



Научная статья / Original Article

УДК 532.5.032

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188107>

EDN: <https://www.elibrary.ru/OIUFXX>

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЪЁМАХ

Чжан Юе , А.Н. Темнов 

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет),

г. Москва, Россия


 antt45@mail.ru

Цитирование: Чжан Юе, Темнов А.Н. Собственные колебания вязкой стратифицированной жидкости в ограниченных объёмах // Труды МАИ: электрон. журнал. № 147. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188107>

Аннотация. В статье исследуется влияние вязкости на собственные частоты малых колебаний несжимаемой стратифицированной жидкости, полностью заполняющей неподвижный сосуд. На основе методов функционального анализа получены общие спектральные свойства для полости произвольной формы, включая расположение собственных чисел и условия существования осцилляторных мод. Для численного анализа колебаний маловязкой жидкости применяется метод пограничного слоя, позволяющий получить поправки первого порядка к частотам и декрементам затухания. Приведены точные и приближённые решения для сосудов в форме прямоугольного и круглого цилиндров, а также эллипсоида вращения. Показано, что стратификация приводит к появлению длительно существующих внутренних волн с малыми декрементами затухания.

Ключевые слова: метод пограничного слоя; волновое уравнение Пуанкаре; проблема С.Л. Соболева; стратификация; спектр; вязкость.

FREE OSCILLATIONS OF A VISCOUS STRATIFIED FLUID IN LIMITED CONTAINERS

Zhang Yue , A.N. Temnov 

Bauman Moscow State Technical University (National Research University), Moscow, Russia

 antt45@mail.ru

Citation: Zhang Yue, Temnov A.N. Free oscillations of a viscous stratified fluid in limited containers // Trudy MAI. 2026. No. 147. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188107>

Abstract. The paper investigates the effect of viscosity on the natural frequencies of small oscillations of an incompressible stratified fluid completely filling a stationary vessel. Using functional analysis methods, general spectral properties are derived for cavities of arbitrary shape, including the distribution of eigenvalues and the conditions for the existence of oscillatory modes. For the numerical analysis of low-viscosity fluid oscillations, the boundary layer method is employed. This approach enables the calculation of first-order corrections to both the oscillation frequencies and the damping decrements. Exact and approximate solutions are presented for vessels shaped as rectangular cylinders, circular cylinders, and rotational ellipsoids. The study demonstrates that fluid stratification gives rise to long-lasting internal waves characterized by small damping decrements. These findings highlight the significant role of stratification in sustaining internal wave motion over extended periods.

Keywords: boundary layer method; Poincaré wave equation; S. L. Sobolev problem; stratification; spectrum; viscosity.

Введение

Стратифицированные жидкости, характеризующиеся изменением плотности под действием гравитационных или температурных полей, демонстрируют уникальные волновые явления, отсутствующие в однородных средах. Эти явления играют ключевую роль в океанографии, метеорологии и астрофизике [1,2]. Актуальность задачи о колебаниях стратифицированной

жидкости в ограниченных областях связана с приложениями в теории сейш, динамике топливных баков и гироскопических системах [3-7].

Динамика стратифицированной жидкости принципиально отличается от однородной и описывается не уравнением Лапласа, а уравнением типа Пуанкаре, которое в сочетании с граничными условиями образует задачу С.Л. Соболева. Однако, несмотря на значительное число теоретических работ [8-14], количество исследований, сочетающих теоретический анализ с практическими расчётами колебаний вязкой стратифицированной жидкости [15], в настоящее время является недостаточным.

В данной работе рассматривается задача о свободных колебаниях вязкой стратифицированной жидкости в произвольной области. Теоретическая часть посвящена операторной постановке задачи и качественному анализу спектра, вторая часть — применению метода пограничного слоя для оценки влияния вязкости и сравнению приближённых решений с точными для сосудов простой формы.

Постановка задачи и переход к операторному уравнению

Постановка задачи

Пусть неподвижный сосуд объёмом $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ заполнен полностью вязкой несжимаемой стратифицированной жидкостью, плотность которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Oz : $\rho_0 = \rho_0(z)$ и справедливы неравенства

$$0 < m \leq \rho_0(z) \leq M < \infty, \quad \vec{x} \in \Omega \quad (1.1)$$

Будем считать, что на жидкость действует однородное гравитационное поле с интенсивностью $\vec{g} = -g\vec{k}$, где \vec{k} — орт оси Oz декартовой системы координат (x, y, z) и в состоянии покоя выполняется основной закон гидростатики $p_0(z) = p_0(0) - g \int_0^z \rho_0(\xi) d\xi$.

Мы будем рассматривать в основном случай устойчивости стратификации жидкости:

$$0 < N_{min}^2 \leq N^2(z) \leq N_{max}^2 = N_0^2 < \infty, \quad N^2(z) = -\frac{g\rho_0'(z)}{\rho_0(z)}, \quad \rho_0(0) > 0 \quad (1.2)$$

где $N^2(z)$ — квадрат частоты плавучести (частоты Вяйсяля-Брента), которую будем считать непрерывной функцией переменной z .

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{V} = \vec{V}(\vec{x}, t)$, $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, поле скоростей в жидкости, $p = p(x, t)$ — отклонение поля давления от равновесного давления $p_0(z)$, а через $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ — отклонение поля плотности от исходного поля $\rho_0 = \rho_0(z)$. Линеаризованные уравнения для определения функций \vec{V}, ρ, p в приближении Буссинеска, могут быть получены из уравнений движения несжимаемой ньютоновской вязкой жидкости [16] и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_0} (-\nabla p - g\rho\vec{k} + \mu\Delta\vec{V}) = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho_0 \cdot \vec{V} &= 0, \nabla \cdot \vec{V} = 0, \vec{x} \in \Omega, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где μ — коэффициент динамической вязкости жидкости, $\mu > 0$.

Уравнения (1.3) дополним граничными и начальными условиями

$$\vec{V} = \vec{0}, \vec{x} \in S = \partial\Omega, \quad (1.4)$$

$$\vec{V}(\vec{x}, 0) = \vec{V}^0(\vec{x}), \rho(\vec{x}, 0) = \rho^0(\vec{x}) \quad (1.5)$$

Получим из (1.3)-(1.4) закон баланса энергии. Для этого умножим первое уравнение (1.3) на $\rho_0(z)\vec{V}(\vec{x}, t)$, второе эволюционное уравнение (1.3) — на функцию $g^2[\rho_0(z)N^2(z)]^{-1}\rho(\vec{x}, t)$, проинтегрируем по Ω и сложим результаты. Применяя далее формулу Грина, используя условие соленидальности (1.3) и краевое условие (1.4), получим закон баланса энергии:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 |\vec{V}|^2 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 N^2 V_z^2 d\Omega \right\} = -\mu \int_{\Omega} |\nabla \times \vec{V}|^2 d\Omega \quad (1.6)$$

Здесь в фигурных скобках стоит полная энергия системы; первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию движущейся жидкости, а второе — потенциальную энергию, обусловленную наличием сил плавучести. Правая часть (1.6) характеризует диссипацию энергии за счёт вязких сил.

Полученный баланс энергии также показывает, что поле скоростей жидкости при каждом t можно рассматривать как элемент гильбертова пространства $L_2(\Omega, \rho_0)$ квадратично суммируемых вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{V}, \vec{v})_{\Omega} = \int_{\Omega} \rho_0(z) \vec{V}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) d\Omega \quad (1.7)$$

и использовать методы функционального анализа.

Обозначим через $J_0(\Omega, \rho_0)$ подпространство $L_2(\Omega, \rho_0)$, которое получается замыканием в норме $L_2(\Omega, \rho_0)$ множества

$$J_0(\Omega, \rho_0) = \{ \vec{V}(\vec{x}) \in C^1: \nabla \cdot \vec{V} = 0, \vec{x} \in \Omega; \vec{V} \cdot \vec{n} = 0, \vec{x} \in S \} \quad (1.8)$$

В качестве другого подпространства $L_2(\Omega, \rho_0)$ возьмём множество квазипотенциальных векторов:

$$G(\Omega, \rho_0) = \{ \vec{v} \in L_2(\Omega, \rho_0): \vec{v} = \frac{1}{\rho_0(z)} \nabla \Phi \} \quad (1.9)$$

Ортогональная сумма, введённых подпространств, образует гильбертово пространство $L_2(\Omega, \rho_0)$.

$$L_2(\Omega, \rho_0) = G(\Omega, \rho_0) \oplus J_0(\Omega, \rho_0) \quad (1.10)$$

Наряду с введёнными подпространствами, нам понадобятся также гильбертово пространство скалярных функций $H_2(\Omega)$ со скалярным произведением (см. (1.8))

$$(\varphi, \psi) = g^2 \int_{\Omega} [\rho_0(z) N^2(z)]^{-1} \varphi(\vec{x}) \psi(\vec{x}) d\Omega \quad (1.11)$$

а также пространство вектор-функций

$$H_2^1(\Omega) = \{ \vec{V}(\vec{x}) \in W_2^1(\Omega): \nabla \cdot \vec{V} = 0, \vec{x} \in \Omega; \vec{V} = 0, \vec{x} \in S \} \quad (1.12)$$

со скалярным произведением

$$(\vec{V}, \vec{v})_{1, \Omega} = \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{V}) \cdot (\nabla \times \vec{v}) d\Omega \quad (1.13)$$

Как следует из (1.2), норма, порождённая (1.11), эквивалентна обычной норме пространства скалярных функций $L_2(\Omega)$.

Переход к операторному уравнению

В силу условия соленоидальности поля \vec{V} , граничного условия (1.4) и определений (1.8), (1.9) получаем, что

$$\vec{V} \in J_0(\Omega, \rho_0), \frac{1}{\rho_0(z)} \nabla p \in G(\Omega, \rho_0) \quad (1.14)$$

Пусть P_0 — оператор проектирования на подпространство $J_0(\Omega, \rho_0)$, отвечающий ортогональному разложению (1.11). Подействуем операторами P_0 и

$Q_0 = I - I_0$ на первое уравнение (1.3). Мы придём вместо (1.3) к следующей равносильной системе уравнений:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\mu A \vec{V} - C^* \rho, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = C \vec{V} \quad (1.15)$$

где

$$C \vec{V} = -\rho'_0(z) \vec{V} \cdot \vec{k}, \quad C^* \rho = P_0 \left[\frac{1}{\rho_0(z)} g \rho \vec{k} \right] \quad (1.16)$$

$$A \vec{V} = -P_0 \left[\frac{1}{\rho_0(z)} \Delta \vec{V} \right] \quad (1.17)$$

$$D(A) = \{ \vec{V} \in W_2^2(\Omega) : \nabla \cdot \vec{V} = 0, \vec{x} \in \Omega; \vec{V} = 0, \vec{x} \in S \}$$

$$\frac{1}{\rho_0(z)} \nabla p = Q_0 \left[\frac{1}{\rho_0(z)} \mu \Delta \vec{V} - g \rho \vec{k} \right] \quad (1.18)$$

В работе [8] показано, что операторы A, C и C^* обладают следующими свойствами.

Лемма 1. Оператор A — неограниченный самосопряжённый положительно определенный оператор; спектр $\{\lambda_n(A)\}_{n=1}^{\infty}$ оператора A состоит из конечно-кратных положительных собственных значений с единственной предельной точкой $\lambda = +\infty$, а система собственных элементов $\{\vec{V}_n(A)\}_{n=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис как в $J_0(\Omega, \rho_0)$, так и в $H_2^1(\Omega)$.

Собственные числа $\lambda_n(A)$ имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_n(A) = C_A^{-2/3} n^{2/3} [1 + O(1)], \quad n \rightarrow \infty \quad (1.19)$$

$$C_A = \frac{1}{3\pi^2} \int_{\Omega} [\rho_0(z)]^{3/2} d\Omega$$

Операторы $C: J_0(\Omega, \rho_0) \rightarrow K_2(\Omega)$ и $C^*: K_2(\Omega) \rightarrow J_0(\Omega, \rho_0)$, определённые соотношениями (1.16), суть взаимно сопряжённые ограниченные операторы, для которых

$$\|C\| = \|C^*\| \leq N_0 \quad (1.20)$$

Качественное исследование спектра нормальных колебаний

Будем рассматривать соответствующую задачу о нормальных колебаниях стратифицированной жидкости, т.е. о решениях, зависящих от времени по закону $e^{-\lambda t}$:

$$\{ \vec{V}(\vec{x}, t), p(\vec{x}, t), \rho(\vec{x}, t) \} = e^{-\lambda t} \{ \vec{V}(\vec{x}), p(\vec{x}), \rho(\vec{x}) \} \quad (1.21)$$

Вместо (1.3)-(1.4) мы приходим к спектральной задаче вида

$$\lambda \vec{V} = \mu A \vec{V} + C^* \rho, \quad -\lambda \rho = C \vec{V} \quad (1.22)$$

где операторы C и C^* определены в (1.16), и будем считать, что $\lambda \neq 0$; тогда, исключая ρ , приходим к уравнению

$$\lambda \vec{V} = \mu A \vec{V} - \frac{1}{\lambda} B_0 \vec{V}, \quad B_0 \vec{V} = C^* C \vec{V} = P_0 [N^2(z) V_z \vec{k}] \quad (1.23)$$

Оператор B_0 из (1.23) самосопряжён в $J_0(\Omega, \rho_0)$, неотрицателен и ограничен: $\|B_0\| = N_0^2$. Осуществим в (1.23) замену

$$\vec{V} = A^{-1/2} \vec{\xi}, \quad \vec{\xi} \in J_0(\Omega, \rho_0) \quad (1.24)$$

и применим к обеим частям полученного уравнения оператор $A^{-1/2}$. Мы придём к уравнению

$$\mu \vec{\xi} = \lambda A^{-1} \vec{\xi} + \frac{1}{\lambda} B \vec{\xi}, \quad B = A^{-1/2} B_0 A^{-1/2} \quad (1.25)$$

которое будет играть в дальнейшем основную роль; оно описывает процесс нормальных колебаний стратифицированной вязкой жидкости.

В уравнении (1.25) оператор A^{-1} вполне непрерывен и положителен в $J_0(\Omega, \rho_0)$, а из определения (1.25) оператора B получаем, что B самосопряжён и вполне непрерывен.

Общая теорема о спектре

Уравнение вида (1.25) в приложениях впервые встретилось в работе С.Г. Крейна [17], где изучалась задача о нормальных колебаниях однородной вязкой жидкости в открытом сосуде. Рассматриваемая в настоящей статье задача о нормальных колебаниях вязкой стратифицированной жидкости оказалась также принадлежащей к этому классу задач. Поэтому при последующем изложении ограничимся формулировкой результатов, а также выявлением физических эффектов, присущих данной задаче.

Перепишем уравнение (1.25) в виде

$$L(\lambda) \vec{\xi}, \quad L(\lambda) = I - \frac{1}{\mu} (\lambda A^{-1} + \lambda^{-1} B) \quad (1.26)$$

мы пришли к изучению спектра операторного пучка (оператор — функции) $L(\lambda)$, рационально зависящего от спектрального параметра λ . В силу свойств операторов A^{-1} и B мы имеем при фиксированных $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $L(\lambda)$, близкий к единичному, т.е. отличающийся от единичного на вполне непрерывный оператор.

Очевидно, оператор — функция $L(\lambda)$ аналитична в области $G = \{\lambda \in \mathbb{C}: 0 < |\lambda| < \infty\}$, так как при $\lambda < 0$ оператор $L(\lambda)$ положительно определён и потому непрерывно обратим, то в силу леммы М.В. Келдыша ([18], теорема 1.6.1, с.39) получаем, что $L(\lambda)$ имеет ограниченный обратный оператор всюду в области G , за исключением некоторых изолированных в G точек, в которых уравнение (1.26) имеет конечное число ненулевых решений. Указанных точек, очевидно, может быть не более счётного множества, и сгущаться они могут лишь на границе к области G , т.е. к точкам $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$.

Общая теорема о спектре.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1.2). Тогда:

1⁰. Спектр задачи (1.22) о нормальных колебаниях вязкой стратифицированной жидкости дискретен, состоит из счётного множества изолированных собственных значений с двумя предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$.

2⁰. Все собственные значения λ расположены в правой полуплоскости $Re\lambda \geq 0$ и, за исключением возможного конечного их числа, вещественны.

3⁰. Невещественные собственные значения расположены симметрично относительно вещественной оси в полукольце

$$\frac{\mu}{2\|A^{-1}\|} < |\lambda| < \frac{2N_0\|A^{-1}\|}{\mu}, Re\lambda \geq 0 \quad (1.27)$$

Если выполнено условие

$$N_0 \leq \frac{\mu}{2\|A^{-1}\|} \quad (1.28)$$

то не вещественных собственных чисел нет.

4⁰. Ветвь $\{\lambda_{\infty n}\}_{n=1}^{\infty}$ вещественных собственных значений, имеющая в качестве предельной точку $\lambda = +\infty$, имеет асимптотическое поведение

$$\lambda_{\infty n} = \mu \lambda_n(A)[1 + O(1)], n \rightarrow \infty \quad (1.29)$$

А ветвь $\{\lambda_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$ вещественных собственных значений, имеющая в качестве предельной точку $\lambda = 0$, обладает асимптотическим поведением

$$\lambda_{0n} = \frac{1}{\mu} \lambda_n(B)[1 + O(1)], n \rightarrow \infty \quad (1.30)$$

где $\lambda_n(A)$ и $\lambda_n(B)$ — собственные числа операторов A и B .

Следствием теоремы 1 является следующий важный физический вывод.

Теорема 2. В задаче о нормальных колебаниях устойчиво стратифицированной вязкой жидкости, заполняющей произвольный сосуд, имеются диссипативные волны, обусловленные наличием сил вязкости; этим волнам отвечают аperiodические затухающие режимы с декрементами затухания, стремящимися к бесконечности, и асимптотически совпадающими с соответствующими декрементами в нестратифицированной жидкости (см. (1.29)).

Наличие стратификации жидкости порождает внутренние волны, для которых декременты затухания могут быть как угодно малыми (см. (1.30)). Если стратификация жидкости достаточно мала (выполнено условие (1.28)), то в жидкости не существуют осциллирующие во времени затухающие режимы нормальных колебаний. Необходимым условием для их наличия является условие

$$N_0 > \frac{\mu}{2\|A^{-1}\|} = \frac{1}{2}\mu\lambda_1(A) \quad (1.31)$$

Таким образом, если вязкая несжимаемая жидкость стратифицирована по плотности, то в ней наряду с диссипативными волнами появляется новый тип волн — внутренние волны с как угодно малыми декрементами затухания и потому существующие длительное время. На рисунке 1 дана геометрическая интерпретация теорем 1,2. Здесь $r_{\pm} = |2\|A^{-1}\||^{-1} \left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4N_0^2\|A^{-1}\|^2} \right)$.

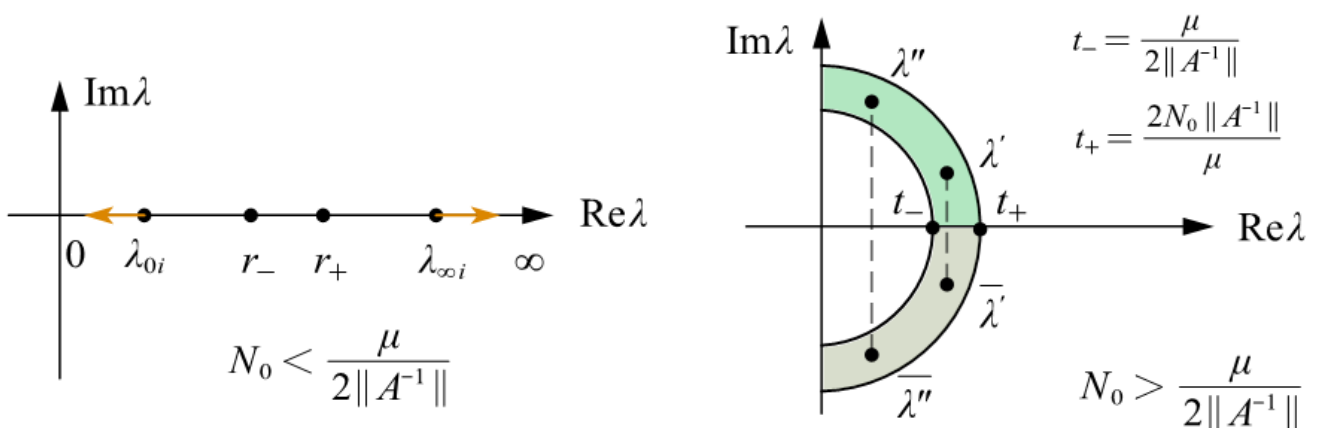


Рисунок 1- Спектр собственных чисел диссипативных и внутренних волн

Метод пограничного слоя для оценки влияния вязкости в первом приближении

Для исследования движения жидкости с большим числом Рейнольдса (маловязкой жидкости) применим метод Вишика-Люстерника [19]. В нашем случае $\varepsilon \ll 1$. Положим $\lambda = -\sigma$, где σ - комплексная собственная частота, представляемая в виде ряда.

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon^1 \cdot \sigma_1 + \dots + \varepsilon^n \cdot \sigma_n \quad (2.1)$$

Здесь n — степень приближения и количество итерации; $\sigma_0 = i\omega_0$, ω_0 — собственная частота при нулевом приближении, т.е. собственная частота идеальной стратифицированной жидкости. σ_0 удовлетворяет уравнение

$$\sigma_0 \cdot \vec{V} + \frac{N^2}{\sigma_0} \cdot V_z \vec{k} = -\nabla p \quad (2.2)$$

или в криволинейной системе координат

$$\sigma_0 \cdot V_i + \frac{N^2}{\sigma_0} \cdot \cos(\vec{e}_i, \vec{k}) \cdot \sum_{j=1}^3 V_j \cdot \cos(\vec{e}_j, \vec{k}) = -\frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial p}{\partial q_i} \quad (2.3)$$

Искомые величины \vec{V} и p можно выписать следующим образом.

$$\begin{cases} V_i = \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \cdot [V_i^{(j)} + \delta_{\Sigma}^{(j)} V_i] \\ p = \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \cdot [p^{(j)} + \delta_{\Sigma}^{(j)} p] \end{cases} \quad (2.4)$$

где $\delta_{\Sigma}^{(j)}$ — слагаемое, характеризующее влияние пограничного слоя на изменённое граничное условие (условие прилипания). Функция $\delta_{\Sigma}^{(j)} V_i$ должна затухнуть вдоль пограничного слоя по координате q_1 , т.е. вдали от стенки движение принимается как в случае идеальной жидкости.

Введём растянутую координату q , чтобы $q = \varepsilon^{-1} q_1$. Для определения $\delta_{\Sigma}^{(0)} V_i$ вместо (1.3) получим уравнение одной формы при $j = 2, 3$ на Σ .

$$\begin{aligned} \sigma_0 \cdot \delta_{\Sigma}^{(0)} V_j + \frac{N^2}{\sigma_0} \cdot \delta_{\Sigma}^{(0)} V_j \cdot \cos^2(\vec{e}_j, \vec{k}) &= \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{H_1^2(0)} \cdot \frac{\partial^2 \delta_{\Sigma}^{(0)} V_j}{\partial q^2}, j = 2, 3 \\ \frac{\partial^2 \delta_{\Sigma}^{(0)} V_j}{\partial q^2} - H_1^2(0) \cdot \delta_{\Sigma}^{(0)} V_j \cdot \left[\sigma_0 + \frac{N^2}{\sigma_0} \cdot \cos^2(\vec{e}_j, \vec{k}) \right] &= 0, j = 2, 3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения

$$\delta_{\Sigma}^{(0)} V_j = C_j e^{-H_1(0) R_j \cdot q}, j = 2, 3 \quad (2.6)$$

где

$$R_j = \sqrt{\sigma_0 + \frac{N^2}{\sigma_0} \cdot \cos^2(\vec{e}_j, \vec{k})}, \quad j = 2, 3 \quad (2.7)$$

Из условия прилипания на Σ в нулевом приближении

$$V_j^{(0)} + \delta_\Sigma^{(0)} V_j = 0, \quad j = 2, 3 \quad (2.8)$$

можно определить, когда $q = 0$, $\delta_\Sigma^{(0)} V_j = -V_j^{(0)}$. Тогда $C_j = -V_j^{(0)}$.

$$\delta_\Sigma^{(0)} V_j = -V_j^{(0)} e^{-H_1^{(0)} R_j \cdot q}, \quad j = 2, 3 \quad (2.9)$$

что соответствует определению функции пограничного слоя, при $q \rightarrow \infty$, $\delta_\Sigma^{(0)} V_j \rightarrow 0$, $j = 2, 3$.

Для определения $\delta_\Sigma^{(0)} V_1$ вместо V_2 и V_3 подставим $\delta_\Sigma^{(0)} V_2$ и $\delta_\Sigma^{(0)} V_3$ из (2.9) в уравнение несжимаемости в криволинейной системе, откуда

$$\delta_\Sigma^{(0)} V_1 = -\frac{\varepsilon}{H_2^{(0)} H_3^{(0)}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_3^{(0)}}{R_2} V_2^{(0)} e^{-H_1^{(0)} R_2 \cdot q} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_2^{(0)}}{R_3} V_3^{(0)} e^{-H_1^{(0)} R_3 \cdot q} \right] \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

Чтобы условие непроницаемости $V_1 = V_1^{(0)} + \delta_\Sigma^{(0)} V_1 + \varepsilon V_1^{(1)} + \dots$ выполнилось, учитывая $V_1^{(0)} = 0$, имеем

$$V_1^{(1)} = \frac{1}{H_2^{(0)} H_3^{(0)}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_3^{(0)}}{R_2} V_2^{(0)} e^{-H_1^{(0)} R_2 \cdot q} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_2^{(0)}}{R_3} V_3^{(0)} e^{-H_1^{(0)} R_3 \cdot q} \right] \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

в пограничном слое. Другие два компонента скорости находятся через условие $\nabla \cdot \vec{V}^{(1)} = 0$.

$$V_2^{(1)} = \varepsilon^{-1} V_2^{(0)} e^{-H_1^{(0)} R_2 \cdot \varepsilon^{-1} q_1}, \quad V_3^{(1)} = \varepsilon^{-1} V_3^{(0)} e^{-H_1^{(0)} R_3 \cdot \varepsilon^{-1} q_1} \quad (2.12)$$

Запишем уравнение движения в первом приближении. Влияние лапласиана скорости компенсируется членами функций пограничного слоя.

$$(\sigma_0 + \varepsilon \sigma_1) [\vec{V}^{(0)} + \varepsilon \vec{V}^{(1)}] + \frac{N^2}{\sigma_0 + \varepsilon \sigma_1} [V_z^{(0)} + \varepsilon V_z^{(0)}] \vec{k} = -\nabla [p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)}] \quad (2.13)$$

Раскрываем $\frac{1}{\sigma_0 + \varepsilon \sigma_1}$ по ряду Тейлора до первого порядка малости.

$$\sigma_0 \vec{V}^{(0)} + \sigma_0 \varepsilon \vec{V}^{(1)} + \varepsilon \sigma_1 \vec{V}^{(0)} + \frac{N^2}{\sigma_0} V_z^{(0)} \vec{k} + \frac{N^2}{\sigma_0} \varepsilon V_z^{(1)} \vec{k} - \frac{N^2}{\sigma_0^2} \sigma_1 \varepsilon V_z^{(0)} \vec{k} + O(\varepsilon) = -\nabla p^{(0)} - \varepsilon \nabla p^{(1)} \quad (2.14)$$

Учитываем уравнение движения идеальной стратифицированной жидкости

$$\sigma_0 \cdot \vec{V}^{(0)} + \frac{N^2}{\sigma_0} \cdot V_z^{(0)} \vec{k} = -\nabla p^{(0)} \quad (2.15)$$

и сократим общий множитель ε . В результате получим уравнение для первого итерационного процесса.

$$\sigma_0 \vec{V}^{(1)} + \frac{N^2}{\sigma_0} V_z^{(1)} \vec{k} + \sigma_1 \left[\vec{V}^{(0)} - \frac{N^2}{\sigma_0^2} V_z^{(0)} \vec{k} \right] = -\nabla p^{(1)} \quad (2.16)$$

Помножим (2.15) в комплексно-сопряжённом виде на $\vec{V}^{(1)}$, а (2.16) на $\vec{V}^{(0)*}$ — комплексное сопряжённое $\vec{V}^{(0)}$. Исключив одинаковые слагаемые и проинтегрировав по всему объёму, занимаемому жидкостью, получим

$$\int_{\Omega} \nabla p^{(0)*} \vec{V}^{(1)} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla p^{(1)} \vec{V}^{(0)*} d\Omega = \sigma_1 \int_{\Omega} \left[|\vec{V}^{(0)}|^2 - \frac{N^2}{\sigma_0^2} |V_z^{(0)}|^2 \right] d\Omega \quad (2.17)$$

Первый интеграл запишем в следующем виде

$$\int_{\Omega} \nabla p^{(0)*} \vec{V}^{(1)} d\Omega = \int_{\Sigma} \nabla p^{(0)*} \int_0^{\infty} \vec{V}^{(1)} dq_1 d\Sigma \quad (2.18)$$

Из (2.17) окончательно получим поправку в собственных частотах.

$$\sigma_1 = - \frac{\int_{\Sigma} \frac{1}{H_1(0)} \left[|V_2^{(0)}|^2 \cdot R_2 + |V_3^{(0)}|^2 \cdot R_3 \right] d\Sigma}{\int_{\Omega} \left[|\vec{V}^{(0)}|^2 - \frac{N^2}{\sigma_0^2} |V_z^{(0)}|^2 \right] d\Omega} \quad (2.19)$$

Сравнительный анализ аналитического и приближённого решений на примере прямоугольного сосуда

Аналитическое решение плоской задачи

Введём функцию тока Ψ , где

$$V_y = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad V_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (3.1)$$

Задача, описываемой уравнениями (1.3)-(1.5) при постоянной частоте плавучести, сводится к следующему уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta_2 \Psi) - \nu \frac{\partial}{\partial t} (\Delta_2^2 \Psi) + N^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad y = 0, a; \quad z = 0, H \quad (3.3)$$

Решение уравнения (3.2) представим в виде

$$\Psi = \sum_{n,l=1}^{\infty} S_{nl}(t) \cos k_n y \cos k_l z, \quad k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad k_l = \frac{l\pi}{H}, \quad n, l = 1, 3, 5 \dots \quad (3.4)$$

Здесь функция $S_{nl}(t)$ — обобщённая координата волновых движений вязкой стратифицированной жидкости, удовлетворяющая уравнению

$$\ddot{S}_{nl} + \nu(k_n^2 + k_l^2)\dot{S}_{nl} + N^2 \frac{k_n^2}{k_n^2 + k_l^2} S_{nl} = 0 \quad (3.5)$$

Пусть $S_{nl} = S_0 e^{\sigma_{nl} t}$, σ_{nl} — комплексная частота. Из уравнения (3.5) следует уравнение для частоты

$$\sigma_{nl}^2 + \nu(k_n^2 + k_l^2)\sigma_{nl} + N^2 \frac{k_n^2}{k_n^2 + k_l^2} = 0 \quad (3.6)$$

и решение этого уравнения

$$\sigma_{nl} = -\frac{\nu}{2}(k_n^2 + k_l^2) \pm i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4N^2 k_n^2}{k_n^2 + k_l^2} - \nu^2(k_n^2 + k_l^2)^2} \quad (3.7)$$

которое представим в виде

$$\sigma_{nl} = d_{nl} \pm i\omega_{nl}$$

где $d_{nl} = -\frac{\nu}{2}(k_n^2 + k_l^2)$ — коэффициент затухания, а ω_{nl} — частота колебаний вязкой стратифицированной жидкости

$$\omega_{nl} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4N^2 k_n^2}{k_n^2 + k_l^2} - \nu^2(k_n^2 + k_l^2)^2} \quad (3.8)$$

Частота колебаний идеальной стратифицированной жидкости

$$\omega_{0nl}^2 = N^2 \frac{k_n^2}{k_n^2 + k_l^2} \quad (3.9)$$

Тогда ω_{nl} можно выражать через ω_{0nl}

$$\omega_{nl} = \frac{\omega_{0nl}}{2} \cdot \frac{\sqrt{4N^2 k_n^2 - \nu^2(k_n^2 + k_l^2)^3}}{N \cdot k_n} \quad (3.10)$$

Приближённая оценка плоской задачи

Из (2.19) видно, чтобы дать оценку в первом приближении, необходимо иметь решение в случае идеальной жидкости. При экспоненциальной стратификации частота плавучести будет постоянной. В этом случае допускается разделение переменных, и частоты идеальной жидкости образуют точечный спектр, плотно занимающий диапазон $[0, N^2]$.

Аналитическое решение задачи колебаний идеальной стратифицированной жидкости

$$\varphi_{n,l} = \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{l\pi z}{H}\right), \quad n, l = 1, 3, 5, \dots \quad (3.11)$$

В этом случае интегрирование (2.19) даёт результат

$$\sigma_{1n,l} = -\frac{(K_1+K_2)+i(K_1-K_2)}{K_3} \quad (3.12)$$

где

$$K_1 = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}}a, \quad K_2 = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}}H \frac{k_n}{k_l}, \quad K_3 = \frac{1}{2}aH \left(\frac{k_n^2}{k_l^2} + 1 \right) \quad (3.13)$$

Ниже представлен численный пример вычисления при $a = 2$ [м], $g = 9,81$ [м/с²], $\beta = 0,1$ [м⁻¹], $N_0 = \beta g$, $\nu = 8,93 \cdot 10^{-5}$ [м²/с].

На рисунке 3 отображается среднее квадратическое отклонение приближённой оценки от аналитического решения. Погрешность представляет собой среднеквадратичную девиацию.

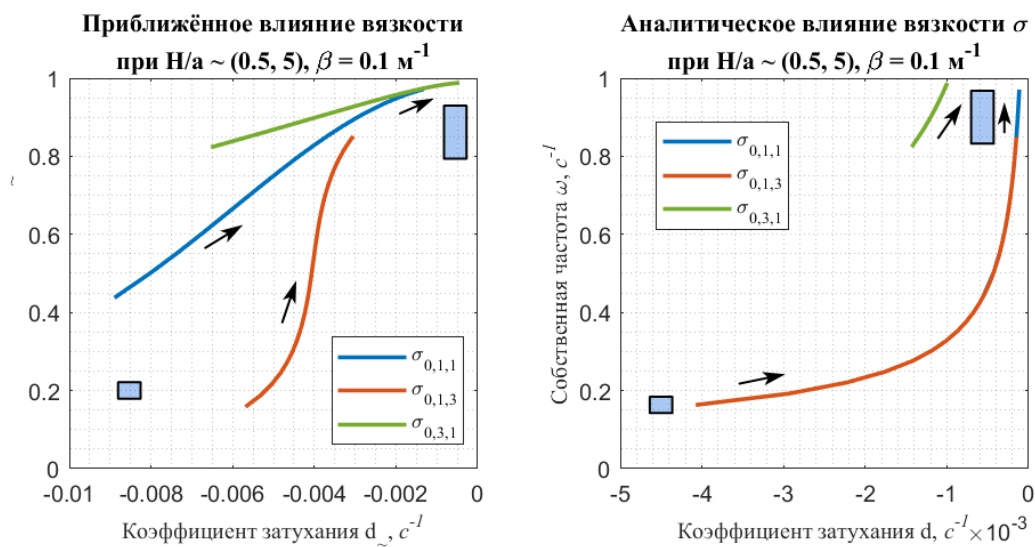


Рисунок 2 - Сравнение комплексной частоты

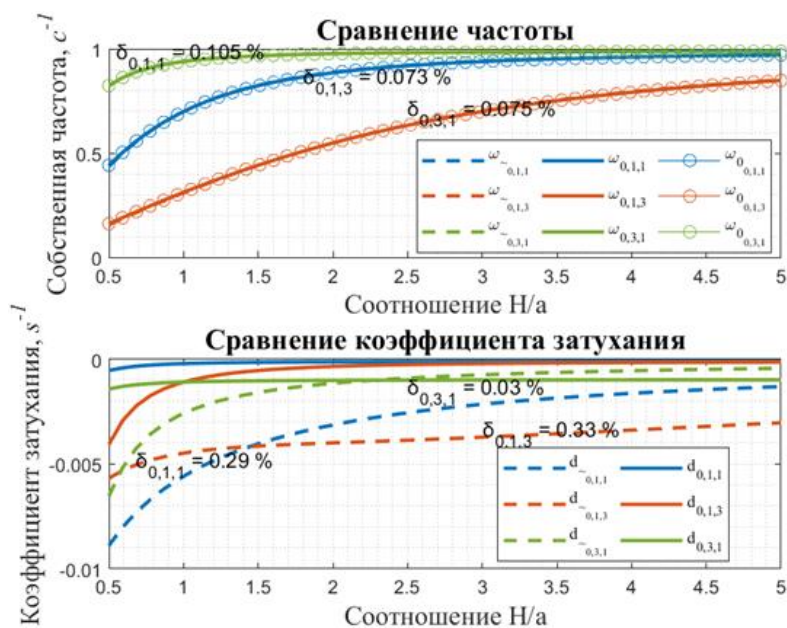


Рисунок 3 - Сравнение собственной частоты и коэффициента затухания

Оценка изменения собственных частот вязкой стратифицированной жидкости в сосудах определённой формы

Решение задачи для идеальной жидкости через функцию давления

Далее рассмотрим два частных случая. Пусть функция давления $p(\vec{x}, t) = p_0 \varphi(\vec{x}) e^{i\omega_0 t}$, $[p_0] = [M^2/c^2]$. Система уравнений движения идеальной стратифицированной жидкости в неподвижном сосуде приводит к уравнению

$$\Delta_2 \varphi - \frac{\omega_0^2}{N^2 - \omega_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1)$$

с граничным условием в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} - \frac{N^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}_0} = 0 \quad (4.2)$$

где Δ_2 — двумерный лапласиан, в декартовой системе координат $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, а в цилиндрической — $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$; \vec{n}_0 — нормальный единичный вектор в горизонтальной плоскости, описываемой функцией от (x, y) в декартовой или (r, θ) в цилиндрической системах координат.

Круглый цилиндрический сосуд

Собственная функция при двойном приближении Буссинеска (4.1) с удовлетворением граничного условия (4.2) для цилиндра круглого сечения $\Gamma(x, y) \times [0, -H]$, $\Gamma(x, y)$: круг радиуса r_0

$$\varphi_{m,n,l} = J_m \left(\frac{\xi_{mn}}{r_0} r \right) \cos m\theta \cos \frac{l\pi z}{H} \quad (4.3)$$

Собственное значение

$$\mu = \frac{\omega_0^2}{N^2} = \frac{\xi_{mn}^2}{\xi_{mn}^2 + \frac{l^2 \pi^2}{H^2} r_0^2} \leq 1 \quad (4.4)$$

По (2.19) вычисляется σ_1 . Числитель в (2.19) будет

$$\int_{\Sigma} \left[R_2 V_2^{(0)2} + R_3 V_3^{(0)2} \right] d\Sigma = \begin{cases} m = 0, & \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \cdot \frac{\xi_{0n}}{2} \cdot [J_0(\xi_{0n})]^2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\xi_{0n} H^2}{l r_0^2} + i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\xi_{0n} H^2}{l r_0^2} \right) \right] \\ m = 1, & \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \left[\left\{ \xi_{1n}^2 \left[\pi [J_0(\xi_{1n})]^2 + \frac{\xi_{0n} H^2}{l r_0^2} \right] + \pi [J_1(\xi_{1n})]^2 \cdot \left(\frac{H}{2r_0} - 2 \right) \right\} + \right. \\ & \left. + i \left\{ \xi_{1n}^2 \left[\pi [J_0(\xi_{1n})]^2 - \frac{\xi_{0n} H^2}{l r_0^2} \right] + \pi [J_1(\xi_{1n})]^2 \cdot \left(\frac{H}{2r_0} - 2 \right) \right\} \right] \end{cases} \quad (4.5)$$

Знаменатель в (2.19)

$$\int_{\Omega} \left[V^{(0)2} + \frac{N^2}{\omega^2} V_z^{(0)2} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left[V^{(0)2} + \frac{1}{\mu} V_z^{(0)2} \right] d\Omega =$$

$$= \begin{cases} m = 0, & \xi_{0n}^2 [J_0(\xi_{0n})]^2 \cdot \left(\frac{\xi_{0n}^2}{2\pi l^2} \cdot \frac{H^3}{r_0^2} + \frac{5\pi H}{16} \right) \\ m = 1, (\xi_{1n}^2 - 1) \left\{ \left(\frac{\xi_{0n}^2}{2\pi l^2} \cdot \frac{H^3}{r_0^2} + \frac{\pi H}{4} \right) [J_1(\xi_{1n})]^2 + [J_0(\xi_{1n})]^2 \right\} - \frac{\pi H}{4} [J_1(\xi_{1n})]^2 \end{cases} \quad (4.6)$$

Принимая $g = 9.81 \text{ м/с}^2$, $\beta = 0.1 \text{ м}^{-1}$, кинематическая вязкость воды $\nu = 8.93 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, получены следующие графики при соотношении $H/r_0 \in (0,10]$ (рисунки 4 – 7).

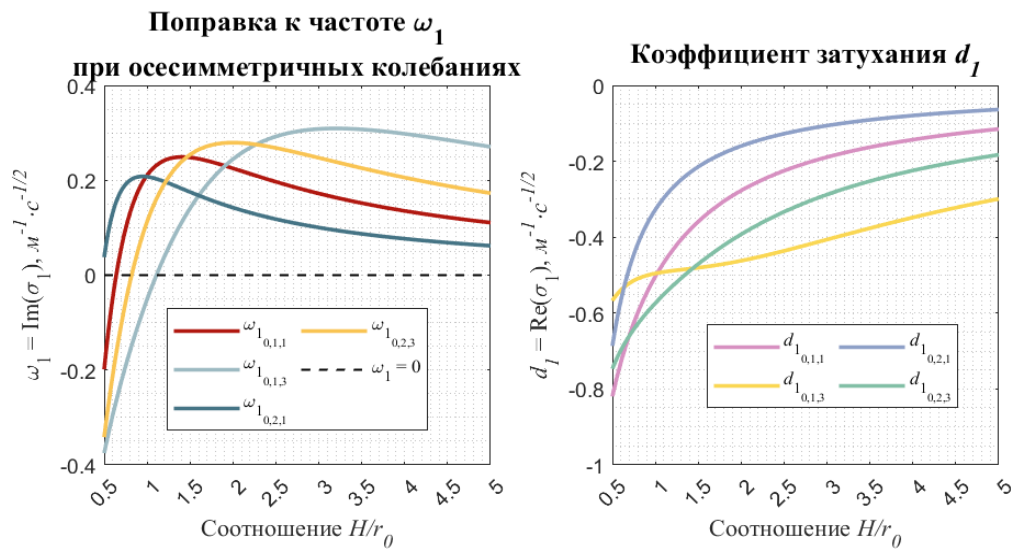


Рисунок 4 - Зависимость ω_1 и d_1 от соотношения H/r_0 в случае осесимметричных колебаний при $m = 0$

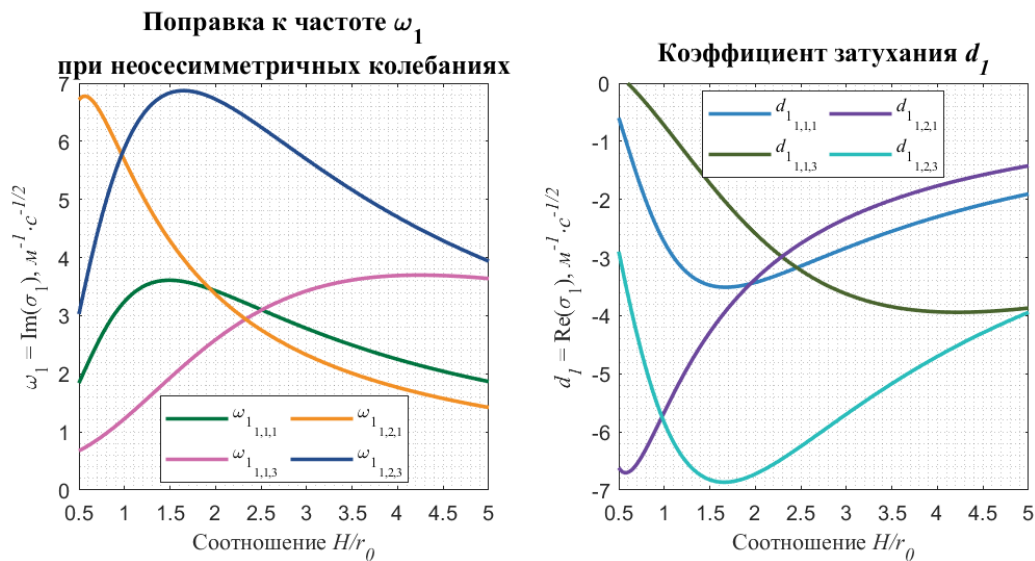


Рисунок 5 - Зависимость ω_1 и d_1 от соотношения H/r_0 в случае асимметричных колебаний при $m = 1$

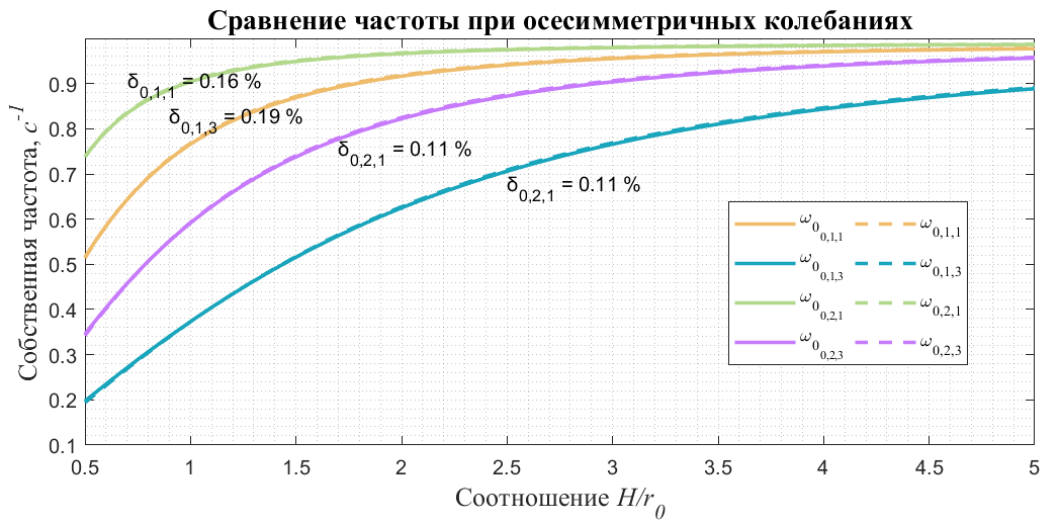


Рисунок 6 - Сравнение частоты идеальной и вязкой жидкости с приближением 1-го порядка в случае осесимметричных колебаний

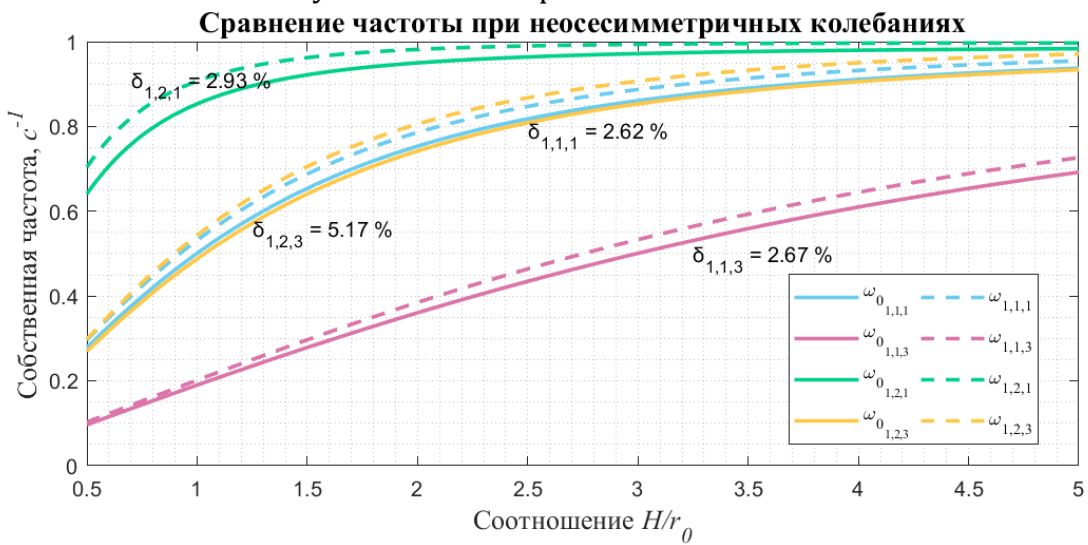


Рисунок 7 - Сравнение частоты идеальной и вязкой жидкости с приближением 1-го порядка в случае асимметричных колебаний

Сосуд в форме эллипсоида вращения

Для сложной геометрии применяется численное интегрирование.

$$\sigma_1 = - \frac{\int_{\Sigma} \Phi_{\Sigma}(v_1, \eta_1) d\Sigma}{\int_{\Omega} \Phi_{\Omega}(\xi_1, v_1, \eta_1) d\Omega} \tag{4.7}$$

$$\int_{\Sigma} \Phi_{\Sigma}(v_1, \eta_1) d\Sigma = \int_{v_1} \int_{\eta_1} \frac{1}{H_{\xi_1}(\xi_0)} \Phi_{\Sigma}(v_1, \eta_1) \cdot |\vec{r}'_{v_1} \times \vec{r}'_{\eta_1}| d\eta_1 dv_1 \tag{4.8}$$

где $\xi_0 = a_3 / \sqrt{a^2 - a_3^2}$ в системе координат x, y, z или ξ_1, v_1, η_1 .

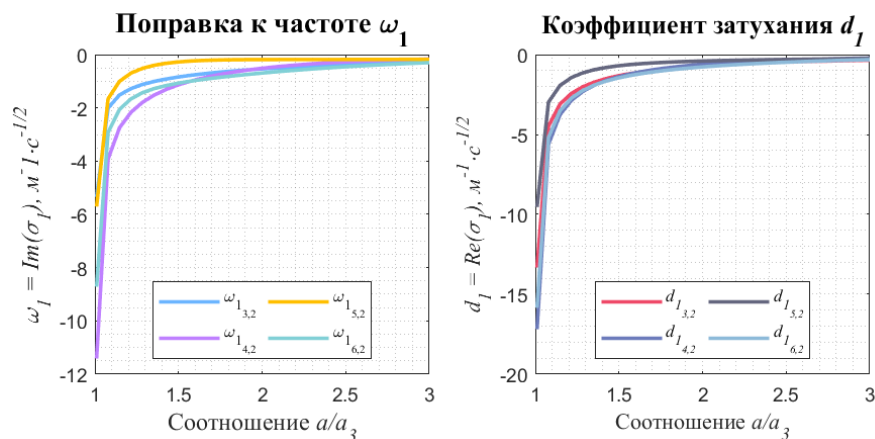


Рисунок 8 - Зависимость ω_1 и d_1 от соотношения a/a_3 сжатого сфероида

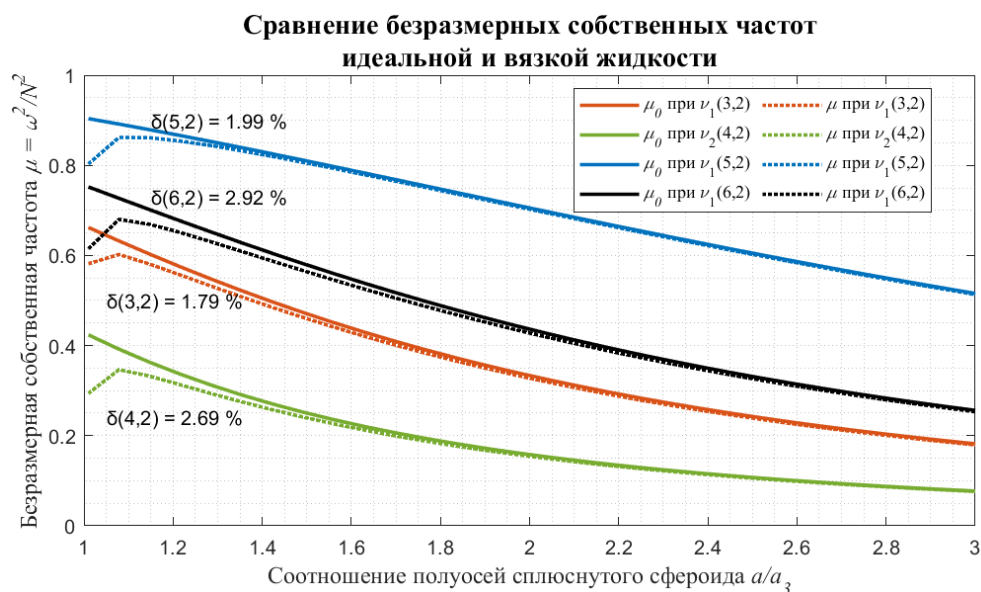


Рисунок 9 - Сравнение частоты идеальной и вязкой жидкости с приближением 1-го порядка в сосуде с формой сжатого сфероида

Выводы

Анализ численных результатов выявляет как сходства, так и различия в собственных частотах и коэффициентах затухания между цилиндрическими сосудами (прямоугольные параллелепипеды и круговые цилиндры) и сплюснутыми сфероидами:

1. Осесимметричные моды: вязкость снижает частоту при малой высоте сосуда, но при большом — увеличивает её. Коэффициент затухания относительно мал в круглых цилиндрах.
2. Неосесимметричные моды: вязкость увеличивает значения и частоты, и коэффициента затухания.

3. Стратификация усиливает влияние вязкости на частоту колебаний в ограниченном объёме для глубокой жидкости.

4. Особенность влияния вязкости в сплюснутом сфероиде: вязкость последовательно снижает собственные частоты. Эффекты усиливаются с приближением к сферической форме: наиболее выраженные модификации коэффициентов затухания и характеристических частот, обусловленные вязкостью. Более существенное влияние наблюдается вблизи сферических конфигураций.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Список источников

1. Nappo C J. An introduction to atmospheric gravity waves. Academic press, 2012.
2. Fernando, H.J.S. Turbulence in Stratified Fluids. In: Grimshaw, R. (eds) Environmental Stratified Flows. Topics in Environmental Fluid Mechanics, vol 3. Springer, Boston, MA. 2003. https://doi.org/10.1007/0-306-48024-7_6
3. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. – М.: Наука, 2015. -733с.
4. Дерендяев Н.В., Сандалов В.М. Устойчивость стационарного вращения ротора, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью // Машиноведение. № 1. 1986. С. 19-26.
5. Темнов А.Н., Ян Наинг У. Об устойчивости стационарного вращения твёрдого тела с полостью, содержащей криогенную жидкость // Труды МАИ. 2023. № 133. с.1–30.
6. Темнов А.Н., Ян Наинг У. Вращение вокруг неподвижной точки твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, полностью наполненной неоднородной жидкостью // Труды МАИ. 2023. № 128. С. 1–30.

7. Темнов А.Н., Ай Мин Вин. О движении твёрдого тела с криогенной жидкостью. // Наука и образование, МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн., № 12. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/627898.html>
8. Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1986. – Т. 26. – № 5. – С. 734-755. Л5.
9. Темнов А.Н. О спектре малых колебаний непрерывно-стратифицированной жидкости. Нелинейные проблемы аэроупругости. // Труды семинара, Казань, 1979, в.11, с.183-193
10. Копачевский Н.Д., Цветков Д.О. Колебания стратифицированных жидкостей // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 29, С. 103-130.
11. Chashechkin Y D, Ochirov A A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field. Axioms, 2022, 11(8): 402. <https://doi.org/10.3390/axioms11080402>
12. Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. Свободные колебания идеальной стратифицированной жидкости в сосуде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984.
13. Цветков Д.О. О свойствах акустических волн в сжимаемой идеальной стратифицированной жидкости. Владикавказский математический журнал, 2025, Том 27, Выпуск 2, С. 136–147.
14. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. – М.: Наука 1990г.-342с.
15. Amaouche M., Abderrahmane H.A. An exact eigenfrequency equation for the oscillations of a viscous fluid contained in an open and rectangular vessel with a flexible wall // European Journal of Mechanics – B/Fluids. 2018. Vol. 70. P. 1-5. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2018.02.001>
16. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.:Наука 1978г.-733с.
17. Крейн С.Г., Лаптев Г.И. К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде. – Функциональн. анализ и его приложения, 1968, 2, № 1, с. 40-50.

18. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов. – Успехи матем. Наук, 1971,24, вып. 4 (160), с.15-41

19. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. // Успехи математических наук. 1957, том 12, выпуск 5, 3 – 122.

References

1. Nappo C J. An introduction to atmospheric gravity waves. Academic press, 2012.

2. Fernando, H.J.S. Turbulence in Stratified Fluids. In: Grimshaw, R. (eds) Environmental Stratified Flows. Topics in Environmental Fluid Mechanics, vol 3. Springer, Boston, MA. 2003. https://doi.org/10.1007/0-306-48024-7_6

3. Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Waves in Stratified Media. – М.: Nauka, 2015. - 733p. (In Russian)

4. Deryandyaev N.V., Sandalov V.M. Stability of the stationary rotation of a rotor filled with a stratified viscous incompressible fluid // Mashinovedenie. No. 1. 1986. pp. 19-26. (In Russian)

5. Temnov A.N., Yan Naing U. On the stability of stationary rotation of a solid body with a cavity containing cryogenic liquid // Trudy MAI. 2023. No. 133. pp.1–30. (In Russian)

6. Temnov A.N., Yan Naing U. Rotation about a fixed point of a solid body with an ellipsoidal cavity completely filled with a non-uniform fluid // Trudy MAI. 2023. No. 128. pp. 1–30. (In Russian)

7. Temnov A.N., Aye Min Win. On the motion of a solid body with cryogenic fluid. // Science and Education, MGTU im. N. E. Bauman. Electron. journ., No. 12. Access mode: <http://technomag.bmstu.ru/doc/627898.html> (In Russian)

8. Kopachevsky N.D., Temnov A.N. Oscillations of a stratified fluid in a basin of arbitrary shape // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1986. – Vol. 26. – No. 5. – pp. 134–147.

9. [9]. nov A.N. On the spectrum of small oscillations of a continuously stratified fluid. Nonlinear problems of aeroelasticity. // Trudy seminara, Kazan, 1979, is.11, pp.183-193 (In Russian)
10. Kopachevsky N.D., Tsvetkov D.O. Oscillations of stratified fluids // Journal of Mathematical Sciences. 2008. Vol. 149, No. 5, pp. 1657–1693. (Translation from: Sovremennaya Matematika. Fundamental'nye Napravleniya, 2008, Vol. 29, pp. 103-130)
11. Chashechkin Y D, Ochirov A A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field. Axioms, 2022, 11(8): 402. <https://doi.org/10.3390/axioms11080402>
12. Kopachevsky N.D., Temnov A.N. Free oscillations of an ideal stratified fluid in a vessel // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1984. (In Russian)
13. Tsvetkov D.O. On the properties of acoustic waves in a compressible ideal stratified fluid. Vladikavkaz Mathematical Journal, 2025, Vol. 27, Issue 2, pp. 136–147. (In Russian)
14. Gabov S.A., Sveshnikov A.G. Linear Problems of the Theory of Nonstationary Internal Waves. – M.: Nauka, 1990. -342p. (In Russian)
15. Amaouche M., Abderrahmane H.A. An exact eigenfrequency equation for the oscillations of a viscous fluid contained in an open and rectangular vessel with a flexible wall // European Journal of Mechanics – B/Fluids. 2018. Vol. 70. P. 1–5. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2018.02.001>
16. Loitsyansky L.G. Fluid and Gas Mechanics. – M.: Nauka, 1978. -733p. (In Russian)
17. Krein S.G., Laptev G.I. On the problem of motion of a viscous fluid in an open vessel. – Functional Analysis and Its Applications, 1968, Vol. 2, No. 1, pp. 40-50.
18. Keldysh M.V. On the completeness of eigenfunctions of some classes of non-self-adjoint operators. – Russian Mathematical Surveys, 1971, Vol. 26, No. 4, pp. 15–44.
19. Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter. // Russian Mathematical Surveys. 1957, Vol. 12, No. 5, pp. 3–122.

Информация об авторах

Чжан Юе, аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители», МГТУ, г. Москва, Россия; e-mail: zhangyue_hit-bmstu@qq.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3021-0060>

Александр Николаевич Темнов, к. ф.-м. н., доцент кафедр «Космические аппараты и ракеты-носители» и «Теоретическая механика», МГТУ, г. Москва, Россия; e-mail: antt45@mail.ru

Information about the authors

Zhang Yue, PhD student, department of “Spacecraft and Carrier-rockets”, Bauman Moscow State Technical University, Moscow city, Russia; email: zhangyue_hit-bmstu@qq.com, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3021-0060>

Alexander N. Temnov, PhD of physical and mathematical sciences, associate professor, department of “Spacecraft and Carrier-rockets” & department of “Theoretical Mechanics”, Bauman Moscow State Technical University, Moscow city, Russia; email: antt45@mail.ru

Получено 02 ноября 2025 ● Принято к публикации 23 декабря 2025 ● Опубликовано 30 апреля 2026
Received 02 November 2025 ● Accepted 23 December 2025 ● Published 30 April 2026
