{N}\} = [0; 2\pi]$.

Если $\varphi_i = 2\pi \frac{K'}{K''}$, то положим $k_N = NK''$. В обоих случаях выберем управление следующим образом:

$$u(k_N - k - 1) = \begin{cases} u, & k \in \{k_1, k_2, k_3, \dots\}, \\ 0, & k \notin \{k_1, k_2, k_3, \dots\}. \end{cases}$$

Тогда для $\varphi_i = 2\pi \frac{K'}{K''}$

$$\begin{aligned} \|x(k_N)\| &\geq \frac{1}{\|S^{-1}\|} \|\beta_{i,j}\| = \frac{1}{\|S^{-1}\|} \left\| \sum_{k=0}^{k_N-1} r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j}(k) \right\| = \\ &= \frac{1}{\|S^{-1}\|} \left\| \sum_{k=0}^{[(N-1)/K'']} r_i^{kK''} A_{k2\pi K' \alpha_{i,j}} \right\| = \frac{1}{\|S^{-1}\|} \sum_{k=0}^{[(N-1)/K'']} r_i^{kK''} \|\alpha_{i,j}\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Если $\frac{\varphi_i}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, то

$$\begin{aligned} \|x(k_N)\| &\geq \frac{1}{\|S^{-1}\|} \|\beta_{i,j}\| = \frac{1}{\|S^{-1}\|} \left\| \sum_{k=0}^{k_N-1} r_i^k A_{k\varphi_i} \alpha_{i,j}(k) \right\| = \frac{1}{\|S^{-1}\|} \left\| \sum_{q=0}^{N-1} r_i^{k_q} A_{k_q\varphi_i} \alpha_{i,j}(k) \right\| \geq \\ &\geq \frac{1}{\|S^{-1}\|} \sum_{q=0}^{N-1} r_i^{k_q} \|\alpha_{i,j}\| \cdot |\cos(k_q\varphi_i + \theta)| \geq \frac{1}{2\|S^{-1}\|} \sum_{q=0}^{N-1} r_i^{k_q} \|\alpha_{i,j}\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, во всех трёх случаях множество \mathcal{Y}_∞ оказывается неограниченным.

Теорема 2.1 доказана.

Пусть (A_1, \mathcal{U}_1) и (A_2, \mathcal{U}_2) – n_1 -мерная и n_2 -мерная системы вида (1.1) соответственно. Обозначим через $(A_1, \mathcal{U}_1) \times (A_2, \mathcal{U}_2)$ систему (A, \mathcal{U}) размерности $n_1 + n_2$, где

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}.$$

ЛЕММА 2.1. Пусть через $\{\mathcal{Y}_i(N)\}_{N=0}^\infty$ и $\mathcal{Y}_{i,\infty}$ обозначены класс множеств достижимости и предельное множество достижимости соответственно системы (A_i, \mathcal{U}_i) , $i \in \{1, 2\}$, также $(A, \mathcal{U}) = (A_1, \mathcal{U}_1) \times (A_2, \mathcal{U}_2)$.

Тогда

$$1) \mathcal{Y}(N) = \mathcal{Y}_1(N) \times \mathcal{Y}_2(N), \quad N \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

$$2) \mathcal{Y}_\infty = \mathcal{Y}_{1,\infty} \times \mathcal{Y}_{2,\infty}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Обозначим через $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ и $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ терминальные состояния системы (A_1, \mathcal{U}_1) и (A_2, \mathcal{U}_2) соответственно. Тогда $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – терминальное состояние системы (A, \mathcal{U}) .

В силу (1.1) верно, что для всех $N \in \mathbb{N}$ при $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} x(N) &= A^{N-1}u(0) + A^{N-2}u(1) + \dots + u(N-1) = \\ &= \begin{pmatrix} A_1^{N-1} & O \\ O & A_2^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} u_1(N-1) \\ u_2(N-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1^{N-1}u_1(0) + \dots + u_1(N-1) \\ A_2^{N-1}u_2(0) + \dots + u_2(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(N) \\ x_2(N) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получим, что $x(N) = x$ тогда и только тогда, когда существуют $u_1(0), \dots, u_1(N-1) \in \mathcal{U}_1$ и $u_2(0), \dots, u_2(N-1) \in \mathcal{U}_2$ такие, что $x_1(N) = x_1$, $x_2(N) = x_2$. Данные равенства в силу (2.1) эквивалентны включению $x_1 \in \mathcal{Y}_1(N)$, $x_2 \in \mathcal{Y}_2(N)$. Следовательно,

$$\mathcal{Y}(N) = \mathcal{Y}_1(N) \times \mathcal{Y}_2(N).$$

Пусть $x \in \mathcal{Y}_\infty$. Тогда согласно (2.2) существует $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ такой, что

$$x \in \mathcal{Y}(\tilde{N}) = \mathcal{Y}_1(\tilde{N}) \times \mathcal{Y}_2(\tilde{N}) \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}_1(N) \times \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}_2(N) = \mathcal{Y}_{1,\infty} \times \mathcal{Y}_{2,\infty},$$

т.е. $\mathcal{Y}_\infty \subset \mathcal{Y}_{1,\infty} \times \mathcal{Y}_{2,\infty}$.

Пусть $x \in \mathcal{Y}_{1,\infty} \times \mathcal{Y}_{2,\infty}$. Следовательно, существуют $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $x \in \mathcal{Y}_1(\tilde{N}_1) \times \mathcal{Y}_2(\tilde{N}_2) \subset \mathcal{Y}_1(\tilde{N}) \times \mathcal{Y}_2(\tilde{N})$, где $\tilde{N} = \max\{\tilde{N}_1, \tilde{N}_2\}$. Тогда в силу пункта 1 леммы 2.1

$$x \in \mathcal{Y}(\tilde{N}) \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}(N) = \mathcal{Y}_\infty,$$

т.е. $\mathcal{Y}_{1,\infty} \times \mathcal{Y}_{2,\infty} \subset \mathcal{Y}_\infty$.

Окончательно получаем, что $\mathcal{Y}_\infty = \mathcal{Y}_{1,\infty} \times \mathcal{Y}_{2,\infty}$. Лемма 2.1 доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det S \neq 0$, (A, \mathcal{U}) – n -мерная система вида (1.1), через $\{\mathcal{Y}'(N)\}_{N=0}^{\infty}$ и \mathcal{Y}'_∞ обозначены класс множеств достижимости и предельное множество достижимости соответственно системы $(S^{-1}AS, S^{-1}\mathcal{U})$.

Тогда

$$1) \mathcal{Y}(N) = S\mathcal{Y}'(N), \quad N \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

$$2) \mathcal{Y}_\infty = S\mathcal{Y}'_\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.2.

Пусть $\{y(k)\}_{k=0}^N$ – траектория системы $(S^{-1}AS, S^{-1}\mathcal{U})$, т.е. $y(N)$ согласно (1.1) для начального состояния $y_0 \in \mathbb{R}^n$ допускает следующее представление:

$$\begin{aligned} y(N) &= S^{-1}ASy(N-1) + v(N-1) = \dots = \\ &= S^{-1}A^N S y_0 + S^{-1}A^{N-1}Sv(0) + \dots + v(N-1), \end{aligned}$$

где $v(0), \dots, v(N-1) \in S^{-1}\mathcal{U}$.

В силу (2.1) при $y_0 = 0$ включение $y \in \mathcal{Y}(N)$ верно тогда и только тогда, когда $y(N) = y$, т.е.

$$\begin{aligned} S^{-1}A^{N-1}Sv(0) + \dots + v(N-1) &= y, \\ A^{N-1}Sv(0) + \dots + Sv(N-1) &= Sy, \end{aligned}$$

что в силу (2.1) эквивалентно включению $Sy \in \mathcal{Y}(N)$, так как по построению $Sv(0), \dots, Sv(N-1) \in \mathcal{U}$. Откуда следует равенство $\mathcal{Y}(N) = S\mathcal{Y}'(N)$.

Пусть $x \in \mathcal{Y}_\infty$. В силу (2.2) существует $\tilde{N} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, для которого $x \in \mathcal{Y}(\tilde{N})$, что эквивалентно включению $x \in S\mathcal{Y}'(\tilde{N})$ согласно пункту 1 леммы 2.2. Следовательно, $S^{-1}x \in \mathcal{Y}'(\tilde{N})$. Тогда $S^{-1}x \in \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}'(N) = \mathcal{Y}'_\infty$, т.е. $x \in S\mathcal{Y}'_\infty$. Тогда $\mathcal{Y}_\infty \subset S\mathcal{Y}'_\infty$.

Пусть $x \in S\mathcal{Y}'_\infty$, тогда $S^{-1}x \in \mathcal{Y}'_\infty$. В силу (2.2) существует $\tilde{N} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $S^{-1}x \in \mathcal{Y}'(\tilde{N})$. Тогда $x \in S\mathcal{Y}'(\tilde{N})$, что эквивалентно включению $x \in \mathcal{Y}(\tilde{N})$ в силу пункта 1 леммы 2.2. Согласно соотношениям (2.2) также верно включение $x \in \mathcal{Y}_\infty$. Тогда $S\mathcal{Y}'_\infty \subset \mathcal{Y}_\infty$.

Окончательно получаем, что $S\mathcal{Y}'_\infty = \mathcal{Y}_\infty$. Лемма 2.2 доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)},$$

при этом все собственные значения матрицы A_1 по модулю не меньше 1. Через $\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ обозначена проекция выпуклого компактного тела $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ на n_2 -мерное подпространство:

$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_2}.$$

$n_2 \times (n_1+n_2)$

Тогда для $(n_1 + n_2)$ -мерной системы (A, \mathcal{U}) справедливо равенство

$$\mathcal{Y}_\infty = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathcal{Y}_{2,\infty},$$

где $\mathcal{Y}_{2,\infty}$ – предельное множество достижимости системы (A_2, \mathcal{U}_2) .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Общую постановку вида (1.1) можно свести к частному случаю $0 \in \text{int } \mathcal{U}$ для класса управляемых систем.

Для произвольного $M \in \mathbb{N}$ введем обозначение

$$\mathcal{U}_M = \mathcal{U} + A\mathcal{U} + \dots + A^{M-1}\mathcal{U}.$$

Предельные множества достижимости (2.2) систем (A, \mathcal{U}) и (A^M, \mathcal{U}_M) совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.3. Поскольку \mathcal{U} ограничено, то существует выпуклое $\tilde{\mathcal{U}}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ такое, что

$$\mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{U}}_1 \times \mathcal{U}_2. \quad (2.3)$$

Если через $\tilde{\mathcal{Y}}_{1,\infty}$ обозначить предельное множество достижимости системы $(A_1, \tilde{\mathcal{U}}_1)$, то предельное множество достижимости системы $(A, \tilde{\mathcal{U}}_1 \times \mathcal{U}_2)$ в силу пункта 2 леммы 2.1 имеет вид $\tilde{\mathcal{Y}}_{1,\infty} \times \mathcal{Y}_{2,\infty}$. С учётом (2.3) $\mathcal{Y}_\infty \subset \tilde{\mathcal{Y}}_{1,\infty} \times \mathcal{Y}_{2,\infty} \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathcal{Y}_{2,\infty}$.

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathcal{Y}_{2,\infty}$. Поскольку $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, то существует $u_{\max} > 0$ такое, что

$$[-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1} \times \{0\} \subset \mathcal{U}. \quad (2.4)$$

Так как $x_2 \in \mathcal{Y}_{2,\infty}$, согласно (2.1) и (2.2) найдутся $N_2 \in \mathbb{N}$ и $u_2(0), \dots, u_2(N_2 - 1) \in \mathcal{U}_2$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{N_2} A_2^{N_2-k} u_2(k-1) = x_2.$$

По определению \mathcal{U}_2 существуют $u_1(0), \dots, u_1(N_2 - 1) \in \mathbb{R}^{n_1}$ такие, что

$$u(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix} \in \mathcal{U}, \quad k = \overline{0, N_2 - 1}.$$

Предположим, что $x_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ 0 \end{pmatrix}$, тогда

$$x(N_2) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N_1} A_1^{N_1-k} u_1(k-1) + A_1^{N_1} x_{0,1} \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, равенство $x(N_2) = x$ эквивалентно равенству

$$x_1 = \sum_{k=1}^{N_1} A_1^{N_1-k} u_1(k-1) + A_1^{N_1} x_{0,1},$$

что с учетом условия $\det A_1 \neq 0$ равносильно

$$x_{0,1} = A_1^{-N_1} x_1 - \sum_{k=1}^{N_1} A_1^{-k} u_1(k-1).$$

Таким образом, для доказательства включения $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathcal{Y}_{2,\infty} \subset \mathcal{Y}_\infty$ достаточно доказать, что $\begin{pmatrix} x_{0,1} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_\infty$, для чего требуется доказать с учетом (2.4) и (1.1), что $\mathcal{Y}_{1,\infty} = \mathbb{R}^{n_1}$, где $\mathcal{Y}_{1,\infty}$ – предельное множество достижимости системы $(A_1, [-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1})$.

При этом в силу невырожденности A_1 согласно лемме 1.7 для произвольного $N \in \mathbb{N}$ множество 0-управляемости (1.2) за N шагов системы $(A_1^{-1}, A_1^{-1}[-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1})$ имеет вид

$$\mathcal{X}_1(N) = - \sum_{k=1}^N \left(A_1^{-1} \right)^{-k} \left(A_1^{-1} [-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1} \right) = - \sum_{k=1}^N A_1^{k-1} [-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1}.$$

С другой стороны, в силу [28, лемма 1] множество достижимости за N шагов системы $(A_1, [-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1})$ имеет вид

$$\mathcal{Y}_1(N) = \sum_{k=0}^{N-1} A_1^k [-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1}.$$

Таким образом, множество 0-управляемости системы $(A_1^{-1}, A_1^{-1}[-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1})$ и множество достижимости системы $(A_1, [-u_{\max}; u_{\max}]^{n_1})$ за одинаковое число шагов совпадают, а следовательно, совпадают и их предельные аналоги $\mathcal{X}_{1,\infty}$ и $\mathcal{Y}_{1,\infty}$. Однако в силу леммы 1.3 $\mathcal{X}_{1,\infty} = \mathbb{R}^{n_1}$, так как все собственные значения A_1^{-1} не превосходят по модулю 1, будучи взаимнообратными собственным значениям матрицы A_1 [89, утверждение 1.1.7].

Лемма 2.3 полностью доказана.

Леммы 2.1, 2.2 и 2.3 определяют структуру предельного множества достижимости произвольной системы вида (1.1). Согласно лемме 2.3 каждое множество

\mathcal{Y}_∞ представляет собой цилиндрическое множество, ориентированное вдоль собственных и присоединенных векторов матрицы A , соответствующих собственным значениям, не меньшим 1 по модулю. Для перехода в жорданов базис матрицы A можно воспользоваться леммой 2.2. При этом процедура построения \mathcal{Y}_∞ в силу блочно-диагонального вида жордановой формы матрицы с учётом леммы 2.1 может быть сведена к построению аналогичных множеств для подсистем меньшей размерности с жордановыми клетками в качестве матриц.

2.3 Построение оценок предельных множеств достижимости

Рассмотрим метод построения оценок множества \mathcal{Y}_∞ , основанный на аппарате опорных полупространств и свойствах выпуклых множеств.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Для любой n -мерной системы (A, \mathcal{U}) вида (1.1) верно, что \mathcal{Y}_∞ – выпуклое множество.

Для предельных множеств 0-управляемости также гарантируется, что они являются открытыми и выпуклыми, что доказано в теореме 1.2. Однако при рассмотрении предельных множеств достижимости общие утверждения об их открытости или замкнутости не представляется возможными.

ПРИМЕР 2.1. Пусть в двухмерной системе (A, \mathcal{U}) параметры определяются следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = [-1; 1] \times [-1; 1].$$

Верно равенство $A^2 = O$, из которого для $N \geq 2$ получим

$$x(N) = u(N-1) + Au(N-2).$$

Следовательно, по определению (2.2) включения $x \in \mathcal{Y}_\infty$ и $x \in \mathcal{U} + A\mathcal{U}$ эквивалентны. Отсюда можно получить следующее представление

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_\infty = \mathcal{U} + A\mathcal{U} &= \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Окончательно, \mathcal{Y}_∞ замкнуто.

ПРИМЕР 2.2. Пусть в двухмерной системе (A, \mathcal{U}) параметры определяются следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = [-1; 1] \times [-1; 1].$$

Для любого $N \in \mathbb{N}$ и управления $\{u(k)\}_{k=0}^{N-1} \subset \mathcal{U}$ верно, что

$$x(N) = u(N-1) + Au(N-2) + \dots + A^{N-1}u(0) = \begin{pmatrix} u_1(N-1) \\ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k} u_2(N-k-1) \end{pmatrix},$$

$$|x_1(N)| \leq 1, \quad |x_2(N)| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^{N-1}} < 2.$$

В силу (2.2)

$$\mathcal{Y}_\infty \subset [-1; 1] \times (-2; 2).$$

С другой стороны, для любого $x = (x_1, x_2)^T \in [-1; 1] \times (-2; 2)$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такой, что

$$|x_2| \leq 2 - \frac{1}{2^{N-1}}.$$

Следовательно, для всех $k = \overline{0, N-1}$ допустимыми будут управляющие воздействия

$$u_2(k) = \frac{x_2}{2 - 2^{-N+1}} \in [-1; 1], \quad u_1(k) = x_1 \in [-1; 1].$$

Тогда

$$x(N) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k} \frac{x_2}{2 - 2^{-N+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_2}{2 - 2^{-N+1}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_2}{2 - 2^{-N+1}} (2 - 2^{-N+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Получили включение

$$[-1; 1] \times (-2; 2) \subset \mathcal{Y}_\infty.$$

Окончательно, справедливо представление

$$\mathcal{Y}_\infty = [-1; 1] \times (-2; 2),$$

т.е. предельное множество достижимости \mathcal{Y}_∞ в данном примере не является ни замкнутым, ни открытым.

ПРИМЕР 2.3. Пусть теперь $n = 1$ и в системе (A, \mathcal{U})

$$A = \frac{1}{2}, \quad \mathcal{U} = [-1; 1].$$

Повторяя рассуждения из примера 2.2 только для второй координаты, получим, что

$$\mathcal{Y}_\infty = (-2; 2).$$

Т.е. предельное множество достижимости \mathcal{Y}_∞ в данном примере является открытым.

В силу лемм 2.1, 2.2 и 2.3 задачу построения предельного множества достижимости можно рассматривать исключительно для систем, собственные значения матриц которых строго меньше 1. Поскольку в силу замечания 2.2 \mathcal{Y}_∞ выпукло, то его замыкание можно представить в виде пересечения всех опорных к нему полупространств [76, теорема 18.8]. Сформулируем в виде леммы 2.4 структуру опорного полупространства к \mathcal{Y}_∞ .

ЛЕММА 2.4. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго меньше 1, \mathcal{Y}_∞ определяется соотношениями (2.2).

Тогда для всех $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнены следующие соотношения:

$$1) \mathcal{Y}_\infty \subset \mathcal{H}_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (p, x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \max_{u_k \in \mathcal{U}} ((A^k)^T p, u_k) \right\};$$

$$2) x^* = \sum_{k=0}^{\infty} A^k u_k^* \in \text{cl } \mathcal{Y}_\infty \cap \partial \mathcal{H}_p, \text{ где } u_k^* = \arg \max_{u_k \in \mathcal{U}} ((A^k)^T p, u_k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.4.

Поскольку спектральный радиус матрицы $A < 1$, то существует $\|A\| = \alpha < 1$. Пусть $R = \max_{u \in \mathcal{U}} \|u\|$. Из определения (2.2) следует, что

$$\begin{aligned} \rho_H(\mathcal{Y}(N), \text{cl } \mathcal{Y}_\infty) &= \sup_{y \in \mathcal{Y}_\infty} \inf_{x \in \mathcal{Y}(N)} \|x - y\| = \\ &= \sup_{\substack{M \geq N+1 \\ u(0), \dots, u(M-1) \in \mathcal{U}}} \inf_{\tilde{u}(0), \dots, \tilde{u}(N-1) \in \mathcal{U}} \left\| \sum_{k=1}^N A^{-k} \tilde{u}(k) - \sum_{k=1}^M A^{-k} u(k) \right\| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{M \geq N+1 \\ u(0), \dots, u(M-1) \in \mathcal{U}}} \left\| \sum_{k=0}^{N-1} A^k u(k) - \sum_{k=0}^{M-1} A^k u(k) \right\| = \sup_{\substack{M \geq N+1 \\ u(0), \dots, u(M-1) \in \mathcal{U}}} \left\| \sum_{k=N}^{M-1} A^k u(k) \right\| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{M \geq N+1 \\ u(0), \dots, u(M-1) \in \mathcal{U}}} \sum_{k=N+1}^{M-1} \|A\|^k \|u(k)\| \leq \sum_{k=N}^{\infty} \alpha^k R = \frac{\alpha^N}{1-\alpha} R \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Тогда по [4, лемма 1.11.4] для опорных функций $s(p, \mathcal{Y}(N)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} s(p, \text{cl } \mathcal{Y}_\infty)$ поточечно. Тогда можно использовать [4, следствие 1.17.2], из которого следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $N \geq \tilde{N}$

$$\partial s(p, \mathcal{Y}(N)) \subset \partial s(p, \text{cl } \mathcal{Y}_\infty) + \mathcal{B}_\varepsilon(0). \quad (2.5)$$

По [4, теорема Моро-Рокафеллара 1.16.5], [28, лемма 1] и по определению субдифференциала для опорной функции

$$x_N^* = \sum_{k=0}^N A^k u_k^* \in \partial s(p, \mathcal{X}(N)).$$

Тогда с учетом (2.5)

$$x^* = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N^* \in \partial s(p, \text{cl } \mathcal{Y}_\infty).$$

Также из определения опорной точки и опорного вектора следует п.1.

Если матрица A не приведена к вещественной жордановой форме, то можно перейти в вещественный жорданов базис матрицы A . В данном базисе построить оценку предельного множества 0-управляемости и затем по лемме 2.2 получить оценку предельного множества 0-управляемости в первоначальном базисе.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго меньше 1, \mathcal{Y}_∞ определяется соотношениями (2.2).

Тогда для всех $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ выполнены следующие соотношения:

$$1) \mathcal{Y}_\infty \subset \mathcal{H}_{-p} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (p, x) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \min_{u_k \in \mathcal{U}} ((A^k)^T p, u_k) \right\};$$

$$2) x^* = \sum_{k=0}^{\infty} A^k u_k^* \in \text{cl } \mathcal{Y}_\infty \cap \partial \mathcal{H}_{-p}, \text{ где } u_k^* = \arg \min_{u_k \in \mathcal{U}} ((A^k)^T p, u_k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2.1. Для доказательства достаточно записать положения леммы 2.4 для вектора $-p$.

ЛЕММА 2.5. Пусть для n -мерной системы (A, \mathcal{U}) выполнено условие

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

введены обозначения $u_{i,\max} = \max_{u \in \mathcal{U}} u_i$, $u_{i,\min} = \min_{u \in \mathcal{U}} u_i$, $i = \overline{1, n}$.

Тогда

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in [x_{i,\min}; x_{i,\max}]\},$$

1) если $\lambda \geq 0$, то

$$x_{i,\min} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{u_{i+j,\min}}{(1-\lambda)^{j+1}},$$

$$x_{i,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{u_{i+j,\max}}{(1-\lambda)^{j+1}};$$

2) если $\lambda < 0$, то

$$x_{i,\min} = \sum_{j=0}^{n-i} \left(\frac{u_{i+j,\min} + u_{i+j,\max}}{2(1+|\lambda|)^{j+1}} - \frac{u_{i+j,\max} - u_{i+j,\min}}{2(1-|\lambda|)^{j+1}} \right),$$

$$x_{i,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \left(\frac{u_{i+j,\max} + u_{i+j,\min}}{2(1+|\lambda|)^{j+1}} + \frac{u_{i+j,\max} - u_{i+j,\min}}{2(1-|\lambda|)^{j+1}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.5. Пусть $p = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$, где 1 соответствует i -й координате вектора p . Пусть $k \geq n - 1$. Тогда

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \cdots & C_k^{m-1} \lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & \cdots & C_k^{m-2} \lambda^{k-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^k \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (A^k)^T p &= (0, \dots, 0, \lambda^k, C_k^1 \lambda^{k-1}, \dots, C_k^{n-i} \lambda^{k-n+i})^T, \\ ((A^k)^T p, u) &= \lambda^k u_i + C_k^1 \lambda^{k-1} u_{i+1} + C_k^2 \lambda^{k-2} u_{i+2} + \dots + C_k^{n-i} \lambda^{k-n+i} u_n = \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} C_k^j \lambda^{k-j} u_{j+i}. \end{aligned}$$

Пусть $k < n - 1$. Тогда

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \dots & C_k^k \lambda^{k-k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & \dots & C_k^{k-2} \lambda^{k-(k-1)} & C_k^k \lambda^{k-k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda^k \end{pmatrix},$$

$$(A^k)^T p = (0, \dots, 0, \lambda^k, C_k^1 \lambda^{k-1}, \dots, C_k^{k-1} \lambda, 1, 0, \dots, 0)^T,$$

$$((A^k)^T p, u) = \lambda^k u_i + C_k^1 \lambda^{k-1} u_{i+1} + C_k^2 \lambda^{k-2} u_{i+2} + \dots + C_k^k \lambda^{k-k} u_{i+k} = \sum_{j=0}^k C_k^j \lambda^{k-j} u_{j+i}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} ((A^k)^T p, u) &= \sum_{j=0}^{\min\{k, n-i\}} C_k^j \lambda^{k-j} u_{j+i}, \\ \max_{u \in \mathcal{U}} ((A^k)^T p, u) &\leq \sum_{j=0}^{\min\{k, n-i\}} C_k^j \max_{u_{j+i} \in [u_{j+i, \min}; u_{j+i, \max}]} \lambda^{k-j} u_{j+i} = \\ &= \begin{cases} \sum_{j=0}^{\min\{k, n-i\}} C_k^j \lambda^{k-j} u_{j+i, \max}, & \lambda \geq 0, \\ \sum_{j=0}^{\min\{k, n-i\}} C_k^j |\lambda|^{k-j} \max\{(-1)^{k-j} u_{j+i, \max}, (-1)^{k-j} u_{j+i, \min}\}, & \lambda < 0, \end{cases} \\ \min_{u \in \mathcal{U}} ((A^k)^T p, u) &\geq \sum_{j=0}^{\min\{k, n-i\}} C_k^j \min_{u_{j+i} \in [u_{j+i, \min}; u_{j+i, \max}]} \lambda^{k-j} u_{j+i} = \\ &= \begin{cases} \sum_{j=0}^{\min\{k, n-i\}} C_k^j \lambda^{k-j} u_{j+i, \min}, & \lambda \geq 0, \\ \sum_{j=0}^{\min\{k, n-i\}} C_k^j |\lambda|^{k-j} \min\{(-1)^{k-j} u_{j+i, \max}, (-1)^{k-j} u_{j+i, \min}\}, & \lambda < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда с учётом леммы 2.4 для любого $y \in \mathcal{Y}_\infty$ верны следующие неравенства.
Для $\lambda \geq 0$

$$x_i = (p, x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\min\{k, n-i\}} C_k^j \lambda^{k-j} u_{j+i, \max} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{u_{j+i, \max}}{(1-\lambda)^{j+1}} = x_{i, \max}.$$

Для $\lambda < 0$

$$\begin{aligned}
 x_i = (p, x) &\leq \sum_{j=0}^{\min\{k, n-i\}} \sum_{k=0}^{\infty} \max\{(-1)^{k-j} u_{i+j, \max}, (-1)^{k-j} u_{i+j, \min}\} C_{k+j}^j |\lambda|^{k-j} = \\
 &= \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{\infty} \max\{(-1)^k u_{i+j, \max}; (-1)^k u_{i+j, \min}\} C_{k+j}^j |\lambda|^k = \\
 &= \sum_{j=0}^{n-i} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_{i+j, \max} C_{2k+j}^j |\lambda|^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty} u_{i+j, \min} C_{2k+j+1}^j |\lambda|^{2k+1} \right) = \\
 &= \sum_{j=0}^{n-i} \left(u_{i+j, \max} \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k+j}^j |\lambda|^{2k} - u_{i+j, \min} \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k+j+1}^j |\lambda|^{2k+1} \right) = \\
 &= \sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{2} \left(u_{i+j, \max} \left(\frac{1}{(|\lambda| + 1)^{j+1}} + \frac{1}{(1 - |\lambda|)^{j+1}} \right) + u_{i+j, \min} \left(\frac{1}{(|\lambda| + 1)^{j+1}} - \frac{1}{(1 - |\lambda|)^{j+1}} \right) \right) = \\
 &= \sum_{j=0}^{n-i} \left(\frac{u_{i+j, \max} + u_{i+j, \min}}{2(1 + |\lambda|)^{j+1}} + \frac{u_{i+j, \max} - u_{i+j, \min}}{2(1 - |\lambda|)^{j+1}} \right) = x_{i, \max}
 \end{aligned}$$

Аналогично из следствия 2.1 получим, что $x_i \geq x_{i, \min}$.

Лемма 2.5 полностью доказана.

ЛЕММА 2.6. Пусть для $2n$ -мерной системы (A, \mathcal{U}) выполнено условие

$$A = \begin{pmatrix} rA_\varphi & I & \cdots & O \\ O & rA_\varphi & \ddots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & I \\ O & O & \cdots & rA_\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $r > 1$, $\varphi \in [0; 2\pi)$, введено обозначение $r_{i, \max} = \max_{u \in \mathcal{U}} \sqrt{u_{2i-1}^2 + u_{2i}^2}$, $i = \overline{1, n}$.

Тогда

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \bigcap_{i=1}^n \{x \in \mathbb{R}^{2n} : \sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2} \leq R_{i, \max}\}.$$

$$R_{i, \max} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{r_{i+j, \max}}{(1-r)^{j+1}},$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.6. Пусть $p = (0, 0, \dots, \tilde{p}^T, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{2n}$, $\tilde{p} = (p_1, p_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $p_1^2 + p_2^2 = 1$, где \tilde{p} соответствует $(2i-1)$ -й и $2i$ -й координатам вектора p . Тогда для $k \geq n-1$

$$A^k = \begin{pmatrix} r^k A_{k\varphi} & C_k^1 r^{k-1} A_{(k-1)\varphi} & \cdots & C_k^{n-1} r^{k-n+1} A_{(k-n+1)\varphi} \\ 0 & r^k A_{k\varphi} & \cdots & C_k^{n-2} r^{k-n+2} A_{(k-n+2)\varphi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r^k A_{k\varphi} \end{pmatrix},$$

$$(A^k)^T p = (0, \dots, r^k A_{-k\varphi} \tilde{p}, C_k^1 r^{k-1} A_{-(k-1)\varphi} \tilde{p}, \dots, C_k^{m-i} r^{k-n+i} A_{-(k-n+i)\varphi} \tilde{p})^T,$$

В случае $k < n - 1$

$$A^k = \begin{pmatrix} r^k A_{k\varphi} & C_k^1 r^{k-1} A_{(k-1)\varphi} & \dots & C_k^k r^{k-k} A_{(k-k)\varphi} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r^k A_{k\varphi} & \dots & C_{k-1}^1 r^{k-(k-1)} A_{(k-(k-1))\varphi} & C_k^k r^{k-k} A_{(k-k)\varphi} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & r^k A_{k\varphi} \end{pmatrix},$$

$$(A^k)^T p = (0, \dots, 0, r^k A_{-k\varphi} \tilde{p}, C_k^1 r^{k-1} A_{-(k-1)\varphi} \tilde{p}, \dots, C_k^{m-1} r^{k-(k-1)} A_{-(k-(k-1))\varphi} \tilde{p}, \tilde{p}, 0, \dots, 0)^T.$$

Пусть $u^i \in \mathbb{R}^2$, $i = \overline{1, n}$, $u = (u^1, \dots, u^n)^T \in \mathbb{R}^{2n}$. При $k \geq n - i$

$$\begin{aligned} ((A^k)^T p, u) &= r^k (A_{-k\varphi} \tilde{p}, u^i) + C_k^1 r^{k-1} (A_{-(k-1)\varphi} \tilde{p}, u^{i+1}) + \dots + \\ &\quad + C_k^{m-i} r^{k-n+i} (A_{-(k-n+i)\varphi} \tilde{p}, u^n) \leq r^k \|A_{-k\varphi} \tilde{p}\| \|u^i\| + \\ &\quad + C_k^1 r^{k-1} \|A_{-(k-1)\varphi} \tilde{p}\| \|u^{i+1}\| + \dots + C_k^{m-i} r^{k-n+i} \|A_{-(k-n+i)\varphi} \tilde{p}\| \|u^n\| \leq \\ &\leq r^k r_{i,\max} + C_k^1 r^{k-1} r_{i+1,\max} + C_k^2 r^{k-2} r_{i+2,\max} + \dots + C_k^{m-i} r^{k-n+i} r_{n,\max}. \end{aligned}$$

При $k < n - i$

$$\begin{aligned} ((A^k)^T p, u) &= r^k (A_{-k\varphi} \tilde{p}, u^i) + C_k^1 r^{k-1} (A_{-(k-1)\varphi} \tilde{p}, u^{i+1}) + \dots + \\ &\quad + C_k^k r^{k-k} (A_{-(k-k)\varphi} \tilde{p}, u^{i+k}) \leq r^k \|A_{-k\varphi} \tilde{p}\| \|u^i\| + C_k^1 r^{k-1} \|A_{-(k-1)\varphi} \tilde{p}\| \|u^{i+1}\| + \\ &\quad + \dots + C_k^k r^{k-k} \|A_{-(k-k)\varphi} \tilde{p}\| \|u^{i+k}\| \leq r^k r_{i,\max} + C_k^1 r^{k-1} r_{i+1,\max} + \dots + C_k^k r^{k-k} r_{i+k,\max}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \max_{u_k \in \mathcal{U}} ((A^k)^T p, u_k) \leq \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{\infty} r^k C_{k+j}^j r_{i+j,\max} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{r_{i+j,\max}}{(1-r)^{j+1}}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{Y}_{\infty} \subset \bigcap_{i=1}^n \left\{ x \in \mathbb{R}^{2n} \sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2} \leq R_{i,\max} \right\}.$$

Лемма 2.6 доказана.

Леммы 2.5 и 2.6 позволяют построить внешние оценки предельного множества достижимости системы (1.1) в направлении каждого из собственных и присоединенных векторов. Для построения соответствующих опорных гиперплоскостей, ограничивающих \mathcal{Y}_{∞} , достаточно вычислить собственные значения матрицы A . В случае, если полученных ограничений на \mathcal{Y}_{∞} недостаточно, можно воспользоваться леммой 2.4 для построения произвольной опорной гиперплоскости.

2.4 Внешняя оценка предельного множества достижимости на основе принципа сжимающих отображений

Рассмотрим случай, когда предельное множество достижимости \mathcal{Y}_∞ системы (A, \mathcal{U}) ограничено, что в силу леммы 2.4 эквивалентно тому, что все собственные значения матрицы A по модулю строго меньше 1. Справедлива следующая лемма, определяющая структуру множеств достижимости системы (A, \mathcal{U}) .

ЛЕММА 2.7. [28, лемма 1] Для всех $N \in \mathbb{N}$ множество достижимости (2.1) системы (A, \mathcal{U}) удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{Y}(N) = \sum_{k=0}^{N-1} A^k \mathcal{U},$$

$$\mathcal{Y}(N) = A\mathcal{Y}(N-1) + \mathcal{U}.$$

Если учесть, что \mathcal{U} – выпуклый компакт в \mathbb{R}^n , то каждое множество вида (2.1) также является выпуклым компактом, т.к. представимо в виде алгебраической суммы линейных преобразований компактов [37, раздел 3.8, свойство 3]. Тогда в метрическом пространстве (\mathbb{K}_n, ρ_H) можно определить отображение $T: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ следующего вида:

$$T(\mathcal{Y}) = A\mathcal{Y} + \mathcal{U}. \quad (2.6)$$

С учетом леммы 2.7 и соотношения (2.6), если отображение T либо $\underbrace{T \circ \dots \circ T}_M$ для некоторого $M \in \mathbb{N}$ являются сжимающими, предел последовательности множеств достижимости (2.1) в пространстве (\mathbb{K}_n, ρ_H) , может быть определен посредством принципа сжимающих отображений [39, раздел 4.1]. Также принцип сжимающих отображений позволяет оценить погрешность приближения предельной точки при помощи метода простой итерации. С другой стороны, предельная точка с точностью до замыкания в силу (2.2) должна совпадать с \mathcal{Y}_∞ . Сформулируем данный факт в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго меньше 1, семейство $\{\mathcal{Y}(N)\}_{N=0}^\infty$ определяется соотношением (2.1), множество \mathcal{Y}_∞ определяется соотношением (2.2), отображение T имеет вид (2.6).

Тогда

- 1) существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $T^M = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_M$ является сжимающим с некоторым коэффициентом сжатия $\alpha \in [0; 1)$;
- 2) $\text{cl } \mathcal{Y}_\infty$ – единственная неподвижная точка отображения T в пространстве (\mathbb{K}_n, ρ_H) ;
- 3) справедлива оценка

$$\rho_H(\text{cl } \mathcal{Y}_\infty, \mathcal{Y}(NM)) \leq \frac{\alpha^N}{1 - \alpha} \rho_H(\mathcal{Y}(M), \{0\}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Доказательство следует из теоремы 1.2 при замене A^{-1} на A и $(-A^{-1}\mathcal{U})$ на \mathcal{U} .

Значение коэффициента сжатия α из теоремы 2.2 вообще говоря зависит от выбора нормы в пространстве \mathbb{R}^n и, как следствие, от ассоциированной с ней операторной нормы матрицы A . Например, известны следующие оценки величины α при выборе различных норм (1.12) в \mathbb{R}^n [39, глава II, параграф 4, раздел 2]. Методы, позволяющие в общем случае определить, при каком значении $M \in \mathbb{N}$ отображение T^M окажется сжимающим, на данный момент неизвестны. Однако с учётом оценок (1.12) величина M может быть определена численно посредством последовательного вычисления α для различных значений $M \in \mathbb{N}$. Также выбор нормы в пространстве \mathbb{R}^n влияет на значение расстояния Хаусдорфа в \mathbb{K}_n , что в конечном счете определяет структуру внешних оценок множества \mathcal{Y}_∞ .

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть все собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ по модулю строго меньше 1, семейство $\{\mathcal{Y}(N)\}_{N=0}^\infty$ определяется соотношениями (2.1), множество \mathcal{Y}_∞ определяется соотношением (2.2), величина $M \in \mathbb{N}$ выбрана так, чтобы T^M являлось сжимающим отображением с коэффициентами сжатия $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_\infty \in [0; 1)$, которые ассоциированы с нормами $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ в пространстве \mathbb{R}^n соответственно. Тогда

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \mathcal{Y}(NM) + \operatorname{conv}\left\{\underbrace{(0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)}_i^T : r \in \{-R_1, R_1\}, i = \overline{0, n-1}\right\},$$

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \mathcal{Y}(NM) + \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq R_2\right\},$$

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \mathcal{Y}(NM) + \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=1, n} |x_i| \leq R_\infty\},$$

$$R_p = \frac{\alpha_p^N}{1 - \alpha_p^N} \max_{x \in \mathcal{Y}(M)} \|x\|_p, \quad p \in \{1, 2, \infty\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2.2. В силу пункта 3 теоремы 2.2

$$\rho_H(\operatorname{cl} \mathcal{Y}_\infty, \mathcal{Y}(NM)) \leq \frac{\alpha_p^N}{1 - \alpha_p^N} \rho_H(\mathcal{Y}(M), \{0\}) = R_p, \quad p \in \{1, 2, \infty\}.$$

Тогда в силу определения расстояния Хаусдорфа

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \operatorname{cl} \mathcal{Y}_\infty \subset \mathcal{Y}(NM) + \mathcal{B}_{R_p}(0),$$

где

$$\mathcal{B}_{R_1}(0) = \operatorname{conv}\left\{\underbrace{(0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)}_i^T : r \in \{-R_1, R_1\}, i = \overline{0, n-1}\right\},$$

$$\mathcal{B}_{R_2}(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq R_2\right\},$$

$$\mathcal{B}_{R_\infty}(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \leq R_\infty \right\}.$$

Следствие 2.2 доказано.

Следствие 2.2 позволяет построить внешние оценки множества \mathcal{Y}_∞ с любой наперед заданной точностью. В отличие от результатов раздела 2.3 данные оценки не являются касательными к предельному множеству достижимости и имеют весьма сложную структуру, поскольку представляют собой сумму по Минковскому различных выпуклых множеств. Для получения более точных оценок можно использовать оба подхода одновременно:

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \hat{\mathcal{Y}}_\infty^1 \cap \hat{\mathcal{Y}}_\infty^2,$$

где $\hat{\mathcal{Y}}_\infty^1$ – внешняя оценка \mathcal{Y}_∞ , построенная на основе лемм 2.4, 2.5, 2.6, $\hat{\mathcal{Y}}_\infty^2$ – внешняя оценка \mathcal{Y}_∞ , построенная согласно теореме 2.2.

2.5 Примеры

Продемонстрируем полученные в разделах 2.4 и 2.5 теоретические результаты на примере построения предельного множества достижимости для различных линейных дискретных систем вида (1.1).

ПРИМЕР 2.4. Пусть матрица системы $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

В качестве множества допустимых значений управления рассмотрим куб $\mathcal{U} = [-1; 1]^5$. Построим внешнюю оценку предельного множества достижимости системы (A, \mathcal{U}) . Матрица A представима в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & O \\ O & A_2 & O \\ O & O & A_3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = (2), \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

По лемме 2.3 для предельного множества достижимости системы (A, \mathcal{U}) справедливо равенство

$$\mathcal{Y}_\infty = \mathbb{R} \times \mathcal{Y}_{23, \infty},$$

где $\mathcal{Y}_{23, \infty}$ – предельное множество достижимости системы $(A_{23}, \mathcal{U}_{23})$,

$$A_{23} = \begin{pmatrix} A_2 & O \\ O & A_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_{23} = [-1; 1]^4.$$

Предельное множество достижимости $\mathcal{Y}_{23, \infty}$ по лемме 2.1 представимо в виде

$$\mathcal{Y}_{23, \infty} = \mathcal{Y}_{2, \infty} \times \mathcal{Y}_{3, \infty},$$

где $\mathcal{Y}_{2,\infty}$ – предельное множество достижимости подсистемы (A_2, \mathcal{U}_2) , $\mathcal{U}_2 = [-1; 1]^2$, $\mathcal{Y}_{3,\infty}$ – предельное множество достижимости подсистемы (A_3, \mathcal{U}_3) , $\mathcal{U}_3 = [-1; 1]^2$.

Рассмотрим подсистему (A_2, \mathcal{U}_2) . У матрицы A_2 существует единственное собственное значение $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ кратности 2. Тогда (A_2, \mathcal{U}_2) удовлетворяет условиям леммы 2.5. Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{2,\infty} &\subset \bigcap_{i=1}^2 \{x \in \mathbb{R}^2: x_i \in [x_{i,\min}; x_{i,\max}]\}, \\ x_{1,\min} &= \sum_{j=0}^{2-1} \left(\frac{u_{1+j,\min} + u_{1+j,\max}}{2(1+|\lambda|)^{j+1}} - \frac{u_{1+j,\max} - u_{1+j,\min}}{2(1-|\lambda|)^{j+1}} \right) = -6, \\ x_{1,\max} &= \sum_{j=0}^{2-1} \left(\frac{u_{1+j,\max} + u_{1+j,\min}}{2(1+|\lambda|)^{j+1}} + \frac{u_{1+j,\max} - u_{1+j,\min}}{2(1-|\lambda|)^{j+1}} \right) = 6, \\ x_{2,\min} &= \sum_{j=0}^{2-2} \left(\frac{u_{2+j,\min} + u_{2+j,\max}}{2(1+|\lambda|)^{j+1}} - \frac{u_{2+j,\max} - u_{2+j,\min}}{2(1-|\lambda|)^{j+1}} \right) = -2, \\ x_{2,\max} &= \sum_{j=0}^{2-2} \left(\frac{u_{2+j,\max} + u_{2+j,\min}}{2(1+|\lambda|)^{j+1}} + \frac{u_{2+j,\max} - u_{2+j,\min}}{2(1-|\lambda|)^{j+1}} \right) = 2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{Y}_{2,\infty} \subset \{x \in \mathbb{R}^2: x_1 \in [-6; 6]\} \cap \{x \in \mathbb{R}^2: x_2 \in [-2; 2]\} = [-6; 6] \times [-2; 2].$$

Рассмотрим подсистему (A_3, \mathcal{U}_3) . У матрицы A_3 существует два комплексно-сопряженных собственных значения $\lambda_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\mathbf{i}\right)$, $\lambda_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\mathbf{i}\right)$. Матрица A_3 представима в виде

$$A_3 = rA_\varphi = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

где $r = \frac{2}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Тогда по лемме 2.6

$$\mathcal{Y}_{3,\infty} \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^2: \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq R_{1,\max} \right\},$$

$$r_{1,\max} = \max_{u \in \mathcal{U}_3} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{2},$$

$$R_{1,\max} = \sum_{j=0}^{1-1} \frac{r_{1+j,\max}}{(1-r)^{j+1}} = \frac{r_{1,\max}}{(1-\frac{2}{3})} = 3\sqrt{2}.$$

Из этого следует, что $\mathcal{Y}_{3,\infty} \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^2: \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 3\sqrt{2} \right\}$.

Согласно леммам 2.1 и 2.3 предельное множество достижимости системы (A, \mathcal{U}) можно оценить следующим образом:

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \mathbb{R} \times [-6; 6] \times [-2; 2] \times \left\{ x \in \mathbb{R}^2: \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 3\sqrt{2} \right\}.$$

ПРИМЕР 2.5. Выберем следующие параметры систем:

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & -1 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}, \mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Построим для системы (A, \mathcal{U}) оценку предельного множества достижимости \mathcal{Y}_∞ согласно теореме 2.2. В качестве значения параметра, определяющего норму в \mathbb{R}^2 , выберем $p = 1$.

Тогда

$$\|A^3\| = \alpha_1 = 0.397,$$

т.е. $M = 3$. В соответствии с теоремой 2.2

$$\max_{x \in \mathcal{Y}(M)} \|x\|_1 = 6.18, \quad R_1(N) = \frac{(0.397)^N}{1 - 0.397} 6.18.$$

Построим внешнюю оценку \mathcal{Y}_∞ для $N = 5$.

$$\hat{\mathcal{Y}}_\infty = \mathcal{Y}(5 \cdot 3) + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} R_1(5) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R_1(5) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ R_1(5) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -R_1(5) \end{pmatrix} \right\}.$$

Оценка $\hat{\mathcal{Y}}_\infty$ для случая $N = 5$ изображена на рисунке 2.1.

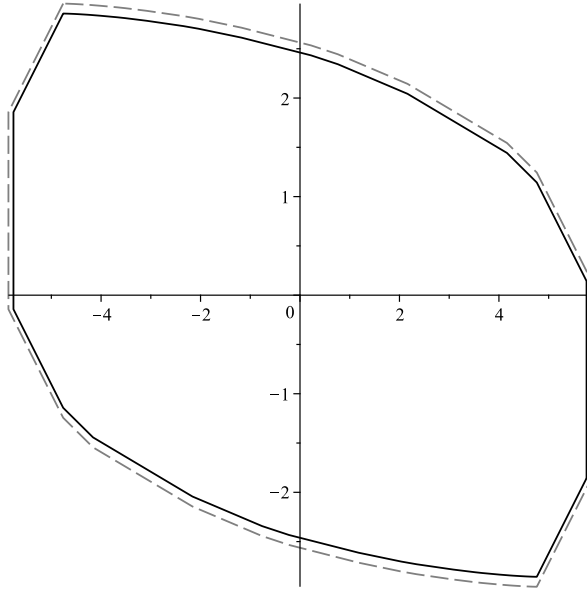


Рисунок 2.1. Сплошной линией обозначена внутренняя оценка предельного множества достижимости, т.е. $\mathcal{Y}(15)$, пунктирной линией обозначена внешняя оценка предельного множества достижимости для $p = 1$

Выберем $p = \infty$. Тогда

$$\|A^3\| = \alpha_\infty = 0.434,$$

т.е. $M = 3$. В соответствии с теоремой 2.2

$$\max_{x \in \mathcal{Y}(M)} \|x\|_\infty = 4.4; R_\infty(N) = \frac{(0.434)^N}{1 - 0.434} 4.4.$$

Построим внешнюю оценку для $N = 5$.

$$\hat{\mathcal{Y}}_\infty = \mathcal{Y}(5 \cdot 3) + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} R_\infty(5) \\ R_\infty(5) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R_\infty(5) \\ R_\infty(5) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R_\infty(5) \\ -R_\infty(5) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_\infty(5) \\ -R_\infty(5) \end{pmatrix} \right\}.$$

Оценка $\hat{\mathcal{Y}}_\infty$ для случая $N = 5$ представлена на рисунке 2.2.

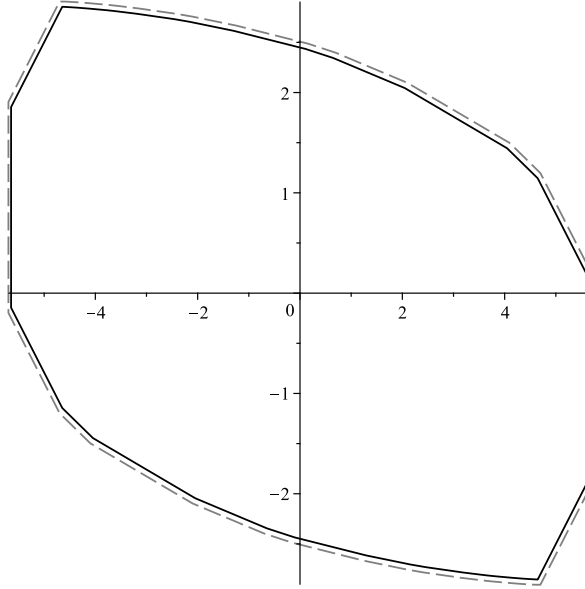


Рисунок 2.2. Сплошной линией обозначена внутренняя оценка предельного множества достижимости, т.е. $\mathcal{Y}(15)$, пунктирной линией обозначена внешняя оценка предельного множества достижимости для $p = \infty$

Приведем матрицу A к жордановой форме согласно лемме 2.2.

$$S = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1}\mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}.$$

Проведём декомпозицию системы по лемме 2.1. Будем рассматривать отдельно блоки $J_1 = 0.3$ и $J_2 = 0.4$, множество $S^{-1}\mathcal{U}$ оценим сверху множеством $[-2; 2] \times [-20; 20]$ и разобьём его на подблоки $\mathcal{U}_1 = [-2; 2]$ и $\mathcal{U}_2 = [-20; 20]$.

Для подсистемы (J_1, \mathcal{U}_1)

$$\mathcal{Y}'_{1,\infty} \subset \bigcap_{i=1}^1 \{x \in \mathbb{R}^1 : x_i \in [x_{i,\min}; x_{i,\max}]\}.$$

$$x_{1,\min} = -\frac{20}{7}, x_{1,\max} = \frac{20}{7}.$$

Для подсистемы (J_2, \mathcal{U}_2)

$$\mathcal{Y}'_{2,\infty} \subset \bigcap_{i=1}^1 \{x \in \mathbb{R}^1 : x_i \in [x_{i,\min}; x_{i,\max}]\}.$$

$$x_{1,\min} = -\frac{200}{6}, x_{1,\max} = \frac{200}{6}.$$

В итоге получаем $\mathcal{Y}'_{\infty} \subset [-\frac{20}{7}; \frac{20}{7}] \times [-\frac{200}{6}; \frac{200}{6}]$. Тогда оценка предельного множества достижимости исходной системы

$$\mathcal{Y}_{\infty} \subset S \left[-\frac{20}{7}; \frac{20}{7} \right] \times \left[-\frac{200}{6}; \frac{200}{6} \right] = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1300}{21} \\ \frac{20}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{100}{21} \\ \frac{20}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1300}{21} \\ -\frac{20}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{100}{21} \\ -\frac{20}{7} \end{pmatrix} \right\}$$

Результаты аппроксимации изображены на рисунке 2.3.

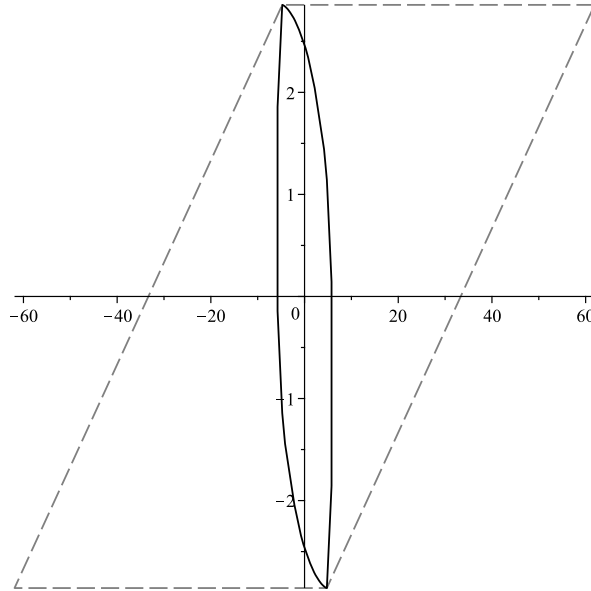


Рисунок 2.3. Сплошной линией обозначена внутренняя оценка предельного множества достижимости, т.е. $\mathcal{Y}(15)$, штриховой линией обозначена внешняя оценка предельного множества достижимости на основе метода опорных гиперплоскостей.

ПРИМЕР 2.6. Рассмотрим трехмерную систему (A, \mathcal{U}) , где

$$A = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 1 \\ 0 & -1.66 & 0 \\ 0 & 0 & 0.14 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Построим для системы (A, \mathcal{U}) оценку предельного множества достижимости \mathcal{Y}_∞ согласно теореме 2.2. В качестве значения параметра, определяющего норму в \mathbb{R}^3 , выберем $p = 1$. Тогда

$$\|A\| = \alpha_1 = 0.25, \quad M = 1, \quad \max_{x \in \mathcal{Y}(M)} \|x\|_1 = 11, \quad R_1(N) = \frac{(0.25)^N}{1 - 0.25} 11.$$

Построим внешнюю оценку \mathcal{Y}_∞ для $N = 3$:

$$\hat{\mathcal{Y}}_\infty = \mathcal{Y}(3) + \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq R_1(3)\}.$$

Оценка $\hat{\mathcal{Y}}_\infty$ для случая $N = 3$ представлена на рисунке 2.4. Выберем $p = \infty$. Тогда

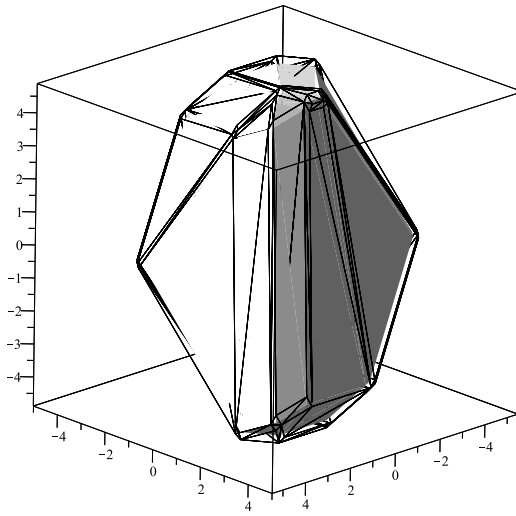


Рисунок 2.4. В виде полиэдра обозначена внутренняя оценка предельного множества достижимости $\mathcal{Y}(3)$, сплошной линией обозначена внешняя оценка предельного множества достижимости для $p = 1$

$$\|A\| = \alpha_\infty = 0.25, \quad M = 1, \quad \max_{x \in \mathcal{X}(M)} \|x\|_\infty = 4, \quad R_\infty(N) = \frac{(0.25)^N}{1 - 0.25} 4.$$

Построим внешнюю оценку \mathcal{Y}_∞ для $N = 3$.

$$\hat{\mathcal{Y}}_\infty = \mathcal{Y}(3) + \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \max_{i=1,3} |x_i| \leq R_\infty(3) \right\}.$$

Оценка $\hat{\mathcal{Y}}_\infty$ для случая $N = 3$ представлена на рисунке 2.5.

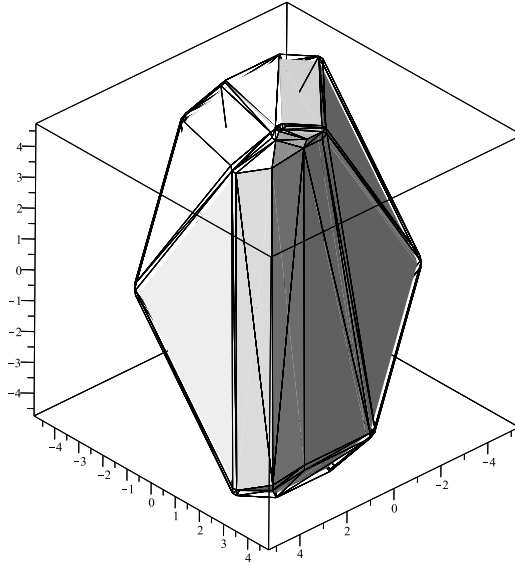


Рисунок 2.5. В виде полиэдра обозначена внутренняя оценка предельного множества достижимости $\mathcal{Y}(3)$, сплошной линией обозначена внешняя оценка предельного множества достижимости для $p = \infty$.

2.6 Выводы по главе 2

1. Разработан подход к построению предельных множеств достижимости для линейных дискретных систем с ограниченным управлением. Приведено теоретическое обоснование возможности декомпозиции исходной системы на подсистемы меньшей размерности с использованием жорданова базиса матрицы системы (леммы 2.1-2.3).

2. Доказана выпуклость предельных множеств достижимости (теорема 2.2), что позволило применить методы выпуклого анализа для их исследования. Разработаны явные формулы для построения опорных гиперплоскостей, ограничивающих предельные множества (леммы 2.4-2.6).

3. Предложен метод внешнего оценивания предельных множеств достижимости на основе принципа сжимающих отображений (теоремы 2.2 и 2.2). Метод позволяет получать оценки с любой наперед заданной точностью в различных нормах.

4. Теоретические результаты проиллюстрированы на примерах.

Основные результаты главы 2 опубликованы в [148, 150, 153, 155].

Глава 3. Построение внешних оценок предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных почти периодических дискретных систем

Целью данной главы является разработка метода построения внешних оценок предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных почти периодических дискретных систем. Рассматривается частный случай системы, рассмотренной в главах 1 и 2.

Основные разделы главы организованы следующим образом:

- В разделе 3.1 описывается исследуемая система управления и производится постановка задачи.
- Раздел 3.2 посвящен явному представлению предельных множеств 0-управляемости и предельных множеств достижимости для периодических систем.
- В разделе 3.3 представлен подход к внешнему оцениванию предельных множеств 0-управляемости и достижимости почти периодических систем на основе суммирования предельных множеств периодических систем и погрешности.
- Раздел 3.4 рассматривает аппроксимационную задачу выбора оптимального значения параметра, позволяющего определить наиболее точную внешнюю оценку при ограничениях на вычислительные ресурсы.
- В разделе 3.5 сформулированы выводы по главе 3.

3.1 Постановка задачи

Рассматривается n -мерная линейная автономная дискретная система управления (A, \mathcal{U}) с ограниченным управлением вида (1.1). Предполагается, что $0 \in \text{int } \mathcal{U}$ и все собственные значения A являются комплексно-сопряженными, т.е. $n = 2m$, существуют невырожденная матрица $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и числа $r_1, \dots, r_m > 0$, $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in [0; 2\pi)$ такие, что

$$A = S \begin{pmatrix} r_1 A_{\varphi_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_m A_{\varphi_m} \end{pmatrix} S^{-1}, \quad A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Термин почти периодическая применительно к системе (1.1) подразумевает под собой существование разложения (3.1) в том смысле, что свободное движение системы (1.1) с любой наперед заданной точностью может быть приближено периодической функцией, что обусловлено действием матриц поворота A_{φ}

на вектор состояния. При этом разложение (3.1) не предполагает, что все собственные значения A должны быть существенно комплексными. При $\varphi \in \{0, \pi\}$ соответствующие собственные значения $re^{\pm i\varphi}$ являются действительными.

Для системы (1.1) решается задача построения и оценивания предельных множеств достижимости \mathcal{Y}_∞ и 0-управляемости \mathcal{X}_∞ в случае, если данные множества являются ограниченными (1.4) и (2.4).

3.2 Предельные множества 0-управляемости и достижимости для $n = 2$

Рассмотрим базовый случай двумерных систем, к которому можно будет свести систему (1.1), удовлетворяющую условию (3.1), при помощи декомпозиции. Результаты данного раздела являются, с одной стороны, обобщением работы [112], с другой стороны, продолжают исследования предыдущих глав, где множества (2.2) и (1.3) рассматриваются как неподвижные точки некоторого сжимающего отображения в метрическом пространстве компактов (\mathbb{K}_n, ρ_H) .

Рассмотрим случай, когда собственные значения матрицы A удовлетворяют следующему условию:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= re^{\pm i\varphi} \in \mathbb{C}, \\ r > 0, \varphi &= 2\pi \frac{K'}{K''}, \quad K' \in \mathbb{Z}, \quad K'' \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

На основе идей, заложенных в [112], построим явное описание предельных множеств 0-управляемости \mathcal{X}_∞ и достижимости \mathcal{Y}_∞ .

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $n = 2$ и собственные значения матрицы A системы (1.1) удовлетворяют условию (3.2). Тогда*

1) *если $0 < r < 1$, то*

$$\mathcal{Y}_\infty = \frac{1}{1 - r^{K''}} \operatorname{int} \sum_{k=0}^{K''-1} A^k \mathcal{U} = \frac{1}{1 - r^{K''}} \operatorname{int} \mathcal{Y}(K''),$$

2) *если $r > 1$, то*

$$\mathcal{X}_\infty = \frac{-1}{1 - r^{-K''}} \operatorname{int} \sum_{k=1}^{K''} A^{-k} \mathcal{U} = \frac{1}{1 - r^{-K''}} \operatorname{int} \mathcal{X}(K'').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Для произвольного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верны соотношения

$$\begin{aligned} A^{kK''} &= r^{kK''} SA_{\varphi kK''} S^{-1} = r^{kK''} SA_{2\pi kK'} S^{-1} = \\ &= r^{kK''} S \begin{pmatrix} \cos(2\pi kK') & \sin(2\pi kK') \\ -\sin(2\pi kK') & \cos(2\pi kK') \end{pmatrix} S^{-1} = r^{kK''} S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} = r^{kK''} I. \end{aligned}$$

Из леммы 2.7 следует, что $\mathcal{Y}(N) \subset \mathcal{Y}(N+1)$. Тогда

$$\mathcal{Y}_\infty = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}(N) = \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{N-1} \mathcal{Y}(NK'' + k) = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{Y}(NK'').$$

Рассмотрим каждое множество $\mathcal{Y}(NK'')$ по отдельности. Согласно лемме 2.7

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(NK'') &= (\mathcal{U} + \dots + A^{K''-1}\mathcal{U}) + \dots + (A^{(N-1)K''}\mathcal{U} + \dots + A^{NK''-1}\mathcal{U}) = \\ &= (\mathcal{U} + \dots + A^{K''-1}\mathcal{U}) + A^{K''}(\mathcal{U} + \dots + A^{K''-1}\mathcal{U}) + \dots + A^{(N-1)K''}(\mathcal{U} + \dots + A^{K''-1}\mathcal{U}) = \\ &= \mathcal{Y}(K'') + r^{K''}I\mathcal{Y}(K'') + \dots + r^{(N-1)K''}I\mathcal{Y}(K'') = \\ &= (1 + r^{K''} + r^{2K''} + \dots + r^{(N-1)K''})\mathcal{Y}(K'') = \mathcal{Y}(K'') \frac{1 - r^{K''N}}{1 - r^{K''}}. \end{aligned}$$

Пусть $x \in \text{int} \frac{1}{1-r^{K''}}\mathcal{Y}(K'')$. Тогда существует $\alpha > 1$ такой, что

$$x \in \text{int} \frac{1}{\alpha(1-r^{K''})}\mathcal{Y}(K''). \quad (3.3)$$

Поскольку $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1-r^{K''N}}{1-r^{K''}} = \frac{1}{1-r^{K''}}$, то для $\varepsilon = \frac{1}{1-r^{K''}} - \frac{1}{\alpha(1-r^{K''})} > 0$ существует $\tilde{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $N \geq \tilde{N}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1-r^{K''}} - \frac{1-r^{K''N}}{1-r^{K''}} \right| &< \varepsilon, \\ \frac{1}{1-r^{K''}} - \frac{1-r^{K''N}}{1-r^{K''}} &< \frac{1}{1-r^{K''}} - \frac{1}{\alpha(1-r^{K''})}, \\ \frac{1-r^{K''N}}{1-r^{K''}} &> \frac{1}{\alpha(1-r^{K''})}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.3), (3.4) и выпуклости $\mathcal{Y}(K'')$ следует, что

$$x \in \text{int} \frac{1}{\alpha(1-r^{K''})}\mathcal{Y}(K'') \subset \text{int} \frac{1-r^{K''N}}{1-r^{K''}}\mathcal{Y}(K'') = \text{int} \mathcal{Y}(NK'') \subset \mathcal{Y}_\infty.$$

Если $x \notin \text{int} \frac{1}{(1-r^{K''})}\mathcal{Y}(K'')$, то для любого $N \in \mathbb{N}$

$$x \notin \frac{1-r^{K''N}}{1-r^{K''}}\mathcal{Y}(K'') = \mathcal{Y}(NK''), \quad x \notin \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{Y}(NK'') = \mathcal{Y}_\infty.$$

Окончательно получаем равенство

$$\mathcal{Y}_\infty = \text{int} \frac{1}{1-r^{K''}}\mathcal{Y}(K'').$$

Пункт 1 теоремы 3.1 доказан.

Согласно леммам 1.7 и 2.7, если $\det A \neq 0$, то множества достижимости (2.1) системы $(A^{-1}, -A^{-1}\mathcal{U})$ в точности совпадают с множествами 0-управляемости (1.2) исходной системы (A, \mathcal{U}) . Учтём, что собственные значения матрицы A^{-1} взаимно-обратны собственным значениям матрицы A , и в силу пункта 1 получим

$$\mathcal{X}_\infty = \frac{1}{1 - (r^{-1})^{K''}} \operatorname{int} \sum_{k=0}^{K''-1} (A^{-1})^k (-A^{-1}\mathcal{U}),$$

что эквивалентно пункту 2 теоремы 3.1.

Теорема 3.1 полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $n = 2$ и собственные значения матрицы A системы (1.1) удовлетворяют условию (3.2), верно представление

$$\mathcal{U} = \operatorname{conv}\{u^1, \dots, u^M\}.$$

Тогда

1) если $0 < r < 1$, то

$$\mathcal{Y}_\infty = \operatorname{int} \operatorname{conv} \left\{ \frac{1}{1 - r^{K''}} \sum_{k=0}^{K''-1} A^k u^{j_k}, j_k = \overline{1, M}, k = \overline{1, K''} \right\};$$

2) если $r > 1$, то

$$\mathcal{X}_\infty = \operatorname{int} \operatorname{conv} \left\{ \frac{-1}{1 - r^{-K''}} \sum_{k=1}^{K''} A^{-k} u^{j_k}, j_k = \overline{1, M}, k = \overline{1, K''} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 3.1. Доказательство следует непосредственно из теоремы 3.1 и следующих формул [76, теорема 19.3, следствие 19.3.2]:

$$A \operatorname{conv}\{u^1, \dots, u^M\} = \operatorname{conv}\{Au^1, \dots, Au^M\},$$

$$\operatorname{conv}\{u^1, \dots, u^M\} + \operatorname{conv}\{x^1, \dots, x^N\} = \operatorname{conv}\{u^i + x^j : i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}\}.$$

Хотя результаты теоремы 3.1 применимы только для случая (3.2), можно на основе данной теоремы, используя свойства сжимающих отображений, в более общем случае получить сколь угодно точные оценки множеств \mathcal{Y}_∞ и \mathcal{X}_∞ .

Для произвольной матрицы $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ обозначим через $\|S\|_2$ операторную норму S :

$$\|S\|_2 = \max_{\|x\| \leq 1} \|Sx\|.$$

ЛЕММА 3.1. Пусть система $n = 2$, $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ и $\det S \neq 0$, для любого $\varphi \in [0; 2\pi)$ через $\mathcal{Y}_\infty(\varphi)$ и $\mathcal{X}_\infty(\varphi)$ обозначены предельные множества достижимости (2.2) и θ -управляемости (1.3) соответственно системы $(SrA_\varphi S^{-1}, \mathcal{U})$.

Тогда для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in [0; 2\pi)$

1) если $0 < r < 1$, то

$$\rho_H(\text{cl } \mathcal{Y}_\infty(\varphi_1), \text{cl } \mathcal{Y}_\infty(\varphi_2)) \leq \frac{2r\|S\|_2}{1-r} \left| \sin\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \right| \max_{x \in \text{cl } S^{-1}\mathcal{Y}_\infty(\varphi_2)} \|x\|;$$

2) если $r > 1$, то

$$\rho_H(\text{cl } \mathcal{X}_\infty(\varphi_1), \text{cl } \mathcal{X}_\infty(\varphi_2)) \leq \frac{2\|S\|_2}{r-1} \left| \sin\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \right| \left(\max_{x \in \text{cl } S^{-1}\mathcal{X}_\infty(\varphi_2)} \|x\| + \max_{u \in S^{-1}\mathcal{U}} \|u\| \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. 1. Рассмотрим вспомогательные неравенства. Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathbb{K}_n$. Тогда верны соотношения

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2} \inf_{u \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2} \|x - u\| &= \sup_{\substack{x_1 \in \mathcal{X}_1 \\ x_2 \in \mathcal{X}_2}} \inf_{\substack{u_1 \in \mathcal{U}_1 \\ u_2 \in \mathcal{U}_2}} \|x_1 + x_2 - u_1 - u_2\| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{x_1 \in \mathcal{X}_1 \\ x_2 \in \mathcal{X}_2}} \left(\inf_{u_1 \in \mathcal{U}_1} \|x_1 - u_1\| + \inf_{u_2 \in \mathcal{U}_2} \|x_2 - u_2\| \right) = \\ &= \sup_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \inf_{u_1 \in \mathcal{U}_1} \|x_1 - u_1\| + \sup_{x_2 \in \mathcal{X}_2} \inf_{u_2 \in \mathcal{U}_2} \|x_2 - u_2\|. \end{aligned}$$

Отсюда с учётом определения расстояния Хаусдорфа следует неравенство

$$\rho_H(\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2, \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2) \leq \rho_H(\mathcal{X}_1, \mathcal{U}_1) + \rho_H(\mathcal{X}_2, \mathcal{U}_2). \quad (3.5)$$

Пусть $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{X}} \|A_{\varphi_1} x - A_{\varphi_2} y\| &\leq \sup_{x \in \mathcal{X}} \|A_{\varphi_1} x - A_{\varphi_2} x\| = \\ &= \max_{x \in \mathcal{X}} \left(((\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)x_1 + (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)x_2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + ((\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)x_2 + (-\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)x_1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \max_{x \in \mathcal{X}} \|x\| \sqrt{2 - 2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \max_{x \in \mathcal{X}} \|x\| \sqrt{4\sin^2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)} = \\ &= 2 \left| \sin\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \right| \max_{x \in \mathcal{X}} \|x\|. \end{aligned}$$

Отсюда с учётом определения расстояния Хаусдорфа

$$\rho_H(A_{\varphi_1}\mathcal{X}, A_{\varphi_2}\mathcal{X}) \leq 2 \left| \sin\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \right| \max_{x \in \mathcal{X}} \|x\|. \quad (3.6)$$

Рассмотрим случай $r < 1$ и отображение $T_\varphi : \mathbb{K}_2 \rightarrow \mathbb{K}_2$:

$$T_\varphi(\mathcal{Y}) = rA_\varphi\mathcal{Y} + S^{-1}\mathcal{U}.$$

В силу теоремы 2.2 $T_\varphi(\mathcal{Y})$ – сжимающее отображение с коэффициентом сжатия r , а его неподвижной точкой является $\text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi)$ – замыкание предельного множества достижимости системы $(rA_\varphi, S^{-1}\mathcal{U})$. Тогда согласно методу простой итерации [5, теорема, §1, гл. VII]. Для любых $\mathcal{Y} \in \mathbb{K}_2$ и $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верны оценки

$$\rho_H(\text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi), T_\varphi^{(m)}(\mathcal{Y})) \leq \frac{r^m}{1-r} \rho_H(\mathcal{Y}, T_\varphi(\mathcal{Y})). \quad (3.7)$$

Положим $\varphi = \varphi_1, m = 0, \mathcal{Y} = \text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2)$ и получим соотношения

$$\begin{aligned} \rho_H(\text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_1), \text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2)) &\leq \frac{r^0}{1-r} \rho_H(T_{\varphi_1}(\text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2)), \text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2)) = \\ &= \frac{1}{1-r} \rho_H(T_{\varphi_1}(\text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2)), T_{\varphi_2}(\text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2))) = \\ &= \frac{1}{1-r} \rho_H(rA_{\varphi_1} \text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2) + S^{-1}\mathcal{U}, rA_{\varphi_2} \text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2) + S^{-1}\mathcal{U}) \stackrel{(3.5)}{\leq} \\ &\leq \frac{1}{1-r} \rho_H(rA_{\varphi_1} \text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2), rA_{\varphi_2} \text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2)) + \frac{1}{1-r} \rho_H(S^{-1}\mathcal{U}, S^{-1}\mathcal{U}) = \\ &= \frac{r}{1-r} \rho_H(rA_{\varphi_1} \text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2), rA_{\varphi_2} \text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2)) \stackrel{(3.6)}{\leq} \\ &\leq \frac{2r}{1-r} \left| \sin \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \right| \max_{x \in \text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2)} \|x\|. \end{aligned}$$

Учтём, что с учетом леммы 2.2 верно равенство $\mathcal{Y}_\infty(\varphi) = S\tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi)$, окончательно получим

$$\begin{aligned} \rho_H(\text{cl } \mathcal{Y}_\infty(\varphi_1), \text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2)) &= \rho_H(\text{cl } S\tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_1), \text{cl } S\tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2)) \leq \\ &\leq \|S\|_2 \rho_H(\text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_1), \text{cl } \tilde{\mathcal{Y}}_\infty(\varphi_2)) \leq \|S\|_2 \frac{2r}{1-r} \left| \sin \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \right| \max_{x \in \text{cl } S^{-1}\mathcal{Y}_\infty(\varphi_2)} \|x\|. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $r > 1$ и отображение $F_\varphi : \mathbb{K}_2 \rightarrow \mathbb{K}_2$:

$$F_\varphi(\mathcal{X}) = r^{-1}A_{-\varphi}\mathcal{X} + (-r^{-1}A_{-\varphi}S^{-1}\mathcal{U}).$$

В силу теоремы 1.2 $F_\varphi(\mathcal{X})$ – сжимающее отображение с коэффициентом сжатия r^{-1} , а его неподвижной точкой является $\text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi)$ – замыкание предельного множества 0-управляемости $(rA_\varphi, S^{-1}\mathcal{U})$. Тогда согласно методу простой итерации [5, теорема, §1, гл. VII]. Для любых $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_2$ и $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верны оценки

$$\rho_H(\text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi), F_\varphi^{(m)}(\mathcal{X})) \leq \frac{(r^{-1})^m}{1-(r^{-1})} \rho_H(\mathcal{X}, F_\varphi(\mathcal{X})). \quad (3.8)$$

Положим $\varphi = \varphi_1, m = 0, \mathcal{X} = \text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2)$ и получим соотношения

$$\begin{aligned}
 \rho_H(\text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_1), \text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2)) &\leq \frac{(r^{-1})^0}{1 - (r^{-1})} \rho_H(F_{\varphi_1}(\text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2)), \text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2)) = \\
 &= \frac{1}{1 - (r^{-1})} \rho_H(F_{\varphi_1}(\text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2)), F_{\varphi_2}(\text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2))) = \\
 &= \frac{1}{1 - (r^{-1})} \rho_H(r^{-1} A_{-\varphi_1} \text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2) + \\
 &+ (-r^{-1} A_{-\varphi_1} S^{-1} \mathcal{U}), r^{-1} A_{-\varphi_2} \text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2) + (-r^{-1} A_{-\varphi_2} S^{-1} \mathcal{U})) \stackrel{(3.5)}{\leq} \\
 &\leq \frac{1}{1 - (r^{-1})} \rho_H(r^{-1} A_{-\varphi_1} \text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2), r^{-1} A_{-\varphi_2} \text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2)) + \\
 &+ \frac{1}{1 - (r^{-1})} \rho_H(-r^{-1} A_{-\varphi_1} S^{-1} \mathcal{U}, -r^{-1} A_{-\varphi_2} S^{-1} \mathcal{U}) = \\
 &= \frac{r^{-1}}{1 - (r^{-1})} \rho_H(A_{-\varphi_1} \text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2), A_{-\varphi_2} \text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2)) + \\
 &+ \frac{r^{-1}}{1 - (r^{-1})} \rho_H(-A_{-\varphi_1} S^{-1} \mathcal{U}, -A_{-\varphi_2} S^{-1} \mathcal{U}) \stackrel{(3.6)}{\leq} \\
 &\leq \frac{2}{r - 1} \left| \sin \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \right| \left(\max_{x \in \text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2)} \|x\| + \max_{u \in S^{-1} \mathcal{U}} \|u\| \right).
 \end{aligned}$$

Учтём, что в силу леммы 1.2 верно равенство $\mathcal{X}_\infty(\varphi) = S \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi)$, и окончательно получим

$$\begin{aligned}
 \rho_H(\text{cl } \mathcal{X}_\infty(\varphi_1), \text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2)) &= \rho_H(\text{cl } S \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_1), \text{cl } S \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2)) \leq \\
 \leq \|S\|_2 \rho_H(\text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_1), \text{cl } \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2)) &\leq \|S\|_2 \frac{2}{r - 1} \left| \sin \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \right| \left(\max_{x \in \text{cl } S^{-1} \tilde{\mathcal{X}}_\infty(\varphi_2)} \|x\| + \max_{u \in S^{-1} \mathcal{U}} \|u\| \right).
 \end{aligned}$$

Лемма 3.1 доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть для некоторых $r > 0, \varphi \in [0; 2\pi)$ и $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ матрица A системы (1.1) допускает разложение

$$A = S r A_\varphi S^{-1},$$

$\hat{\varphi} \in [0; 2\pi)$ удовлетворяет условию

$$\hat{\varphi} = 2\pi \frac{K'}{K''}, \quad K' \in \mathbb{Z}, \quad K'' \in \mathbb{N}.$$

Тогда

1) если $r < 1$, то

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_\infty &\subset \hat{\mathcal{Y}}_\infty + \mathcal{B}_{R_Y}(0), \\ \hat{\mathcal{Y}}_\infty &= \frac{1}{1-r^{K''}} \sum_{k=0}^{K''-1} Sr^k A_{k\hat{\varphi}} S^{-1} \mathcal{U}, \\ R_Y &= \frac{2r\|S\|_2}{1-r} \left| \sin \left(\frac{\varphi - \hat{\varphi}}{2} \right) \right| \max_{y \in S^{-1}\hat{\mathcal{Y}}_\infty} \|y\|,\end{aligned}$$

2) если $r > 1$, то

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_\infty &\subset \hat{\mathcal{X}}_\infty + \mathcal{B}_{R_X}(0), \\ \hat{\mathcal{X}}_\infty &= \frac{-1}{1-r^{-K''}} \sum_{k=1}^{K''} Sr^{-k} A_{-k\hat{\varphi}} S^{-1} \mathcal{U}, \\ R_X &= \frac{2\|S\|_2}{r-1} \left| \sin \left(\frac{\varphi - \hat{\varphi}}{2} \right) \right| \left(\max_{x \in S^{-1}\hat{\mathcal{X}}_\infty} \|x\| + \max_{u \in S^{-1}\mathcal{U}} \|u\| \right).\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. 1. В случае $r < 1$ в силу теоремы 3.1 $\text{int}\hat{\mathcal{Y}}_\infty$ является предельным множеством достижимости системы $(SrA_{\hat{\varphi}}S^{-1}, \mathcal{U})$. Тогда согласно пункту 1 леммы 3.1:

$$\rho_H(\text{cl}\mathcal{Y}_\infty, \hat{\mathcal{Y}}_\infty) \leq \frac{2r\|S\|_2}{1-r} \left| \sin \left(\frac{\hat{\varphi} - \varphi}{2} \right) \right| \max_{x \in S^{-1}\hat{\mathcal{Y}}_\infty} \|x\| = R_Y.$$

Из определения метрики Хаусдорфа следует следующее включение:

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \mathcal{B}_{R_Y}(0) + \hat{\mathcal{Y}}_\infty.$$

2. В случае $r > 1$ в силу теоремы 3.1 $\text{int}\hat{\mathcal{X}}_\infty$ является предельным множеством 0-управляемости системы $(SrA_{\hat{\varphi}}S^{-1}, \mathcal{U})$. Тогда согласно пункту 1 леммы 3.1:

$$\rho_H(\text{cl}\mathcal{X}_\infty, \hat{\mathcal{X}}_\infty) \leq \frac{2\|S\|_2}{r-1} \left| \sin \left(\frac{\hat{\varphi} - \varphi}{2} \right) \right| \left(\max_{x \in S^{-1}\hat{\mathcal{X}}_\infty} \|x\| + \max_{u \in S^{-1}\mathcal{U}} \|u\| \right) = R_X.$$

Из определения метрики Хаусдорфа следует следующее включение:

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{B}_{R_X}(0) + \hat{\mathcal{X}}_\infty.$$

Теорема 3.2 доказана.

При помощи теоремы 3.1 множества \mathcal{Y}_∞ и \mathcal{X}_∞ могут быть построены в явном виде только в случае (3.2). Однако теорема 3.2 позволяет построить сколь угодно точные внешние оценки данных множеств.

3.3 Оценки предельных множеств 0-управляемости и достижимости в общем случае

Продемонстрируем, как при помощи декомпозиции и результатов раздела 3.2 можно построить внешнюю оценку предельных множеств достижимости и 0-управляемости для системы (1.1) с условием (3.1) в случае, если они ограничены. Здесь существенным будет переход к вещественной жордановой форме матрицы A , который позволяет вместо одной n -мерной системы рассмотреть $m = \frac{n}{2}$ двумерных подсистем.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть для системы (1.1) выполняется условие (3.1), $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклые компакты такие, что

$$S^{-1}\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m, \quad (3.9)$$

для всех $i = \overline{1, m}$ числа $\hat{\varphi}_i \in [0; 2\pi)$ удовлетворяют условию

$$\hat{\varphi}_i = 2\pi \frac{K'_i}{K''_i}, \quad K'_i \in \mathbb{Z}, \quad K''_i \in \mathbb{N}.$$

Тогда

1) если $r_1, \dots, r_m < 1$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_\infty &\subset S \bigotimes_{i=1}^m \left(\hat{\mathcal{Y}}_{i,\infty} + \mathcal{B}_{R_i}(0) \right), \\ \hat{\mathcal{Y}}_{i,\infty} &= \frac{1}{1 - r^{K''_i}} \sum_{k=0}^{K''_i - 1} r_i^k A_{k\hat{\varphi}_i} \mathcal{U}_i, \\ R_i &= \frac{2r_i}{1 - r_i} \left| \sin \left(\frac{\varphi_i - \hat{\varphi}_i}{2} \right) \right| \max_{y \in \hat{\mathcal{Y}}_{i,\infty}} \|y\|, \end{aligned}$$

2) если $r_1, \dots, r_m > 1$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_\infty &\subset S \bigotimes_{i=1}^m \left(\hat{\mathcal{X}}_{i,\infty} + \mathcal{B}_{R_i}(0) \right), \\ \hat{\mathcal{X}}_{i,\infty} &= \frac{1}{1 - r^{-K''_i}} \sum_{k=1}^{K''_i} -r_i^{-k} A_{-k\hat{\varphi}_i} \mathcal{U}_i, \\ R_i &= \frac{2}{r_i - 1} \left| \sin \left(\frac{\varphi_i - \hat{\varphi}_i}{2} \right) \right| \left(\max_{x \in \hat{\mathcal{X}}_{i,\infty}} \|x\| + \max_{u \in \mathcal{U}_i} \|u\| \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3. Пусть $r_1, \dots, r_m < 1$. Для всех $i = \overline{1, m}$ через $\mathcal{Y}_{i,\infty}$ обозначим предельное множество достижимости системы $(r_i A_{\varphi_i}, \mathcal{U}_i)$. Тогда в силу теоремы 3.2 верно включение:

$$\mathcal{Y}_{i,\infty} \subset \mathcal{B}_{R_i}(0) + \hat{\mathcal{Y}}_{i,\infty}.$$

Согласно леммам 2.1 и 2.2 $\mathcal{Y}_{1,\infty} \times \dots \times \mathcal{Y}_{m,\infty}$ является предельным множеством достижимости системы $(S^{-1}AS, \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m)$, а $S(\mathcal{Y}_{1,\infty} \times \dots \times \mathcal{Y}_{m,\infty})$ – предельное множество достижимости системы $(A, S(\mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m))$. Тогда из (3.9) следует пункт 1 теоремы 3.3.

Пусть $r_1, \dots, r_m > 1$. Для всех $i = \overline{1, m}$ через $\mathcal{X}_{i,\infty}$ обозначим предельное множество 0-управляемости системы $(r_i A_{\varphi_i}, \mathcal{U}_i)$. Тогда в силу теоремы 3.2 верно включение:

$$\mathcal{X}_{i,\infty} \subset \mathcal{B}_{R_i}(0) + \hat{\mathcal{X}}_{i,\infty}.$$

Согласно леммам 1.1 и 1.2 $\mathcal{X}_{1,\infty} \times \dots \times \mathcal{X}_{m,\infty}$ является предельным множеством 0-управляемости системы $(S^{-1}AS, \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m)$, а $S(\mathcal{X}_{1,\infty} \times \dots \times \mathcal{X}_{m,\infty})$ – предельное множество 0-управляемости системы $(A, S(\mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m))$. Тогда из (3.9) следует пункт 2 теоремы 3.3.

Теорема 3.3 доказана.

Теорема 3.3 позволяет построить внешние оценки предельных множеств достижимости и 0-управляемости в случае их ограниченности для почти периодических систем вида (1.1). Теорема 3.2 оказывается частным случаем теоремы 3.3 при $n = 2$. Однако сколь угодно точные оценки в смысле расстояния Хаусдорфа на основе предложенного метода могут быть получены только для двумерных систем или в случае, когда условие вложенности (3.9) выполняется как равенство. В общем случае результирующие оценки будут обладать некоторой априорной погрешностью связанной с аппроксимацией (3.9).

Также в условии теоремы 3.3 нет указаний на то, как выбрать множества $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m \subset \mathbb{R}^2$, хотя из построения следует, что точность будет тем выше, чем меньше данные множества по включению. Это приводит к тому, что оптимальным будет выбор в качестве \mathcal{U}_i проекции $S^{-1}\mathcal{U}$ на двухмерное подпространство соответствующее $(2i - 1)$ -й и $(2i)$ -й координатам. Однако при проведении численных расчетов можно выбрать большее по включению множество, но обладающее более удобной структурой, например, многогранник или эллипсоид.

3.4 Оптимальная аппроксимация предельных множеств достижимости линейных дискретных почти периодических систем

В данном разделе проведён численный анализ зависимости погрешности внешней оценки предельного множества при ограниченных вычислительных ресурсах, что позволяет определить оптимальное значение параметра, характеризующего наиболее точную оценку.

Точность аппроксимаций, получаемых в соответствии с теоремой 3.3, определяется величинами R_1, \dots, R_m . Можно добиться сколь угодно их малого значения за счёт выбора $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_m$, однако на практике, как правило, возможные значения K'' ограничены некоторым значением $N_{\max} \in \mathbb{N}$. По этой причине оказывается актуальной следующая задача для фиксированных $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^2$, $\varphi \in [0; 2\pi)$, $r > 0$:

$$R_i \rightarrow \min_{0 \leq K' < K'' \leq N_{\max}} . \quad (3.10)$$

Нижний индекс i для упрощения опустим. Решить данную задачу в общем случае проблематично, в связи со сложной зависимостью $\hat{\mathcal{Y}}_\infty$ и $\hat{\mathcal{X}}_\infty$ от $\hat{\varphi}$, но можно в качестве ее приближения рассмотреть (K'_0, K''_0) – решение вспомогательной задачи:

$$\left| \frac{\varphi - 2\pi K'/K''}{2} \right| \rightarrow \min_{0 \leq K' < K'' \leq N_{\max}}$$

Зафиксируем значение K'' и определим $K'_{opt}(K'')$.

$$K'_{opt}(K'') = \arg \min_{0 \leq K' < K''} \left| \frac{\varphi - 2\pi K'/K''}{2} \right| = \left\lceil \frac{\varphi K''}{2\pi} \right\rceil,$$

где $\lceil t \rceil$ – округление числа t к ближайшему целому числу. Тогда значение K''_{opt} можно найти с помощью перебора:

$$K''_0 = \arg \min_{1 \leq K'' \leq N_{\max}} \left| \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi \left\lceil \frac{\varphi K''}{2\pi} \right\rceil}{K''} \right|, K'_0 = K'_{opt}(K''_0).$$

Проиллюстрируем результаты на примере.

ПРИМЕР 3.1. Пусть $\varphi = 1$, $r = 0.95$,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Таблица 3.1. Результаты расчетов.

N_{\max}	10	20	30	40	50	60	70
K'_0	1	3	4	4	7	7	7
K''_0	6	19	25	25	44	44	44

Результаты расчётов представлены в таблице 3.1.

Причем $K'_0 = K'_*$, $K''_0 = K''_*$, где K'_* , K''_* – решение, полученное полным перебором. Для других наборов входных данных значения K'_* и K'_0 , K''_* и K''_0 также совпадают.

3.5 Выводы по главе 3

1. Разработан декомпозиционный подход для построения внешних оценок предельных множеств достижимости и 0-управляемости линейных почти периодических дискретных систем с комплексными собственными значениями. Метод основан на спектральном разложении матрицы системы и последующем анализе двумерных подсистем.

2. Для систем с матрицами поворота получены явные аналитические выражения предельных множеств в случае, когда углы являются рациональными делителями π .

3. Доказаны теоремы, позволяющие оценить погрешность аппроксимации предельных множеств для произвольных углов поворота через расстояние Хаусдорфа.

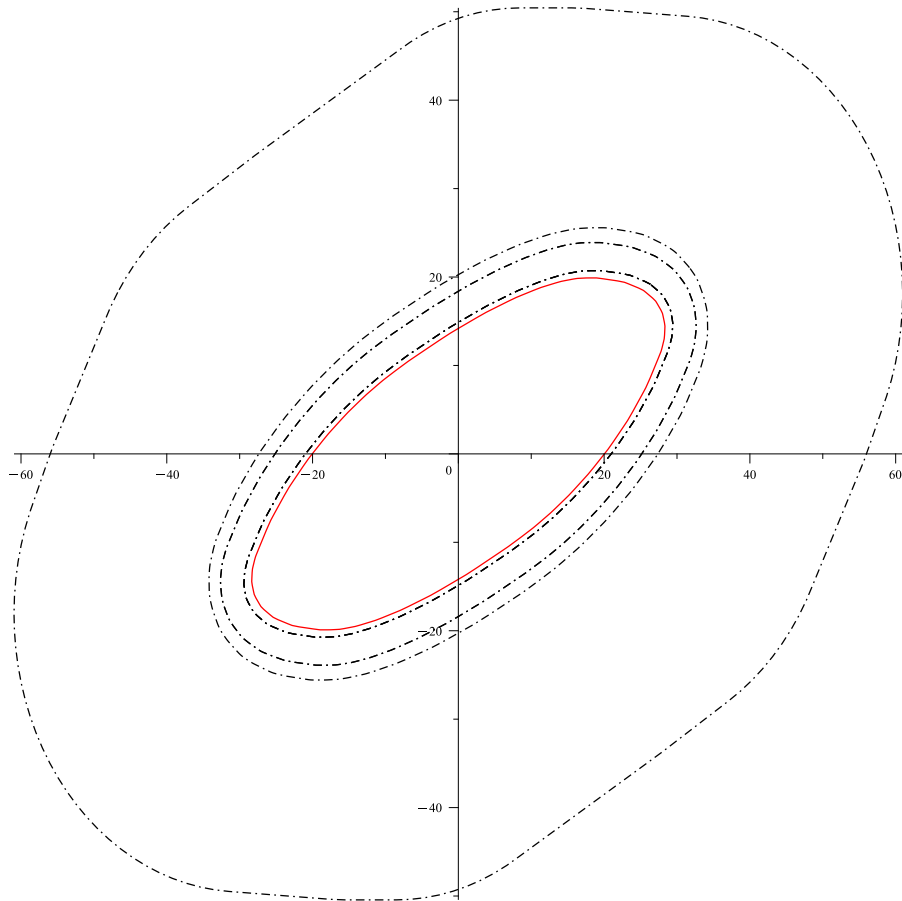


Рисунок 3.1. Внешняя оценка $\hat{\mathcal{Y}}_\infty$ (черным пунктиром) для различных значений N_{\max} , построенная на основе теоремы 3.3, внутренняя оценка $\hat{\mathcal{Y}}_\infty$ (красным цветом) для различных значений N_{\max}

Показано, что точность оценки зависит от приближения угла поворота рациональными делителями π .

4. Предложен метод оптимальной аппроксимации погрешности внешней оценки при ограничениях на вычислительные ресурсы за счет перехода к вспомогательной задаче – минимизации разности аргументов почти периодической и периодической систем.

Основные результаты главы опубликованы в [151, 161].

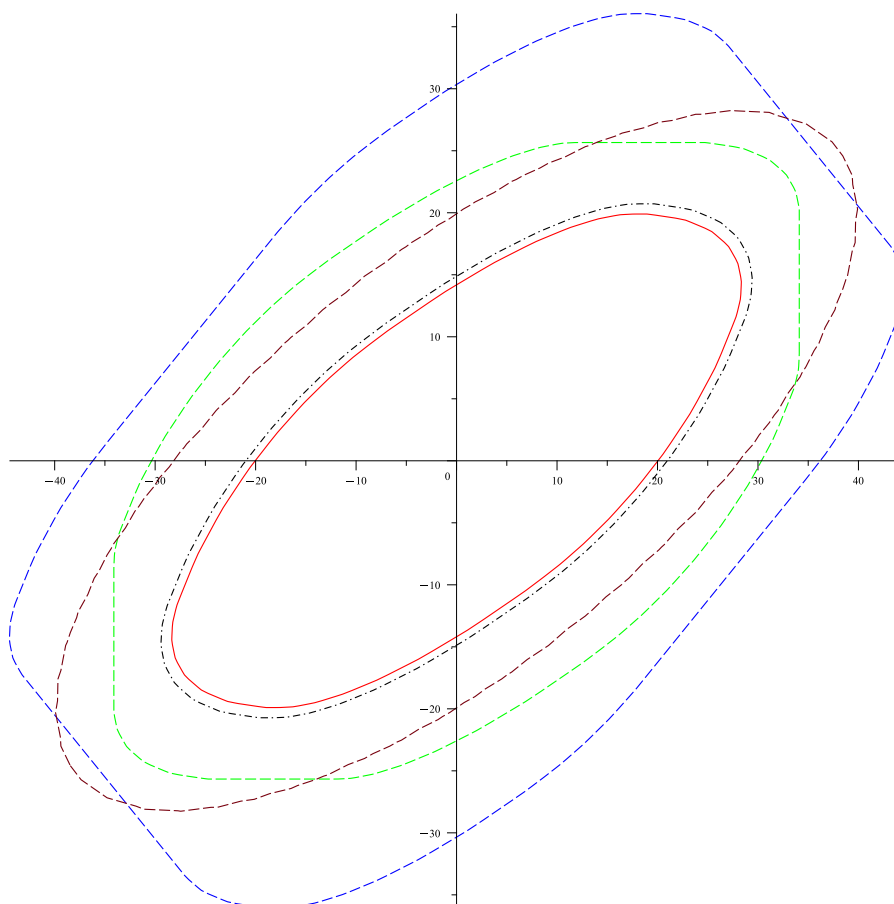


Рисунок 3.2. Внешняя оценка $\hat{\mathcal{Y}}_\infty$ (черным пунктиром) для различных значений N_{\max} , построенная на основе теоремы 3.3, внутренняя оценка $\hat{\mathcal{Y}}_\infty$ (красным цветом) для различных значений N_{\max} , внешняя оценка $\hat{\mathcal{Y}}_\infty$ (бордовым пунктиром) на основе леммы 2.6, внешние оценки $\hat{\mathcal{Y}}_\infty$ (синим пунктиром для $p = 1$ и зеленым пунктиром для $p = \infty$) на основе теоремы 2.2

Глава 4. Программа для построения внешних оценок предельных множеств 0-управляемости и предельных множеств достижимости

Целью данной главы является описание программы, реализующей алгоритмы, разработанные в 1, 2 и 3. Также представлены решения прикладных задач.

- В разделе 4.1 описывается программа для ЭВМ, написанная на языке C++, реализующая методы из предыдущих глав.
- В разделе 4.2 решается задача построения внешней оценки предельного множества 0-управляемости для системы управления аэростатом.
- В разделе 4.3 вычислительными средствами получена внешняя оценка предельного множества достижимости на основе опорных полупространств в задаче стабилизации уровня глюкозы крови.
- В разделе 4.4 приведены внешние оценки предельных множеств достижимости в задаче демпфирования высотного сооружения.
- В разделе 4.5 сформулированы выводы по главе 4.

4.1 Описание программы для ЭВМ

Для построения оценок предельных множеств 0-управляемости линейной дискретной автономной системы с ограниченным управлением (1.1) была разработана программа на языке C++. Выбор языка обусловлен несколькими ключевыми преимуществами этого языка. Во-первых, C++ обладает обширным набором библиотек, которые поддерживают разнообразные алгоритмы, что значительно расширяет функциональные возможности разрабатываемого программного обеспечения. Во-вторых, C++ обеспечивает мультиплатформенность, позволяя создавать приложения, которые могут работать на различных операционных системах без значительных изменений в исходном коде. В-третьих, благодаря широкому распространению и популярности C++, существует большое количество ресурсов и сообществ, что облегчает процесс коррекции и модификации исходного кода в соответствии с требованиями пользователей.

Для построения оценок необходимо задать матрицу системы A и множество допустимых значений управления \mathcal{U} . Множество \mathcal{U} может быть вписано явным образом в окно ввода вершин, после загрузки вершин автоматически добавляются симметричные вершины голубого цвета. Также вершины можно добавлять щелчком мыши по экрану. Для ввода матрицы системы A используется интерфейс. Сначала необходимо выбрать тип собственных значений, после этого с помощью интерфейса

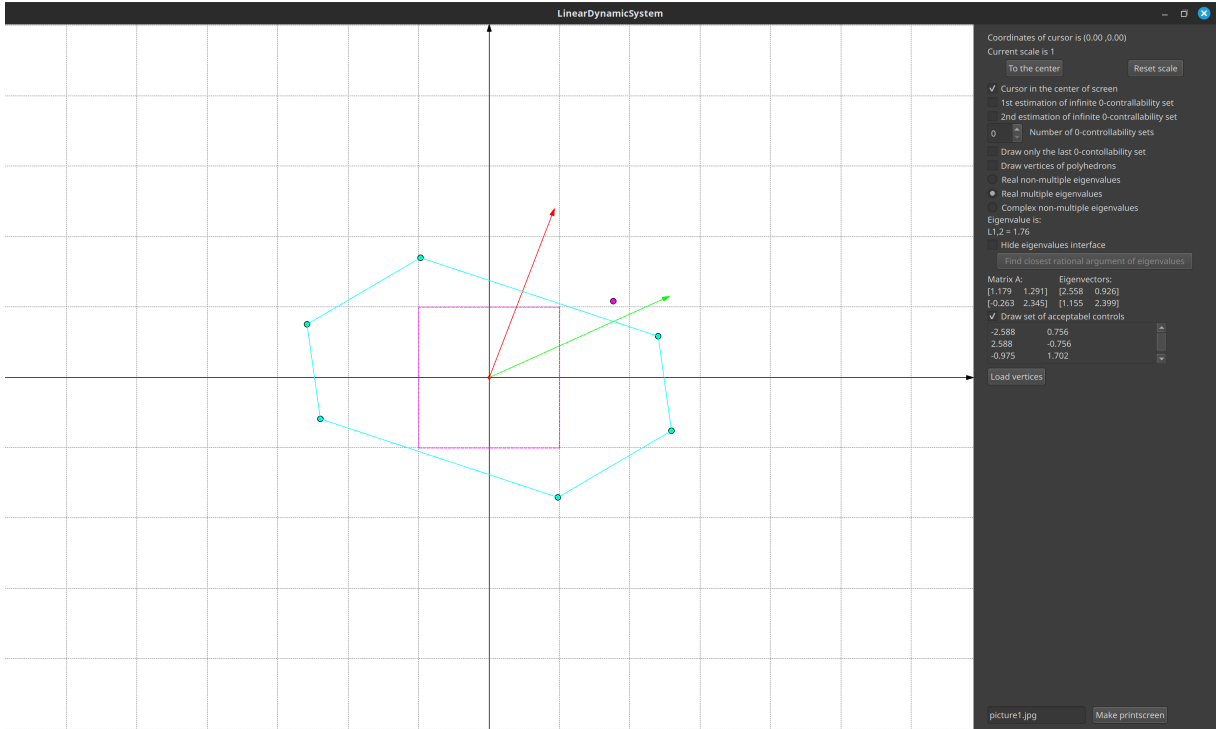


Рисунок 4.1. Голубым цветом изображено множество допустимых значений управления, фиолетовым цветом единичная область собственных значений, зеленая стрелка – собственный вектор, красная стрелка – присоединенный вектор, точка задает собственные значения

можно выбрать численные значения собственных значений (посредством передвижения розовой точки по экрану). Для удобства на экране выводится фиолетовая область (линией), которая обозначает единичную область собственных значений – внутри области значения будут меньше 1 по модулю. Для кратных собственных значений выбирается только одно число, для комплексных выбирается действительная и мнимая часть, второе собственное значение будет комплексно-сопряженным. Также для построения матрицы A нужны собственные векторы, которые в интерфейсе обозначены как зелёные стрелки (для комплексных собственных значений данные стрелки отвечают за действительную и мнимую части одного из собственных векторов, для кратных собственных значений зеленым цветом обозначен собственный вектор, красным цветом – присоединенный).

Также реализована возможность построения внутренних оценок предельного множества 0 -управляемости \mathcal{X}_∞ , то есть множеств $\mathcal{X}(N)$. Можно выбрать желаемое количество шагов N и отрисовать $\mathcal{X}(N)$ для всех шагов, включая N -й, либо только последнее множество ("Draw only the last 0 -controllability set") для удобства сравнения внутренних оценок с внешними. Для программной реализации операции сложения множеств 0 -управляемости в работе используются подходы, предложенные в [33].

После того, как заданы матрица системы A и множество допустимых значе-

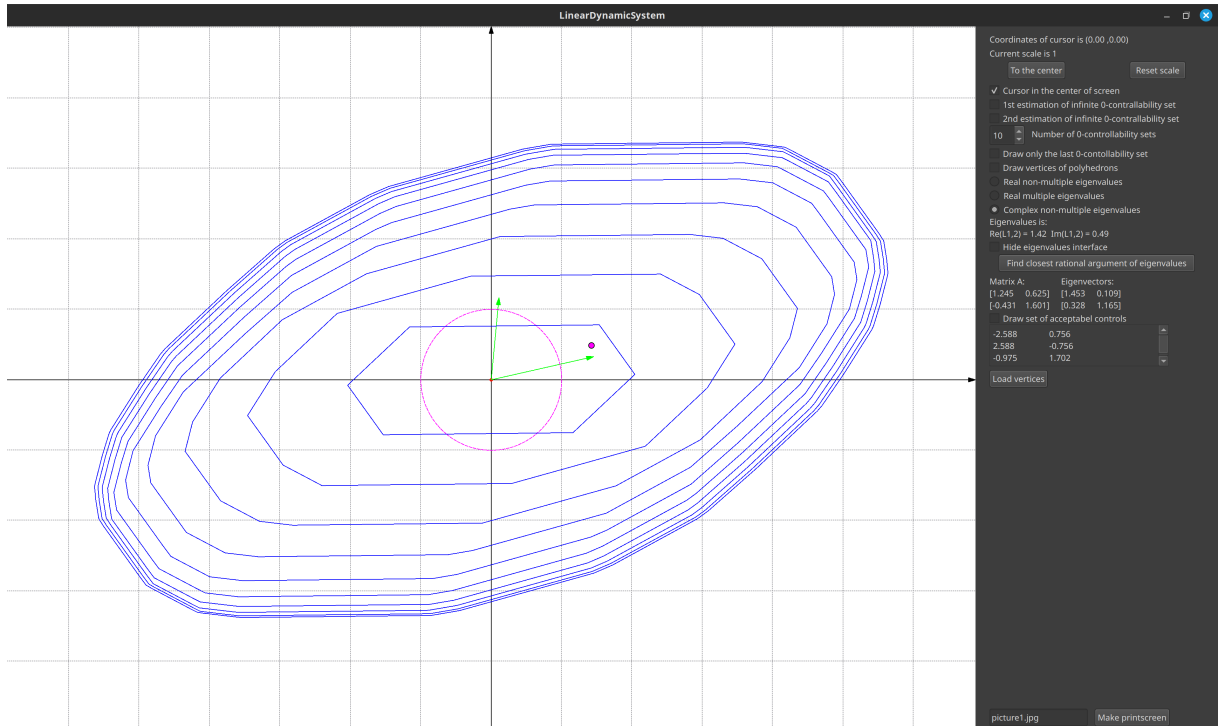


Рисунок 4.2. Визуализация $\mathcal{X}(N)$, $N = \overline{0, N}$

ний управления \mathcal{U} можно выбрать способ построения внешней оценки. Также предусмотрена возможность построения оценки на основе опорных полупространств ("1st estimation of infinite 0-controllability set") из раздела 1.3 и на основе принципа сжимающих отображений ("2nd estimation of infinite 0-controllability set") из раздела 1.4. Также можно построить для случая периодических систем предельное множество 0-управляемости \mathcal{X}_∞ явно согласно результатам раздела 3.2 ("Find closest rational argument of eigenvalues").

4.2 Система управления аэростатом

Рассмотрим задачу построения предельного множества 0-управляемости дискретной линейной системы, описывающей соответствующую модель – твердое тело (аэростат), подвешенный на струне и способный совершать вращательные движения. Предполагается, что тело подвержено вязкому трению воздуха, моменту, связанному с упругостью струны. Управление осуществляется при помощи двух противоположно направленных вентиляторных двигателей ограниченной мощности.

Уравнения, описывающие движение модели, представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \omega, \\ J\dot{\omega} + \delta\omega + \sigma\alpha = \pm \frac{1}{2}RS\rho(V_e^2 - V^2), \end{cases} \quad (4.1)$$

где α и ω – угловое отклонение и угловая скорость исследуемого объекта соответ-

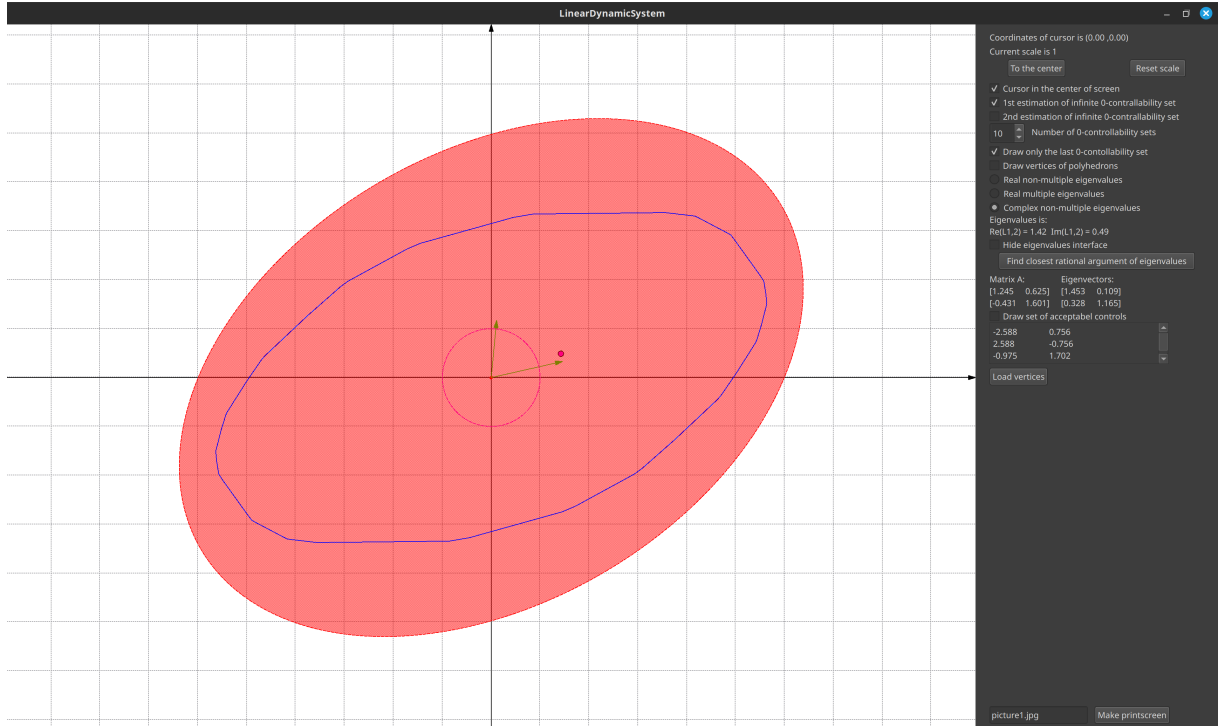


Рисунок 4.3. Интерфейс программы

ственно, S – площадь диска вентилятора, ρ – плотность воздуха, R – расстояние от оси вращения до вентилятора, V_e – скорость воздуха после выхода из вентилятора в случае работы вентилятора, J – момент инерции тела относительно оси вращения, σ – коэффициент упругости струны, δ – коэффициент вязкого трения о воздух. Знак «+» или «-» выбирается в зависимости от того, положительный или отрицательный момент создается двигателем. Управление на практике осуществляется за счёт изменения скорости вращения лопастей вентиляторных двигателей.

В результате замены дифференциальных уравнений (4.1) конечно-разностным аналогом была получена следующая система управления:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} \alpha(k+1) \\ \omega(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 1 & 1.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.24 \end{pmatrix} v(k), \quad (4.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad v(k) \in [-1; 1], \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (4.3)$$

Параметры системы получены приближенно на основании модели, описанной в [34, раздел 1].

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 1 & 1.9 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 0.9,$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -0.24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.24 \end{pmatrix} \right\}.$$

В этом случае предельное множество 0-управляемости \mathcal{X}_∞ является неограниченной полосой, ориентированной вдоль собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_2 , что совпадает с результатом леммы 1.5.

$$\mathcal{X}_\infty = \left\{ x_{0,1}h_1 + x_{0,2}h_2 : |x_{0,1}| < \frac{12}{55}, x_{0,2} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Графическим множество $\hat{\mathcal{X}}_\infty$ представлено на рисунке 4.4.

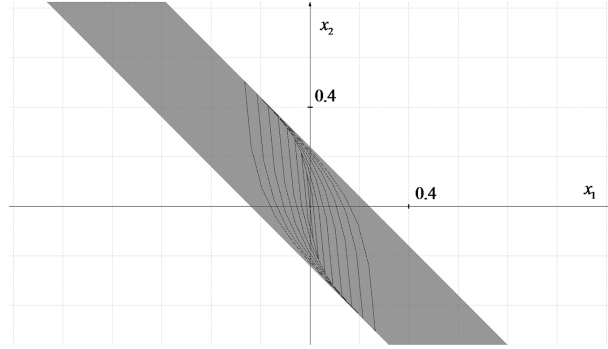


Рисунок 4.4. Внешняя оценка \mathcal{X}_∞ сплошным цветом и множество управляемости $\mathcal{X}(N)$ линиями

4.3 Система стабилизации уровня глюкозы в плазме крови

Продемонстрируем эффективность подхода из раздела 2.2 на примере задачи построения предельного множества достижимости для системы стабилизации уровня глюкозы и инсулина в плазме крови. Для наглядности и возможности визуализации вычисленных множеств рассмотрим наиболее простую математическую модель Бергмана [110, раздел 2], описываемую трехмерной системой:

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= -q_1G(t) - X(t)(G(t) + G_B) + v_1(t), \\ \dot{X}(t) &= -q_2X(t) + q_3I(t), \\ \dot{I}(t) &= -m(I(t) + I_B) + \frac{v_2(t)}{V_I}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $G(t)$, $I(t)$ – отклонение концентрации глюкозы и свободного инсулина в плазме крови от нормальных значений G_B , I_B соответственно, $X(t)$ – член, отвечающий за запаздывание процессов метаболизма свободного инсулина, через m обозначен коэффициент частичной элиминации (выведения из организма), V_I – объем распределения инсулина в тканях, $v_1(t)$, $v_2(t)$ – скорость внешнего поступления глюкозы и инсулина соответственно, q_1 , q_2 , q_3 – вспомогательные числовые параметры. Для расчетов

используются следующие численные значения параметров, полученные экспериментальным путем в [110, формула 2.2]:

$$q_1 = 0.028, \quad q_2 = 0.025, \quad q_3 = 0.000013,$$

$$V_I = 12 \text{ л}, \quad m = \frac{5}{54} \text{ мин}^{-1}, \quad G_B = 4.5 \text{ ммоль/л}, \quad I_B = 15 \text{ мМЕ/л}.$$

Проведя линеаризацию и последующую дискретизацию с шагом $\delta t = 10$ мин в предположении релейности управляющих воздействий $v_1(t)$, $v_2(t)$ уравнений (4.4), получим конечно-разностные соотношения вида (1.1) со следующими параметрами:

$$A_d = \begin{pmatrix} 0.7557 & -34.5225 & -0.0018 \\ 0 & 0.7788 & 0.000073 \\ 0 & 0 & 0.3961 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{U}_d = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -30.61 \\ -0.1418 \\ -0.93 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -28.03 \\ -0.1418 \\ -0.93 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -30.62 \\ -0.1423 \\ 2.11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -28.04 \\ -0.1423 \\ 2.11 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} -28.03 \\ 0.1421 \\ -0.93 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 30.62 \\ 0.1421 \\ -0.93 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 28.02 \\ 0.1416 \\ 2.11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 30.61 \\ 0.1416 \\ 2.11 \end{pmatrix} \right\}.$$

Заметим, что для системы (A_d, \mathcal{U}_d) не выполняется условие $0 \in \text{int} \mathcal{U}_d$, так как $\dim \mathcal{U}_d = 2$. По этой причине удвоим шаг квантования и перейдем к эквивалентной с точки зрения построения предельных множеств достижимости системе с параметрами

$$A = A_d^2 = \begin{pmatrix} 0.5712 & -52.9824 & -0.0046 \\ 0 & 0.6065 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0.1569 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}_d + A_d \mathcal{U}_d.$$

Собственные значения матрицы A имеют вид $\lambda_1 = 0.5712$, $\lambda_2 = 0.6065$, $\lambda_3 = 0.1569$, т.е. удовлетворяют условиям леммы 2.1. Воспользуемся данным утверждением для построения внешней полиэдральной оценки множества \mathcal{Y}_∞ .

Вычислим векторы p^1, p^2, p^3 из следствия 2.1:

$$p^1 = ((1, 0, 0)S^{-1})^T = (1, 1500, 0.3)^T,$$

$$p^2 = ((0, 1, 0)S^{-1})^T = (0, 1500, 0.28)^T,$$

$$p^3 = ((0, 0, 1)S^{-1})^T = (0, 0, 1)^T.$$

Также верны равенства

$$\min_{v \in S^{-1}\mathcal{U}} v_1 = -997.88, \quad \min_{v \in S^{-1}\mathcal{U}} v_2 = -963.25, \quad \min_{v \in S^{-1}\mathcal{U}} v_3 = -1.54,$$

$$\max_{v \in S^{-1}\mathcal{U}} v_1 = 998.18, \quad \max_{v \in S^{-1}\mathcal{U}} v_2 = 963.53, \quad \max_{v \in S^{-1}\mathcal{U}} v_3 = 3.506.$$

Окончательно получим следующую оценку предельного множества достижимости:

$$\mathcal{Y}_\infty \subset \hat{\mathcal{Y}}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : -997.88 \leq (p^1, x) \leq 998.18\} \cap \\ \cap \{x \in \mathbb{R}^n : -963.25 \leq (p^2, x) \leq 963.53\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : -1.54 \leq (p^3, x) \leq 3.506\}.$$

Графическим множество $\hat{\mathcal{Y}}_\infty$ представлено на рисунке 4.5.

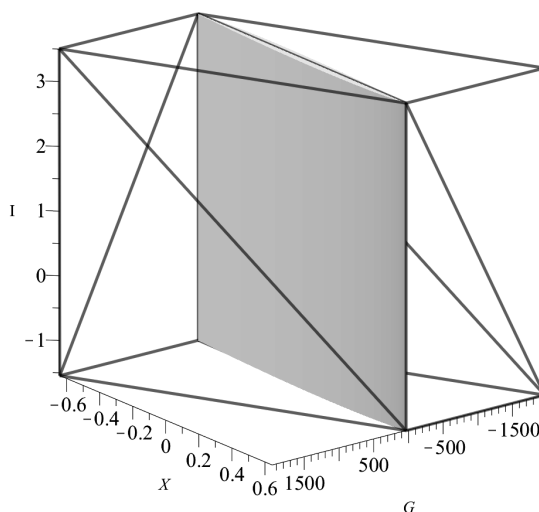


Рисунок 4.5. Внешняя оценка \mathcal{Y}_∞ (линиями) и множество достижимости $\mathcal{Y}(11)$ (поверхностью) для дискретизированной системы (4.4)

4.4 Оценки предельного множества достижимости для системы демпфирования

В качестве демонстрации эффективности методов, разработанных в разделах 2 и 4, рассмотрим математическую модель высотного сооружения, расположенного в зоне сейсмической активности. Для данной системы управления построим предельные множества достижимости.

Сейсмические возмущения вызывают колебания сооружения, которые влияют на устойчивость и в конечном счете приводят к его разрушению. В этой связи возникает задача гашения колебаний сооружения посредством дополнительно прикладываемых сил, рассчитанных на основе приобретенных изменений. В качестве механической системы, моделирующей колебания высотного сооружения, предполагается одномерная последовательность упругосвязанных материальных точек (этажей или секций сооружения), одна из которых (основание) совершает поступательное движение, порождаемое сейсмическим воздействием. Предполагается, что масса основания намного превышает массы остальных материальных точек, поэтому влиянием движения секций сооружения на движение основания можно пренебречь. В

дальнейшем будем считать, что массы всех материальных точек одинаковы, а упругие и демпфирующие связи моделируются линейными элементами с одинаковыми коэффициентами упругости и демпфирования.

Уравнения движения рассматриваемой системы согласно модели, предложенной в [38, глава 20], имеют вид

$$\begin{cases} m_0 \ddot{\xi}_1(t) &= -2b\dot{\xi}_1(t) - 2c\xi_1(t) + b\dot{\xi}_2(t) + c\xi_2(t) + U_1(t), \\ \vdots & \\ m_0 \ddot{\xi}_i(t) &= -2b\dot{\xi}_i(t) - 2c\xi_i(t) + b\dot{\xi}_{i-1}(t) + \\ &+ c\xi_{i-1}(t) + b\dot{\xi}_{i+1}(t) + c\xi_{i+1}(t) + U_i(t), \\ \vdots & \\ m_0 \ddot{\xi}_m(t) &= -2b\dot{\xi}_m(t) - 2c\xi_m(t) + b\dot{\xi}_{m-1}(t) + c\xi_{m-1}(t) + U_m(t), \end{cases} \quad (4.5)$$

где ξ_i – координата i -й материальной точки относительно основания, U_i – управляющая сила, приложенная к i -й материальной точке, m_0 – масса материальной точки, b и c – коэффициенты демпфирования и упругости межсекционных связей соответственно. Управляющее воздействие считается ограниченным по мощности: $U(t) \in \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^m$, где \mathcal{U}_0 – компакт.

Предполагается, что управление является релейным, т.е. $U(t) = v_k$, $t \in [k\delta; (k+1)\delta)$ для произвольного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и фиксированного шага дискретизации $\delta > 0$. Введём обозначение

$$x(k) = (\xi(2k\delta)^T, \dot{\xi}(2k\delta)^T)^T \in \mathbb{R}^{2n}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Тогда, полагая начальные условия системы (4.5) равными $x(k)$, можно решить данную систему явно и получить следующее решение в момент времени $2(k+1)\delta$:

$$x(k+1) = \Phi(2\delta)\Phi^{-1}(0)x(k) + \Phi(\delta)\Phi^{-1}(0)Bv_{2k} + Bv_{2k+1},$$

где $B = \Phi(\delta)\Phi^{-1}(0)\tilde{A}^{-1} - \tilde{A}^{-1}$, $\Phi(t)$ – матрица фундаментальной системы решений (4.5), \tilde{A} – матрица системы линейных дифференциальных уравнений (4.5). Данные соотношения эквивалентны 1.1, если ввести обозначения:

$$\begin{aligned} A &= \Phi(2\delta)\Phi^{-1}(0), \\ u(k) &= \Phi(\delta)\Phi^{-1}(0)Bv_{2k} + Bv_{2k+1}, \\ \mathcal{U} &= AB\mathcal{U}_0 + B\mathcal{U}_0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Можно предположить, что управляющие установки на различных этажах работают независимо друг от друга, а на релейные режимы управления наложены только ограничения, связанные с максимальной мощностью управляющих воздействий $u_{\max} > 0$:

$$\mathcal{U}_0 = \{0\}^{10} \times [-u_{\max}; u_{\max}]^{10}.$$

Предельное множество достижимости дискретной системы (1.1) с параметрами (4.6) сходится к предельному множеству непрерывной системы (4.5). А следовательно, для их построения можно воспользоваться теоретическими результатами данной статьи.

Пусть высота здания составляет 10 этажей, т.е. $m = 10$. Также пусть, $\delta = 1$, $m_0 = 600000$, $b = 600000$, $c = 2400000$. Значение параметров выбраны на основе модели, описанной в [38, глава 20]. Также можно условно принять $u_{\max} = 1$, поскольку в силу определения (2.2) предельные множества достижимости, соответствующие различным значениям u_{\max} , будут пропорциональны друг другу.

Матрица A имеет 10 пар комплексно-сопряженных собственных значений:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 0.809 \pm 0.516i, \quad \lambda_{3,4} = 0.375 \pm 0.766i, \\ \lambda_{5,6} &= -0.0938 \pm 0.707i, \quad \lambda_{7,8} = -0.272 \pm 0.486i, \quad \lambda_{9,10} = -0.333 \pm 0.262i, \\ \lambda_{11,12} &= -0.300 \pm 0.107i, \quad \lambda_{13,14} = -0.241 \pm 0.021i, \\ \lambda_{15,16} &= -0.134 \pm 0.041i, \quad \lambda_{17,18} = -0.154 \pm 0.035i, \quad \lambda_{19,20} = -0.190 \pm 0.018i. \end{aligned}$$

Из этого следует, что справедливо разложение (3.1). При этом спектральный радиус A строго меньше 1, т.е. в силу леммы 2.4 искомое множество \mathcal{Y}_∞ ограничено, а для его оценивания можно воспользоваться теоремой 3.3. Результаты расчетов представлены в табл. 4.1. На рисунке 4.6 для сравнения на графике представлены оценки из лемм 2.2, 2.5 и оценка из теоремы 3.3 для 1-ой подсистемы.

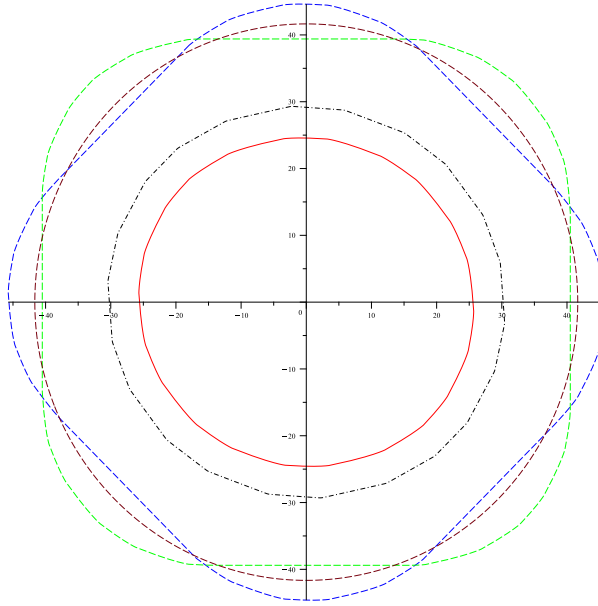


Рисунок 4.6. Красным цветом представлено множество достижимости $\mathcal{Y}(30)$, коричневым цветом оценка \mathcal{Y}_∞ на основе аппарата опорных полупространств, синим ($p = 1$) и зеленым ($p = \infty$) оценки \mathcal{Y}_∞ на основе сжимающих отображений, черным цветом оценка \mathcal{Y}_∞ из главы 3.

Результаты вычислений для всей системы представлены в Таблице 4.1. Итоговая оценка предельного множества достижимости исходной системы вычисляется как декартово произведение оценок предельных множеств достижимости подсистем согласно теореме 3.1.

Таблица 4.1. Результаты расчетов.

Результаты				
i	φ_i	$\hat{\varphi}_i$	r_i	R_i
1	1.135	1.13	0.922	1.56
2	2.23	2.2	0.72	0.905
3	-3.03	-3.02	0.5	0.12
4	-2.11	-2.07	0.31	0.14
5	-1.33	-1.32	0.17	0.02
6	-0.68	-0.69	0.101	0.006
7	-0.177	-0.188	0.06	0.008
8	-0.59	-0.57	0.019	0.01
9	-0.45	-0.44	0.025	0.0045
10	-0.197	-0.188	0.036	0.004

4.5 Выводы по главе 4

1. Разработана программа для ЭВМ, реализующая алгоритмы построения предельных множеств 0-управляемости из глав 1, 2, 3.

2. Эффективность предложенных алгоритмов показана для задач построения предельных множеств в прикладных примерах: стабилизации уровня глюкозы и инсулина в крови, демпфировании многоэтажного сооружения, управлении аэростатом.

Основные результаты главы опубликованы в [147, 148, 151, 162].

Заключение

В диссертационной работе предложены и обоснованы алгоритмы построения предельного множества 0-управляемости и предельного множества достижимости (или их оценок) для линейной дискретной автономной с геометрическими ограничениями на управление, что выразилось в следующих результатах:

1. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств 0-управляемости и достижимости для линейных систем с дискретным временем и геометрическим ограничением на управление.

2. Доказано свойство выпуклости предельного множества 0-управляемости (а также открытости) и предельного множества достижимости. На основе данного свойства разработан алгоритм построения оценок предельных множеств 0-управляемости достижимости, основанный на аппарате опорных полупространств.

2. Разработан алгоритм построения внешней оценки предельных множеств 0-управляемости и достижимости на основе принципа сжимающих отображений с любой наперед заданной точностью, который основан на рекуррентных соотношении конечных аналогов данных множеств, данное соотношение может быть обобщено при определенных условиях до сжимающего отображения (или композиции отображений M раз) в метрическом пространстве компактов с метрикой Хаусдорфа. Доказано, что в этом случае предельная точка сжимающего отображения будет предельным множеством 0-управляемости или достижимости с точностью до замыкания. Проведен численный анализ выбора шага квантования M для минимизации погрешности внешней оценки при ограничениях на вычислительные ресурсы.

3. Разработан алгоритм построения внешней оценки предельных множеств 0-управляемости и достижимости для частного случая линейной дискретной автономной системы, когда собственные значения являются комплексно-сопряженными. Доказано, что для периодических систем (когда аргумент является рациональным делителем π) предельные множества 0-управляемости и достижимости может быть построено явно. В случае почти периодических систем можно построить внешнюю оценку предельных множеств с любой наперед точностью как сумму погрешности и предельного множества периодической системы. Посредством численного анализа установлено оптимальное значение параметра, влияющего на погрешность внешней оценки, при ограничениях на вычислительные ресурсы.

4. Разработана программа, которая реализует эти методы. На прикладных примерах продемонстрирована эффективность доказанных алгоритмов построения предельных множеств: в задаче стабилизации уровня глюкозы и инсулина в крови, в задаче управления аэростатом, в задаче демпфирования высотного сооружения.

Среди направлений для дальнейших исследований стоит выделить обобщение полученных результатов на случай произвольных ограничений на управление и нестационарных систем. Данный результат позволит существенно расширить количество прикладных задач, которые могут быть решены разработанными алгоритмами.

Список литературы

1. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.:Наука, 2005.
2. *Ананьев Б.И.* О коррекции движения при коммуникационных ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2010. № 3. С. 3–15.
3. *Апанович Д.В., Воронов В.А., Самсонок О.Н.* Построение множества достижимости двумерной импульсной управляемой системы с билинейной структурой // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2016. Т. 15 С. 3–16
4. *Балашов М.В., Половинкин Е.С.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — 2-е изд. испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 440 С. — ISBN 978-5-9221-0896-6.
5. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
6. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.:ИИЛ, 1960.
7. *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление. Линейная теория. М.: Высшая школа, 2001.
8. *Болотин Ю.В., Моргунова С.Н.* Наблюдаемость по угловым измерениям и гладкость границы области достижимости // Фундам. прикл. мат. 2005. Т. 11. № 8. С. 119–130.
9. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
10. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.:Наука, 1973.
11. *Вахрамеев С.А.* Теоремы релейности и смежные вопросы //Тр. мат. ин-та РАН. 1998. Т.220. С.49–112.
12. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Крахотко В. В.,* Управляемость линейных стационарных систем, Докл. АН СССР, 203:3 (1972), 537–539
13. *Габасов Р., Кириллова Ф. М., Крахотко В. В., Минюк С. А.* Теория управляемости линейных дискретных систем. II. Обыкновенные системы”, Дифференц. уравнения, 8:6 (1972), 1081–1091
14. *Гамкрелидзе Р.В.* К теории оптимальных процессов в линейных системах // Докл. АН СССР. 1957. - Т. 116, №1, - С. 9 - 11.

15. *Гамкрелидзе Р.В.* Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах // Изв. АН СССР, Сер. математическая. 1958. - 22, №4. - С. 449-474.
16. *Горанов А. Ю., Шориков А. Ф.* Анализ точности общего алгебраического метода построения областей достижимости линеаризованных динамических систем // Труды второй научно-технической конференции молодых ученых Уральского энергетического института. 2017. Екатеринбург: УрФУ. С. 407–410.
17. *Горнов А.Ю., Финкельштейн Е.А.* Алгоритм кусочно-линейной аппроксимации границы множества достижимости // АиТ. 2015. № 3. С. 22–31. DOI: 10.1134/S0005117915030030
18. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966.
19. *Давыдов А.А.* Особенности границы достижимости в двумерных управляемых системах // Успехи мат. наук. 1982. Вып. 37. №3. С. 183-184
20. *Дарьин А.Н., Дигайлова И.А., Рублев И.В.* Избранные труды А.Б. Куржанского. М.:МГУ. 2009.
21. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их приложения в системах оптимизации. М.:Наука, 1982.
22. *Зайцев С.И., Свинцов А.А.* Теория изотропного локального травления: постановка задачи и основные уравнения // Поверхность. Физика, химия, механика. 1986. № 4. С. 27 – 31.
23. *Зыков И.В.* Приближенное вычисление множеств достижимости линейных управляемых систем при разнотипных ограничениях на управление // Известия института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2022. Т. 60 С. 16–33. DOI: 10.35634/2226-3594-2022-60-02
24. *Зорич В. А.* Математический анализ. Часть II. М.:Наука, 1984.
25. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальное по быстродействию управление движением аэростата // Электрон. журн. Тр. МАИ. 2015. № 83. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php>
26. *Ибрагимов Д.Н.* Аппроксимация множества допустимых управлений в задаче быстродействия линейной дискретной системой // Электрон. журн. Тр. МАИ. 2016. № 87. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php>
27. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // АиТ. 2019. № 3. С. 3–25. DOI: 10.1134/S0005231019030012

28. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ.* 2019. № 3. С. 3–25.
29. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // *АиТ.* 2015. № 9. С. 3–30.
30. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // *АиТ.* 2017. № 10. С. 3–32.
31. *Ибрагимов Д.Н.* О свойствах предельных множеств управляемости для класса неустойчивых линейных систем с дискретным временем и l_1 -ограничениями / Д.Н. Ибрагимов, А.В. Осокин, А.Н. Сиротин, К.И. Сыпало // *Изв. РАН. ТиСУ.* - 2022. - № 4. - С. 3–21.
32. *Ибрагимов Д.Н.* О некоторых свойствах множеств ограниченной управляемости для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление / Д.Н. Ибрагимов, А.Н. Сиротин // *Изв. РАН. ТиСУ.* - 2023. - № 6. - С. 3–32.
33. *Ибрагимов Д.Н., Кибзун А.И.* Программная реализация алгоритмов решения задачи быстродействия для линейных систем с дискретным временем // *Вестник компьютерных и информационных технологий.* 2025. Т. 22. № 3. С. 12–20. DOI: 10.14489/vkit.2025.03.pp.012-020
34. *Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С.,* Управление ориентацией твердого тела, подвешенного на струне, с использованием вентиляторных двигателей // *Известия РАН. Теория и системы управления,* 2011, No.1. С.107–119.
35. *Иоффе А. Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1973
36. *Калман Р.* Об общей теории систем управления // *Труды I Междунар. конгр. ИФАК.* 1961. Т. 2. С.521–547.М.:Изд-во АН СССР.
37. *Киселев Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Оптимальное управление. Линейная теория и приложения: Учебное пособие для студентов ВМиК МГУ. - М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. – 270 с.
38. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
39. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.

40. *Комаров В.А.* Уравнение множеств достижимости дифференциальных включений в задаче с фазовыми ограничениями // Тр. мат. инта АН СССР им. В.А.Стеклова. 1988. Т. 185. С. 116–125.
41. *Комаров В.А.* Оценки множества достижимости дифференциальных включений // Матем. заметки. 1985. Т. 37. №6. С. 916–925
42. *Константинов Г.В.* Нормирование воздействий на динамические системы. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983.
43. *Костоусова Е.К.* О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в “расширенном” пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // Вычислит. технологии. 2004. Т. 9. № 4. С. 54–72. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-141-155
44. *Костоусова Е.К.* Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов // Вычисл.технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 11—20.
45. *Красовский Н.Н.* Об одной задаче оптимального регулирования // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21. № 5. С. 670–677.
46. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
47. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
48. *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.:Постмаркет, 2000.
49. *Куржанский А.Б., Никонов О.И.* Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 5. С. 578–581.
50. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
51. *Куржанский А.Б., Пищулина И.Я.* Минимаксная фильтрация при квадратичных ограничениях I–III // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 8. С. 1434 – 1446; № 9. С. 1568 – 1579; № 12. С. 2149–2158.
52. *Куржанский А. Б.* Об аналитическом описании пучка выживающих траекторий дифференциальной системы, Доклады АН СССР. 1986. Т. 287. № 5. С. 1047–1050
53. *Ляпунов А. А.*, О вполне аддитивных вектор-функциях, Изв. АН СССР. Сер. матем., 4:6 (1940), 465–478.

54. *Максимов В.П.* О внутренних оценках множеств достижимости для непрерывно-дискретных систем с дискретной памятью // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 3. С. 141–151. DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-141-151
55. *Malyshev V. V., Krasilshchikov M. N., Bobronnikov V. T., Nesterenko O. P., Fedorov A. V.* Satellite monitoring systems. Analysis, synthesis and control, Moscow Aviation Institute Publ., 2000 (in Russian).
56. *Хорн Р.* Матричный анализ, М.: Мир, 1989.
57. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.:Наука, 1975.
58. *Мордухович Б.Ш.* Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. No. 7. Изд.2, стереотип. 368 с. М.: Наука, 1988.
59. *Мороз А.И.* Синтез оптимального по быстродействию управления для линейного дискретного объекта третьего порядка // АиТ. 1965. № 2. С. 193–207.
60. *Никольский М.С.* Линейные управляемые объекты с фазовыми ограничениями. Приближенное вычисление множеств достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 162–168. DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-162-168
61. *Овсеевич А.И., Черноусько Ф.Л.* Свойства оптимальных эллипсоидов, приближающих области достижимости системы с неопределённостями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. No. 4. С.8–18.
62. *Овсеевич А.И., Черноусько Ф.Л.* Двусторонние оценки областей достижимости управляемых систем // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 40, №5, С. 737 – 744
63. *Овсеевич А.И.* Особенности границ областей достижимости и задачи наблюдаемости // Тез. 5й Всеросс. шк. “Математические методы навигации”. М.: Издво мех.мат. фта МГУ, 1994. С. 30–32.
64. *Панасюк А.И., Панасюк В.И.* Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техн., 1986.
65. *Панасюк А.И.* Уравнение множеств достижимости // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 4. С. 143 – 154.
66. *Панасюк А.И., Панасюк В.И.* Об одном уравнении, порождаемом дифференциальным включением // Мат. заметки. 1980. Т. 27, № 3. С. 429 – 437.
67. *Пацко В.С., Федотов А.А.* Структура множества достижимости для машины Дуббинса со строго односторонним поворотом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, №3. С. 171-187

68. *Подчукаев В.А.* К задаче определения возможных состояний нестационарной линейной системы // *АиТ.* 1976. № 7. С. 187–189.
69. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. *Техника линейных матричных неравенств.* М.: ЛЕНАНД, 2014.
70. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. -М.:Наука, 1969.
71. *Понтрягин Л. С.* Избранные научные труды, 2 т., -М.: Наука, 1988.
72. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх ii. //Доклады АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 910–912. 1967.
73. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования. Математический сборник, 112(154)(3(7)):307–330, 1980.
74. *Ибрагимов Д.Н., Порцева Е.Ю.* Алгоритм внешней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений для дискретной системы с ограниченным управлением // *Моделирование и анализ данных.* 2019. № 2. С. 83–98.
75. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.:Наука, 1973.
76. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.:Мир, 1973.
77. *Сергеев С.И.,* “Построение множеств достижимости для одного класса многошаговых процессов управления”, *Автомат. и телемех.*, 2002, № 6, 57–63; *Autom. Remote Control*, 63:6 (2002), 919–925
78. *Сиротин А.Н.* Управляемость линейных дискретных систем с ограниченным управлением и (почти) периодическими возмущениями // *АиТ.* 2001. № 5. С. 53–64. DOI: 10.1023/A:1010266622197
79. *Сиротин А.Н.* Точное аналитическое описание множеств достижимости асимптотически устойчивых линейных дискретных систем с ограниченным по l_1 -норме скалярным управлением // *Вестн. МАИ.* 2008. Т. 15. № 2. С. 142 – 146.
80. *Сиротин А.Н., Формальский А.М.* Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // *АиТ.* 2003. № 12. С. 17–32.
81. *Ибрагимов Д. Н.* О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ.* 2019. №3. С.3–25.

82. *Точилин П. А.* О построении невыпуклых аппроксимаций множеств достижимости кусочно-линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 11. С. 1503–1515.
83. *Точилин П.А., Зайцева М.В.* Методы построения оценок множеств достижимости в задаче моделирования потоков людей // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 8. С. 1381–1394. DOI: 10.31857/S0044466923070190
84. *Ушаков В. Н., Матвейчук А. Р., Малев А. Г.* Задачи динамики систем с фазовыми ограничениями // Изв. ИМИ УдГУ. 2012. Т. 1. № 39. С. 138–139.
85. *Ушаков В. Н.* Процедуры построения стабильных мостов в дифференциальных играх: Дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. Ин-т математики и механики УрО АН СССР, 1991.
86. *Филиппова Т.Ф.* Оценки множеств достижимости управляемых систем с нелинейностью и параметрическими возмущениями // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 287–296. DOI: 10.1134/S0081543816020061
87. *Филиппова Т.Ф.* Внешние оценки множеств достижимости управляемой системы с неопределенностью и комбинированной нелинейностью // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 262–274. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-262-274
88. *Формальский А.М.* Об угловых точках границ областей достижимости // Прикл. мат. и механика. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 566–574.
89. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.:Мир, 1989.
90. *Хлебников М. В.* Внешняя оценка множества достижимости линейной динамической системы // Стохастическая оптимизация в информатике. 2016. Т. 12. № 1. С. 112–122.
91. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Куцевич В.М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // Автоматика и телемеханика. 2011. №11. С. 9–59.
92. *Хрусталёв М.М.* Точное описание множеств достижимости и условия глобальной оптимальности динамических систем. I. Оценки и точное описание множеств достижимости и управляемости // Автомат. и телемех. 1988. № 5. С. 62–70
93. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
94. *Abedor J., Nagpal K., Poolla K.* A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 1996. No. 6. P. 899–927.

95. *Aumann R. J.*. Integrals of set-valued functions.// *Math. Anal. Appl.*, No. 12. V. 1. 1965. P. 1–12.
96. *Bayer R. , Donchev T.* Discrete Approximation of Impulsive Differential Inclusions // *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 2010. No. 31(6). P. 653–678 DOI: 10.1080/01630563.2010.483878
97. *Barr W. R.* Superquadrics and Angle-Preserving Transformations // *IEEE-CGA*. 1981. V. 1. No. 1. P. 11–23. DOI: 10.1109/MCG.1981.1673799
98. *Baturin V.A, Goncharova E.V, F. L. Pereira F.L, Sousa J.B.* Measure-controlled dynamic systems: Polyhedral approximation of their reachable set boundary // *Avtomat. i Telemekh.* 2006. No. 3. P. 8–19
99. *Benvenuti L., Farina L.* The Geometry of the Reachability Set for Linear Discrete-Time Systems with Positive Controls // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2006. V. 28. No. 2. P. 306–325. DOI: 10.1007/978-1-4471-2506-8_3
100. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex optimization. Cambridge: Cambridge university press, 2004. DOI: 10.1017/CBO9780511804441
101. *Boyd S.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
102. *Brusnikina N. B., Lotov A. V.* Guaranteed-accuracy approximation of reachable sets for a linear dynamic system subject to impulse actions // *Comput. Math. Math. Phys.* 2007. No. 47:11. P. 1779–1787 DOI: 10.1134/S096554250711005X
103. *Canon, M.D., Cullum, C.D., Polak, E.* Theory of Optimal Control and Mathematical Programming, McGraw-Hill, New York, 1970.
104. *Coloniuss F., Cossich J.A.N., Santana A.J.* Controllability Properties and Invariance Pressure for Linear Discrete-Time Systems // *Journal of Dynamics and Differential Equations*. 2022. V. 34. P. 5–22. DOI: 10.48550/arXiv.1909.04382
105. *Corradini M.L., Cristofaro A., Giannoni F., Orlando G.* Estimation of the Null-Controllable Region: Discrete-Time Plants / *Control Systems with Saturating Inputs*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer. 2012. V. 424. P. 33–52. DOI: 10.1007/978-1-4471-2506-8_3
106. *Darup M. S., Mönnigmann M.* On general relations between nullcontrollable and controlled invariant sets for linear constrained systems // 53rd IEEE Conference on Decision and Control. Los Angeles. 2014. P. 6323–6328
107. *Desoer C.A., Wing J.* The Minimal Time Regulator Problem for Linear Sampled-Data Systems: General theory // *J. Franklin Inst.* 1961. V. 272. No. 3. P.208–228.

108. *Evans M. E. and Murthy D. N. P.* Controllability of discrete-time systems with positive controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*,22(6):942–945, 1977.
109. *Filippova T.F., Matviychuk O.G.* Estimates of Reachable Sets of Control Systems with Bilinear-Quadratic Nonlinearities // *Ural Math. J.* 2015. V. 1. No. 1. P. 45–54. DOI: 10.15826/umj.2015.1.004
110. *Fisher M. E.* A Semiclosed-Loop Algorithm for the Control of Blood Glucose Levels in Diabetics // *IEEE Transactions on Biomedical Engineering.* 1991. V. 38, No. 1. P. 57–61. DOI: 10.1109/10.68209
111. *Fisher M.E., Gayek J.E.* Approximating Reachable Sets for n-Dimensional Linear Discrete Systems // *IMA J. Mathematical Control and Information.* 1987. V. 4. No. 2. P. 149–160. DOI: 10.1093/imamci/4.2.149
112. *Fisher M.E., Gayek J.E.* Estimating Reachable Sets for Two-Dimensional Linear Discrete Systems // *J. Optim. Theory Appl.* 1988. V. 56. No. 1. P. 67–88. DOI: 10.1007/BF00938527
113. *Fucheng L., Mengyuan S., Usman* Optimal preview control for linear discrete-time periodic systems // *Mathematical Problems in Engineering.* 2019. P. 1–11. DOI: 10.1155/2019/8434293.
114. *Ge S. S., Zhendong S., Lee T. H.* Reachability and controllability of switched linear discrete-time systems // *IEEE Transactions on Automatic Contr l.* 2001. Vol.46, No. 9. P. 1437–1441.
115. *Gusev M.I.* On optimal control problem for the bundle of trajectories of uncertain system // *LSSC 2009: Large-Scale Scientific Computing.* 2010. P. 286–293. (Lecture Notes in Computer Sciences; vol. 5910).doi: 10.1007/978-3-642-12535-5 33 .
116. *Guseinov K.G.* Approximation of the Attainable Sets of the Nonlinear Control Systems with Integral Constraint on Controls // *Nonlinear Analysis.* 2009. V. 71. No. 1–2. P. 622–645. DOI: 10.1016/j.na.2008.10.097
117. *Guseinov K. G., Ozer O., Akyar E., and Ushakov V. N.* The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls// *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 2007. V. 14. No.1–2, PP. 57–73
118. *Halkin H.* Optinal Control for Systems Described by Difference Equations, *Advances in Control Systems*, Edited by C. T. Leondes, Academic Press, New York, Vol. 1, pp. 173–196, 1964
119. *Hamza M.H., Rasmay M.E.* A Simple Method for Determining the Reahable Set for Linear Discrete Systems // *IEEE Trans. on Automat. Control.* 1971. V. 16. P. 281–282.

120. *Hartl Richard F., Sethi Suresh P., Vickson Raymond G.* A survey of the maximum principles for optimal control problem with state constraints // SIAM REV. 1995. - 37, №2. - P. 181 - 218.
121. *Heemels W. P. M. H., Camlibel M. K.* Null controllability of discrete-time linear systems with input and state constraints // 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun. 2008. P. 3487–3492.
122. *Holtzman J.M., Halkin H.* Directional Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems // J. SIAM Control. 1966. V. 4. No. 2. P. 263–275.
123. *Hu T., Miller D.E., Qiu L.* Null Controllable Region of LTI Discrete-Time Systems with Input Saturation // Automatica. 2002. V. 38. No. 11. P. 2009–2013. DOI: 10.1016/S0005-1098(02)00091-2
124. *Kaba M. D., Camlibel M. K.* A spectral characterization of controllability for linear discrete-time systems with conic constraints // SIAM Journal on Control and Optimization. 2015. Vol. 53, No. 4. P. 2350–2372.
125. *Koustousova E.K.* External Polyhedral Estimates of Reachable Sets of Discrete-Time Systems with Integral Bounds on Additive Terms // Mathematical Control and Related Fields. 2021. V. 11. No. 3. P. 625–641. DOI: 10.3934/mcrf.2021015
126. *Koustousova E.K.* Polyhedral estimates for attainability sets of linear multistage systems with integral constraints on the control // Vychisl. Tekhnol. 2003. V. 8. No. 4. P. 55–74.
127. *Koustousova E.K.* On the boundedness of outer polyhedral estimates for reachable sets of linear systems // Comput. Math. Math. Phys. 2008. V. 48. No. 6. PP. 918–932.
128. *Koustousova E.K.* On polyhedral estimates for reachable sets of discrete-time systems with bilinear uncertainty // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. N. 9. P. 1841–1851.
129. *Koustousova E.K.* State estimation for control systems with a multiplicative uncertainty through polyhedral techniques // IFIP Adv. Inf. Commun. Technol. 2013. V. 391, P.165–176.
130. *Kuntsevich A.V.* Invariant Sets (Limit Cycles) of Families of Autonomous Nonlinear Discrete Systems // J. Autom. Inform. Sci. 2013. V. 45. No. 2. P. 24–32. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v45.i2.30
131. *Kuntsevich V.M., Kurzhanski A.B.* Attainability Domains for Linear and Some Classes of Nonlinear Discrete Systems and Their Control // J. Autom. Inform. Sci. 2010. V. 42. No. 1. P. 1–18. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v42.i1.10

132. *Kurzhanskiy A.F., Varaiya P.* Theory and Computational Techniques for Analysis of Discrete-Time Control Systems with Disturbances // // Optim. Method Software. 2011. V. 26. No. 4–5. P. 719–746.
133. *Kurzhanskiy A.B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.
134. *Kurzhanskiy A., Varaiya P.* Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis of Discrete-Time Linear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. V. 52. No. 1. P. 26–38. DOI: 10.1109/TAC.2006.887900
135. *Kurzhanskiy A.B., Varaiya P.* Theory and Computational Techniques for Analysis of Discrete-Time Control Systems with Disturbances // Optim. Method Software. 2011. V. 26. No. 4–5. P. 719–746. DOI: 10.1080/10556788.2010.548867
136. *Kurzhanskiy A.B., Varaiya P.* Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Boston: Birkhäuser, 2014.
137. *Lin W.-S.* Time-Optimal Control Strategy for Saturating Linear Discrete Systems // Int. J. Control. 1986. V. 43. No. 5. P. 1343–1351.
138. *Polyak B.T., Nazin A.V., Topunov M.V., Nazin S.A.* Rejection of bounded disturbances via invariant ellipsoids technique // Proc. 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, USA, December 13–15, 2006. P. 1429–1434.
139. *Serry M.* Convergent Under-Approximations of Reachable Sets and Tubes: A Piecewise Constant Approach // Journal of the Franklin Institute. 2021 V. 358. No. 6. P. 3215–3231. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2021.02.015
140. *Son N. K.* Controllability of linear discrete time systems with constrained controls in Banach spaces. Control and Cybernetics, 10(12):5–16, 1981.
141. *Schweppe F.C.* Uncertain Dynamic Systems. NJ: Prentice-Hall, 1973.
142. *Tobler W.R.* The Hyperelliptical and Other New Pseudo Cylindrical Equal Area Map Projections // J. Geophys. Research. 1973. V. 78. No. 11. P. 1753–1759. DOI: 10.1029/JB078i011p01753
143. *Wan J., Vehí J., Luo N., Herrero P.* Control of Constrained Nonlinear Uncertain Discrete-Time Systems via Robust Controllable Sets: a Modal Interval Analysis Approach // ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations. 2009. V. 15. No. 1. P. 189–204. DOI: 10.1051/cocv:2008025
144. *Weibel C.* Minkowski sums of polytopes: combinatorics and computation. Lausanne:EPFL, 2007.

Публикации автора по теме диссертационной работы

145. Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н. О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ*. 2023. № 2. С. 3–34. DOI: 10.31857/S00052310230200100
146. Simkina A. V., Ibragimov D. N., Kibzun A. I. On the Method of Numerical Simulation of Limit Reachable Sets for Linear Discrete-Time Systems with Bounded Control // *Вестник ЮурГУ ММП*. 2024. Т. 17. № 3. С. 46–56. DOI: 10.14529/mmp240304
147. Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н. Метод построения и оценивания асимптотических множеств управляемости двумерных линейных дискретных систем с ограниченным управлением // *Труды МАИ*. 2022. № 126. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php> DOI: 10.34759/trd-2022-126-17
148. Simkina A. V. On the External Estimation of the Limit Reachable Set for the Linear Discrete-Time System Based on Support Hyperplanes. (2024). *Advances in Systems Science and Applications*, 2024(4), 66-81. <https://doi.org/10.25728/assa.2024.2024.4.1970>
149. Симкина А. В. Уточнение коэффициента сжатия для внешней оценки предельного множества 0-управляемости линейной дискретной системы с ограниченным управлением // *Моделирование и анализ данных* 2024. Том 14. № 4. С. 115–128 doi:10.17759/mda.2024140408
150. Симкина А. В. Оценка предельного множества 0-управляемости системы управления движением спутника // *Труды МАИ*. 2026. № 146. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php>
151. Ибрагимов Д.Н., Симкина А. В. О методе декомпозиции при построении внешних оценок предельных множеств достижимости и 0-управляемости для линейных почти периодических дискретных систем // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2025;26(10):515-524. <https://doi.org/10.17587/mau.26.515-524>
152. Симкина А. В. Оценка предельного множества управляемости для линейной дискретной системы управления с ограниченным управлением на основе принципа сжимающих отображений // 22-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». 20-24 ноября 2023 года. Москва. Тезисы. – М.: Издательство «Перо», 2023, стр. 273
153. Симкина А. В. Методы построения и оценивания предельных множеств достижимости для линейных дискретных систем на основе аппарата опорных полупространств и свойств выпуклых множеств // *Материалы XXIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВСППС'2023)*, 4-10 сентября 2023 г., Дивноморское, Краснодарский край – М.:Издательство МАИ; 2023 – 656 с., стр.514-516

154. *Симкина А. В.* Уточнение коэффициента сжатия для внешней оценки предельного множества управляемости линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Сборник тезисов работ международной молодежной научной конференции L Гагаринские чтения 2024. — М.: Издательство «Перо», 2024., стр.477-478
155. *Симкина А. В.* Внешняя оценка предельного множества достижимости для линейной дискретной системы управления с ограниченным управлением на основе принципа сжимающих отображений // XIV ВСЕРОССИЙСКОЕ СОВЕЩАНИЕ ПО ПРОБЛЕМАМ УПРАВЛЕНИЯ (ВСПУ-2024): сборник научных трудов, 17-20 июня 2024 г., Москва / Под общ. ред. Д.А. Новикова; Ин-т Проблем упр. им. В.А. Трапезникова Рос. акад. наук. – Текст: электронный, стр.95-99
156. *Симкина А. В.* Метод уточнения внешней оценки предельного множества 0-управляемости линейной дискретной системы с комплексно-сопряженными собственными значениями // 23-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». 18-22 ноября 2024 года. Москва. Тезисы. – М.: Издательство «Перо», 2024, стр. 260-261
157. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* Метод оценивания асимптотических множеств управляемости двумерных линейных дискретных систем с ограниченным управлением // 19-я Международная конференция "Авиация и космонавтика 23-27 ноября 2020 года. Москва. Тезисы. - М: Издательство «Перо», 2020, - 980 с/ стр. 460-461
158. *Берендакова А.В.*, Оценка асимптотического множества управляемости линейной дискретной системы на основе методов декомпозиции // Сборник тезисов работ международной молодежной научной конференции XLVII Гагаринские чтения 2021.-М:Издательство «Перо», 2021. С.759-760
159. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* Метод уточнения общей оценки предельного множества 0-управляемости двумерной линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. Сборник. М: Изд-во МАИ, 2021. - 224 с.
160. *Ибрагимов Д.Н., Берендакова А.В.* Метод построения асимптотических множеств управляемости линейных дискретных автономных систем с ограниченным управлением на основе аппарата опорных полупространств // Сборник тезисов работ международной молодежной научной конференции XLVIII Гагаринские чтения 2022. - М: Издательство «Перо», 2022. С.424
161. *Симкина А.В.* Оптимальная аппроксимация предельных множеств достижимости линейных дискретных систем при ограниченных вычислительных ресурсах // Теория управления и математическое моделирование : материалы Всерос. конф. с междунар. участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и

профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, Россия, 16–20 июня 2025 г.) : в 2 ч. Ч. 2. – Ижевск : Удмуртский университет, 2025. С. 139 – 142

162. *Симкина А.В.* Программа для аппроксимации предельных множеств 0-управляемости для двумерных линейных систем с дискретным временем с ограниченным управлением // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025666816 от 15 июня 2025 г.