МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (МАИ)

на правах рукописи

Онегин Евгений Евгеньевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ В КЛАССЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УПРАВЛЯЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

**Специальности 05.13.18 — «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»,
05.13.01 — «Системный анализ, управление и обработка информации (авиационная и ракетно-космическая техника)»**

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

**Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор
Хрусталёв Михаил Михайлович**

Москва, 2019

Оглавление

Список основных обозначений

$f^{(1)}, \ldots, f^{(n)} : A \to B$ – $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$ являются функциями, которые определены на множестве A и принимают значения из множества B.

$x \mapsto f(x)$ – f является функцией переменной x.

$x \mapsto f(x) : A \to B$ – f является функцией переменной x, которая определена на множестве A и принимает значения из множества B.

$\mathcal{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, $\mathcal{R} := \mathcal{R}^1$.

T – знак транспонирования.

$\|x\|,\ x \in \mathcal{R}^n$ – евклидова норма вектора x, $\|x\| := \sqrt{x^{\mathrm{T}} x}$.

$\mathcal{R}_+$ – множество неотрицательных вещественных чисел.

$\mathcal{R}^{n \times m}$ – пространство вещественных матриц размерности $n \times m$.

$\mathrm{tr}\big[A\big],\ A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ – след матрицы A, $\mathrm{tr}\big[A\big] := \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ii}$.

$\|A\|,\ A \in \mathcal{R}^{n \times m}$ – евклидова норма матрицы A, $\|A\| := \sqrt{\mathrm{tr}\big[A^{\mathrm{T}} A\big]}$

$\mathcal{S}^n$ – пространство симметрических вещественных матриц размерности $n \times n$, $\mathcal{S}^n := \{A \in \mathcal{R}^{n \times n} : A = A^{\mathrm{T}}\}$.

$\mathrm{svec}[P],\ P \in \mathcal{S}^n$ – симметрическая векторизация матрицы P,

$$\mathrm{svec}\big[P\big] := (P_{11}, \sqrt{2}P_{21}, \ldots, \sqrt{2}P_{n1}, P_{22}, \sqrt{2}P_{32}, \ldots, \sqrt{2}P_{n2}, \ldots, P_{nn})^{\mathrm{T}}.$$

$A \otimes_s B,\ A \in \mathcal{R}^{n\times n},\ B \in \mathcal{R}^{n\times n}$ – симметрическое произведение Кронекера матриц A и B, $A \otimes_s B \in \mathcal{R}^{\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}}$:

$$(A \otimes_s B)\,\mathrm{svec}\big[P\big] = \frac{1}{2}\mathrm{svec}\big[APB^{\mathrm{T}} + BPA^{\mathrm{T}}\big],\ \forall P \in \mathcal{S}^n.$$

$A \succ B$ ($A \succeq B$) – матрица $A - B$ является положительно (неотрицательно) определенной.

$\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathcal{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.

$i = \overline{j,k}$ – сокращение для записи $\forall i \in \mathcal{N}:\ j \leqslant i \leqslant k$.

t – время, $t \in \mathcal{R}_+$.

Ω – пространство элементарных исходов.

$\mathcal{F}$ – σ-алгебра событий на Ω.

$\mathbf{P}$ – вероятностная мера на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, т.е. $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to \mathcal{R}_+,\ \mathbf{P}(\Omega) = 1$.

$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ – поток σ-алгебр на Ω.

$\mathbb{E}$ – математическое ожидание, $\mathbb{E}\,\xi := \int_\Omega \xi(\omega)\mathbf{P}(d\omega)$, где ξ – случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

$\mathcal{C}^2(\mathcal{R}^n)$ – пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций на $\mathcal{R}^n$ со значениями в $\mathcal{R}$.

$\square$ – символ, означающий полное завершение доказательства.

Введение

Важнейшим научным подходом при изучении и конструировании всего многообразия объектов и явлений реального мира является математическое моделирование. Сущность данной методологии заключается в построении математических моделей рассматриваемых объектов или явлений и дальнейшем их исследовании [1]. Распространенным примером математической модели является динамическая система [2]. Динамические системы служат математическим описанием обширного множества эволюционирующих во времени объектов и явлений реального мира. Под управляемыми динамическими системами понимают динамические системы, которые содержат управляемые параметры. Данные параметры моделируют величины воздействующих на моделируемый объект управляющих возмущений. Закон, по которому в каждый момент времени определяются величины управляемых параметров, называется управлением или функцией управления. Управляемая динамическая система в совокупности с управлением представляют собой математическую модель системы управления [3]. Системы управления являются основным объектом изучения теории управления, которая играет ключевую роль в таких областях как управление промышленными и химическими процессами, реакторами, магистральными энергетическими системами, аэрокосмическое конструирование, теория квантовых систем и теория компьютерных систем [4].

В каждый момент времени значения функции управления могут определяться в зависимости от тех или иных параметров математической модели. Как правило, в качестве таковых выступают текущий момент времени, а также некоторый набор величин, который называется вектором измерений или наблюдений. Если величина управляемых величин зависит только от текущего момента времени и не зависит от измерений состояния системы, то соответствующее управление называют программным. Функцию управления, построенную с учётом информации о величинах измеряемых параметров, называют управлением с обратной связью. При этом, если вектор измерений в каждый момент времени позволяет восстановить полную информацию о текущем состоянии системы, то такое управление называют управлением с полной обратной связью [3], иначе – управлением с неполной обратной связью. Во втором случае можно говорить о том, что на управление наложены информационные ограничения. Информационные ограничения естественным образом возникают в различных системах управления, например в крупномасштабных системах и в системах с децентрализованным управлением [5].

При построении управления, как правило, руководствуются структурными параметрами данной математической модели, а также целью управления. Цель управления можно определить как одно или сразу несколько свойств, которые система должна приобрести при выборе конкретного закона управления. Примерами таких, полезных с инженерной точки зрения, свойств управляемой системы являются устойчивость и асимптотическая устойчивость траекторий системы в пространстве состояний [6]. Задача синтеза управления, которое обеспечивает свойство устойчивости относительно желаемой траектории, называется задачей стабилизации. Другое важное свойство управляемой системы можно сформулировать следующим образом: траектории системы и управляющих параметров должны обеспечивать минимум некоторого заранее заданного функционала. Этот функционал называют функционалом качества управления, а задачу синтеза подобного управления – задачей оптимального управления [3].

На практике часто встречаются ситуации [7], когда какие-либо параметры объекта управления не могут быть точно определены на этапе моделирования. К примеру, такая ситуация возникает, если система управления не может быть физически реализована с требуемой точностью, или если необходимо спроектировать управляющее устройство для уже существующего объекта, точные параметры которого невозможно определить. Поэтому особый интерес представляет решение задачи синтеза управления динамическими системами при наличии неопределенностей [8]. Примером подобного рода неопределенности является неопределенность воздействующих на объект управления неуправляемых внешних возмущений. Несмотря на отсутствие полной информации о присутствующих в системе возмущениях, иногда имеется априорная вспомогательная информация об их свойствах, например: возмущения ограничены по величине некоторой константой, являются непрерывными функциями времени, описываются некоторым обыкновенным дифференциальным уравнением [9] и др. Хорошо известны примеры динамических систем, в которых неопределенные внешние возмущения имеют случайный характер [10]. Естественно полагать, что чем больше информации о свойствах неуправляемых внешних воздействий учтено при моделировании, тем качественнее будет результат математического моделирования.

Среди динамических систем с непрерывными траекториями, имеется богатый подкласс математических моделей, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Это позволяет применять в задачах анализа и синтеза управлений для математических моделей данного типа богатый аппарат теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, в рамках теории обыкновенных дифференциальных уравнений, вообще говоря, не удается дать строгое математическое описание непрерывных динамических систем при наличии случайных возмущений [11, 12]. Преодолеть данную проблему удалось K. Itô, который в своих работах [13–15] ввел и обосновал понятие стохастического интеграла и связанное с ним понятие стохастического дифференциала. Конструкция стохастического интеграла позволила описать эволюцию динамических систем, которые формально можно представить в виде обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих стохастические дифференциалы случайных процессов. Такие соотношения называют стохастическими дифференциальными уравнениями, а описываемые данными уравнениями динамические системы – стохастическими. Модели, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями, нашли широкое применение в экономике, физике, биологии, социологии, авиационной и ракетно-космической технике [10, 16, 17]. При этом естественный интерес представляют собой различные проблемы синтеза управлений для систем данного типа и, в частности, задачи стабилизации.

Задаче оптимального управления стохастическими динамическими системами посвящено большое количество работ (см., например, работы [18–36] и обзоры [37, 38]). В данных работах получены обобщения на стохастические системы широко известных методов и принципов теории оптимального управления детерминированными системами. Стоит отметить, что полученные результаты, как правило, имеют достаточно общий характер, что усложняет их анализ и использование на практике. В связи с этим важной задачей является выделение среди всего многообразия математических моделей таких подклассов, которые с одной стороны являются достаточно богатыми, чтобы представлять практический интерес, а с другой стороны позволяют строить конструктивные условия оптимальности, с целью упростить задачи анализа математической модели и синтеза оптимального управления. Примером такого подкласса является класс линейных стохастических систем (см., например, работы [39–106] и обзоры [11, 12, 37, 107–109]).

Тема диссертационной работы посвящена выделению и исследованию нового подкласса математических моделей, названных в диссертационной работе квазилинейными стохастическими системами с управляемыми параметрами. Данные математические модели описываются линейными однородными стохастическими дифференциальными уравнениями, матрицы которых (в общем случае нелинейно) зависят от управляемых параметров. В контексте задачи оптимальной стабилизации предложенный класс математических моделей является обобщением класса линейных стохастических систем с мультипликативными шумами. Вопреки данной общности для математических моделей предложенного класса возможно построение качественных и приближенных аналитических методов исследования моделей и разработка эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий. Вопросы построения методов исследования и разработки вычислительных методов для квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами представляют практический интерес, потому что, в частности, данные системы позволяют моделировать широкий спектр задач оптимизации регуляторов линейной структуры для оптимальной стабилизации объектов, описываемых линейными стохастическими системами с мультипликативными шумами. Примером такой задачи является задача оптимальной стабилизации при наличии информационных ограничений. Таким образом, тема диссертационного исследования является актуальной.

Объектом диссертационного исследования является класс математических моделей, названный квазилинейными стохастическими системами с управляемыми параметрами.

Предметом диссертационного исследования является решение задачи оптимальной стабилизации в классе квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами.

Целью диссертационной работы является получение и исследование нового класса математических моделей, названных квазилинейными стохастическими системами с управляемыми параметрами, формализация и постановка задач оптимальной стабилизации для моделей данного класса, разработка методов и алгоритмов решения задачи оптимальной стабилизации и применение полученных результатов для построения качественных и приближенных аналитических методов, разработки эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий и реализации полученных численных методов и алгоритмов в виде комплексов программ для решения задачи оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными шумами и информационными ограничениями.

В соответствии с целью диссертационной работы были поставлены следующие задачи исследования:

1) Формализовать новый класс математических моделей – квазилинейные стохастические системы с управляемыми параметрами. Сформу-

лировать и поставить задачу оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами.

2) Получить условия оптимальности в задаче оптимальной стабилизации:

   - в классе квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами;
   - в классе линейных стохастических систем с мультипликативными шумами при наличии информационных ограничений;
   - в классе линейных стохастических систем с мультипликативными шумами с полной информацией о состоянии.

3) Разработать алгоритмы и численные методы градиентного типа для поиска оптимальных и субоптимальных управлений в перечисленных задачах оптимальной стабилизации.

4) Разработать комплекс программ, реализующих указанные численные методы.

5) Полученные результаты применить для моделирования и решения ряда модельных примеров и прикладных задач авиационной и ракетно-космической техники.

Для того, чтобы привести обзор известных работ в области исследования и обосновать новизну полученных результатов, приведем далее ряд математических моделей и связанные с их анализом результаты. Далее будем полагать, что заданы полное фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}, \mathbf{P})$, где σ-алгебра $\mathcal{F}_0$ содержит все события нулевой меры;

$\mathcal{F}_0$-измеримая векторная случайная величина ξ_0, $\mathbb{E}\|\xi_0\|^2 < +\infty$; независимые стандартные векторные винеровские процессы $\beta^{(i)} : \mathcal{R}_+ \times \Omega \to \mathcal{R}^{b_i}$, $i = \overline{1,2}$, которые являются мартингалами относительно потока $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$; ограниченные на каждом конечном интервале кусочно-непрерывные отображения: $A^{(0)}$, $A^{(i)} : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^{n\times n}$, $B^{(0)}$, $B^{(i)} : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^{n\times m}$, $C^{(i)} : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^{n}$, $i = \overline{1,b_1}$; $D^{(0)}$, $D^{(i)} : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^{p_1\times n}$, $F^{(i)} : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^{p_1}$, $i = \overline{1,b_2}$; $G : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^{p_2\times n}$; Q, $R : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{S}^n$; $S : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^{n\times m}$; $E : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{S}^m$; $E(t) \succ 0$, $R(t) \succeq 0$, $Q(t) \succeq S(t)E(t)^{-1}S(t)^{\mathrm{T}}$, $t \geqslant 0$.

Рассмотрим математическую модель системы управления, которая описывается стохастическими дифференциальными уравнениями Ито следующего вида:

$$\begin{aligned} d\xi(t) = {} & \big(A^{(0)}(t)\xi(t) + B^{(0)}(t)v(t)\big)dt + \\ & + \sum_{i=1}^{b_1} \big(A^{(i)}(t)\xi(t) + B^{(i)}(t)v(t) + C^{(i)}(t)\big)d\beta_i^{(1)}(t),\ \xi(0) = \xi_0, \end{aligned} \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned} & d\zeta(t) = D^{(0)}(t)\xi(t)dt + \sum_{i=1}^{b_2} \big(D^{(i)}(t)\xi(t) + F^{(i)}(t)\big)d\beta_i^{(2)}(t),\ \zeta(0) = 0, \\ & \eta(t) = G(t)\xi(t),\ t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Уравнение (0.1) моделирует движение объекта управления, а система (0.2) описывает процесс измерений. Согласованный с потоком $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ непрерывный случайный процесс $\xi : \mathcal{R}_+ \times \Omega \to \mathcal{R}^n$ описывает эволюцию состояния системы во времени, $v : \mathcal{R}_+ \times \Omega \to \mathcal{R}^m$ – управление, $\zeta : \mathcal{R}_+ \times \Omega \to \mathcal{R}^{p_1}$ содержит накопленные наблюдения о системе при наличии случайных ошибок, а $\eta : \mathcal{R}_+ \times \Omega \to \mathcal{R}^{p_2}$ – точные мгновенные измерения состояния системы в каждый момент времени.

Управляемые динамические системы, которые описываются уравнениями вида (0.1), в литературе, как правило, называют линейными стохастическими системами [11, 12]. Слагаемые $\sum_{i=1}^{b_1} C^{(i)}(t)d\beta_i^{(1)}(t)$ интерпретируются как действующие на объект управления аддитивные гауссовские шумы, а $\sum_{i=1}^{b_1} A^{(i)}(t)\xi(t)d\beta_i^{(1)}(t)$ и $\sum_{i=1}^{b_1} B^{(i)}(t)\upsilon(t)d\beta_i^{(1)}(t)$ – действующие на объект управления мультипликативные по состоянию и управлению случайные возмущения. Слагаемое $\sum\limits_{i=1}^{b_2}\big(D^{(i)}(t)\xi(t)+F^{(i)}(t)\big)d\beta_i^{(2)}(t)$ моделирует случайные ошибки в канале измерения.

Вопросам оптимального управления на конечном интервале времени системами вида (0.1)–(0.2) посвящено обширное множество работ [39–62]. Среди них отдельно стоит выделить работы [42–45], в которых допускается, что матрицы системы могут быть случайными функциями времени. В подавляющем большинстве работ в качестве критерия качества управления выбрано математическое ожидание классического квадратичного критерия качества управления [42–62]

$$J_{t_f}(\upsilon) = \mathbb{E}\int\limits_0^{t_f}\Big(\xi(s)^{\mathrm{T}}Q(s)\xi(s) + \xi(s)^{\mathrm{T}}S(s)\upsilon(s) + \upsilon(s)^{\mathrm{T}}S(s)^{\mathrm{T}}\xi(s) + \\ + \upsilon(s)^{\mathrm{T}}E(s)\upsilon(s)\Big)ds + \mathbb{E}\,\xi(t_f)^{\mathrm{T}}R(t_f)\,\xi(t_f),\ t_f > 0.$$

Задачи оптимального управления линейными системами с квадратичным критерием качества управления известны как задачи линейно-квадратичного управления. Если в системе управления присутствуют только аддитивные гауссовские возмущения (т.е. при $A^{(i)}(t) \equiv B^{(i)}(t) \equiv 0,\ i = \overline{1, b_1},\ D^{(i)}(t) \equiv 0,\ i = \overline{1, b_2}$), то такие задачи называют задачами линейно-квадратичного гауссовского управления. В указанных выше работах по линейно-квадратичной задаче на конечном интервале времени можно выделить два подхода к построению оптимальных регуляторов с неполной обратной связью: построение статических регуляторов (или регуляторов с мгновенной обратной связью) [11, 47–57] и построение динамических регуляторов [12, 58–61, 109]. Первый подход заключается в том, что управление в каждый момент времени находится как значение некоторой функции времени и текущих измерений $v(t) = u(t,\zeta(t),\eta(t))$, $t \geqslant 0$, где $u : \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^{p_1} \times \mathcal{R}^{p_2} \to \mathcal{R}^m$ – некоторая борелевская функция. При этом, как правило, постулируется линейная структура функции u относительно наблюдений и строятся условия оптимальности в более узком классе допустимых законов управления. В случае динамической обратной связи полагается, что величина управляющих воздействий в каждый момент времени определяется на основании информации о всей истории наблюдений до данного момента времени.

Классический пример регулятора, построенного по принципу динамической обратной связи, дает известный принцип разделения (см. работы [12, 37, 41, 61, 62, 109]). Согласно данному принципу решение в задаче линейно-квадратичного гауссовского управления имеет вид $v(t) = -K(t)\hat{\xi}(t)$, $t \geqslant 0$, где матричный коэффициент $K : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^{m\times n}$ в точности совпадает с соответствующим коэффициентом регулятора с полной обратной связью, а $\hat{\xi}(t)$ – наилучшая в среднем квадратическом оценка состояния системы, полученная на основе всех измерений до момента времени t, которая может быть получена с использованием линейных уравнений фильтра Калмана–Бьюси [63]. При этом выбор оптимальных параметров фильтра не зависит от выбора оптимального коэффициента регулятора, и наоборот. Таким образом, задача оптимального управления при неполной информации сведена к двум раздельным задачам оптимального управления и оценивания.

Стоит отметить, что для линейных систем с мультипликативными случайными возмущениями уравнения фильтра для оптимальной оценки состояния не являются линейными, что усложняет его исследование и реализацию [64,65]. Это приводит к необходимости построения оптимальных фильтров линейной структуры [64,66]. Помимо этого, для линейных систем с мультипликативными шумами, вообще говоря, не справедлив принцип разделения и поэтому задача синтеза оптимального динамического регулятора приводит к решению двух связанных задач оптимального управления и оценивания [58–60, 67].

Известно, что задача линейно-квадратичного гауссовского управления, вообще говоря, не имеет решения, если матрицы $E(t)$, $t \geqslant 0$, в критерии не являются положительно определенными. При этом в работах [48, 50, 51, 57] отмечается, что если на систему действуют мультипликативные по управлению возмущения, то задача перестает быть вырожденной даже в том случае, когда матрицы $E(t)$, $t \geqslant 0$, являются отрицательно определенными. С целью подчеркнуть указанные здесь и другие особенности, системы, описываемые уравнениями вида (0.1), называют: линейными в широком смысле [110], билинейными [111], с мультипликативными по состоянию и управлению шумами [45,50,60,68–70,108], с зависящими от состояния и управления шумами [58, 59, 66, 71–80] или квазилинейными [52–55].

Задача оптимального управления линейными стохастическими системами на бесконечном интервале времени тесно связана с задачей стабилизации данных систем. Различные вопросы устойчивости линейных стохастических систем исследовались в работах [65, 68, 73, 77, 81, 83, 89, 92–94, 98, 101, 104, 112, 113]. Как правило, изучение вопросов устойчивости и оптимальной стабилизации проводится для стационарных (или автономных) стохастических систем. Это, в первую очередь, связано с тем, что даже при отсутствии случайных возмущений анализ асимптотической устойчивости и решение задачи оптимальной стабилизации для нестационарных систем сопряжены с рядом трудностей. Поэтому будем дальше полагать, что матрицы системы и критерия не зависят от времени:

$$
\begin{aligned}
d\xi(t) = \big(A^{(0)}\xi(t) + B^{(0)}v(t)\big)dt + &\\
+ \sum_{i=1}^{b_1} \big(A^{(i)}\xi(t) + B^{(i)}v(t) + C^{(i)}\big)d\beta_i^{(1)}(t),\ \xi(0) = \xi_0, &
\end{aligned}
\tag{0.3}
$$

$$
\begin{aligned}
& d\zeta(t) = D^{(0)}\xi(t)dt + \sum_{i=1}^{b_2} \big(D^{(i)}\xi(t) + F^{(i)}\big)d\beta_i^{(2)}(t),\ \zeta(0) = 0,\\
& \eta(t) = G\xi(t),\ t \geqslant 0,\\
& J_\infty(v) = \mathbb{E} \int_0^{+\infty} \Big(\xi(s)^{\mathrm{T}} Q\, \xi(s) + \xi(s)^{\mathrm{T}} S\, v(s) + \\
& \qquad\qquad + v(s)^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} \xi(s) + v(s)^{\mathrm{T}} E\, v(s)\Big) ds,
\end{aligned}
$$

где $A^{(0)}$, $A^{(i)} \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $B^{(0)}$, $B^{(i)} \in \mathcal{R}^{n\times m}$, $C^{(i)} \in \mathcal{R}^n$, $i = \overline{1, b_1}$; $D^{(0)}$, $D^{(i)} \in \mathcal{R}^{p_1\times n}$, $F^{(i)} \in \mathcal{R}^{p_1}$, $i = \overline{1, b_2}$; $G \in \mathcal{R}^{p_2\times n}$, $Q \in \mathcal{S}^n$, $S \in \mathcal{R}^{n\times m}$, $E \in \mathcal{R}^{m\times m}$; $E \succ 0$, $Q \succeq SE^{-1}S^{\mathrm{T}}$.

Нетрудно видеть, что критерий J_∞ устроен таким образом, что для того, чтобы значение критерия $J_\infty(v)$ было конечным, управление v должно обеспечивать достаточную скорость сходимости в среднем квадратическом процесса ξ к нулю при $t \to +\infty$. Однако, при воздействии на систему аддитивных случайных возмущений $\sum_{i=1}^{b_1} C^{(i)} d\beta_i^{(1)}(t)$ этого невозможно добиться. При этом теряет содержательный смысл постановка вопроса об оптимальном управлении линейными системами на бесконечном интервале времени с классическим квадратичным критерием качества управления J_∞. В связи с этим в ряде работ по оптимальной стабилизации стохастических систем используются [45,60,74,75,79,80,90,103,106] усредненный по времени интегральный функционал

$$
\begin{aligned}
\widehat{J}_\infty(v) = \lim_{t_f\to+\infty} \frac{1}{t_f}\, \mathbb{E} \int_0^{t_f} \Big(\xi(s)^{\mathrm{T}} Q\, \xi(s) + \xi(s)^{\mathrm{T}} S\, v(s) + &\\
+ v(s)^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} \xi(s) + v(s)^{\mathrm{T}} E\, v(s)\Big) ds, &
\end{aligned}
$$

или не интегральный по времени критерий вида

$$\widetilde{J}_\infty(v) = \lim_{t_f \to +\infty} \mathbb{E}\Big(\xi(t_f)^{\mathrm{T}} Q\, \xi(t_f) + \xi(t_f)^{\mathrm{T}} S\, v(t_f) + \\ + v(t_f)^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} \xi(t_f) + v(t_f)^{\mathrm{T}} E\, v(t_f)\Big).$$

Для того, чтобы значения данных критериев были определены, управление v должно обеспечивать лишь существование конечного предела в среднем квадратическом на бесконечности для процесса ξ.

Имеется ряд результатов [47, 50, 67, 72, 76, 85, 86, 91, 95, 97, 100, 102, 114, 115] по оптимальной с критерием J_∞ стабилизации линейных стохастических систем, которые не содержат аддитивных случайных возмущений (т.е. когда $C^{(i)} = 0$, $i = \overline{1, b_1}$; при этом уравнения движения системы иногда классифицируют как линейные однородные стохастические дифференциальные уравнения [116]). Дело в том, что при $C^{(i)} = 0$, $i = \overline{1, b_1}$ уравнение состояния (0.3) допускает нулевое решение $\xi(t) \equiv 0$ и становится возможным обеспечить его асимптотическую устойчивость в среднем квадратическом [73]. В данном случае приобретает интересную интерпретацию следующая задача стабилизации системы (0.3). Предположим, что имеется функция $u : \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^{p_1} \times \mathcal{R}^{p_2} \to \mathcal{R}^m$ такая, что при любом начальном условии ξ_0, $\mathbb{E}\|\xi_0\|^2 < +\infty$, управление $v(t) = u(t, \zeta(t), \eta(t))$, $t \geqslant 0$, вместе с решением ξ системы (0.3) с заданным управлением асимптотически стремятся к нулю в среднем квадратическом. Тогда коэффициенты $A^{(i)}\xi(t) + B^{(i)}v(t)$, $i = \overline{1, b_1}$, при шуме также стремятся к нулю в среднем квадратическом. Другими словами, интенсивность воздействующих на объект управления шумов уменьшается с течением времени, т.е. данное управление «подавляет» воздействие случайных возмущений на объект управления. С целью подчеркнуть данную особенность, задача оптимальной стабилизации, которая заключается в поиске стратегии управления u, которая обеспечивают асимптотическую устойчивость в среднем квадратическом замкнутой системы (0.3), в диссертационной работе также называется задачей подавления случайных возмущений, а соответствующая задача оптимизации – задача оптимизации процесса подавления случайных возмущений. Будем далее полагать, что $C^{(i)} = 0,\ i = \overline{1, b_1}$.

Из работ по оптимальной стабилизации с критерием J_∞ линейных стохастических систем без аддитивных шумов стоит выделить работы [47, 50, 76, 91, 100, 114, 115], в которых при различных предположениях о системе и критерии исследуется задача оптимальной стабилизации с полной информацией о состоянии системы (т.е. при $\eta(t) = \xi(t),\ t \geqslant 0$). Частные случаи поставленной задачи изучены в [47,76,115]. В работе [114] в данной задаче получены достаточные условия оптимальности. В работах [50,100], с допущением, что матрицы в критерии могут быть неопределенными, получены необходимые условия оптимальности. Стоит отметить, что во всех перечисленных здесь работах оптимальное управление принимает вид линейного стационарного регулятора. В диссертационной работе для данной задачи, допуская лишь неотрицательную определенность матрицы Q, получены необходимые и одновременно достаточные условия оптимальности линейного стационарного регулятора среди широкого множества допустимых управлений.

Также стоит отметить работы [47, 72, 86], которые посвящены задаче синтеза оптимального стабилизирующего линейного стационарного регулятора вида $\upsilon(t) = -K\eta(t),\ K \in \mathcal{R}^{m\times p_2},\ t \geqslant 0$, для линейных стохастических систем с мультипликативными шумами. В работе [86] предложена численная процедура синтеза оптимального скалярного линейного стационарного регулятора, а в [47, 72] получены достаточные условия оптимальности в классе линейных стационарных регуляторов. В диссертационном исследовании получены необходимые условия оптимальности стабилизирующего линейного стационарного регулятора. Кроме того, получены необходимые условия оптимальности с информационными ограничениями более общего вида, которые заключаются в том, что каждая компонента управления зависит от заранее заданного набора компонент вектора измерений. Такие ограничения характерны при управлении крупномасштабными объектами или децентрализованном управлении.

С учетом перечисленных работ можно заключить, что подавляющее большинство результатов в задаче оптимальной стабилизации линейных стохастических систем касается статических и динамических регуляторов линейной структуры. При этом если изначально предполагать линейную структуру регулятора, то изначальная задача сводится к частному случаю задачи следующего вида:

$$d\xi(t) = A^{(0)}(u(t))\xi(t)dt + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(u(t))\xi(t)d\beta_i(t),\ \xi(0) = \xi_0, \tag{0.4}$$

$$J_\infty(u) = \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} \xi(s)^{\mathrm{T}} L(u(s))\,\xi(s)ds, \tag{0.5}$$

где $A^{(i)} : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^{n\times n},\ i = \overline{1,b}$, – непрерывно дифференцируемые на $\mathcal{R}^m$ матричнозначные отображения; $u : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^m$ – управление; $\beta : \mathcal{R}_+ \times \Omega \to \mathcal{R}^b$ – стандартный винеровский процесс, который является мартингалом относительно потока $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$; $L : \mathcal{R}^m \to \mathcal{S}^{n\times n}$ – дифференцируемое на $\mathcal{R}^m$ матричнозначное отображение, $L(v) \succeq 0,\ v \in \mathcal{R}^m$.

Математические модели, которые описываются стохастическими дифференциальными уравнениями вида (0.4), здесь и далее называются квазилинейными стохастическими системами с управляемыми параметрами и являются основным объектом исследования диссертационной работы.

Детерминированный аналог системы подобного вида рассматривался в работе [117], модификация данной системы при наличии только аддитивных шумов встречалась в работе [118], в [119–121] рассматривались математические модели с наличием мультипликативных и аддитивных шумов, а в работе [122] решена задача оптимальной стабилизации с усредненным по времени интегральным критерием систем данного вида при наличии мультипликативных и аддитивных шумов. Результатов в задаче оптимальной стабилизации системы вида (0.4) с критерием (0.5) на текущий момент не известно.

Стоит отметить, что управление u является детерминированным программным управлением. На первый взгляд такая постановка задачи противоречит духу теории стохастического управления, в которой обычно искомое управление зависит от текущих измерений. Однако, можно принять точку зрения, что u задает структуру действующих на объект управляющих воздействий. В частности, если отображения $A^{(i)},\ i = \overline{0, b}$ линейны, то u играет роль коэффициентов линейного регулятора, подставленного в систему.

Для того, чтобы сформулировать основной результат диссертационной работы, введем следующие обозначения. Обозначим через $\mathcal{D}_{\xi_0}$ множество допустимых процессов управления $z = (\xi, v)$, которые являются парами случайных процессов ξ и векторов $v \in \mathcal{R}^m$, таких что

1. Непрерывный случайный процесс ξ является решением уравнения (0.4) с начальным условием ξ_0 и управлением $u(t) \equiv v$.

2. Выполнено условие

$$\mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty}\|\xi(s)\|^2 ds < +\infty.$$

<u>О п р е д е л е н и е.</u> Вектор v, для которого существует допустимый процесс управления $z = (\xi, v) \in \mathcal{D}_{\xi_0}$, будем называть допустимым.

<u>О п р е д е л е н и е.</u> Вектор v будем называть стабилизирующим, если он является допустимым при любом ξ_0, $\mathbb{E}\|\xi_0\|^2 < +\infty$.

Множество всех стабилизирующих векторов обозначим $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}^m$, а множество соответствующих процессов управления $\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$,

$$\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}} := \{(\xi, v) : (\xi, v) \in \mathcal{D}_{\xi_0},\ v \in \mathcal{V}\}.$$

На множестве $\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$ определим функционал

$$J(z) := J_\infty(u),\ z = (\xi, v),\ u(t) \equiv v. \tag{0.6}$$

Задача оптимальной стабилизации заключается в поиске процесса управления $\overline{z} = (\overline{\xi}, \overline{v}) \in \mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$, который будет минимизировать критерий J на допустимом множестве $\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$

$$J(\overline{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}} J(z). \tag{0.7}$$

Основным результатом диссертационной работы являются следующие необходимые условия оптимальности.

<u>Т е о р е м а.</u> Если процесс управления $z = (\xi, v) \in \mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$ оптимален в задаче (0.4),(0.6), (0.7), то выполнены следующие условия

$$\mathrm{tr}\Big[\Big(M\frac{\partial}{\partial v_i}A^{(0)}(v) + \sum_{j=1}^{b} A^{(j)}(v)^{\mathrm{T}} M \frac{\partial}{\partial v_i}A^{(j)}(v) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v_i}L(v)\Big)P\,\Big] = 0,\ i = \overline{1, m},$$

где неотрицательно определенные матрицы $M \in \mathcal{S}^n$ и $P \in \mathcal{S}^n$ – единственные решения уравнений

$$
\begin{aligned}
&MA^{(0)}(v) + A^{(0)}(v)^{\mathrm{T}}M + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(v)^{\mathrm{T}}MA^{(i)}(v) = -L(v),\\
&PA^{(0)}(v)^{\mathrm{T}} + A^{(0)}(v)P + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(v)PA^{(i)}(v)^{\mathrm{T}} = -P_0,\\
&P_0 := \mathbb{E}\,\xi_0\,\xi_0^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

На основе полученных условий оптимальности в диссертационной работе предложен численный метод синтеза оптимального стабилизирующего вектора v. Из теоремы следует, что оптимальный стабилизирующий вектор зависит от матрицы P_0 вторых начальных моментов случайной величины ξ_0. Данное наблюдение служит отправной точкой для построения алгоритма синтеза субоптимального программного стабилизирующего управления для квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами. Суть предлагаемой в диссертации процедуры синтеза программного управления заключается в периодическом пересчете матрицы вторых начальных моментов текущего состояния системы и оптимального стабилизирующего вектора. Данные результаты содержатся в первой главе диссертации. Во второй главе полученные условия оптимальности и предложенный метод были конкретизированы в задаче оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными шумами при наличии информационных ограничений. В третьей главе получены условия оптимальности в задаче с полной информацией о состоянии.

Фундаментом для используемого в диссертационной работе <u>метода исследования</u> выступает метод функций Ляпунова–Лагранжа, разработанный М. М. Хрусталёвым [31, 32] для решения задачи оптимизации в стохастических дифференциальных играх с неполной информацией.

Данный метод является обобщением метода функций В. Ф. Кротова [123] на стохастические системы. Центральной идеей метода функций Ляпунова–Лагранжа является построение вспомогательного функционала качества управления, который на допустимом множестве совпадает с исходным функционалом качества, но при этом содержит функции, подлежащие определению. Вспомогательный функционал, который строится в методе Ляпунова–Лагранжа, был позднее назван функционалом Лагранжа–Кротова [120, 121]. В соответствии с принципом расширения В. И. Гурмана [123] подбор функций Ляпунова–Лагранжа определенным образом позволяет добиться упрощения решения исходной задачи. В работах [31, 32] предполагалось, что функции Ляпунова–Лагранжа нелинейно зависят от вероятностной меры, и построение вспомогательного функционала качества проводилось при помощи функционального дифференциального уравнения в специально построенном для этого пространстве вероятностных мер. Для целей диссертационной работы оказалось достаточно использования функций Ляпунова–Лагранжа более простого вида и, как следствие, более простого метода построения дополнительного функционала, основанного на формуле Ито. Схожий подход к построению модифицированного функционала качества использовался, например, в работе [114].

Практическая значимость. В диссертационной работе были разработаны новые алгоритмы синтеза оптимальных стратегий управления в задаче оптимальной стабилизации для богатого класса математических моделей, вносящие существенный вклад в арсенал методов оптимизации процессов функционирования сложных технических систем при наличии возмущений и неполноты информации. Был разработан комплекс программ для решения задачи синтеза оптимального управления и произведена его государственная регистрация. С помощью разработанного комплекса программ был решен ряд демонстративных примеров и прикладных задач авиационной и ракетно-космической техники. Также стоит отметить, что полученный алгоритм синтеза субоптимального программного управления отличается простотой и в силу своей структуры позволяет производить расчет в реальном времени.

Достоверность полученных результатов подтверждается математическими доказательствами, численными экспериментами и сравнением полученных результатов с уже существующими. Работа предложенных алгоритмов и программ была проверена на ряде демонстративных примеров и прикладных задач. Приведенные условия оптимальности согласуются с известными результатами в области исследования.

Апробация работы. Ключевые результаты диссертационной работы были получены при поддержке РФФИ (гранты №15-07-09091, №16-08-00472). Основные результаты опубликованы в изданиях из перечня ВАК [124, 125] или входящих в международные наукометрические базы данных [126, 127], опубликованы в других изданиях [128] и были доложены на региональных и международных научных конференциях [126, 127, 129–132]: III Национальный Суперкомпьютерный Форум (Переславль-Залесский, 2014), 14-я Международная конференция «Авиация и космонавтика-2015» (Москва, 2015), 42-я Молодежная научная конференция «Гагаринские чтения-2016» (Москва-2016), 13-я Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2016), 14-я Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2018), XIII Всероссийское совещание по проблемам управления (Москва, 2019). Кроме того имеется свидетельство о регистрации программы для ЭВМ [133].

Личный вклад автора. Все новые научные результаты, изложенные в диссертационной работе, получены лично автором. Работы [125, 127, 132] содержат результаты в задаче оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами, в работах [125, 127] получены необходимые условия оптимальности данной задаче и предложены численные методы синтеза оптимального вектора параметров, в [132] предложен алгоритм синтеза субоптимального программного управления. Результаты по задаче оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными возмущениями при наличии информационных ограничений получены в [125, 126, 131]. Необходимые и одновременно достаточные условия оптимальности в задаче оптимизации процесса подавления случайных возмущений в линейных стохастических системах с мультипликативными возмущениями с полной обратной связью получены в работах [124, 128, 129]. Применения полученных результатов к задачам стабилизации технических систем приведены в работах [124, 128] и были доложены на конференциях [126, 127, 130].

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографического списка из 137 наименований. Работа изложена на 102 страницах машинописного текста и содержит 3 рисунка.

В первой главе формулируются результаты диссертационной работы, посвященные задаче оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами.

Во второй главе получены результаты, связанные с задачей оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными шумами при наличии информационных ограничений.

Третья глава диссертационной работы посвящена задаче оптимизации процесса подавления случайных возмущений в квазилинейных стохастических системах при наличии полной информации о состоянии.

Четвертая глава диссертации содержит описание комплекса программ, разработанного в процессе диссертационного исследования, а также решение ряда прикладных задач авиационной и ракетно-космической техники.

Научные результаты, выносимые на защиту:

1) Выделен и исследован новый класс математических моделей – квазилинейные стохастические системы с управляемыми параметрами. Для математических моделей выделенного класса сформулирована и поставлена задача оптимальной стабилизации [125, 127, 132].

2) В задаче оптимальной стабилизации получены необходимые условия оптимальности:

   а) стабилизирующего вектора в квазилинейных стохастических системах с управляемыми параметрами [125, 127, 132];

   б) линейного стационарного регулятора в линейных стохастических системах с мультипликативными шумами системах при наличии информационных ограничений [125, 126, 131].

3) Разработаны эффективные численные методы градиентного типа для построения:

   а) оптимального стабилизирующего вектора и субоптимального векторного программного управления в задаче оптимальной стабилизации в квазилинейных стохастических системах с управляемыми параметрами [125, 127, 132, 133];

б) оптимального стабилизирующего линейного стационарного регулятора и субоптимального линейного нестационарного регулятора в задаче оптимальной стабилизации в линейных стохастических системах с мультипликативными шумами при наличии информационных ограничений [125, 126, 131].

4) Полученные численные методы реализованы в виде комплекса программ.

5) Получены необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче оптимальной стабилизации в линейных стохастических системах с мультипликативными шумами при наличии полной информации о состоянии [128, 129].

6) Полученные результаты применены для моделирования и решения задач оптимальной стабилизации движения спутника с упругой штангой [130], движения спутника на круговой орбите [124], оптимального сближения двух спутников на круговой орбите [127].

Результаты диссертационной работы соответствуют пп. 1–4 паспорта специальности 05.13.18 и пп. 2, 4, 5 паспорта специальности 05.13.01.

1. Оптимальная стабилизация квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами

В первой главе формулируются результаты диссертационной работы, связанные с задачей оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами.

Раздел 1.1 содержит постановку задачи оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами. Вводятся основные понятия и обозначения, используемые далее в работе. Построению функционала Лагранжа–Кротова для поставленной задачи посвящен раздел 1.2. В разделе 1.3 проводится анализ свойств стабилизирующих векторов для квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами. В §1.4 получены необходимые условия оптимальности в классе стабилизирующих векторов. Раздел 1.5 содержит численную процедуру синтеза оптимального стабилизирующего вектора параметров. Процедура синтеза субоптимального программного управления предложена в §1.6.

1.1. Постановка задачи оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами

Квазилинейные стохастические системы с управляемыми параметрами описываются стохастическими дифференциальными уравнениями Ито вида

$$d\xi(t) = A^{(0)}(u(t))\xi(t)dt + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(u(t))\xi(t)\,d\beta_i(t),\ \xi(0) = \xi_0, \qquad (1.1)$$

где $t \geqslant 0$ – время; ξ – случайный процесс со значениями в $\mathcal{R}^n$; β – стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathcal{R}^b$; $u : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^m$ – программное управление; $A^{(i)} : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^{n\times n},\ i = \overline{0,b}$, – непрерывно-дифференцируемые матричнозначные функции на $\mathcal{R}^m$; ξ_0 – случайный вектор, который не зависит от $\beta(t)$, $t \geq 0$, и удовлетворяет условию $\mathbb{E}\|\xi_0\|^2 < +\infty$.

Обозначим через $\mathcal{D}_{\xi_0}$ множество допустимых процессов управления $z = (\xi, u)$, которые являются парами случайных процессов ξ и функций управления u, таких что

1. Функция u является ограниченной кусочно-непрерывной на каждом конечном интервале времени.

2. Непрерывный случайный процесс ξ является решением уравнения (1.1) с заданными ξ_0 и u.

3. Выполнено условие

$$\mathbb{E}\int_0^{+\infty} \|\xi(s)\|^2 ds < +\infty. \qquad (1.2)$$

<u>О п р е д е л е н и е 1.</u> Управление u, для которого существует допустимый процесс управления $z = (\xi, u) \in \mathcal{D}_{\xi_0}$, будем называть допустимым.

<u>О п р е д е л е н и е 2.</u> Управление u будем называть стабилизирующим, если оно является допустимым при любом ξ_0, $\mathbb{E}\|\xi_0\|^2 < +\infty$.

<u>З а м е ч а н и е 1.</u> Управление u является стабилизирующим тогда и только тогда, когда замкнутая по u система асимптотически устойчива в среднем квадратическом.

На множестве $\mathcal{D}_{\xi_0}$ определим функционал $J : \mathcal{D}_{\xi_0} \to \mathcal{R}$

$$J(z) = \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} \xi(s)^{\mathrm{T}} L(u(s))\xi(s)ds, \tag{1.3}$$

где $L : \mathcal{R}^m \to \mathcal{S}^n$ – дифференцируемая на $\mathcal{R}^m$ матричнозначная функция, такая что $L(v) \succcurlyeq 0$, $v \in \mathcal{R}^m$.

Задача состоит в поиске процесса управления $\overline{z} = (\overline{\xi}, \overline{u}) \in \mathcal{D}_{\xi_0}$, который будет минимизировать критерий (1.3) на $\mathcal{D}_{\xi_0}$

$$J(\overline{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{\xi_0}} J(z). \tag{1.4}$$

1.2. Функционал Лагранжа–Кротова

Следуя методу Ляпунова–Лагранжа [31, 122], построим для данной задачи вспомогательный функционал качества управления. Для этого фиксируем некоторый процесс управления $z = (\xi, u) \in \mathcal{D}_{\xi_0}$. Известно [10, теорема 4.2.1], что для всякой функции $(t, x) \mapsto \varphi(t, x) : \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$, имеющей непрерывные частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = \overline{1, n}$, верна формула Ито

$$\begin{aligned}\varphi(t, \xi(t)) = \varphi(0, \xi_0) + \int\limits_0^t \Big(\tfrac{\partial \varphi}{\partial t}(s, \xi(s)) + \nabla_x \varphi(s, \xi(s))^{\mathrm{T}} A^{(0)}(u(s))\xi(s) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{b} \xi(s)^{\mathrm{T}} A^{(i)}(u(s))^{\mathrm{T}} H_x^{\varphi}(s, \xi(s)) A^{(i)}(u(s))\xi(s)\Big)ds + \\ + \sum_{i=1}^{b} \int\limits_0^t \nabla_x \varphi(s, \xi(s))^{\mathrm{T}} A^{(i)}(u(s))\xi(s)d\beta_i(s),\ t \geqslant 0,\end{aligned} \tag{1.5}$$

где $\nabla_x \varphi(t, x)$ – градиент функции $\varphi(t, \cdot)$, $\nabla_x \varphi := \big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\big)^{\mathrm{T}}$; $H_x^{\varphi}(t, \cdot)$ – матрица Гессе функции $\varphi(t, x)$, $(H_x^{\varphi})_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Применяя данную формулу к $\varphi(t, x) = x^{\mathrm{T}} M x$, $(t, x) \in \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^n$, где $M \in \mathcal{S}^n$, получим равенство

$$\xi(t)^{\mathrm{T}} M \xi(t) = \xi_0^{\mathrm{T}} M \xi_0 + \int\limits_0^t \xi(s)^{\mathrm{T}} \big(M A^{(0)}(u(s)) + A^{(0)}(u(s))^{\mathrm{T}} M + \\ + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(u(s))^{\mathrm{T}} M A^{(i)}(u(s)) \big) \xi(s) ds + \\ + 2 \sum_{i=1}^{b} \int\limits_0^t \xi(s)^{\mathrm{T}} M A^{(i)}(u(s)) \xi(s) d\beta_i(s), \ t \geqslant 0.$$

Возьмем математическое ожидание от левой и правой частей этого равенства. Тогда, учитывая свойства стохастического интеграла Ито [10, теорема 3.2.1], будем иметь

$$\mathbb{E}\Big(\xi(t)^{\mathrm{T}} M \xi(t) \Big) = \mathbb{E}\Big(\xi_0^{\mathrm{T}} M \xi_0 \Big) + \mathbb{E} \int\limits_0^t \xi(s)^{\mathrm{T}} \big(M A^{(0)}(u(s)) + \\ + A^{(0)}(u(s))^{\mathrm{T}} M + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(u(s))^{\mathrm{T}} M A^{(i)}(u(s)) \big) \xi(s) ds, \ t \geqslant 0.$$

Устремляя t к бесконечности, учитывая (1.2), получим

$$\mathbb{E}\Big(\xi_0^{\mathrm{T}} M \xi_0 \Big) + \mathbb{E} \int\limits_0^{+\infty} \xi(s)^{\mathrm{T}} \big(M A^{(0)}(u(s)) + A^{(0)}(u(s))^{\mathrm{T}} M + \\ + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(u(s))^{\mathrm{T}} M A^{(i)}(u(s)) \big) \xi(s) ds = 0. \qquad (1.6)$$

Теперь рассмотрим вспомогательный функционал качества управления $\Gamma : \mathcal{D}_{\xi_0} \to \mathcal{R}$

$$\Gamma(z) := \mathbb{E}\Big(\xi_0^{\mathrm{T}} M \xi_0 \Big) + \mathbb{E} \int\limits_0^{+\infty} \xi(s)^{\mathrm{T}} \big(M A^{(0)}(u(s)) + A^{(0)}(u(s))^{\mathrm{T}} M + \\ + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(u(s))^{\mathrm{T}} M A^{(i)}(u(s)) + L(u(s)) \big) \xi(s) ds.$$

Нетрудно видеть, что, в силу равенства (1.6) и произвольности выбора процесса управления z, выполнено следующее важное свойство

$$\Gamma(z) \equiv J(z), \quad z \in \mathcal{D}_{\xi_0}, \qquad (1.7)$$

которое не зависит от выбора матрицы $M \in \mathcal{S}^n$.

Введем в рассмотрение отображение $H : \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^{n \times n} \to \mathcal{R}^{n \times n}$

$$H(v, M) := M A^{(0)}(v) + A^{(0)}(v)^{\mathrm{T}} M + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(v)^{\mathrm{T}} M A^{(i)}(v) + L(v). \qquad (1.8)$$

При помощи отображения H можно переписать функционал Γ в более компактном виде

$$\Gamma(z) = \mathrm{tr}\big[MP_0\big] + \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} \xi(s)^{\mathrm{T}} H(u(s), M)\xi(s)ds, \tag{1.9}$$

где $P_0 \in \mathcal{R}^{n\times n}$ – матрица вторых начальных моментов вектора ξ_0.

1.3. Стабилизирующий вектор параметров

В данном и следующем разделе будут рассмотрены постоянные по времени стратегии управления $u(t) \equiv v \in \mathcal{R}^m$. При этом будем отождествлять вектор параметров v и соответствующую этому вектору стратегию управления $u(t) \equiv v$ и писать $z = (\xi, v) \in \mathcal{D}_{\xi_0}$. Если соответствующее вектору программное управление является допустимым или стабилизирующим, то вектор будем также называть допустимым или стабилизирующим соответственно. Множество всех стабилизирующих векторов обозначим $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}^m$, а множество соответствующих процессов управления $\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$,

$$\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}} := \{(\xi, v) : (\xi, v) \in \mathcal{D}_{\xi_0},\ v \in \mathcal{V}\}.$$

Позже нам потребуется следующий результат, касающийся стабилизирующих векторов.

Л е м м а 1. Если вектор v является стабилизирующим, то существует неотрицательно определенная матрица $M \in \mathcal{S}^n$, которая является единственным решением уравнения

$$MA^{(0)}(v) + A^{(0)}(v)^{\mathrm{T}}M + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(v)^{\mathrm{T}} MA^{(i)}(v) = -L(v). \tag{1.10}$$

Линейное матричное уравнение (1.10) называют обобщенным уравнением Ляпунова, и оно играет ключевую роль при анализе устойчивости уравнения (1.1). Подробное изучение свойств данного уравнения имеется в монографии [114]. Доказательство леммы 1 приведено в работе [122, стр. 68]. Прямым следствием данной леммы и равенств (1.7), (1.8), (1.9) является следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть имеется процесс управления $z = (\xi, v) \in \mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$. Значение критерия $J(z)$ можно вычислить по формуле

$$J(z) = \mathrm{tr}\big[MP_0\big], \tag{1.11}$$

где неотрицательно определенная матрица $M \in \mathcal{S}^n$ – единственное решение уравнения (1.10).

Теперь покажем, что на множестве $\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$ функционал Γ можно представить в виде функции $\hat{\Gamma}$ от переменной v, дифференцируемой на $\mathcal{V}$. Пусть имеется процесс управления $z = (\xi, u) \in \mathcal{D}_{\xi_0}$. Известно (см., например, [114, стр. 9]), что матрица вторых начальных моментов $P(t)$ случайной величины $\xi(t)$ описывается линейным обыкновенным матричным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = A^{(0)}(u(t))P(t) + P(t)A^{(0)}(u(t))^{\mathrm{T}} + \\ + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(u(t))P(t)A^{(i)}(u(t))^{\mathrm{T}},\ t \geqslant 0,\ P(0) = P_0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Предположим, что $u(t) \equiv v \in \mathcal{R}^m$. Проинтегрируем уравнение (1.12) на интервале $[0, +\infty)$. При этом будем учитывать, что, как следует из (1.2), предел $\|P(t)\|$ при $t \to +\infty$ равен нулю. Получим линейное матричное уравнение

$$-P_0 = \hat{P}A^{(0)}(v)^{\mathrm{T}} + A^{(0)}(v)\hat{P} + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(v)\hat{P}A^{(i)}(v)^{\mathrm{T}}, \tag{1.13}$$

где $\hat{P} := \int\limits_0^{+\infty} P(s)ds$.

Используя симметрическое произведение Кронекера и оператор симметрической векторизации, уравнения (1.12) и (1.13) можно переписать в виде линейных векторных уравнений относительно $\mathrm{svec}\big[P(t)\big]$ и $\mathrm{svec}\big[\hat{P}\big]$

$$\begin{gathered}\mathrm{svec}[\dot{P}(t)] = \Lambda(v)\,\mathrm{svec}\big[P(t)\big],\ t \geqslant 0,\\ \mathrm{svec}[P(0)] = \mathrm{svec}[P_0],\end{gathered} \tag{1.14}$$

$$\Lambda(v)\,\mathrm{svec}\big[\hat{P}\big] = -\mathrm{svec}\big[P_0\big], \tag{1.15}$$

$$\Lambda(v) := \big(2A^{(0)}(v) \otimes_s I + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(v) \otimes_s A^{(i)}(v)\big),$$

где $I \in \mathcal{S}^n$ – единичная матрица. Верны следующие утверждения.

У т в е р ж д е н и е 2. Вектор v является стабилизирующим тогда и только тогда, когда вещественные части собственных чисел матрицы $\Lambda(v)$ строго меньше нуля.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как было отмечено в замечании 1, вектор v является стабилизирующим в том и только в том случае, когда замкнутая система асимптотически устойчива в среднем квадратическом. Как известно (см., например, [114, стр. 11–13]), что система (1.1) асимптотически устойчива в среднем квадратическом, если и только если асимптотически устойчивы матричное дифференциальное уравнение (1.12) или эквивалентная ей система линейных дифференциальных уравнений (1.14). Из теории устойчивости детерминированных систем хорошо известно, что линейная система с постоянными коэффициентами (1.14) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда спектр матрицы системы $\Lambda(v)$ принадлежит левой открытой полуплоскости. □

У т в е р ж д е н и е 3. Множество $\mathcal{V}$ является открытым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из свойств симметрического произведения Кронекера и дифференцируемости отображений $A^{(i)}$, $i = \overline{1,m}$, по v

на $\mathcal{R}^m$ следует, что отображение $\Lambda : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^{\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}}$ также является дифференцируемым по v на $\mathcal{R}^m$. В частности, оно является непрерывным. Из утверждения 2 следует, что при отображении Λ множество $\mathcal{V}$ есть полный прообраз множества асимптотически устойчивых матриц, которое является открытым. Таким образом, множество $\mathcal{V}$ как прообраз открытого множества при непрерывном отображении, является открытым. $\square$

<u>Утверждение 4.</u> Если $v \in \mathcal{V}$, то существует неотрицательно определенная матрица $\hat{P} \in \mathcal{S}^n$, которая является единственным решением уравнения (1.13). При этом $\hat{P}$ можно рассматривать как дифференцируемую функцию от v.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим эквивалентное (1.13) линейное векторное уравнение с постоянными коэффициентами (1.15). Из утверждения 2 следует, что матрица системы не вырождена и, следовательно, существует единственное решение данного уравнения

$$\operatorname{svec}\big[\hat{P}\big] = -\Lambda(v)^{-1} \operatorname{svec}\big[P_0\big]. \tag{1.16}$$

Полученная таким образом матрица $\hat{P}$ будет удовлетворять уравнению (1.13) и по построению является неотрицательно определенной. Поскольку при любом $v \in \mathcal{V}$ определена соответствующая матрица $\hat{P}$, будем далее полагать, что имеется отображение $\hat{P} : \mathcal{V} \to \mathcal{R}^{n\times n}$, которое определяется равенством (1.16). Более того, функция $\hat{P}$ является дифференцируемой функцией на $\mathcal{R}^m$. Действительно, значения частных производных $\dfrac{\partial}{\partial v_i}\hat{P}(v)$, $i = \overline{1,m}$, можно найти из равенств (1.13) или (1.15) как производные неявной функции. Продифференцируем, например, (1.15) по v_i и получим

$$\Big[\frac{\partial}{\partial v_i}\Lambda(v)\Big] \operatorname{svec}\Big[\hat{P}(v)\Big] + \Lambda(v) \operatorname{svec}\Big[\frac{\partial}{\partial v_i}\hat{P}(v)\Big] = 0,$$

откуда

$$\operatorname{svec}\Big[\frac{\partial}{\partial v_i}\hat{P}(v)\Big] = -\Lambda(v)^{-1}\frac{\partial}{\partial v_i}\Lambda(v)\operatorname{svec}\big[\hat{P}(v)\big] = \\ = -\Lambda(v)^{-1}\frac{\partial}{\partial v_i}\Lambda(v)\Lambda(v)^{-1}\operatorname{svec}\big[P_0\big]. \tag{1.17}$$

В постановке задачи указано, что отображения $A^{(i)}$, $i = \overline{0,b}$, непрерывно дифференцируемы на $\mathcal{R}^m$, и из равенства (1.17) следует, что частные производные $\dfrac{\partial}{\partial v_i}\hat{P}$, $i = \overline{1,m}$ также являются непрерывными функциями на множестве $\mathcal{V}$. Таким образом, выполняются достаточные условия дифференцируемости отображения $\hat{P}$ на множестве $\mathcal{V}$. $\square$

Пусть $M \in \mathcal{S}^m$ – некоторая матрица. При помощи интеграла матрицы вторых моментов $\hat{P}(v)$, мы можем представить функционал Γ на множестве $\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$ в следующем виде

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \operatorname{tr}\big[MP_0\big] + \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty}\xi(s)^{\mathrm{T}}H(v,M)\xi(s)ds = \\ &= \operatorname{tr}\big[MP_0\big] + \int\limits_0^{+\infty}\mathbb{E}\operatorname{tr}\big[H(v,M)\xi(s)\xi(s)^{\mathrm{T}}\big]ds = \\ &= \operatorname{tr}\big[MP_0\big] + \operatorname{tr}\Big[H(v,M)\int\limits_0^{+\infty}P(s)ds\Big] = \\ &= \operatorname{tr}\big[MP_0\big] + \operatorname{tr}\big[H(v,M)\hat{P}(v)\big] =: \hat{\Gamma}(v),\ z = (\xi, v).\end{aligned}$$

Таким образом, на множестве $\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$ функционал Γ представим в виде функции $\hat{\Gamma} : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}$, дифференцируемой по v на $\mathcal{V}$. Заметим также, что если v является допустимым вектором, то значение $\hat{\Gamma}(v)$ не зависит от выбора матрицы $M \in \mathcal{S}^n$.

1.4. Необходимые условия оптимальности стабилизирующего вектора параметров

Получены следующие необходимые условия в задаче поиска процесса управления $\overline{z} = (\overline{\xi}, \overline{v}) \in \mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$, который минимизирует критерий (1.3) на суженном множестве допустимых процессов управления $\mathcal{D}^{\mathcal{V}}_{\xi_0}$,

$$J(\overline{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}^{\mathcal{V}}_{\xi_0}} J(z). \tag{1.18}$$

<u>Т е о р е м а 1.</u> Если процесс управления $z = (\xi, v) \in \mathcal{D}^{\mathcal{V}}_{\xi_0}$ оптимален на множестве $\mathcal{D}^{\mathcal{V}}_{\xi_0}$ в задаче (1.1)–(1.3), (1.18), то выполнены следующие условия

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\Big[\Big(M\frac{\partial}{\partial v_i}A^{(0)}(v) + \sum_{j=1}^{b} A^{(j)}(v)^{\mathrm{T}} M \frac{\partial}{\partial v_i} A^{(j)}(v) + &\\ +\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v_i}L(v)\Big)\overline{P}\,\Big] = 0,\ i = \overline{1,m},&\end{aligned} \tag{1.19}$$

где неотрицательно определенные матрицы $M \in \mathcal{S}^n$ и $\overline{P} \in \mathcal{S}^n$ – единственные решения уравнений

$$\begin{aligned}&MA^{(0)}(v) + A^{(0)}(v)^{\mathrm{T}}M + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(v)^{\mathrm{T}} M A^{(i)}(v) = -L(v),\\ &\overline{P}A^{(0)}(v)^{\mathrm{T}} + A^{(0)}(v)\overline{P} + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}(v)\overline{P}A^{(i)}(v)^{\mathrm{T}} = -P_0.\end{aligned} \tag{1.20}$$

<u>Д о к а з а т е л ь с т в о.</u> Пусть имеется допустимый процесс управления $z = (\xi, v) \in \mathcal{D}^{\mathcal{V}}_{\xi_0}$. Из леммы 1 следует, что найдется единственная неотрицательно определенная матрица $M \in \mathcal{S}^n$ удовлетворяющая первому равенству в (1.20). Зафиксируем данную матрицу M. По определению отображения H будет выполнено

$$H(v, M) = 0. \tag{1.21}$$

Ранее было показано, что функционал Γ на множестве $\mathcal{D}^{\mathcal{V}}_{\xi_0}$ можно представить в виде дифференцируемой на $\mathcal{V}$ функции $\hat{\Gamma}$. С учетом (1.21) получим величины частных производных функции $\hat{\Gamma}$ в точке $v \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_i}\hat{\Gamma}(v) = \frac{\partial}{\partial v_i}\mathrm{tr}\big[H(v,M)\hat{P}(v)\big] = \mathrm{tr}\big[\hat{P}(v)\frac{\partial}{\partial v_i}H(v,M) + \\ +H(v,M)\frac{\partial}{\partial v_i}\hat{P}(v)\big] = \mathrm{tr}\big[\hat{P}(v)\frac{\partial}{\partial v_i}H(v,M)\big] = \\ = 2\,\mathrm{tr}\big[\big(M\frac{\partial}{\partial v_i}A^{(0)}(v) + \sum_{j=1}^{b} A^{(j)}(v)^{\mathrm{T}}M\frac{\partial}{\partial v_i}A^{(j)}(v) + \\ +\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v_i}L(v)\big)\hat{P}(v)\big],\ i=\overline{1,m}, \end{aligned} \qquad (1.22)$$

где $\hat{P}(v)$ по определению является решением относительно $\overline{P}$ второго уравнения из (1.20).

Процесс управления $z = (\xi, v) \in \mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$ является точкой минимума функционала Γ на множестве $\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$ тогда и только тогда, когда v является точкой минимума функции $\hat{\Gamma}$ на множестве $\mathcal{V}$. Учитывая то, что $\hat{\Gamma}$ дифференцируема на $\mathcal{V}$, и $\mathcal{V}$ является открытым, для вектора v выполнены необходимые условия экстремума первого порядка, а именно

$$\frac{\partial}{\partial v_i}\hat{\Gamma}(v) = 0,\ i=\overline{1,m}.$$

Вводя обозначение $\overline{P} = \hat{P}(v)$, в совокупности с (1.22) получаем условия (1.19). □

1.5. Численный метод синтеза оптимального стабилизирующего вектора

Выражение (1.22) для частных производных функции $\hat{\Gamma}$ может быть применено для построения следующей процедуры градиентного типа. Пусть имеется процесс управления $z^{(l)} = (\xi^{(l)}, v^{(l)}) \in \mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{V}}$. Тогда мы можем улучшить значение функционала качества выбрав новый вектор $v^{(l+1)}$ по следующей формуле

$$v_i^{(l+1)} = v_i^{(l)} - \theta\,\frac{\partial}{\partial v_i}\hat{\Gamma}(v^{(l)}),\ i=\overline{1,m}, \qquad (1.23)$$

где $\theta > 0$ – достаточно малый шаг.

На основе процедуры (1.23) предлагается следующий алгоритм градиентного типа для синтеза оптимального стабилизирующего вектора параметров:

Ш а г 1. Задать $\theta > 0$ – шаг градиентного метода, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ – требуемые погрешности приближения, $v^{(0)}$ – начальное приближение (стабилизирующий вектор), и положить номер итерации $k = 0$, количество успешных итераций $i = 0$.

Ш а г 2. Численно решить систему матричных уравнений (1.20), положив в них $v = v^{(k)}$.

Ш а г 3. Численно проверить, что полученный вектор является стабилизирующим. Если $k = 0$ и вектор $v^{(k)}$ не является стабилизирующим, то закончить расчёт. Если $k > 0$ и вектор $v^{(k)}$ не является стабилизирующим, то положить $i = 0$, уменьшить θ вдвое, уменьшить k на единицу и перейти к шагу 7. Иначе перейти к шагу 4.

Ш а г 4. Вычислить значение $J(z^{(k)})$ по формуле (1.11). Если $k = 0$, то перейти к шагу 6. Если $J(z^{(k)}) > J(z^{(k-1)})$, то положить $i = 0$, уменьшить θ вдвое, уменьшить k на единицу и перейти к шагу 7. Иначе перейти шагу 5.

Ш а г 5. Если $i = 2$, увеличить θ вдвое, положить $i = 0$.

Ш а г 6. Вычислить $\partial\hat{\Gamma}(v^{(k)})/\partial v_i,\ i = \overline{1, m}$, по формуле (1.22).

Ш а г 7. Вычислить величину $\|\nabla\hat{\Gamma}(v^{(k)})\|$ и проверить выполнение условий $\|\nabla\hat{\Gamma}(v^{(k)})\| < \varepsilon_1, \theta < \varepsilon_2$: если любое из условий выполнено, искомое значение $\overline{v}$ положить равным $v^{(k)}$ и закончить расчет, иначе вычислить $v^{(k+1)}$ по формуле (1.23) и перейти к шагу 7.

Ш а г 8. Увеличить k на единицу и перейти к шагу 2.

1.6. Субоптимальное программное управление

Нахождение оптимального программного управления в задаче (1.1)–(1.4) сопряжено с рядом трудностей, и точного численного алгоритма ее решения не известно. Поэтому привлекательными являются приближенные алгоритмы синтеза субоптимальных программных управлений. Отметим тот факт, что полученные выше в теореме 1 условия содержат матрицу P_0 вторых начальных моментов вектора ξ_0. Этот факт приводит к идее алгоритма синтеза кусочно-постоянного программного управления, основанного на рекуррентном вычислении стабилизирующего вектора, удовлетворяющего условиям теоремы 1. Примером такого алгоритма является следующий.

Ш а г 1. Задать разбиение $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_q < +\infty$ интервала $[0, +\infty)$; $v^{(0)}$ – начальное приближение (стабилизирующий вектор, удовлетворяющий условиям теоремы 1); $\varepsilon > 0$ – параметр алгоритма, отвечающий за условие остановки. Положить номер итерации $k = 0$.

Ш а г 2. Вычислить $P(t_{k+1})$, решая задачу Коши (1.12) на интервале времени $[t_k, t_{k+1}]$ при $u(t) \equiv v^{(k)}$ с начальным условием $P(t_k),\ P(t_0) = P_0$.

Ш а г 3. При помощи предложенной выше процедуры вычислить стабилизирующий вектор $v^{(k+1)}$, удовлетворяющий уравнениям теоремы 1 при $P_0 = P(t_{k+1})$. За начальное приближение алгоритма взять $v^{(k)}$.

Ш а г 4. Проверить выполнение условий $\|P(t_{k+1})\| < \varepsilon$ и $k + 1 < q$. Если не выполнено, то увеличить k на единицу и перейти к шагу 2. Иначе искомую стратегию $u(t)$ положить равной функции вида

$$u(t)=\begin{cases} v^{(0)},\ 0\leqslant t<t_1,\\ v^{(1)},\ t_1\leqslant t<t_2,\\ \dots\\ v^{(k+1)},\ t_{k+1}\leqslant t<+\infty.\end{cases}$$

Полезное свойство данного алгоритма заключается в том, что он является не ухудшающим, то есть каково бы ни было разбиение интервала времени, значение критерия, соответствующее найденному управлению u, будет не хуже, чем соответствующее вектору $v^{(0)}$. Кроме того, данный алгоритм отличается относительной простотой производимых вычислений и является рекуррентным, то есть возможно производить расчет в реальном времени. Среди недостатков стоит отметить тот, что результат работы может значительно зависеть от выбора разбиения интервала времени. При этом вопрос выбора наилучшего разбиения остается открытым.

1.7. Модельный пример

Продемонстрируем применение полученных результатов на модельном примере. Пусть имеется следующая задача оптимальной стабилизации

$$\begin{cases} d\xi_1(t)=2\xi_2(t)dt+\frac{1}{2}\,u(t)\xi_1\ d\beta(t),\ \xi_1(0)=1,\\ d\xi_2(t)=(-\xi_1(t)-u(t)\xi_2)dt,\ \xi_2(0)=1,\end{cases}\qquad t\geqslant 0,$$

$$J(z)=\mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty}\Big((1+u(s)^2)\xi_1^2(s)+\xi_2^2(s)\Big)ds,$$

$$J(\overline{z})=\min_{z\in\mathcal{D}_{\xi_0}}J(z).$$

Данная задача является частным случаем задачи (1.1)–(1.4). Если мы ограничимся рассмотрением только постоянных стратегий управления

$u(t) \equiv v \in \mathcal{R}$, то получим задачу (1.1)–(1.3),(1.18), для которой в разделе §1.4 получены условия оптимальности и градиентная процедура синтеза оптимального регулятора. Найденное при помощи численного метода постоянное управление u, удовлетворяющее условиям теоремы 1, и соответствующее значение критерия равны

$$u \approx 0.6776, \quad J \approx 6.777.$$

Воспользовавшись алгоритмом синтеза субоптимального программного управления, предложенного в разделе 1.6, найдены программная кусочно-постоянная функция управления с одним переключением в момент времени $t_1 = 1.4200$ и значение критерия

$$u(t) = \begin{cases} 0.6776, \ 0 \leqslant t < t_1, \\ 1.2389, \ t_1 \leqslant t < +\infty, \end{cases}, \ J \approx 6.1854.$$

Таким образом, даже используя кусочно-постоянную стратегию управления с одним переключением, удалось значительно улучшить значение критерия.

1.8. Результаты

Сформулирована задача оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами и получены следующие результаты:

1) Получены необходимые условия оптимальности и предложен численный метод синтеза стабилизирующего вектора в задаче оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами.

2) Предложен численный метод синтеза субоптимального программного управления в задаче оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами.

Результаты данной главы были опубликованы в [125, 127, 132].

2. Оптимальная стабилизация линейных стохастических систем с мультипликативными шумами при наличии информационных ограничений

Во второй главе результаты главы 1 применены к задаче оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными шумами при наличии информационных ограничений.

В разделе 2.1 приводится постановка задачи. Раздел 2.2 содержит вывод условий оптимальности в поставленной задаче. В §2.3 получены численные процедуры синтеза оптимальных линейных регуляторов. Решение модельного примера приведено в §2.5.

2.1. Постановка задачи оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными шумами при наличии информационных ограничений

Линейная стохастическая система с мультипликативными шумами описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито следующего вида

$$
\begin{aligned}
d\xi(t) = \Big(A^{(0)}\xi(t) + B^{(0)}u(t,\eta(t))\Big)dt + \\
+ \sum_{i=1}^{b} \Big(A^{(i)}\xi(t) + B^{(i)}u(t,\eta(t))\Big)\, d\beta_i(t),\ \xi(0) = \xi_0,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $t \geqslant 0$ – время; ξ – случайный процесс со значениями в $\mathcal{R}^n$; β – стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathcal{R}^b$; $u : \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^p \to \mathcal{R}^m$ – стратегия управления; $A^{(i)} \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $B^{(i)} \in \mathcal{R}^{n\times m}$, $i = \overline{0,b}$ – постоянные матрицы; $\eta(t) = G\xi(t),\ G \in \mathcal{R}^{p\times n}$, – измеряемый выход системы. Предполагается, что случайный вектор ξ_0 не зависит от $\beta(t), t \geqslant 0$, и удовлетворяет условию $\mathbb{E}\|\xi_0\|^2 < +\infty$.

Для того, чтобы свести задачу к рассмотренной ранее в главе 1, ограничим множество стратегий управления линейными регуляторами $u(t,y) = -U(t)y,\ U(t) \in \mathcal{R}^{m\times p},\ t \geqslant 0$. При этом далее управлением, подлежащим определению, будем считать не u, а U. Заметим, что из описания системы следует, что

$$u(t,\eta(t)) = -U(t)G\xi(t),\ t \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Обозначим через $\mathcal{D}_{\xi_0}$ множество процессов управления $z = (\xi, U)$, которые являются парами случайных процессов ξ и отображений U таких, что

1. Отображение U является ограниченным и кусочно-непрерывным на каждом конечном интервале.

2. При заданной стратегии управления $u(t,y) = -U(t)y$ непрерывный случайный процесс ξ является решением уравнения (2.1) с заданным начальным условием.

3. Выполнено условие (1.2).

На множестве $\mathcal{D}_{\xi_0}$ определим функционал $J : \mathcal{D}_{\xi_0} \to \mathcal{R}$

$$J(z) = \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} \big(\xi(s)^{\mathrm{T}}Q\xi(s) + \xi(s)^{\mathrm{T}}Su(s,\eta(s)) + \\ + u(s,\eta(s))^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}\xi(s) + u(s,\eta(s))^{\mathrm{T}}Eu(s,\eta(s))\big)ds,$$

который с учетом равенства (2.2) принимает вид

$$J(z) = \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} \xi(s)^{\mathrm{T}}\big(Q - SU(s)G - G^{\mathrm{T}}U(s)^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} + \\ + G^{\mathrm{T}}U(s)^{\mathrm{T}}EU(s)G\big)\xi(s)ds, \tag{2.3}$$

где $Q \in \mathcal{S}^n,\ E \in \mathcal{S}^m,\ S \in \mathcal{R}^{n\times m}\ E \succ 0,\ Q \succcurlyeq SE^{-1}S^{\mathrm{T}}$.

Задача состоит в поиске такого процесса управления $\overline{z} = (\overline{\xi}, \overline{U}) \in \mathcal{D}_{\xi_0}$, который минимизирует критерий (2.3) на допустимом множестве

$$J(\overline{z}) = \min_{z\in\mathcal{D}_{\xi_0}} J(z). \tag{2.4}$$

2.2. Необходимые условия оптимальности стабилизирующего линейного стационарного регулятора

Полученная задача (2.1)–(2.4) представляет собой частный случай задачи (1.1)–(1.4), и к ней могут быть применены предложенные условия оптимальности и процедуры улучшения. В роли компонент оптимизируемого управления u здесь выступают координатные функции отображения U. Однако, с учетом линейной структуры данной задачи, полученные условия оптимальности можно конкретизировать и далее улучшить.

Аналогично тому, как это было сделано в главе 1, далее будут рассмотрены постоянные по времени отображения $U(t) \equiv V \in \mathcal{R}^{m\times p}$, мы будем отождествлять матрицы V и соответствующие постоянные по времени отображения $U(t) \equiv V$, и писать $z = (\xi, V) \in \mathcal{D}_{\xi_0}$. Также будем считать, что понятия допустимого и стабилизирующего управления, определения которых даны в разделе 1.1, аналогичным образом применимы к отображениям U и матрицам V. Множество стабилизирующих матриц обозначим $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}^{m\times p}$, а множество соответствующих процессов управления $\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{U}} \subset \mathcal{D}_{\xi_0}$,

$$\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{U}} := \{(\xi, V) : (\xi, V) \in \mathcal{D}_{\xi_0},\ V \in \mathcal{U}\}.$$

Имеют место следующие необходимые условия в задаче поиска процесса управления $\overline{z} = (\overline{\xi}, \overline{V}) \in \mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{U}}$, который минимизирует критерий (2.3) на суженном множестве допустимых процессов управления $\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{U}}$,

$$J(\overline{z}) = \min_{z\in\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{U}}} J(z). \tag{2.5}$$

<u>Т е о р е м а 2.</u> Если процесс управления $z=(\xi,V)\in\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{U}}$ оптимален на множестве $\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{U}}$ в задаче (2.1)–(2.3), (2.5), то выполнено условие

$$\begin{aligned}\Big(\big(E+\sum_{i=1}^{b} B^{(i)^{\mathrm{T}}} M B^{(i)}\big)VG-\sum_{i=1}^{b} B^{(i)^{\mathrm{T}}} M A^{(i)}-&\\ -S^{\mathrm{T}}-B^{(0)^{\mathrm{T}}}M\Big)\overline{P}G^{\mathrm{T}}=0,&\end{aligned} \tag{2.6}$$

где неотрицательно определенные матрицы $M\in\mathcal{S}^n$ и $\overline{P}\in\mathcal{S}^n$ – единственные решения уравнений

$$\begin{aligned}&MA_u^{(0)}(V)+A_u^{(0)}(V)^{\mathrm{T}}M+\sum_{i=1}^{b}A_u^{(i)}(V)^{\mathrm{T}}MA_u^{(i)}(V)=\\&\qquad\qquad=-Q+SVG+G^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}-G^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}EVG,\\&\overline{P}A_u^{(0)}(V)^{\mathrm{T}}+A_u^{(0)}(V)\,\overline{P}+\sum_{i=1}^{b}A_u^{(i)}(V)\,\overline{P}A_u^{(i)}(V)^{\mathrm{T}}=-P_0,\\&A_u^{(i)}(V):=A^{(i)}-B^{(i)}VG,\ V\in\mathcal{R}^{m\times p},\ i=\overline{0,b}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

<u>Д о к а з а т е л ь с т в о.</u> Для доказательства теоремы покажем, что задача (2.1)–(2.4) представляет из себя частный случай рассмотренной ранее в данной работе задачи (1.1)–(1.4), и при этом условия теоремы 2 эквивалентны условиям теоремы 1.

Действительно, рассмотрим отображение $\mathrm{vec}:\mathcal{R}^{m\times p}\to\mathcal{R}^{mp}$,

$$\mathrm{vec}\big[V\big]:=(V_{11},V_{21},\ldots,V_{m1},V_{12},V_{22},\ldots,V_{m2},\ldots,V_{mp})^{\mathrm{T}},\ V\in\mathcal{R}^{m\times p}.$$

Обратное к vec отображение обозначим mat, $\mathrm{mat}:\mathcal{R}^{mp}\to\mathcal{R}^{m\times p}$. Сразу отметим, что отображения vec и mat являются взаимно однозначными и непрерывно-дифференцируемыми всюду на области определения.

Произвольную матрицу $V\in\mathcal{R}^{m\times p}$ можно считать результатом применения оператора mat к некоторому вектору $v\in\mathcal{R}^{mp}$. Если произвести в задаче (2.1)–(2.4) замену $U(t) = \mathrm{mat}[u(t)]$, $t \geqslant 0$, где $u : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}^{mp}$ – ограниченная кусочно-непрерывная на каждом конечном интервале времени функция, мы получаем эквивалентную задачу поиска оптимального управления u, которая является частным случаем задачи (1.1)–(1.4), в которой

$$\begin{aligned} &A^{(i)}(v) = A_u^{(i)}(\mathrm{mat}[v]),\ i = \overline{0, b}, \\ &L(v) = Q - S\,\mathrm{mat}[v]\,G - G^{\mathrm{T}}\mathrm{mat}[v]^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} + \\ &\qquad\qquad + G^{\mathrm{T}}\mathrm{mat}[v]^{\mathrm{T}}E\,\mathrm{mat}[v]\,G,\ v \in \mathcal{R}^{mp}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Нетрудно видеть, что при этом все утверждения, касающиеся допустимых управлений u и векторов v, полученные в разделе 1.3, переносятся и на допустимые отображения U и матрицы V соответственно, с точностью до равенств (2.8). В частности, множество $\mathcal{U}$ как прообраз открытого множества $\mathcal{V}$ при непрерывном отображении vec является открытым. Кроме того, функция $\hat{P}_{\mathcal{U}}(V) := \hat{P}(\mathrm{vec}[V])$, $V \in \mathcal{U}$, как композиция дифференцируемых отображений, является дифференцируемым на $\mathcal{U}$ отображением.

Пусть задана некоторая матрица $M \in \mathcal{S}^n$. Введем в рассмотрение функции $\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}} : \mathcal{R}^{m\times p} \to \mathcal{R}$ и $H_{\mathcal{U}} : \mathcal{R}^{m\times p} \times \mathcal{S}^n \to \mathcal{R}^{n\times n}$

$$\begin{aligned} &\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V) := \mathrm{tr}\big[MP_0\big] + \mathrm{tr}\big[H_{\mathcal{U}}(V, M)\hat{P}_{\mathcal{U}}(V)\big], \\ &H_{\mathcal{U}}(V, M) := MA_u^{(0)}(V) + A_u^{(0)}(V)^{\mathrm{T}}M + \sum_{i=1}^{b} A_u^{(i)}(V)^{\mathrm{T}}MA_u^{(i)}(V) + \\ &\qquad\qquad + Q - SVG - G^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} + G^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}EVG. \end{aligned}$$

Отметим, что с учетом (2.8), выполнено равенство

$$\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V) = \hat{\Gamma}(\mathrm{vec}[V]),\ V \in \mathcal{U}. \tag{2.9}$$

Пусть процесс управления $z = (\xi, V) \in \mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{U}}$ оптимален на множестве $\mathcal{D}_{\xi_0}^{\mathcal{U}}$ в задаче (2.1)–(2.3), (2.5). Из вышесказанного следует, что вектор $v = \mathrm{vec}[V]$ удовлетворяет условиям теоремы 1. С учетом отношений (2.8) условия (1.20) совпадают с условиями (2.7). Пусть далее матрицы M и $\overline{P}$ – неотрицательно определенные симметрические матрицы, удовлетворяющие равенствам (2.7). При этом будет выполнено соотношение

$$H_{\mathcal{U}}(V,M)=0. \tag{2.10}$$

Покажем, что условия (1.19) эквивалентны условиям (2.6). Используя аппарат матричного дифференцирования, с учетом дифференцируемости $\hat{P}_{\mathcal{U}}$ на $\mathcal{U}$ и при помощи тождества (2.10), можно найти градиент функции $\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}$ в точке V,

$$\begin{aligned}\nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V)=\Big(\big(E+\sum_{i=1}^{b}{B^{(i)}}^{\mathrm{T}}MB^{(i)}\big)VG-\\ -\sum_{i=1}^{b}{B^{(i)}}^{\mathrm{T}}MA^{(i)}-S^{\mathrm{T}}-{B^{(0)}}^{\mathrm{T}}M\Big)\hat{P}_{\mathcal{U}}(V)G^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\hat{P}_{\mathcal{U}}(V)=\overline{P}$. Из этого выражения и тождества (2.9) следует, что условия (1.19) и (2.6) совпадают. $\square$

Полученный результат может быть обобщен на задачу оптимальной стабилизации со структурными ограничениями на матрицу регулятора. Пусть задана матрица $C\in\mathcal{R}^{m\times p}$, состоящая из нулей и единиц.

Определение 3. Будем говорить, что матрица $V\in\mathcal{R}^{m\times p}$ удовлетворяет структурным ограничениям, если выполнено условие $\mathrm{tr}\big[C^{\mathrm{T}}V\,\big]=0$. Множество матриц, удовлетворяющих структурным ограничениям, образует подпространство в $\mathcal{R}^{m\times p}$. Обозначим его $\mathcal{L}$.

Множество стабилизирующих матриц, удовлетворяющих структурным ограничениям, обозначим $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}:=\mathcal{U}\bigcap\mathcal{L}$. Будем предполагать, что данное множество не пусто. Множество соответствующих процессов управления обозначим $\mathcal{D}^{\mathcal{G}}_{\xi_0}\subset\mathcal{D}^{\mathcal{U}}_{\xi_0}\subset\mathcal{D}_{\xi_0}$,

$$\mathcal{D}^{\mathcal{G}}_{\xi_0}:=\{(\xi,V):(\xi,V)\in\mathcal{D}^{\mathcal{U}}_{\xi_0},\ V\in\mathcal{G}\}.$$

Докажем следующие необходимые условия в задаче поиска процесса управления $\overline{z} = (\overline{\xi}, \overline{V}) \in \mathcal{D}^{\mathcal{G}}_{\xi_0}$, который минимизирует критерий (2.3) на суженном множестве допустимых процессов управления $\mathcal{D}^{\mathcal{G}}_{\xi_0}$,

$$J(\overline{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}^{\mathcal{G}}_{\xi_0}} J(z). \tag{2.12}$$

<u>Т е о р е м а 3.</u> Если процесс управления $z = (\xi, V) \in \mathcal{D}^{\mathcal{G}}_{\xi_0}$ оптимален на множестве $\mathcal{D}^{\mathcal{G}}_{\xi_0} \subset \mathcal{D}_{\xi_0}$ в задаче (2.1)–(2.3), (2.12), то для всех i, j, таких что $C_{ij} = 0$, выполнены условия

$$\Big(\Big(\big(E + \sum_{i=1}^{b} B^{(i)^{\mathrm{T}}} M B^{(i)}\big) V G - \sum_{i=1}^{b} B^{(i)^{\mathrm{T}}} M A^{(i)} - \\ - S^{\mathrm{T}} - B^{(0)^{\mathrm{T}}} M\Big) \overline{P} G^{\mathrm{T}}\Big)_{ij} = 0,$$

где неотрицательно определенные матрицы $M \in \mathcal{S}^n$ и $\overline{P} \in \mathcal{S}^n$ – единственные решения уравнений (2.7).

<u>Д о к а з а т е л ь с т в о.</u> Множество $\mathcal{G}$ как пересечение открытых множеств является открытым (в подпространстве $\mathcal{L}$), а функция $\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}$ является дифференцируемой на $\mathcal{U} \supset \mathcal{G}$. Условия теоремы 3 в совокупности представляют собой условие равенства нулю проекции на подпространство $\mathcal{L}$ градиента (2.11) функции $\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}$. □

Примером задачи, в которой могут возникнуть структурные ограничения на матрицу регулятора, является задача с информационными ограничениями общего вида. Действительно, пусть заданы числа $p_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = p$. Определим матрицу $C \in \mathcal{R}^{m \times p}$ следующим образом

$$C_{ij} = \begin{cases} 0, \ \sum_{r=1}^{i-1} p_r < j \le \sum_{r=1}^{i} p_r, \\ 1, \ \text{иначе}. \end{cases}$$

При этом подпространство $\mathcal{L}$, которое согласно определению 3 задается матрицей C, состоит из матриц $V \in \mathcal{R}^{m \times p}$, которые можно представить в виде блочной матрицы следующим образом

$$V = \begin{pmatrix} V^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V^{(m)} \end{pmatrix}, \ V^{(i)} \in \mathcal{R}^{1\times p_i}.$$

На содержательном уровне данные информационные ограничения заключаются в том, что каждая компонента управления зависит от своего вектора выхода,

$$u(\eta(t)) = \big(u_1(\eta^{(1)}(t)), \dots, u_m(\eta^{(m)}(t))\big)^{\mathrm{T}},$$

где $u_i : \mathcal{R}^{p_i} \to \mathcal{R}$; $\eta^{(i)}(t) = G_i\xi(t)$, $G_i \in \mathcal{R}^{p_i\times n}$, $i = \overline{1,m}$. Для решения поставленной задачи можно воспользоваться теоремой 3.

2.3. Численный метод синтеза оптимального стабилизирующего линейного стационарного регулятора

Обозначим $\mathrm{pr}[\nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V)]$ ортогональную проекцию градиента функции $\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}$ в точке V на подпространство $\mathcal{L}$,

$$\mathrm{pr}[\nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V)] = \nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V) - C \circ \nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V), \tag{2.13}$$

где $A \circ B \in \mathcal{R}^{m\times p}$ обозначает поэлементное произведение матриц (произведение Адамара). Используя полученные условия оптимальности и выражение для проекции градиента (2.13), сформулируем следующую процедуру градиентного типа. Пусть имеется процесс управления $z^{(l)} = (\xi^{(l)}, V^{(l)}) \in \mathcal{D}^{\mathcal{U}}_{\xi_0}$. Тогда мы можем улучшить значение функционала качества, выбрав новую матрицу $V^{(l+1)}$ по следующей формуле

$$V^{(l+1)} = V^{(l)} - \theta\ \mathrm{pr}[\nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V^{(l)})] - \gamma\, C \circ V^{(l)}, \tag{2.14}$$

где $\theta > 0,\ \gamma > 0$ достаточно малы. Здесь проекция градиента обеспечивает движение вдоль структурных ограничений, а дополнительное слагаемое обеспечивает сходимость к подпространству $\mathcal{L}$. Такая процедура улучшения имеет существенное преимущество в том, что начальное приближение $V^{(l)}$ может не принадлежать $\mathcal{L}$. Более того, начальным приближением для численного метода на основе данной процедуры может служить управление с полной обратной связью, что существенно упрощает процедуру подбора начального приближения.

На основе процедуры (2.14) предлагается следующий алгоритм градиентного типа для синтеза оптимального стабилизирующего стационарного линейного регулятора:

Ш а г 1. Задать $\theta > 0,\ \gamma > 0$ – параметры шага градиентного метода, $\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0$ – требуемые погрешности приближения, $V^{(0)}$ – начальное приближение (стабилизирующая матрица регулятора), и положить номер итерации $k = 0$, количество успешных итераций $i = 0$.

Ш а г 2. Численно решить систему матричных уравнений (2.7), положив в них $V = V^{(k)}$.

Ш а г 3. Численно проверить, что полученная матрица регулятора является стабилизирующей. Если $k = 0$ и матрица $V^{(k)}$ не является стабилизирующей, то закончить расчёт. Если $k > 0$ и матрица $V^{(k)}$ не является стабилизирующей, то положить $i = 0$, уменьшить θ и γ вдвое, уменьшить k на единицу и перейти к шагу 7. Иначе перейти к шагу 4.

Ш а г 4. Вычислить значение $J(z^{(k)})$ по формуле (1.11). Если $k = 0$, то перейти к шагу 6. Если $J(z^{(k)}) > J(z^{(k-1)})$, то положить $i = 0$, уменьшить θ и γ вдвое, уменьшить k на единицу и перейти к шагу 7. Иначе перейти шагу 5.

Ш а г 5. Если $i = 2$, увеличить θ и γ вдвое, положить $i = 0$.

Ш а г 6. Вычислить $\nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V^{(k)})$, по формуле (2.11).

Ш а г 7. Вычислить величину $\|\nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V^{(k)})\|$ и проверить выполнение условий $\|\nabla\hat{\Gamma}_{\mathcal{U}}(V^{(k)})\| < \varepsilon_1$, $\theta < \varepsilon_2$: если любое из условий выполнено, искомую матрицу регулятора положить равной $\overline{V}$ положить равным $V^{(k)}$ и закончить расчет, иначе вычислить $V^{(k+1)}$ по формуле (2.14) и перейти к шагу 7.

Ш а г 8. Увеличить k на единицу и перейти к шагу 2.

2.4. Субоптимальный линейный нестационарный регулятор

Для задач со структурными и информационными ограничениями, так же как это было сделано ранее в диссертационной работе, можно построить субоптимальное программное управление. Алгоритм построения по своей структуре полностью совпадает с предложенным ранее в главе 1:

Ш а г 1. Задать разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_q < +\infty$ интервала $[0, +\infty)$; $V^{(0)}$ – начальное приближение (стабилизирующая матрица регулятора, удовлетворяющая условиям теоремы 3); $\varepsilon > 0$ – параметр алгоритма, отвечающий за условие остановки. Положить номер итерации $k = 0$.

Ш а г 2. Вычислить $P(t_{k+1})$, решая задачу Коши (1.12) на интервале времени $[t_k, t_{k+1}]$ при $u(t) \equiv \mathrm{vec}[V^{(k)}]$ с начальным условием $P(t_k)$, $P(t_0) = P_0$ и учетом соотношений (2.8).

Ш а г 3. При помощи предложенной выше процедуры вычислить стабилизирующую матрицу $V^{(k+1)}$, удовлетворяющую условиям теоремы 3 при $P_0 = P(t_{k+1})$. За начальное приближение алгоритма взять $V^{(k)}$.

Ш а г 4. Проверить выполнение условий $\|P(t_{k+1})\| < \varepsilon$ и $k + 1 < q$. Если не выполнено, то увеличить k на единицу и перейти к шагу 2. Иначе искомую матрицу регулятора $U(t)$ положить равной функции вида

$$U(t) = \begin{cases} V^{(0)},\ 0 \leqslant t < t_1, \\ V^{(1)},\ t_1 \leqslant t < t_2, \\ \dots \\ V^{(k+1)},\ t_{k+1} \leqslant t < +\infty. \end{cases}$$

2.5. Модельный пример

Продемонстрируем полученные результаты на модельном примере. Пусть имеется следующая задача оптимальной стабилизации

$$\begin{cases} d\xi_1(t) = -\xi_2(t)dt, \\ d\xi_2(t) = (\xi_3(t) + u(t,\eta(t)))dt, \\ d\xi_3(t) = (\xi_1(t) + \xi_2(t) - 2\,\xi_3(t))dt + \frac{1}{2}\xi_2(t)d\beta(t), \\ \eta(t) = G\xi(t),\ G \in \mathcal{R}^{p\times 3},\ t \geqslant 0,\ \xi(0) = \xi_0,\ \mathbb{E}\xi_0\xi_0^{\mathrm{T}} = I, \end{cases}$$

$$J(z) = \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty}\Big(\|\xi(s)\|^2 + u(s,\eta(s))^2\Big)ds,\ J(\overline{z}) = \min_{z\in\mathcal{D}_{\xi_0}} J(z).$$

Постулируя линейную структуру стратегии управления $u : \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^p \to \mathcal{R}$, данная задача становится частным случаем задачи (2.1)–(2.4). Если мы ограничимся рассмотрением только стабилизирующих линейных стационарных регуляторов $u(t,\eta(t)) = -V\eta(t)$, то получим задачу (2.1)–(2.3),(2.5), для которой в разделах 2.2–2.3 получены условия оптимальности и градиентная процедура синтеза оптимального регулятора.

Сначала будем полагать, что имеется полная информация о состоянии системы (т.е. $p = 3$ и G – единичная матрица). Численно найденная матрица V стабилизирующего линейного стационарного регулятора, удовлетворяющая условиям теоремы 2, и соответствующее ему значение критерия равны

$$V \approx \Big(-1.033,\ 2.102,\ 0.617 \Big), \quad J \approx 5.387.$$

Пусть теперь $p = 1$ и $G = \big(1,\ -1\big)$, т.е. измеряется разность первых двух компонент вектора состояния системы. Тогда численно найденные коэффициент регулятора и соответствующее значение критерия равны

$$V \approx -2.279, \quad J \approx 7.095.$$

Наконец, воспользовавшись алгоритмом синтеза субоптимального линейного нестационарного регулятора, предложенного в разделе 2.4, найдены кусочно-постоянная матрица регулятора $U(t)$ с одним переключением в момент времени $t_1 = 2$ и соответствующее значение критерия

$$U(t) = \begin{cases} -2.279,\ 0 \leqslant t < t_1, \\ -4.025,\ t_1 \leqslant t < +\infty, \end{cases}, \ J \approx 6.857.$$

Таким образом, даже используя кусочно-постоянную стратегию управления с одним переключением, удалось существенно улучшить значение критерия.

2.6. Результаты

Сформулирована задача оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными шумами при наличии информационных ограничений и получены следующие результаты:

1) Получены необходимые условия оптимальности и предложен численный метод синтеза стабилизирующего линейного стационарного регулятора в задаче оптимальной стабилизации линейных стохастических

систем с мультипликативными шумами при наличии информационных ограничений.

2) Предложен численный метод синтеза субоптимального нестационарного линейного регулятора в задаче оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными шумами при наличии информационных ограничений.

3) В модельном примере получен линейный нестационарный регулятор, который обеспечивает значение критерия качества управления меньше, чем любой стационарный стабилизирующий регулятор.

Результаты данной главы были опубликованы в [125, 126, 131].

3. Оптимальная стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными шумами и полной обратной связью

В главе 3 рассматривается задача оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными шумами при наличии полной информации о состоянии. Раздел 3.1 содержит постановку задачи. В §3.2 происходит построение функционала Лагранжа–Кротова для поставленной задачи. В разделе 3.3 формулируются и доказываются необходимые и одновременно достаточные условия оптимальности в данной задаче.

3.1. Постановка задачи оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными шумами и полной обратной связью

Рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$\begin{aligned} d\xi(t) = \Big(A^{(0)}\xi(t) + B^{(0)}u(t,\xi(t))\Big)dt + \\ + \sum_{i=1}^{b}\Big(A^{(i)}\xi(t) + B^{(i)}u(t,\xi(t))\Big)\, d\beta_i(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $t \geqslant 0$ – время; ξ – случайный процесс со значениями в $\mathcal{R}^n$; β – стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathcal{R}^b$; $u : \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ – измеримая по Борелю стратегия управления; $A^{(i)} \in \mathcal{R}^{n\times n}, B^{(i)} \in \mathcal{R}^{n\times m},\ i = \overline{0,b}$ – постоянные матрицы.

Обозначим через $\mathcal{D}_{\mathbf{P}_0}$ множество процессов управления $z = (\xi, u)$, которые являются парами случайных процессов ξ и стратегий управления u таких, что

1. При заданной стратегии управления u непрерывный случайный процесс ξ является слабым решением [10, раздел 5.3] уравнения (3.1) с начальным условием

$$\mathbf{P}_{\xi(0)} = \mathbf{P}_0, \tag{3.2}$$

где $\mathbf{P}_{\xi(0)}$ обозначает распределение случайного вектора $\xi(0)$, а $\mathbf{P}_0$ – борелевская вероятностная мера на $\mathcal{R}^n$, удовлетворяющая условию $\int_{\mathcal{R}^n} \|x\|^4 \mathbf{P}_0(dx) < +\infty$. Предполагается, что $\xi(0)$ не зависит от $\beta(t)$, $t \geqslant 0$;

2. Выполнены условия:

$$\mathbb{E}\int_0^t \|\xi(s)\|^4 ds < +\infty, \quad \mathbb{E}\int_0^t \|u(s, \xi(s))\|^4 ds < +\infty, \quad t \geqslant 0, \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered} \mathbb{E}\int_0^{+\infty} \Big(\|\xi(s)\|^2 + \|u(s,\xi(s))\|^2\Big) ds < +\infty, \\ \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\|\xi(t)\|^2 = 0, \end{gathered} \tag{3.4}$$

(здесь и далее математическое ожидание берется в вероятностном пространстве, связанном с z).

<u>З а м е ч а н и е 2.</u> Здесь подразумевается, что вместе с каждым отдельно взятым процессом управления z имеется полное фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$, на котором заданы непрерывный случайный процесс $\xi : \mathcal{R}_+ \times \Omega \to \mathcal{R}^n$, согласованный с потоком $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, и стандартный винеровский процесс $\beta : \mathcal{R}_+ \times \Omega \to \mathcal{R}^b$, являющийся мартингалом относительно потока $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, такие, что выполнено начальное условие (3.2) и п.н. для всех $t \geqslant 0$ выполняется равен-

ство (3.1). При этом под процессом управления правильно понимать кортеж $z = ((\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P}), (\beta(t), \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, (\xi(t), \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, u)$. С целью упростить обозначения далее не будем указывать данные подробности.

З а м е ч а н и е 3. Как известно, условия существования слабых решений стохастического дифференциального уравнения являются более мягкими, чем для существования сильных решений. С этой точки зрения рассмотрение слабых решений позволяет охватить более широкий класс допустимых стратегий управления. Однако представленные в данной работе результаты остаются верны, если ограничить множество допустимых стратегий управления таким образом, чтобы стохастическое дифференциальное уравнение имело сильные решения.

З а м е ч а н и е 4. Известно, что если неуправляемая стохастическая система асимптотически устойчива в среднем квадратическом, то она экспоненциально устойчива в среднем квадратическом. Поэтому если линейный стационарный регулятор $u(t,x) = -Vx$ обеспечивает асимптотическую устойчивость в среднем квадратическом системы (3.1), то условия (3.3) и (3.4) выполнены автоматически для любого процесса управления $z = (\xi, u)$, удовлетворяющего условию 1.

Пусть $\mathcal{M}$ – множество борелевских вероятностных мер $\mathbf{P}_0$ на $\mathcal{R}^n$, для которых выполнено условие $\int_{\mathcal{R}^n} \|x\|^4 \mathbf{P}_0(dx) < +\infty$, а $\mathcal{D} := \bigcup\limits_{\mathbf{P}_0\in\mathcal{M}} \mathcal{D}_{\mathbf{P}_0}$. На множестве $\mathcal{D}$ зададим функционал качества управления $J : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$,

$$\begin{aligned} J(z) = \mathbb{E} \int\limits_0^{+\infty} \Big(&\xi(s)^{\mathrm{T}} Q \xi(s) + \xi(s)^{\mathrm{T}} S u(s,\xi(s)) + \\ &+ u(s,\xi(s))^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} \xi(s) + u(s,\xi(s))^{\mathrm{T}} E u(s,\xi(s)) \Big) ds, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $Q \in \mathcal{R}^n,\ E \in \mathcal{S}^m,\ S \in \mathcal{R}^{n\times m},\ E \succ 0,\ Q \succcurlyeq SE^{-1}S^{\mathrm{T}}$.

О п р е д е л е н и е 4. Стратегию управления u будем называть стабилизирующей, если при любом начальном распределении $\mathbf{P}_0 \in \mathcal{M}$ существует процесс управления $z = (\xi, u) \in \mathcal{D}_{\mathbf{P}_0}$.

Задача оптимальной стабилизации системы (3.1) состоит в поиске такой стабилизирующей стратегии управления $\overline{u}$, что при любом фиксированном начальном распределении $\mathbf{P}_0 \in \mathcal{M}$ процесс управления $\overline{z} = (\overline{\xi}, \overline{u}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{P}_0}$ минимизирует критерий (3.5), т.е.

$$J(\overline{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{\mathbf{P}_0}} J(z). \tag{3.6}$$

Такую стратегию управления $\overline{u}$ будем называть оптимальной.

3.2. Функционал Лагранжа–Кротова

Аналогично тому, как это было сделано в разделе §1.2, построим функционал Лагранжа–Кротова для данной задачи. Применяя формулу Ито к функции $\varphi(t, x) = x^{\mathrm{T}} M x$, где $M \in \mathcal{S}^n$, получим равенство

$$\begin{aligned} \xi(0)^{\mathrm{T}} M \xi(0) + \int_0^t \Big(2\,\xi(s)^{\mathrm{T}} M \big(A^{(0)} \xi(s) + B^{(0)} u(s, \xi(s)) \big) + \\ + \sum_{i=1}^b \big(A^{(i)} \xi(s) + B^{(i)} u(s, \xi(s)) \big)^{\mathrm{T}} M \big(A^{(i)} \xi(s) + B^{(i)} u(s, \xi(s)) \big) \Big) ds + \\ + 2 \sum_{i=1}^b \int_0^t \Big(\xi(s)^{\mathrm{T}} M \big(A^{(i)} \xi(s) + B^{(i)} u(s, \xi(s)) \big) \Big) d\beta_i(s) = \xi(t)^{\mathrm{T}} M \xi(t). \end{aligned}$$

Возьмем математическое ожидание от левой и правой частей этого равенства. Тогда, учитывая свойства [10, теорема 3.2.1] стохастического интеграла Ито и требования (3.3), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big(\xi(0)^{\mathrm{T}} M \xi(0) \Big) + \mathbb{E} \int_0^t \Big(2\,\xi(s)^{\mathrm{T}} M \big(A^{(0)} \xi(s) + B^{(0)} u(s, \xi(s)) \big) + \\ + \sum_{i=1}^b \big(A^{(i)} \xi(s) + B^{(i)} u(s, \xi(s)) \big)^{\mathrm{T}} M \big(A^{(i)} \xi(s) + B^{(i)} u(s, \xi(s)) \big) \Big) ds = \\ = \mathbb{E}\Big(\xi(t)^{\mathrm{T}} M \xi(t) \Big). \end{aligned}$$

Устремляя t к бесконечности, с учетом (3.3) и (3.4) получим

$$\mathbb{E}\Big(\xi(0)^{\mathrm{T}}M\xi(0)\Big)+\mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty}\Big(2\,\xi(s)^{\mathrm{T}}M\big(A^{(0)}\xi(s)+B^{(0)}u(s,\xi(s))\big)+ \\ +\sum_{i=1}^{b}\big(A^{(i)}\xi(s)+B^{(i)}u(s,\xi(s))\big)^{\mathrm{T}}M\big(A^{(i)}\xi(s)+B^{(i)}u(s,\xi(s))\big)\Big)ds=0. \tag{3.7}$$

Теперь рассмотрим вспомогательный функционал $\Gamma:\mathcal{D}\to\mathcal{R}$:

$$\Gamma(z):=\mathbb{E}\Big(\xi(0)^{\mathrm{T}}M\xi(0)\Big)+\mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty}\Big(2\,\xi(s)^{\mathrm{T}}M\big(A^{(0)}\xi(s)+B^{(0)}u(s,\xi(s))\big)+ \\ +\sum_{i=1}^{b}\big(A^{(i)}\xi(s)+B^{(i)}u(s,\xi(s))\big)^{\mathrm{T}}M\big(A^{(i)}\xi(s)+B^{(i)}u(s,\xi(s))\big)+ \\ +\xi(s)^{\mathrm{T}}Q\xi(s)+\xi(s)^{\mathrm{T}}Su(s,\xi(s))+u(s,\xi(s))^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}\xi(s)+ \\ +u(s,\xi(s))^{\mathrm{T}}Eu(s,\xi(s))\Big)ds.$$

Нетрудно видеть, что в силу равенства (3.7) и произвольности выбора процесса управления z выполнено важное свойство

$$\Gamma(z)\equiv J(z),\quad z\in\mathcal{D}, \tag{3.8}$$

которое не зависит от выбора матрицы M.

Введем в рассмотрение функцию $h:\mathcal{R}^n\times\mathcal{R}^m\times\mathcal{R}^{n\times n}\to\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} h(x,u,M):=\ & x^{\mathrm{T}}(MA^{(0)}+{A^{(0)}}^{\mathrm{T}}M+\sum_{i=1}^{b}{A^{(i)}}^{\mathrm{T}}MA^{(i)}+Q)x+ \\ & +x^{\mathrm{T}}(MB^{(0)}+\sum_{i=1}^{b}{A^{(i)}}^{\mathrm{T}}MB^{(i)}+S)u+ \\ & +u^{\mathrm{T}}({B^{(0)}}^{\mathrm{T}}M+\sum_{i=1}^{b}{B^{(i)}}^{\mathrm{T}}MA^{(i)}+S^{\mathrm{T}})x+ \\ & +u^{\mathrm{T}}(E+\sum_{i=1}^{b}{B^{(i)}}^{\mathrm{T}}MB^{(i)})u. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Сразу же отметим, что при фиксированной матрице $M\in\mathcal{R}^{n\times n}$ функция $h(\cdot,\cdot,M)$ является линейно-квадратичной функцией по совокупности переменных $(x,u)\in\mathcal{R}^n\times\mathcal{R}^m$. При помощи функции h можно переписать функционал Γ в более компактном виде

$$\Gamma(z) = \operatorname{tr}\bigl[MP_0\bigr] + \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} h(\xi(s), u(s,\xi(s)), M)ds, \tag{3.10}$$

где $P_0 \in \mathcal{S}^n$ – матрица вторых начальных моментов вектора ξ_0.

3.3. Необходимые и достаточные условия оптимальности линейного стационарного регулятора

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы стабилизирующий линейный стационарный регулятор $\overline{u}(t,x) = -\overline{V}x$ был оптимальной стратегией, необходимо и достаточно существование неотрицательно определенной симметрической матрицы $\overline{M}$, удовлетворяющей условиям:

$$\begin{aligned}&\overline{M}A_{\overline{u}}^{(0)} + A_{\overline{u}}^{(0)\mathrm{T}}\overline{M} + \sum_{i=1}^{b} A_{\overline{u}}^{(i)\mathrm{T}}\overline{M}A_{\overline{u}}^{(i)} + \\ &\qquad\qquad + Q - S\overline{V} - \overline{V}^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} + \overline{V}^{\mathrm{T}}E\overline{V} = 0,\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\overline{V} = \Bigl(E + \sum_{i=1}^{b} B^{(i)\mathrm{T}}\overline{M}B^{(i)}\Bigr)^{-1}\Bigl(B^{(0)\mathrm{T}}\overline{M} + \sum_{i=1}^{b} B^{(i)\mathrm{T}}\overline{M}A^{(i)} + S^{\mathrm{T}}\Bigr), \tag{3.12}$$

где $A_{\overline{u}}^{(i)} = A^{(i)} - B^{(i)}\overline{V},\ i = \overline{0,b}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M – произвольная неотрицательно определенная симметрическая матрица. Тогда функцию h можно переписать в виде

$$\begin{aligned}h(x,u,M) &= (u + R(M)x)^{\mathrm{T}}(E + \sum_{i=1}^{b} B^{(i)\mathrm{T}}MB^{(i)})(u + R(M)x) + \\ &+ x^{\mathrm{T}}\bigl(MA^{(0)} + A^{(0)\mathrm{T}}M + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)\mathrm{T}}MA^{(i)} + \\ &+ Q - R(M)^{\mathrm{T}}(E + \sum_{i=1}^{b} B^{(i)\mathrm{T}}MB^{(i)})R(M)\bigr)x,\end{aligned} \tag{3.13}$$

где $R(M) := \bigl(E+\sum_{i=1}^{b} B^{(i)\mathrm{T}}MB^{(i)}\bigr)^{-1}\bigl(B^{(0)\mathrm{T}}M+\sum_{i=1}^{b} B^{(i)\mathrm{T}}MA^{(i)}+S^{\mathrm{T}}\bigr)$. С другой стороны, верно равенство

$$
\begin{aligned}
h(x,\overline{u}(t,x),M) = x^{\mathrm{T}}(MA_{\overline{u}}^{(0)} + {A_{\overline{u}}^{(0)}}^{\mathrm{T}}M + \sum_{i=1}^{b} {A_{\overline{u}}^{(i)}}^{\mathrm{T}} M A_{\overline{u}}^{(i)} + \\
+Q - S\overline{V} - \overline{V}^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} + \overline{V}^{\mathrm{T}} E \overline{V})x.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Из равенств (3.13), (3.14) можно видеть, что условия (3.11), (3.12) равносильны условиям

$$
h(x,\overline{u}(t,x),\overline{M}) \equiv 0, \tag{3.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{M}A^{(0)} + {A^{(0)}}^{\mathrm{T}}\overline{M} + \sum_{i=1}^{b} {A^{(i)}}^{\mathrm{T}} \overline{M} A^{(i)} + \\
+Q - R(\overline{M})^{\mathrm{T}}\Big(E + \sum_{i=1}^{b} {B^{(i)}}^{\mathrm{T}}\overline{M}B^{(i)}\Big)R(\overline{M}) = 0,
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

и, в частности, условие (3.11) равносильно (3.15).

Пусть теперь условия (3.11) и (3.12) выполнены. Докажем, что в этом случае стратегия управления $\overline{u}(t,x)$ является оптимальной. Для этого фиксируем начальное распределение $\mathbf{P}_0 \in \mathcal{M}$ и покажем, что процесс управления $\overline{z} = (\overline{\xi},\overline{u}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{P}_0}$ минимизирует критерий, т.е. для любого процесса управления $\widetilde{z} = (\widetilde{\xi},\widetilde{u}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{P}_0}$ верно неравенство

$$
J(\widetilde{z}) - J(\overline{z}) \geqslant 0.
$$

Используя свойство (3.8), выражение (3.10) для функционала Γ и учитывая (3.15), (3.16), получим, что

$$
\begin{aligned}
J(\widetilde{z}) - J(\overline{z}) = \Gamma(\widetilde{z}) - \Gamma(\overline{z}) = \mathrm{tr}\big[\overline{M}P_0\big] + \mathbb{E}\int_0^{+\infty} h(\widetilde{\xi}(s),\widetilde{u}(s,\widetilde{\xi}(s)),\overline{M})ds - \\
-\mathrm{tr}\big[\overline{M}P_0\big] - \mathbb{E}\int_0^{+\infty} h(\overline{\xi}(s),\overline{u}(s,\overline{\xi}(s)),\overline{M})ds = \\
= \mathbb{E}\int_0^{+\infty} h(\widetilde{\xi}(s),\widetilde{u}(s,\widetilde{\xi}(s)),\overline{M})ds = \\
= \mathbb{E}\int_0^{+\infty} \big(\widetilde{u}(s,\widetilde{\xi}(s)) + R(\overline{M})\widetilde{\xi}(s)\big)^{\mathrm{T}}\Big(E + \sum_{i=1}^{b} {B^{(i)}}^{\mathrm{T}}\overline{M}B^{(i)}\Big)\cdot \\
\cdot\big(\widetilde{u}(s,\widetilde{\xi}(s)) + R(\overline{M})\widetilde{\xi}(s)\big)ds \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Последнее неравенство верно, так как функция под интегралом является квадратичной формой, и матрица $E + \sum_{i=1}^{b} B^{(i)^{\mathrm{T}}} \overline{M} B^{(i)}$ этой формы положительно определена. В силу произвольности выбора $\mathbf{P}_0$ полученное неравенство верно вне зависимости от начального распределения, и, следовательно, стратегия управления $\overline{u}$ является оптимальной.

Пусть стабилизирующий регулятор $\overline{u}(t,x) = -\overline{V}x$ оптимален. Из леммы 1 следует, что для данного регулятора существует единственная неотрицательно определенная симметрическая матрица $\overline{M}$, которая является решением уравнения (3.11) и при этом обеспечивает выполнение тождества (3.15). Осталось показать, что имеет место равенство (3.12).

Предположим, что условие (3.12) не выполнено. Тогда построим новую стратегию управления

$$\widetilde{u}(t,x) = \begin{cases} -\widetilde{V}x, & 0 \leqslant t < t^*, \\ -\overline{V}x, & t \geqslant t^*, \end{cases}$$

где $t^* > 0$ – некоторый фиксированный момент времени, матрица $\widetilde{V}$ выбрана из условия (3.12) и имеет вид

$$\widetilde{V} = \Big(E + \sum_{i=1}^{b} B^{(i)^{\mathrm{T}}} \overline{M} B^{(i)}\Big)^{-1} \Big(B^{(0)^{\mathrm{T}}} \overline{M} + \sum_{i=1}^{b} B^{(i)^{\mathrm{T}}} \overline{M} A^{(i)} + S^{\mathrm{T}}\Big).$$

Матрица $\widetilde{V}$ существует в силу того, что $\overline{M}$ является неотрицательно определенной матрицей, а E – положительно определенная матрица. Заметим, что в силу стационарности системы (3.1) линейный регулятор $\widetilde{u}$ также будет стабилизирующим.

Используя равенство (3.13) и тождество (3.15), получим следующие соотношения для функции h:

$$h(x,\widetilde{u}(t,x),\overline{M}) = \begin{cases} x^{\mathrm{T}}\Big(\overline{M}A^{(0)} + A^{(0)}{}^{\mathrm{T}}\overline{M} + \sum\limits_{i=1}^{b} A^{(i)}{}^{\mathrm{T}}\overline{M}A^{(i)} + Q- \\ \quad -R(\overline{M})^{\mathrm{T}}\Big(E + \sum\limits_{i=1}^{b} B^{(i)}{}^{\mathrm{T}}\overline{M}B^{(i)}\Big)R(\overline{M})\Big)x,\ 0 \leqslant t < t^*, \\ 0,\ t \geqslant t^*, \end{cases}$$

$$h(x,\overline{u}(t,x),\overline{M}) = x^{\mathrm{T}}\big(R(\overline{M}) - \overline{V}\big)^{\mathrm{T}}\Big(E + \sum_{i=1}^{b} B^{(i)}{}^{\mathrm{T}}\overline{M}B^{(i)}\Big)\big(R(\overline{M}) - \overline{V}\big)x+$$
$$+x^{\mathrm{T}}\Big(\overline{M}A^{(0)} + A^{(0)}{}^{\mathrm{T}}\overline{M} + \sum_{i=1}^{b} A^{(i)}{}^{\mathrm{T}}\overline{M}A^{(i)}+$$
$$+Q - R(\overline{M})^{\mathrm{T}}\Big(E + \sum_{i=1}^{b} B^{(i)}{}^{\mathrm{T}}\overline{M}B^{(i)}\Big)R(\overline{M})\Big)x \equiv 0.$$

При помощи данных выражений можно легко оценить разность

$$h(x,\overline{u}(t,x),\overline{M}) - h(x,\widetilde{u}(t,x),\overline{M}) =$$
$$= x^{\mathrm{T}}\big(R(\overline{M}) - \overline{V}\big)^{\mathrm{T}}\Big(E + \sum_{i=1}^{b} B^{(i)}{}^{\mathrm{T}}\overline{M}B^{(i)}\Big)\big(R(\overline{M}) - \overline{V}\big)x \geqslant 0$$

при $0 \leqslant t < t^*$. Отсюда следует, учитывая тождество (3.15), что имеет место неравенство $h(x,\widetilde{u}(t,x),\overline{M}) \leqslant 0,\ 0 \leqslant t < t^*$, причем равенство выполняется только на множестве нулевой меры Лебега в $\mathcal{R}^n$.

Зафиксируем такое начальное распределение $\mathbf{P}_0 \in \mathcal{M}$, которое имеет плотность распределения $p_0 \in \mathcal{C}^2(\mathcal{R}^n)$ и матрицу вторых моментов $P_0 \in \mathcal{R}^{n\times n}$. Рассмотрим процессы управления $\overline{z} = (\overline{\xi},\overline{u})$ и $\widetilde{z} = (\widetilde{\xi},\widetilde{u})$ из множества $\mathcal{D}_{\mathbf{P}_0}$. Известно [110, разделы 2.6 и 9.3], что распределение случайного процесса $\widetilde{\xi}$ (также как и $\overline{\xi}$) имеет плотность вероятности, которая описывается уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова с начальным условием p_0. Обозначим через $\widetilde{p}(t,\cdot) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{R}^n)$ плотность распределения вектора $\widetilde{\xi}(t)$.

Покажем, что $J(\widetilde{z}) < J(\overline{z})$. Действительно,

$$J(\widetilde{z}) - J(\overline{z}) = \Gamma(\widetilde{z}) - \Gamma(\overline{z}) = \mathrm{tr}\big[\overline{M}P_0\big] + \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} h(\widetilde{\xi}(s), \widetilde{u}(s, \widetilde{\xi}(s)), \overline{M})ds -$$

$$-\mathrm{tr}\big[\overline{M}P_0\big] - \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} h(\overline{\xi}(s), \overline{u}(s, \overline{\xi}(s)), \overline{M})ds =$$

$$= \mathbb{E}\int\limits_0^{t^*} h(\widetilde{\xi}(s), \widetilde{u}(s, \widetilde{\xi}(s)), \overline{M})ds =$$

$$= \int\limits_0^{t^*}\int\limits_{\mathcal{R}^n} h(x, \widetilde{u}(s, x), \overline{M})\widetilde{p}(s, x)\, dxds < 0.$$

Последнее неравенство имеет место в силу того, что, как было показано выше, подынтегральная функция строго меньше нуля на множестве полной меры. Таким образом, получено противоречие с тем, что стратегия управления $\overline{u}$ оптимальна, и сделанное предположение неверно. □

С л е д с т в и е 1. Пусть $\overline{z} = (\overline{\xi}, \overline{u}) \in \mathcal{D}$, $\overline{u}(t, x) = -\overline{V}x$ – оптимальная стратегия управления. Тогда из соотношений (3.10), (3.15) следует, что оптимальное значение критерия определяется равенством

$$J(\overline{z}) = \mathrm{tr}\big[\overline{M}P_0\big], \tag{3.17}$$

где матрица $\overline{M}$ – решение уравнения (3.11), P_0 – матрица вторых начальных моментов вектора $\overline{\xi}_0$.

З а м е ч а н и е 5. Из теоремы следует, что задача синтеза оптимальной стратегии управления $u(t, x) = -Vx$ сводится к совместному решению матричных уравнений (3.11), (3.12) или (3.12), (3.16). Введем обозначение $\mathcal{R}(M)$ для оператора в левой части уравнения (3.16):

$$\mathcal{R}(M) := MA^{(0)} + {A^{(0)}}^{\mathrm{T}}M + \sum_{i=1}^{b} {A^{(i)}}^{\mathrm{T}}MA^{(i)} +$$

$$+Q - R(M)^{\mathrm{T}}\Big(E + \sum_{i=1}^{b} {B^{(i)}}^{\mathrm{T}}MB^{(i)}\Big)R(M)$$

и обратимся к вопросу численного решения уравнения $\mathcal{R}(M) = 0$. В [114] для этой цели использовалось обобщение метода Ньютона на матричные уравнения и получена следующая итерационная процедура

$$M_{j+1} = M_j + \Delta M_j,\ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\begin{aligned} A_u^{(0)}(M_j)^{\mathrm{T}} \Delta M_j + \Delta M_j A_u^{(0)}(M_j) + {}& \\ + \sum_{i=1}^{b} A_u^{(i)}(M_j)^{\mathrm{T}} \Delta M_j A_u^{(i)}(M_j) &= -\mathcal{R}(M_j), \end{aligned} \tag{3.18}$$

где $A_u^{(i)}(M) := A^{(i)} - B^{(i)} R(M),\ i = \overline{0, b}$. Здесь на каждом шаге приращение ΔM_j находится из линейного матричного уравнения (3.18), которое имеет решение на каждом шаге, если регулятор $u(t, x) = -R(M_0)x$ обеспечивает асимптотическую устойчивость в среднем квадратическом системы (3.1).

3.4. Результаты

Поставлена задача оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными шумами и полной обратной связью и получены необходимые и одновременно достаточные условия оптимальности стабилизирующего линейного стационарного регулятора в данной задаче.

Результаты данной главы были опубликованы в [124, 128, 129].

4. Решение задач стабилизации технических систем

В данной главе содержится описание разработанного комплекса программ и решение ряда прикладных задач авиационной и ракетно-космической техники. Раздел 4.1 содержит описание комплекса программ. В §4.2 решена задача оптимальной стабилизации спутника с упругой штангой. Раздел 4.3 содержит решение задачи оптимальной стабилизации движения спутника на круговой орбите. В разделе 4.4 решена задача оптимального сближения двух спутников на круговой орбите.

4.1. Комплекс программ для решения задач синтеза оптимального управления и компьютерного моделирования

Предложенные в разделах 1.5, 1.6, 2.3, 2.4 алгоритмы были реализованы в виде комплекса программ. Данный комплекс программ разработан для решения задач синтеза оптимальных управлений и компьютерного моделирования квазилинейных стохастических систем.

Функциональное назначение. Комплекс программ предназначен для синтеза оптимальных и субоптимальных стратегий управления в линейных стохастических системах с мультипликативными шумами при наличии различных информационных ограничений на неограниченном интервале времени, а также для решения задачи оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами и компьютерного моделирования управляемых стохастических систем.

Основные характеристики. В качестве фреймворка для разработки программного обеспечения выбрана система компьютерной математики «Maple», которая включает в себя среду разработки и встроенный язык программирования. Язык программирования «Maple» поддерживает все основные парадигмы программирования, что упрощает разработку в данной среде. Кроме того, данная система имеет богатый набор вспомогательных библиотек и инструментов, необходимых для реализации численных алгоритмов.

Разработанное программное обеспечение позволяет решать широкий спектр практических задач синтеза оптимальных управлений в квазилинейных системах с управляемыми параметрами и в линейных системах с мультипликативными шумами на неограниченном интервале времени, а именно: синтез оптимальных стабилизирующих векторов и субоптимальных стабилизирующих программных управлений для квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами, синтез оптимальных стабилизирующих линейных стационарных регуляторов и субоптимальных стабилизирующих нестационарных регуляторов для линейных стохастических систем с мультипликативными шумами, компьютерное моделирование и визуализация движения стохастических систем.

Описание логической структуры. Программный комплекс состоит из ряда подсистем: подсистема ввода и вывода данных, подсистема вспомогательных алгоритмов, подсистема синтеза оптимальных стабилизирующих векторов для квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами, подсистема синтеза субоптимальных программных управлений для квазилинейных стохастических систем с управляемыми параметрами, подсистема синтеза оптимальных стабилизирующих линейных стационарных регуляторов для линейных стохастических систем с мультипликативными шумами и информационными ограничениями, подсистема синтеза субоптимальных стабилизирующих линейных стационарных регуляторов для линейных стохастических систем с мультипликативными шумами и информационными ограничениями, подсистема компьютерного моделирования и визуализации движения стохастических систем.

Подсистема ввода и вывода данных отвечает за чтение и сохранение параметров моделей и алгоритмов, а также результатов работы численных методов. Ввод и вывод данных осуществляется при помощи встроенных в фреймворк «Maple» инструментов для файлового ввода-вывода, а также при помощи встроенного в систему «Maple» терминала.

Подсистема вспомогательных алгоритмов содержит реализацию в виде отдельных процедур часто используемых блоков программ из остальных подсистем. Примерами таких процедур являются процедуры решения обыкновенных и обобщённых уравнений Ляпунова, решения уравнений Риккати и другие.

Ряд подсистем синтеза управляющих воздействий реализуют алгоритмы, которые были получены в 1.5, 1.6, 2.3, 2.4. Данные модули получают данные из подсистемы ввода и вывода, при помощи вспомогательных алгоритмов производят синтез управлений и передают результаты вычислений обратно в подсистему ввода и вывода данных для сохранения.

Подсистема компьютерного моделирования и визуализации движения стохастических получает параметры математических моделей из подсистемы ввода и вывода данных, производит компьютерное моделирование эволюции стохастических систем, после чего возвращает результаты обратно в подсистему ввода и вывода данных для сохранения, либо производит визуализацию полученных данных при помощи встроенных в среду разработки «Maple» инструментов. Компьютерное моделирование основано на алгоритме численного интегрирования Эйлера–Маруямы стохастических дифференциальных уравнений. Пример результата компьютерного моделирования и визуализации приведен на рисунке 1.

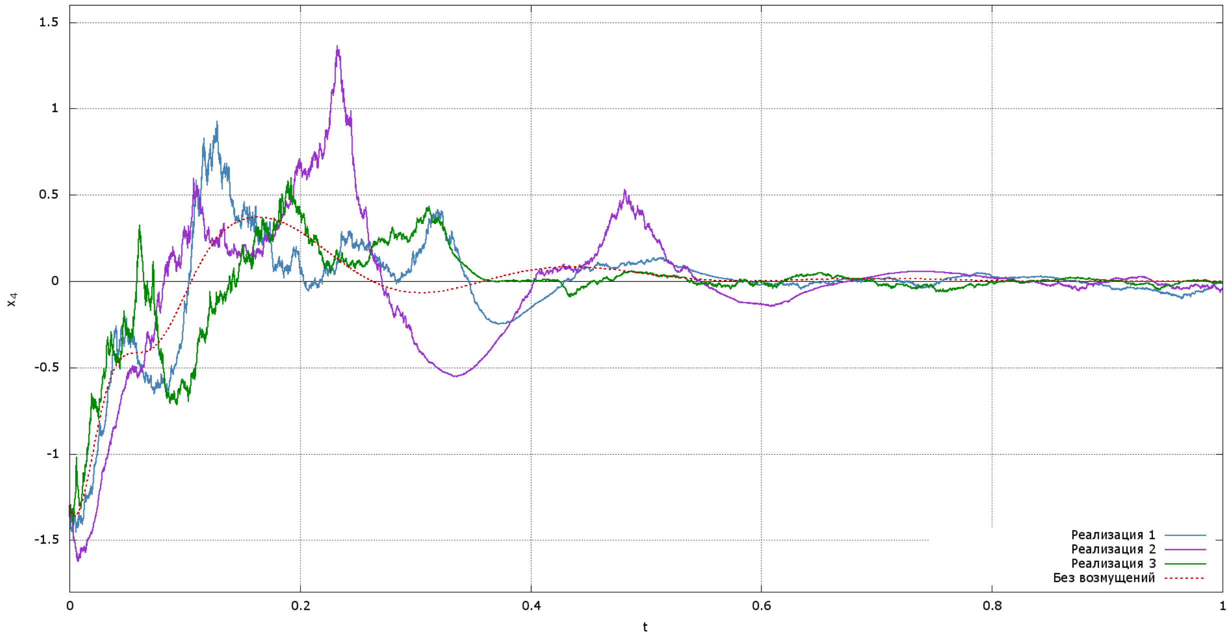

Рис. 1. Выборочные реализации переходного процесса.

4.2. Задача стабилизации спутника с упругой штангой

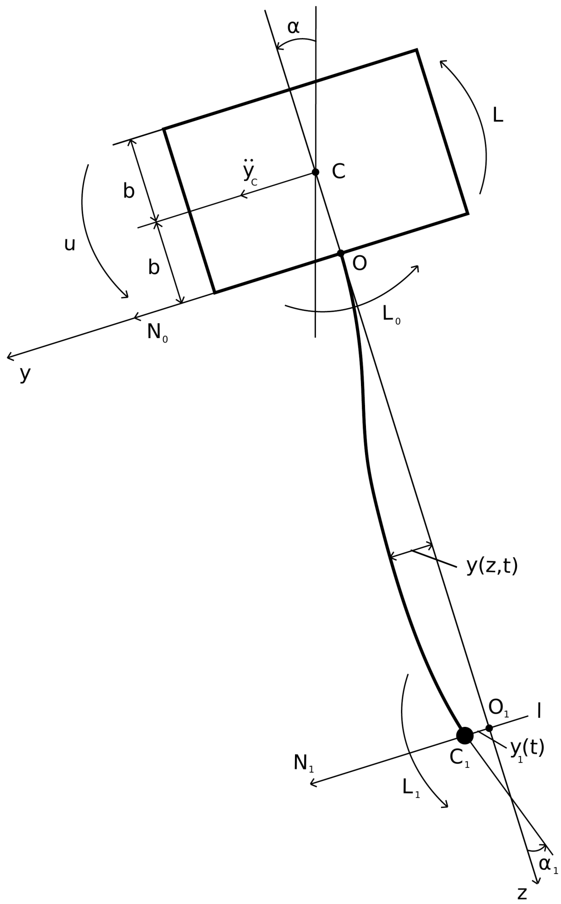

Рис. 2. Спутник с упругой штангой

Рассматривается плоское движение абсолютно жесткого спутника [134] (Рис. 2) с моментом инерции Y_c и массой m_c под действием возмущающего момента F_M. В точке O жестко закреплено начало прямолинейного стержня длиной l с погонной плотностью ρ, модулем Юнга E, коэффициентом внутреннего трения h и моментом инерции поперечного сечения Y. На конце стержня в точке O_1 зафиксировано абсолютно жесткое тело C_1 с массой m_1 и моментом инерции Y_1. Возмущающий момент равен $F_M = -\Omega_M \alpha$, где коэффициент Ω_M определяется угловой скоростью обращения по орбите и моментами инерции спутника.

Линеаризованные уравнения движения спутника в окрестности устойчивого состояния имеют вид [135]

$$
\begin{aligned}
&Y_c\ddot{\alpha} = \tilde{u} - \Omega_M \alpha - 2EY\big[\tfrac{1}{l}(1+\tfrac{3b}{l})(\alpha_1 + h\dot{\alpha}_1) + \tfrac{3}{l^2}(1+\tfrac{2b}{l})(y_1 + h\dot{y}_1)\big],\\
&Y_c\ddot{\alpha}_1 = -\tilde{u} + \Omega_M \alpha + 2EY\big[\tfrac{1}{l}(1+\tfrac{3b}{l} - 2\tfrac{Y_c}{Y_1})(\alpha_1 + h\dot{\alpha}_1) +\\
&\qquad\qquad + \tfrac{3}{l^2}(1+\tfrac{2b}{l} - \tfrac{Y_c}{Y_1})(y_1 + h\dot{y}_1)\big],\\
&Y_c\ddot{y}_1 = b + I\tilde{u} - (b+I)\Omega_M\alpha - \tfrac{2EYY_c}{m_1}\big[\tfrac{1}{l}(\tfrac{3m_1}{m_c l} + \tfrac{(b+I)m_1}{Y_c}(1+\tfrac{3b}{I}) + \tfrac{3}{l})\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot(\alpha_1 + h\dot{\alpha}_1) + \tfrac{3}{l^2}(\tfrac{2m_1}{m_c l} + \tfrac{(b+l)m_1}{Y_c}(1+\tfrac{2b}{l}) + \tfrac{2}{l})(y_1 + h\dot{y}_1)\big].
\end{aligned}
$$

Заданы следующие характеристики спутника: $Y_c = 0.7$ кг$\cdot$ м^2, $m_c = 35$ кг, $b = 0.1$ м, $\Omega_M = 0.1$ Н$\cdot$м, $l = 1$ м, $h = 0.01$ с, $\rho = 0.645$ кг/м, $E = 2.8 \cdot 10^{10}$ Па, $Y = 3.5 \cdot 10^{-9}$ м^4, $m_1 = 3$ кг, $Y_1 = 0.07$ кг$\cdot$м^2.

Обозначим ξ состояние системы $\xi = (\alpha, \dot{\alpha}, \alpha_1, \dot{\alpha}_1, y_1, \dot{y}_1)^{\mathrm{T}}$. Уравнения движения системы примут вид

$$
\begin{aligned}
&d\xi(t) = (A^{(0)}\xi(t) + B^{(0)}u(t,\xi(t)))dt + B_1 u(t,\xi(t))d\beta(t),\\
&\xi(0) = x_0,
\end{aligned}
$$

где $\beta(t)$ – стандартный винеровский процесс; x_0 – начальное состояние; матрицы $A^{(0)}$, $B^{(0)}$ и B_1 удовлетворяют равенствам

$$
A^{(0)} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-0.143 & 0 & -364 & -3.64 & -1.08 & -10.08\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0.143 & 0 & -5236 & -52.36 & -7392 & -73.92\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
-0.157 & 0 & -613.2 & -6.132 & -1534.4 & -15.344
\end{pmatrix},
$$

$$
B^{(0)} = (0, 1.429, 0, -1.429, 0, 1.571)^T,\ B_1 = (0, 0.357, 0, -0.357, 0, 0.393)^T,
$$

Здесь предполагается, что система подвергается воздействию случайных возмущений, интенсивность которых в каждый момент времени пропорциональна величине управляющих воздействий.

Требуется минимизировать функционал качества управления

$$J(z) = \mathbb{E} \int_0^{+\infty} \big(\xi(s)^{\mathrm{T}} Q \xi(s) + u(s, \xi(s))^{\mathrm{T}} E\, u(s, \xi(s))\big) ds,$$

где $z = (\xi, u)$ – процесс управления, $Q = diag(500, 1, 60, 0.2, 400, 7.5)$, $E = 0.025$.

Используя разработанный комплекс программ, численно вычислены матрица M и соответствующая матрица коэффициентов V оптимального линейного регулятора

$$M = \begin{pmatrix} 364.99 & 65.61 & -1.56 & 1.10 & -191.07 & -48.12 \\ 65.61 & 26.00 & -1.68 & 0.47 & -23.53 & -19.36 \\ -1.56 & -1.68 & 29.75 & 0.09 & -11.85 & 0.29 \\ 1.10 & 0.47 & 0.09 & 0.02 & -0.23 & -0.43 \\ -191.07 & -23.53 & -11.85 & -0.23 & 606.31 & 16.78 \\ -48.12 & -19.36 & 0.29 & -0.43 & 16.78 & 15.15 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 60.08 & 21.96 & -7.53 & -0.17 & -25.12 & -11.75 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее значение критерия зависит от начального условия и может быть найдено по формуле (3.17).

Найденная стратегия управления $u(t, x) = -Vx$ обеспечивает асимптотическую устойчивость в среднем квадратическом замкнутой системы и вместе с матрицей M является решением уравнений (3.11), (3.12), следовательно является оптимальным стабилизирующим регулятором.

4.3. Задача стабилизации движения спутника на круговой орбите Земли

Рассматривается плоское движение искусственного спутника вокруг центра масс Земли в окрестности заданной круговой орбиты. Предполагается, что управление реализуется при помощи двигателя, вектор тяги которого всегда направлен по касательной к круговой орбите движения спутника и может непрерывно изменяться, в том числе может менять знак. Линеаризованные уравнения движения спутника в окрестности опорной траектории движения по круговой орбите радиуса r_0 имеют вид [136]:

$$\begin{aligned}
&d\Delta r(t) = \Delta V_{\mathcal{R}}(t)dt,\\
&d\Delta V_{\mathcal{R}}(t) = (\omega_0^2\Delta r(t) + 2\omega_0\Delta V_T(t))dt,\\
&d\Delta V_T(t) = (-\omega_0\Delta V_{\mathcal{R}}(t) + u(t,\xi(t)))dt + \gamma u(t,\xi(t))d\beta(t),\\
&d\Delta l(t) = (-\omega_0\Delta r(t) + \Delta V_T(t))dt,\\
&\xi(0) = \xi_0,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где $t \geqslant 0$ – время; $\omega_0 = \sqrt{\frac{Gm}{r_0^3}}$ – угловая скорость движения спутника по заданной опорной траектории, G – гравитационная постоянная, m – масса Земли; $\xi = (\Delta r, \Delta V_{\mathcal{R}}, \Delta V_T, \Delta l)^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния системы, $\Delta r(t) = r(t) - r_0$ – отклонение расстояния $r(t)$ между спутником и центром масс Земли от радиуса заданной опорной траектории r_0, $\Delta V_{\mathcal{R}}(t)$ – нормальная составляющая скорости движения спутника, $\Delta V_T(t) = \big(V_T(t) - v_0\big)$ – отклонение тангенциальной составляющей скорости движения спутника $V_T(t)$ от скорости движения $v_0 = \omega_0 r_0$ по заданной опорной траектории; $\Delta l(t)$ – отклонение спутника от заданной опорной траектории вдоль круговой орбиты; $u(t,x)$ – стратегия управления (величина прямо пропорциональная тяге двигателя). Правая часть системы (4.1) содержит случайные возмущения $\gamma\, u(t,\xi(t))d\beta(t)$, которые имеют смысл мультипликативных ошибок управления [137]. Мультипликативная ошибка управления уменьшается при уменьшении тяги двигателя и становится равной нулю при выключении двигателя. Часто используемая аддитивная ошибка меньше соответствует физическому смыслу происходящих процессов.

Критерий качества управления имеет вид

$$J(z) = \mathbb{E} \int\limits_0^{+\infty} \Big(\Delta r(s)^2 + \Delta V_{\mathcal{R}}(s)^2 + \Delta V_T(s)^2 + \Delta l(s)^2 + u(s, \xi(s))^2 \Big) ds.$$

Были заданы следующие параметры системы: радиус орбиты $r_0 = 6.871 \cdot 10^6$ м, интенсивность возмущений $\gamma = 10^{-4}$.

Матрицы M и V были найдены численным решением уравнений (3.11), (3.12). В результате

$$M = \begin{pmatrix} 91.2985 & 4.1182 \cdot 10^4 & 0.6343 & -90.7549 \\ 4.1182 \cdot 10^4 & 2.4695 \cdot 10^7 & 286.9913 & -5450.7739 \\ 0.6343 & 286.9913 & 0.8602 & -0.3162 \\ -90.7549 & -5450.7739 & -0.3162 & 120.5546 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 0.6343 & 286.9913 & 0.8602 & -0.3162 \end{pmatrix},$$

и значение критерия равно $J = 2.4682 \cdot 10^7$.

Найденный регулятор $u(t, x) = -Vx$ обеспечивает асимптотическую устойчивость в среднем квадратическом системы (4.1) и вместе с матрицей M является решением уравнений (3.11), (3.12), следовательно является оптимальным стабилизирующим регулятором.

4.4. Задача сближения двух спутников на круговой орбите Земли

Рассматривается плоское движение двух спутников по круговой орбите радиуса r_0 вокруг центра масс Земли (Рис. 3). В каждый момент времени $t \geqslant 0$ расстояние от центра масс Земли до спутников составляет $r^{(1)}(t)$ и $r^{(2)}(t)$, тангенциальные составляющие скоростей равны $V_T^{(1)}(t)$

и $V_T^{(2)}(t)$, нормальные составляющие равны $V_R^{(1)}(t)$ и $V_R^{(2)}(t)$, расстояние между спутниками вдоль заданной круговой орбиты равно $\Delta l(t)$.

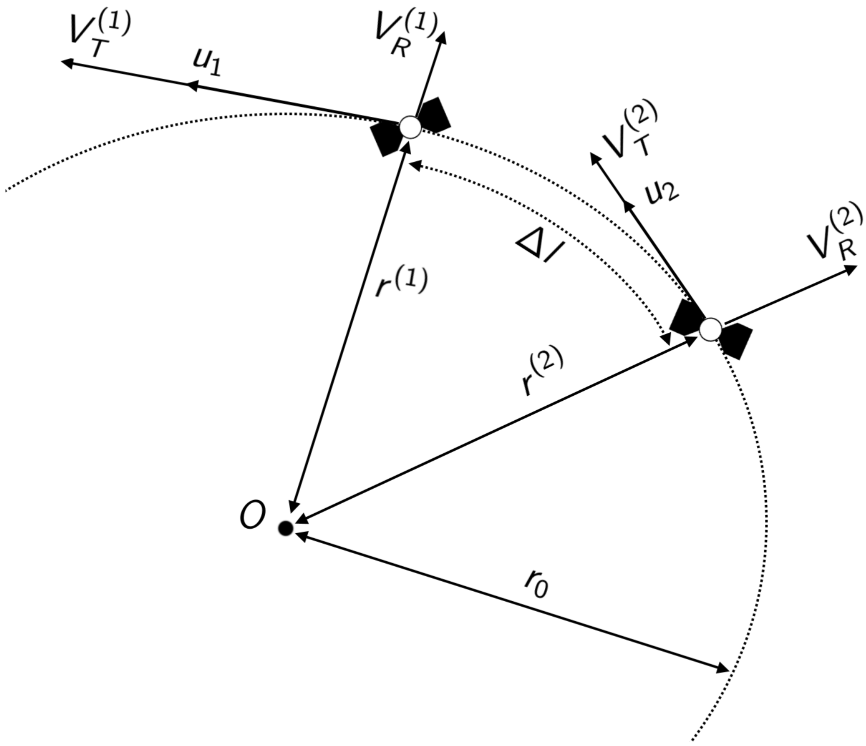

Рис. 3. Движение двух спутников по круговой орбите.

Линеаризованные уравнения движения системы вдоль опорной траектории имеют вид [136]

$$
\begin{aligned}
&d\Delta r^{(1)}(t) = \Delta V_R^{(1)}(t)dt,\\
&d\Delta V_R^{(1)}(t) = (\omega_0^2 \Delta r^{(1)}(t) + 2\omega_0 \Delta V_T^{(1)}(t))dt,\\
&d\Delta V_T^{(1)}(t) = (-\omega_0 \Delta V_R^{(1)}(t) + u_1(t, \eta_1(t)))dt + \gamma_1 u_1(t, \eta_1(t))d\beta_1(t),\\
&d\Delta r^{(2)}(t) = \Delta V_R^{(2)}(t)dt,\\
&d\Delta V_R^{(2)}(t) = (\omega_0^2 \Delta r^{(2)}(t) + 2\omega_0 \Delta V_T^{(2)}(t))dt,\\
&d\Delta V_T^{(2)}(t) = (-\omega_0 \Delta V_R^{(2)}(t) + u_2(t, \eta_2(t)))dt + \gamma_2 u_2(t, \eta_2(t))d\beta_2(t),\\
&d\Delta l(t) = (-\omega_0 \Delta r^{(1)}(t) + \Delta V_T^{(1)}(t) + \omega_0 \Delta r^{(2)}(t) - \Delta V_T^{(2)}(t))dt,
\end{aligned}
$$

где ω_0 – угловая скорость движения по круговой орбите радиуса r_0; $\Delta r^{(i)}(t) = r^{(i)}(t) - r_0$, $i = 1, 2$ – отклонение текущего радиуса круговой орбиты спутника от радиуса заданной орбиты; $\Delta V_R^{(i)}(t) = V_R^{(i)}(t),\ i = 1,2$ – нормальная составляющая скорости движения спутника; $\Delta V_T^{(i)}(t) = V_T^{(i)}(t) - \omega_0 r_0,\ i = 1,2$ – тангенциальная составляющая скорости движения спутника; $\Delta l(t)$ – расстояние между спутниками вдоль заданной круговой орбиты. В правые части уравнений входят случайные возмущения, которые имеют смысл ошибок управления.

В начальный момент времени $t = 0$ система находится в состоянии

$$\Delta r^{(1)}(0) = \Delta V_R^{(1)}(0) = \Delta V_T^{(1)}(0) = \Delta r^{(2)}(0) = \Delta V_R^{(2)}(0) = \Delta V_T^{(2)}(0) = 0,$$
$$\Delta l(0) = 10.$$

Выход системы имеет вид $\eta = (\eta_1^{\mathrm{T}}\ \ \eta_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $\eta_i = \Big(\Delta r^{(i)}\ \ \Delta V_R^{(i)}\ \ \Delta V_T^{(i)}\ \ \Delta l\Big)^{\mathrm{T}}$, $i = 1,2$. Таким образом, каждый спутник обладает только информацией о своем положении и расстоянии между ними, что является реалистичным техническим ограничением.

Критерий качества управления имеет вид

$$J(z) = \mathbb{E}\int\limits_0^{+\infty} \Big(\Delta r^{(1)}(s)^2 + \Delta V_R^{(1)}(s)^2 + 5\Delta V_T^{(1)}(s)^2 +$$
$$+\Delta r^{(2)}(s)^2 + \Delta V_R^{(2)}(s)^2 + 5\Delta V_T^{(2)}(s)^2 +$$
$$+u_1(s,\eta(s))^2 + u_2(s,\eta(s))^2\Big)ds$$

При $\omega_0 = 3.16 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.01$, матрица регулятора $\overline{V}$, найденная при помощи разработанного комплекса программ, и соответствующее значение критерия равны

$$\overline{V} = \begin{pmatrix} 1.303 & 52.152 & 3.298 & -0.22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.302 & 52.214 & 3.296 & 0.22 \end{pmatrix},$$
$$J = 19.508.$$

4.5. Результаты

Теоретические результаты диссертации из глав 1–3 реализованы в виде программного комплекса, с помощью которого решен ряд практических задач авиационной и ракетно-космической техники: стабилизация спутника с упругой штангой, стабилизация движения спутника на круговой орбите Земли и задача сближения двух спутников на круговой орбите Земли.

Результаты данной главы были частично опубликованы в [124, 127, 130, 133].

Заключение

В результате диссертационного исследования были получены следующие результаты:

1) Выделен и исследован новый класс математических моделей – квазилинейные стохастические системы с управляемыми параметрами. Для математических моделей выделенного класса сформулирована и поставлена задача оптимальной стабилизации [125, 127, 132].

2) В задаче оптимальной стабилизации получены необходимые условия оптимальности:

   а) стабилизирующего вектора в квазилинейных стохастических системах с управляемыми параметрами [125, 127, 132];

   б) линейного стационарного регулятора в линейных стохастических систем с мультипликативными шумами системах при наличии информационных ограничений [125, 126, 131].

3) Разработаны эффективные численные методы градиентного типа для построения:

   а) оптимального стабилизирующего вектора и субоптимального векторного программного управления в задаче оптимальной стабилизации в квазилинейных стохастических системах с управляемыми параметрами [125, 127, 132, 133];

б) оптимального линейного стационарного регулятора и субоптимального линейного нестационарного регулятора в задаче оптимальной стабилизации в линейных стохастических системах с мультипликативными шумами при наличии информационных ограничений [125, 126, 131].

4) Полученные численные методы реализованы в виде комплекса программ.

5) Получены необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче оптимальной стабилизации в линейных стохастических системах с мультипликативными шумами при наличии полной информации о состоянии [128, 129].

6) Полученные результаты применены для моделирования и решения задач оптимальной стабилизации движения спутника с упругой штангой [130], движения спутника на круговой орбите [124], оптимального сближения двух спутников на круговой орбите [127].

Литература

1. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. — Физматлит М., 2001.

2. Калман Р. Э., Фалб П. Л., Арбиб М. А. Очерки по математической теории систем / Под ред. Я. З. Цыпкин. — Едиториал УРСС, 2004.

3. Пантелеев А. В., Бортаковский А. С. Теория управления в примерах и задачах. — Высшая школа, 2003.

4. Klamka J. Controllability of dynamical systems. A survey // Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences. — 2013. — Vol. 61, no. 2. — P. 335–342.

5. Bakule L. Decentralized control: An overview // Annual reviews in control. — 2008. — Vol. 32, no. 1. — P. 87–98.

6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — Лань, 2008.

7. Hofer E., Sagirow P. Optimal systems depending on parameters // AIAA Journal. — 1968. — Vol. 6, no. 5. — P. 953–956.

8. Dorato P. A historical review of robust control // IEEE Control Systems Magazine. — 1987. — Vol. 7, no. 2. — P. 44–47.

9. Johnson C. Further study of the linear regulator with disturbances – The case of vector disturbances satisfying a linear differential equation //

IEEE Transactions on Automatic Control. — 1970. — Vol. 15, no. 2. — P. 222–228.

10. Øksendal B. Stochastic differential equations: an introduction with applications. — Springer, 2002.

11. Вонэм В. М. Стохастические дифференциальные уравнения в теории управления // Математика. — 1973. — Т. 17, № 4. — С. 129–167. — Probab. Methods appl. Math. – 1970 – no. 2 – P. 131–212.

12. Вонэм В. М. Стохастические дифференциальные уравнения в теории управления // Математика. — 1973. — Т. 17, № 5. — С. 82–114. — Probab. Methods appl. Math. – 1970 – no. 2 – P. 131–212.

13. Itô K. Stochastic integral // Proceedings of the Imperial Academy. — 1944. — Vol. 20, no. 8. — P. 519–524.

14. Itô K. On a stochastic integral equation // Proceedings of the Japan Academy. — 1946. — Vol. 22, no. 2. — P. 32–35.

15. Itô K. Stochastic differential equations in a differentiable manifold // Nagoya Mathematical Journal. — 1950. — Vol. 1. — P. 35–47.

16. Sagirow P. Stochastic methods in the dynamics of satellites. — Springer, 1970.

17. Allen E. Modeling with Itô stochastic differential equations. — Springer Science & Business Media, 2007. — Vol. 22.

18. Beneš V. E. Existence of optimal strategies based on specified information, for a class of stochastic decision problems // SIAM Journal on control. — 1970. — Vol. 8, no. 2. — P. 179–188.

19. Bensoussan A. Maximum principle and dynamic programming approaches of the optimal control of partially observed diffusions // Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes. — 1983. — Vol. 9, no. 3. — P. 169–222.

20. Davis M. H. A., Varaiya P. Dynamic programming conditions for partially observable stochastic systems // SIAM Journal on Control. — 1973. — Vol. 11, no. 2. — P. 226–261.

21. Elliott R. J., Kohlmann M. The variational principle for optimal control of diffusions with partial information // Systems & control letters. — 1989. — Vol. 12, no. 1. — P. 63–69.

22. Fleming W. H. Optimal control of partially observable diffusions // SIAM Journal on Control. — 1968. — Vol. 6, no. 2. — P. 194–214.

23. Fleming W. H., Pardoux É. Optimal control for partially observed diffusions // SIAM Journal on Control and Optimization. — 1982. — Vol. 20, no. 2. — P. 261–285.

24. Haussmann U. G. General necessary conditions for optimal control of stochastic systems // Stochastic Systems: Modeling, Identification and Optimization, II. — Springer, 1976. — P. 30–48.

25. Haussmann U. G. Existence of partially observable stochastic optimal controls // Stochastic differential systems. — Springer, 1981. — P. 79–84.

26. Haussmann U. G. On the existence of optimal controls for partially observed diffusions // SIAM Journal on Control and Optimization. — 1982. — Vol. 20, no. 3. — P. 385–407.

27. Haussmann U. G. Optimal control of partially observed diffusions via the separation principle // Stochastic Differential Systems. — Springer, 1982. — P. 302–311.

28. Haussmann U. G. The maximum principle for optimal control of diffusions with partial information // SIAM journal on control and optimization. — 1987. — Vol. 25, no. 2. — P. 341–361.

29. Haussmann U. G., Lepeltier J. P. On the existence of optimal controls // SIAM Journal on Control and Optimization. — 1990. — Vol. 28, no. 4. — P. 851–902.

30. Haussmann U. G. Generalized solutions of the Hamilton–Jacobi equation of stochastic control // SIAM Journal on Control and Optimization. — 1994. — Vol. 32, no. 3. — P. 728–743.

31. Хрусталёв М. М. Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информированности игроков о состоянии // Изв. РАН. — 1995. — № 6. — С. 194–208.

32. Хрусталёв М. М. Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информированности игроков о состоянии // Изв. РАН. — 1996. — № 1. — С. 72–79.

33. Хрусталёв М. М. Синтез оптимальных и устойчивых управляемых стохастических систем при неполной информации о состоянии на неограниченном интервале времени // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 11. — С. 174–190.

34. Kushner H. J. Optimal discounted stochastic control for diffusion pro-

cesses // SIAM Journal on Control. — 1967. — Vol. 5, no. 4. — P. 520–531.

35. Kushner H. J. Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimization problems // SIAM Journal on Control. — 1972. — Vol. 10, no. 3. — P. 550–565.

36. Peng S. A general stochastic maximum principle for optimal control problems // SIAM Journal on control and optimization. — 1990. — Vol. 28, no. 4. — P. 966–979.

37. Fleming W. H. Optimal continuous-parameter stochastic control // SIAM review. — 1969. — Vol. 11, no. 4. — P. 470–509.

38. Kushner H. J. A partial history of the early development of continuous-time nonlinear stochastic systems theory // Automatica. — 2014. — Vol. 50, no. 2. — P. 303–334.

39. Hu Y., Zhou X. Y. Constrained stochastic LQ control with random coefficients, and application to portfolio selection // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2005. — Vol. 44, no. 2. — P. 444–466.

40. Davis M. H. A., Varaiya P. Information states for linear stochastic systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1972. — Vol. 37, no. 2. — P. 384–402.

41. Haussmann U. G. Examples of optimal controls for linear stochastic control systems with partial observation // Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes. — 1987. — Vol. 22, no. 3-4. — P. 289–323.

42. Bismut J. M. Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients // SIAM Journal on Control and Optimization. — 1976. — Vol. 14, no. 3. — P. 419–444.

43. Bismut J. M. On optimal control of linear stochastic equations with a linear-quadratic criterion // SIAM Journal on Control and Optimization. — 1977. — Vol. 15, no. 1. — P. 1–4.

44. Chen S., Yong J. Stochastic linear quadratic optimal control problems // Applied Mathematics and Optimization. — 2001. — Vol. 43, no. 1. — P. 21–45.

45. Hopkins Jr. W. E. Optimal stabilization of families of linear stochastic differential equations with jump coefficients and multiplicative noise // SIAM journal on control and optimization. — 1987. — Vol. 25, no. 6. — P. 1587–1600.

46. Damm T., Mena H., Stillfjord T. Numerical solution of the finite horizon stochastic linear quadratic control problem // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2017. — Vol. 24, no. 4. — P. e2091.

47. McLane P. J. Linear optimal stochastic control using instantaneous output feedback // International Journal of Control. — 1971. — Vol. 13, no. 2. — P. 383–396.

48. Chen S., Zhou X. Y. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs II // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2000. — Vol. 39, no. 4. — P. 1065–1081.

49. Ляшенко Е. А., Ряшко Л. Б. О регуляторах с помехой в динамическом звене // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 10. — С. 59–70.

50. Solvability and asymptotic behavior of generalized Riccati equations arising in indefinite stochastic LQ controls / M. A. Rami, X. Chen, J. B. Moore, X. Y. Zhou // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2001. — Vol. 46, no. 3. — P. 428–440.

51. Rami M. A., Moore J. B., Zhou X. Y. Indefinite stochastic linear quadratic control and generalized differential Riccati equation // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2001. — Vol. 40, no. 4. — P. 1296–1311.

52. Румянцев Д. С., Хрусталёв М. М. Оптимальное управление квазилинейными системами диффузионного типа при неполной информации о состоянии // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2006. — № 5. — С. 43-51.

53. Румянцев Д. С., Хрусталёв М. М., Царьков К. А. Алгоритм поиска субоптимальных стратегий управления квазилинейными динамическими стохастическими системами диффузионного типа // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2014. — № 1. — С. 74–86.

54. Румянцев Д. С., Царьков К. А. Управление квазилинейными стохастическими системами с неполной информацией на примере механического манипулятора // Труды МАИ. — 2014. — № 74.

55. Параев Ю. И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. Библиотека технической кибернетики. — Советское радио, 1976.

56. Kurtaran B. Z., Sidar M. Optimal instantaneous output-feedback controllers for linear stochastic systems // International Journal of Control. — 1974. — Vol. 19, no. 4. — P. 797–816.

57. Chen S., Li X., Zhou X. Y. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs // SIAM Journal on Control and Optimization. — 1998. — Vol. 36, no. 5. — P. 1685–1702.

58. Carravetta F., Mavelli G. Linear output-feedback control of stochastic linear systems with state-and control-dependent disturbances // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control / IEEE. — 2005. — P. 554–559.

59. Carravetta F., Mavelli G. Suboptimal stochastic linear feedback control of linear systems with state-and control-dependent noise: The incomplete information case // Automatica. — 2007. — Vol. 43, no. 5. — P. 751–757.

60. Phillis Y. Controller design of systems with multiplicative noise // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1985. — Vol. 30, no. 10. — P. 1017–1019.

61. Tse E. On the optimal control of stochastic linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1971. — Vol. 16, no. 6. — P. 776–785.

62. Wonham W. M. On the separation theorem of stochastic control // SIAM Journal on Control. — 1968. — Vol. 6, no. 2. — P. 312–326.

63. Kalman R. E., Bucy R. S. New results in linear filtering and prediction

theory // Journal of basic engineering. — 1961. — Vol. 83, no. 1. — P. 95–108.

64. Мильштейн Г. Н., Ряшко Л. Б. Оценивание в управляемых стохастических системах с мультипликативными шумами // Автоматика и телемеханика. — 1984. — № 6. — С. 88–94.

65. Ряшко Л. Б. Линейный фильтр в задаче стабилизации линейных стохастических систем при неполной информации // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 7. — С. 80–89.

66. McLane P. J. Optimal linear filtering for linear systems with state-dependent noise // International Journal of Control. — 1969. — Vol. 10, no. 1. — P. 41–51.

67. Мильштейн Г. Н. Построение стабилизирующего регулятора при неполной информации о состоянии для линейных стохастических систем с мультипликативными шумами // Автоматика и телемеханика. — 1982. — № 5. — С. 98–106.

68. Wise G., Marcus S. Stochastic stability for a class of systems with multiplicative state noise // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1979. — Vol. 24, no. 2. — P. 333–335.

69. El Ghaoui L. State-feedback control of systems with multiplicative noise via linear matrix inequalities // Systems & Control Letters. — 1995. — Vol. 24, no. 3. — P. 223–228.

70. Sasagawa T. LP-stabilization problem for linear stochastic control systems with multiplicative noise // Journal of optimization theory and applications. — 1989. — Vol. 61, no. 3. — P. 451–471.

71. Gao Z. Y., Ahmed N. U. Feedback stabilizability of non-linear stochastic systems with state-dependent noise // International Journal of Control. — 1987. — Vol. 45, no. 2. — P. 729–737.

72. McLane P. J. Optimal stochastic control of linear systems with state- and control-dependent disturbances // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1971. — Vol. 16, no. 6. — P. 793–798.

73. Willems J. L., Willems J. C. Feedback stabilizability for stochastic systems with state and control dependent noise // Automatica. — 1976. — Vol. 12, no. 3. — P. 277–283.

74. Kleinman D. L. Optimal stationary control of linear systems with control-dependent noise // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1969. — Vol. 14, no. 6. — P. 673–677.

75. Haussmann U. G. Optimal stationary control with state control dependent noise // SIAM Journal on Control. — 1971. — Vol. 9, no. 2. — P. 184–198.

76. Wonham W. M. Optimal stationary control of a linear system with state-dependent noise // SIAM Journal on Control. — 1967. — Vol. 5, no. 3. — P. 486–500.

77. Haussmann U. G. Stability of linear systems with control dependent noise // SIAM Journal on Control. — 1973. — Vol. 11, no. 2. — P. 382–394.

78. Gajic Z., Losada R. Solution of the state-dependent noise optimal control problem in terms of Lyapunov iterations // Automatica. — 1999. — Vol. 35, no. 5. — P. 951–954.

79. Kleinman D. L. Numerical solution of the state dependent noise problem // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1976. — Vol. 21, no. 3. — P. 419–420.

80. Dragan V., Morozan T., Halanay A. Optimal stabilizing compensator for linear systems with state-dependent noise // Stochastic analysis and applications. — 1992. — Vol. 10, no. 5. — P. 557–572.

81. El Bouhtouri A., Hinrichsen D., Pritchard A. J. On the disturbance attenuation problem for a wide class of time invariant linear stochastic systems // Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes. — 1999. — Vol. 65, no. 3-4. — P. 255–297.

82. Ряшко Л. Б. Стабилизация линейных систем с мультипликативными шумами при неполной информации // Прикладная математика и механика. — 1981. — Т. 45, № 5. — С. 778.

83. Bernstein D. S., Haddad W. M. Robust stability and performance analysis for state-space systems via quadratic Lyapunov bounds // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 1990. — Vol. 11, no. 2. — P. 239–271.

84. Невельсон М. Б. Критерий существования линейного оптимального управления для одного класса линейных стохаетических систем // Прикл. математика и механика. — 1969. — Т. 33, № 3. — С. 573.

85. Hinrichsen D., Pritchard A. J. Stochastic H^∞ // SIAM Journal on Control and Optimization. — 1998. — Vol. 36, no. 5. — P. 1504–1538.

86. Мильштейн Г. Н., Ряшко Л. Б. Оптимальная стабилизация линей-

ных стохастических систем // Прикладная математика и механика. — 1976. — Т. 40, № 6.

87. Speyer J. A nonlinear control law for a stochastic infinite time problem // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1976. — Vol. 21, no. 4. — P. 560–564.

88. Georgiou T. T., Lindquist A. The separation principle in stochastic control, redux // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2013. — Vol. 58, no. 10. — P. 2481–2494.

89. Ryashko L. B., Schurz H. Mean square stability analysis of some linear stochastic systems // Dynamic Systems and Applications. — 1997. — Vol. 6. — P. 165–190.

90. Bernstein D. S. Robust static and dynamic output-feedback stabilization: Deterministic and stochastic perspectives // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1987. — Vol. 32, no. 12. — P. 1076–1084.

91. Damm T. Generalized Riccati equations and stabilization of stochastic systems // IFAC Proceedings Volumes. — 2000. — Vol. 33, no. 16. — P. 437–442.

92. Damm T., Hinrichsen D. Newton's method for a rational matrix equation occurring in stochastic control // Linear Algebra and its Applications. — 2001. — Vol. 332. — P. 81–109.

93. Haussmann U. G. Stability of linear systems with control dependent noise // SIAM Journal on Control. — 1973. — Vol. 11, no. 2. — P. 382–394.

94. Kleinman D. L. On the stability of linear stochastic systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1969. — Vol. 14, no. 4. — P. 429–430.

95. Мильштейн Г. Н. Линейные оптимальные регуляторы заданной структуры в системах с неполной информацией // Автоматика и телемеханика. — 1976. — № 8. — С. 48–53.

96. Phillis Y. A. Optimal stabilization of stochastic systems // Journal of mathematical analysis and applications. — 1983. — Vol. 94, no. 2. — P. 489–500.

97. Chen X., Zhou X. Y. Stochastic linear-quadratic control with conic control constraints on an infinite time horizon // SIAM journal on control and optimization. — 2004. — Vol. 43, no. 3. — P. 1120–1150.

98. Hinrichsen D., Pritchard A. J. Stability radii of systems with stochastic uncertainty and their optimization by output feedback // SIAM journal on control and optimization. — 1996. — Vol. 34, no. 6. — P. 1972–1998.

99. Bernstein D. S., Hyland D. C. Optimal projection equations for reduced-order modelling, estimation, and control of linear systems with multiplicative white noise // Journal of optimization theory and applications. — 1988. — Vol. 58, no. 3. — P. 387–409.

100. Rami M. A., Zhou X. Y. Linear matrix inequalities, Riccati equations, and indefinite stochastic linear quadratic controls // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2000. — Vol. 45, no. 6. — P. 1131–1143.

101. Haussmann U. G. On the existence of moments of stationary linear sys-

tems with multiplicative noise // SIAM Journal on Control. — 1974. — Vol. 12, no. 1. — P. 99–105.

102. Мильштейн Г. Н. О принципе эквивалентности для стохастических систем в задачах минимизации среднеквадратичного критерия // Автоматика и телемеханика. — 1974. — № 2. — С. 25–30.

103. Bernstein D. S., Haddad W. M. LQG control with an H^∞ performance bound: a Riccati equation approach // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1989. — Vol. 34, no. 3. — P. 293–305.

104. Sasagawa T. On the exponential stability and instability of linear stochastic systems // International Journal of Control. — 1981. — Vol. 33, no. 2. — P. 363–370.

105. Ряшко Л. Б. Стабилизация линейных стохастических систем с возмущениями, зависящими от состояния и управления // Прикладная математика и механика. — 1979. — Т. 43, № 4. — С. 612.

106. Dragan V., Morozan T., Stoica A. H^2 optimal control for linear stochastic systems // Automatica. — 2004. — Vol. 40, no. 7. — P. 1103–1113.

107. Mendel J., Gieseking D. Bibliography on the linear-quadratic-Gaussian problem // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1971. — Vol. 16, no. 6. — P. 847–869.

108. Panossian H. V. Review of linear stochastic optimal control systems and applications // Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design. — 1989. — Vol. 111, no. 4. — P. 399.

109. Willems J. C. The LQG-problem: A brief tutorial exposition // Stochastic Systems: The Mathematics of Filtering and Identification and Applications. — Springer, 1981. — P. 29–44.

110. Arnold L. Stochastic differential equations: Theory and applications. — John Wiley & John Wiley & Sons, 1974.

111. Verriest E. I., Florchinger P. Stability of stochastic systems with uncertain time delays // Systems & Control Letters. — 1995. — Vol. 24, no. 1. — P. 41–47.

112. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости стохастических систем // Проблемы передачи информации. — 1966. — Т. 2, № 3. — С. 76–91.

113. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — Наука, 1969.

114. Damm T. Rational matrix equations in stochastic control. — Springer Berlin Heidelberg, 2004. — ISBN: 3540205160.

115. Kleinman D. L. Optimal stationary control of linear systems with control-dependent noise // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1969. — Vol. 14, no. 6. — P. 673–677.

116. Jankunas A., Khasminskii R. Z. Estimation of parameters of linear homogeneous stochastic differential equations // Stochastic processes and their applications. — 1997. — Vol. 72, no. 2. — P. 205–219.

117. Трушкова Е. А. Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 6. — С. 151–159.

118. Черноусько Ф. Л. Оптимизация процессов управления и наблюдения в динамической системе при случайных возмущениях // Automation and Remote Control. — 1972. — Т. 33, № 4. — С. 562–569.

119. Khrustalev M. M., Rumyantsev D. S., Tsar'kov K. A. Optimization of quasilinear stochastic control-nonlinear diffusion systems // Automation and Remote Control. — 2017. — Vol. 78, no. 6. — P. 1028–1045.

120. Хрусталёв М. М., Румянцев Д. С., Царьков К. А. Оптимизация квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 6. — С. 84–105.

121. Хрусталёв М. М., Царьков К. А. Достаточные условия относительного минимума в задаче оптимального управления квазилинейными стохастическими системами // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 12. — С. 83–102.

122. Халина А. С., Хрусталёв М. М. Оптимизация облика и стабилизация управляемых квазилинейных стохастических систем, функционирующих на неограниченном интервале времени. // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2017. — № 1. — С. 65–88.

123. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. № 82. — Наука, 1985.

124. Хрусталёв М. М., Онегин Е. Е. Необходимые и достаточные условия в задаче оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 7. — С. 89–104. —

Khrustalev M. M., Onegin E. E. Necessary and sufficient conditions for optimal stabilization of quasi-linear stochastic systems // Automation and Remote Control. – 2019. – Vol. 80. no. 7. – P. 1252-1264.

125. Онегин Е. Е. Оптимальная стабилизация квазилинейной стохастической системы с управляемыми параметрами // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2019. — Т. 20, № 10. — С. 589–599.

126. Хрусталёв М. М., Онегин Е. Е. Оптимальное подавление возмущений в квазилинейной стохастической системе, функционирующей на неограниченном интервале времени, при управлении по выходу // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого) / ИПУ РАН. — Москва, 2016. — С. 402–404. — Onegin E., Khrustalev M. The Optimal Disturbance Suppression Problem on the Infinite Time Interval for Quasilinear Stochastic Systems with Output Feed-back // Proceedings of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). IEEE, 2016, http://ieeexplore.ieee.org/document/7541193/.

127. Онегин Е. Е., Хрусталёв М. М. Оптимальная стабилизация квазилинейной стохастической системы с управляемыми параметрами // Материалы 14-й Международной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"(конференция Пятницкого) (Москва, 2018). — Москва : ИПУ РАН, 2018. — С. 311–314. — Onegin E., Khrustalev M. Optimal stabilisation of a quasilinear stochastic system with controllable parameters / Proceedings of 2018 14th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear

Control Systems (Pyatnitskiys Conference), STAB 2018. M.: IEEE, 2018, https://ieeexplore.ieee.org/document/840838.

128. Хрусталёв М. М., Онегин Е. Е. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов для квазилинейных стохастических систем, функционирующих на неограниченном интервале времени // Программные системы: теория и приложения. — 2015. — Т. 6, № 2. — С. 29–44.

129. Хрусталёв М. М., Онегин Е. Е. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов для квазилинейных стохастических систем // Материалы 19-ой Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015, Алушта). — Алушта : МАИ, 2015. — С. 669–672.

130. Онегин Е. Е. Асимптотическая стабилизация спутника с упругой штангой при наличии случайных возмущений // Тезисы докладов 14-й Международной конференции «Авиация и космонавтика-2015». — МАИ, 2015. — С. 442–443.

131. Онегин Е. Е., Хрусталёв М. М. Оптимальное подавление случайных возмущений при управлении по выходу в квазилинейных стохастических системах на неограниченном интервале времени // Сборник тезисов докладов 42-ой Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения-2016». — Т. 1. — Москва : МАИ, 2016. — С. 469–470.

132. Онегин Е. Е., М. Хрусталёв М. Субоптимальная стабилизириующая стратегия управления линейной стохастической системой с управляе-

мыми параметрами // Труды 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019). — Москва : ИПУ РАН, 2019. — С. 870–874.

133. Онегин Е. Е. Программный комплекс для решения задач оптимальной стабилизации и моделирования квазилинейных стохастических систем // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018616557. Федеральная служба по интеллектуальной собственности. — 04.06.2018.

134. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории стабилизации спутников с упругими стержнями // Теория и системы управления. — 2004. — № 6. — С. 150-163.

135. Хрусталёв М. М., Румянцев Д. С. Синтез стратегий оптимального управления гибким спутником при информационных ограничениях // Вестник Московского авиационного института. — 2008. — Т. 15, № 2. — С. 147–154.

136. Лебедев А. А., Красильщиков М. Н., Малышев В. В. Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов. — Машиностроение, 1974.

137. Статистическая динамика и оптимизация управления летательных аппаратов / А. А. Лебедев, В. Т. Бобронников, М. Н. Красильщиков, В. В. Малышев. — Машиностроение, 1985.