

На правах рукописи



Прутько Алексей Александрович

**Оптимальные по расходу топлива траектории
переориентации крупногабаритных космических
конструкций**

Специальность 2.5.16—
«Динамика, баллистика, управление движением летательных
аппаратов (технические науки)»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Работа выполнена в Публичном акционерном обществе «Ракетно-космической корпорации «Энергия» имени С.П. Королёва».

Научный руководитель: **Сумароков Антон Владимирович**
кандидат физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
ПАО «РКК «Энергия»

Официальные оппоненты: **Назаров Анатолий Егорович,**
доктор технических наук,
АО «НПО Лавочкина»,
заместитель начальника отдела

Симоньянц Ростислав Петрович,
кандидат технических наук, доцент,
МГТУ им. Н.Э. Баумана,
доцент

Ведущая организация: Акционерное общество «Научно-производственная корпорация «Космические системы мониторинга, информационно-управляющие и электромеханические комплексы» имени А.Г. Иосифьяна»,
107078, г. Москва, Хоромный тупик, дом 4,
строение 1

Защита состоится «20» октября 2022 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.327.03 в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ) по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте МАИ по ссылке: https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=163983.

Отзывы, заверенные печатью, просим направлять по адресу:
125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, Отдел Учёного и диссертационных советов МАИ.

Автореферат разослан «___» _____ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.2.327.03,
д.т.н., доцент



А.В. Старков

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы. Во время эксплуатации Международной космической станции (МКС) для проведения таких динамических операций, как коррекции орбит, сближение с кораблями снабжения, необходимо выполнять развороты станции на большие углы. Количество таких манёвров в зависимости от этапа эксплуатации МКС может достигать десяти и более в год. Переориентация такой крупногабаритной конструкции неосуществима без интенсивной работы двигательной установки, что приводит к большому расходу топлива.

Проведение переориентаций МКС под управлением российского сегмента (РС) осуществляется при помощи двигателей ориентации (ДО) под управлением бортовых алгоритмов служебного модуля (СМ). Разворот выполняется по кратчайшей траектории вокруг оси эйлера поворота между текущей и конечной ориентацией МКС. Например, при развороте МКС на угол $\approx 180^\circ$ по рысканью вокруг местной вертикали расход топлива превышает 50 кг, а количество срабатываний ДО достигает ≈ 2000 .

Отсутствие в бортовых алгоритмах управления РС возможности оптимально осуществлять переориентацию станции на большие углы привело к необходимости разработки таких алгоритмов. Высокая стоимость доставки топлива, поставляемого транспортными грузовыми кораблями (ТГК) «Прогресс» три раза в год, приводит, соответственно, к высокой стоимости самого топлива. Также следует отметить, что ресурс ДО СМ ограничен, поэтому необходимо по возможности сокращать их количество включений и длительность работы. Учитывая то, что СМ находится в составе российского сегмента МКС с 2000 г., сохранение ресурса двигателей и экономия топлива являются важными задачами, стоящими перед российскими разработчиками программного обеспечения систем управления движением и навигации (СУДН) космических аппаратов (КА). Необходимо заметить, что программный компонент поиска траекторий, оптимизирующих расход топлива, может быть применён не только для МКС, а также для других перспективных орбитальных станций, например, планируемой российской орбитальной космической станции или лунной орбитальной станции, где задача экономии топлива и ресурса ДО становится ещё более актуальной.

В работах отечественных и зарубежных авторов часто исследуются решения задачи оптимальной по быстродействию и расходу топлива переориентации КА, но часто при рассмотрении частных случаев разворотов вокруг оси Эйлера. Многими авторами упоминалось, что получение аналитического решения задачи оптимизации могло бы предоставить возможность его применения в бортовых алгоритмах КА, но на текущий момент такие решения найдены лишь при определённых допущениях, например, при осевой симметрии КА. На орбитальной станции «Мир» для сокращения расхода топлива в течение разворотов было использовано

подобное допущение для компонент матрицы тензора инерции. Американскими специалистами в 2006 г. был разработан и применён разворот МКС только на силовых гироскопах. А в 2007 г. был разработан метод выполнения разворотов МКС через механизм разгрузки гиродинов с использованием двигателей РС. Используя этот способ управления, развороты МКС под управлением американского сегмента проводятся по заранее рассчитанной траектории.

В связи с невозможностью решения задачи оптимального разворота на мощностях бортового компьютера СМ было предложено использовать механизм отслеживания заданной с Земли траектории разворота. Для этого был разработан программный компонент СУДН, использующий заранее рассчитанную на Земле последовательность кватернионов ориентации станции, которая оптимизирует расход топлива.

Объектом исследования является переориентация крупногабаритной космической конструкции на большие углы.

Предметом исследования являются оптимальные по расходу топлива траектории переориентации крупногабаритной космической конструкции на большие углы с использованием двигателей ориентации и гравитационного момента сил.

Целью данной работы является осуществление оптимальных по расходу топлива разворотов крупногабаритной космической конструкции при помощи двигателей ориентации с использованием имеющихся возможностей системы управления движением на примере МКС. Для оптимизации расхода топлива предлагается использовать модель воздействия на МКС момента сил гравитации, а для верификации полученных траекторий также использовать модель воздействия аэродинамического момента сил.

Цель достигалась путём сведения к нескольким **задачам**:

1. Описать математическую модель углового движения орбитальной станции в виде кинематического и динамического уравнений.
2. Описать возмущающие моменты сил, такие как управляющие моменты сил, создаваемые двигателями ориентации, аэродинамический и гравитационный моменты сил, действующие на конструкцию орбитальной станции. Оценить величину и необходимость учёта гравитационного и аэродинамического моментов сил на динамику углового движения крупногабаритной космической конструкции.
3. Описать модель нагрузок на элементы конструкции КА для оценки величин возникающих нагрузок на критические элементы, такие как крепления солнечных батарей, радиаторов, стыковочные узлы модулей и транспортных космических кораблей.
4. Исследовать возможности численного решения задачи оптимальной по расходу топлива переориентации КА.

5. Разработать программный компонент поиска оптимальных по расходу топлива траекторий переориентации орбитальной станции в виде последовательности кватернионов и в виде циклограмм включений двигателей. Провести анализ возможности использования циклограмм включений двигателей для проведения оптимальных разворотов, учитывая возможные ошибки в исходных данных и возникающие нагрузки в моменты работы ДО при выключенной логике Pulse-Train.
6. Синтезировать траектории для определённой конфигурации МКС и начальных условий, провести статистическое моделирование и их верификацию на наземном комплексе отработки для дальнейшего проведения лётных испытаний.

Научная новизна: разработан алгоритм поиска оптимальных траекторий разворота МКС при управлении ориентацией на ДО при помощи псевдоспектральных методов. Новизна диссертационной работы сводится к следующему:

1. Впервые среди разработчиков программного обеспечения управления движением КА были применены псевдоспектральные методы для приведения оптимизационных задач управления переориентацией при помощи реактивных двигателей, имеющих релейную выходную характеристику, к задачам нелинейного математического программирования (НЛП), которые в дальнейшем могут быть решены численно.
2. Получен ряд траекторий переориентации орбитальной станции, оптимизирующих расход топлива и сокращающих количество включений двигателей для сохранения их ресурса, которые были впервые применены на МКС под управлением российского сегмента.
3. Получены циклограммы включений двигателей для выполнения пространственных манёвров и оценки возникающих нагрузок на критические элементы конструкции во время проведения оптимального разворота.

Практическая значимость работы заключается в существенном сокращении расхода топлива и в экономии ресурса реактивных двигателей при переориентациях МКС по сравнению с используемыми бортовыми алгоритмами управления ориентацией СУДН РС МКС, которые производят пространственный разворот по кратчайшей траектории вокруг оси эйлера поворота между исходным и требуемым положениями ориентации. Такие манёвры требуют количество топлива не менее 50 кг при развороте на $\approx 180^\circ$ по рысканью, а количество включений достигает ≈ 2000 . Ресурс двигателей имеет ограничения, как по общей длительности работы, так и по суммарному количеству включений. Таким образом, сохранение

ресурса двигателей и экономия дорогостоящего топлива определяют практическую значимость работы.

Методология и методы исследования. Задача нахождения траектории оптимального углового движения сводится к задаче минимизации функционала, связанного со временем работы двигателей, а значит и с расходом топлива, затрачиваемого на их работу. При этом уравнениями связи являются уравнения вращательного движения твёрдого тела. Описываемая задача имеет большое количество неизвестных переменных, поэтому для ее решения предлагается использовать численные методы. В работе разрабатываются два метода, позволяющие численно решать задачу оптимального управления. В обоих методах применяются псевдоспектральные методы для приведения задачи оптимального управления к задаче НЛП. Получаемые дискретизированные задачи могут быть решены при помощи известных решателей подобных задач, например, метод последовательного квадратичного программирования или метод внутренней точки.

Для верификации траекторий, рассчитанных при помощи разработанного программного компонента, были использованы моделирующие комплексы, разработанные специалистами ПАО «РКК «Энергия». В них используются бортовые алгоритмы СУДН МКС, модели движения центра масс и вокруг центра масс, модели исполнительных органов — двигателей и гиродинов, модели датчиковой аппаратуры, а также модели воздействия окружающей среды.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработан программный компонент для поиска оптимальных по расходу топлива траекторий, основанный на использовании псевдоспектральных методов Лобатто и Радау для преобразования оптимизационной задачи к задаче НЛП.
2. Получены различные типы траекторий в виде последовательности кватернионов ориентации, оптимизирующие расход топлива и количество включений двигателей ориентации и обеспечивающие разворот МКС на угол $\approx 180^\circ$ по рысканью при разных наборах используемых ДО.
3. На основе оптимальных траекторий были получены циклограммы включений двигателей, обеспечивающие разворот МКС на угол $\approx 180^\circ$ по рысканью, для которых достаточно пяти включений двигателей суммарно по всем каналам управления.

Достоверность полученных результатов обеспечивается проведёнными лётными испытаниями разработанных траекторий разворотов на МКС в рамках космического эксперимента. Результаты анализа телеметрической информации (ТМИ) показали значительную экономию потраченного топлива по сравнению с разворотами, проводимыми под штатным управлением РС МКС.

Апробация работы. Результаты, представленные в работе, методы и алгоритмы докладывались, обсуждались и получили одобрение специалистов на следующих конференциях:

1. XVIII, XIX, XX, XXI, XXIII конференции молодых учёных «Навигация и управление движением» (2016-2019 гг. и 2021 г., г. Санкт-Петербург);
2. 51-е научные чтения памяти К.Э. Циолковского (20-22 сентября 2016 г., г. Калуга);
3. 59 и 60 научные конференции МФТИ (2016 г. и 2017 г., г. Москва-г. Долгопрудный);
4. XLI, XLII Академические чтения по космонавтике, посвящённые памяти академика С.П. Королёва (2017 г. и 2018 г., г. Москва);
5. XXI научно-техническая конференция молодых учёных и специалистов «РКК «Энергия» (30 октября-3 ноября 2017 г., г. Королёв);
6. Семинар по механике космического полета им. В.А. Егорова на механико-математическом факультете МГУ (2017 г. и 2020 г., г. Москва);
7. Ежегодный конкурс научно-технических работ молодых учёных и специалистов им. С.П. Королёва, (2017 г. и 2018 г., г. Королёв);
8. Юбилейная XXV и XXVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам (2018 г. и 2021 г., г. Санкт-Петербург);
9. 4-ая, 5-ая и 6-ая Всероссийские молодёжные научно-практические конференции «Орбита молодёжи» (2018-2020 гг., г. Красноярск, г. Санкт-Петербург, г. Пермь).

Личный вклад. Результаты, полученные в рамках диссертационной работы, являются оригинальными. Они были получены лично автором или при его участии. Автором выполнено следующее:

1. описана математическая модель углового движения орбитальной станции в виде кинематического и динамического уравнений с учётом возмущающих и управляющего моментов сил;
2. поставлена задача поиска оптимальной по расходу топлива траектории переориентации орбитальной станции;
3. задача оптимального управления была преобразована в задачу нелинейного математического программирования при помощи псевдоспектральных методов Лобатто и Радау;
4. разработан программный компонент для поиска оптимальных по расходу топлива траекторий переориентаций орбитальной станции, а также для поиска оптимальных циклограмм включений двигателей;
5. получены оптимальные траектории переориентаций для МКС, проведено статистическое моделирование траекторий, проведена верификация траекторий на наземном комплексе обработки;

6. получены оптимальные циклограммы включений двигателей для выполнения переориентаций МКС, проведён анализ возникающих нагрузок на конструкцию при их использовании, проведён анализ возможности их использования посредством статистического моделирования;
7. подготовлены исходные данные для осуществления космического эксперимента «МКС-Разворот», проводимого при непосредственном участии автора, в течение которого были успешно использованы рассмотренные в диссертации траектории;
8. проведён анализ результатов лётных испытаний разработанных траекторий.

Публикации. Наиболее значимые достижения по теме исследования представлены в 20 публикациях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 – в периодических научных журналах, индексируемых Scopus, 14 – в тезисах докладов и в сборниках статей конференций.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и одного приложения. Полный объём диссертации составляет 153 страницы, включая 44 рисунка и 23 таблицы. Список литературы содержит 81 наименование.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы исследований. Сформулирована цель работы и задачи, которые необходимо было выполнить для достижения цели. Излагается научная новизна, практическая значимость, методы исследований. Сформулированы основные положения, выносимые на защиту, и обоснована достоверность полученных результатов.

Первая глава посвящена описанию математических моделей углового движения КА, окружающей среды, нагрузок на элементы конструкции, а также постановке задачи поиска оптимальных по расходу топлива траекторий переориентации.

Для того чтобы сформулировать задачу оптимального управления ориентацией были представлены используемые системы координат для описания уравнений движения КА, которыми являются орбитальная система координат (ОСК) и связанная с КА система координат (ССК).

Для описания углового движения были использованы уравнения Пуассона и Эйлера:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}(\mathbf{q} \circ \bar{\omega} - \bar{\omega}^{orb} \circ \mathbf{q}), \quad (1) \quad \dot{\omega} = \mathbf{J}^{-1}(-[\omega \times \mathbf{J}\omega] + \mathbf{M}), \quad (2)$$

где \mathbf{q} – кватернион ориентации ССК относительно ОСК, ω – вектор абсолютной угловой скорости КА в проекциях на оси ССК и его расширение $\bar{\omega}$,

$\bar{\omega}^{orb}$ — расширение вектора угловой скорости вращения ОСК вокруг Земли, \circ — обозначение кватернионного произведения, \mathbf{J} — матрица тензора инерции КА, \times — обозначение векторного произведения, \mathbf{M} — вектор суммарного момента сил, действующего на КА.

На КА действует момент сил \mathbf{M} , состоящий из внешнего момента сил \mathbf{M}^{ext} , вызванного окружающей средой, и управляющего момента сил \mathbf{M}^u , создаваемый ДО:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{ext} + \mathbf{M}^u.$$

На околоземной орбите на КА в преобладающей степени действуют гравитационный \mathbf{M}^{grav} и аэродинамический \mathbf{M}^{aer} моменты сил. В настоящее время МКС — сложная конструкция, форма которой непрерывно изменяется из-за вращающихся солнечных батарей и радиаторов охлаждения. Поэтому учёт аэродинамических моментов сил, действующих на орбитальную станцию, является нелёгкой задачей. Аэродинамический момент сил для КА можно рассчитывать по упрощённой зеркально-диффузной модели обтекания набегающим потоком. В основу алгоритма положена расчётная схема, реализующая так называемую зеркально-диффузную аэродинамическую модель обтекания свободномолекулярным потоком набегающих частиц. Основная идея описываемой модели состоит в том, что некоторая доля молекул воздушного потока испытывает абсолютно упругий удар, а оставшаяся доля — абсолютно неупругий удар с элементами конструкции КА. Коэффициент диффузности d определяет разделение потока на эти две составляющие. Также для снижения сложности расчёта аэродинамических характеристик элементы конструкции с некоторым приближением заменяются тремя плоскостями — элементарными панелями. Таким образом, запишем \mathbf{M}^{ext} :

$$\mathbf{M}^{ext} = \underbrace{3 (\omega^{orb})^2 \mathbf{j} \times \mathbf{J} \mathbf{j}}_{\mathbf{M}^{grav}} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho V^2 S_{xap} L_{xap} \sum_{i=1}^N \mathbf{C}_i^T}_{\mathbf{M}^{aer}},$$

где ω^{orb} — модуль вектора угловой скорости орбитального движения, \mathbf{j} — орт направления местной вертикали в связанном базисе КА, скалярные величины ρ и V — плотность набегающего потока воздуха и его скорость относительно КА, \mathbf{C}_i^T — вектор аэродинамических коэффициентов моментов сил для элементарной панели i , S_{xap} — характерная площадь КА, L_{xap} — характерный размер КА, N — количество элементарных панелей.

Управляющий момент сил будет создаваться при помощи ДО. Пусть на КА создаются моменты сил по шести каналам управления: \pm крен (К),

±рысканье (P), ±тангаж (T). Тогда запишем матрицу управления \mathbf{T}^{th} размерности 6×3 , 6-вектор управления \mathbf{u} и управляющий момент сил \mathbf{T}^u :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^{th} &= (\mathbf{T}^{+K} \quad \mathbf{T}^{+P} \quad \mathbf{T}^{+T} \quad \mathbf{T}^{-K} \quad \mathbf{T}^{-P} \quad \mathbf{T}^{-T}), \\ \mathbf{u} &= (u^{+K} \quad u^{+P} \quad u^{+T} \quad u^{-K} \quad u^{-P} \quad u^{-T})^T, \\ \mathbf{M}^u &= \mathbf{T}^{th} \mathbf{u},\end{aligned}$$

где столбцы матрицы управления — это векторы моментов сил, создаваемых ДО по каждому из каналов управления, а компоненты вектора управления \mathbf{u} находятся в диапазоне $[0, 1]$.

Для исследования нагрузок на элементы конструкции МКС, обладающую упругими свойствами, было использовано программное обеспечение, разработанное специалистами ПАО «РКК «Энергия», основанное на модальной форме упругой модели КА. Для того, чтобы вычислить величины нагрузок на критические интерфейсы конструкции КА в общем случае необходимо найти мгновенные значения нагрузок в некотором наборе узлов конечно-элементной модели КА. Определим вектор $\mathbf{LD}(t)$ — полный вектор текущих нагрузок, где компонентами являются силы или моменты сил. Рассматриваемая модель основывается на преобразующей матрице нагрузок \mathbf{LTM} , обеспечивающая линейную зависимость между нагрузками $\mathbf{LD}(t)$ и текущими обобщёнными координатами ζ упругих колебаний:

$$\mathbf{LD}(t) = \mathbf{LTM} \cdot \zeta(t).$$

Основной целью работы является создание алгоритма поиска оптимальных по расходу топлива разворотов МКС на большие углы с использованием ДО РС МКС и учитывающего влияние окружающей среды. Время разворота будет фиксированным, начальная и конечная ориентации будут равны равновесным. Для проведения оптимального разворота будет использоваться гравитационный момент сил для сокращения суммарного времени работы ДО и уменьшения расхода топлива. В дальнейшем при постановке задачи оптимального управления МКС будет описываться как твёрдое тело, а величина тяг, создаваемых двигателями, может изменяться непрерывно.

Функционал Φ требуется определить так, чтобы он был связан с расходом топлива. В нашем случае требуется сократить суммарное время работы ДО по каждому из каналов управления. Для этого можно взять интеграл от компонентов вектора управления \mathbf{u} :

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T \mathbf{u} dt, \quad (3) \quad \Phi = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^6 u_i dt. \quad (4)$$

Функционал (3) является квадратичным. Он даёт следующее преимущество — при решении задачи функция угловой скорости и ориентации будут

иметь непрерывные производные на всем временном промежутке. Функционал (4) имеет следующий смысл — если его умножить на мгновенный массовый расход Q_M [кг/с], то получим затраченное количество топлива.

Ранее были представлены кинематическое (1) и динамическое (2) уравнения движения, которые должны выполняться в течение всего манёвра переориентации МКС. Они составят систему уравнений, которые будут из себя представлять уравнения связи при решении задачи оптимизации. Граничными условиями задачи являются начальный и конечный кватернионы ориентации МКС относительно ОСК, и начальный и конечный векторы угловой скорости МКС относительно ССК. В качестве ограничений на переменные, которые будут выполняться на всём временном отрезке, являются норма кватернионов равная «1» и ограничения на компоненты вектора управления, упомянутые выше.

Определив функционалы (3 и 4), уравнения движения (1 и 2), граничные условия, траекторные ограничения сформулируем задачу оптимизации:

$$\begin{aligned}
 \min \Phi &= \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T \mathbf{u} dt \text{ или } \min \Phi = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^6 u_i dt, \\
 \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{q} \circ \bar{\omega} - \bar{\omega}^{orb} \circ \mathbf{q}), \forall t \in [t_0, t_f], \\
 \dot{\omega} &= \mathbf{J}^{-1}(-[\omega \times \mathbf{J}\omega] + \mathbf{M}^{ext} + \mathbf{T}^{th} \mathbf{u}), \forall t \in [t_0, t_f], \\
 \|\mathbf{q}\| &= 1, t \in [t_0, t_f], \\
 0 \leq u_i &\leq 1, i = 1, \dots, 6, t \in [t_0, t_f], \\
 \mathbf{q}_0 &= \mathbf{q}_0^{TEA}, \quad \bar{\omega}_0 = \tilde{\mathbf{q}}_0^{TEA} \circ \bar{\omega}^{orb} \circ \mathbf{q}_0^{TEA}, \\
 \mathbf{q}_f &= \mathbf{q}_f^{TEA}, \quad \bar{\omega}_f = \tilde{\mathbf{q}}_f^{TEA} \circ \bar{\omega}^{orb} \circ \mathbf{q}_f^{TEA},
 \end{aligned} \tag{5}$$

где индексы «0» и «f» обозначают начальную и конечную точку траектории, соответствующие моментам времени t_0 и t_f , u_i — компоненты вектора \mathbf{u} , \mathbf{q}^{TEA} — кватернион равновесной ориентации, $\tilde{\mathbf{q}}^{TEA}$ — сопряжённый кватернион к \mathbf{q}^{TEA} .

Вторая глава посвящена псевдоспектральным методам Лобатто и Радау, используемым в работе для аппроксимации непрерывных функций. При таком подходе уравнения вращательного движения, которыми являются дифференциальные уравнения первого порядка, составят систему уравнений связи между значениями кватернионов ориентации, угловой скорости и значениями вектора управления в конечном наборе точек. Требуемые граничные условия и траекторные ограничения, налагаемые на переменные функции состояния и вектор управления, преобразуются в условия, выполняемые в узловых точках, и дополняют систему уравнений. Таким образом, поставленная задача поиска функций, доставляющих

минимум функционалу, переформулируется в задачу нелинейного математического программирования, которая может быть решена численно.

Постановку задачи (5) с функционалом (3) преобразуем к задаче НЛП при помощи псевдоспектрального метода Лобатто, преобразовав уравнения движения, траекторные ограничения, граничные условия к параметрическому виду, а интегрирование функционала будем производить при помощи правила Гаусса-Лобатто:

$$\begin{aligned}
 \min \Phi &= \frac{(t_f - t_0)}{2} \sum_{i=0}^N \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i w_i^L, \\
 \frac{2}{(t_f - t_0)} \sum_{i=0}^N \mathbf{D}_{ki}^L \mathbf{q}_i &= \frac{1}{2} (\mathbf{q}_k \circ \bar{\omega}_k - \bar{\omega}_k^{orb} \circ \mathbf{q}_k), \quad k = 0, \dots, N, \\
 \frac{2}{(t_f - t_0)} \sum_{i=0}^N \mathbf{D}_{ki}^L \omega_i &= \mathbf{J}^{-1} (-[\omega_k \times \mathbf{J} \omega_k] + \\
 &\quad + \mathbf{M}_k^{ext} + \mathbf{T}^{th} \mathbf{u}_k), \quad k = 0, \dots, N, \\
 \|\mathbf{q}_k\| &= 1, \quad k = 0, \dots, N, \\
 0 \leq u_{ik} &\leq 1, \quad i = 1, \dots, 6, \quad k = 0, \dots, N, \\
 \mathbf{q}_0 &= \mathbf{q}_0^{TEA}, \quad \bar{\omega}_0 = \tilde{\mathbf{q}}_0^{TEA} \circ \bar{\omega}^{orb} \circ \mathbf{q}_0^{TEA}, \\
 \mathbf{q}_N &= \mathbf{q}_f^{TEA}, \quad \bar{\omega}_N = \tilde{\mathbf{q}}_f^{TEA} \circ \bar{\omega}^{orb} \circ \mathbf{q}_f^{TEA},
 \end{aligned} \tag{6}$$

где \mathbf{D}_{ki}^L — матрица дифференцирования Лобатто размерности $(N + 1) \times (N + 1)$, w_i^L — весовые коэффициенты в точках коллокации Лежандра-Гаусса-Лобатто (LGL). В дальнейшем решения оптимизационной задачи, полученные из уравнений (6), будем называть «гладкими» траекториями, так как функция вектора угловой скорости имеет непрерывные производные на всём временном отрезке.

Для решения задачи на оптимальность с функционалом (4) был выбран псевдоспектральный метод Радау. Выбор определён тем, что такой функционал даёт решение для функции управления наподобие дискретных включений ДО. Поскольку при выборе псевдоспектрального метода Лобатто распределение точек коллокации LGL определено, то получить более точное решение во времена включений двигателей не представляется возможным. Точки коллокации Лежандра-Гаусса-Радау (LGR) не включают крайнюю правую точку рассматриваемого отрезка, и при этом производная функции состояния, рассчитываемая в точках коллокации, для вычислений использует точки коллокации и крайнюю правую точку. Это свойство даёт возможность разделить исходный отрезок на несколько частей и выбрать число коллокационных точек для каждого из отрезков для более аккуратного решения, например, в периоды работы двигателей.

Исходный временной отрезок $s = [t_0, t_f]$ разделим на M отрезков разбиения $[s_{m-1}, s_m]$, $m = 1, \dots, M$. При этом выполняется следующее выражение $t_0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_M = t_f$, где s_m — точки разбиения. Определим следующие обозначения для параметров, соответствующих каждому отрезку $[s_{m-1}, s_m]$: количество коллокационных точек N_m , при этом точка $N_m + 1$ соответствует s_m ; матрица дифференцирования Радау размерностью $N_m \times (N_m + 1)$ \mathbf{D}_{mki}^R ; веса интегрирования w_m^R . Нижний индекс « m_i » у параметров будет означать i -ую точку на отрезке m . Тогда постановка задачи (5) при использовании мультиинтервального псевдоспектрального метода Радау будет записана так:

$$\begin{aligned}
 \min \Phi &= \sum_{m=1}^M \frac{s_m - s_{m-1}}{2} \sum_{i=1}^{N_m+1} \sum_{c=1}^6 u_{ic} w_{m_i}^R, \\
 \frac{2}{s_m - s_{m-1}} \sum_{i=1}^{N_m+1} \mathbf{D}_{mki}^R \mathbf{q}_{m_i} &= \frac{1}{2} (\mathbf{q}_{m_k} \circ \bar{\omega}_{m_k} - \\
 &\quad - \bar{\omega}_{m_k}^{orb} \circ \mathbf{q}_{m_k}), \quad m = 1, \dots, M, \quad k = 1, \dots, N_m, \\
 \frac{2}{s_m - s_{m-1}} \sum_{i=1}^{N_m+1} \mathbf{D}_{mki}^R \omega_{m_i} &= \mathbf{J}^{-1} (-[\omega_{m_k} \times \mathbf{J}\omega_{m_k}] + \\
 &\quad + \mathbf{M}_{m_k}^{ext} + \mathbf{T}^{th} \mathbf{u}_{m_k}), \quad m = 1, \dots, M, \quad k = 1, \dots, N_m, \\
 \|\mathbf{q}_{m_k}\| &= 1, \quad m = 1, \dots, M, \quad k = 1, \dots, N_m + 1, \\
 0 \leq u_{cm_k} &\leq 1, \quad c = 1, \dots, 6, \quad m = 1, \dots, M, \quad k = 1, \dots, N_m + 1, \\
 \mathbf{q}_{1_1} &= \mathbf{q}_0^{TEA}, \quad \bar{\omega}_{1_1} = \tilde{\mathbf{q}}_0^{TEA} \circ \bar{\omega}^{orb} \circ \mathbf{q}_0^{TEA}, \\
 \mathbf{q}_{M_{N_M+1}} &= \mathbf{q}_f^{TEA}, \quad \bar{\omega}_{M_{N_M+1}} = \tilde{\mathbf{q}}_f^{TEA} \circ \bar{\omega}^{orb} \circ \mathbf{q}_f^{TEA}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

В дальнейшем решения оптимизационной задачи, полученные из уравнений (7), будем называть «импульсными» траекториями, так как далее будут заметно конечное число периодов работы ДО.

Задачи НЛП (6) и (7) были решены численно в среде MATLAB при помощи решателя задач НЛП — функции «fmincon», входящая в пакет «Optimization Toolbox». Функция «fmincon» предлагает несколько методов решения НЛП. Для решения задачи использовался метод последовательного квадратичного программирования.

Третья глава посвящена расчёту траекторий управления ориентацией и результатам лётных испытаний. Для этого были определены исходные данные, выбрана длительность проведения оптимального манёвра, проведён анализ необходимости учёта гравитационного и аэродинамического моментов сил, посчитаны траектории разворотов и проведена их верификации для дальнейших лётных испытаний.

Реализация алгоритма пространственного разворота непосредственно в бортовом компьютере невозможна из-за его вычислительной

сложности. В этом случае возможны несколько вариантов выполнения рассчитанного на Земле манёвра: слежение за рассчитанной траекторией; включение двигателей по циклограмме управления.

Для того чтобы определить длительность проведения оптимального манёвра, требовалось провести расчёт нескольких траекторий с разными временами. Проведён поиск решений для шести случаев: 1375 с, 2750 с, 4125 с, 5500 с, 6875 с, 8250 с. В качестве начального приближения был взят конечный поворот вокруг оси Эйлера между начальным и конечным угловыми положениями МКС. Для каждого из случаев, описанных выше, были получены «гладкие» траектории при решении задачи НЛП по уравнениям (6). На рисунке 1 представлена оценка расхода топлива для каждой из полученных траекторий. Как видно из рисунка, график расхода топлива в зависимости от времени разворота убывает по гиперболическому закону. При увеличении времени свыше 5000-6000 с расход топлива уменьшается незначительно, в то время как при уменьшении времени ниже 5000 с оценка затраченного топлива за разворот начинает существенно увеличиваться. Исходя из этого, примем длительность оптимального манёвра равным $\approx 1,5 \text{ ч} = 5400 \text{ с}$.

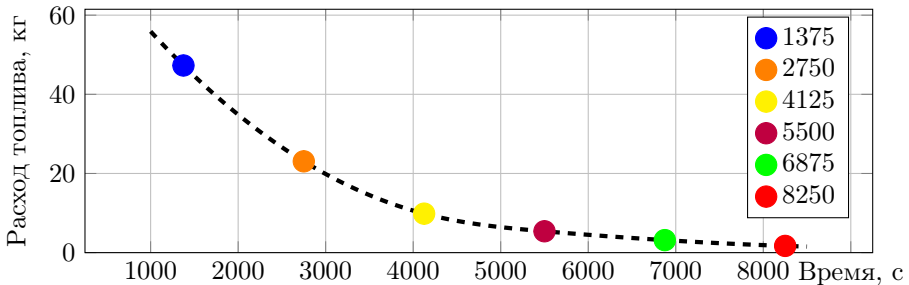


Рис. 1 — График оценки расхода топлива от длительности манёвра

Требовалось найти решения для прямого и обратного разворотов. Для обратного разворота начальные (\mathbf{q}_0, ω_0) и конечные (\mathbf{q}_N, ω_N) условия были поменяны местами. Для каждого из разворотов было получено четыре варианта решения. По два варианта решения для прямого и обратного манёвров было получено при решении задачи НЛП по формулам (6) при использовании псевдоспектрального метода Лобатто. В дальнейшем такие «гладкие» решения будут обозначаться индексом «а». Также по два варианта решения для каждого манёвра было получено при решении задачи НЛП по формулам (7) при использовании мультиинтервального псевдоспектрального метода Радау. В дальнейшем такие «импульсные» решения будут обозначаться индексом «б». На рисунках 2 изображены графики изменения ориентации, которые представлены через углы Крылова в последовательности поворотов рысканье-тангаж-крен (слева), и

графики изменения вектора собственной угловой скорости МКС (справа). Сплошной и пунктирной линиями обозначены «гладкие» и «импульсные» траектории соответственно. Отметим, что для решений, обозначенных «Вариант 1», характерны максимальные отклонения в канале крена на $\approx 20^\circ$, а в канале тангажа — на $\approx 45^\circ$. Решениям, обозначенным «Вариант 2», характерны полные перевороты в канале крена на $\approx 360^\circ$, а в канале тангажа — отклонения на $\approx 70^\circ$.

Для первичной верификации траекторий всех восьми разворотов было проведено математическое моделирование разворотов МКС на наземном комплексе отработки (НКО). НКО представляет собой комплексный стенд, в котором используется реальная бортовая вычислительная машина с версией бортового программного обеспечения (ПО), использующейся на борту МКС. Эта версия включает в себя логику управления в режиме разворота по траектории. Также в ПО НКО реализованы модели динамики и кинематики углового и поступательного движения МКС, модели ДО, модели датчиков угловой скорости, модель атмосферы Земли. Результаты моделирования на НКО показали значительную экономию топлива в ≈ 10 раз и ресурса ДО по сравнению со штатным алгоритмом разворота РС МКС.

Для последующей верификации рассчитанных траекторий было необходимо провести статистическое моделирование, во время которого проводится достаточно большое количество моделирований при задании отклонений от исходных данных, использованных при расчёте. Результаты были получены на комплексе «МКС-МА», разработанным специалистом РКК «Энергии», в котором реализован бортовой алгоритм разворота в режиме слежения за траекторией и используется другая более точная модель атмосферы, чем на комплексе отработки. Вариации задавались по следующим параметрам: начальная ориентация МКС в виде углов Крылова; начальная угловая скорость; матрица тензора инерции МКС; тяги ДО; параметры модели атмосферы — C^F и C^T . Причём при задании вариации одному из параметров, остальные были неизменными и их значения были равны исходным. Задаваемая вариация определялась случайным образом с равномерным распределением. Было проведено по 200 прогонов моделирования при варьировании каждого из параметров для каждой из траекторий. Таким образом, всего прогонов восьми траекторий было осуществлено 8000. Результаты выявили несущественные отклонения от средних значений по расходу топлива и числу включений ДО. Таким образом, рассчитанные траектории можно использовать при проведении дальнейших лётных испытаний.

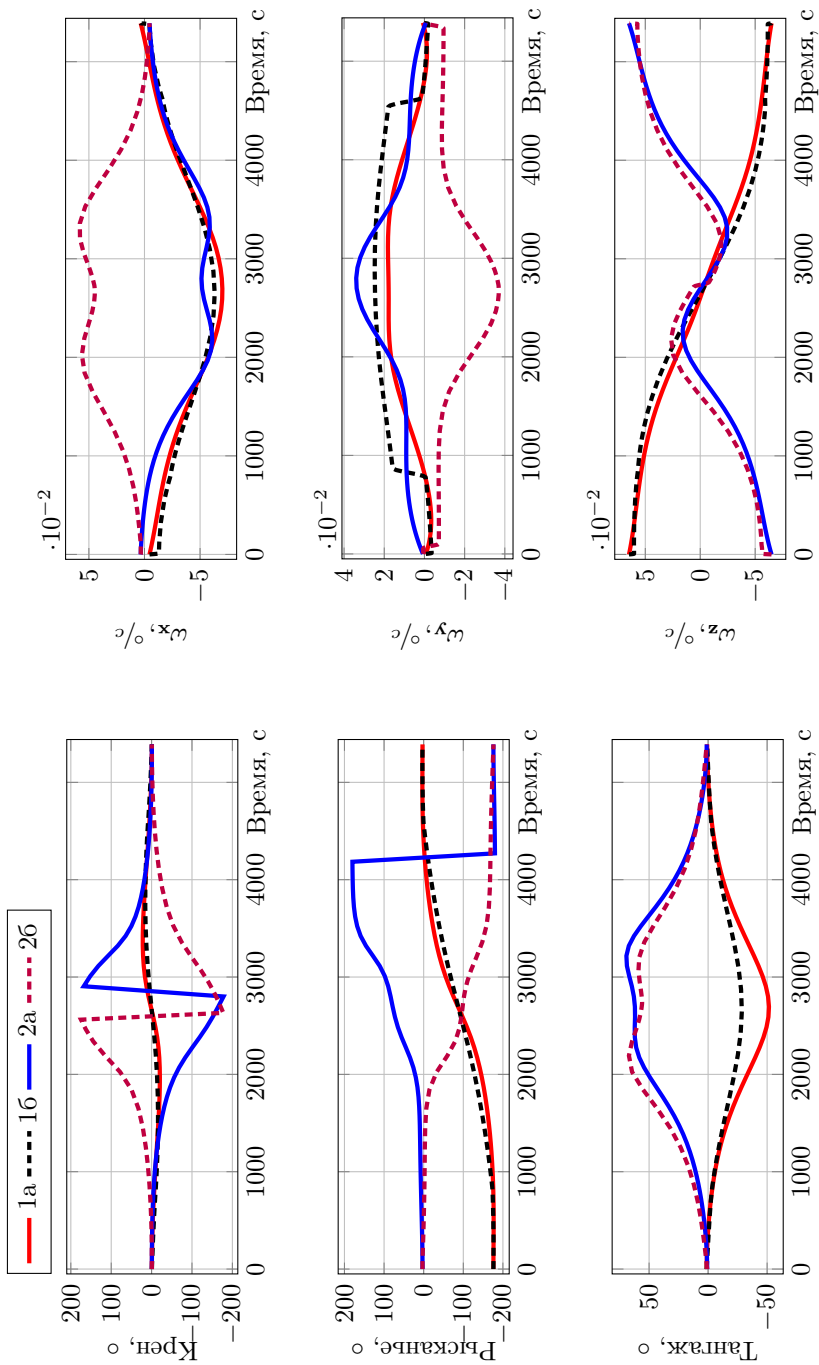


Рис. 2 — Прямой и обратный развороты. Варианты 1а, 1б, 2а, 2б. Полученные траектории

Для того чтобы показать, что гравитационный момент сил позволяет экономить топливо ДО за счёт более эффективного углового разгона и торможения МКС, было проведено сравнение двух траекторий длительностью 5400 с. В первом случае был проведён поиск решений задачи НЛП по уравнениям (6). Второй случай отличается тем, что в уравнениях (6) исключается внешний момент сил \mathbf{M}^{ext} . На рисунке 3 представлены моменты сил, действующие на МКС, где приняты следующие обозначения: \mathbf{M}_+^u — управляющий момент сил в первом случае; \mathbf{M}_-^u — управляющий момент сил во втором случае; \mathbf{M}^{grav} — гравитационный момент сил в первом случае; $\mathbf{M}^{gyro} = -[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}]$ — гироскопический момент сил в первом случае; $\mathbf{M}^{sum} = \mathbf{M}_+^u + \mathbf{M}^{grav} + \mathbf{M}^{gyro}$ — сумма моментов сил в первом случае. Как видно из графиков, при учёте гравитационного момента сил требуется меньшее воздействие управляющего момента, а это впоследствии приводит к меньшему расходу топлива. В основном роль управления сводится к приданию и гашению угловых скоростей в начале и конце манёвра, а также поддержанию баланса между гравитационным и гироскопическим моментами сил, действующих на орбитальную станцию. В дополнение для каждой из траекторий была проведена оценка расхода топлива. Для первого и второго случая были получены следующие оценки соответственно: 5.39 кг и 13.64 кг. Это показывает значительное влияние гравитации на угловое движение МКС и необходимость её учёта.

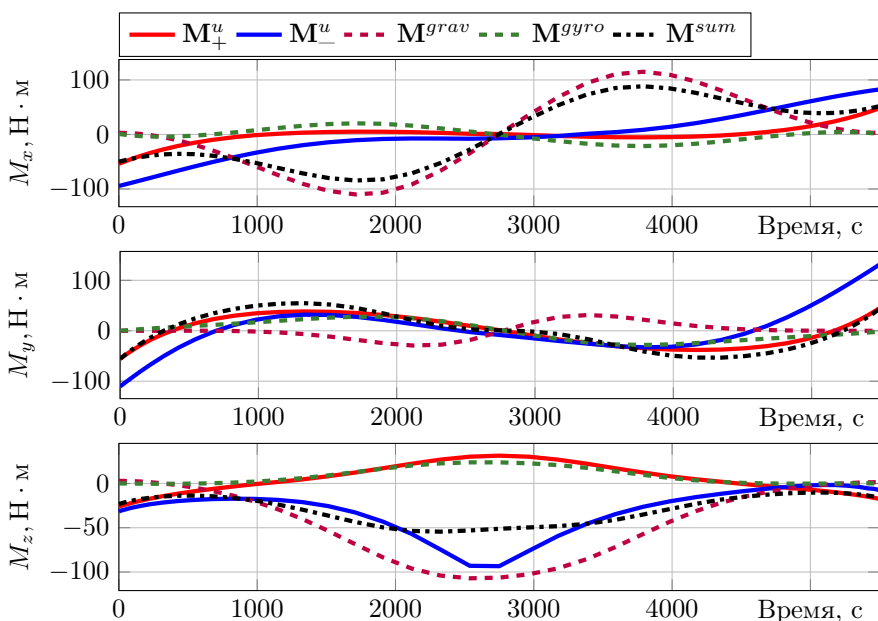


Рис. 3 — Внешние и управляющий моменты сил

Дополнительно из моделирования были получены углы приводов поворотных элементов МКС в течение разворота для расчёта аэродинамических характеристик моментов сил, а также получены итоговые аэродинамические моменты сил относительно центра масс МКС. Полученные значения значительно меньше управляющих и гравитационного моментов сил (рис. 3) и не превышают $15 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Сложность получения необходимых параметров для расчёта аэродинамических коэффициентов вместе с незначительным влиянием на динамику разворота орбитальной станции приводят к отсутствию необходимости учёта аэродинамических моментов сил при поиске оптимальных траекторий разворотов МКС.

Графики компонент вектора управления «импульсных» траекторий показали несколько участков активной работы двигателей, например, для траекторий с переворотом по крену 5 участков, при этом без управления по каналу крена. Было предположено, что существует последовательность включений двигателей с определёнными длительностями работы, при которых орбитальная станция произведёт требуемый пространственный манёвр. После проведения ряда действий были получены циклограммы включений двигателей для траекторий с переворотом по крену. Проведение математического моделирования без учёта аэродинамических моментов сил показало хорошие результаты по приведению орбитальной станции к нужной ориентации, представленные в таблице 1, где $\Delta\mathbf{q}$ — ошибка по углу в конечной точке манёвра, $\Delta\omega$ — ошибка по угловой скорости в конечной точке манёвра. Оценка возникающих нагрузок продемонстрировала, что они не превышают 15% от предельно допустимых значений. В то же время статистическое моделирование выявило существенное негативное влияние вариаций в начальных условиях на результат проведения оптимальных манёвров, при этом больше всего на успешность проведения разворота влияют ошибки начальной ориентации и угловой скорости. Из чего можно сделать вывод, что использование циклограмм включений двигателей невозможно без доработки бортового программного обеспечения.

Таблица 1 — Результаты оптимальных разворотов при управлении по циклограмме включений двигателей

Разворот	Расход топлива, кг	$\Delta\mathbf{q}$, °	$\Delta\omega$, °/с	$\Delta\omega/\omega^{orb}$
Прямой	1.32	1.68	0.0016	0.025
Обратный	1.11	4.68	0.0013	0.019

Первый этап проведения лётных испытаний было решено провести без привязки к каким-либо динамическим операциям, например, стыковкам/расстыковкам кораблей из соображений безопасности МКС. Для прямого разворота 28 декабря 2018 г. была выбрана траектория «Вариант 1а», изображённая на рисунке 2, а для обратного 29 декабря 2018 г. —

по траектории «Вариант 2а». Лётные испытания прошли штатно без замечаний. После испытаний был проведён анализ ТМИ, полученной во время разворота, для сравнения данных об ориентации МКС с требуемой траекторией, получения расхода топлива, циклограмм включений двигателей и количества включений. Расход топлива и количество включений двигателей для каждой из траекторий представлены в таблице 2.

Таблица 2 — Сводная информация по расходу топлива и количеству включений двигателей и сравнение со штатным алгоритмом

Разворот	Расход топлива, кг	Кол-во включений ДО
Опт. прямой	6.42	469
Опт. обратный	4.61	344
Штатный	>50	>1800
Опт. без ТГК	9.55	416
Штатный без ТГК	>180	>2500

Второй этап проведения лётных испытаний был проведён 5 апреля 2019 г. В рамках испытаний было решено не подключать двигатели ТГК для того, чтобы проверить возможность использования траекторий в ситуациях, когда корабль отсутствует на СО1. Для этого была посчитана новая траектория разворота с другой матрицей управления и другими начальными, конечными условиями. Был выбран тип траектории 2а, изображённой на рисунке 2, поскольку он показал себя более экономным по результатам первого этапа лётных испытаний. Разворот был проведён штатно. Расход топлива и количество включений двигателей представлены в таблице 2.

Результаты лётных испытаний показали существенную экономию расхода топлива и количества включений двигателей по сравнению со штатными алгоритмами разворота вокруг оси Эйлера.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. При помощи псевдоспектральных методов Лобатто и Радау поставленная задача оптимального по расходу топлива разворота крупногабаритной космической конструкции при управлении на ракетных двигателях была приведена к задаче нелинейного математического программирования в нескольких вариантах. Кроме того, в сформулированных уравнениях движения был добавлен учёт гравитационного момента сил. Учитывая особенность метода Радау, была получена возможность рассматриваемый временной отрезок разбить на несколько подинтервалов, где есть необходимость получить более точное решение, например, в моменты активных участков работы двигателей ориентации.
2. Для выполнения поставленных задач был разработан программный компонент, позволяющий рассчитывать траектории,

оптимизирующие расход топлива, задавая начальные, конечные условия и время проведения переориентации орбитальной станции. Программный компонент для решения задачи нелинейного программирования использует решатель, который применяет метод последовательного квадратичного программирования. Были реализованы оба псевдоспектральных метода Лобатто и Радау, а также мультиинтервальный метод.

3. При помощи разработанного программного компонента был получен набор траекторий управления разворотом: «гладкие» и «импульсные» траектории для прямого и обратного разворотов с небольшим отклонением по крену; «гладкие» и «импульсные» траектории для прямого и обратного разворотов с переворотом по крену. Полученные траектории были преобразованы в набор кватернионов ориентации относительно орбитальной системы координат в равностоящих точках при помощи полиномов Лагранжа, которые в дальнейшем могут быть использованы на борту Международной космической станции с помощью алгоритма разворота по заданной траектории.
4. Функции вектора управления «импульсных» траекторий показали конечное число активных участков работы двигателей. При помощи интегрирования компонент вектора управления, были получены циклограммы включений двигателей, позволяющие провести оптимальные по расходу топлива манёвры. Был проведён анализ нагрузок на элементы конструкции Международной космической станции при выполнении манёвров. Моделирование показало, что возникающие нагрузки в критических узлах орбитальной станции, которыми являются, например, места соединений солнечных батарей и радиаторов охлаждения, не достигают 15% от максимально допустимых значений. Из чего можно сделать вывод, что при выполнении оптимальных манёвров по циклограммам допустимо отказаться от профиля включений двигателей Pulse-Train.
5. Результаты моделирования на наземном комплексе отладки и статистического моделирования выявили существенное сокращение расхода топлива (примерно в 10 раз) и количества включений двигателей ориентации при переориентациях Международной космической станции в сравнении с алгоритмом разворота по кратчайшей траектории системы управления ориентацией российского сегмента. Статистическое моделирование циклограмм включений двигателей для выполнения оптимальных разворотов показало необходимость задания высокой точности исходных параметров в точке старта разворота, а в особенности точность начальной ориентации и угловой скорости Международной космической станции.

6. Проведен космический эксперимент на Международной космической станции. При его проведении выполнялись оптимальные переориентации орбитальной станции. Результаты эксперимента показали применимость разработанных различных вариантов «гладких» траекторий, а результаты по расходу топлива согласуются с результатами математического моделирования.

Публикации автора по теме диссертации

1. Использование псевдоспектрального метода для поиска траекторий оптимальных по расходу топлива разворотов Международной космической станции / А. А. Прутько, С. Н. Атрошенко, А. В. Богачев, А. Е. Старченко // Космическая техника и технологии. — 2019. — № 4. — 121–133, (9 с. авт., №1292, перечень ВАК от 22.10.2021).
2. Моделирование сил и моментов сил набегающего потока атмосферы в целях верификации динамических режимов системы управления движением и навигации МКС и синтеза оптимального управления / С. Н. Атрошенко, А. А. Прутько, А. Н. Крылов [и др.] // Космическая техника и технологии. — 2017. — № 4. — 72–88, (12 с. авт., №1292, перечень ВАК от 22.10.2021).
3. *Прутько А. А.* О нагрузках на элементы конструкции многоцелевого лабораторного модуля на автономном участке полета / А. А. Прутько, А. В. Сумароков // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. — 2017. — № 2. — 123–128, (12 с. авт., №365, перечень ВАК по группам спец.)
4. *Прутько А. А.* Использование спектральных методов для анализа собственных частот колебаний конструкции МКС и амплитуды шумов измерителя угловой скорости / А. А. Прутько, А. В. Сумароков // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. — 2018. — № 4. — 59–68, (6 с. авт., №365, перечень ВАК по группам спец.)
5. *Prut'ko A. A.* Optimal control of large space construction maneuvers / A. A. Prut'ko, S. N. Atroshenkov // 2018 25th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). — 2018. — P. 1–4.
6. *Prut'ko A. A.* Search for optimal propellant cyclograms of jet engines firing for large-sized spacecraft reorientations / A. A. Prut'ko // 2021 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). — 2021. — P. 1–3.

7. *Прутько А. А.* Исследование нагрузок на элементы конструкции Многоцелевого лабораторного модуля на автономном участке полета / А. А. Прутько, А. В. Сумароков // *Аэрофизика и космические исследования: труды 59-й научной конференции МФТИ, 21-26 ноября 2016 года.* — М. : МФТИ, 2016.
8. *Прутько А. А.* Решение задачи оптимального по расходу топлива маневра орбитальной пилотируемой станции псевдоспектральным методом Лобатто / А. А. Прутько // *Труды 60-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 20–26 ноября 2017 г. Аэрокосмические технологии.* — М. : МФТИ, 2017. — С. 102–103.
9. *Прутько А. А.* Разработка модели нагрузок на элементы Многоцелевого лабораторного модуля на автономном участке полёта / А. А. Прутько, А. В. Сумароков // *Материалы XVIII конференции молодых ученых с международным участием.* — г. Санкт-Петербург : АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. — С. 516–522.
10. *Прутько А. А.* Использование спектральных методов для анализа собственных частот колебаний конструкции Международной космической станции и амплитуды шумов измерителя угловой скорости / А. А. Прутько, А. В. Сумароков // *Материалы XIX конференции молодых ученых с международным участием.* — г. Санкт-Петербург : АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. — С. 38–40.
11. *Прутько А. А.* Разработка алгоритмов, оптимизирующих расход топлива, при разворотах больших космических конструкций / А. А. Прутько // *Материалы XX конференции молодых ученых с международным участием.* — г. Санкт-Петербург : АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2018. — С. 211–213.
12. *Прутько А. А.* Результаты проведения оптимального по расходу топлива разворота крупногабаритной орбитальной станции / А. А. Прутько, С. Н. Атрошенко // *Материалы XXI конференции молодых ученых с международным участием.* — г. Санкт-Петербург : АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2019. — С. 107–108.
13. *Прутько А. А.* Результаты проведения маневров крупногабаритной орбитальной станции по траекториям, оптимизирующим расход топлива / А. А. Прутько // *Сборник материалов всероссийской молодежной научно-практической конференции «Орбита молодёжи-2019».* — г. Санкт-Петербург : Балтийский государственный технический университет «Военмех», 2019. — С. 130–132.

14. *Прутько А. А.* Поиск оптимальных по расходу топлива траекторий управления ориентацией крупногабаритной пилотируемой станции / А. А. Прутько // Сборник материалов всероссийской молодёжной научно-практической конференции «Орбита молодёжи-2018». — г. Красноярск : СибГУ им. академика М.Ф. Решетнева, 2018. — С. 116—118.
15. *Прутько А. А.* Оптимальное управление разворотами больших космических конструкций / А. А. Прутько, С. Н. Атрошенко // Юбилейная XXV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. — г. Санкт-Петербург : АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2018. — С. 345—348.
16. *Атрошенко С. Н.* Учёт влияния набегающего потока атмосферы для КА с изменяемой геометрией с разнонаправленными осями вращения подвижных элементов / С. Н. Атрошенко, А. А. Прутько // Труды LI чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского / под ред. В. А. Алтунина, В. А. Балашова. — г. Калуга : Изд-во Казан. ун-та, 2017. — С. 112—122.
17. *Прутько А. А.* Об определении величин нагрузок на элементы конструкции Многоцелевого лабораторного модуля на автономном участке полёта / А. А. Прутько, А. В. Сумароков // Труды LI чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского / под ред. В. А. Алтунина, В. А. Балашова. — г. Калуга : Изд-во Казан. ун-та, 2017. — С. 106—111.
18. *Прутько А. А.* Использование псевдоспектрального метода Лобато для решения задачи оптимального по расходу топлива маневра орбитальной станции / А. А. Прутько // Тезисы докладов XXI научно-технической конференции молодых ученых и специалистов. Том 1. — г. Королев : Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва, 2017. — С. 23—24.
19. *Прутько А. А.* Об использовании псевдоспектральных методов для решения задачи маневра орбитальной станции оптимального по расходу топлива / А. А. Прутько // Актуальные проблемы космонавтики: XLII Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. — г. Москва : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. — С. 314—315.
20. *Прутько А. А.* Использование циклограмм включений двигателей для оптимальной по расходу топлива переориентации крупногабаритной орбитальной станции / А. А. Прутько // «Орбита молодёжи» и перспектива развития российской космонавтики : материалы VI Всерос. молодежной науч.-практ. конф. — г. Пермь : Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2020. — С. 162—164.