Труды МАИ. 2023. № 131
Trudy MAI, 2023, no. 131

Научная статья
УДК 532.507
DOI: 10.34759/trd-2023-131-10

УЧЕТ ПРОИЗВОДСТВА ЭНТРОПИИ В СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ПРИ ОПИСАНИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Ольга Николаевна Хатунцева[1,2]
[1]Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва»,
Королев, Московская область, Россия
[2]Московский физико-технический институт,
Долгопрудный, Московская область, Россия
olga.khatuntseva@rsce.ru

Аннотация. Ранее были проведены исследования возможности описания течения несжимаемой нетеплопроводной жидкости, как для ламинарных, так и для турбулентных режимов на основе одних и тех же модифицированных уравнений Навье-Стокса (УНС), учитывающих в турбулентном режиме производство энтропии за счет возбуждения стохастических возмущений [1-3].

Решения, соответствующие ламинарным и турбулентным режимам течения, были аналитически получены для задач Хагена-Пуазейля, плоского течения Пуазейля и плоского течения Куэтта. Проведено сравнение экспериментальных и аналитических решений для различных значений числа Рейнольдса.

В настоящей работе с помощью аналогичного подхода предполагается рассмотреть более общий случай, а именно, проанализировать, как должны измениться уравнения неразрывности, Навье-Стокса, уравнения полного сохранения энергии и переноса тепла при описании течения вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости, в которой при больших значениях числа Рейнольдса возможно возникновение стохастических возмущений в широком диапазоне масштабов.

Ключевые слова: турбулентное течение, вязкая сжимаемая теплопроводная жидкость, ламинарно-турбулентный переход

Для цитирования: Хатунцева О.Н. Учет производства энтропии в системе уравнений Навье-Стокса при описании турбулентного течения вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости // Труды МАИ. 2023. № 131. DOI: 10.34759/trd-2023-131-10

Original article

ACCOUNTING FOR ENTROPY PRODUCTION IN THE SYSTEM OF NAVIER-STOKES EQUATIONS WHEN DESCRIBING THE TURBULENT FLOW OF A VISCOUS COMPRESSIBLE HEAT-CONDUCTING LIQUID

Olga N. Khatuntseva[1,2]

[1]Korolev Rocket and Space Corporation «Energia»,

Korolev, Moscow region, Russia

[2]Moscow Institute of Physics and Technology,

Dolgoprudny, Moscow region, Russia

olga.khatuntseva@rsce.ru

Abstract. To describe both laminar and turbulent flow regimes of a viscous incompressible non–heat-conducting fluid based on the same equations, the references [1-3] proposed to account for what distinguishes these two regimes from each other, namely the entropy production due to the random stochastic perturbations excitation. For this purpose, the Navier-Stokes equations (NSE) were written in a phase space expanded by introduction of an additional stochastic variable. As the result, in the left part of the equations, namely in expressions for the total time derivative, additional terms, characterized by the entropy production due to the excitation of stochastic perturbations, appeared. For laminar flow modes, entropy production adopts a zero value, additional terms vanish, and transition to the NSE in their standard form, of which solutions describe only laminar flow modes, is accomplished.

Inclusion of an extra summand in the expression for the total time derivative, characterized by entropy production (which is always non-negative), allows, in particular, accounting for the irreversibility of physical processes in time in cases where this production is non-zero. The above said applies, among other things, to the case when large values of the Reynolds number are realized and, accordingly, the value of the viscous term in the NSE tends to zero. In this case, the only term of the equation "responsible" for its irreversibility becomes an additional term in the full time derivative.

Solutions corresponding to laminar and turbulent flow regimes have been obtained analytically for Hagen-Poiseuille problems, planar Poiseuille flow and planar Couette flow. Experimental. Comparison of experimental and analytical solutions for different values of the Reynolds number was performed.

The presented article considers a more general case, using a similar approach, namely analyses how the equation of continuity; Navier-Stokes equations; the equations of total conservation of energy, and heat transfer should change, when describing the flow of a viscous compressible heat-conducting fluid, in which stochastic disturbances may occur in a wide range of scales at large values of the Reynolds number.

Keywords: turbulent flow, viscous compressible heat-conducting liquid, laminar-turbulent transition

For citation: Khatuntseva O.N. Accounting for entropy production in the system of Navier-Stokes equations when describing the turbulent flow of a viscous compressible heat-conducting liquid. *Trudy MAI,* 2024, no. 131. DOI: 10.34759/trd-2023-131-10

1.Введение

Для того чтобы описывать как ламинарные, так и турбулентные режимы течения жидкости на основе одних и тех же уравнений, в работах [1-3] (см. также библиографию к этим работам) было предложено учитывать то, что отличает эти два режима друг от друга, а именно производство энтропии за счет возбуждения случайных – стохастических возмущений. Для этого уравнения Навье-Стокса (УНС) были записаны в фазовом пространстве, расширенном за счет введения дополнительной - стохастической переменной. В результате, в левой части уравнений - в выражениях для полной производной по времени - появились дополнительные слагаемые, характеризуемые производством энтропии за счет возбуждения стохастических возмущений. Для ламинарных режимов течения производство энтропии принимает нулевое значение, дополнительные слагаемые исчезают, и осуществляется переход к уравнениям Навье-Стокса в их стандартном виде, решения которых описывают только ламинарные режимы течения.

Включение в выражение для полной производной по времени дополнительного слагаемого, характеризуемого производством энтропии (которое всегда неотрицательно), позволяет, в частности, учитывать необратимость физических процессов по времени в тех случаях, когда это производство ненулевое. Вышесказанное касается, в том числе, случая, когда реализуются большие значения числа Рейнольдса и, соответственно, величина вязкого члена в УНС устремляется к нулю. В этом случае единственным членом уравнения, «отвечающим» за его необратимость становится дополнительное слагаемое в полной производной по времени.

В работах [1-3] так же были рассмотрены вопросы о возможности возникновения и поддержания стохастических процессов в реальных - «физических» - системах. Было показано, что существенную роль в этом могут играть несовместимые между собой граничные условия. В этом случае становится невозможным существование одного гладкого решения уравнений, и можно говорить лишь о наличии двух или более непересекающихся или пересекающихся негладким образом (с разрывом производных) асимптот решения. Область, находящаяся между этими асимптотами (или в окрестности точки «разрыва» производных) является областью неопределенности, порождающая стохастический процесс.

Для описания процессов, характеризующихся двумя непересекающимися или пересекающимися негладким образом асимптотами, было использовано понятие - «обобщенное» решение, в котором учитывается вклад каждой асимптоты решения в общее решение в каждой точке исследуемой области.

В такой постановке в работах [1-3] были найдены «ламинарные» и обобщенные «турбулентные» решения для течения несжимаемой нетеплопроводной жидкости для задачи Хагена-Пуазейля (в трубе кругового сечения), плоской задачи Куэтта (для безнапорного течения несжимаемой нетеплопроводной жидкости, находящейся между движущимися в противоположных направлениях плоскими стенками канала) и плоской задачи Пуазейля. Сравнение с экспериментальными данными показало работоспособность представленного подхода к решению такого рода задач.

Поскольку все эти задачи были решены в приближении вязкой несжимаемой нетеплопроводной жидкости, то уравнение переноса тепла в них не использовалось, а уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости не подвергалось изменениям.

В данной работе исследуем возможность описания с помощью аналогичного подхода - учета производства энтропии за счет стохастических возмущений – течения вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости. В соответствии с этим рассмотрим изменение в расширенном фазовом пространстве не только уравнений сохранения импульса, но и уравнения неразрывности, и уравнения переноса энергии и тепла в полной системе УНС.

2. Учет влияния производства энтропии из-за возбуждения стохастических возмущений на запись уравнений неразрывности и сохранения импульса для вязкой сжимаемой жидкости

В работах [1-3] довольно подробно был описан процесс расширения фазового пространства переменных за счет учета стохастических возмущений и запись в нем уравнений Навье-Стокса (закона сохранения импульса или второго закона Ньютона для выделенного объема жидкости).

В результате, в левые части этих уравнений, описывающих полную производную по времени, добавлялось слагаемое $\frac{\partial \vec{V}}{\partial S}\frac{dS}{dt}$, где энтропия S, обусловленная возбуждением разномасштабных стохастических возмущений, определяемая соотношением:

$$S(t,\vec{r};\tau) = -\int \varphi[p(t,\vec{r};\tau)] \ln \varphi[p(t,\vec{r};\tau)] d[p(t,\vec{r};\tau)].$$

В этом выражении функция $\varphi[p(t,\vec{r};\tau)]$ - это плотность вероятности реализации возмущения скорости величины $p(t,\vec{r};\tau)$ в заданный момент времени t в рассматриваемой точке пространства $\vec{r}$ на времен*н*ом масштабе рассмотрения τ.

Чтобы избежать неопределенности при постановке начальных и граничных условий, обусловленной возможной неоднозначностью задания начального уровня отсчета энтропии, выражение для полной производной по времени i-ой компоненты скорости записывалось через переменную, определяемую плотностью вероятности реализации случайной величины:

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial V_i}{\partial \varphi}\frac{1}{\delta S/\delta \varphi}\frac{dS}{dt}.$$

Производная: *δS/δφ*, является функциональной производной. Ее значение равно: *δS/δφ=-lnφ(p)-1* (см. [1-3]). Так как, *-(lnφ+1)δφ=δ(-φlnφ)*, то, выражение для полной производной по времени *i*-ой компоненты скорости можно записать в виде:

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial V_i}{\partial \tilde{s}}\frac{dS}{dt}, \quad \text{где} \quad \tilde{s} = \tilde{s}(p) = -\varphi(p)\ln\varphi(p).$$

Последнее слагаемое в этом выражении становится ненулевым только в том случае, когда в рассматриваемой системе осуществляется производство энтропии: *dS/dt>0* (в соответствии со вторым законом термодинамики, оно всегда неотрицательно).

Введя обозначение: *dS/dt=1/τ*, где *τ* – временной масштаб, на котором происходит необратимое изменение энтропии стохастической системы на единицу, выражение для полной производной от функции V_i по времени записывается в виде:

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial V_i}{\partial \tilde{s}}.$$

Уравнения Эйлера (уравнения сохранения импульса без учета сил вязкого трения) получены из интегральных соотношений для выделенного объема. Возникновение стохастических возмущений внутри этой области не влияет на изменение внешних воздействий. Поэтому учет стохастических возмущений в них происходит только на уровне изменения полной производной по времени – включения дополнительного слагаемого, характеризующего изменения скорости при производстве энтропии.

Это относится и к уравнениям Навье-Стокса. В них дополнительно (по сравнению с уравнениями Эйлера) введены и учитываются силы вязкого трения, действующие по поверхности выделенного объема жидкости и характеризуемые коэффициентом вязкости η, а также эффекты, связанные с деформацией жидкости от объемного сжатия, описываемые коэффициентом второй вязкости ξ. Эти дополнительные силы вводятся, как осредненные (статистические) эффекты от процессов, происходящих на уровне теплового движения молекул (а для второй вязкости ξ еще и на уровне их колебательных и вращательных степеней свободы). Они характеризуют вязкие силы, возникающие в ламинарном течении, и не описывают изменение энтропии, возникающее при реализации турбулентного режима в результате возбуждения стохастических возмущений, имеющих самоподобный *многомасштабный* характер на масштабах, превышающих масштаб теплового движения.

Таким образом, уравнения для вязкой сжимаемой жидкости с учетом стохастических возмущений и действия внешних сил $\vec{F}$, можно записать в тензорном виде (см. [4] и [1-3]):

$$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k}\right)+\frac{\rho}{\tau}\frac{\partial V_i}{\partial \tilde{s}}=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+\frac{\partial V_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\xi\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\right)+F_i\,.$$

Либо, предполагая, что коэффициенты вязкости η и второй вязкости ξ являются константами, можно записать в векторном виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{s}}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\nu\Delta\vec{V}+\left(\frac{\xi}{\rho}+\frac{\nu}{3}\right)\nabla div\vec{V}+\vec{f}\,, \qquad (1)$$

где $\nu = \eta/\rho$, η и ρ – вязкость и плотность жидкости, $\vec{f} = \vec{F}/\rho$, ∇P - градиент давления, τ – временной масштаб, на котором происходит изменение энтропии на единицу, $\tilde{s}$ - переменная, характеризующая возникновение стохастических возмущений, $\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{x}, \tilde{s}; \tau)$.

Наличие стохастического процесса для сжимаемой жидкости может привести и к изменению плотности внутри выделенного объема. В самом деле, дивергентный член уравнения неразрывности: $\nabla(\rho\vec{V})$, появляется при переходе от интеграла по поверхности к интегралу по объему в результате дифференцирования и одновременного интегрирования по одним и тем же переменным. Он определен для непрерывно дифференцируемой функции $(\rho\vec{V})$, стоящей под знаком дивергенции, и описывает изменение плотности за счет натекания и/или истекания жидкости в выделенный объем только за счет детерминированного (гладкого) течения жидкости. Дивергентный член не учитывает изменение количества жидкости в рассматриваемом объеме за счет стохастических процессов, приводящих к изменению потока жидкости через его поверхность. Соответственно, если плотность жидкости может изменяться как за счет детерминированного, так и за счет стохастического процессов, то для режима течения со стохастическими возмущениями, запись уравнения неразрывности должна измениться. В уравнении должен появиться член, характеризующий изменение плотности при реализации случайного возмущения скорости с плотностью вероятности $\varphi(p)$ (характеризуемый переменной $\tilde{s} = -\varphi \ln \varphi$), дополняющий производную по времени:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial\tilde{s}}+\nabla\left(\rho\vec{V}\right)=0\,.$$

Дополнительный член в уравнении неразрывности на больших интервалах времени в турбулентном режиме будет описывать «сглаживание» - уменьшение изменения плотности (из-за возбуждения стохастических возмущений и роста энтропии), например, в волновых процессах или в процессах, характеризующихся возникновением ударных волн.

В ламинарном режиме производство энтропии за счет стохастических возмущений становится равным нулю, дополнительное слагаемое исчезает, и уравнение неразрывности приобретает «традиционный» вид.

В общем случае, система уравнений Навье-Стокса совместно с уравнением неразрывности для вязкой сжимаемой жидкости будет иметь вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial\rho}{\partial\tilde{s}}+\nabla\left(\rho\vec{V}\right)=0\\ \dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}+\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial\tilde{s}}=-\dfrac{1}{\rho}\nabla P+\nu\Delta\vec{V}+\left(\dfrac{\zeta}{\rho}+\dfrac{\nu}{3}\right)\nabla div\vec{V}+\vec{f}\end{cases}. \tag{2}$$

Невязкая сжимаемая жидкость, в которой могут возбуждаться стохастические возмущения в широком диапазоне масштабов, будет описываться системой модифицированных уравнений Эйлера:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial\rho}{\partial\tilde{s}}+\nabla\left(\rho\vec{V}\right)=0\\ \dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}+\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial\tilde{s}}=-\dfrac{1}{\rho}\nabla P+\vec{f}\end{cases}. \tag{3}$$

В качестве решений системы уравнений (2) или (3) будут выступать значения скорости $\vec{V}=\vec{V}(t,\vec{r},\tilde{s};\tau)=\vec{V}(t,\vec{r},\tilde{s}(\varphi);\tau)$ и плотности $\rho=\rho(t,\vec{r},\tilde{s};\tau)=\rho(t,\vec{r},\tilde{s}(\varphi);\tau)$, которые могут реализоваться с вероятностью φ (на масштабе рассмотрения τ) в момент времени t, в точке $\vec{r}(x,y,z)$.

3. Учет влияния производства энтропии, происходящего за счет возбуждения стохастических возмущений в широком диапазоне масштабов, на запись уравнения полного сохранения энергии и уравнение переноса тепла для вязкой сжимаемой жидкости

Термодинамическая энтропия определяется тепловыми процессами на уровне движения отдельных молекул и не зависит от стохастических возмущений на макро масштабах, характеризуемых стохастической переменной $\tilde{s}$ и энтропией S. Далее, чтобы не путать различные понятия об энтропии, термодинамическую энтропию будем обозначать, как S_T (в отличие от энтропии, характеризуемой стохастическими возмущениями в широком диапазоне масштабов S). Исходя из вышесказанного, можно записать: $\partial S_T/\partial\tilde{s}=0$.

Следуя, например, [4] и используя систему уравнений Эйлера в отсутствии внешних сил для сжимаемой невязкой жидкости, в которой могут возбуждаться стохастические возмущения в широком диапазоне масштабов, в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=-\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial\rho}{\partial\tilde{s}}-\nabla\left(\rho\vec{V}\right)\\ \dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t}=-\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}-\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial\tilde{s}}-\dfrac{1}{\rho}\nabla P\end{cases},$$

а также учитывая соотношение [5]:

$$d\varepsilon = TdS_T - PdV = TdS_T + \frac{P}{\rho^2}d\rho \tag{4}$$

и следующие из него зависимости:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = T\frac{\partial S_T}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}; \quad \nabla\varepsilon = T\nabla S_T + \frac{P}{\rho^2}\nabla\rho; \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tilde{s}} = T\frac{\partial S_T}{\partial\tilde{s}} + \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\tilde{s}} = \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\tilde{s}}, \tag{5}$$

считая процесс адиабатическим: $\partial S_T/\partial t = -\vec{V}\nabla S_T$, запишем выражение для изменения полной энергии выделенного объема, включающей кинетическую энергию: $\rho V^2/2$ и внутреннюю энергию: $\rho\varepsilon$ жидкости в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = \frac{V^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\vec{V}\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = -\frac{V^2}{2\tau}\frac{\partial\rho}{\partial\tilde{s}} - \frac{V^2}{2}\nabla\left(\rho\vec{V}\right) -$$

$$-\frac{\rho\vec{V}}{\tau}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\tilde{s}} - \rho\vec{V}\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} - \vec{V}\nabla P - \frac{\varepsilon}{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial\tilde{s}} - \varepsilon\nabla\left(\rho\vec{V}\right) + \rho T\frac{\partial S_T}{\partial t} - \frac{P}{\rho\tau}\frac{\partial\rho}{\partial\tilde{s}} - \frac{P}{\rho}\nabla\left(\rho\vec{V}\right) =$$

$$= -\left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho}\right)\nabla\left(\rho\vec{V}\right) - \rho\vec{V}\nabla\left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho}\right) + \rho\vec{V}\left(\nabla\varepsilon - T\nabla S_T - \frac{P}{\rho^2}\nabla\rho\right) -$$

$$-\left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho}\right)\frac{1}{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial\tilde{s}} - \frac{\rho\vec{V}}{\tau}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\tilde{s}} = -\nabla\left(\rho\vec{V}\left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho}\right)\right) - \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tilde{s}}\left(\frac{\rho V^2}{2} + \rho\varepsilon\right) +$$

$$+\frac{\rho}{\tau}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tilde{s}} - \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\tilde{s}}\right) = -\nabla\left(\rho\vec{V}\left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho}\right)\right) - \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tilde{s}}\left(\frac{\rho V^2}{2} + \rho\varepsilon\right).$$

Переносящ последний член в правой части этого выражения в левую часть, запишем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2} + \rho\varepsilon\right) + \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tilde{s}}\left(\frac{\rho V^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\nabla\left(\rho\vec{V}\left(\frac{V^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho}\right)\right). \tag{6}$$

Уравнение (6) представляет собой соотношение, где в левой части стоит полная производная по времени от полной энергии выделенного объема жидкости в пространстве, расширенном с помощью дополнительной – «стохастической» переменной $\tilde{s}$, а в правой – дивергенция плотности потока энергии, полностью совпадающая с дивергентным членом, стоящим в уравнении энергии, полученным для системы уравнений Эйлера [4].

В вязкой теплопроводной жидкости помимо плотности потока $\rho\vec{V}\left(V^2/2+\varepsilon+P/\rho\right)$, связанного с простым переносом массы жидкости при ее движении, учитывается плотность потока, связанного с процессами внутреннего трения: $-\left(\vec{V}\bar{\sigma}'\right)$ с компонентами: $-V_i\sigma'_{ik}$, а также плотность потока, определяемого градиентом температуры: $-\kappa\nabla T$.

Эти компоненты плотности потока добавляются в уравнение сохранения энергии без учета стохастических возмущений [4] в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\nabla\left(\rho\vec{V}\left(\frac{V^2}{2}+\varepsilon+\frac{P}{\rho}\right)-\left(\vec{V}\bar{\sigma}'\right)-\kappa\nabla T\right).$$

Входящая в это выражение постоянная κ – это коэффициент теплопроводности, а вязкий тензор напряжений σ'_{ik} имеет вид:

$$\sigma'_{ik}=\eta\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+\frac{\partial V_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\right)+\xi\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}.$$

Соответственно, в случае учета стохастических возмущений уравнение сохранения энергии (6) для вязкой теплопроводной жидкости, учитывающее плотность потока, связанного с процессами внутреннего трения: $-\left(\vec{V}\bar{\sigma}'\right)$, и плотность потока, определяемого градиентом температуры: $-\kappa\nabla T$, преобразуется к соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2}+\rho\varepsilon\right)+\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tilde{s}}\left(\frac{\rho V^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\nabla\left(\rho\vec{V}\left(\frac{V^2}{2}+\varepsilon+\frac{P}{\rho}\right)-\left(\vec{V}\overline{\sigma}'\right)-\kappa\nabla T\right). \qquad (7)$$

Уравнение (7) – это уравнение полного сохранения энергии с учетом стохастических возмущений в широком диапазоне масштабов. Исследуем его подробнее.

Система уравнений неразрывности и Навье-Стокса в расширенном фазовом пространстве с учетом стохастических возмущений, в отсутствии внешних сил для вязкой теплопроводной жидкости представима в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=-\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial\rho}{\partial\tilde{s}}-\nabla\left(\rho\vec{V}\right)\\ \dfrac{\partial V_i}{\partial t}=-V_k\dfrac{\partial V_i}{\partial x_k}-\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial V_i}{\partial\tilde{s}}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_i}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}\end{cases}. \qquad (8)$$

Учитывая (8), (4) и (5), преобразуем сначала левую часть уравнения (7) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2}+\rho\varepsilon\right)+\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tilde{s}}\left(\frac{\rho V^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=$$

$$=-\nabla\left(\rho\vec{V}\right)\left(\frac{V^2}{2}+\varepsilon+\frac{P}{\rho}\right)-\rho\vec{V}\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\vec{V}\nabla P+V_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}+\rho T\frac{\partial S_T}{\partial t}, \qquad (9)$$

А затем правую часть уравнения (7) в виде

$$-\nabla\left(\rho\vec{V}\left(\frac{V^2}{2}+\varepsilon+\frac{P}{\rho}\right)-\left(\vec{V}\overline{\sigma}'\right)-\kappa\nabla T\right)=$$

$$=-\nabla\left(\rho\vec{V}\right)\left(\frac{V^2}{2}+\varepsilon+\frac{P}{\rho}\right)-\rho\vec{V}\nabla\left(\frac{V^2}{2}+\varepsilon+\frac{P}{\rho}\right)+V_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}+\sigma'_{ik}\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+\nabla\left(\kappa\nabla T\right). \qquad (10)$$

Приравнивая правые части полученных выражений (9) и (10), запишем

$$\rho T\left(\frac{\partial S_T}{\partial t}+\vec{V}\nabla S_T\right)=\sigma'_{ik}\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+\nabla(\kappa\nabla T). \qquad (11)$$

Уравнение (11) является общим уравнением переноса тепла и по своему виду (в отличие от уравнения полного сохранения энергии (7)) полностью совпадает с аналогичным уравнением, выведенным для случая, в котором не учитывались случайные стохастические процессы на масштабах, превышающих масштаб теплового движения молекул [4]. Это может служить доказательством того, что однородные изотропные стохастические процессы, реализующиеся в широком диапазоне масштабов, превосходящие масштаб теплового движения молекул, не влияют непосредственно на процесс теплопереноса. Об этом свидетельствует и тот факт, что температура жидкости при переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения практически не изменяется.

Между тем, процесс переноса полной энергии, описываемый уравнением (7), зависит от стохастического процесса в жидкости. В турбулентном и ламинарном режимах этот процесс происходит по-разному. И при описании турбулентного режима должно учитываться второе слагаемое, стоящее в правой части уравнения (7), характеризующее производство энтропии за счет стохастических возмущений в широком диапазоне масштабов. В ламинарном режиме производство энтропии за счет стохастических возмущений становится равным нулю, это слагаемое исчезает, и уравнение полного сохранения энергии приобретает «традиционный» вид.

Заключение

Вопросы, связанные с корректным описанием, как ламинарных, так и турбулентных режимов течения, имеют широкий спектр практических приложений [6-10] и, несмотря на свою давнюю историю, остаются в кругу актуальных теоретических исследований многих современных ученых [11-20].

В работе [21] показано, что стохастические процессы могут возникать в системах с тремя и более степенями свободы, как результат несовместности уравнений, которые описывают эти системы. В цикле работ [1-3] проведены исследования по возможности описания как ламинарных, так и турбулентных режимов течения жидкости на основе одних и тех же уравнений. Было предложено рассматривать уравнения Навье-Стокса в фазовом пространстве, расширенном за счет введения дополнительной - стохастической переменной. В результате, в выражении для полной производной по времени появляется дополнительное слагаемое, характеризуемое производством энтропии за счет возбуждения стохастических возмущений. Это же слагаемое должно входить в уравнение неразрывности при описании течения сжимаемой жидкости, на режимах в которых возможно возникновение стохастического процесса. Для несжимаемой жидкости этот член в уравнении неразрывности пропадает, однако он сохраняется в левых частях УНС.

Для ламинарных режимов течения производство энтропии принимает нулевое значение, дополнительное слагаемое во всех уравнениях исчезает, и осуществляется переход к системе уравнений Навье-Стокса в ее стандартном виде, решения которой описывают только ламинарные режимы течения.

Включение в уравнения дополнительного слагаемого, характеризуемого производством энтропии (которое всегда неотрицательно), позволяет, в частности, учитывать необратимость физических процессов по времени в тех случаях, когда это производство ненулевое – на режимах, в которых реализуются стохастические процессы. Это, в полной мере, касается и режимов течения жидкости при больших значениях числа Рейнольдса, когда величина вязкого члена в УНС устремляется к нулю. В этом случае единственным членом уравнения, «отвечающим» за его необратимость становится дополнительное слагаемое в полной производной по времени.

В работе показано, что включение дополнительного слагаемого, характеризующего производство энтропии за счет стохастических возмущений в широком диапазоне масштабов, изменяет левую часть уравнения полного сохранения энергии (см. (7)). При этом уравнение распространения тепла (11), которое характеризуется процессами, происходящими на масштабах теплового движения молекул, не изменяется – имеет традиционный вид. Это может служить доказательством того, что однородные изотропные стохастические процессы, происходящие в широком диапазоне масштабов, превосходящие масштаб теплового движения молекул (тепловой масштаб), не влияют непосредственно на процесс теплопереноса. Об этом, в частности, свидетельствует тот факт, что температура жидкости при переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения практически не изменяется.

Список источников

1. Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения задачи Хагена-Пуазейля для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2021. № 118. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=158211

2. Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения плоской задачи Куэтта для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=164194

3. Хатунцева О.Н. Обобщенное аналитическое решение плоской задачи Пуазейля для турбулентного режима течения несжимаемой жидкости // Труды МАИ. 2022. № 123. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=165492

4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.VI. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 731 с.

5. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т. X. Физическая кинетика. - М.: Наука, 2002. - 536 с.

6. Ларина Е.В., Крюков И.А., Иванов И.Э. Моделирование осесимметричных струйных течений с использованием дифференциальных моделей турбулентной вязкости // Труды МАИ. 2016. № 91. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=75565

7. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Численное моделирование взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Труды МАИ. 2013. № 70. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=44440

8. Кравчук М.О., Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В. Вопросы моделирования турбулентности для расчета сверхзвуковых высокотемпературных струй // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=58536

9. Ву М.Х., Попов С.А., Рыжов Ю.А. Проблемы моделирования течения в осевых вентиляторах аэродинамических труб // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=29361

10. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. Simulation of flow around aerofoil with DES model of turbulence // Труды МАИ. 2012. № 59. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=34840

11. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow // Physics of Fluids, 1995, no. 7, pp. 335-343.

12. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow // Journal of Fluid Mechanics, 1980, no. 96, pp. 59-205.

13. Menter F.R. Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows, AIAA Paper, 1993, N93-2906, pp. 21.

14. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J. A New k-e Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Developmentand Validation // Computers Fluids, 1995, vol. 24, no. 3, pp. 227-238.

15. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure // Journal of Fluid Mechanics, April 1975, vol. 68, no. 3, pp. 537-566.

16. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulation // International Journal of Heat and Fluid Flow, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 252-263.

17. Березко М.Э., Никитченко Ю.А. Сравнение комбинированных кинетическо-гидродинамических моделей различных порядков на примере течения Куэтта // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=112842

18. Никитченко Ю.А. Моментные модели для течения с большим числом Маха // Вестник Московского авиационного института. 2014. Т. 21. № 4. С. 39-48.

19. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique // Physics of Fluids, 1992, vol. 4, no. 7, pp. 510 – 520.

20. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. - М.: Физмалит, 2005. - 288 с.

21. Хатунцева О.Н. О «детерминизации» стохастических процессов при увеличении в системе степеней свободы // Труды МАИ. 2022. № 128. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=171388. DOI: 10.34759/trd-2023-128-07

References

1. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2021, no. 118. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=158211. DOI: 10.34759/trd-2021-118-02

2. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2022, no. 122. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=164194. DOI: 10.34759/trd-2022-122-07

3. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2022, no. 123. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=165492.

4. Landau L.D., Lifshits E.M. *Fluid Mechanics*, Butterworth-Heinemann, 1987, vol. 6, 558 p.

5. Lifshits E.M., Pitaevsky L.P. Physical kinetics, Butterworth-Heinemann, 2002, vol. 10, 536 p.

6. Larina E.V., Kryukov I.A., Ivanov I.E. *Trudy MAI*, 2016, no. 91. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=75565

7. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tret'yakova O.N. *Trudy MAI*, 2013, no. 70. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=44440

8. Kravchuk M.O., Kudimov N.F., Safronov A.V. *Trudy MAI*, 2015, no. 82. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58536

9. Vu M.Kh., Popov S.A., Ryzhov Yu.A *Trudy MAI*. 2012, no. 53. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29361

10. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 59. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34840

11. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow, *Physics of Fluids*, 1995, no. 7, pp. 335-343.

12. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 1980, no. 96, pp. 59-205.

13. Menter F.R. *Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows*, AIAA Paper, 1993, N93-2906, pp. 21.

14. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J. A New k-e Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Developmentand Validation, *Computers Fluids*, 1995, vol. 24, no. 3, pp. 227-238.

15. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure, *Journal of Fluid Mechanics*, April 1975, vol. 68, no. 3, pp. 537-566.

16. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulation, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 252-263.

17. Berezko M.E., Nikitchenko Y.A. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112842. DOI: 10.34759/trd-2020-110-8

18. Nikitchenko Y.A. *Aerospace MAI journal*, 2014, vol. 21, no. 4, pp. 39-48.

19. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique, *Physics of Fluids*, 1992, vol. 4, no. 7, pp. 510 – 520.

20. Drazin P.G. *Introduction to hydrodynamic stability*, 2002, DOI:10.1017/CBO9780511809064

21. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2023, no. 128. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=171388. DOI: 10.34759/trd-2023-128-07

Статья поступила в редакцию 20.06.2023

Одобрена после рецензирования 25.06.2023

Принята к публикации 28.08.2023

The article was submitted on 20.06.2023; approved after reviewing on 25.06.2023; accepted for publication on 28.08.2023