

На правах рукописи



**Богданов Илья Олегович**

**ДВУХМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ  
ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ПОРИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ  
СТРУКТУРАХ**

Специальность: 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва, 2018 г.

Работа выполнена на кафедре «Вычислительная математика и математическая физика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Научный руководитель: **Димитриенко Юрий Иванович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Официальные оппоненты: **Кобельков Георгий Михайлович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой «Вычислительная математика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва  
**Борисов Виталий Евгеньевич**,  
кандидат физико-математических наук, научный  
сотрудник федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН), г. Москва

Ведущая организация: Акционерное общество «Композит», Московская область, г. Королев

Защита диссертации состоится «19» октября 2018 г., в 12:00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО МАИ (НИУ) и на сайте МАИ по ссылке:

[https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT\\_ID=92134](https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=92134)

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 212.125.14



В.Ю. Гидаспов

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Пористые среды широко применяются в технике, при создании различных фильтров, очистных сооружений и других систем. Важную роль процессы фильтрации жидкостей и газов играют при производстве современных композиционных материалов и конструкций методом инфузии (пропитки жидким связующим сухого армирующего каркаса) или RTM-методами (пропитки жидким связующим под давлением). Качество композитных конструкций, полученных с помощью RTM-методов, в значительной степени зависит от параметров технологии изготовления: давления пропитки, вязкости жидкого связующего, вытесняющего воздух, проницаемости сухого каркаса, а также от геометрических параметров конструкции. При определенных значениях технологических параметров возможно образование застойных воздушных зон, приводящих к неполной пропитке или обеднению связующего в композитной конструкции. В этой связи чрезвычайно важной является задача адекватного моделирования течения жидкого связующего в пористых композитных структурах, имеющих сложную пространственную геометрическую форму, одновременно с движением газа (воздуха), вытесняемого жидкостью.

Различные подходы к решению этой задачи рассмотрены, например, в публикациях Bechet E., Di Fratta C., Francucci G., Gantois R., Han K., Klunker F., Laurenzi S., Li J., Lim S.T., Loudad R. и других исследователей. В частности, влияние капиллярных эффектов на процесс течения жидкого связующего проанализировано в работе Yeager M., вопросы численного моделирования формирования пустот в процессе пропитки рассмотрены в статье Breard J.

В подавляющем большинстве работ (отметим работы Л.С. Лейбензона, М. Маскета, А.Э. Шейдеггера, И.А. Чарного, Г.И. Баренблатта и многих других) исследование процессов течения жидкостей в пористых структурах изучается в рамках феноменологической теории фильтрации, в основе которой лежит закон Дарси и его модификации. Вопросы двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей в пористой среде освещены в публикациях Д.О. Диля, Д.С. Евстигнеева, А.И. Сухинова и других. Определение компонент тензора коэффициентов проницаемости на основе численного моделирования рассматривается в статье С.С. Арсеньева-Образцова. Исследование движения устойчивой границы раздела жидкостей при двухфазной фильтрации в пористых средах проводится в публикации И.А. Бородина. Описание течений слабосжимаемой жидкости в пористых средах при нелинейном законе фильтрации приводится в работе Н.Е. Леонтьева. Моделирование фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей различной плотности, разделенных свободной границей в поро-упругом пространстве рассматривается в статье О.В. Гальцева. Применение закона Бринкмана для описания фильтрации вязкой жидкости через пористую среду рассмотрено в работе Н.М. Бодунова.

В феноменологических теориях фильтрации коэффициенты проницаемости пористой среды определяются либо экспериментально, либо с помощью различных эмпирических и приближенных соотношений для описания локальных процессов фильтрации. В этом случае получаются довольно грубые оценки

реальных процессов, происходящих внутри пор со сложной геометрией, что приводит к большим отклонениям при определении проницаемости. В связи с этим важной частью исследования фильтрации является анализ локальных процессов пространственного течения жидкости в отдельно взятой поре с помощью решения уравнений Навье-Стокса и вывод осредненных уравнений фильтрации «из первых принципов», а не на основе феноменологических теорий.

Такой подход к моделированию течений жидкостей в пористых структурах получил название *двухмасштабного моделирования*, под которым понимается совместное исследование течения жидких и газовых сред в отдельных порах и в пористой системе в целом. Задачи первого типа называются *локальными*, задачи второго типа – *глобальными* (макроскопическими). Вопросы двухмасштабного моделирования движения связующего применительно к RTM-процессу освещены в работах Chen X., Dostert P., Jenny P., Kuentzer N., Tan H. и др. исследователей. Однако математическое обоснование взаимосвязи локальных и глобальных задач в этих работах не рассматривается.

Математическое обоснование двухмасштабного моделирования процесса фильтрации жидкостей и газов в пористой системе обычно производится с помощью теорий осреднения – приближенных (Р.И. Нигматулин, С.Г. Телетов, Ф.И. Франкль и др) или асимптотических (Н.С. Бахвалов, А. Бенсуссан, Э. Санчес-Паленсия, Ж.-Л. Лионс, Б.Е. Победря, Г.П. Панасенко, Ю.И. Димитриенко, Д.И. Бардзокас, А.Ю. Беляев и другие), основанных на асимптотическом анализе процессов в периодических структурах. Метод асимптотического осреднения (МАО), предложенный Н.С. Бахваловым, позволяет получать математически обоснованные осредненные уравнения для гомогенизированных сред на основе асимптотического анализа точных исходных уравнений механики сплошных сред («из первых принципов»).

Отметим, что задачи течения жидкостей, вытесняющих газовые фазы в пористых структурах, с использованием метода асимптотического осреднения ранее не рассматривались.

**Целью диссертационной работы** является разработка методики двухмасштабного моделирования пространственных течений жидкостей и газов в пористых композитных периодических структурах.

**Предметом исследования являются** пространственные течения вязких слабосжимаемых жидкостей, вытесняющих газовую среду в пористых композитных структурах.

**Методы исследования.** Результаты работы получены с использованием метода асимптотического осреднения периодических структур. Математическая модель течения основана на асимптотическом анализе системы уравнений Навье-Стокса и новой физико-математической модели слабосжимаемой жидкости.

Для численного решения локальных задач течения жидкостей и газов в отдельной ячейке периодичности применен метод конечных элементов, основанный на вариационном принципе Хеллингера-Рейсснера и новом типе конечного элемента.

Для численного решения нестационарных нелинейных макроскопических уравнений движения жидкости и газа предложен метод Ньютона-Рафсона в сочетании с методом конечных элементов.

**Основными задачами, решаемыми в работе, являются:**

1. Разработка физико-математической модели слабосжимаемой жидкости и системы уравнений ее пространственного течения в пористой среде совместно с газовой средой.
2. Применение метода асимптотического осреднения для моделирования пространственного течения слабосжимаемой жидкости, вытесняющей газовую среду в пористой композитной структуре.
3. Постановка локальных задач пространственного течения жидкости и газа на ячейке периодичности композитной структуры.
4. Разработка численного метода решения локальных задач в общей трехмерной постановке и алгоритма расчета тензора проницаемости.
5. Постановка глобальной задачи течения жидкости, вытесняющей газ из пористой среды.
6. Разработка численного метода решения глобальной задачи течения жидкости, вытесняющей газ из пористой среды.
7. Численное исследование локальных пространственных течений жидкости и газа на ячейке периодичности типовых композитных структур.
8. Численное исследование макроскопических течений жидкости, вытесняющей газовую среду в типовой пористой композитной структуре.

**Научная новизна** диссертационной работы включает следующие основные положения:

1. Разработана физико-математическая модель слабосжимаемой жидкости и двухмасштабная модель пространственного течения слабосжимаемой жидкости, вытесняющей газовую среду в пористой композитной структуре.
2. Разработаны алгоритмы численного решения локальных задач пространственного течения жидкости и газа на ячейках периодичности композитных структур и алгоритм расчета тензора проницаемости.
3. Разработан численный алгоритм решения глобальной задачи течения жидкости, вытесняющей газ из пористой композитной структуры.
4. Получены результаты численного моделирования локальных пространственных течений жидкости и газа на ячейке периодичности типовых композитных структур, показавшие эффективность предложенного алгоритма решения локальных задач и вычисления тензора проницаемости пористых композитных структур.
5. Получены результаты численного моделирования макроскопического течения жидкого связующего, вытесняющего газовую среду в типовой пористой композитной структуре, показавшие эффективность предложенного алгоритма решения задач для рассмотренной модели слабосжимаемой жидкости.

**Достоверность и обоснованность научных результатов** гарантируется использованием теоретически обоснованного математического аппарата и фун-

даментальных законов механики сплошной среды, а также сравнением полученных результатов с известными аналитическими решениями.

**Практическая значимость** настоящей работы состоит в следующем: разработан программный комплекс для численного моделирования двухмасштабных процессов течения жидкостей и газов в пористых композитных структурах, реализующий разработанные физико-математические модели и алгоритмы численного решения локальных и макроскопических задач. Численно получены результаты расчета тензора проницаемости типовых тканевых композитных структур.

**Личный вклад:**

1. Все теоретические выкладки выполнены соискателем самостоятельно под руководством научного руководителя. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю. Заимствованный материал обозначен в работе ссылками.

2. Соискатель выполнил разработку программного комплекса для двухмасштабного моделирования процессов течения жидкостей и газов в пористых средах.

3. На основе разработанного программного обеспечения соискателем выполнен ряд вычислительных экспериментов по моделированию локальных и глобальных процессов пространственного течения, а также определению характеристик пористых композитных структур.

**На защиту вынесены следующие основные положения:**

1. Физико-математическая модель слабосжимаемой жидкости и двухмасштабная модель пространственного течения слабосжимаемой жидкости, вытесняющей газовую среду в пористой композитной структуре, полученная на основе системы уравнений Навье-Стокса.

2. Алгоритмы конечно-элементного решения локальных задач пространственного течения жидкости и газа на ячейках периодичности композитных структур и алгоритм расчета тензора проницаемости.

3. Алгоритм конечно-элементного решения глобальной задачи течения жидкости, вытесняющей газ из пористой композитной структуры.

4. Результаты численного моделирования локальных пространственных течений жидкости и газа на ячейке периодичности типовых композитных структур.

5. Результаты численного моделирования макроскопического течения жидкого связующего, вытесняющего газовую среду в типовой пористой композитной структуре.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященная 100-летию со дня рождения Героя Социалистического Труда, лауреата Ленинской и Государственной премий СССР, члена-корреспондента АН СССР, Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, доктора технических наук В.И. Феодосьева. Москва, 17-19 мая 2016 г.

2. 6-я всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. Москва, 16-18 ноября 2016 г.

3. Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (FARM-2017). Москва, 24-27 октября 2017 г.

4. 2-я всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике». Москва, 22-23 ноября 2017 г.

5. Семинар им. А.А. Дородницына «Методы решения задач математической физики» ВЦ РАН ФИЦ ИУ РАН, 15 февраля 2018 г.

6. Научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов МГУ им. М.В. Ломоносова, 26 февраля 2018 г.

**Публикации.** Основные результаты отражены в 12 научных работах, в том числе в 5 статьях, включенных в перечень российских рецензируемых научных изданий.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения, списка использованной литературы. Работа изложена на 133 страницах, содержит 32 иллюстрации и 11 таблиц. Библиография включает 115 наименований.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится краткое описание областей применения теории фильтрации жидкостей и газов, в частности, ее использование в рамках метода пропитки армирующего наполнителя связующим при производстве композиционных материалов, рассмотрена актуальность темы диссертации, указаны предмет исследования, цели и задачи, научная новизна, практическая значимость, методы исследования, положения, выносимые на защиту, достоверность и обоснованность научных результатов, их апробация, приведен список публикаций по теме диссертации, указан личный вклад соискателя и описана структура работы.

В **первой главе** диссертации сформулированы основные допущения математической модели: предполагается, что на макроуровне композитная пористая структура представляет собой область (см. рисунок 1), часть которой заполнена жидкостью, а оставшаяся часть заполнена газом. Граница раздела областей с жидкостью и с газом является переменной и движется под действием перепада давления, задаваемого на внешних границах структуры.



Рисунок 1 – Модели пористых композитных структур, в которых моделируется пространственное течение жидкого связующего и вытесняемого им газа

Жидкость и газ считаются изотропными линейно-вязкими сжимаемыми средами, причем жидкость полагается слабосжимаемой, пористый скелет является недеформируемым и его движение не рассматривается, движение жидкости и газа является изотермическим, массовые силы отсутствуют.

Исходная постановка пространственного течения слабосжимаемой жидкости и вытесняемого ей газа в пористой композитной структуре основана на системе уравнений Навье-Стокса, которая в безразмерной форме имеет вид (здесь и далее полагается, что по повторяющимся индексам идет суммирование):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla_i (\rho_m v_{mi}) &= 0, \\
\frac{1}{\text{Eu}_m} \left( \frac{\partial \rho_m v_{mi}}{\partial t} + \nabla_j (\rho_m v_{mi} v_{mj}) \right) &= -\nabla_i p_m + (\lambda'_m + \mu'_m) \nabla_i \nabla_j v_{mj} + \mu'_m \nabla_j \nabla_j v_{mi}, \\
p_m &= A_m \rho_m + \delta_{ml} (p_{0l} - \tilde{K}), \quad x_i \in V_m; \\
v_{mi} \Big|_{\Sigma_{sm}} &= 0; \quad n_j T_{mji} \Big|_{\Sigma_m} = -p_{me} n_i; \\
n_i v_{mi} \Big|_{\Sigma'_m} &= 0, \quad \tau_{lj} T_{ji} \Big|_{\Sigma'_m} = 0, \quad l = 1, 2; \\
n_j (T_{lji} - T_{gji}) &= 0, \quad v_{li} = v_{gi}, \quad x_i \in \Sigma_{lg}; \\
i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad m = l, g,
\end{aligned} \tag{1}$$

где индекс  $m = l$  соответствует жидкой фазе, а  $m = g$  – газовой фазе;  $\rho_m$  – плотность;  $v_{mi}$  – компоненты вектора скорости;  $p_m$  – давление;

$T_{mij} = (-p_m + \lambda'_m \nabla_k v_{mk}) \delta_{ij} + \mu'_m (\nabla_j v_{mi} + \nabla_i v_{mj})$  – компоненты тензора напряжений;  $\mu'_m = \frac{\mu_m \hat{v}_m}{\hat{L} \hat{p}_m} = (\text{Eu}_m \text{Re}_m)^{-1}$  и  $\lambda'_m = \frac{\lambda_m \hat{v}_m}{\hat{L} \hat{p}_m}$  – безразмерные коэффициенты вязкости;

$\text{Eu}_m = \frac{\hat{P}_m}{\hat{\rho}_m \hat{v}_m^2}$  – число Эйлера;  $\text{Re}_m = \frac{\hat{\rho}_m \hat{v}_m \hat{L}}{\mu_m}$  – число Рейнольдса. Величины с символом « $\wedge$ » являются характерными значениями соответствующих функций. Также введены обозначения:  $\Sigma_{sp}$  – поверхность контакта жидкости и газа с твердым композитным каркасом;  $\Sigma_m$  – поверхности, на которых заданы внешние давления  $p_{me}$  подачи жидкого связующего и откачивания газовой фазы;  $\Sigma'_m$  – герметизированная внешняя поверхность;  $\Sigma_{lg}$  – поверхность раздела жидкой и газовой фаз. Уравнения состояния для слабосжимаемой жидкости и сжимаемого газа записаны в единой форме, в которой  $A_m = \frac{R \hat{\rho}_g \theta_0}{\hat{P}_g} \delta_{mg} + \frac{\tilde{K}}{\rho_{0l}} \delta_{ml}$  – безразмерная константа,  $\rho_{0l}$  – безразмерная плотность жидкости в начальный момент времени,  $\tilde{K}$  – безразмерный модуль объемного сжатия жидкости,  $p_{0l}$  – гидростатическая часть давления в жидкости, отвечающая за изменение давления без изменения плотности жидкости. Модель слабосжимаемой жидкости, для которой  $p_{0l}$  – заданная константа, называется *классической*, обычно эта константа задается эмпирически для каждой задачи. В работе предложена *обобщенная*



модель слабосжимаемой жидкости, в которой  $p_{0l}$  – неизвестная величина, которая определяется из решения отдельной вспомогательной задачи.

Начальные условия для газа и слабосжимаемой жидкости имеют вид:

$$\begin{aligned} p_g|_{t=t_0} &= p_{0g}, \quad v_{gi}|_{t=t_0} = 0, \quad x_i \in V_g, \\ \rho_l|_{t=t_0} &= \rho_{0l}, \quad v_{li}|_{t=t_0} = 0, \quad x_i \in V_l, \quad i = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (2)$$

В задаче вводится малый безразмерный параметр  $\kappa = \hat{l}/\hat{L} \ll 1$ , равный отношению характерных размеров ячейки периодичности  $\hat{l}$  и всей пористой среды  $\hat{L}$ , что позволяет построить соотношения вида

$$Eu_m \kappa^k = Eu_m^0 = O(1), \quad Re_m \kappa^n = Re_m^0 = O(1), \quad (3)$$

где  $k, n \in \mathbb{Z}$  – некоторые целые числа, которые соответствуют различным режимам течения фаз. Безразмерные коэффициенты вязкости записываются в виде:

$$\mu'_m = \frac{\mu_m \hat{v}_m}{\hat{L} \hat{\rho}_m} = \frac{\kappa^{k+n}}{Eu_m^0 Re_m^0} = \kappa^{k+n} \mu_m^0, \quad \lambda'_m = \frac{\lambda_m \hat{v}_m}{\hat{L} \hat{\rho}_m} = \kappa^{k+n} \lambda_m^0, \quad (4)$$

где  $\mu_m^0 = (Eu_m^0 Re_m^0)^{-1} = O(1)$  и  $\lambda_m^0 = O(1)$  – главные части безразмерных вязкостей. В настоящей работе рассматривается режим течения  $k = 2$  и  $n = 0$ . В этом случае

$$Eu \gg O(1), \quad Re = O(1), \quad \mu'_m = \kappa^2 \mu_m^0, \quad \lambda'_m = \kappa^2 \lambda_m^0. \quad (5)$$

Наличие 2-го порядка малости в коэффициентах вязкости  $\mu'_m$  и  $\lambda'_m$  является допущением рассматриваемой задачи и физически обосновывается малой вязкостью движущихся фаз. Указанный режим определяет медленное Стоксово (безынерционное) движение сред в пористой системе.

В силу того что для случая обобщенной модели слабосжимаемой жидкости система (1) включает в качестве неизвестной гидростатическое давление  $p_v$ , входящее в уравнение состояния, то она является незамкнутой. Система доопределялась следующим образом. Неизвестные функции представлялись в аддитивном виде:

$$p_l = p_{0l} + p_{1l}, \quad \rho_l = \rho_{0l} + \rho_{1l}, \quad v_{li} = v_{0li} + v_{1li}, \quad (6)$$

где  $\rho_{0l}$  и  $p_{0l}$  были введены ранее, а  $\rho_{1l} \ll \rho_{0l}$  в силу слабой сжимаемости жидкости. После подстановки (6) в исходную систему уравнений (1) и разделения ее на две системы, получается постановка задачи для случая обобщенной модели слабосжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \nabla_i v_{0i} &= 0, \\ \frac{1}{Eu_l} \left( \frac{\partial \rho_0 v_{0i}}{\partial t} + \nabla_j (\rho_0 v_{0i} v_{0j}) \right) &= -\nabla_i p_0 + \kappa^2 (\lambda_l^0 + \mu_l^0) \nabla_i \nabla_j v_{0j} + \kappa^2 \mu_l^0 \nabla_j \nabla_j v_{0i}, \quad x_i \in V_l; \\ i &= \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3} \end{aligned} \quad (7)$$

и

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla_i (\rho_0 v_{1i} + \rho_1 v_{0i} + \rho_1 v_{1i}) = 0, \\
& \frac{1}{\text{Eu}_l} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 v_{1i} + \rho_1 v_{0i} + \rho_1 v_{1i}) + \nabla_j (\rho_0 (v_{0i} v_{1j} + v_{1i} v_{0j} + v_{1i} v_{1j})) + \rho_1 (v_{0i} v_{0j} + v_{0i} v_{1j} + v_{1i} v_{0j} + v_{1i} v_{1j}) \right) = \\
& = -\nabla_i p_1 + \kappa^2 (\lambda_l^0 + \mu_l^0) \nabla_i \nabla_j v_{1j} + \kappa^2 \mu_l^0 \nabla_j \nabla_j v_{1i}, \\
& p_1 = \frac{\tilde{K}}{\rho_{0l}} \rho_1, \quad x_i \in V_l; \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Если выполняются обе системы (7) и (8), то автоматически выполняется и исходная система. Обе системы (7) и (8) являются замкнутыми: система (7) представляет собой постановку задачи о движении несжимаемой жидкости, относительно функций  $p_0$ ,  $v_{0i}$ , а система (8) представляет собой постановку задачи относительно функций  $p_1$ ,  $v_{1i}$ , в ней функции  $p_0$ ,  $v_{0i}$  рассматриваются как входные данные.

Следуя общей концепции метода асимптотического осреднения, вводится два типа безразмерных координат: глобальные («медленные»)  $\tilde{x}_i = x_i / \hat{L}$  и локальные («быстрые»)  $\xi_i = x_i / \hat{l} = \tilde{x}_i / \kappa$ , где  $\hat{l}$  и  $\hat{L}$  – характерные размеры ячейки периодичности  $V_\xi$  среды и всей области, соответственно. Все функции (обозначим их  $\Theta$ ), описывающие течение газа или жидкости в порах, считаются квазипериодическими, т.е. зависящими от локальных  $\xi_i$  координат, глобальных  $\tilde{x}_i$  координат и времени  $t$ . Также вводится операция осреднения  $\langle \Theta \rangle = \frac{1}{\phi |V_\xi|} \int_{V_{\xi,p}} \Theta dV$

функций по области  $V_{\xi,p}$ , занятой порой, где  $\phi = \frac{1}{|V_\xi|} \int_{V_{\xi,p}} dV$  – пористость среды.

Решение трех систем уравнений: (1) для газа и (7), (8) для жидкости, ищется в виде асимптотических разложения вида

$$\Theta = \Theta^{(0)} + \kappa \Theta^{(1)} + O(\kappa^2) \tag{9}$$

для функций скорости, давления и плотности. Подставляя эти разложения в систему (1) для выбранного ранее режима течения и выполняя группировку слагаемых при одинаковых степенях параметра  $\kappa$ , можно получить локальные задачи фильтрации нулевого и первого уровней для газа и классической слабосжимаемой жидкости на ячейке периодичности:

$$\left\{ \begin{aligned}
& (\rho^{(0)} v_i^{(0)})_{,i} = 0, \\
& p_{,i}^{(0)} = 0, \\
& p^{(0)} = A_m \rho^{(0)} + \delta_{ml} B, \quad \xi_i \in V_{\xi,p}; \\
& \langle \rho^{(0)} v_i^{(0)} \rangle = \bar{\rho} \bar{v}_i, \quad \langle \rho^{(0)} \rangle = \bar{\rho}, \quad \langle p^{(0)} \rangle = \bar{p}; \\
& \llbracket v_i^{(0)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket p^{(0)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket \rho^{(0)} \rrbracket = 0; \\
& v_i^{(0)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi,sp}; \\
& i = \overline{1,3}, \quad m = l, g.
\end{aligned} \right. \tag{10}$$

$$\begin{cases}
\left( \rho^{(0)} v_i^{(1)} + \rho^{(1)} v_i^{(0)} \right)_{,i} = - \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} - \left( \rho^{(0)} v_i^{(0)} \right)_{,i}, \\
-p_{,i}^{(1)} + \mu^0 v_{il,jj}^{(0)} + (\lambda^0 + \mu^0) v_{j/ij}^{(0)} = p_i^{(0)}, \\
p^{(1)} = A_m \rho^{(1)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\
\langle \rho^{(0)} v_i^{(1)} + \rho^{(1)} v_i^{(0)} \rangle = 0, \quad \langle \rho^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle p^{(1)} \rangle = 0; \\
\llbracket v_i^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket p^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket \rho^{(1)} \rrbracket = 0; \\
v_i^{(1)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}, \quad m = l, g.
\end{cases} \quad (11)$$

Аналогично, выполняя подстановку разложений (9) в систему (7), получаем локальные задачи нулевого и первого уровней для обобщенной слабосжимаемой жидкости:

$$\begin{cases}
v_{0i/i}^{(0)} = 0, \\
p_{0i}^{(0)} = 0, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\
\langle \rho_0 v_{0i}^{(0)} \rangle = \rho_0 \bar{v}_{0i}, \quad \langle p_0^{(0)} \rangle = \bar{p}_0; \quad \llbracket p_0^{(0)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket v_{0i}^{(0)} \rrbracket = 0; \\
v_{0i}^{(0)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \quad i = \overline{1,3}.
\end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases}
v_{0i,i}^{(0)} + v_{0i/i}^{(1)} = 0, \\
-p_{0,i}^{(0)} - p_{0/i}^{(1)} + (\lambda_l^0 + \mu_l^0) v_{0j/ij}^{(0)} + \mu_l^0 v_{0i/lj}^{(0)} = 0, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\
\langle \rho_0 v_{0i}^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle p_0^{(1)} \rangle = 0; \quad \llbracket p_0^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket v_{0i}^{(1)} \rrbracket = 0; \\
v_{0i}^{(1)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}.
\end{cases} \quad (13)$$

И, наконец, выполняя подстановку разложений (9) в систему (8), также получаем локальные задачи нулевого и первого уровней для обобщенной слабосжимаемой жидкости:

$$\begin{cases}
\left( \rho_0 v_{li}^{(0)} + \rho_1^{(0)} (v_{0i}^{(0)} + v_{li}^{(0)}) \right)_{,i} = 0, \\
p_{1/i}^{(0)} = 0, \\
p_1^{(0)} = \frac{\tilde{K}}{\rho_0} \rho_1^{(0)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\
\langle \rho_0 v_{li}^{(0)} + \rho_1^{(0)} (v_{0i}^{(0)} + v_{li}^{(0)}) \rangle = \rho_0 \bar{v}_{li} + \bar{\rho}_1 (\bar{v}_{0i} + \bar{v}_{li}), \quad \langle p_1^{(0)} \rangle = \bar{p}_1, \quad \langle \rho_1^{(0)} \rangle = \bar{\rho}_1; \\
\llbracket p_1^{(0)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket \rho_1^{(0)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket v_{li}^{(0)} \rrbracket = 0; \\
v_{li}^{(0)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \quad i = \overline{1,3}.
\end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases}
\frac{\partial \rho_1^{(0)}}{\partial t} + \left( \rho_0 v_{li}^{(0)} + \rho_1^{(0)} (v_{0i}^{(0)} + v_{li}^{(0)}) \right)_{,i} + \left( \rho_0 v_{li}^{(1)} + \rho_1^{(1)} (v_{0i}^{(0)} + v_{li}^{(0)}) + \rho_1^{(0)} (v_{0i}^{(1)} + v_{li}^{(1)}) \right)_{,i} = 0, \\
-p_{1,i}^{(0)} - p_{1/i}^{(1)} + (\lambda_l^0 + \mu_l^0) v_{1j/ij}^{(0)} + \mu_l^0 v_{li/lj}^{(0)} = 0, \\
p_1^{(1)} = \frac{\tilde{K}}{\rho_0} \rho_1^{(1)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\
\langle \rho_0 v_{li}^{(1)} + \rho_1^{(0)} (v_{0i}^{(1)} + v_{li}^{(1)}) + \rho_1^{(1)} (v_{0i}^{(0)} + v_{li}^{(0)}) \rangle = 0, \quad \langle p_1^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle \rho_1^{(1)} \rangle = 0; \\
\llbracket p_1^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket \rho_1^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket v_{li}^{(1)} \rrbracket = 0; \\
v_{li}^{(1)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}.
\end{cases} \quad (15)$$

Здесь  $[[\bullet]]$  обозначает условия периодичности на противоположенных гранях ячейки периодичности и введены обозначения для производных по глобальным и локальным координатам соответственно  $\bullet_{,i} = \partial\bullet/\partial x_i$  и  $\bullet_{,i} = \partial\bullet/\partial \xi_i$ . Функции с верхней чертой представляют собой средние значения, а соотношения, их содержащие, следует понимать, как дополнительные условия, предъявляемые к локальным параметрам течения в  $V_{\xi p}$ , либо как обозначения для вычисленных осредненных функций.

Показано, что все локальные задачи нулевого уровня (10), (12) и (14) сводятся к локальной задаче следующего вида:

$$\begin{cases} v_{i/i}^{(0)} = 0, \\ -p_{/i}^{(1)} + \mu_m^0 v_{i/jj}^{(0)} = p_{,i}^{(0)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ \langle p^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle v_i^{(0)} \rangle = \bar{v}_i; \\ \llbracket p^{(1)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket v_i^{(0)} \rrbracket = 0; \\ v_i^{(0)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}, \quad m = l, g. \end{cases} \quad (16)$$

В силу линейности задачи (16), ее решение ищется в виде линейных функций от входных данных, т.е.  $p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x})$ :

$$p^{(1)}(\mathbf{x}, \xi) = -\sum_{\alpha=1}^3 P^{(\alpha)}(\xi) p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x}), \quad v_i^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{\mu_m^0} \sum_{\alpha=1}^3 W_i^{(\alpha)}(\xi) p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x}), \quad (17)$$

что дает возможность сформулировать искомую локальную задачу на 1/8 ячейки периодичности:

$$\begin{cases} \tilde{W}_{i/i}^{(\alpha)} = 0, \\ \tilde{P}_{/i}^{(\alpha)} - \tilde{W}_{i/jj}^{(\alpha)} = \delta_i^{(\alpha)}, \quad \xi_i \in V_{\xi p}; \\ \tilde{W}_i^{(\alpha)} = 0, \quad \xi_i \in \Sigma_{\xi sp}; \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}, \quad \alpha = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (18)$$

с граничными условиями на противоположенных гранях 1/8 ячейки:

$$\xi_\beta = 0; \quad \xi_\beta = \frac{1}{2}: \quad \begin{cases} \tilde{W}_\gamma^{(\alpha)} (\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\beta\gamma} - 2\delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma}) + \frac{\partial \tilde{W}_\gamma^{(\alpha)}}{\partial \xi_\beta} [1 - (\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\beta\gamma} - 2\delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma})] = 0, \\ \tilde{P}^{(\alpha)} \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \tilde{P}^{(\alpha)}}{\partial \xi_\beta} (1 - \delta_{\alpha\beta}) = 0; \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (19)$$

Задачи (18) будем обозначать далее как  $L^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = \overline{1,3}$ .

Каждая из задач (18) представляет собой стационарную задачу течения некоторой фиктивной линейно-вязкой несжимаемой среды. Решение задач зависит только от внутренней геометрии пор, поэтому их постановка применима для расчетов фильтрации любых газов и жидкостей в рамках сделанных допущений.

Применение оператора осреднения ко второму соотношению из (17) позволяет получить закон фильтрации Дарси:

$$\bar{\mathbf{w}} = -\frac{1}{\mu_m^0} \mathbf{K} \cdot \nabla_x \bar{p}, \quad (20)$$

где  $\bar{\mathbf{w}} = \varphi \langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$  – скорость фильтрации,  $K_i^j = \varphi \langle W_i^{(j)} \rangle = const$  – компоненты тензора проницаемости пористой среды.

Осредняя локальные уравнения неразрывности первого уровня, учитывая (20), уравнения состояния газа и слабосжимаемой жидкости (классической и обобщенной), получаем общие нелинейные уравнения неустановившейся фильтрации газа и слабосжимаемой жидкости:

$$c_m \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \nabla_x \cdot (\mathbf{A}'_m \cdot \nabla_x \bar{p}) = f'_m, \quad (21)$$

где введены обозначения:

$$c_m = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ 1, & m = l, \\ 1, & m = g; \end{cases} \quad \mathbf{A}'_m = \begin{cases} \mathbf{K}, & m = 0, \\ \frac{1}{\varphi \mu_l^0} (\bar{p} - \bar{p}_0 + \tilde{K}) \mathbf{K}, & m = l, \\ \frac{1}{\varphi \mu_g^0} \bar{p} \mathbf{K}, & m = g; \end{cases} \quad f'_m = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial t}, & m = l, \\ 0, & m = g. \end{cases}$$

Особенностью глобальной задачи является наличие заранее неизвестных границ раздела взаимодействующих сред, положение и форма которых изменяется с течением времени. Решение рассматриваемой задачи фильтрации на основе уравнений (21) осложняется тем, что необходима информация о точной форме области, занятой жидкой фазой, поскольку в ней дополнительно решается задача расчета поля гидростатического давления  $\bar{p}_0$ . Поэтому методы сквозного счета в данном случае неприемлемы или трудно реализуемы. В рамках настоящей работы используется метод введения динамических независимых координат, в которых положение границы раздела не изменяется:

$$X_1 = x_1, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = \frac{x_3}{\alpha x_3 + \beta}. \quad (22)$$

Очевидно, что  $X_3(0) = 0$ . Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определяются из условий

$$\begin{aligned} X_3(L) &= L, \\ X_3(x_3) &= f_0(x_1, x_2) \text{ при } x_3 = f(x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда производные по времени и пространственным координатам можно представить в виде

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{d}^T \cdot \nabla_x \Theta, \quad \nabla_x \Theta = \mathbf{Q} \cdot \nabla_X \Theta, \quad (24)$$

где  $\nabla_x \Theta = \left( \frac{\partial \Theta}{\partial X_1}, \frac{\partial \Theta}{\partial X_2}, \frac{\partial \Theta}{\partial X_3} \right)^T$ ,  $\nabla_X \Theta = \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x_1}, \frac{\partial \Theta}{\partial x_2}, \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} \right)^T$  и введены вектор  $\mathbf{d}(\mathbf{X}, t)$  и матрица  $\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)$  преобразования.

Для случая, когда граница раздела жидкой и газовой фаз движется плоскопараллельно, окончательная формулировка глобальной задачи о вытеснении газа слабосжимаемой жидкостью в динамических переменных принимает вид:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} - \nabla_x \cdot (\mathbf{A}'_m \cdot \nabla_x \bar{p}) - \mathbf{b}_m^T \cdot \nabla_x \bar{p} = f'_m, \quad m = l, g \quad (25)$$

– общее уравнение неустановившейся фильтрации фаз;

$$\begin{aligned}
\bar{p}|_{\Sigma_g} &= p_{eg}, \quad \bar{p}|_{\Sigma_l} = p_{el}; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_l \cdot \nabla_X \bar{p}|_{\Sigma_l} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_g \cdot \nabla_X \bar{p}|_{\Sigma_g} = 0; \\
\bar{p}_l &= \bar{p}_g, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}_l \cdot \nabla_X \bar{p}_l - \mathbf{A}_g \cdot \nabla_X \bar{p}_g) = 0, \quad \mathbf{X} \in \Sigma_{lg}; \\
\bar{p}_l &= p_{0l}, \quad \mathbf{X} \in V_l, \quad \bar{p}_g = p_{0g}, \quad \mathbf{X} \in V_g, \quad t = 0
\end{aligned} \tag{26}$$

– граничные и начальные условия;

$$\frac{df}{dt} = F(t, f(t), \bar{p}) = -\frac{K_3^3}{\varphi\mu_l^0} \frac{f_0(f_0 - L)}{f(f - L)} \frac{\partial \bar{p}}{\partial X_3}, \quad f(0) = f_0 \tag{27}$$

– задача для определения положения границы раздела фаз  $\Sigma_{lg}$  в новой системе координат;

$$\begin{aligned}
\nabla_X \cdot (\mathbf{A}_0 \cdot \nabla_X \bar{p}_0) + \mathbf{b}_0^T \cdot \nabla_X \bar{p} &= 0; \\
\bar{p}_0|_{\Sigma_l} &= p_{0e}, \quad \bar{p}_0|_{\Sigma_{lg}} = p_{0lg}(t), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \nabla_X \bar{p}_0|_{\Sigma_l} = 0
\end{aligned} \tag{28}$$

– задача для расчета поля гидростатического давления в жидкости.

Во **второй главе** диссертации предложены численные алгоритмы решения локальных и глобальной задач течения жидкости и вытесняемого газа.

В работе показано, что локальная задача фильтрации (18) эквивалентна следующей вариационной постановке:

$$\begin{cases} \int_{V^{(e)}} \tilde{D}_{ii}^{(\alpha)} \delta \tilde{P}^{(\alpha)} dV = 0, \\ \int_{V^{(e)}} \tilde{T}_{ij}^{(\alpha)} \delta \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)} dV = \int_{\Sigma^{(e)}} S_i^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)} d\Sigma + \int_{V^{(e)}} \delta_i^{(\alpha)} \delta \tilde{W}_i^{(\alpha)} dV, \quad \xi_i \in V_{\xi p}, \end{cases} \tag{29}$$

где  $\tilde{T}_{ij}^{(\alpha)}$  – локальные компоненты тензора напряжений;  $\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)}$  – локальные компоненты тензора скоростей деформаций;  $S_i^{(\alpha)}$  – локальные компоненты вектора усилий;  $\delta \tilde{P}^{(\alpha)}$ ,  $\delta \tilde{W}_i^{(\alpha)}$  и  $\delta \tilde{D}_i^{(\alpha)}$  – вариации пульсации давления, скорости и компонент тензора скоростей деформаций, соответственно.

Для триангуляции расчетной области был предложен 10-и узловой конечный элемент в форме тетраэдра с 34 степенями свободы: по 3 компоненты скорости  $\tilde{W}_i^{(\alpha)}$  в каждом узле и по одному значению давления  $\tilde{P}^{(\alpha)}$  в каждой вершине тетраэдра. Применение общей процедуры метода конечных элементов к вариационной постановке (29) позволило сформулировать СЛАУ для каждого отдельного конечного элемента:

$$\begin{cases} [K] \{w\} - [R] \{p\} = \{f\}, \\ [R]^T \{w\} = 0, \end{cases} \tag{30}$$

где введены следующие локальные матрицы и векторы правой части:

$$\begin{aligned}
[K] &= 2 \int_{V^{(e)}} \left( [B]^T [B] \right) dV, \quad [R] = \int_{V^{(e)}} \left( [B]^T [\tilde{N}_p] \right) dV, \quad \{f\} = \{f_\Sigma\} + \{f_V\}, \\
\{f_\Sigma\} &= \int_{\Sigma^{(e)}} \left( [N_W]^T \{S\} \right) d\Sigma, \quad \{f_V\} = \int_{V^{(e)}} \left( [N_W]^T \{\delta\} \right) dV.
\end{aligned} \tag{31}$$

Здесь  $[\tilde{N}_p]$  и  $[N_W]$  – матрицы функций формы;  $[B]$  – матрица производных функций формы;  $\{S\}$  – вектор внешних усилий.

С учетом соотношения для коэффициентов проницаемости из (20) можно получить следующие формулы для численного расчета параметров пористой среды:

$$K_i^j = 8 \sum_{e=1}^E \left( \int_{V^{(e)}} [N_w]^T \det[\mathbf{J}] dL_1 dL_2 dL_3 \right) \left\{ w_i^{(j)} \right\}^{(e)}, \quad \varphi = 8 \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} |\det[\mathbf{J}]| dL_1 dL_2 dL_3, \quad (32)$$

где  $|\det[\mathbf{J}]|$  – модуль определителя Якобиевой матрицы,  $L_i, i = \overline{1,4}$  –  $L$ -координаты.

Глобальная задача неустановившейся фильтрации, как следует из (25)–(28), является нелинейной и ее решение осуществлялось на основе метода Ньютона-Рафсона. Для этого в работе была сформулирована вариационная постановка в приращениях:

$$\begin{cases} \int_V \delta \bar{p} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \right)^{(n+1)(i)} dV + \int_V \nabla_X \delta \bar{p} \cdot \mathbf{A}_m^{(n+1)(i-1)} \cdot \nabla_X \Delta \bar{p}^{(i)} dV - \int_V \delta \bar{p} \left( \mathbf{b}_m^{(n+1)(i-1)T} \cdot \nabla_X \Delta \bar{p}^{(i)} \right) dV = \\ = - \int_V \nabla_X \delta \bar{p} \cdot \mathbf{A}_m^{(n+1)(i-1)} \cdot \nabla_X \bar{p}^{(n+1)(i-1)} dV + \int_V \delta \bar{p} \left( \mathbf{b}_m^{(n+1)(i-1)T} \cdot \nabla_X \bar{p}^{(n+1)(i-1)} \right) dV + \int_V \delta \bar{p} f_m^{(n+1)(i-1)} dV, \\ \int_{V_i} \nabla_X \delta \bar{p}_0 \cdot \mathbf{A}_0^{(n+1)(i-1)} \cdot \nabla_X \bar{p}_0^{(n+1)(i-1)} dV - \int_{V_i} \delta \bar{p}_0 \left( \mathbf{b}_0^{(n+1)(i-1)T} \cdot \nabla_X \bar{p}_0^{(n+1)(i-1)} \right) dV = 0. \end{cases} \quad (33)$$

Для решения глобальной задачи использовался тетраэдральный симплекс-элемент. Применение метода конечных элементов к первому уравнению из (33) позволило сформулировать дифференциальное уравнение для каждого конечного элемента:

$$[C]_{4 \times 4} \left( \frac{\partial \{P\}}{\partial t} \right)^{(n+1)(i)} + [K_m]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} \{ \Delta P \}_{4 \times 1}^{(i)} = - [K_m]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} \{ P \}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)} + \{ F_m \}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)}, \quad (34)$$

где введены матрицы и вектор правой части

$$\begin{aligned} [C]_{4 \times 4} &= \int_V [N]_{4 \times 1}^T [N]_{4 \times 1} dV, \quad [K_m]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} = [K_{m1}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} - [K_{m2}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)}, \\ [K_{m1}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} &= \int_V [B]_{3 \times 4}^T [A_m]_{3 \times 3}^{(n+1)(i-1)} [B]_{3 \times 4} dV, \quad [K_{m2}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} = \int_V [N]_{4 \times 1}^T \{ b_m \}_{1 \times 3}^{(n+1)(i-1)T} [B]_{3 \times 4} dV, \\ \{ F_m \}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)} &= \int_V f_m^{(n+1)(i-1)} [N]_{4 \times 1}^T dV. \end{aligned} \quad (35)$$

Численное решение системы (34) осуществлялось методом конечных разностей.

Конечно-элементный алгоритм решения задачи для расчета гидростатического давления жидкости (28) приводит к следующей СЛАУ:

$$[K_0]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} \{ P_0 \}_{4 \times 1}^{(n+1)(i-1)} = \{ 0 \}_{4 \times 1}, \quad (36)$$

где  $\{ P_0 \}_{1 \times 4}^T = (P_{01} \ P_{02} \ P_{03} \ P_{04})$ ,  $[A_0]_{3 \times 3}^{(n+1)(i-1)} \equiv \mathbf{A}_0^{(n+1)(i-1)}$  и

$$\begin{aligned} [K_0]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} &= [K_{01}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} - [K_{02}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)}, \\ [K_{01}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} &= \int_V [B]_{3 \times 4}^T [A_0]_{3 \times 3}^{(n+1)(i-1)} [B]_{3 \times 4} dV, \quad [K_{02}]_{4 \times 4}^{(n+1)(i-1)} = \int_V [N]_{4 \times 1}^T \{ b_0 \}_{1 \times 3}^{(n+1)(i-1)T} [B]_{3 \times 4} dV. \end{aligned} \quad (37)$$

К системе (36) присоединяются граничные условия первого рода на  $\Sigma_l$  и  $\Sigma_{lg}$ .

В **третьей главе** дается краткое описание разработанного программного комплекса для численного моделирования локальных и глобальных процессов фильтрации жидкости и газа в пористых композитных структурах. Выполнено тестирование разработанных численных алгоритмов и программного обеспечения, результаты которого подтвердили корректность расчетов, получаемых с помощью разработанного комплекса.

В главе рассматривается численное моделирование двухмасштабного течения жидких и газовых сред в пористых структурах. В случае моделирования локальных процессов фильтрации рассматривались две геометрические модели 1/8 части ячейки периодичности: поры на основе сфер, соединенных узкими цилиндрическими каналами, и поры, образованные переплетением волокон. Примеры распределения микрополей компонент  $\tilde{W}_1^{(1)}$  и  $\tilde{W}_2^{(1)}$  вектора скорости, полученные при решении локальной задачи  $L^{(1)}$  для пористой структуры с безразмерным радиусом сферической части 0,3 и радиусом цилиндрической части 0,05, приведены на рисунке 2. Коэффициент проницаемости  $K_1^1$  в данной случае оказался равным  $3,629 \cdot 10^{-5}$ , пористость составила 0,123. Примеры распределения микрополей пульсации давления  $\tilde{P}^{(1)}$  и компонент  $\tilde{W}_1^{(1)}$ ,  $\tilde{W}_2^{(3)}$  и  $\tilde{W}_3^{(3)}$  вектора скорости, полученные при решении локальных задач  $L^{(1)}$  и  $L^{(3)}$  для тканевой структуры с безразмерным радиусом волокон 0,125, приведены на рисунке 3. Безразмерные коэффициенты проницаемости  $K_1^1$  и  $K_3^3$  для случая данной геометрии поры оказались соответственно равными  $2,047 \cdot 10^{-3}$  и  $1,385 \cdot 10^{-3}$  при пористости 0,555.

При решении глобальной задачи фильтрации проводилась оценка времени пропитки армирующего наполнителя связующим с использованием классической и обобщенной моделей слабосжимаемой жидкости. Образец имел размеры  $0,5 \text{ м} \times 0,15 \text{ м} \times 0,02 \text{ м}$ , в начальный момент времени граница раздела жидкой и газовой фаз располагалась в позиции  $x_3 = 0,05 \text{ м}$ . Наполнитель представлял собой стеклоткань, уложенную в несколько слоев. Поэтому в качестве модели пористой среды использовалась тканевая модель ячейки периодичности. Малый параметр задачи был принят равным  $\kappa = 1 \cdot 10^{-4}$ . В качестве связующего рассматривалась ненасыщенная полиэфирная смола со следующими основными свойствами: вязкость  $\mu_l = 0,2 \text{ Па} \cdot \text{с}$ , коэффициент сжимаемости  $\beta = 2,2 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н}$ . В роли газа был принят воздух с вязкостью  $\mu_g = 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ . Начальные и граничные условия задачи имели вид:  $p_l|_{t=t_0} = p_g|_{t=t_0} = 10^5 \text{ Па}$ ,  $\bar{p}_l|_{\Sigma_l} = 10^6 \text{ Па}$ ,  $\bar{p}_g|_{\Sigma_g} = 10^5 \text{ Па}$ . Шаг по времени был равен 27 с. Примеры графиков распределения давления, полученные для случая обобщенной модели слабосжимаемой жидкости, показаны на рисунке 4. Время пропитки армирующего материала связующим в случае использования классической модели слабосжимаемой жидкости составило 40,8 мин, в случае использования обобщенной модели – 40,5 мин.



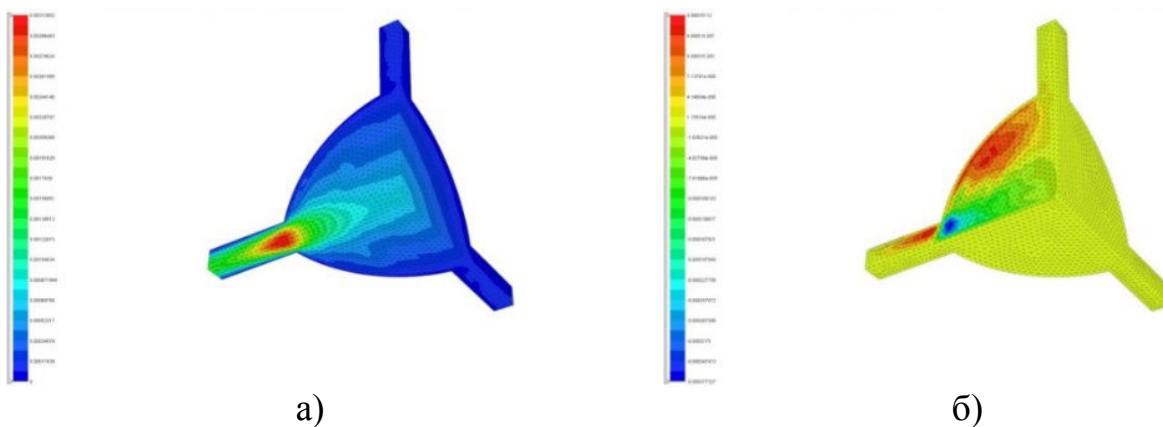


Рисунок 2 – Распределение компонент скорости в 1/8 ячейки периодичности, полученные при решении локальной задачи  $L^{(1)}$ :  
 а – компонента  $\tilde{W}_1^{(1)}$ ; б – компонента  $\tilde{W}_2^{(1)}$

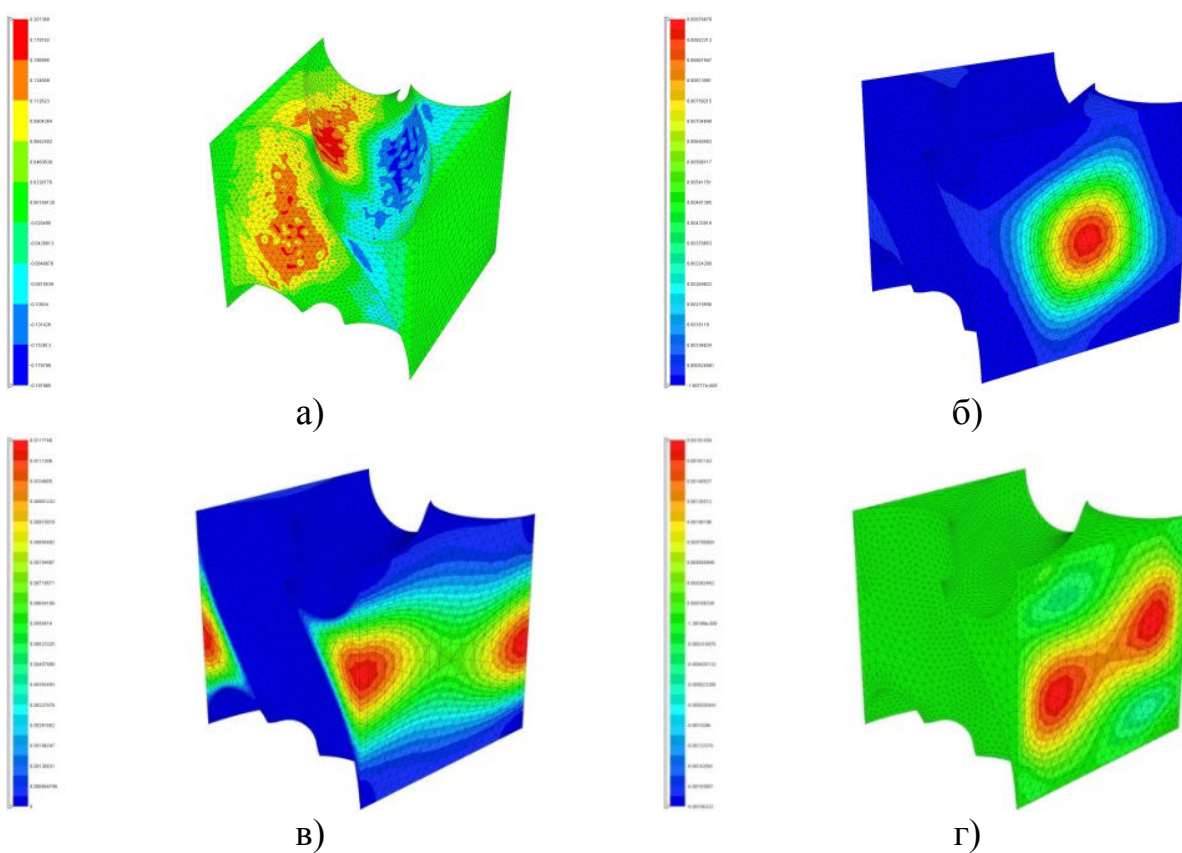


Рисунок 3 – Распределение давления и компонент скорости в 1/8 ячейки периодичности тканевой структуры:  
 а – давление  $\tilde{P}^{(1)}$  в задаче  $L^{(1)}$ ; б – компонента  $\tilde{W}_1^{(1)}$  вектора скорости в задаче  $L^{(1)}$ ;  
 в – компонента  $\tilde{W}_3^{(3)}$  вектора скорости в задаче  $L^{(3)}$ ; г – компонента  $\tilde{W}_2^{(3)}$  вектора скорости в задаче  $L^{(3)}$

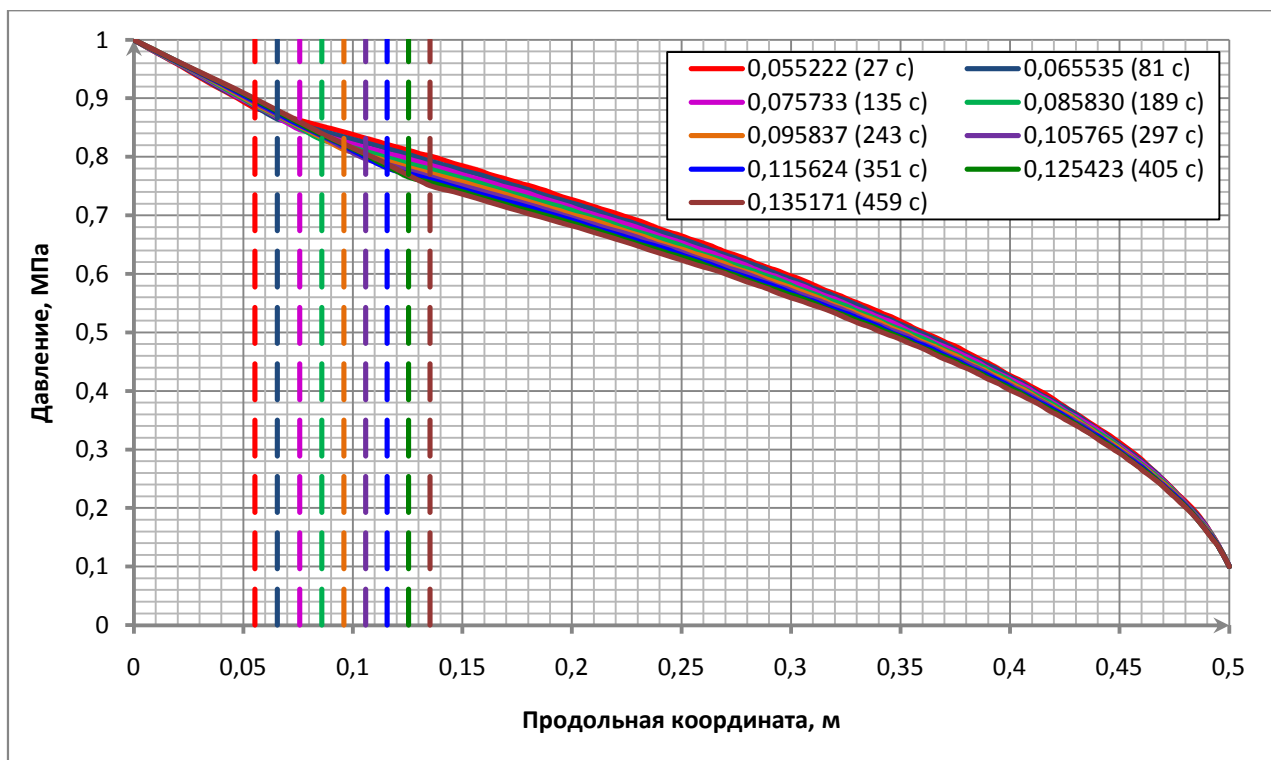


Рисунок 4 – Графики распределения среднего по сечению макроскопического давления  $\bar{p}$  в зависимости от продольной координаты для различных моментов времени и для соответствующих положений границы раздела фаз в случае обобщенной модели слабосжимаемой жидкости

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Разработана физико-математическая модель слабосжимаемой жидкости и двухмасштабная модель пространственного течения слабосжимаемой жидкости, вытесняющей газовую среду в пористой композитной структуре.

2. На основе метода асимптотического осреднения сформулированы локальные задачи пространственного течения слабосжимаемой жидкости и газа в ячейках периодичности и глобальная задача течения жидкости, вытесняющей газ из пористой композитной структуры.

3. Сформулированы вариационные постановки локальной и глобальной задач течения жидкой и газовой фаз, с помощью которых разработаны численные алгоритмы решения локальных задач в общей трехмерной постановке и алгоритм расчета тензора проницаемости, а также алгоритм численного решения глобальной задачи течения жидкости, вытесняющей газ из пористой композитной структуры.

4. Получены результаты численного моделирования локальных пространственных течений жидкости и газа на ячейке периодичности типовых композитных структур – со сферическими пораами, соединенными каналами, и на основе тканевых структур, показавшие эффективность предложенного алгоритма решения локальных задач и вычисления тензора проницаемости пористых сред.

5. Получены результаты численного моделирования макроскопического течения жидкого связующего, вытесняющего газовую среду в типовой

пористой композитной структуре, показавшие эффективность предложенного алгоритма решения задач для рассмотренной модели слабосжимаемой жидкости.

## **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОТРАЖЕНЫ В РАБОТАХ**

1. Богданов И.О. Математическое моделирование локальных газодинамических процессов в пористых периодических средах // Молодежный научно-технический вестник. 2015. №12. 22 с.

2. Богданов И.О. Математическое моделирование локальных процессов фильтрации в пористо-сетчатых материалах // Молодежный научно-технический вестник. 2015. №11. 27 с.

3. **Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Конечно-элементный метод решения трехмерных задач теории устойчивости упругих конструкций // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 6(69). С. 73-92.**

4. Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Математическое моделирование фильтрации в армирующем наполнителе при производстве композиционных материалов на основе технологии RTM // Сб. тр. 2-й всероссийской научно-технической конференции «Механика и математическое моделирование в технике». Москва, 22–23 ноября 2017 г., МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике, РАН. Москва, Изд.-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. С. 243–247.

5. **Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации в пористых средах // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. № 3(75). 19 с.**

6. **Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации жидкого связующего в композитных конструкциях, изготавливаемых методом RTM // Математическое моделирование и численные методы. 2017. № 2(14). С. 3–27.**

7. Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Разработка численного метода решения трехмерных задач теории устойчивости упругих конструкций // Сб. тр. всероссийской научно-технической конференции «Механика и математическое моделирование в технике», посвящённой 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева. Москва, 17–19 мая 2016 г., МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике, РАН.

8. Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Трёхмерный конечно-элементный анализ устойчивости упругих композитных конструкций // Сб. тр. 6-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред»: в 2-х томах. Т.1. Москва, 16–18 ноября 2016 г., ИПРИМ РАН. Москва: ИПРИМ РАН, 2016. С. 59–73.

9. **Димитриенко Ю.И., Захарова Ю.В., Богданов И.О. Математическое и численное моделирование процесса фильтрации связующего в тканевом композите при RTM методе изготовления // Университетский научный журнал. 2016. №19. С. 33–43.**

10. Димитриенко Ю.И., Шпакова Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В. Математическое и численное моделирование газодинамических процессов в композиционном материале при отверждении // Тр. Междунар. конф., посв. 90-летию со дня рожд. акад. Г.И. Марчука, «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики». Новосибирск, 19–23 октября 2015 г., Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. Новосибирск: Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 2015. С. 224–229.

11. Димитриенко Ю.И., Шпакова Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В. Моделирование влияния технологии изготовления на прочностные свойства конструкций из тканевых композиционных материалов // Сб. докл. XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20–24 августа 2015 г. Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2015. С. 4357–4358.

12. Димитриенко Ю.И., Шпакова Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В. **Моделирование процесса многоуровневой фильтрации жидкого связующего в тканевом композите при RTM-методе изготовления // Инженерный журнал: Наука и инновации. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. № 12(48). 7 с.**