

**Нуримбетов Алибек Усипбаевич**



**СТЕРЖНЕВЫЕ И ПОЛУПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МОДЕЛИ  
ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ ЗАКРУЧЕННЫХ ИЗДЕЛИЙ В ПОЛЕ  
СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК**

Специальность 01.02.04  
«Механика деформируемого твердого тела»

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора технических наук

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

**Научные консультанты:** Доктор технических наук,  
профессор **Дудченко Александр Александрович**

**Официальные оппоненты:**

**Смердов Андрей Анатольевич**, доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (МГТУ им. Н.Э. Баумана)», профессор кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители».

**Митрофанов Олег Владимирович**, доктор технических наук, доцент, заместитель главного конструктора по прочности, заместитель начальника НИО прочности акционерного общества «Гражданские самолеты Сухого».

**Аношкин Александр Николаевич**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механики композиционных материалов и конструкций» Пермского национального исследовательского политехнического университета.

**Ведущая организация:** ФГБУН Институт прикладной механики Российской академии наук «ИПРИМ РАН».

Защита состоится « 01 » марта 2017 г. в 15<sup>00</sup> на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, дом 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте:

[http://mai.ru/events/defence/doctor/index.php?ELEMENT\\_ID=74287](http://mai.ru/events/defence/doctor/index.php?ELEMENT_ID=74287)

Автореферат разослан « \_\_\_ » декабря 2016 г.

Ученый секретарь  
Диссертационного совета



Федотенков Г.В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Развитие машиностроения, авиа-, ракето- и судостроения во многом определяется применением новых материалов и элементов конструкций с требованием высоких прочностных, жесткостных и других свойств при минимальном их весе, объема и стоимости. Большие возможности в этом направлении предоставляет использование композиционных материалов (КМ). Широкое внедрение новых КМ и элементов конструкций из них – одна из наиболее сложных и актуальных проблем научно–технического прогресса, связанная с фундаментальными исследованиями в области механики анизотропных тел.

В настоящее время, при создании конкурентоспособной продукции из КМ необходимо использовать новые эффективные методы исследования, позволяющие моделировать и обосновывать любые конструктивные изменения, вносимые в объект для улучшения его характеристик при минимизации временных затрат на моделирование.

Среди большого многообразия конструкционных элементов в практике широко встречаются конструкции в виде призматических стержней, испытывающие упругие деформации и работающие на растяжение, кручение и изгиб. Для призматических стержней, изготовленных из однородного изотропного материала, решение задачи растяжение, кручение и изгиба основано на теории, разработанной Б. Сен-Венаном, А. Клебшом и В. Фойхтом, где задача сводится к нахождению гармонической, в области поперечного сечения стержня, функции по заданному значению ее нормальной производной на контуре этого сечения. Эта функция называется функцией кручения Сен-Венана или функцией перемещений и с точностью до постоянного множителя она определяет осевое перемещение в скручиваемом стержне или деформацию его сечения. Пользуясь этой функцией, Сен-Венан применил в решении задач кручения свой полуобратный метод. Сущность этого метода заключается в том, что заранее задаются формой решения рассматриваемой задачи, оставляя эти решения настолько общими, чтобы в дальнейшем можно было полностью удовлетворить всем уравнениям теории упругости. Последующие авторы вносили лишь упрощения и дополнения в его исследования, указывали и давали новые приемы для определения функции кручения, введенной Сен-Венаном. Это теория нашла отражение в известных монографиях и курсах теории упругости. Большое число работ посвящено исследованию задач для однородных анизотропных стержней. Среди них особое место занимают работы З.В Власова., С.Г. Лехницкого, В.В. Васильева, Л.С. Лейбензона, Б.М. Саркисяна, Б.Л. Абрамяна и Н.Х. Арутюняна, К.И. Савина, С.Г. Михлина, В.Д. Шермана, и многих других. До настоящего времени проведенные исследования не позволяют оценить влияние свойств многослойной структуры на НДС, с учетом формы, размеров каждого слоя и закрученностью стержня.

*Поэтому целью настоящей работы является дальнейшее развитие известных методов решения задач кручения многослойных анизотропных призматических стержней, с учетом факторов слоистости произвольного сечения с использованием вариационных принципов и разработки на их основе инженерных методов решения новых задач с применением конечно-элементной интерпретации.*

Применительно к проблеме обеспечения прочности воздушных винтов, лопастей вентиляторов, лопаток паровых турбин и т.д. чрезвычайную практическую важность имеет исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) стержней с естественной закрученностью. Наиболее подробно исследование НДС естественно-закрученных стержней из однородных материалов было проведено в работах И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра, Г.Ю. Джанелидзе, П.М. Риза, В.Л. Бердичевского, Л.Д. Магомаева, О.Б. Голубева и других. Тем самым из рассмотрения исключаются неоднородности слоистой структуры. Анализ рациональных путей построения прикладных теорий показал, что имеется два пути. Первый аналитический путь представляет формальное разложение решения в функциональные ряды, получающееся при выделении переменных как в методе Власова-Кантаровича. Такой путь исследования в теории стержней применил Бердичевский В.Л., Гордиенко Б.А., в теории оболочек и пластин Коши и Пуассон, Кильчевский Н.А. и Векуа И.Н. Второй прикладной путь дополняет первый путь системой физических допущений кинематического и силового характера. К такому пути относится техническая теория стержней И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра, теория стержней Тимошенко С.П. и Власова В.З., теория пластин Кирхгофа, теория оболочек Кирхгофа-Лява, Тимошенко С.П., Григолюка-Чулковаи многие другие.

*Однако анизотропные слоистые стержни с естественной закрученностью мало изучены. Поэтому для построения стержневых моделей с кривой осью и переменными сечениями многослойной структуры воспользуемся классической технической теорией стержней с учетом нелинейного члена в кинематических соотношениях. В технической теории однородных стержней И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра используется линейная деформация волокон стержня и не учитывались неоднородность многослойного сечения.*

*В связи с этим для построения эффективных методов решения задач деформаций для вышеуказанных тел, как однородных, так и многослойных, являются одним из актуальных вопросов теории упругости анизотропных стержней произвольного сечения для определения НДС в слоях структуры.*

*Как показывает, анализ опубликованных работ остаются нерассмотренными вопросы регулирования величины напряжений в наиболее нагруженных зонах стержней не только за счет геометрической формы стержней, но и за счет выбора рациональной схемы ее армирования и формы слоев. Эффективность этого и до настоящего времени в лопатках ГТД детально еще никто не анализировал, хотя это может дать весьма заметный положительный эффект. Кроме того, разработка аналитических методов расчета многослойных структур и численных методов реализации аналитических подходов позволяет существенно ускорить и упростить решение задачи, повысить надежность проектирования и расчета элемента конструкции чему и посвящена эта работа.*

Создание современных газотурбинных двигателей (ГТД) характеризуется заменой в ряде деталей традиционных конструкционных материалов (сталей и титановых сплавов) на современные КМ, имеющие более высокие удельные прочность и жесткость. Такие работы проводят все ведущие двигателестроительные фирмы мира (General Electric, Pratt and Whitney, CFM International и др.). Исследованиями в этой области также занимаются ФГУП ЦИАМ, ФГУП ВИАМ, ОАО

«НПП «Мотор», ОАО «Пермский моторный завод» и др. В настоящее время одним из основных направлений по применению КМ в ГТД является создание лопатки из углепластика, лопатки из титанового сплава, армированного волокнами карбида кремния, лопатки составной конструкции и лопатки из КМ на металлической матрице.

Для расчетов в работе используются упругие и прочностные характеристики многослойного КМ, полученные экспериментальным путем, анализируются возможности теоретического прогнозирования упругих характеристик КМ на основе знания структуры слоя КМ и механических характеристик его компонент. Показывается, что при использовании рациональной схеме армирования слоя и подбором размера и формы слоя можно существенно снизить напряжения в зонах концентрации в многослойных стержневых конструкциях или рабочей лопатки компрессора из КМ по сравнению с лопаткой из изотропного материала.

Одним из основных материалов, применяемых в ГТД, являются титановые сплавы, обладающие высокой удельной прочностью, но и имеющие ряд существенных недостатков: повышенную чувствительность к концентраторам напряжений; низкую технологичность. Эффективной заменой титанового сплава в лопатках компрессора ГТД могут стать КМ, армированные борными, углеродными и другими волокнами. *Однако применение таких материалов требует проведения обширных научных исследований, включающих следующие направления:*

- разработка способа формирования слоистой структуры стержневых изделий из КМ, обеспечивающего рациональный выбор коэффициента армирования и направления укладки армирующих волокон в каждой точке слоя создаваемой многослойной стержневой конструкций из КМ;

- разработка методики прогнозирования и экспериментального определения физико-механических характеристик КМ в целом и его компонентов отдельности;

- разработка методики расчета НДС многослойных стержневых изделий из КМ, дающей объективную оценку прочности стержневых конструкций при разнообразных внешних нагрузках.

При проведении исследования считаем, что известны все заданные газодинамические и инерционные силы.

Исследования деформированного состояния деталей из КМ, называемые структурными, предполагает рассмотрение композиции как неоднородной, дискретно-армированной среды и проведены В.В. Болотиным. Такой подход позволяет учесть основные особенности КМ, их неоднородность, конструктивный характер анизотропии. Решение задачи по этому методу приводит к большому числу дифференциальных или конечно-разностных уравнений. Если размеры всех слоев, входящих в конструкцию, одинаковы, то такая задача вполне разрешима на ЭВМ. Поэтому, задача заключалась в таком выборе аппроксимирующей модели многослойных армированных конструкций, которая с одной стороны допускала бы возможность практической реализации расчетов на прочность, а с другой - позволяла бы учесть особенности свойств и структуры КМ. Действительно, особенности строения слоистых материалов таковы, что их можно рассматривать как дискретную регулярную среду, составленную из большого числа чередующихся "жестких" слоев арматуры и "мягких" прослоек матрицы. Тем самым, удастся

представить неоднородный материал в виде многослойного анизотропного материала с упругими константами, выраженными через упругие константы его составляющих. Указанный метод позволяет решать очень важный вопрос оптимального проектирования на этапе эскизного проектирования конструкций.

Таким образом, стержень из КМ можно представить как анизотропное тело, упругие постоянные которого тем или иным способом определяются через упругие характеристики исходных компонентов - матрицы и наполнителя.

При планируемой замене в стержневых изделиях или рабочей лопатке из изотропного материала на КМ, сохраняется вся наружная геометрия многослойных стержневых конструкций или лопатки и режимы ее эксплуатации, что позволяет надеяться, что многослойный стержень или лопатка из КМ будем иметь необходимую прочность при выполнении следующих условий:

- удельная прочность КМ будет не ниже, чем удельная прочность из изотропного материала;
- коэффициент запаса по статической нагрузке при максимальном режиме будет удовлетворять условиям прочности;
- применяемый КМ будет менее чувствительным к концентраторам напряжений.

После обеспечения прочности многослойных стержневых изделий или перьевой части рабочей лопатки компрессора из КМ авиационного двигателя, особое внимание должно быть уделено явлению концентрации напряжений. Это связано с тем, что несущая способность стержневых изделий очень часто определяется в местах концентрации напряжений, так как именно там наступает предельное состояние и разрушение.

Применяя КМ, можно дополнительно применить принципиально новый способ снижения концентрации напряжений, основанный на армировании многослойного стержня или лопатки высокомодульными и высокопрочными борными, углеродными и другими волокнами.

В настоящее время математические методы моделирования динамического поведения многослойных конструкций из КМ разработаны недостаточно. В уравнениях движения не учитывалось влияние многослойной структуры с жесткими анизотропными слоями на значения собственных частот и коэффициентов механических потерь.

Таким образом, традиционно используемые методы расчета в силу своих ограничений не позволяют предсказать с необходимой точностью частотные характеристики многослойных анизотропных стержневых изделий на этапе эскизного проектирования. На практике вибрационная настройка всегда была сопряжена с большими трудностями и осуществлялась в основном экспериментально. Поэтому внедрение новых, более точных расчетных методов в процесс проектирования многослойных стержней или рабочих лопаток из КМ, является *актуальной научно-технической задачей, которая обладает существенной новизной и имеющая важное практическое значение.*

**Объектом исследования** являются призматические многослойные анизотропные стержни, образованные из различных слоев линейно деформируемого анизотропного КМ, которые в поперечном сечении имеют произвольную конфи-

гурацию и могут находить под совместным действием растягивающих, изгибающих и крутящих моментов.

**Цель работы.** Разработка математических расчетных моделей задачи механики сплошной среды, позволяющих исследовать НДС композиционных тел стержневого типа на основе линейного однородного, анизотропного и структурного подходов, является целью настоящей работы для изучения влияния числа слоев, свойств отдельных слоев и их взаимодействие.

В соответствии со сформулированной целью работы были поставлены и решены следующие задачи:

- разработка метода решения задачи теории упругости неоднородных слоистых тел с регулярной структурой, который позволяет учитывать влияния неоднородности структуры на распределение перемещений и напряжений;

- разработка эффективных методов решения задач с применением современных ЭВМ, для исследования НДС при кручении многослойных анизотропных призматических стержней, поперечное сечение которых представляют собой произвольную область;

- исследование распределение касательных напряжений, в том числе на поверхности контакта составного тела при его кручении, а также определение жесткости на кручении, в широком диапазоне изменения характерных физических и геометрических параметров многослойного призматического стержня;

- создание приближенного метода расчета естественно-закрученных составных анизотропных стержней слоистой структуры произвольного сечения в условиях кручения, изгиба, растяжения и действия центробежных нагрузок.

- на основе известных моделей неоднородного упругого тела провести расчеты прочности, колебаний тел стержневого типа;

- разработать методику расчета НДС композитных лопаток и лопастей, содержащих анизотропные или структурно неоднородные слои, с целью варьирования состава компонентов и ее структуры при неизменных внешних размерах и форме конструкции;

- на основе использования разработанной теории описать особенности деформирования высоконагруженных композитных изделий в поле центробежных сил;

- получить расчетные соотношения для напряжений, углов раскрутки, технических частот исследуемых тел, используемых как для теоретических, так и прикладных задачах.

**Научная новизна.** Научная новизна результатов, полученных в диссертации, состоит в следующем:

- разработаны и получены расчетные формулы разрешающих уравнений для определения деформаций призматических тел с учетом слоистой структуры, в части изучения влияния числа слоев, свойств отдельных слоев, их взаимодействия и депланации поперечного сечения;

- впервые разработана методика решения дифференциальных уравнений, позволяющее определить НДС в призматических телах, с удовлетворением всех граничных условий на контактных поверхностях многослойных анизотропных

тел и учесть закономерности распределения касательных напряжений и перемещений.

- построена закономерность изменения жесткости сечения при кручении слоистого стержня с увеличением количества слоев и найдено его аналитическое выражение для тела многослойной структуры.

- построены номограммы и таблицы, отражающие зависимости интегральных характеристик жесткости стержня и его составных частей для определения модуля сдвига.

- построена для определения жесткости на кручение слоистых анизотропных стержней произвольного сечения оригинальная методика с использованием решения задачи кручения методом конечных элементов (МКЭ).

- впервые даны оценки характера распределений и уровней напряжений в отдельных слоях многослойных анизотропных стержней после их деформирования на стадии эксплуатации, что важно при решении вопроса о пригодности их для дальнейшего использования;

- разработаны алгоритм и программы, позволяющие проводить раскрой сечений по слоям, с целью варьирования их физических параметров для обеспечения надлежащей прочности, жесткости и сохранения формы конструкции;

- дана математическая формулировка задачи о НДС многослойного анизотропного призматического стержня произвольного сечения при действии растягивающих сил, изгибающих и крутящих моментов. Предложен алгоритм построения приближенного решения сформулированной задачи;

- предложены для естественно-закрученных слоистых анизотропных стержней новые кинематические соотношения, которые учитывают нелинейные деформации, эффекты действия поперечных сил и НДС в плоскости в сечении, что хорошо согласуется с имеющими экспериментальными данными;

- получены основные соотношения для расчета НДС в композитных телах стержневого типа в поле центробежных сил;

- получены расчетные соотношения для определения технических частот исследуемых тел, пригодных как для теоретических, так и прикладных целей.

**Практическая ценность.** Результаты, полученные в работе, представляют теоретическую и практическую ценность для расчета и проектирования многослойных анизотропных конструкций неоднородной структуры.

Результаты разработанной комплексной программы позволяют проводить послойный раскрой сечений по длине многослойного стержня (лопатки) из КМ и внедрены в производства по изготовлению лопаток из КМ в ООО «Политермо» (г.Истра, Московская обл.).

По результатам исследования получен инновационный патент и удостоверение автора №89798 (г. Астана, 2016 г. Министерства юстиции РК) по теме «Способ изготовления композитных лопаток ветроустановки согласно утвержденным математическим моделям методом вакуумно-компрессорной пропитки».

Разработанный комплекс расчетных программ зарегистрирован в Федеральной службе по интеллектуальной собственности как «Программа для ЭВМ» на тему «Решения задачи кручения слоистых анизотропных стержней произвольного сечения методом конечных элементов» (№2016662153 от 31.10.16).

**Методы исследования.** При решении поставленных задач использовались вариационный принцип, аналитические и численные методы расчета НДС изделий из КМ. Для аналитических расчетов и расчета численными методами при определении НДС многослойных стержневых изделий из КМ использовался язык программирования ФОРТРАН. Графики расчетов построены с помощью пакета прикладных программ Grapher, Surfer. Для проведения конечно-элементных расчетов НДС лопаток компрессора из КМ был использован программный комплекс ANSYS для сравнения с результатами аналитического расчета.

**На защиту вносится:**

- математические модели механики для расчета НДС многослойных анизотропных сред, сводящихся к системе дифференциальных уравнений с параметрами, учитывающих разрывы на границах раздела слоев и непрерывными в пределах одного слоя;
- расчетная модель задачи о НДС многослойного анизотропного призматического стержня произвольного сечения при действии растягивающих сил, изгибающих и крутящих моментов и алгоритм его решения;
- результаты анализа НДС и жесткости на кручение многослойного стержня прямоугольного сечения, образованных из различных анизотропных материалов при кручении;
- методика и результаты решения задачи кручения многослойного анизотропного стержня произвольного сечения;
- кинематические соотношения для исследования НДС многослойных естественно-закрученных анизотропных стержней и результаты анализа НДС многослойной компрессорной лопатки, находящихся в поле центробежных сил;
- физическая картина деформирования слоистых композитов рабочих лопаток с целью создания изделий и материалов с заданными свойствами, в том числе, без изменения внешней формы анизотропного тела;
- расчётное и экспериментальное определение собственных частот и форм колебаний лопаток;
- анализ условий возникновения резонансов и мер по их устранению на рабочих режимах работы двигателя;

**Личный вклад автора.** Автор провел обобщение и анализ отечественных и зарубежных исследований по основным вопросам механики и НДС изделий из КМ, на основе которых было выбрано научное направление работы. Автор принимал непосредственное участие в постановке и проведении исследования по теме диссертации, разработал аналитическую программу расчета НДС стержневых конструкции из КМ, выполнил анализ проведенных исследований.

Принимал непосредственное участие в получении исходных данных, разработал и реализовал методику моделирования, получил и обработал результаты исследований, подготовил основные публикаций и лично выступал с докладами по выполненной работе.

Основные результаты исследований автор доложил на различных международных конференциях и опубликовал в рецензируемых журналах.

За период учебы в докторантуре МАИ и выполнения работы проводилось внедрение результатов исследований в практической деятельности ООО «Поли-

термо» (г. Истра, Московская обл.).

**Достоверность результатов.** Достоверность полученных результатов обусловлена использованием фундаментальных соотношений механики сплошной среды, строгой математической формулировкой решаемых задач, применением аналитических, вариационных и численных методов решения задач механики. При ряде упрощающих предположений (например, равенство перемещений компонентов КМ) полученные результаты совпадают с классическими формулами и известными соотношениями для однородных анизотропных и изотропных тел, согласуются с существующими точными результатами, полученными различными авторами. В обоснование достоверности полученных результатов проведены их сравнения с известными теоретическими и экспериментальными данными. Результаты расчетов геометрических и физико-геометрических характеристик в типовых примерах для стержней простой формы сечения полностью согласуются с результатами аналитических расчетов.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах:

- 1-съезд математиков Казахстана, Шымкент, 1996.
- 2-ой Междунар. науч. конф. «Проблемы современной механики». - Алматы, 2006.
- Междунар. науч.-практ. конф. «Композиционные материалы в промышленности». - 2008, г. Ялта, Крым.
- VI всерос. науч. конф. «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики», Томск: 2008.
- Всероссийской науч.-практ. конф. «Инженерные системы-2009», М.: РУДН. - 2009.
- Междунар. конф. по распространению упругих и упругопластических волн, посвященная 100-летию со дня рождения академика, Героя Социалистического Труда Х.А. Рахматуллина. Бишкек: 2009.
- 6-й Московской Междунар. конф. «Теория и практика технологии производства изделий из композиционных материалов и новых металлических сплавов» (ТПКММ), -М: МГУ им. М.В. Ломоносова.-2009.
- V междунар. науч.-практ. конф. «Инженерные системы - 2012». М.: РУДН. - 2012.
- Междунар. науч.-техн. конф. «Проблемы и перспективы развития двигателестроения» посвященная генеральному конструктору аэрокосмической техники академику Н.Д. Кузнецову 25-27 июня 2014. - Самара.
- Первый междунар. конф. «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций» («Deformation and Failure of Composite Materials and Structures» DFCMS-2014) 10-13 ноября 2014. - Москва.
- 3rd International Conference on Recent Trends in Materials and Mechanical Engineering (ICRTMME 2015), January 15-16, 2015, Auckland, New Zealand.
- 13-ой Междунар. конф. «Авиация и космонавтика–2014», М.: - 2014.
- Междунар. молодеж. науч. конф. "Прочность, ползучесть и разрушение строительных и машиностроительных материалов и конструкций", М.: РУДН, 2014.

- International Scientific Conference Urban Civil Engineering and Municipal Facilities, SPbUCEMF-2015 /Procedia Engineering 117 (2015 ).

- II Междун. конф. деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций. Института машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук. М.: 2016.

-VI Всерос. науч. конф. с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред», М.: Российская академия наук, Институт прикладной механики. М.: 2016.

В полном объеме содержание диссертации обсуждалось:

- На научном семинаре им. А.Г.Горшкова «Проблемы механики деформируемого твердого тела и динамики машин» (под руководством д.ф-м.н., профессора Д.В. Тарлаковского), М.: МАИ (НИУ), - 3.10.2016.

- На научно-межвузовском семинаре РУДН «Геометрия и расчет тонких оболочек неканонической формы». М.: РУДН. –18.10.2016.

- На научно-техническом совете «Отдела конструкционного материаловедения» Федеральном государственном бюджетном учреждении науки, Института машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук (под председательством д.ф-м.н., профессора А.Н.Романова). М.: - 31.10.2016.

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 38 работ. В рецензируемых журналах включенных в Перечень ВАК, опубликованы 18 статьи, в том числе 8 статей без соавторов, 1 патент на изобретение и 1 монография, 1 акт внедрения, 1 свидетельство о государственной регистрации «Программы для ЭВМ» в Федеральную службу на интеллектуальную собственность РФ.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, шести глав, основных выводов, списка литературы и приложения. Программа расчета на ЭВМ дана в виде блок–схемы. Общий объем составляет 343 страниц, включая 124 рисунков, 22 таблиц, библиографии 259 наименований и 21 страниц приложений.

**Благодарности.** Автор выражает особую признательность и благодарность за постановку проблемы, постоянное внимание к работе и неизменную поддержку д.т.н., профессору Дудченко А.А., д.т.н., профессору Каримбаеву Т.Д. Автор благодарен всему коллективу кафедры «Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций» за поддержку во время учебы в докторантуре и консультации при завершении диссертационной работы. Автор признателен АО "Центр международных программ" МОН РК за предоставленную возможность обучаться в докторантуре по программе "Болашак".

#### СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

**Во введении** описано состояние проблемы, обоснована актуальность проводимых исследований, приведен обзор научной литературы по соответствующей проблематике, сформулированы цель работы, раскрыты ее научная новизна, применение и практическая ценность. Приведены сведения о достоверности результатов работы, ее апробация; изложены основные положения, выносимые на за-

щиту; описаны структура и объем работы. Кратко изложены основное содержание диссертации (положения по главам) и полученные в ней результаты.

**В главе 1** приведен краткий обзор существующих экспериментальных работ Российских и зарубежных авторов, посвященных изучению физико-механических характеристик КМ, предел прочности, модуль упругости и т.д. Отмечены, что основные достижения в механике КМ связаны с работами Болотина В.В., Васильева В.В., Рабиновича А.Л. и Верховского И.А., Дудченко А.А., Аболиньша Д.С., Скудры Л.М. и Аузукалнса Я.В., Ванина Г.А., Бидермана В.Л. и других. Среди зарубежных авторов следует отметить работы Шеффера, Иквелла, Бира, Хашина и Розена, Цая, Уитни и Райли, а также Хайнера и Ашбауха и др.

В первой главе работа построено так: сначала изучаются характеристика КМ отдельного слоя, составной части стержня, затем стержень в целом. Рассматриваемый призматический анизотропный многослойный стержень состоит из конечного числа слоев. Материал каждого слоя является однородным ортотропным. Поведение однонаправленного слоя полагается линейно-упругим, а связь между напряжениями и деформациями описывается обобщенным законом Гука. При этом параметры упругости слоя определяются либо экспериментальным путем, либо расчетным через технические постоянные.

В п.1.1-1.3 проанализированы расчетная модель композиционного материала и методы определения упругих постоянных КМ. Проанализированы экспериментально установленные наиболее существенные особенности поведения конструкционных материалов при их статическом и динамическом деформировании, которые, непременно, должны быть охвачены в рамках существующих и разрабатываемых математических моделей. Приведены расчетные формулы для определения упругих свойств слоя из КМ. В п.1.4 определяются расчетные формулы композиционной многослойной структуры. При изучении деформаций в слоистой конструкции ее следует рассматривать как тела многослойной структуры. Решение краевых задач о НДС стержня включает в себя ее решение для каждого слоя в отдельности. При переходе от слоя к слою удовлетворяют условиям непрерывности перемещений и условию равенства векторов напряжений в двух соседних слоях на поверхности их сочленения. В случае, если только свойства двух соседних слоев отличаются друг от друга, то при переходе от слоя к слою скачком могут изменяться все компоненты тензора напряжений -  $\sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xx}$ . Однако, из-за многочисленности слоев решение важных задач в строгой постановке для стержня практически не удастся. Это обстоятельство приводит к тому, что принимается ряд предположений, которые значительно упрощают способы получения решения.

В рамках приближенной теории стержней принимается условие о главном нормальном сечении многослойного стержня, который образован некоторой непрерывной поверхностью со следующими свойствами:

- главное многослойное сечение нормально к поверхности стержня во всех точках линии пересечений;
- в деформированном состоянии главное сечение имеет наименьшую площадь среди всех возможных нормальных сечений.

Тогда главное сечение естественно закрученного деформированного многослойного стержня будет соответствовать поверхности депланации  $\varphi(x,y)$ . В соответствии с общими принципами построения теории стержней, к второстепенным компонентам напряжения в главном сечении отнесены компоненты, которые обращаются в нуль на его контуре, т.е.  $\sigma_{\xi\xi}, \sigma_{\eta\eta}, \sigma_{\xi\eta}$ . Распределение основных касательных напряжений в главном сечении  $\sigma_{\xi\zeta}, \sigma_{\eta\zeta}$  закрученного многослойного стержня совпадает с распределением касательных напряжений в поперечном сечении аналогичного незакрученного стержня при свободном кручении.

Поэтому в закрученном призматическом стержне депланация многослойного поперечного сечения связана с упругим кручением, но и со всеми другими видами деформации, когда контур поперечного сечения искажается. Деформации многослойной конструкции полностью задаются перемещениями ортотропных слоев, для каждого из которых учитывается влияние деформаций сдвига.

В п.1.5 приведена математическая модель расчета НДС предварительно закрученного многослойного стержня произвольного сечения. Положение любого многослойного поперечного сечения полностью определяется продольной координатой  $z$ . По теории стержней рассматриваются пространственные перемещения некоторой характерной точки слоя и углы поворота сечения, которые являются функцией одной координаты  $z$ . Перемещения любой точки слоя  $i$  сечения определяются линейными и угловыми перемещениями в выбранной характерной точке и гипотезами о поведении выбранной характерной точке слоя и гипотезами о поведении сечения при деформировании многослойного стержня. После введения таких гипотез трехмерная задача о деформации многослойного стержня сводится к одномерной задаче определения компонент перемещений характерной точки слоя сечения, которые являются функциями координаты  $z$  и задаются в виде

$$\begin{aligned} u^i &= \frac{a_{33}^i M_2}{2J_2^i} (l-z)^2 + \tau y (l-z) + U^i(x, y), \\ v^i &= \frac{0.5a_{35}^i M_t - a_{33}^i M_1}{2J_1^i} (l-z)^2 - \tau x (l-z) + V^i(x, y), \\ w^i &= \left[ \frac{0.5a_{35}^i M_t - a_{33}^i M_1}{J_1^i} y + \frac{a_{33}^i M_2}{J_2^i} x - \frac{a_{33}^i}{F_i} P \right] (l-z) + W^i(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $U^i, V^i, W^i$  - некоторые подлежащие определению функции координат слоя сечения  $x, y$ ;  $\tau$  - относительный угол закручивания на единицу длины стержня;  $l$  - длина стержня;  $J_k^i = \int_F x_k^2 dF_i$  ( $k=1,2$ ) - главные моменты инерции поперечного сечения  $i$ -го слоя;  $F_i$  - площадь сечения  $i$ -го слоя;  $P, M_1, M_2, M_t$  - силы и моменты, действующие в поперечном сечении стержня. Формулы (1) показывают, что скручивающие моменты вызывают также и изгиб, а изгибающие - не только изгиб, но и закручивание и проекция изогнутой оси на главные плоскости  $xz, yz$  будут равны

$$\xi = -\frac{a_{33}^i M_2}{2J_2^i} (l-z)^2, \quad \eta = \frac{0.5a_{35}^i M_t - a_{33}^i M_1}{2J_1^i} (l-z)^2.$$

Уравнения равновесия для каждого  $i$ -го слоя могут быть приведены к виду

$$\frac{\partial^2 U^i}{\partial x^2} + \frac{c_{66}^i}{2c_{11}^i} \frac{\partial^2 U^i}{\partial y^2} + \frac{2c_{12}^i + c_{66}^i}{2c_{11}^i} \frac{\partial^2 V^i}{\partial x \partial y} = Z_1^i(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 V^i}{\partial y^2} + \frac{c_{66}^i}{2c_{22}^i} \frac{\partial^2 V^i}{\partial x^2} + \frac{2c_{12}^i + c_{66}^i}{2c_{22}^i} \frac{\partial^2 V^i}{\partial x \partial y} = Z_2^i(x, y). \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 W^i}{\partial x^2} + \frac{c_{44}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial^2 W^i}{\partial y^2} = Z_3^i(x, y), \quad (3)$$

Здесь функция  $Z_j^i(x, y)$  ( $j=1,2$ ) определяются следующими соотношениями

$$Z_1^i(x, y) = -\frac{c_{13}^i a_{33}^i}{c_{11}^i J_2^i} M_2 - \frac{1}{c_{11}^i} \left( c_{15}^i \frac{\partial^2 W^i}{\partial x^2} + c_{46}^i \frac{\partial^2 W^i}{\partial y^2} \right),$$

$$Z_2^i(x, y) = \frac{0.5a_{35}^i M_t - a_{33}^i M_1 C_{23}^i}{c_{22}^i J_1^i} - \frac{1}{c_{22}^i} \left[ (c_{25}^i - c_{46}^i) \tau + (c_{25}^i - c_{46}^i) \frac{\partial^2 W^i}{\partial x \partial y} \right],$$

$$Z_3^i(x, y) = \frac{2c_{35}^i a_{33}^i}{c_{55}^i J_2^i} M_2 - \frac{2c_{15}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial^2 U^i}{\partial x^2} - \frac{c_{46}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial^2 U^i}{\partial y^2} - \frac{c_{46}^i + 2c_{32}^i}{c_{55}^i} \frac{\partial^2 V^i}{\partial x \partial y}.$$

Специальная форма уравнений равновесия (2), (3) относительно составляющих  $U^i, V^i, W^i$  перемещений  $u^i, v^i, w^i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) выбрана с целью перенести вправо члены, обусловленные взаимодействием сдвиговых и продольно-поперечных деформаций. Действительно, если  $c_{j5}^i = c_{46}^i = 0$  ( $j=1,2,3$ ), что реализуется при  $\psi^i = 0^0$  или  $\psi^i = 90^0$ , то  $\psi^i = 0^0$ ,  $Z_3^i = 0$ , а  $Z_1^i, Z_2^i$  зависят только от изгибающих моментов  $M_1, M_2$ , обуславливая возможность по раздельного определения функции  $W^i$  и функции  $U^i, V^i$  ( $\psi^i$  - угол армирования слое  $i$ ). Дифференциальные уравнения (2), (3) должны быть решены при заданных условиях на боковой поверхности стержня, а также на его торцах. В сечениях стержня должны выполняться условия непрерывности перемещений  $U^i, V^i, W_i$  при переходе от слоя к слою.

В отличие классической теории тонких изогнуто-закрученных стержней Кирхгофа-Клебша решение сводится к системе дифференциальных уравнений с параметрами, учитывающих особенности на границах раздела слоев. Если плоскость поперечного сечения многослойного стержня не является плоскостью упругой симметрии, этот стержень будет испытывать более сложную деформацию, которая называется обобщенным кручением. Деформация обобщенного кручения характеризуются не только искривлением сечения и поворотом его вокруг оси, параллельной геометрической, но также и изменением формы в плане сечения и

искривлением самой оси. В этом случае все шесть составляющих компонент напряжения, отнесенное к системе координат  $\xi\eta z$ , совпадающей с геометрической осью  $z$ , не равны нулю. Поэтому, в приближенной теории закрученных стержней многослойного произвольного сечения, основанной на определенных гипотезах, разделяют компоненты напряжений и деформаций на главные и второстепенные, которыми в ряде уравнений можно пренебречь. Считая многослойный стержень достаточно длинным, принимаем, что объемные силы и нагрузки на поверхности приложенные по торцевым плоскостям приводятся к статически эквивалентной продольной силе  $P$ , изгибающим  $M_1$ ,  $M_2$  и крутящему моменту  $M_t$ .

Так как стержень из КМ имеет многослойную структуру, то для него возникает специфическая для армированных стержней задача – задача укладки в сечении слоев постоянной толщины. Так как размеры сечения могут меняться вдоль длины стержня, то и число слоев в каждом сечении будет различным. Расположение отдельных слоев в сечении стержня определяется толщиной монослоя ленты или ткани и наружной конфигураций сечения. В работе предложен оригинальный алгоритм расчета координат, оформляющие отдельные слои для стержня произвольного сечения. Предложен алгоритм и он реализован для расчетов в виде пакета программ на языке FORTRAN. Наиболее сложным в алгоритме является процесс построения начала и конца каждого слоя. Такие построения проводятся для ряда следующих друг за другом сечений (см. рис.1). Взятые из разных сечений координаты начала и конца одного слоя образуют координаты одного лепестка, т.е. решена сформулированная задача раскроя слоев ленты, ткани (см. рис.2).

В п.1.8 рассматривается задача о кручении многослойных призматических стержней прямоугольного сечения, составленного из ортотропных материалов. Оказалось, что для призматического стержня прямоугольного поперечного сечения, составленного из различных ортотропных слоев, существует аналитическое решение С.Г.Лехницкого - задача о чистом кручении, удовлетворяющие условия сплошности на поверхности контакта слоев. Однако в работе С.Г.Лехницкого не был проведен анализ решения для многослойного стержня. В связи с этим на основе составленной программы расчета всесторонне исследовалась распределение касательных напряжений, перемещения в отдельных слоях и на поверхностях их контакта в зависимости от механических характеристик материала этих слоев.

В работе С.Г. Лехницкого для многослойного стержня прямоугольного сечения касательные напряжения  $\sigma_{xz}^i$ ,  $\sigma_{yz}^i$ , функция кручения  $\varphi^i(x, y)$  и жесткость на кручение  $C$  в слое  $i$  определяются из соотношений

$$\sigma_{xz}^i = \sum_{k=1,3}^{\infty} \left( \frac{8c_{44}^i a \tau}{k^2 \pi^2} B_{ki} + B_{ki}^* \right) \cos \frac{k\pi x}{a}, \quad \sigma_{yz}^i = - \sum_{k=1,3}^{\infty} \left[ \frac{8f_i a \tau}{k^2 \pi^2} (A_{ki} + 1) + \mu_i A_{ki}^* \right] \sin \frac{k\pi x}{a}$$

$$\varphi^i(x, y) = - \sum_{k=1,3}^{\infty} \left[ \frac{8a^2}{k^3 \pi^3 \mu_i} A_{ki} + \frac{a}{k\pi f_i \tau} A_{ki}^* \right] \cos \frac{k\pi x}{a},$$

$$C = \sum_{k=1,3}^{\infty} \left[ \frac{32a^3}{k^4 \pi^4} \sum_{i=1}^N c_{44}^i \left( h_i - \frac{2a}{k\pi \mu_i} \operatorname{th}(\beta_{i,k} / 2) \right) + \frac{4a^3}{k^3 \pi^3} \sum_{i=1}^N c_{ki} \right]. \quad (4)$$

Здесь  $h=b_i-b_{i-1}$  толщина,  $c_{44}^i, c_{55}^i$  - модули сдвига  $i$ -го слоя в плоскости  $yz$  и  $xz$  соответственно,  $b_i$  - расстояние от оси  $x$  до линии раздела слоев с номерами  $i-1$  и  $i$ ;  $a$  - ширина стержня;  $\tau$  - относительный угол закручивания на единицу длины стержня.

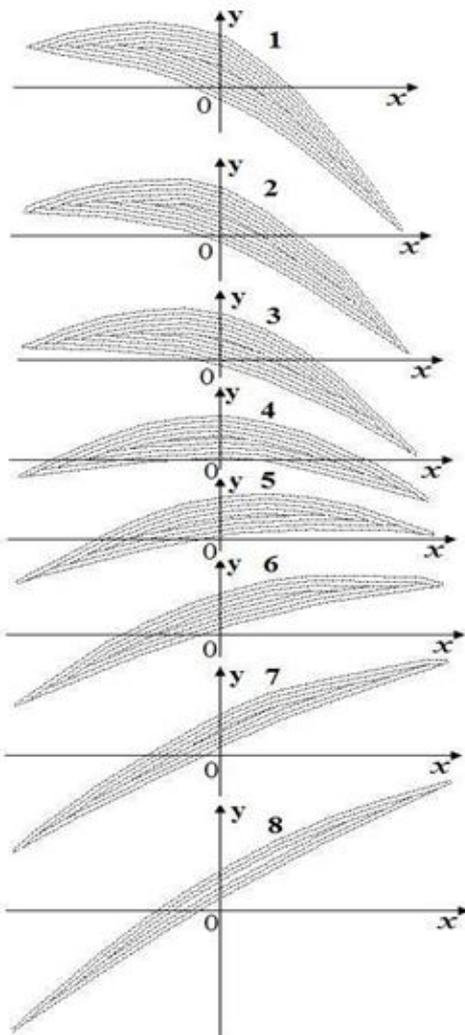


Рисунок 1 - Построенные слои поперечных сечений компрессорной лопатки; номера сечений лопатки соответствуют сечениям, из восьми сечений удаленным от ее корневого сечения.

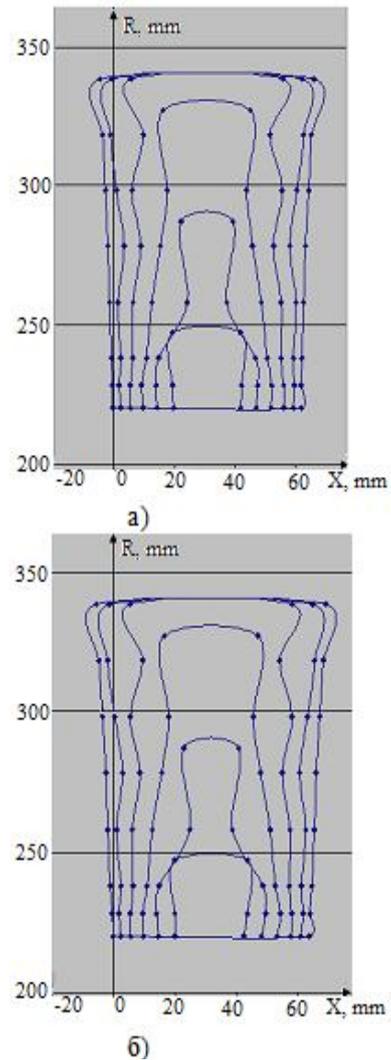


Рисунок 2 - Лепестки а) спинки б) корытца компрессорной лопатки.

Численное исследование задачи о кручении составных стержней прямоугольного сечения показывает существенное изменение напряжений и перемещений при переходе от слоя к слою. Обеспечение непрерывности касательного напряжения  $\sigma_{yz}$  на границах контакта слоев приводит к возможности разрушения слоев с низкой сдвиговой прочностью и, следовательно, к дальнейшему уменьшению их вклада в жесткость на кручение стержня и последующему повышению скачков напряжения  $\sigma_{xz}$  (см.рис.3) и перемещения  $w$  (см. рис.4), а так же градиентов напряжений  $\sigma_{yz}$  (см.рис.4).

Увеличение межслоевой прочности КМ является основным способом обеспечения целостности и работоспособности стержней из КМ, а также их надежности и эффективности. Проведенный анализ позволяет дать оценку работоспособности

анизотропной слоистой конструкций при кручении в целом в зависимости от напряженности отдельного слоя.

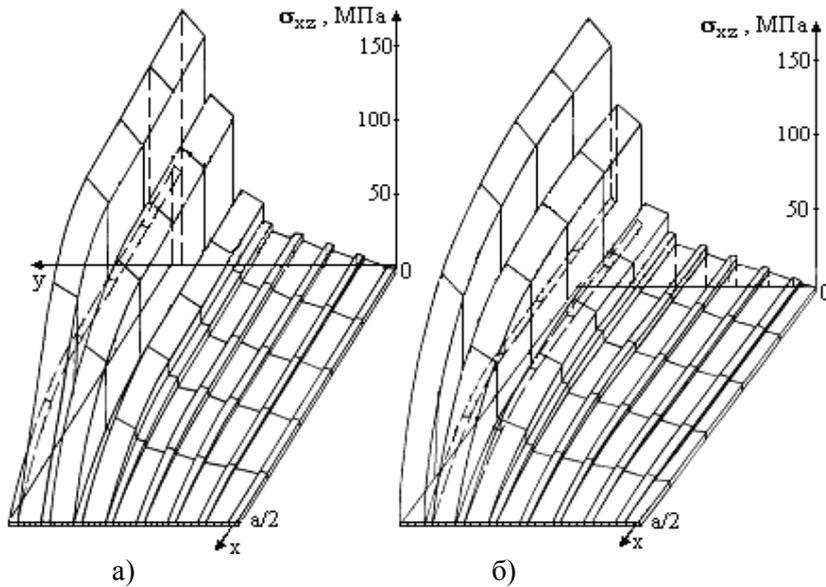


Рисунок 3 - Распределение касательных напряжений  $\sigma_{xz}$  в сечении 29-ти слойного стержня с ортотропными (углы армирования  $\pm 45^\circ$ ,  $\pm 30^\circ$ ,  $\pm 15^\circ$ ,  $0^\circ$ , случай а) и изотропными (случай б) наружными слоями. 0 центр сечения,  $a/2$  - полусторона прямоугольника.

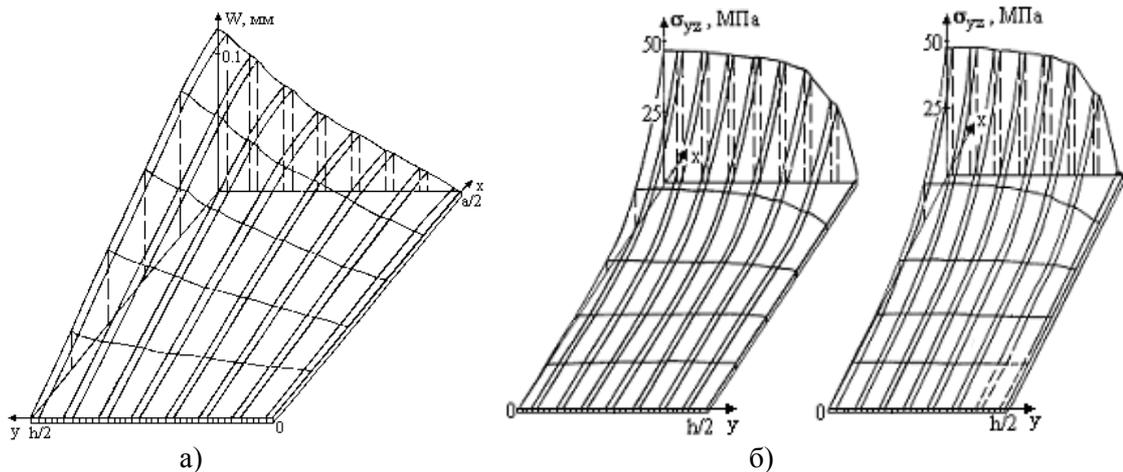


Рисунок 4 - Распределение осевых перемещений  $W$  и касательных напряжений  $\sigma_{yz}$  в сечении 29-ти слойного стержня с ортотропными (углы армирования  $\pm 45^\circ$ ,  $\pm 30^\circ$ ,  $\pm 15^\circ$ ,  $0^\circ$  относительно центра кручения) внутренними слоями. 0 центр сечения,  $a/2$ ,  $h/2$  - полустороны прямоугольника.

В п.1.9 аналитическим путем установлена зависимость выражения жесткости на кручение от числа слоев, которая асимптотически стремится к пределу (см. рис.5), характерному для однородного анизотропного стержня с эффективными параметрами упругости.

Из проведенного анализа следует, что на этапе предварительного выбора материала для вычисления жесткости  $C$  на кручении многослойного анизотропного стержня можно рекомендовать относительно простое соотношение

$$C = \frac{1}{3} ah^3 (G_A v_1 + G_B v_2) = \frac{1}{3} c_{55}^i ah^3. \quad (5)$$

где  $G_A$ ,  $G_B$  модули сдвига двухфазного композиционного стержня и их соответствующие объемные содержания  $v_1$ ,  $v_2$ . Соотношение (5) является обобщением известных соотношении жесткости на кручение  $C$  на случай тонкого многослойного анизотропного стержня. Из (5) следует, что эффективный модуль сдвига

$$G = c_{55} = v_1 c_{55}^2 + v_2 c_{55}^1 \quad (6)$$

тонкого стержня многослойной структуры должен быть определен по модели Фойхта в отличие от принятого способа ее определения по модели Рейса.

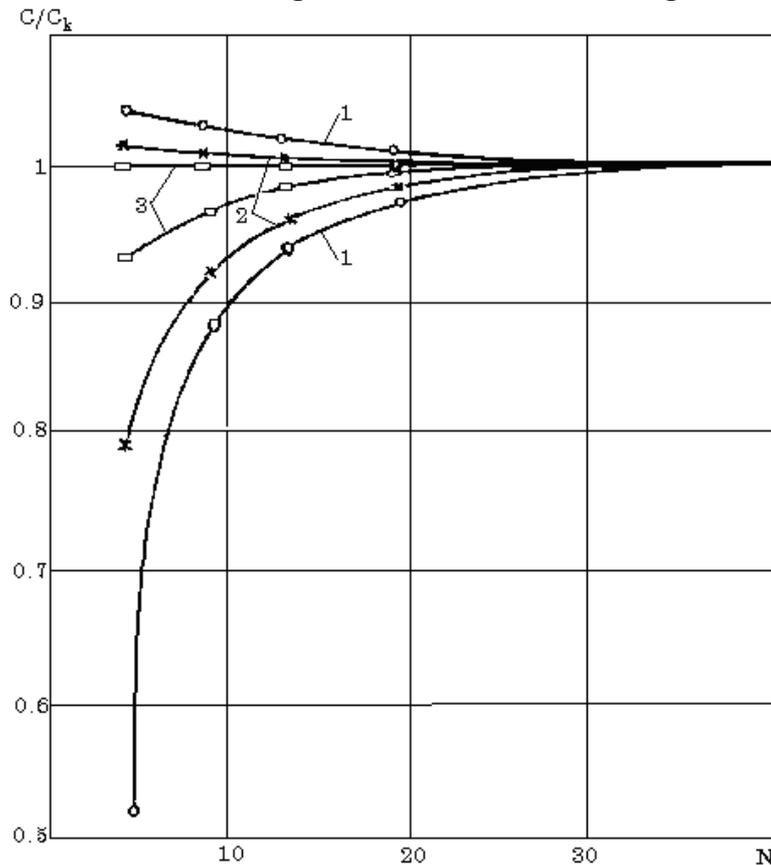


Рисунок 5 - Зависимость жесткости на кручение от числа слоев  $N$  (1-3 -  $v_1$  равно соответственно 0.525; 0.7; 0.8 соответственно).

Таким образом, полученные соотношения для оценки жесткости на кручение  $C$  и эффективного модуля  $c_{55}$  стержневых конструкции, рам, и т.д. из КМ, являясь достаточно простыми, дает достоверные результаты.

В п.1.9 построены специальные номограммы (см. рис.6), позволяющие достаточно просто оценить отдельные характеристики стержня на основе небольшого объема информации о материале слоев. На стадии эскизного проектирования тонкостенных многослойных стержней работающих в условиях кручения предложена номограмма для оценки их характеристик жесткости на кручение.

Были проведены многочисленные расчеты по приближенной формуле (5) для определения жесткости на кручения  $C$  стержня из композиционных материалов. Они показали, что с увеличением модуля сдвига  $G_A$  жесткость  $C$  увеличивается линейно. Результаты расчетов приведены на рисунке 2 в виде зависимостей жесткости  $C$  от отношения  $G_A/G_B$  при определенных объемных содержаниях  $v_1$ . Параметры  $G_A, G_B$  могут быть связаны с отдельными конкретными углами армирова-

ния. Построенная линейная зависимость жесткости  $C$  от отношений модулей сдвига  $G_A/G_B$  (см. рис.6) позволяет определить эффективные параметры упругости многослойной анизотропной среды или же жесткости на кручение  $C$  двухфазного композиционного стержня при заданных значениях  $G_A$ ,  $G_B$  и  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ . Действительно, если известно отношение модулей сдвига  $G_A/G_B$  чередующихся материалов и их относительное объемное содержание  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ , то жесткость неоднородного стержня  $C$  находится из линейной зависимости, приведенной на рисунке 6 (точки  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ).

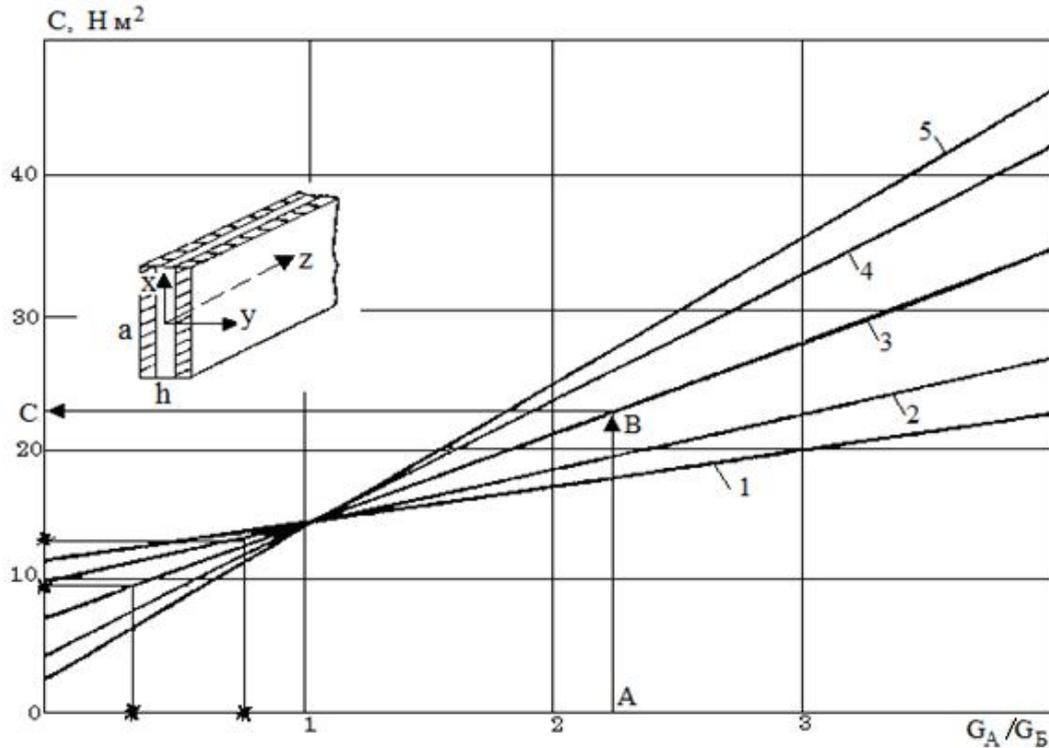


Рисунок 6. - Зависимость жесткости на кручение от отношения  $G_A/G_B$  значений модулей на сдвиг слоев: 1–5 -  $\nu_1$  равно 0.2; 0.3; 0.5; 0.7 и 0.8 соответственно.

При известных значениях жесткости  $C$  (экспериментальные значения  $C^*$ , для прямоугольных однонаправленно-армированных ( $\psi=0^\circ$ ) углеалюминиевых (CAL) и боралюминиевых (BAL) композиционных стержней со сторонами  $a=60$  мм,  $h=3$  мм), (на рисунке 6 эти данные отмечены знаком «\*») и относительном объемном содержании компонента  $\nu_1$  (или отношении  $G_A/G_B$ ) можно определить отношение  $G_A/G_B$  (или  $\nu_1$ ) (см. рис. 6). Если, кроме того, известны характеристики одного из материалов  $A$  или  $B$ , то найденное отношение  $G_A/G_B$  позволяет установить модуль сдвига другого компонента. Сравнения жесткости на кручение и модуля сдвига  $c_{55}$ , полученные экспериментально (данные Л.Л.Горшкова) и с помощью приведенной на рисунке 6 линейной зависимостью  $C$  от  $G_A/G_B$ , даны в таблице 1 ( $\nu_1=0.5$ ).

Здесь же приведена приближенная оценка модуля сдвига композиции, полученная из соотношения (5) по формуле

$$c_{55}^{\bullet} \approx \frac{3C^*}{ah^3}.$$

Результаты расчетов для композиции с алюминиевой матрицей ( $G_B=26.31$  ГПа) показывают, что расчетные  $C$  и экспериментальные  $C^*$  значения жесткостей и модулей сдвига  $c_{55}, c_{55}^{\bullet}$  вычисленные по формулам (5) и (6), отличаются не более 3% (см.табл.1). Таким образом, разработана методика количественной оценки жесткости на кручение тела слоистой структуры на основе результатов точных аналитических решений задачи о кручении многослойного стержня прямоугольного сечения.

Таблица 1. Сравнения жесткости на кручение  $C$  и модуля сдвига  $c_{55}$  с экспериментальными результатами.

Характеристики материала	$\varphi$ , град			
	$0^\circ$	$\pm 15^\circ$	$\pm 30^\circ$	$\pm 45^\circ$
<i>BAL, <math>\nu=0.5</math></i>				
$C^*$ , Нм <sup>2</sup>	12.42	17.82	22.68	24.3
$C^\circ$ , Нм <sup>2</sup>	11.75	17.9	22.76	24.79
$c_{55}^*$ , ГПа	23	33	42	46
$c_{55}^{\bullet}$ , ГПа	22.76	33.16	42.16	45.91
$(G_A/G_B)^\oplus$	0.65	1.52	2.21	2.49
$(c_{55}^* - c_{55}^{\bullet}) / c_{55}^{\bullet}$ , %	5.4	-0.4	-0.35	-0.78
$(C^* - C^\circ) / C^\circ$ , %	1	-0.5	-0.4	0.2
<i>CAL, <math>\nu=0.5</math></i>				
$C^*$ , Нм <sup>2</sup>	9.83	12.04	19.98	24.3
$C^\circ$ , Нм <sup>2</sup>	9.09	12.64	19.72	24.79
$c_{55}^*$ , ГПа	18.21	23.4	37	45
$c_{55}^{\bullet}$ , ГПа	18,31	23.41	36.66	45.91
$(G_A/G_B)^\oplus$	0.38	0.78	1.79	2.49
$(c_{55}^* - c_{55}^{\bullet}) / c_{55}^{\bullet}$ , %	0.6	-0.04	0.9	-0.2
$(C^* - C^\circ) / C^\circ$ , %	-0.6	0.01	0.45	2
Обозначение. "*" - экспериментальные значения; "°" - расчетные значения по формуле (5); "•" - расчетные значения по формуле (6); «⊕» - из номограммы и рисунок 6.				

**Вторая глава** посвящена численному решению МКЭ задачи о кручении слоистых анизотропных стержней произвольного сечения. Проведен анализ работ, показывающий, что жесткость на кручение является важной интегральной характеристикой сечения многослойных стержней. Опубликованные результаты представляются недостаточными, особенно в части влияния слоев, свойств отдельных слоев, их взаимодействия на жесткость при кручении слоистых стержней произвольного сечения. Поэтому, в п.2.1-2.3 предлагается методика и алгоритм решения задачи о кручении слоистых анизотропных стержней МКЭ с использованием алгоритмического языка ФОРТРАН. Рассматривается задача о кручении стержней прямоугольного, ромбовидного сечения и сечения компрессорной лопатки (п.2.4). Значения осевых перемещений прямоугольного и ромбовидного сечений, вычисленные МКЭ, сравниваются с точными их значениями (п.2.4).

В настоящее время для решения задачи кручения применяются различные прикладные программы (ANSYS, NASTRAN, и др.), где используется МКЭ. В этих программах по заданной геометрии формируется твердотельная модель рассматриваемого стержня или конструкции и разбивается на конечные элементы. В этом случае полученная геометрия сечения может не соответствовать реальному слоистому сечению конструкции, который был выбран в соответствии с технологическим заданием. Поэтому геометрия слоистого стержня (п.1.5) разбивается на слои по заданной толщине с учетом физической неоднородности и слоистости (технологическая задача раскрытия сечения на слои), алгоритм которого реализован по специально созданной программе на алгоритмическом языке ФОРТРАН. Полученная геометрия слоев различных сечений по длине стержня, позволяет при определении НДС исследуемой области учитывать их физическую неоднородность с учетом слоистости. Каждый слой рассматриваемого сечения может быть изготовлен из различных ортотропных материалов (количество характеристик равно 9, п.1.5). Кроме того исследуемый стержень является переменным по длине, ширине и толщине. В этом случае в каждом сечении количество слоев будет различным. В связи с этим, для учета физической неоднородности и слоистости сечений, рассматриваемых конструкций при определении НДС, возникает необходимость для решения таких задач использование численных методов (МКЭ, и др.).

В п.2.2 в системе координат  $x, y, z$  соотношения между напряжениями  $\sigma_{kj}^i$  и деформациями  $\varepsilon_{kj}^i$  для слоя  $i$  определяются из обобщенного закона Гука. Перемещения  $u^i, v^i, w^i$  точек  $i$ -го слоя определяются из (1). Принятая форма перемещений говорит о том, что при переходе от слоя к слою перемещения  $u^i, v^i$  в плоскости сечения изменяются непрерывно. Непрерывность перемещения  $w^i$  из плоскости сечения при переходе от слоя к слою обеспечивается линейной аппроксимацией функции кручения в треугольных элементах

$$w_j^i / \tau = \varphi_j^i(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = \{x\}^T \cdot \{\alpha\}.$$

Деформации  $\varepsilon_{xz}^i, \varepsilon_{yz}^i$   $i$ -го слоя определяются из соотношений

$$\{\varepsilon^i\}_e = B\{\delta^i\}_e + \{Y\}, \quad \{Y\} = \frac{\tau}{2} \begin{Bmatrix} x \\ -y \end{Bmatrix}.$$

Совокупность значений функции кручения в вершинах треугольного элемента  $e$  определяется как вектор

$$\varphi_j^i = \{x\} \cdot A^{-1} \{\delta^i\}_e, \quad \{\delta^i\}_e = A\{\alpha\},$$

где матрица  $A^{-1}$ ,  $B$  равна

$$A^{-1} = \frac{1}{2F} \begin{pmatrix} a_r & a_s & a_t \\ b_r & b_s & b_t \\ c_r & c_s & c_t \end{pmatrix}, \quad B = \frac{\tau}{4F} \begin{pmatrix} b_r & b_s & b_t \\ c_r & c_s & c_t \end{pmatrix} \begin{matrix} a_k = x_m y_n - x_n y_m, (m \neq n \neq k), \\ b_k = y_m - y_n, \\ c_k = x_n - x_m, (n, k, m = r, s, t). \end{matrix}$$

Компоненты вектора напряжения определяется по формуле

$$\{\sigma^i\}_e = \begin{Bmatrix} \sigma_{yz}^i \\ \sigma_{xz}^i \end{Bmatrix} = D^i (B\{\delta^i\}_e + \{Y\}), \quad D^i = \begin{pmatrix} c_{44}^i & 0 \\ 0 & c_{55}^i \end{pmatrix}.$$

Интеграл энергии треугольного элемента  $e$  вычисляется по формуле

$$\Pi_e = \{\sigma^i\}_e^T \left( \int_e [B^T D^i B \{\sigma^i\}_e + 2B^T D^i \{Y\}] de + \int_e \{Y\}^T D^i \{Y\} de \right).$$

Минимум энергии достигается, если во всех треугольных элементах  $e$ , выполняется равенство  $\partial \Pi_e / \partial \{\sigma^i\}_e^T = 0$ , т.е.

$$B^T D^i B \{\sigma^i\}_e = -2 \frac{B^T D^i}{F} \{z\}, \quad (7)$$

где  $F$  - площадь треугольного элемента,  $\{z\} = \int_e \{Y\} de = \frac{\tau}{2} \begin{Bmatrix} S_y^i \\ -S_x^i \end{Bmatrix}$

Жесткость на кручение треугольного элемента  $e$  слоя  $i$  определяется в виде

$$C_e^i = \frac{2}{\tau^2} \{z\} D^i B \{\sigma^i\}_e + c_{55}^i J_x^i + c_{44}^i J_y^i,$$

где  $J_x, J_y$  - главные моменты инерции элемента  $e$  относительно осей  $x$  и  $y$ .

Равенство (7) в матричном выражении имеет вид:  $K_e^i W^i = F_e^i$ , где  $K_e^i = B^T D^i B$  - матрица жесткости,  $F_e^i$  - узловые силы элемента  $e$ .

Поэтому в главе 2 для решения таких задач МКЭ, приведен алгоритм построения треугольных элементов по сечению слоистого стержня (п.2.1-2.3), который учитывает физическую неоднородность и слоистость сечения. Разработанный пакет программ позволяет по заданной толщине монослоя представить в автоматическом режиме поперечное сечение стержня в виде совокупности отдельных слоев, выбрать узловые точки и построить в окрестности их треугольные элементы. Количество узловых точек в исследуемой области обычно ограничено возможностями используемых ЭВМ. Это ограничение в работе снимается тем, что разрешающее уравнение формируется в каждой узловой точке слоя  $i$ . Для всех  $N$  окаймляющих узловую точку  $j$  треугольных элементов формируется уравнение относительно функций кручения узла  $j$ . При этом построенный отдельный элемент принадлежит только одному анизотропному слою (см. рис.7). Решение задачи построена с использованием итерационного метода при неполной верхней релаксацией и точечной прогонкой.

Используя значения функции кручения  $\varphi(x,y)$  в  $m-1$  итерации, приближенное решение  $m$ -ой итерации строится по формуле

$$\varphi_j^m = \varphi_j^{m-1} + R(\varphi_j^m - \varphi_j^{m-1}),$$

где  $R = 1 + r |\varphi_j^m - \varphi_j^{m-1}| / |\varphi_j^{m-1}|$ , а  $r$  - коэффициент релаксации, выбираемый опытным путем.

При этом, применяемый итерационный способ решения разрешающего уравнения в каждой узловой точке  $j$  позволяет использовать только оперативную память ЭВМ, обеспечив одновременно необходимую точность решения поставленной задачи и увеличить практически без ограничения количество рассматриваемых

мых узловых точек (п.2.4). Необходимо отметить, что результаты решения таких задач в прикладных программах (ANSYS, NASTRAN, и др.) потребует дополнительного подтверждения полученных решений.

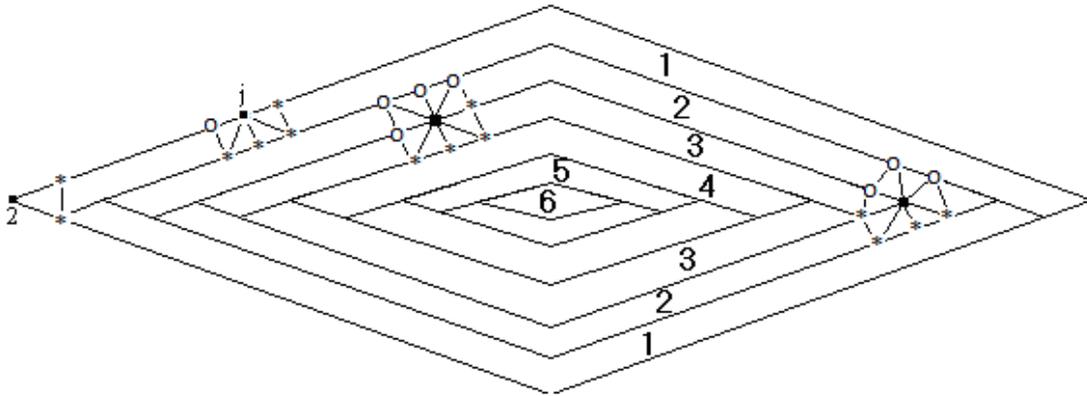


Рисунок 7 - Построение в узловой точке  $j$  (■) совокупность треугольных элементов. (○) – точки с известными значениями перемещений в  $m-1$  итерации, (\*) - точки в  $m$ -ой итерации

Решена задача о кручении стержней ромбовидного, прямоугольного сечения и сечения компрессорной лопатки. Значения осевых перемещений, жесткости на кручение многослойных анизотропных стержней с прямоугольным и ромбовидным сечением, вычисленные МКЭ, сравниваются с аналитическим их значением. Напряжения  $\sigma_{yz}^i, \sigma_{xz}^i$  для узла  $j$  определяются как средние значения напряжений в окаймляющих узел  $j$   $N$  треугольных элементах. Жесткость  $C$  при кручении определяется, как суперпозиция жесткостей отдельных элементов и слоев составного стержня  $C = \sum_{i=1}^{K_c} C_i = \sum_{i=1}^{K_c} \sum_{j=1}^L C_i^j$ , где  $K_c$  - количество слоев,  $L$  - количество треугольников в слое  $i$ .

В решении рассматривается стержень прямоугольного сечения со стороной  $a=120$  мм и толщиной  $h=20$  мм, и ромб, диагонали которого равны  $d_1=120$  мм,  $d_2=20$  мм. Сечения компрессорной лопатки имеют следующие характеристики:  $c_{max}=4.47$  мм, хорда  $b=62$  мм, площадь сечения  $F=187$  мм<sup>2</sup>. Данные этой лопатки соответствуют второму сечению, показанному на рисунке 1 компрессорной лопатки.

На рисунке 8 приведены кривые распределения перемещений по контуру сечения прямоугольного призматического стержня от номера итерации  $NI$ . Кривая отмеченная знаком (\*) соответствует номеру итерации  $NI=20$ , (●) -  $NI=50$ , (- -) -  $NI=140$ . По мере увеличения количества итерации  $NI$ , вычисленные значения перемещений ( $W$ ) стремятся к истинному полю перемещений (на рис. непрерывная линия) снизу. При итерации  $NI=120$  отличие распределения перемещений ( $W$ ) по сечению от точного решения составляет не более 3%.

На рисунке 9 приведена поверхность распределения перемещений ( $W$ ) в сечении ( $NI=60$ ) ромбовидного призматического стержня. При итерации  $NI=60$  жесткость на кручение  $C_{ромб} = 0.03515G(d_1d_2)^3 / \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$  ромба от его точного значения отличается не более чем на 3%. Поверхность распределения перемещений ( $W$ ) в сечении ромбовидного стержня (см. рис. 9) находится в соответствии с его

аналитическим решением. Наибольшего значения перемещения ( $W$ ) достигается ближе к средней части контура ромба (точка А, рис.9).

В связи симметрией распределения перемещений в вышеприведенных примерах рассматривались лишь четверть сечения прямоугольника и ромба.

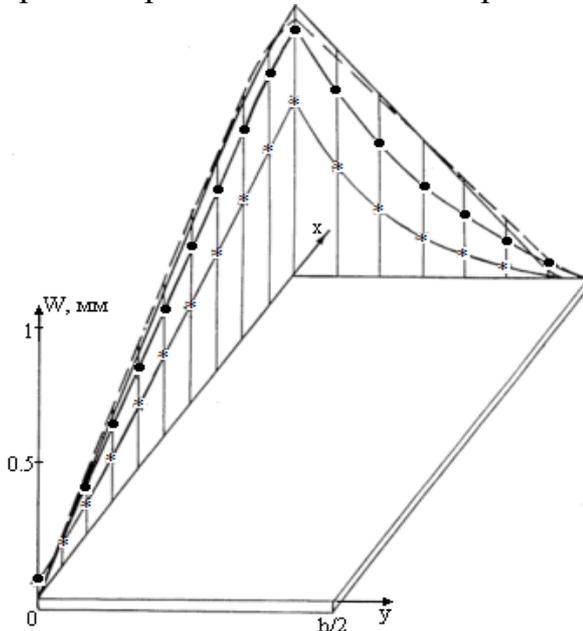


Рисунок 8 - Кривые распределения перемещений  $W$  по контуру сечения прямоугольного стержня от номера итерации  $NI$ . (\*) -  $NI=20$ , (●) -  $NI=50$ , (- -) -  $NI=140$ .

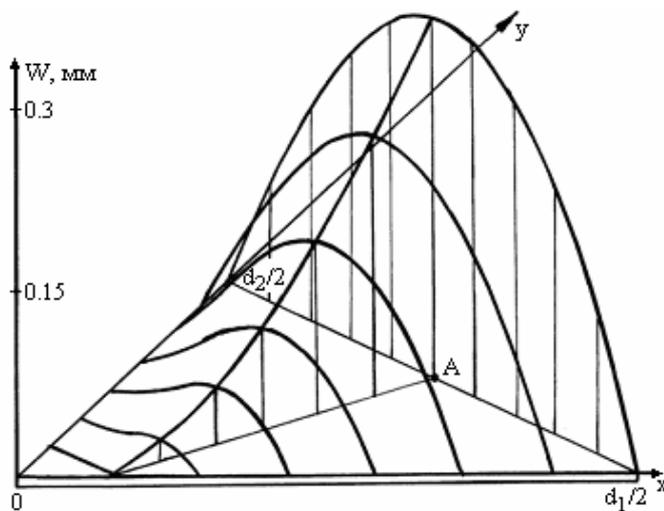


Рисунок 9 - Поверхность распределения перемещений  $W$  в сечении ( $NI=60$ ) ромбовидного призматического стержня.  $d_1, d_2$ - диагонали ромба.

Так же в качестве примера были проведены расчеты МКЭ для многослойных стержней ромбовидного сечения и сечения компрессорной лопатки, составленных из различных композиционных материалов с различными углами армирования. При этом наибольшие касательные напряжения возникают у входной и выходной кромках лопатки (у ромба точка А). Касательные напряжения в тонких слоях кромки корытца (спинки) и ромба (точка А) может привести к местной потере устойчивости слоя с малыми свойствами на сдвиг (см. рис.10).

На рисунке 10 приведены поверхности касательного напряжения  $\sigma_{yz}$  в сечении (а) лопатки ( $NI=60$ ) и в сечении (б) ромбовидного призматического стержня с чередующимися слоями боралюминия, уложенными под углами  $(+45^0, -45^0, +30^0, -30^0, +15^0)$  к оси стержня и алюминия. В этом случае происходит неравномерное распределение касательного напряжения  $\sigma_{yz}$  во внутренних слоях боралюминия, армированного волокнами с различными углами укладки.

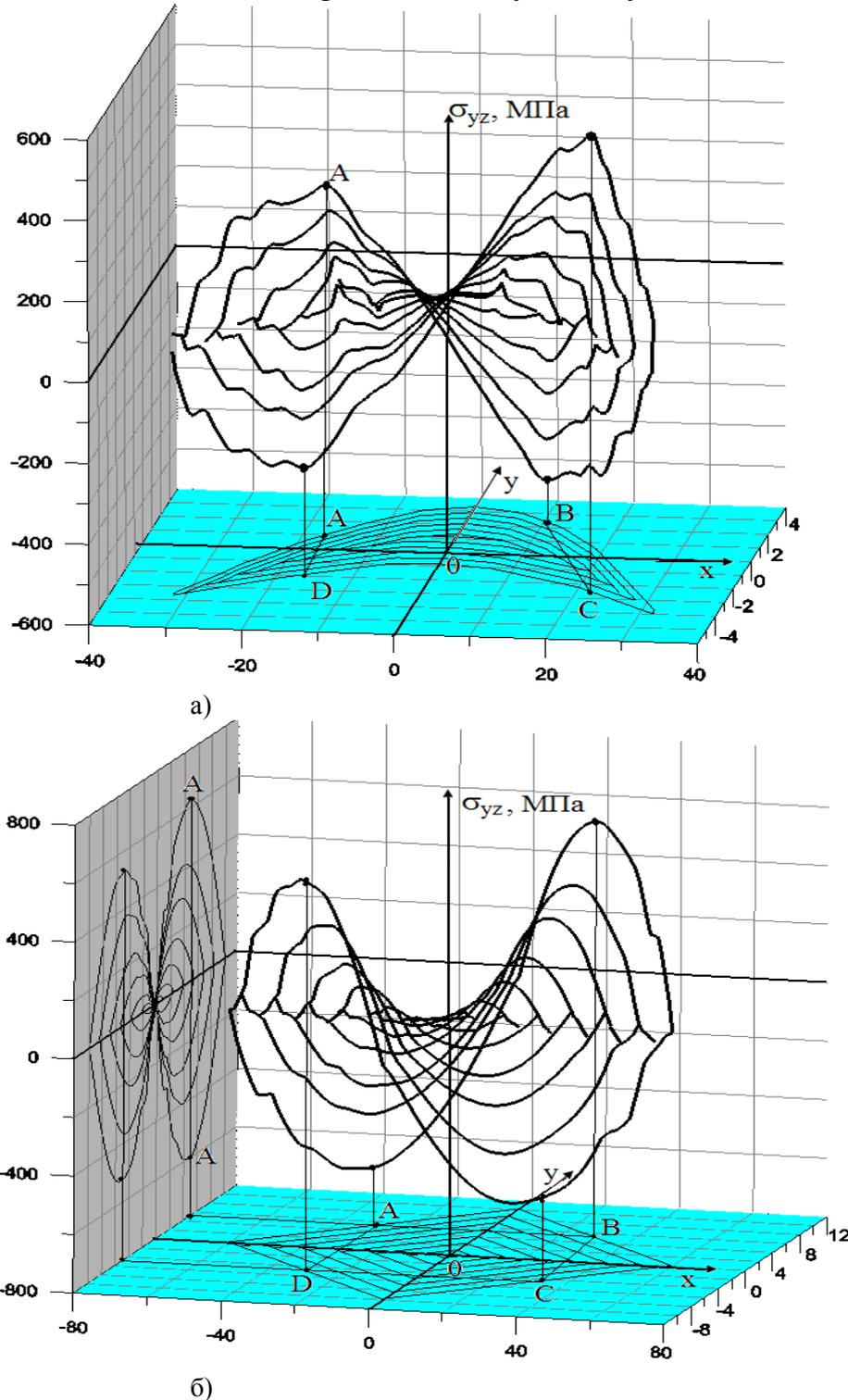


Рисунок 10 - Поверхность распределения касательных напряжений  $\sigma_{yz}$  в сечении а) лопатки б) ( $NI=60$ ) ромбовидного призматического стержня с чередующимися слоями боралюминия уложенных под углами  $(+45^0, -45^0, +30^0, -30^0, +15^0)$  и алюминия.

Наибольшие касательные напряжения (точки  $A, B, C, D$ ), по сравнению с значениями распределения касательного напряжения в слоях составленного из чередующих слоев боралюминия и алюминия, достигает своего значения вдали от входной и выходной кромок. Таким образом, можно избавиться от опасных касательных напряжений у входной и выходной кромок стержня с помощью армирования тонких слоев кромок волокнами под различными углами укладки.

Результаты представленной работы достаточно точно позволяют определять, взаимного влияния слоев, свойств отдельных слоев, их взаимодействия на жесткость и НДС при кручении слоистых стержней произвольного сечения.

Использованный итерационный способ решения разрешающего уравнения в каждой узловой точке  $j$  позволяет использовать только оперативную память ЭВМ, обеспечив одновременно необходимую точность решения поставленной задачи.

Расчетные значения жесткости на кручение используется в дальнейшем при определении НДС естественно-закрученных слоистых стержней.

*Таким образом, в главе 2 с помощью МКЭ разработан алгоритм и реализована на алгоритмическом языке Фортран задача, позволяющая вычислить перемещения и напряжения, а так же жесткость на кручение многослойных композиционных стержней произвольного сечения при кручении.*

**В третьей главе** в п.3.1 с помощью геометрических представлений для слоистых анизотропных стержней с прямолинейной осью получены кинематические соотношения, которые в последующем использовались для установления основных уравнений теории расчета закрученных анизотропных многослойных композиционных стержней при совместном действии кручения, изгиба и растяжения.

Перемещения же любой точки многослойного сечения определяются линейными и угловыми перемещениями в выбранной характерной точке слоя и гипотезами о поведении сечения при деформировании стержня. Например, гипотеза плоских сечений состоит в предположении, что поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после нее. Однако, в действительности существуют малые искажения плоского сечения (депланация). После введения предположений о том, что сечения перемещаются и поворачиваются, трехмерная задача о деформации стержня сводится к одномерной для определения компонент перемещений характерной точки слоя сечения, являющейся функцией координаты  $z$ .

Зависимости для перемещений любой точки слоя стержня будут отличаться от зависимостей классической теории учетом депланации поперечного сечения при кручении. Эта депланация, согласно известным решениям, пропорциональна относительному углу упругого кручения  $\frac{\partial \tau}{\partial z} \varphi$ , где  $\varphi(\xi, \eta, z)$  - функция кручения.

Для каждого поперечного многослойного сечения стержня она определяется как функция кручения соответствующего призматического стержня. Для закрученного стержня постоянного поперечного сечения в системе координат  $\xi\eta$  функция кручения не зависит непосредственно от координаты  $z$ .

При сочетании растяжения  $\varepsilon$ , изгиба  $\chi_1, \chi_2$  и кручения  $\tau$  общая продольная деформация винтового волокна слоя оценивается величиной

$$\varepsilon^b = \varepsilon_\ell + \varepsilon_\tau, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_\ell &= \varepsilon_{33}^0 \cos \beta (1 + 0.5r^2 \tau_0 \varepsilon_{33}^0 \cos \beta), \quad \varepsilon_{33}^0 = \varepsilon - \xi \chi_2 + \eta \chi_1, \\ \varepsilon_\tau &= \tau_0 \tau \cos \beta \left[ r^2 + \frac{\tau \cos \beta}{2\tau_0} r^2 (1 + \tau_0 r \cos \beta) \right], \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},\end{aligned}\quad (9)$$

Проекции  $\varepsilon^b = \varepsilon_\ell + \varepsilon_\tau$  на оси неподвижной системы координат равны

$$\varepsilon_{33}^0 = \varepsilon^b \cos \beta, \quad \varepsilon_{23}^0 = \varepsilon^b \sin \beta \sin \alpha, \quad \varepsilon_{13}^0 = \varepsilon^b \cos \alpha \sin \beta, \quad \alpha = \tau_0 z,$$

где  $\beta = \arctg(\tau_0 r)$  угол наклона волокна слоя по отношению к оси стержня и определяют продольные и поперечные деформации стержня, обусловленные его начальной закрученностью. В последующем исследовании кинематические соотношения для слоя  $i$  выбраны в форме

$$\varepsilon_{k3}^i = \varepsilon_{k3}^{0i} + \varepsilon_{k3}^{ci} + \mathcal{E}_{k3}^i, \quad \varepsilon_{33}^i = \varepsilon_i^b \cos \beta, \quad \varepsilon_{kj}^i = \mathcal{E}_{kj}^i, \quad (k, j = 1, 2), \quad (10)$$

в которой  $\varepsilon_{k3}^{ci}$  - соответствуют значениям максимальной деформации поперечного сечения, обусловленной поперечными силами  $Q_j$  ( $j = 1, 2$ ); величины  $\mathcal{E}_{k3}^i$  ( $k = 1, 2$ ) позволяют оценить влияние перемещений  $u_j^i$  в плоскости поперечного сечения на сдвиговые деформации и  $\mathcal{E}_{kj}^i = 0.5(u_{k,j}^i + u_{j,k}^i)$  деформации элементов поперечного сечения.

Используется геометрически нелинейные соотношения, учитывающие деформации поперечного сдвига с учетом депланации. Получено четыре уравнения равновесия относительно четырех обобщенных силовых факторов  $P = \{P, M_2, M_1, M_j\}$  и соответствующие физические соотношения, которые записаны для случаев, когда сечение обладает симметрией и не учитывает деформации поперечного сдвига  $\mathcal{E}_{kj}^i = 0.5(u_{k,j}^i + u_{j,k}^i)$ . Рассматриваются задачи нелинейного поведения многослойного стержня, поперечное сечение которых предварительно повернуто на некоторый угол к осевой линии и нагружено совместным действием растягивающего осевого усилия, изгибающих и крутящего моментов. Данная работа содержит общую систему дифференциальных уравнений для поставленной задачи. Приводятся результаты решения в явном виде для растяжения, кручения и изгиба многослойного стержня с начальной закруткой. Излагаемая теория расчета указанных объектов позволяет также определять положение центра изгиба и оси начальной закрутки.

Кинематические соотношения  $\varepsilon_{k3}^i$  для слоя  $i$  представляет сумму трех членов, один из которых зависит от продольных и поперечных деформации  $\varepsilon_{k3}^{0i}$  стержня, обусловленные его начальной закрученностью, второй член  $\varepsilon_{k3}^{ci}$  - соответствует значениям максимальной деформации поперечного сечения, обусловленной поперечными силами  $Q_j$ , третий член  $\mathcal{E}_{k3}^i$  позволяет оценить влияние перемещений  $u_j^i$  в плоскости поперечного сечения на сдвиговую деформацию. Этими слагаемыми обычно пренебрегают в технической теории стержней. Устанавливается, что явная формула при комбинированной деформации изгиба, кручения

и растяжения естественно-закрученных многослойных стержней может быть выведена из полной системы дифференциальных уравнений объемной задачи теории упругости путем приравнивания работ внешних и внутренних сил и интегрирования по всему поперечному сечению многослойного стержня. Результирующее соотношение для крутящего момента содержит два слагаемых, первое из которых связано с искажением первоначально плоской формы поперечных сечений, а другое обусловлено локальными поворотами, возникающими при изгибе, когда упругий центр и ось предварительного закручивания не совпадают.

Как видно из подробного обзора исследований, посвященных закрученным изотропным стержням, проблема составных закрученных стержней была мало изучена, решения в которых не были доведены до практического использования.

В связи с этим, получена приближенная теория закрученных многослойных стержней произвольного сечения основана на определенных гипотезах, позволяющих разделить компоненты напряжений и деформаций на главные и второстепенные (влияние не более 5%, п.1.4), которыми в ряде уравнений пренебрегается.

Таким образом, в развитие работ для изотропных стержней деформации  $\varepsilon_{k3}^i$  определяются суперпозицией трех типов деформации  $\varepsilon_{k3}^{0i}$ ,  $\varepsilon_{k3}^{ci}$  и  $\varepsilon_{kj}^i$ .

Здесь предложены новые кинематические соотношения  $\varepsilon_\tau$  (9) более полно отражающие влияние начальной закрученности  $\tau_0$  и деформации кручения  $\varepsilon_\tau$  на НДС стержня. При вычислении  $\varepsilon_\tau$  считались малыми членами, содержащие параметр  $\tau$  в третьей и более высоких степенях. Из условия равновесия элемента закрученного стержня при действии растягивающей силы  $P$ , изгибающих  $M_1$ ,  $M_2$  и крутящего  $M_t$  моментов получена система разрешающих уравнений (п.3.2) относительно параметров деформации растяжения  $\varepsilon$ , изгиба  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  и кручения  $\tau$  в виде:

$$\bar{P} = (K + 0.5\tau_0^2 L)\bar{\varepsilon} + \bar{q} + \bar{s} + \bar{\theta}, \quad (11)$$

в котором вектор обобщенных сил  $P = \{P, M_2, M_1, M_t\}$  определяется через вектор обобщенных деформаций  $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon, \chi_2, \chi_1, \tau\}$ , и векторы  $\bar{q}, \bar{s}, \bar{\theta}$ , устанавливающие влияние поперечных сил, напряжений в плоскости сечения и температуры, когда во всех уравнениях сохраняются только члены, содержащие  $\tau_0$  в степени, не выше первой. Компоненты матриц  $K$ ,  $L$  и векторов  $\bar{q}, \bar{s}, \bar{\theta}$ , приведены ниже –

$$\begin{aligned} k_{11} &= \sum_{i=1}^N \int c_1^i \cos \beta dF_i; & k_{12} &= -\sum_{i=1}^N \int \xi c_1^i \cos \beta dF_i; \\ k_{13} &= \sum_{i=1}^N \int c_1^i \cos \beta dF_i; & k_{14} &= -\tau_0 \sum_{i=1}^N \int r p \cos \beta dF_i; & k_{22} &= \sum_{i=1}^N \int \xi^2 c_1^i \cos \beta dF_i; \\ k_{24} &= -\tau_0 \sum_{i=1}^N \int \xi r p c_1^i \cos \beta dF_i; & k_{34} &= \tau_0 \sum_{i=1}^N \int \eta r p c_1^i \cos \beta dF_i; & k_{23} &= -\sum_{i=1}^N \int \eta \xi p c_1^i \cos \beta dF_i; \\ k_{33} &= \sum_{i=1}^N \int \eta^2 c_1^i \cos \beta dF_i; & k_{44} &= \tau_0^2 \sum_{i=1}^N \int r^2 p^2 c_1^i \cos \beta dF_i + C_0; & k_{sj} &= k_{js} \quad (j, s = \overline{1,4}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \sum_{i=1F_i}^N \int c_1^i r^2 \varepsilon_{33}^0 \cos^2 \beta dF_i; \quad l_{12} = -\sum_{i=1F_i}^N \int c_1^i \rho \varepsilon_{33}^0 \tau^2 \cos^2 \beta dF_i; \quad l_{13} = \sum_{i=1F_i}^N \int c_1^i \eta r^2 \varepsilon_{33}^0 \cos^2 \beta dF_i; \\
l_{22} &= \sum_{i=1F_i}^N \int \xi^2 r^2 c_1^i \varepsilon_{33}^0 \cos^2 \beta dF_i; \quad l_{24} = -\frac{1}{\tau_0^2} \sum_{i=1F_i}^N \tau \int \xi \rho c_1^i \cos^2 \beta dF_i; \quad l_{34} = \frac{\tau}{\tau_0^2} \sum_{i=1F_i}^N \int \eta \rho c_1^i \cos^2 \beta dF_i; \\
l_{14} &= \frac{1}{\tau_0^2} \sum_{i=1F_i}^N \int \rho c_1^i \cos^2 \beta dF_i; \quad l_{13} = \sum_{i=1F_i}^N \int r^2 \eta c_1^i \varepsilon_{33}^0 \cos^2 \beta dF_i; \quad l_{33} = \sum_{i=1F_i}^N \int \eta^2 r^2 c_1^i \varepsilon_{33}^0 \cos^2 \beta dF_i; \\
l_{23} &= -\sum_{i=1F_i}^N \int \xi \eta c_1^i \varepsilon_{33}^0 \cos^2 \beta dF_i; \quad l_{44} = \frac{\tau}{\tau_0} \sum_{i=1F_i}^N \int p r \rho c_1^i \cos^2 \beta dF_i; \quad l_{sj} = l_{js} (j, s = \overline{1,4}); \\
S_1 &= \sum_{i=1F_i}^N \int \mathcal{E}_c^i dF_i; \quad S_2 = -\sum_{i=1F_i}^N \int \xi \mathcal{E}_c^i dF_i; \quad S_3 = \sum_{i=1F_i}^N \int \eta \mathcal{E}_c^i dF_i; \quad S_4 = \tau_0 \sum_{i=1F_i}^N \int r p \mathcal{E}_c^i dF_i. \\
q_1 &= \sum_{i=1F_i}^N \int c_{35}^i \varepsilon_{13}^{ci} dF_i; \quad q_2 = -\sum_{i=1F_i}^N \int c_{35}^i \varepsilon_{13}^{ci} \xi dF_i; \quad q_3 = \sum_{i=1F_i}^N \int \eta c_{35}^i \varepsilon_{13}^{ci} dF_i; \quad q_4 = \tau_0 \sum_{i=1F_i}^N \int r^2 c_{35}^i \varepsilon_{13}^{ci} dF_i. \\
\omega_1 &= \sum_{i=1F_i}^N \int \beta_{33}^i T^i dF_i; \quad \omega_2 = -\sum_{i=1F_i}^N \int \xi \beta_{33}^i T^i dF_i; \quad \omega_3 = \sum_{i=1F_i}^N \int \eta \beta_{33}^i T^i dF_i; \quad \omega_4 = \tau_0 \sum_{i=1F_i}^N \int r p \beta_{33}^i T^i dF_i.
\end{aligned}$$

где  $N$  количество слоев в сечении. Здесь приняты дополнительные обозначения

$$c_1^i = c_{33}^i \cos \beta + c_{35}^i \cos \alpha \sin \beta; \quad \rho = r^2 + \tau_0^2 r^4 \cos \beta;$$

$$\mathcal{E}_c = c_{13}^i \mathcal{E}_{11}^i + c_{23}^i \mathcal{E}_{22}^i + c_{33}^i \mathcal{E}_{23}^i + c_{35}^i \mathcal{E}_{13}^i, \quad p = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

а также  $C_0$  - жесткость на кручение слоистого сечения, определенная по Сен-

$$\text{Венану (глава II)} \quad C_0 = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1F_i}^N \int (\xi \sigma_{yz}^i - \eta \sigma_{xz}^i) dF_i.$$

Система уравнений (11) является нелинейной относительно компонент вектора обобщенных деформаций  $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon, \chi_2, \chi_1, \tau\}$ .

Максимальная деформация поперечного сечения  $\varepsilon_{j3}^{ci}$  ( $j=1,2$ ) может быть выражена через заданные поперечные силы  $Q_j$  энергетическим методом (см. п.1.2), и определяется из равенства, которые аналогичны следующим

$$\varepsilon_{j3}^{ci} = -Q_j \cdot N_j, \quad N_j = \frac{9}{4h^6} \int_{-0.5-h}^{0.5} \int_{-h}^h [(h^2 - 4z^2)^2 / c_{kk}^i] dz, \quad (j=1, k=4), (j=2, k=5).$$

Полученные линейные относительно начальной закрученности соотношения из (11) не отражают такие общеизвестные факты, как зависимость жесткости стержня при растяжении, изгибе и кручении от начальной закрученности. Этот недостаток связан с формальным пренебрежением членами порядка  $\tau_0^2$  независимо от величины других членов. В формулах интегрального характера (11) роль отдельных членов дополнительно зависит от характера распределения напряжений  $\sigma_{zz}^i$  по сечению. В связи с этим при интегрировании по сечению многослойного стержня выражения (11) следует рассматривать при сохранении всех членов  $\bar{\varepsilon}, \bar{q}, \bar{s}, \bar{\theta}$ , в том числе, имеющие множитель  $\tau_0^2$ . При этом три выражения систем (11) для  $P, M_1, M_2$  изменяются незначительно, а выражение  $M_t$  зависит от члена с

множителем  $\tau_0^2$ , так как с увеличением закрученности повышается жесткость на кручение  $C_0$  по Сен-Венану.

При использовании КМ в закрученных стержнях появляется ряд дополнительных эффектов, связанных с возможностью варьирования типа и укладки арматуры в слоях, положения слоев относительно оси кручения, а также с малой межслоевой жесткостью на сдвиг и структурной несимметричностью сечения. Поэтому, появляется возможность измерения обобщенных параметров систем дифференциальных уравнений в рамках заданных условий нагрузки и геометрии стержня (п.1.5). В стержнях из слоистых материалов эта взаимосвязанность проявляется в большой мере из-за возможной структурной несимметричности. Так, например, в незакрученном стержне ( $\tau_0=0$ ) параметры жесткости  $k_{4j}$  ( $j=1,2,3$ ) могут отличаться от нуля и в связи с этим появляется эффект кручения при простом растяжении или изгибе. Применение точной теории многослойных естественно-закрученных стержней произвольного поперечного сечения на базе общих уравнений теории упругости связано с большими математическими трудностями и приводят к сложным решениям, и поэтому этот путь для разработки практических методов расчета не рационален.

По найденным величинам  $\varepsilon_{j3}^{ci}$  вычисляются компоненты вектора  $\bar{q}$  в слое  $i$ . В этом случае основные деформации в поперечном сечении  $\zeta$  описываются выражениями

$$\varepsilon_{33}^i = \varepsilon^b \approx \varepsilon - \xi\chi_2 + \eta\chi_1 + \tau_0\pi r^2, \quad \varepsilon_{23}^i = \tau_0 \sin \alpha \cdot \varepsilon^b - Q_2 \cdot N_2,$$

$$\varepsilon_{13}^i = \tau_0 \cos \alpha \cdot \varepsilon^b - Q_1 N_1, \quad \alpha = \tau_0 \zeta,$$

в которых слагаемые  $Q_j N_j$  ( $j=1,2$ ) есть поперечные силы. С принятой точностью для напряжений в сечении  $\zeta$  получаются следующие соотношения:

$$\sigma_{11}^i = \varepsilon^b (c_{13}^i + c_{15}^i \tau_0 \cos \alpha) - c_{15}^i Q_1 N_1 + \beta_{11}^i T^i, \quad \sigma_{12}^i = c_{44}^i \tau_0 \sin \alpha \cdot \varepsilon^b - c_{46}^i Q_2 N_2.$$

$$\sigma_{22}^i = \varepsilon^b (c_{23}^i + c_{25}^i \tau_0 \cos \alpha) - c_{25}^i Q_1 N_1 + \beta_{22}^i T^i,$$

$$\sigma_{33}^i = \varepsilon^b (c_{33}^i + c_{35}^i \tau_0 \cos \alpha) - c_{35}^i Q_1 N_1 + \beta_{33}^i T^i, \quad (12)$$

$$\sigma_{23}^i = \varepsilon^b \tau_0 c_{44}^i \sin \alpha - c_{44}^i Q_2 N_2, \quad \sigma_{13}^i = \varepsilon^b (c_{35}^i + c_{55}^i \tau_0 \cos \alpha) - c_{55}^i Q_1 N_1 + \beta_{13}^i T^i,$$

Характерной особенностью приведенных уравнений, связанных со слоистой структурой стержней, является то, что параметры  $c_1^i$  меняются от слоя к слою и для вычисления параметров жесткости  $k_{mn}$  ( $n,m=1,4$ ) используются специально созданные на основе соотношений (11) программы. Кроме того, из-за изменения ориентации слоя  $i$  относительно системы координат параметры упругости  $c_{mn}^i$  являются переменными. Следует отметить, что взаимосвязанность растяжения, изгиба и кручения являлось предметом многочисленных исследований. Однако в основном они касались стержней из изотропных материалов. В стержнях из слоистых материалов эта взаимосвязанность проявляется в большой мере из-за возможной структурной несимметричности.

Из условий  $\tau_0^2 r^2 \ll 1$ ,  $\beta^2 \ll 1$  следует, что изменение основных напряжений из (12) по длине стержня имеет порядок  $\tau_0$ . Результаты, полученные в работе,

представляют теоретическую и практическую ценность при изучении поведения и проектировании многослойных стержневых конструкций неоднородной структуры. Вообще, задача сформулирована в более общем виде, учитывающем нелинейные деформации, эффекты поперечных сил, деформации в плоскости сечения и температуры. Отличительной особенностью разрешающих уравнений для многослойного стержня является большая связанность деформаций растяжения  $\varepsilon$ , изгиба  $\chi_1, \chi_2$  и кручения  $\tau$ , чем в случае стержня из однородного изотропного материала. Только тогда, когда направления армирования всех слоев совпадают с направлением оси стержня, указанные уравнения расщепляются и становятся подобными уравнениям для однородного стержня. Достоверность уравнений приближенной теории закрученных слоистых стержней проверяется сопоставлением их следствий с известными соотношениями для некоторых частных случаев, а также сравнением результатов расчета с экспериментальными данными (п.3.4) (рис.11, 12).

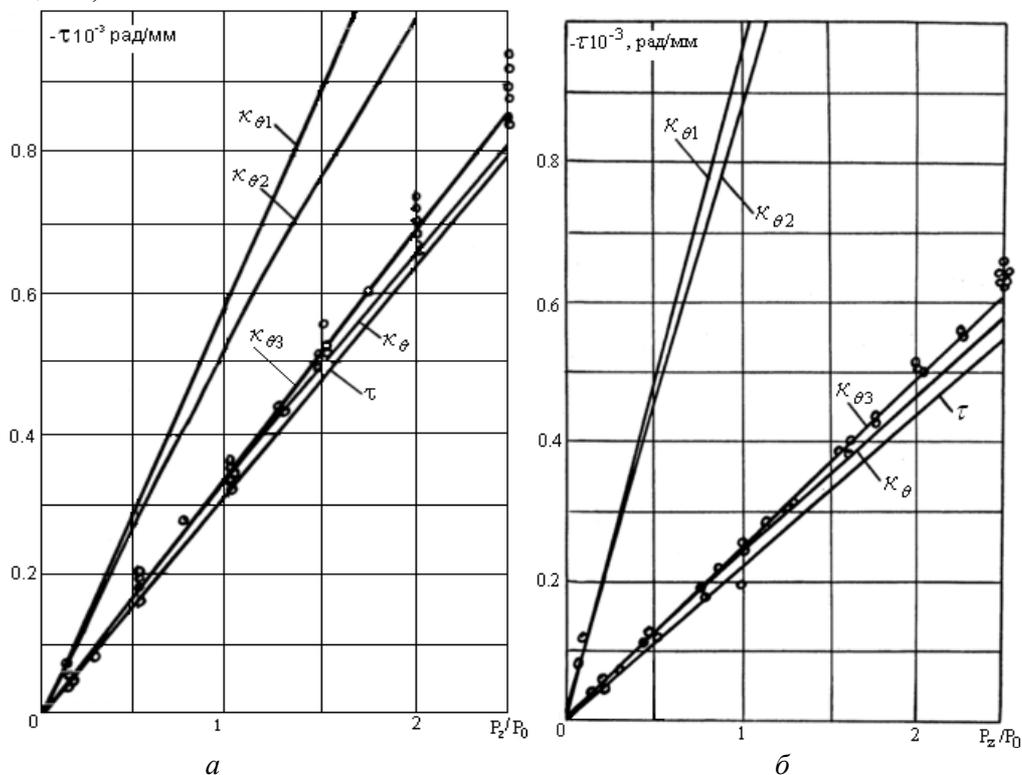


Рисунок 11 - Сравнение расчетных углов упругой раскрутки ( $\tau, k_\theta, k_{\theta 1}, k_{\theta 2}, k_{\theta 3}$ ) закрученных образцов прямоугольного сечения с экспериментальными (о) значениями. а -  $\tau_0=0.00648$  рад/мм, б -  $\tau_0=0.00864$  рад/мм, а=30 мм, h=1.45 мм.

Из рисунка видно, что результаты расчетов по линейным соотношениям настоящей работы (кривая  $\tau$ ) лучше согласуются с экспериментальными данными, чем существующие в литературе линейаризованные зависимости (прямые  $k_{\theta 1}, k_{\theta 2}$  на рис.11). Таким образом, результаты сравнения экспериментальных данных с теоретическими расчетами подтверждают правильность вывода соотношений (11), полученных в настоящей главе.

Во многих исследованиях естественно-закрученных стержней из однородных материалов в качестве простейшего приближения принимается линейное по  $\tau_0$

приближение разрешающей системы уравнений  $\bar{P} = K\bar{\varepsilon} + \bar{\theta}$ .

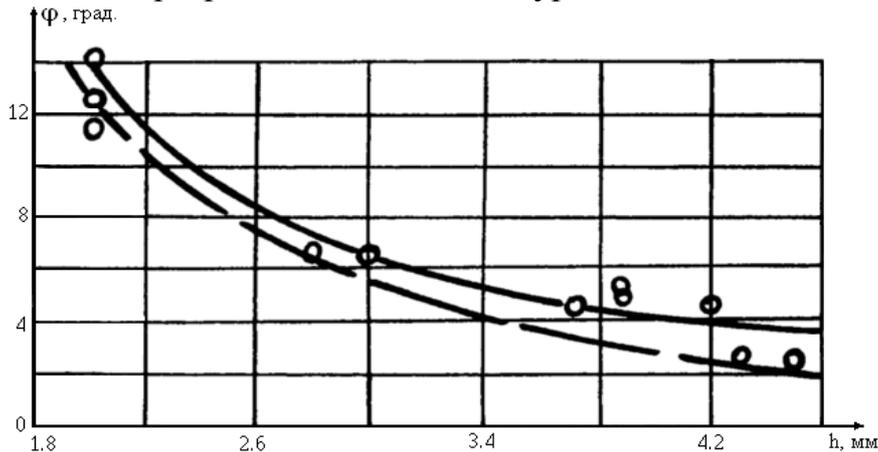


Рисунок 12 - Сравнение расчетных (пунктирная линия) значений угла упругой раскрутки закрученных образцов прямоугольного сечения из стеклоткани при растягивающей нагрузке 5900 Н с экспериментальной кривой (сплошная линия). (o) - экспериментальные точки.

На основе соотношений предложенного варианта теории закрученных слоистых анизотропных стержней произвольного сечения, составлен пакет программ расчета на ЭВМ, позволяющий численно определить НДС лопаток и стержней из КМ в поле центробежных сил (п.3.5, 3.6). Он включает в себя программы расчета для монослоев (п.1.3), необходимых физико-геометрических характеристик сечения (п.1.5), вычисления жесткости на кручение (глава 2) многослойного анизотропного стержня произвольного сечения.

В п.3.5 в качестве примера рассмотрен расчет НДС стержня со следующей структурой. Структура симметрична по толщине сечения. Наружные четыре слоя с симметричной структурой укладки под углом  $+60^\circ, -60^\circ, +60^\circ, -60^\circ$  к оси стержня, остальные слои нулевой укладки до оси симметрии. Расчет проводился с целью учета работы межслоевой эпоксидной прослойки. Образцы были шириной  $L=150$  мм, толщиной  $h=10$  мм и углом закрутки  $55^\circ$  на базе 450 мм. Общее количество слоев было 40. Объемное содержание углепластика в чередующихся слоях было  $\nu_1=0.6$ , а связующего эпоксиды -  $\nu_1=0.4$ .

Расчеты показали, что несмотря на разные упругие характеристики углепластика и матрицы, угол раскрутки  $\tau$ , деформация растяжения  $\varepsilon$  и изгиба  $\chi_2$  у образцов одних геометрических размеров от растягивающих сил  $P$  меняется линейно (рисунок 13).

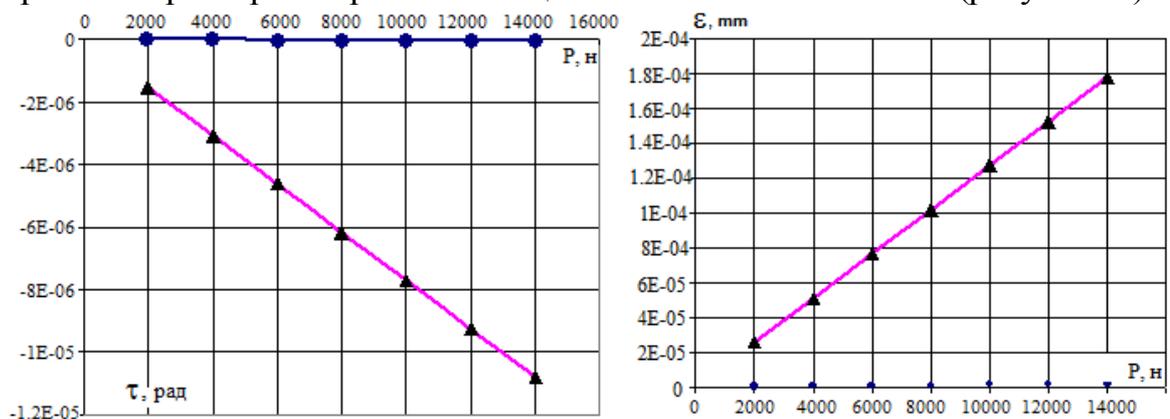


Рисунок 13. Изменение деформации раскрутки  $\tau$ , растяжения  $\varepsilon$  от нагрузки растяжения  $P$ .

На примере со слоистым стержнем, находящимся под действием центробежных сил, показано влияние сдвигов между слоями на перераспределение нормальных и касательных напряжений по слоям. В зависимости от величины коэффициента анизотропии использованного материала нормальные и касательные напряжения во внешних слоях увеличиваются в 2-5 раз. Сравнение этих значений напряжений с величинами для данных слоев позволяет выбрать способ армирования этих слоев. Как показали расчеты (см. рис.14), вследствие малой сдвиговой жесткости между слоями внутренние мягкие слои под действием растягивающих сил смещаются относительно внешних, происходит искривление сечений, которое достигает наибольшей величины в середине сечений. Искривление сечений приводит к перераспределению нормальных (рис. 14-15) и касательных напряжений по толщине стержня. Нормальные напряжения резко возрастают во внутренних слоях однонаправленного материала по сравнению в слоях с перекрестно армированными материалами.

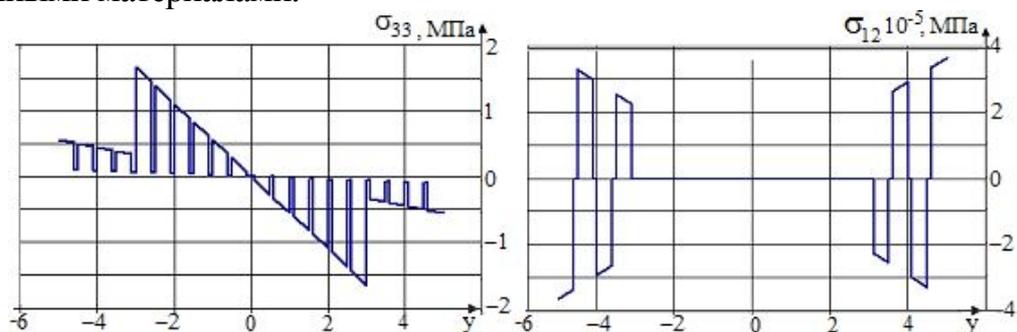


Рисунок 14. Распределение нормального напряжения  $\sigma_{33}^i, \sigma_{12}^i$  по толщине  $h$ .

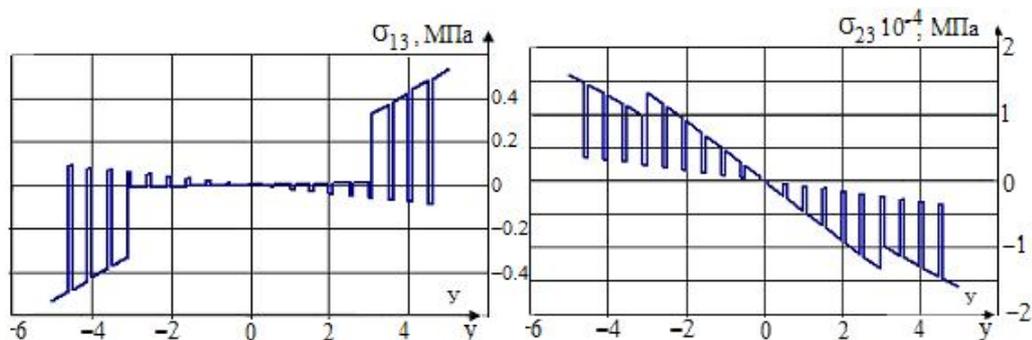


Рисунок 15. Распределение касательного напряжения  $\sigma_{13}^i, \sigma_{23}^i$  по толщине  $h$ .

Поэтому, при проектировании лопаток необходимо учитывать возможное увеличение напряжений во внешних слоях. Видно, что при увеличении числа перекрестных слоев касательные напряжения, возникающие между продольными слоями, резко возрастают. Как видно из приведенных примеров, использование полученной теории закрученных слоистых анизотропных стержней позволяет не только оценить вклад каждого слоя в эффективную жесткость на кручение, но и определить напряженное состояние каждого слоя, что особенно важно при определении слабого звена в исходном материале.

Совокупность данных о влиянии жесткости отдельных слоев на угол раскрутки стержня и его прочность позволит выбрать наиболее оптимальную укладку армирующих слоев, а также тип арматуры и матрицы. Как показали расчеты, слоистые стержни в результате деформации сдвига имеют большее удлинение и изгиб, чем изотропные стерж-

ни. Поэтому необходимо учитывать этот фактор при изготовлении лопаток. Величина удлинения и изгиба, также нормальных напряжений зависит от параметров  $E_3$ ,  $G_{23}$ ,  $L$ ,  $h$ . Анализ напряжено-деформированного состояния естественно закрученных стержней из композиционных материалов позволяет выявить особенности работы армированного материала в условиях изгибно-крутильной связанности. В слоистых стержнях с большими коэффициентами анизотропии ( $\frac{E}{G} \geq 50$ ) неравномерность нормальных и касательных на-

пряжений в поперечном сечении при растяжении значительно сильнее, чем в изотропных мягких слоях. При растяжении даже для слабо закрученных стержней с большой относительной толщиной при использовании композиционных материалов на кромках могут возникнуть сжимающие (растягивающие) напряжения, что нежелательно для армированных материалов. Подбирая укладку слоев, их расположение в теле стержня, тем самым меняя соотношение упругих постоянных, можно добиться минимального значения изменения угла упругой раскрутки, деформации растяжения и изгиба при растяжении естественно-закрученного стержня в сочетании с приемлемыми величинами напряжений. Приведенные графики на рисунок 14-15 позволяют найти оптимальное сочетание крутильной жесткости с жесткостью при растяжении для стержней любых геометрических размеров, что позволяет оценить композиционного материала с точки зрения применимости его в рабочих лопатках компрессора.

В п.3.6 проведен расчет НДС слоистой компрессорной лопатки в поле центробежных сил. Приведены результаты исследований НДС в 3-х сечениях лопатки для трех различных вариантов сочетаний упругих постоянных в пакете слоев композиционной лопатки, соответствующих трем различным материалам. По результатам расчетов построено семейство кривых, отражающее зависимости деформации растяжения  $\varepsilon$ , растягивающего усилия  $P$  от центробежной силы, осредненного  $\sigma_{cp}$  напряжения, раскрутки  $\tau$  и жесткости на кручение  $C_0$  по Сен-Венану для каждого сечения  $r/R_0$  (см. рис.16).

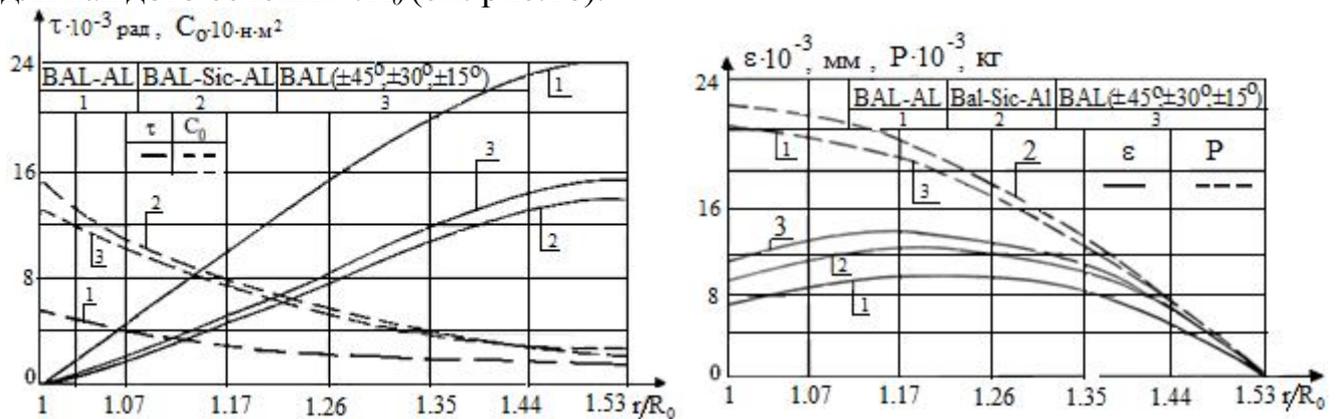
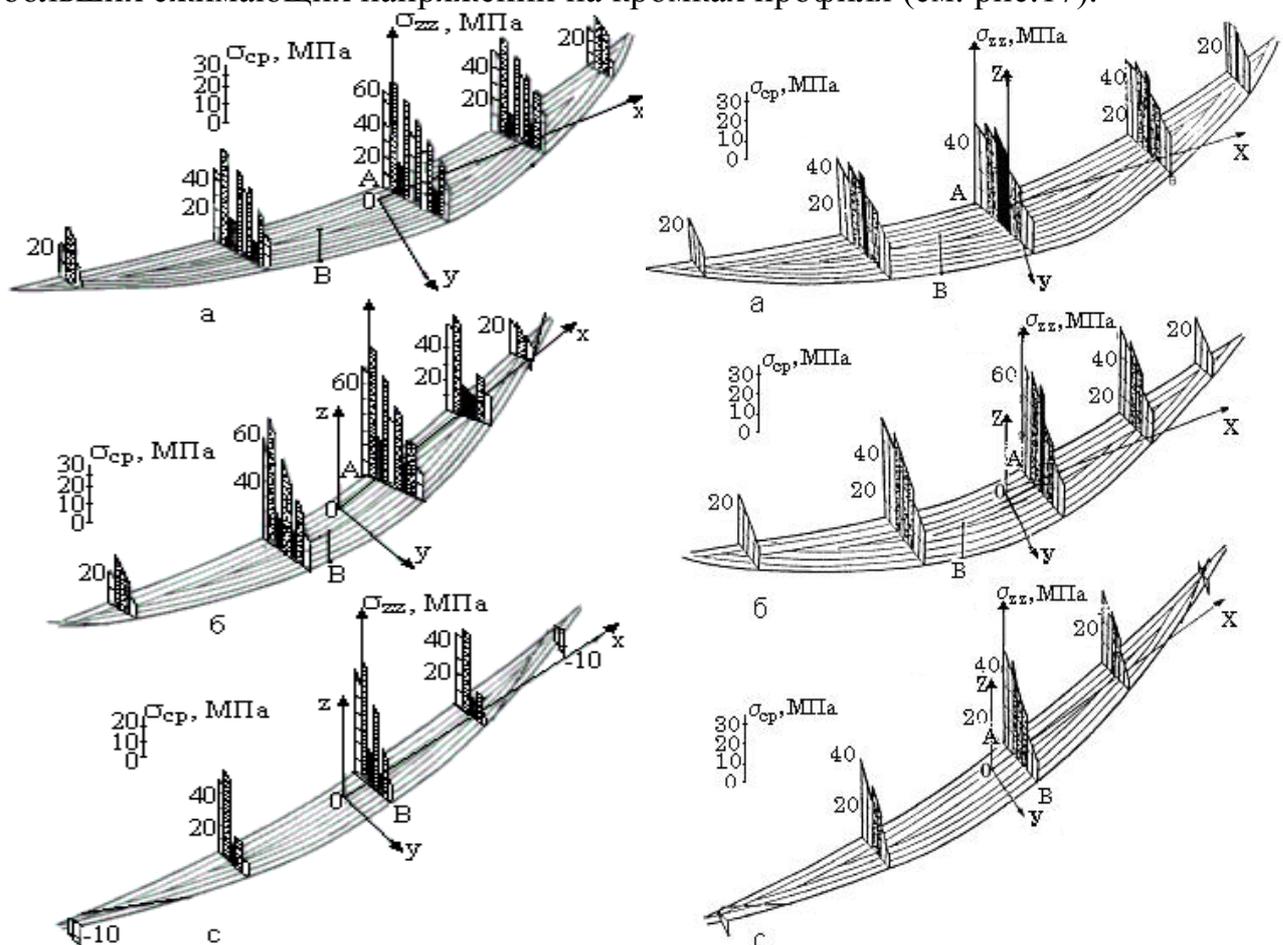


Рисунок 16. Изменение деформации раскрутки  $\tau$ , растяжения  $\varepsilon$ , растягивающих усилий  $P$  и жесткости на кручение по Сен-Венану  $C_0$  по длине  $r/R_0$  компрессорной лопатки. Кривая 1 соответствует слоистой лопатке, состоящей из чередующих слоев боралюминия и чистого алюминия; 2 – из слоев, армированных волокнами бора и карбида кремния; 3 - из 6 слоев боралюминия уложенных под углами ( $\pm 45^\circ$ ,  $\pm 30^\circ$ ,  $\pm 15^\circ$ ) к оси лопатки.

Как видно, из рисунки 16 жесткость на кручение  $C_0$  лопатки, составленной из чередующихся слоев однонаправлено-армированного боралюминия и чистого алюминия (кривая 1) в 2.5 раза меньше жесткости  $C_0$  лопатки, состоящей из чере-

дующихся слоев боралюминия, уложенных под углами  $\pm 45^\circ$ ,  $\pm 30^\circ$ ,  $\pm 15^\circ$  к оси лопатки (кривая 3). Благодаря этому, максимальное значение раскрутки  $\tau$  пера лопатки, состоящей из слоев однонаправленного материала, в 1.6 раза превосходит раскрутку пера лопатки, состоящей из чередующихся слоев боралюминия, уложенных под углами  $\pm 45^\circ$ ,  $\pm 30^\circ$ ,  $\pm 15^\circ$  к оси лопатки. Однако, если отдельные слои лопатки заменить более жестким материалом (например, в нашем случае, карбидом кремния *Sic*), то можно достичь такого же эффекта увеличения жесткости на кручение  $C_0$  (кривая 2), как и в случае использования перекрестного армирования материала слоев и, тем самым, достигается более низкий уровень раскрутки пера лопатки  $\tau$  (кривая 2). Очевидно, варьируя углами укладки более жестких волокон, можно достичь еще более высоких уровней жесткости на кручение пера лопатки и меньших углов раскрутки  $\tau$  при растяжении.

Сравнение исследованных примеров показывает, что путем выбора материала отдельных слоев или способа армирования в них можно в широких пределах управлять уровнями напряжений и деформаций при одних и тех же рабочих оборотах вращения. При заданной геометрической форме лопатки, выбираемой из аэродинамических соображений, посредством перекрестного армирования ее слоев уровень нормальных напряжений  $\sigma_{zz}$  можно уменьшить, одновременно избежав больших сжимающих напряжений на кромках профиля (см. рис.17).



(□) - боралюминий, (■) - алюминий;  
 ▨ - карбида кремния;

лопатки, армированной под углами  $\pm 45^\circ$  (□)  
 $\pm 30^\circ$  (▨),  $\pm 15^\circ$  (■) волокнами боралюминия.

Рисунок 17 - Уровни нормальных напряжений  $\sigma_{zz}$  во 2-ом сечении (а), 4-м сечении (б), 6-м сечении (в) лопатки, армированной волокнами боралюминия, карбида кремния и алюминия.

Проанализированы уровни касательных напряжений  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{xz}$  (см. рис.18), обусловленные начальной закрученностью лопатки (см. рис.19). Величина прочности при межслоевом сдвиге для слоистых материалов мала. Вследствие этого возникновение касательных напряжений в лопатках могут оказаться не допустимым.

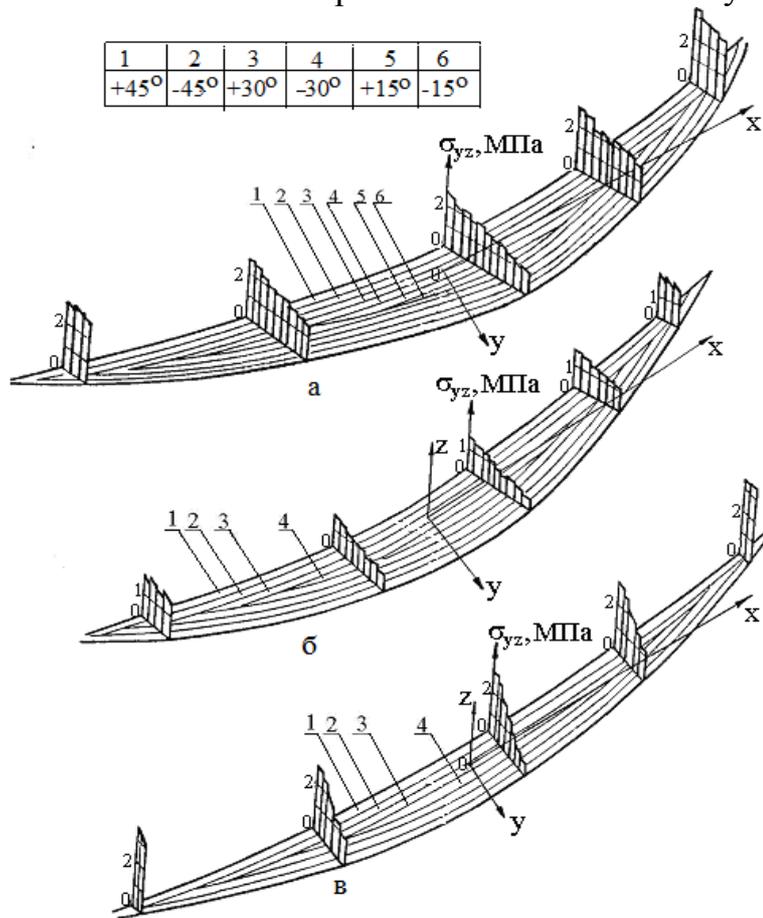


Рисунок 18 -Уровни касательных напряжений  $\sigma_{yz}$  во 2-ом сечении (а), 4-м сечении (б), 6-м сечении (в) лопатки, армированной волокнами боралюминия под углами +45° (1), -45° (2), +30° (3), -30° (4), +15° (5), -15° (6).

Таким образом, разработана методика определения НДС лопатки из КМ с учетом слоистости материала. Расчет лопатки по этой методике позволяет учесть влияние на НДС каждого ортотропного слоя со своими свойствами и его положения в теле лопатки. Составленная по этой методике программа расчета на ЭВМ осуществляет выбор оптимальной структуры армирования конкретной лопатки из ранее выбранного класса КМ. Эффективность и достоверность разработанной программы подтверждена сравнением расчетных результатов с данными испытаний на растяжение естественно-закрученных стержней прямоугольного сечения. Проведенные расчеты лопаток конкретных типов показали, что угол раскрутки периферийного сечения лопатки можно уменьшить, увеличивая жесткость на кручение посредством перекрестного армирования слоев или применяя в пакете материала слоев из жесткого материала на растяжение.

При возрастании уровня характеристик жесткости слоев неравномерность нормальных напряжений в поперечном сечении и величина касательных напряжений между слоями увеличиваются. Наличие больших касательных напряжений

между слоями возникает из-за различной жесткости контактирующих слоев. Необходим плавный переход свойств материала от слоя к слою.

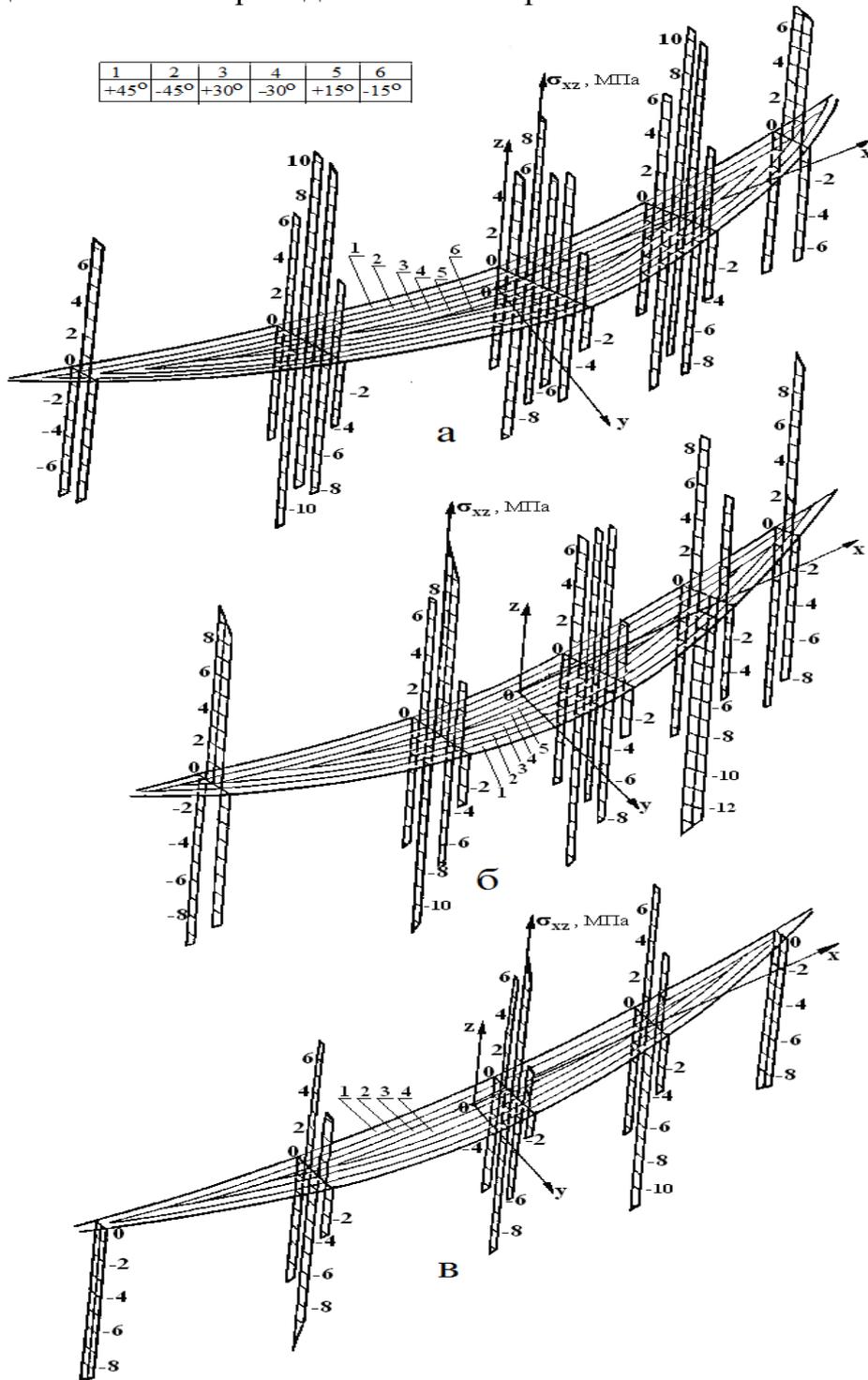


Рисунок 19- Уровни касательных напряжений  $\sigma_{xz}$  во 2-ом сечении (а), 4-м сечении (б), 6-м сечении (в) лопатки, армированной волокнами боралюминия под углами +45° (1), -45° (2), +30° (3), -30° (4), +15° (5), -15° (6).

Численные исследования естественно-закрученных стержней из КМ выявили зависимость угла раскрутки и степени неравномерности распределения нормальных напряжений в поперечном сечении от коэффициента упругости  $c_{mn}^i$  слоя  $i$ , а также взаимосвязанность деформации растяжения и раскрутки при растяжении.

Анализ работы многослойных КМ, в условиях близких к рабочим условиям лопаток компрессоров позволил выявить ряд особенностей распределения напряжений в армированных материалах. Установлено, что при растяжении лопаток из КМ, в поле центробежных сил во внешних слоях происходит увеличение нормальных напряжений в 2-4 раз по сравнению со средними их величинами. Разработанная программа может служить основой машинного проектирования рабочих лопаток из КМ.

**В главе 4** приведены результаты численного решения МКЭ НДС композиционной лопатки с помощью пакета ANSYS для сравнения результата расчета, с полученными в главе 3. По результатам расчетов построены изолинии распределения перемещения  $W, U, V$  по длине лопатки для спинки (выпуклая сторона сечения) и корытца (вогнутая сторона сечения) (см. рис.20, 21).

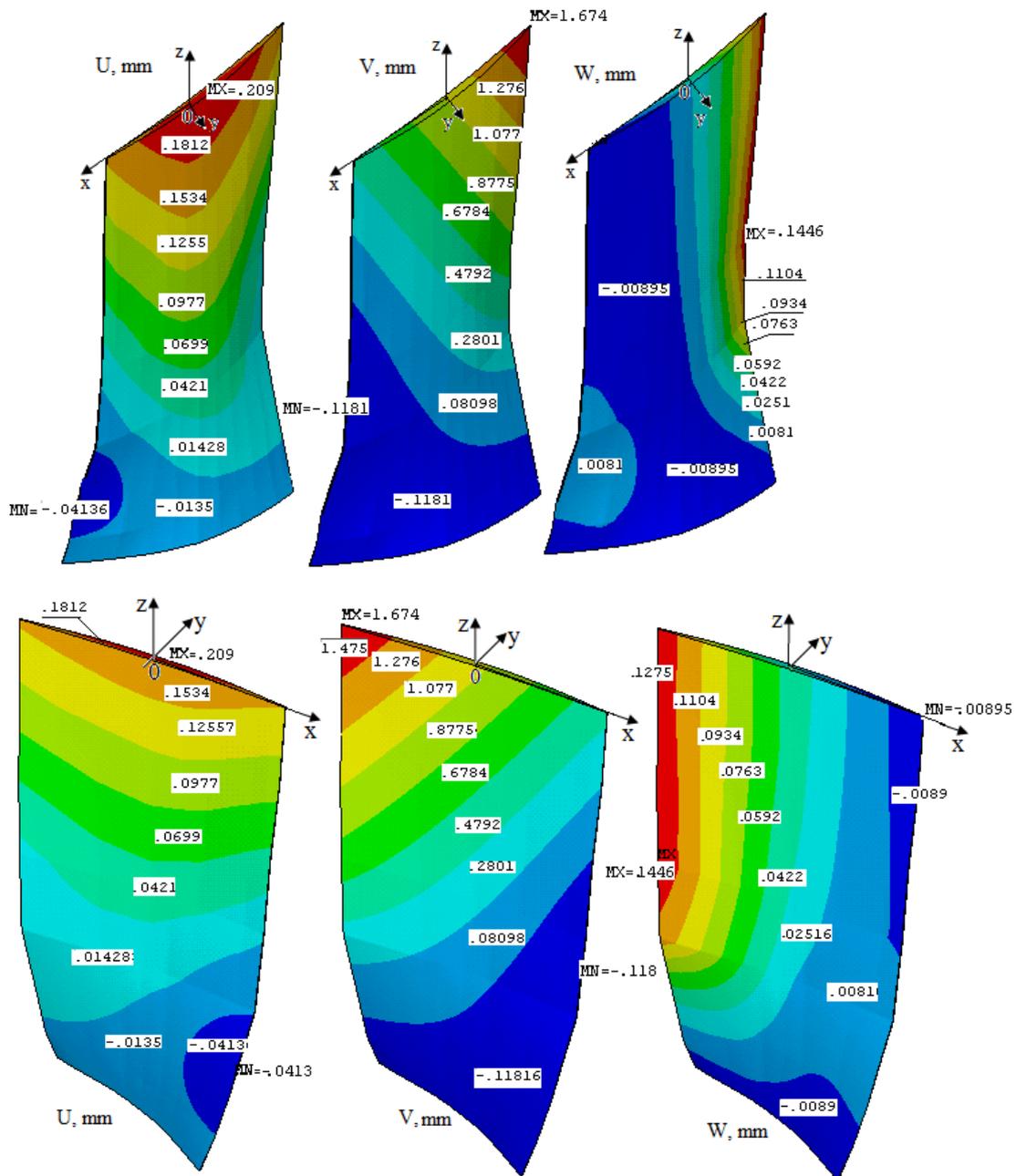


Рисунок 20 - Распределения перемещения  $U, V, W$  на спинке и корытце по длине лопатки из боралюминия.

Как видно из рисунка нормальные перемещения  $W$  на периферийном сечении имеют максимальные значения (точка  $MX$ ). На входной кромке спинки от корневого сечения до третьего сечения перемещения  $W$  растут 4-5 раз, а на тонких выходных кромках они растут 10 раз. Распределение нормального перемещения  $W$  и перемещений  $U, V$  на спинке более равномерно по сравнению с корытцем лопатки. На корытце концентрация больших перемещений  $W$  наблюдается уже в четвертом сечении лопатки. Поэтому, чтобы увеличить прочность лопатки необходимо слой со стороны корытца заменить материалами более жесткими на растяжение.

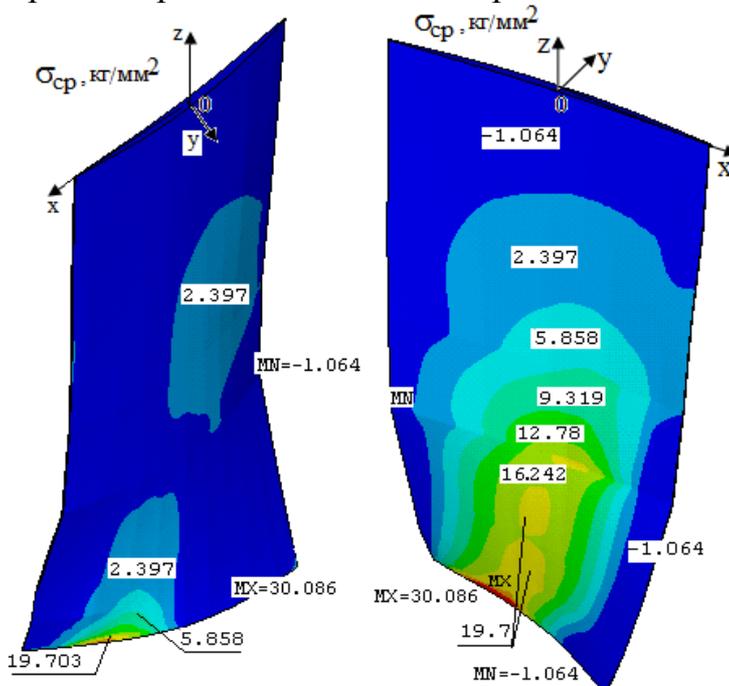


Рисунок 21 - Распределения осредненного напряжения  $\sigma_{cp}$  на спинке и на корытце по длине лопатки из боралюминия.

Наибольшее нормальное напряжение распределена на корневом сечении лопатки (точка  $MX$ ), так как корневое сечение лопатки жестко закреплено. Если это не учитывать, то наибольшие напряжения достигаются в третьем сечении лопатки и концентрация нормальных напряжений на корытце больше 1.5-2 раза по сравнению нормальными напряжениями на спинке. Концентрация нормальных напряжений в третьем сечении меньше в 4-5 раз по сравнению с его значениями в корневом сечении. На периферийных сечениях спинки появляются сжимающие напряжения  $\sigma_{zz}$ , обусловленные взаимосвязанностью изгиба, кручения и растяжения. Средние напряжения по сравнению с напряжениями  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  в 1,5-2 раза больше и по ним нельзя определить области сжимающих напряжений (см. рис. 21). Следовательно, для определения НДС лопатки необходимо вычислять все компоненты напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ .

Наибольшее касательное напряжение действует в третьем сечении лопатки. Локальное наибольшее касательное напряжение  $\sigma_{xz}$  достигается в третьем сечении у входной кромки спинки и выходной кромке корытца и его значение (точка  $MN$ ) больше в 2 раза по сравнению со значениями  $\sigma_{xz}$  у входной кромкой спинки (точка  $MX$ ).

Как известно, в тонких слоях такие концентрации касательных напряжений могут привести к местной потере прочности лопатки. Вследствие этого возникновение вышеуказанных величин касательных напряжений в лопатках не допустимы. Экспериментально установлено, что запас прочности по касательным напряжениям между слоями в настоящее время не должно быть меньше трех. Касательные напряжения  $\sigma_{yz}$  по величине в два раза меньше чем касательные напряжения  $\sigma_{xz}$  и распределяется относительно на толстых слоях спинки и корытца. Поэтому по сравнению с касательными напряжениями  $\sigma_{xz}$  их влияние на общую прочность лопатки незначительны.

На рисунке 22 приведено распределение напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  на спинке и на корытце по длине лопатки.

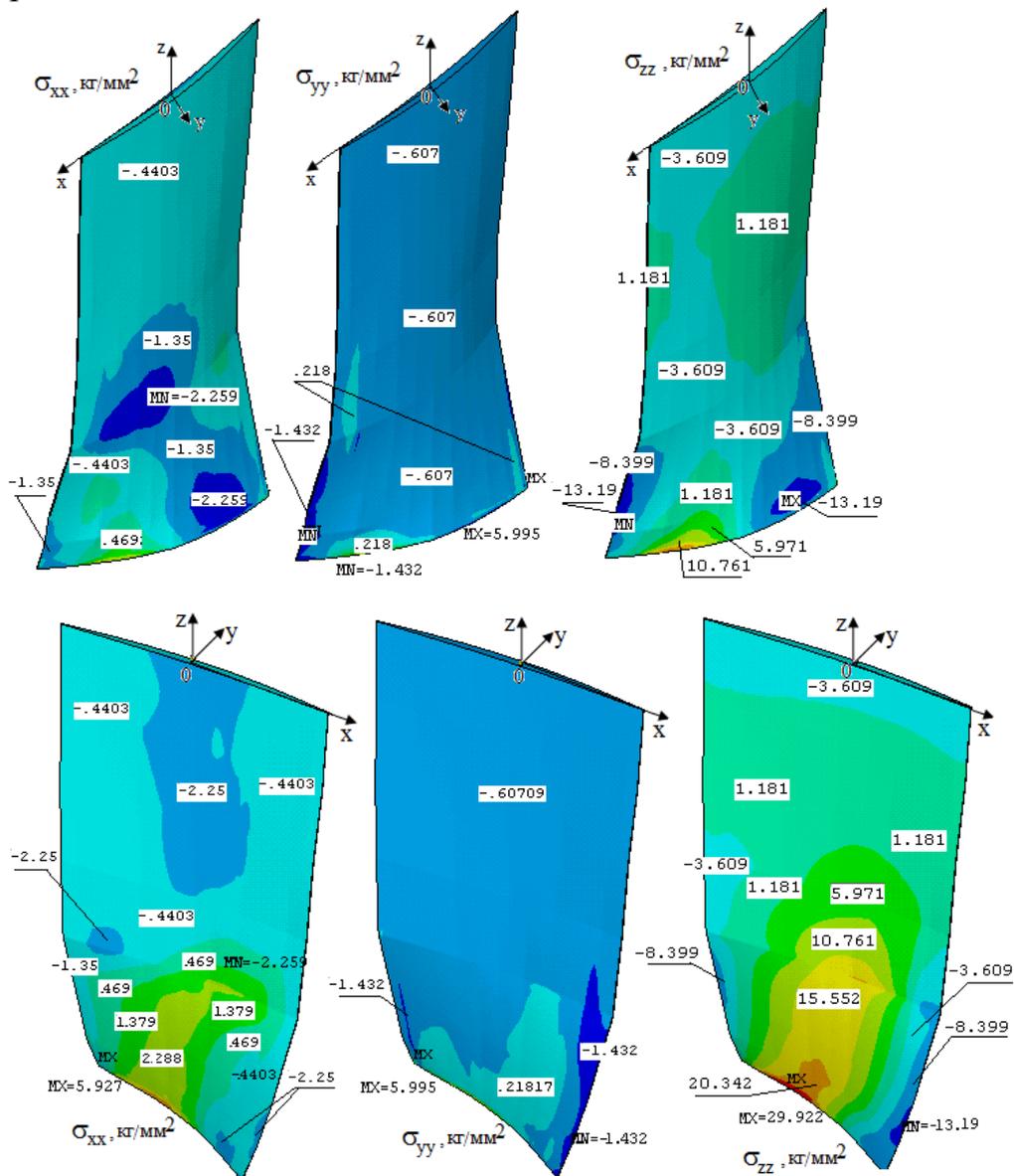


Рисунок 22 - Распределения напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  на спинке и корытце по длине лопатки из боралюминия.

На рисунке 23 приведены распределение касательных напряжений  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{xy}$  на спинке и на корытце по длине лопатки.

На рисунке 24 приведены изолинии распределения напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  в 4-ом сечении лопатки. Из рисунка видно, что зона концентрации нормального напряжения  $\sigma_{zz}$  на корытце больше по своему значению в 20 раз от нормальных напряжений  $\sigma_{zz}$  на спинке и наибольшие нормальные напряжения приходятся на середину корытца сечения лопатки. Наибольшие нормальные напряжения  $\sigma_{zz}$  действуют в точках близлежащих к центру тяжести слоев корытца и сравнимы с величинами среднего напряжения (см.рис.24). Вследствие этого необходимо подбирать материалы слоев близлежащих к центру тяжести сечения с свойствами более прочными на растяжение.

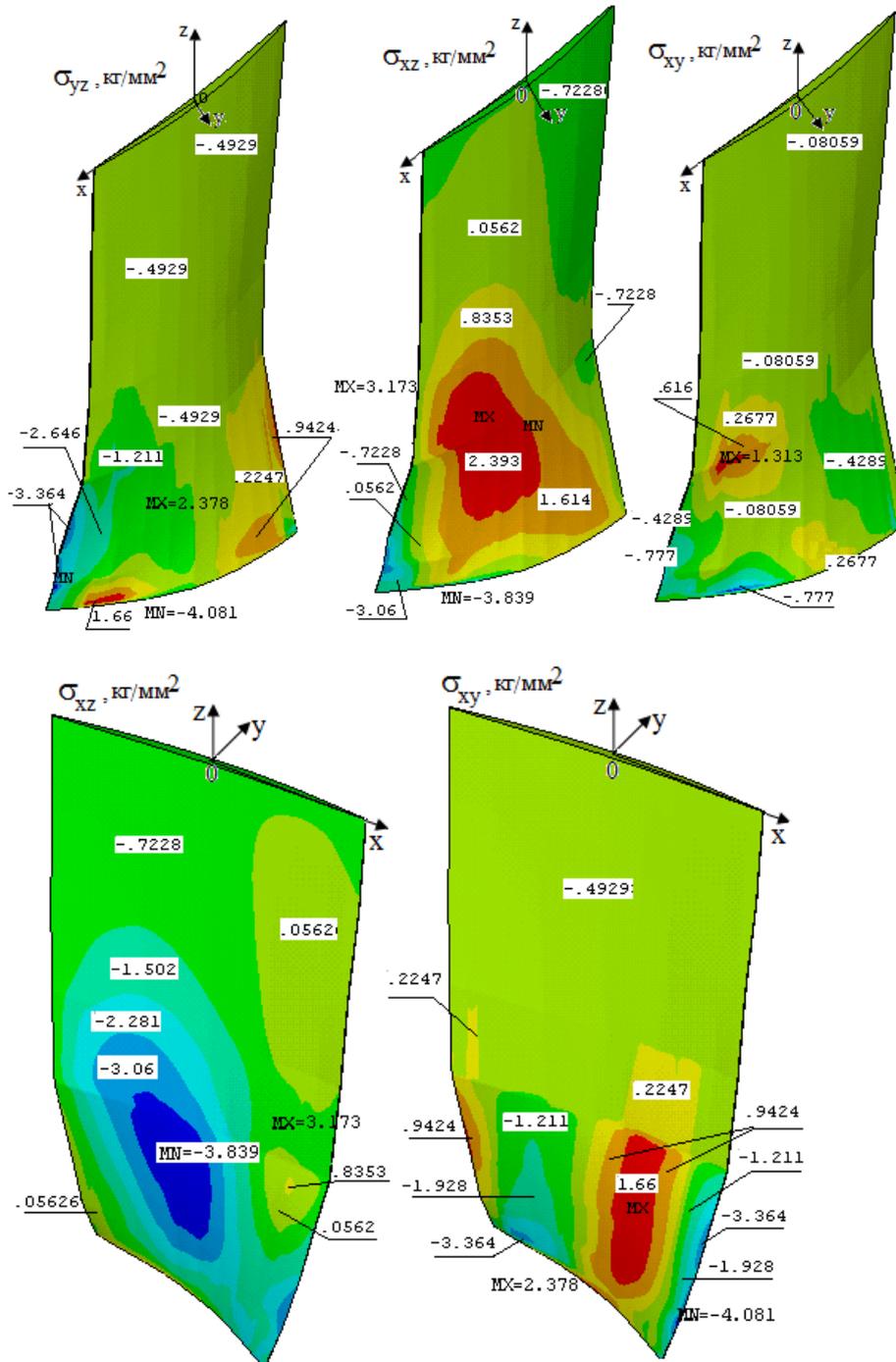


Рисунок 23 - Распределения касательного напряжения  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{xy}$  на спинке и корытце по длине лопатки из боралюминия.

Таким образом, в исследованных примерах показано, что путем выбора материала отдельных слоев или способа армирования в них можно в широких пределах управлять уровнями напряжений и деформаций при одних и тех же физических оборотах ротора. Для лопаток из изотропного материала такой широкой возможности регулирования не имеется.

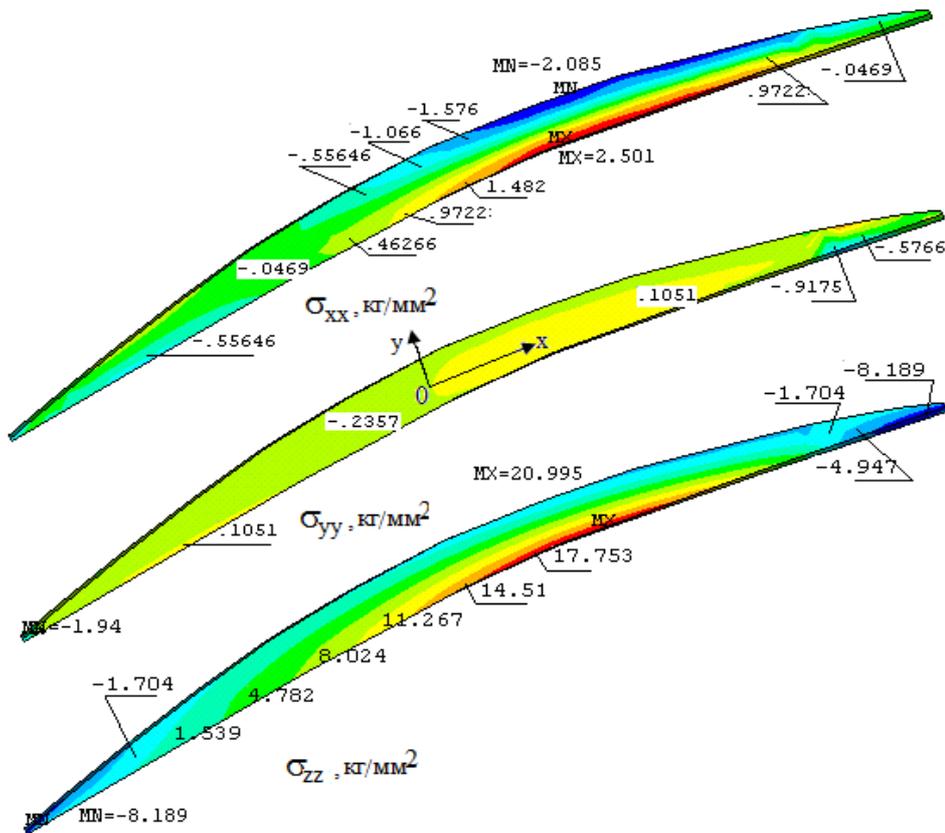


Рисунок 24 - Распределения напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  на 4-ом сечение лопатки из боралюминия.

Анализ работы многослойных КМ, в условиях близких к рабочим условиям лопаток позволил выявить ряд особенностей распределения напряжений в армированных материалах. Численные результаты определения НДС композиционной лопатки с помощью пакета ANSYS совпадает с результатами пункта 3.6 (см. глава 3) для лопатки из однонаправленного боралюминия. Для улучшения количественных показателей НДС изделий необходимо увеличить количество конечных элементов в расчетах ANSYS, что требует для расчета более мощных ЭВМ.

**В главе 5** использованы основные вариационные принципы для решения задачи определения НДС в армированном слоистом теле в условиях динамического деформирования (п.5.1-5.4). Полученные на основе линейной модели нестационарного деформирования слоистых сред, вариационные принципы позволяют исследовать динамические явления в армированных слоистых телах. Рассматриваются поперечные свободные колебания многослойного стержня произвольного сечения, изготовленного из КМ (п.5.5).

Полагая, что существуют только периодические колебания с собственной круговой частотой  $\omega$ , поперечные смещения точек  $i$ -го слоя стержня  $v^i(z, t)$  представляется в виде

$$v^i(z, t) = X(z) \sin \omega t. \quad (13)$$

Задача решена методом Ритца, полагая  $X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(z)$ , где  $X_n(z)$  - допустимые функции,  $A_n$  - неопределенные параметры. В качестве допустимых функций взяты собственные функции стержня в виде:

$$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} [chk_n x - \cos k_n x + \frac{shk_n - \sin k_n}{chk_n + \cos k_n} (\sin k_n x - shk_n x)], \quad (14)$$

удовлетворяющих граничным условиям консольного закрепления:

$$X_n(0) = X'_n(0) = 0; \quad X''_n(1) = X'''_n(1) = 0. \quad (15)$$

В (14)  $x = \frac{z}{\ell}$ , а волновое число  $k_n$  удовлетворяет характеристическому уравнению  $1 + chk_n \cos k_n = 0$  и принимает значения, данные в таблице 2,  $\ell$  - длина стержня.

Таблица 2. Значение волновых чисел  $k_n$ .

№	1	2	3	4	5	6	7	$n \rightarrow \infty$
$k_n$	1.875	4.694	7.854	10,996	14,137	17,279	20,42	$\frac{2n-1}{2}\pi$

Балочные функции, являясь ортонормированными, удовлетворяют равенствам

$$\int_0^{\ell} X_n X_p dz = \begin{cases} 1, & n = p; \\ 0, & n \neq p. \end{cases} \quad \int_0^{\ell} X''_n X''_p dz = \begin{cases} \frac{k_n^4}{\ell^4}, & n = p; \\ 0, & n \neq p. \end{cases} \quad (16)$$

Варьирование интеграла

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (w_{\ell} - K) dt = 0. \quad (17)$$

$$w_{\ell} = \int \int \int_{0F}^{\ell} \sigma_{33}^i \varepsilon_{33}^i dF dz = \int \int \int_{0F}^{\ell} c_{33}^{i'} \varepsilon_{33}^{i2} dF dz, \quad K = \int \int \int_V \rho^i (\dot{v}^i)^2 dV; \quad \dot{v}^i = \frac{\partial v^i(z, t)}{\partial t}, \quad (18)$$

где  $\rho^i$  - плотность,  $c_{33}^{i'} = (\lambda^h + 2\mu^h)v^h + (\lambda^m + 2\mu^m)v^m$  свойства материала слоя  $i$  и  $v^h, v^m$  объемное содержание материала наполнителя и матрицы, сводится к дифференцированию его по неизвестным параметрам  $A_n$ . После подстановки (13) в (17) и (18) с учетом (14), (15) и (16), дифференцирования по  $A_n$  и интегрирования по  $t$  можно получить выражения для круговых ( $\omega$ ) и технических ( $f_n$ ) частот свободных колебаний:

$$\omega^2 = \frac{I_1}{\rho^i} \frac{k_n^4}{F \ell^4}; \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I_1}{\rho^i F} \frac{k_n^2}{\ell^2}}, \quad (19)$$

где величина  $I_1 = \int \int_F c_{33}^{i'} y^2 dF$  является физическим моментом инерции, позволяющим вести расчет при неравномерном распределении физических свойств компонентов армированного слоистого тела в поперечных сечениях произвольной

формы (п.1.5). По полученной формуле можно подсчитать низшие собственные частоты армированного стержня с постоянным по длине сечением произвольной формы. Величина  $I_1$  позволяет учесть неравномерное распределение физических параметров композиции в слоистом сечении. Для многослойного стержня произвольного сечения этот интеграл можно просчитать послойно на ЭВМ (п.1.5). Если материал стержня изотропный, то из выражения (19) следует формула Рэлея-Ритца.

Каримбаевым Т.Д. были проведены эксперименты по определению собственных частот для стержня прямоугольного сечения, изготовленного из стеклоткани, имеющего следующие физические и геометрические характеристики:

$$\lambda^n = 0.119 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \lambda^m = 0.046 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \mu^n = 0.179 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \mu^m = 0.0307 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$\rho^n = 1500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho^m = 542 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \nu^n = 0.6, \quad \nu^m = 0.4, \quad \ell = 0.12 \text{ м}, \quad h = 0.003 \text{ м}, \quad b = 0.03 \text{ м}.$$

Для сравнения рассчитанных собственных частот стержня с данными экспериментов проведен численный анализ формулы (19). Для простоты численного анализа рассматривается стержень прямоугольного сечения с равномерным распределением физических свойств. Тогда выражение для определения собственных частот (19) можно представить в виде:

$$f_n = \frac{hk_n^2}{2\pi\ell^2} \sqrt{\frac{c_{33}^i}{12\rho^i}}. \quad (20)$$

Как видно из таблицы 3, расчетные значения частот превышает экспериментальные на 3-5%. Понижение  $f_n$  при  $n > 1$  (см. таблице 3) подтверждает экспериментально наблюдаемый эффект смещения узловой линии к месту закрепления.

Таблица 3. Значение расчетных и экспериментальных собственных частот/волновых чисел

Частота, гц	1	2	3	4	5	6	7
Экспериментальная	121	765	2100	-	-	-	-
По формуле (20)	125	780	2181	4275	6966	10556	14743

Таким образом, использование теории слоистых армированных сред, в частности, обобщенной на основе принципа Гамильтона, при расчете элементов конструкций из КМ позволяет получить удовлетворительное совпадение с опытными данными.

Расчетные соотношения (19), (20) устанавливают непосредственную зависимость собственных частот от упругих и динамических параметров отдельных компонентов композиции и позволяют путем их выбора управлять вибрационными характеристиками тела.

В п.5.6 на примере стержня исследуется влияние взаимодействия компонентов композиции на свободные колебания слоистых армированных тел. При сильном взаимодействии компонентов КМ, полученное уравнение частот определяет одну собственную частоту, величина которой мало отличается от частот, найденных на основе теории "эффективных" модулей КМ:

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi\ell^2} \sqrt{\frac{E_3 I_1^*}{2\rho(1-\nu_1\nu_3)F}}. \quad (21)$$

При слабом взаимодействии компонентов композиции, что реализуется при больших частотах с малой длиной волны, колебанию слоистого стержня соответствуют две собственные частоты, отличающиеся от двух частот стержней идентичных размеров, но изготовленных из одинаковых материалов. Вычисленные на основе полученных соотношений значения собственных частот низших (первых трех) форм колебания стержня прямоугольного поперечного сечения из стеклопластика удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Из-за ограниченности экспериментальных данных численные сравнения здесь приведены для стеклопластикового стержня прямоугольного сечения со следующими физическими и геометрическими характеристиками:

$$\lambda^h = 0.095 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \mu^h = 0.0173 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \lambda^m = 0.1775 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \mu^m = 0.0074 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$\rho^h = 2500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \rho^m = 1230 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \nu^h = 0.68, \nu^m = 0.32, \ell = 0.12 \text{ м}, h = 0.003 \text{ м}, b = 0.03 \text{ м}.$$

Результаты расчетов собственных колебаний первых трех изгибных форм колебаний, соответствующие малым значениям  $k_n$  волнового числа, приведены в таблице 4.

Таблица 4. Значение расчетных и экспериментальных собственных частот волновых чисел

Частота, гц	1	2	3
Экспериментальная	122	770	2100
По формуле (20)	124	775	2170
По формуле (21)	125	795	2200

Из приведенных данных следует, что отличия расчетных значений собственных частот от экспериментальных незначительны и, в целом, находятся в пределах разброса экспериментальных данных. Сравнение их показывает, что стержень данных размеров из материала слоя матрицы имеет наименьшую частоту, а из материала слоя наполнителя - наибольшую.

Собственные функции  $X_n(z)$  для рассматриваемого стержня имеют форму, как показано на рисунке 25.

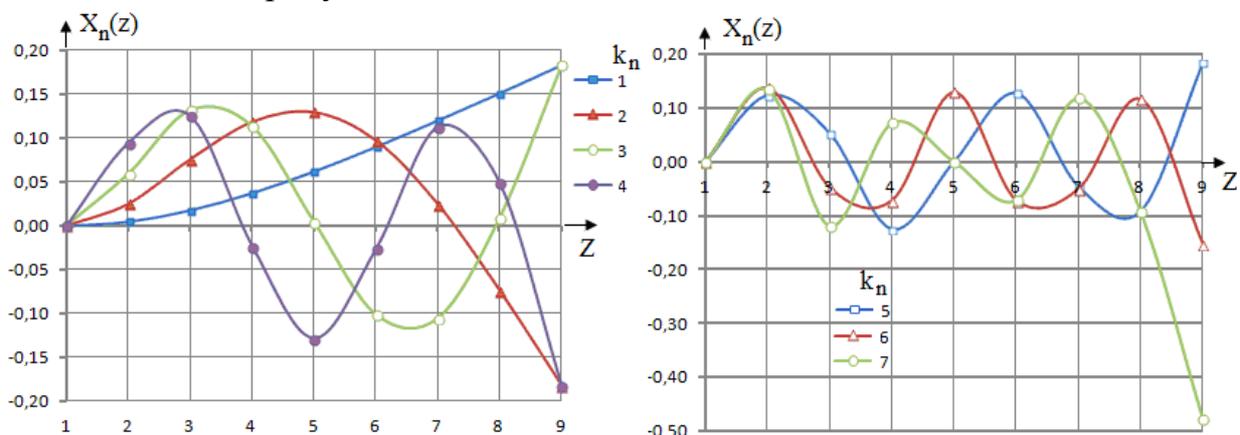


Рисунок 25 – Изменение формы собственных функций  $X_n(z)$  по длине стержня при различных:  $k_n$  1 -  $k_n=1.875$ ; 2 -  $4.694$ ; 3, 4, 5, 6, 7 – соответствующие данные таблицы 3.

Данный анализ позволяет путем выбора материала компонентов армированной слоистой среды управлять собственными частотами колебаний деталей без

изменения их геометрических размеров и формы, что важно в технических приложениях.

В п.5.7 рассматриваются консольные неподвижные и вращающиеся и равномерно закрученные на угол  $\tau_0$  слоистые анизотропные стержни, составленные из различных анизотропных материалов. Рассматриваются четыре типа многослойных стержней (15 слоев) прямоугольного сечения, составленных из чередующих слоев: 1-й стержень состоит из алюминия; 2 - боралюминия и алюминия; 3 - боралюминия, карбида кремния и алюминия; 4 - боралюминия армированных волокнами под углами  $\pm 45^0, \pm 30^0, \pm 15^0$  к оси стержня. Стержень прямоугольного сечения имеет следующие геометрические параметры:  $\ell=118$  мм,  $b=60$  мм,  $h=4.8$  мм,  $\tau_0 = 0$ . В этом случае значение первые шесть собственных технических частот, определенные по формуле (20), приведены в таблице 5. На рисунке 26 приведены кривые изменения собственных частот  $f_n$  от волновых чисел  $k_n$ .

Таблица 5 - Значение расчетных собственных частот  $f_n$  волновых чисел

$k_n$	1,875	4,694	7,854	10,996	14,137	17,279
AL	177,3	1111,4	3111,4	6098,4	10081	15059
Bor-AL	345,5	2165,6	6062,9	11883	19644	29344
Bor-Sic-AL	326,5	2046,8	5730,2	11231	18566	27734
Bor( $\pm 45^0, \pm 30^0, \pm 15^0$ )	300,3	1882,1	5269,1	10327	17072	25502

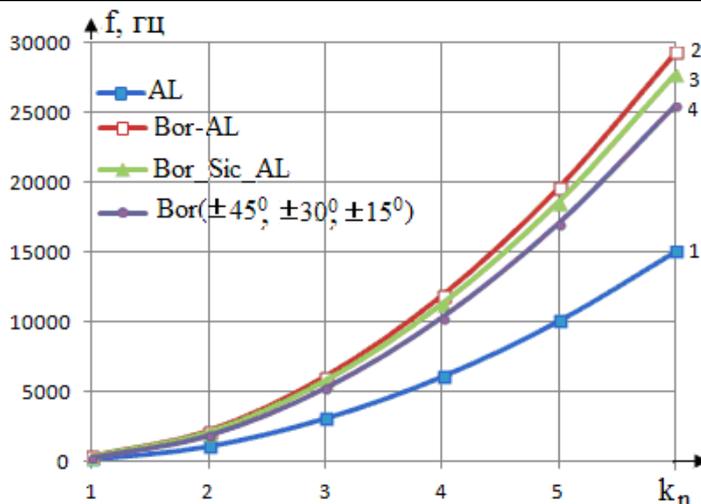


Рисунок 26 – Зависимость расчетных собственных частот  $f_n$  от волновых чисел  $k_n$  (1 - AL, 2 – Bor-AL, 3 - Bor-Sic-AL, 4 – Bor( $\pm 45^0, \pm 30^0, \pm 15^0$ )).

На этапе эскизного проектирования лопатки необходимо решить задачу отстройки ее от зон возможных резонансов. Для этого после определения собственных частот и форм колебаний многослойных лопаток из КМ на различных режимах нагружения строится резонансная диаграмма лопатки, на которой наносят кривые изменения собственных частот колебаний лопатки с учетом влияния центробежных или газовых сил и лучи гармоник к частоте вращения. Точки пересечения кривых собственных частот с лучами гармоник определяют резонансные частоты, от которых необходимо отстроить лопатку. В этом случае собственные частоты колебаний лопатки отстраивают от резонанса, изменяя закон распределе-

ния толщин по срединной поверхности лопатки или с помощью изменения свойств многослойной лопатки из КМ с учетом НДС.

В качестве примера приводятся резонансные диаграммы изгибных колебаний для многослойного стержня прямоугольного сечения, геометрические параметры которых приведены выше. На рисунке 27 изображена резонансная диаграмма для отстройки от первых четырех гармоник возбуждения на рабочем режиме  $\bar{n}=1$ .

Для данного многослойного стержня прямоугольного сечения, как видно из рисунка (см. рис. 27), отстройки от первых четырех гармоник возбуждения на рабочем режиме  $\bar{n}=1$  не потребуется. Необходимо отметить, что вопросы прогнозирования возможности возникновения флаттера выходят за рамки данной работы.

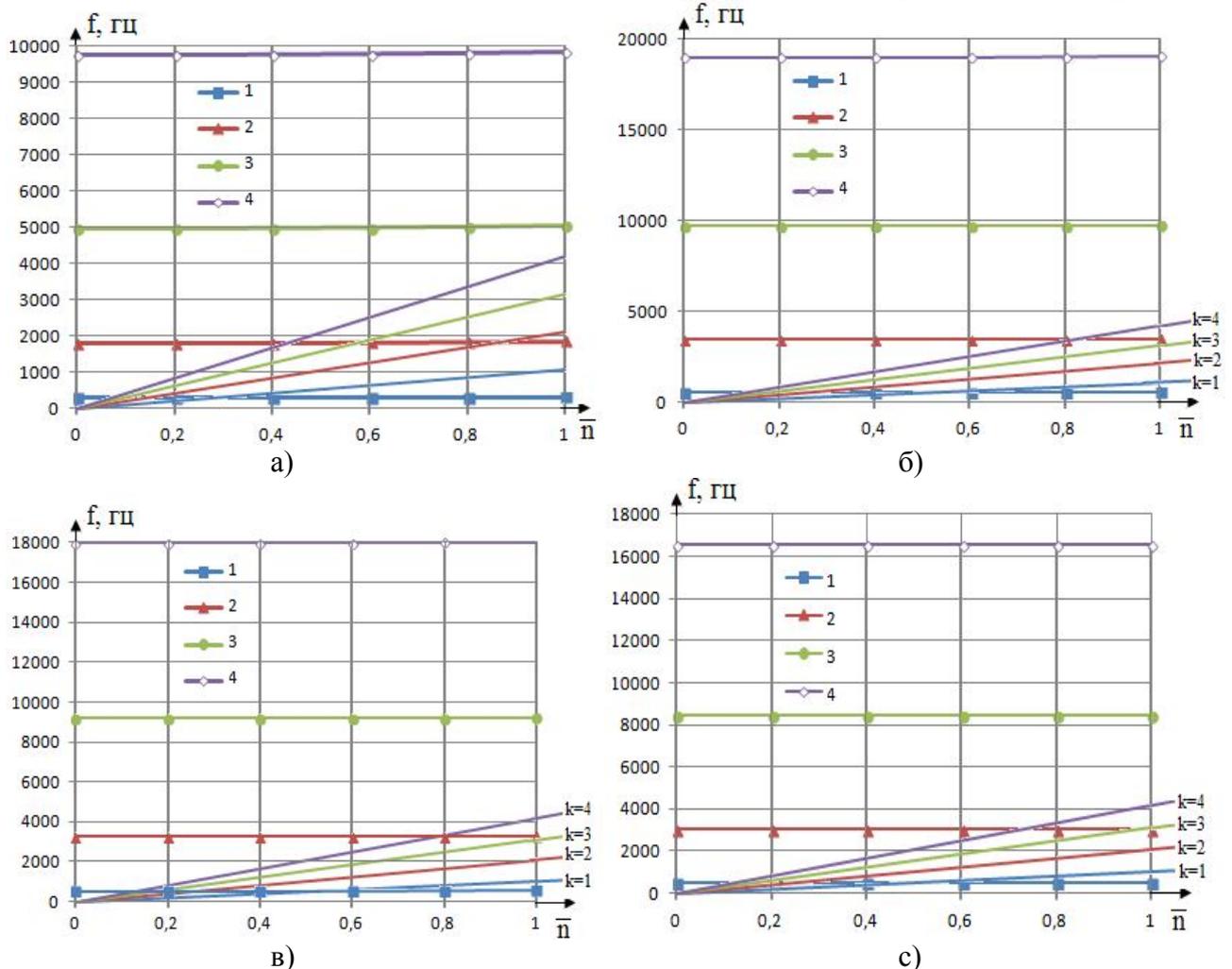


Рисунок 27 – Резонансная диаграмма изгибных колебаний многослойного стержня, составленных из чередующих слоев из алюминия (а), боралюминия и алюминия (б), боралюминия, карбида кремния и алюминия (в), боралюминия с углами армирования (с) для отстройки от первых четырех гармоник (1,2,3,4) возбуждения на рабочем режиме  $\bar{n}=1$ .

**В главе 6** на основе разработанного варианта теории закрученных слоистых анизотропных стержней определяются собственные частоты закрученных анизотропных стержней, находящихся в поле центробежных сил. Совпадение формулы собственных частот, определенные с уравнениями равновесия динамики закрученных анизотропных стержней по формуле

$$\begin{pmatrix} k_{11}k_{12}k_{13}k_{14} \\ k_{12}k_{22}k_{23}k_{24} \\ k_{13}k_{23}k_{33}k_{34} \\ k_{14}k_{24}k_{34}k_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\tilde{w}\omega^2 F \\ \rho F\omega^2 \tilde{u} \\ \rho F\omega^2 \tilde{v} \\ \rho\omega^2 \tilde{\theta} I_p \end{pmatrix}, \quad (22)$$

в частных случаях, с известными результатами доказываемость достоверность полученных результатов.

После определения из системы (22) собственных чисел несимметричной вещественной матрицы, находятся продольные, крутильные и изгибные собственные частоты слоистого стержня. После вычисления собственных векторов, соответствующих отдельному собственному числу матрицы (22), определяются формы колебания слоистого стержня.

Таким образом, система уравнения (22) позволяет определить собственные частоты закрученных анизотропных стержней, находящихся в поле центробежных сил. Совпадение формулы собственных частот, в частных случаях, с известными результатами доказывает достоверность полученных результатов.

Для проверки достоверности полученных соотношений (22) в п.6.9 приведено сравнение результатов, вычисленные по формуле (22) с известными решениями определения собственных частот (изгибные и крутильные).

Таблица 6. Сравнения результатов.

	N, тыс. об/мин	$\tau_0=0$			$\tau_0=0.477$			$\tau_0=1.347$		
		Расчет (22)	Расчеты Карабана В.В.	Расчет Ушакова А.И.	Расчет (22)	Расчеты Карабана В.В.	Расчет Ушакова А.И.	Расчет (22)	Расчеты Карабана В.В.	Расчет Ушакова А.И.
$f_v^{(1)}, \Gamma_{ц}$	0	59.9	60.13	60.24	59.9	60.34	60.04	59.88	61.78	61.6
	7	179.4	187.6	187.6	179,4	187.8	188.6	179.4	189.4	188.4
	10	252.6	258.6	258.6	252.6	258.7	258.1	252.6	260.4	263.1
	15	376	377.8	378.1	376	378	375.3	376	379.7	376.8
$f_v^{(2)}, \Gamma_{ц}$	0	375.3	376.8	377.4	378.2	342.3	342.9	275.2	236.5	237.7
	7	554.5	617.2	617.7	554.8	562.5	561.9	451.7	414.2	411.5
	10	692.3	790.1	790.6	692.3	715	712.7	592.3	534.5	529.3
	15	948.4	1099	1100	948.4	967.5	966	848.4	737.5	721.5
$f_u, \Gamma_{ц}$	0	979.5	1055	1057	980	1005	1005	837	861.6	856.8
	7	1229.1	1263	1227	1241.1	1248	1235	1009.07	1107	1096
	10	1235	1282	1247	1298.9	1376	1346	1269.9	1305	1343
	15	1292.7	1327	1293	1412,7	1513	1476	1622.7	1670	1662
$f_v^{(3)}, \Gamma_{ц}$	0	1150.6	1244	-	1650.6	1736	-	1296	1331	-
	7	1239,8	1346	1348	1439.8	1476	1449	1780	1945	1880
	10	1410	1585	1587	1410	1627	1608	1910	2092	2025
	15	1959	2040	2043	1958.9	2026	2016	2158.9	2326	2272
$f_{\theta}, \Gamma_{ц}$	0	535.8	528.3	556.2	585	578.7	605.3	850.7	849	858.9
	7	548.3	571.7	585.8	596.4	618.6	642.4	858.65	876.8	896.6
	10	561	612.8	614.6	608.1	657	694.2	866.8	924.5	962.2
	15	591	701.6	678.4	635.9	770.9	814.9	986.5	1098	1154

В работе Карабана В.В. рассматриваются консольные неподвижные и вращающиеся закрученные на угол  $\tau_0$  стержни из титанового сплава ( $E = 1.127 \cdot 10^5$

МПа,  $\mu = 0.3$ ,  $\rho = 4.59 \text{ кг/мм}^3$ ) длины 140 мм. Получены пять собственных частот колебания (три изгибные в плоскости меньшей жесткости  $f_v^i$ , крутильная  $f_\theta$ , изгибная в плоскости большой жесткости  $f_u$ ). Для расчета 50 стержневых конечных элементов используется пакет программ ANSYS. Эти результаты сравниваются с результатами, взятыми из работы Ушакова А.И., где учитываются стесненность кручения стержневой модели для различных углов закрутки  $\tau_0$  и частот вращения  $N$ .

Необходимо отметить, что использованные для сравнения результаты были получены в результате вычисления в пакете программ ANSYS, по формуле (22) и по программам других авторов (см. таблицу 6).

В таблице 6 приведены сравнения результатов расчетов технических частот, которые дают отличие в среднем 5%, при этом в одних случаях получали большие, а в других – меньшие частоты.

При колебаниях закрученного стержня центробежные силы повышают частоты его собственных колебаний.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ И ВЫВОДЫ

1. Дана математическая формулировка задачи НДС многослойного анизотропного призматического стержня произвольного сечения, находящегося под действием растягивающих сил, изгибающих и крутящего моментов. Предложен алгоритм аналитического построения решения сформулированной задачи.

2. Предложен аналитический алгоритм и разработан пакет прикладных программ для расчета стержней слоистого сечения заданной конфигурации в виде совокупности монослоев.

3. Предложен алгоритм и разработан пакет прикладных программ аналитического расчета физико-геометрических характеристик сечения многослойного анизотропного стержня с использованием механических характеристик отдельных слоев.

4. Проведено численное исследование особенности распределения напряжений и перемещений в отдельных слоях многослойного анизотропного стержня произвольного сечения, показало возможность регулирования НДС слоистой конструкции при кручении путем назначения свойств отдельных слоев, обеспечивающих прочность стержня.

5. Впервые разработана методика количественной оценки жесткости на кручение стержня слоистой структуры на основе результатов точных аналитических решений задачи о кручении многослойной конструкции прямоугольного сечения.

6. На стадии эскизного проектирования тонкостенных многослойных анизотропных стержневых конструкции, работающих в условиях кручения предложена номограмма для оценки их характеристик жесткости на кручение  $S$  и эффективного модуля сдвига  $c_{55}$ .

7. С помощью МКЭ разработан алгоритм и реализован с помощью программы FORTRAN метод решения, который позволяет определять НДС слоистых анизотропных стержней произвольного сечения при кручении. Это дает возможность

получить разрешающее уравнение в узловой точке слоя сечения и итерационный способ его решения, используя только оперативную память ЭВМ, сохранив необходимую точность решения задачи.

8. Получены кинематические соотношения для исследования НДС многослойных естественно-закрученных анизотропных стержней и результаты анализа НДС многослойной лопадки, находящихся в поле центробежных сил.

9. Разработан алгоритм и пакет программ для определения НДС в композиционных анизотропных стержнях и лопатках с учетом слоистости материала. Расчет лопаток и стержней по методике 3-й главы позволяет учесть влияние на НДС каждого ортотропного слоя со своими свойствами, формы и его геометрического расположения в теле лопадки. Составленная программа расчета на ЭВМ осуществляет выбор оптимальной структуры армирования конкретной многослойной стержня из ранее выбранного класса КМ. Эффективность и достоверность разработанной программы подтверждена сравнением расчетных величин с результатами испытаний на растяжение изотропных и анизотропных стержней прямоугольного сечения.

10. Показано, что путем выбора материала с учетом армирования отдельных слоев можно в широких пределах управлять уровнями напряжений и деформаций и собственными частотами колебаний при одних и тех же физических оборотах ротора. Сравнение значений частот первых трех форм колебаний, полученных автором, показало удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными.

### **Основные содержание диссертации опубликованы в следующих работах:**

#### Монография:

1. Каримбаев, Т.Д. Кручение и растяжение слоистых анизотропных стержней /Т.Д. Каримбаев, А.У. Нуримбетов - Монография. Алматы: Қазақ университеті.- 2006. - 160 с.

#### Входящие в перечень рецензируемых журналов ВАК:

2 Нуримбетов, А.У. Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных лопаток из композиционного материала в поле центробежных сил / А.У. Нуримбетов //Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. М.: - 2009.- № 3. - с. 46-57.

3. Нуримбетов, А.У. Кручение многослойного призматического анизотропного стержня, составленного из ортотропных материалов /А.У. Нуримбетов // Вестник РУДН. Серия «Математика, информатика, физика». М.: - 2009. - № 4. - С. 64-76.

4. Нуримбетов, А.У. Решение задачи кручения слоистых композиционных стержней произвольного сечения методом конечных элементов /А.У. Нуримбетов // Строительная механика и расчет сооружений. М.: - 2009. - №4.- с.24-30.

5. Каримбаев, Т.Д. Жесткость на кручение мелкослоистого анизотропного стержня /Т.Д. Каримбаев,А.У. Нуримбетов, И.В. Шевченко //Технология машиностроения. М.: – 2009. - № 8. – с. 31-36.

6. Нуримбетов, А.У. Техническая теория кручения композиционного слоистого стержня произвольного сечения /А.У. Нуримбетов //Известия Самарского научного центра РАН - 2009. - Т.11. - №5. - с. 94-101.

7. Нуриббетов, А.У. Оптимизация напряженно-деформированного состояние слоистых композиционных лопаток и стержней произвольного сечения в поле центробежных сил /А.У. Нуриббетов, И.В. Шевченко //Авиационная промышленность. М.: - 2009. - №4. - с. 34-41.

8. Нуриббетов, А.У. Обобщенное кручение многослойных стержней произвольного сечения, составленных из анизотропных материалов /А.У. Нуриббетов // Строительная механика и расчет сооружений. М.: - 2009. -№6.- с.44-50.

9. Нуриббетов, А.У. Полупространственная теория кручения композиционного слоистого стержня произвольного сечения /А.У. Нуриббетов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. М.: - 2010. - № 1. - с.46-57.

10. Нуриббетов, А.У. Напряженно-деформированное состояние слоистых-композиционных лопаток с различными физико-механическими свойствами слоев /А.У. Нуриббетов, Б. Мыктыбеков //Научный журнал «Известия Самарского научного центра РАН» - 2014, том 16, № 4.- с. 137-145

11. Дудченко, А.А. Деформация естественно-закрученных многослойных анизотропных лопаток авиационных двигателей /А.А. Дудченко, А.У. Нуриббетов //Оборонный комплекс - научно-техническому прогрессу России. Москва: ФГУП «ВИМИ» 2015. -№2. -с. 46-54.

12. Нуриббетов, А.У. Напряженно-деформированное состояние слоистых композиционных стержней и лопаток при кручении /А.У. Нуриббетов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.–М.: 2015-№1.-с.59-66.

13. Каримбаев, Т.Д. Технология изготовления композитных лопаток вентилятора согласно утверждённым математическим моделям методом вакуумно-компрессионной пропитки /Т.Д.Каримбаев, А.У.Нуриббетов., С.Орынбаев, М.Ш. Джунисбеков //Астана: Инновационный патент. - 2014. – регистрационный номер 2014/1393.1. Установка приоритета №641 от 09.01.15.

14. Nurimbetov, A.U. Naturally twisted layered anisotropic rod made of reinforced materials research /A.U. Nurimbetov, A. Bekbayev, S. Orynbayev, M. Dzhamanbayev, M. Keikimanova //3rd Internat. Conf. on Recent Trends in Materials and Mechanical Engineering (ICRTMME 2015), January 15-16, 2015, Auckland, New Zealand.

15. Nurimbetov, A. Naturally twisted layered anisotropic rod made of reinforced materials research /A. Nurimbetov, A. Bekbayev, S. Orynbayev, M. Dzhamanbayev, M. Keikimanova //Applied Mechanics and Materials Vol. 736 (2015) p. 30-38, Switzerland Accepted: 17.12.2014. (В списке Scopus 2014)

16. Каримбаев, Т.Д. Собственные частоты колебаний слоистого композиционного стержня /Т.Д. Каримбаев, А.У. Нуриббетов //Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.М.: - 2016. - № 5. - с. 46-57.

17. Nurimbetov, A. Optimization of Windmill's Layered Composite Blades to reduce Aerodynamic Noise and Use in Construction of "Green" Cities /A. Nurimbetov, A. Bekbayev, S. Orynbayev, B. Baibutanov, I. Tumanov, M. Keikimanova //Internat. Scientific Conf. Urban Civil Engineering and Municipal Facilities, SPbUCEMF-2015 /Procedia Engineering 117 (2015) . - 273-287. (В списке Scopus)

18. Нуриббетов, А.У. Автоматизированное проектирование раскрыя деталей произвольного поперечного сечения из слоистых композиционных материалов

/А.У. Нурымбетов //Вестник РУДН. Серия «Инженерные исследования». М.: - 2009 - №4. - С. 92-101.

19. Нурымбетов, А.У. Решения задачи кручения слоистых анизотропных стержней произвольного сечения методом конечных элементов /А.У. Нурымбетов, А.А. Дудченко //М.: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. - №2016662153 от 31.10.16.

Публикации докладов на конференциях:

20. Нурымбетов, А.У. Решение задачи на кручение слоистых анизотропных стержней и лопаток методом конечных элементов /А.У. Нурымбетов //Тр. всерос. науч.-практ.конф. «Инженерные системы-2009», М: РУДН.-2009.-С.383-390.

21. Каримбаев, Т.Д. Напряженное состояние закрученных слоистых композиционных лопастей в поле центробежных сил /Т.Д. Каримбаев, А.У. Нурымбетов, Б. Мыктыбеков //Мат. 6-й Московской Междунар. конф. «Теория и практика технологии производства изделий из композиционных материалов и новых металлических сплавов» (ТПКММ), -М: МГУ им. М.В.Ломоносова. 2009.-С.123-129.

22. Нурымбетов, А.У. Определение собственных частот колебаний армированных слоистых лопаток /А.У. Нурымбетов //Матер. Междунар. конф. по распространению упругих и упругопластических волн, посвященная 100-летию со дня рождения академика, Героя Социалистического Труда Х.А. Рахматуллина. Бишкек: 2009. - с. 58-64.

23. Нурымбетов, А.У. Собственные частоты колебаний анизотропных многослойных лопаток и стержней с переменными физико-геометрическими параметрами /А.У. Нурымбетов //Тез.докл. I междунар. конф. «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций» («Deformation and Failure of Composite Materials and Structures» DFCMS-2014) 10-13 ноября 2014.-М:- С. 27.

24. Каримбаев, Т.Д. Собственные частоты колебаний армированного слоистого стержня с переменными физико-геометрическими параметрами /Т.Д. Каримбаев, А.У.Нурымбетов //Матер.Междунар. науч.-техн. конф. «Проблемы и перспективы развития двигателестроения» посвященная генеральному конструктору аэрокосмической техники академику Н.Д. Кузнецову. 2014г. – г.Самара.

25. Нурымбетов, А.У. Напряженно-деформированное состояние естественно-закрученных слоистых анизотропных лопаток из армированных материалов /А.У. Нурымбетов //Тр. 13-ой Междунар.конф. «Авиация и космонавтика–2014», М.: - 2014. – с. 67-69.

26. Нурымбетов, А.У. Исследование естественно-закрученных слоистых анизотропных стержней, лопаток из армированных материалов при кручении и растяжении /А.У. Нурымбетов //Труды Междунар. молодежной науч. конф. "Прочность, ползучесть и разрушение строительных и машиностроительных материалов и конструкций", М.: РУДН, 2014. – с. 39-48.

Публикации в других источниках:

27. Нурымбетов, А.У. Полупространственная задача кручения слоистых анизотропных стержней произвольного сечения /А.У. Нурымбетов //Матер. 1-съезда математиков Казахстана, Шымкент, Ғылым. 1996. – с. 250-251.

28. Нуримбетов, А.У. Напряженно-деформированное состояние лопаток из композиционного материала в поле центробежных сил /А.У. Нуримбетов, Х.Ж. Байшагиров //Известия НАН РК, сер.физ-мат., №5(249). Алматы: 2006.- С. 32-36.
29. Нуримбетов, А.У. Оптимизация напряженного состояние слоистых композиционных лопаток с различными физико-механическими свойствами слоев в поле центробежных сил /А.У. Нуримбетов, А.Б.Бекбаев, С.А. Орынбаев, Б.К. Байбутанов //Известия НАН РК. сер.физ-мат., №1. - вып. 1. Алматы: 2015. – с. 20-31.
30. Нуримбетов, А.У. Численные решения МКЭ задачи о кручении слоистых композиционных стержней произвольного сечения /А.У. Нуримбетов //Вестник ТарГУ им. М.Х. Дулати. Тараз. - 2009. - № 3. - с. 211-216.
31. Нуримбетов, А.У. Раскрой стержня произвольного слоистого поперечного сечения /А.У. Нуримбетов //Механика и моделирование процессов технологии. Тараз: 2005, №1, с. 63-72.
32. Нуримбетов, А.У. Расчетная оценка жесткости на кручение многослойного стержня прямоугольного сечения /А.У. Нуримбетов //Механика и моделирование процессов технологии. Тараз: 2004, №1, с. 22-31.
33. Нуримбетов, А.У. Особенности деформирования естественно-закрученных многослойных анизотропных стержней /А.У. Нуримбетов //Механика и моделирование процессов технологии. Тараз: 2000, №1, с. 92-97.
34. Нуримбетов, А.У. Решение задачи о кручении многослойных анизотропных стержней прямоугольного сечения из армированных материалов /А.У. Нуримбетов, М.Ш. Жунисбеков //Mat. Of the X Internat. Scientific and pract. conf., «Scientific horizons». - 2014. - Vol. 10. Technical sciences. Sheffield. Science and education. LTD - p.6-12.
35. Нуримбетов, А.У. Основные соотношения динамической упругости армированного слоистого стержня с переменным физико-геометрическими параметрами /А.У. Нуримбетов, Г.И. Туреханова, Р.С. Жанбосынов //Mat. X Międzynar. naukowoprakt.konf. «Nauko wprzestrzeń Europy - 2014», Vol. 34. Techniczne nauki.: Przemysł. Nauka i studia – s.28-34
36. Нуримбетов, А.У. Деформация естественно-закрученных многослойных анизотропных стержней при кручении и растяжении /А.У. Нуримбетов, Г.И. Туреханова, Р.С. Жанбосынов //Mat. IX mezinár. vědeckoprakt. konf. «Moderní vymoženosti vědy-2013». - Díl 73. Technické vědy: Praha. Publishing House «Education and Science» - s. 17-23.
37. Нуримбетов, А.У. Сравнение экспериментальных результатов с теоретическими расчетами кручения, изгиба и растяжения естественно-закрученных стержней /А.У. Нуримбетов, Г.И. Туреханова, Р.С. Жанбосынов //Mat. за 9-а междунар. науч. прак. конф., «Новината за напреднали наука», - 2013. - Том 57. - Технологии. София. - с. 26-31.
38. Нуримбетов, А.У. Колебания компрессорной лопатки из композиционных материалов в поле центробежных сил /А.У. Нуримбетов, А.А. Дудченко //Тр. II междунар. конф. «Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций» («Deformation and Failure of Composite Materials and Structures» DFCMS-2016), 2016. – М.: - С. 116-118.