

УДК 539.12

Поток спина порождает антисимметричный тензор напряжений

Р. И. Храпко

Аннотация

В рамках стандартной электродинамики подсчитан вращающий механический момент, действующий со стороны электромагнитного луча круговой поляризации с плоским фазовым фронтом на поглощающую поверхность. Оказалось, что этот момент вдвое больше, чем поток момента импульса в этом же луче, согласно той же электродинамике. Сделан вывод, что подсчет момента импульса электромагнитных волн в рамках стандартной электродинамики некорректен. Именно, в качестве момента импульса учитывается только момент линейного импульса, и не учитывается спин. Внимательный анализ теоретико-полевого обоснования электродинамики подтвердил этот вывод. Определенные изменения теории поля позволили построить тензор спина электродинамики, который сопровождает тензор энергии-импульса Максвелла. Учет спина в луче привел к равенству потока углового импульса в луче и вращающего момента на поглощающей поверхности. Таким образом, современная электродинамика дополнена тензором спина.

Ключевые слова

электродинамический вращающий момент; момент импульса; тензор спина.

1. Введение

Луч света круговой поляризации несет угловой импульс. Это не вызывает сомнений. Такой луч вращал двояко преломляющую пластинку в опыте Бета [1]. Такой луч вращает микрочастицы в многочисленных современных экспериментах с оптическими ловушками (например [2]). Однако волнующим является вопрос, как распределен этот угловой импульс по сечению луча. Можно ли пользоваться понятием плотности потока углового импульса так же, как мы пользуемся плотностью потока энергии или плотностью потока линейного импульса? Чтобы разобраться в этом вопросе, мы рассмотрим во Введении результат

воздействия потока энергии и импульса на среду, поглощающую луч. В следующих двух разделах будет рассмотрен поток момента линейного импульса. Мы убеждены, что характер механических напряжений, вызванных поглощением потока момента импульса, выдает место поглощения этого потока.

В четвертом разделе проводится критический анализ теоретико-полевого обоснования электродинамики, а в пятом разделе мы получаем тензор спина электродинамики. В шестом разделе этот тензор используется для подсчета потока момента импульса в луче. В седьмом разделе рассмотрено знаменитое преобразование Гамблета, которое лежит в основе ошибочной интерпретации орбитального момента импульса как спина. В восьмом разделе приведена простая одномерная механическая аналогия воздействия спина на поглощающую среду.

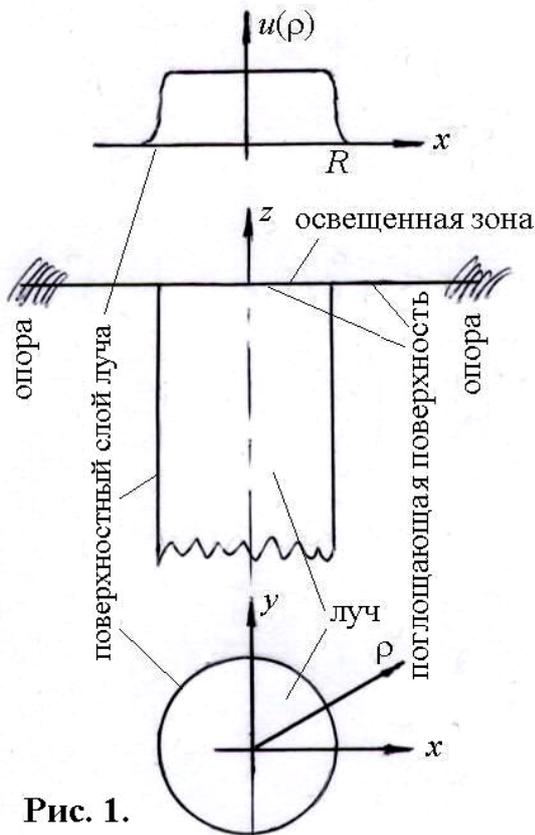


Рис. 1.

Световой луч падает на поглощающую поверхность. $u(\rho)$ - амплитуда электромагнитного поля.

Если луч света поглощается некоторой материальной поверхностью, то эта поверхность нагревается и испытывает давление света. Нагрев вызывает градиент температуры в поверхности и поток тепла от освещенной зоны по поверхности на периферию. Давление вызывает механическое напряжение сдвига в поверхности, с помощью которого сила давления передается по поверхности от освещенной зоны на опоры, находящейся на периферии.

Рассмотрим так называемый параксиальный световой луч круговой поляризации радиуса R , распространяющийся вдоль оси z [3] (Рис. 1)

$$\vec{\mathbf{E}} = \exp[i(z - t)][\mathbf{x} + iy + \mathbf{z}(i\partial_x - \partial_y)]u(\rho),$$

$$\vec{\mathbf{B}} = -i\vec{\mathbf{E}}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2. \quad (1.1)$$

Символ breve отмечает комплексные вектора и комплексные числа, кроме числа i , $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ - единичные координатные вектора. ∂_x означает частную производную по x . Для простоты мы положили $\omega = k = c = 1$, где ω, k, c - частота, волновое число и скорость света. Амплитуда электромагнитного поля луча обозначена $u(\rho)$. Функция $u(\rho)$ считается постоянной внутри луча, т.е. при $\rho < R$. При $\rho > R$ функция $u(\rho)$

быстро уменьшается до нуля. В поверхностном слое луча, т.е. там, где функция $u(\rho)$ уменьшается, существуют продольные составляющие электрического и магнитного поля (направленные вдоль оси z). Так получается, потому что силовые линии замкнуты, но не могут выйти за пределы луча.

Мы положим

$$\int u^2 dx dy = \int u^2 2\pi\rho d\rho = \int_0^R u^2 2\pi\rho d\rho = 1 \quad (1.2)$$

при интегрировании по всей поглощающей поверхности, что равносильно интегрированию по поперечному сечению луча (толщину поверхностного слоя луча будем не замечать, когда это допустимо).

Плотность потока энергии в луче дается вектором Пойнтинга $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Мы рассмотрим сначала плотность потока энергии вдоль оси z , то есть компоненту T_e^{0z} тензора энергии-импульса Максвелла. Усреднение по времени дает

$$\langle T_e^{0z} \rangle = \Re(\check{E}_x \bar{B}_y - \check{E}_y \bar{B}_x) / 2 = \Re(\check{E}_x i \bar{E}_y - \check{E}_y i \bar{E}_x) / 2 = u^2 \quad (1.3)$$

(черточка отмечает комплексно сопряженные числа). Таким образом, мощность нашего луча, в силу (1.2), равна

$$W = \int \langle T_e^{0z} \rangle dx dy = \int u^2 dx dy = \int u^2 2\pi\rho d\rho = 1 \quad (1.4)$$

Мы рассматриваем достаточно широкий луч и принимаем, что $u(\rho) = u_0 = \text{Const}$ при $\rho < R$. Так что, в силу (1.2)

$$u^2(0) = u_0^2 = 1 / \pi R^2. \quad (1.5)$$

Теперь легко найти плотность теплового потока по поглощающей поверхности:

$$Q^i = u_0^2 x^i / 2 \text{ при } \rho < R, \text{ и } Q^i = u_0^2 R^2 x^i / 2\rho^2 \text{ при } \rho > R \quad (1.6)$$

(на поверхности индекс i имеет значения $i = x, y$). Действительно, для дивергенции этого потока получаем

$$\partial_i Q^i = u^2 (\partial_x x + \partial_y y) / 2 = u_0^2 \text{ при } \rho < R, \text{ и } \partial_i Q^i = 0 \text{ при } \rho > R. \quad (1.7)$$

При известном коэффициенте теплопроводности поверхности, нетрудно рассчитать распределение температуры.

Давление луча на поглощающую поверхность дается компонентой T_e^{zz} тензора энергии-импульса Максвелла. Смысл такой компоненты тензора напряжений дается равенством

$$dF^z = T_e^{zz} dx dy, \quad (1.8)$$

где dF^z - сила, приложенная к элементу поверхности $dx dy$ со стороны электромагнитного поля луча. Пренебрегая влиянием поверхностного слоя луча, имеем постоянное по сечению луча давление

$$\langle T_e^{zz} \rangle = \Re(E_x^2 + E_y^2 + B_x^2 + B_y^2) / 4 = u_0^2, \quad (1.9)$$

равное, как и должно быть, плотности потока энергии. Механическое напряжение сдвига в поверхности должно уравнивать это давление. Это напряжение сдвига распределено по толщине нашей материальной поверхности; оно выражается компонентой T_m^{zp} тензора напряжений материала поверхности. Для круга радиуса ρ с центром на оси луча, выделенного из поглощающей поверхности, условия механического равновесия, именно, $u_0^2 \pi \rho^2 = T_m^{zp} 2\pi \rho$ для $\rho < R$, и $u_0^2 \pi R^2 = T_m^{zp} 2\pi \rho$ для $\rho > R$ дают механическое напряжение в поверхности

$$T_m^{zp} = u_0^2 \rho / 2 \text{ для } \rho < R, \text{ и } T_m^{zp} = u_0^2 R^2 / 2\rho \text{ для } \rho > R, \quad (1.10)$$

похожие на выражения (1.6).

Таким образом, плотность теплового потока и механическое напряжение сдвига растут пропорционально расстоянию до оси луча в (равномерно) освещенной зоне поглощающей поверхности. За пределами освещенной зоны они гиперболически стремятся к нулю.

2. Максвелловский момент силы

Момент силы действует на поглощающую поверхность со стороны луча, согласно электродинамике Максвелла, тогда и только тогда, когда эта поверхность испытывает касательную силу, определяемую компонентами T_e^{xz}, T_e^{yz} тензора Максвелла. Однако эти компоненты очевидно равны нулю везде на поглощающей поверхности, за исключением граничной области освещенной зоны поглощающей поверхности, куда падает поверхностный слой луча. Действительно, в центральной части луча, так же как в плоской электромагнитной волне, вектор Пойнтинга и плотность импульса направлены вдоль направления распространения, т.е. вдоль оси z . Поэтому касательная сила действует на поглощающую поверхности только на границе освещенной зоны, там, где $\partial_y u^2 \neq 0, \partial_x u^2 \neq 0$:

$$T_e^{xz} = -E_x E_z - B_x B_z, \quad \langle T_e^{xz} \rangle = -\Re(\check{E}_x \bar{E}_z + \check{B}_x \bar{B}_z) / 2 = -\Re(\check{E}_x \bar{E}_z) = \partial_y u^2 / 2, \quad (2.1)$$

$$\langle T_e^{yz} \rangle = -\partial_x u^2 / 2. \quad (2.2)$$

Круг радиусом $\rho < R$ с центром на оси луча, выделенный из нашей поверхности, не будет испытывать касательных сил, и не будет испытывать момента силы. Поэтому освещенная зона поглощающей поверхности, вплоть до границы, не будет содержать механических напряжений, которые вызываются моментом силы.

Момент силы, приложенный к границе освещенной зоны, равен интегралу

$$\tau_2 = \int (x \langle T_e^{yz} \rangle - y \langle T_e^{xz} \rangle) dx dy = - \int (x \partial_x u^2 / 2 + y \partial_y u^2 / 2) dx dy = \int u^2 dx dy = 1 \quad (2.3)$$

(индекс 2 указывает, что это выражение справедливо в рамках раздела 2 этой статьи).

Момент силы (2.3) должен быть компенсирован моментом силы, приложенным к нашей поверхности со стороны опоры, находящейся на периферии. Поэтому часть поверхности, внешняя по отношению к освещенной зоне, т.е. находящаяся при $\rho > R$, должна содержать механические напряжения, описываемые компонентой тензора напряжений $T_{m2}^{\phi\rho}$ (индекс 2

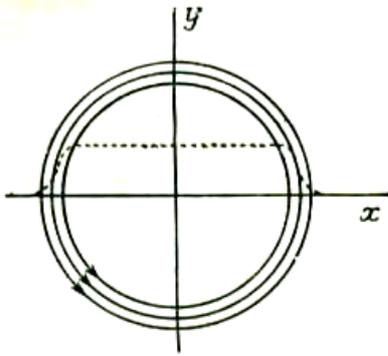


Рис. 2. Так выглядят линии циркуляции среднего по времени потока энергии или плотности импульса в поляризованном по кругу электромагнитном волновом пакете. Предполагается, что на данном волновом фронте, например $z = 0$, поля постоянны во внутренней области и спадают до нуля в наружной области (зависимость амплитуд от радиуса представлена штриховой линией). Поток энергии вычислен из приближенного решения уравнений Максвелла. На рисунке изображен поток только в поперечном направлении; продольный поток значительно больше, а результирующий поток имеет вид спирали.

указывает, что этот тензор справедлив в рамках раздела 2 этой статьи). Смысл такой компоненты тензора напряжений дается равенством

$$dF^\phi = T_m^{\phi\rho} dl, \quad (2.4)$$

где dF^ϕ - сила, приложенная в поверхности к элементу окружности dl и направленная вдоль угловой координаты ϕ . Условие равновесия для внешней части поверхности,

$$\tau_2 = \int \rho dF^\phi = \int \rho T_{m2}^{\phi\rho} dl = 2\pi\rho^2 T_{m2}^{\phi\rho}, \quad (2.5)$$

дает для этой компоненты тензора напряжений значение $T_{m2}^{\phi\rho} = 1/2\pi\rho^2$. В результате мы имеем, согласно максвелловской электродинамике, механическое напряжение в поглощающей поверхности

$$T_{m2}^{\phi\rho} = 0 \text{ для } \rho < R, \quad T_{m2}^{\phi\rho} = 1/2\pi\rho^2 \text{ для } \rho > R. \quad (2.6)$$

Тот факт, что момент импульса луча относительно оси луча содержится только в поверхностном слое луча и, соответственно, момент силы, приложенный к поглощающей поверхности, локализован на границе освещенной зоны, хорошо известен. Например, Оганян [4]

пишет и иллюстрирует ситуацию рисунком (см. наш Рис. 2, который взят из [5]):

«В волне, имеющей конечные поперечные размеры, каждое из полей \mathbf{E} и \mathbf{B} имеет компоненту, параллельную волновому вектору (силовые линии замкнуты), а поток энергии имеет перпендикулярные ему составляющие. Поэтому результирующий поток энергии имеет вид спирали. Наличие циркулирующего потока энергии предполагает существование момента импульса, направленного вдоль направления распространения волны».

Авторы работы [6] приводят аналогичный по содержанию рисунок (см. наш Рис. 3). Они объясняют:

«Электрическое и магнитное поле может иметь ненулевую z -компоненту только внутри поверхностного слоя луча. z -компоненты полей внутри этого слоя обеспечивают существование ненулевой z -компоненты момента импульса внутри этого слоя. Поскольку волна тождественно равна нулю снаружи от поверхностного слоя и постоянна внутри луча, поверхностный слой является единственным регионом, где z -компонента момента не исчезает».

9.1 ANGULAR MOMENTUM OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD 227

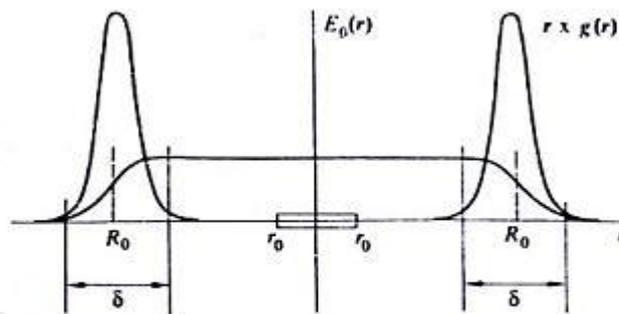


Fig. 9.3. The electric field amplitude and the angular momentum density across a cylindrical beam.

Рис. 3.

Амплитуда электрического поля и плотность момента импульса в поперечном сечении цилиндрического луча

Все приведенные в этом разделе доводы показывают, что, согласно стандартной электродинамике, внутренняя, освещенная зона поглощающей поверхности не воспринимает никакого момента силы и не содержит соответствующих ему механических напряжений. Механические напряжения, вызываемые моментом силы, возникают только на границе освещенной зоны и распространяются по поверхности к периферии вплоть до опоры, поддерживающей поглощающую поверхность. Эта граница, а потому и опора на периферии, испытывают момент силы со стороны луча, равный $\tau_2 = 1$. Учитывая, что мощность луча $W = 1$ и частота $\omega = 1$, мы можем записать для этого момента силы

$$\tau_2 = W / \omega. \quad (2.7)$$

Заметим, однако, что мощность W поглощается равномерно всей освещенной зоной, а момент импульса, приводящий к моменту силы τ_2 , поглощается исключительно границей освещенной зоны, то есть не там, где поглощается энергия. Поэтому разумно предположить, что этот момент импульса не связан с этой энергией, и что с этой энергией, которая является энергией электромагнитной волны круговой поляризации, связан некий другой, дополнительный момент импульса, поглощаемый равномерно всей освещенной зоной и не учитываемый стандартной электродинамикой. С другой стороны, момент силы τ_2 обязан своим существованием на границе освещенной зоны продольным составляющим электромагнитного поля, а потому этот момент не может иметь волновую природу, и, стало быть, не может быть связан со спином.

Отсутствие момента силы в освещенной зоне в рамках стандартной парадигмы подтверждается интересным рассуждением в работе [7]. Авторы мысленно делят наш луч на две концентрические части: внутренняя часть имеет некий радиус $\rho_1 < R$, а внешняя имеет вид толстостенной трубы и располагается между ρ_1 и R ,

$$u(\rho) = u_{in}(\rho) + u_{out}(\rho), \quad (2.8)$$

так что $\partial_\rho u_{in}(\rho)|_{\rho_1} = -\partial_\rho u_{out}(\rho)|_{\rho_1}$. Авторы справедливо утверждают, что вблизи окружности радиуса ρ_1 на поглощающей поверхности действуют два равных и противоположно направленных момента силы, которые взаимно компенсируются.

3. Спиновый момент силы

Работа [7] была написана в ответ на вопрос [8], в котором указывалось, что диполи диэлектрика, из которого состоит поглощающая поверхность, испытывают моменты силы со стороны волны круговой поляризации. Вследствие этого, материал поверхности должен испытывать объемную плотность момента силы в соответствии с [9,10]

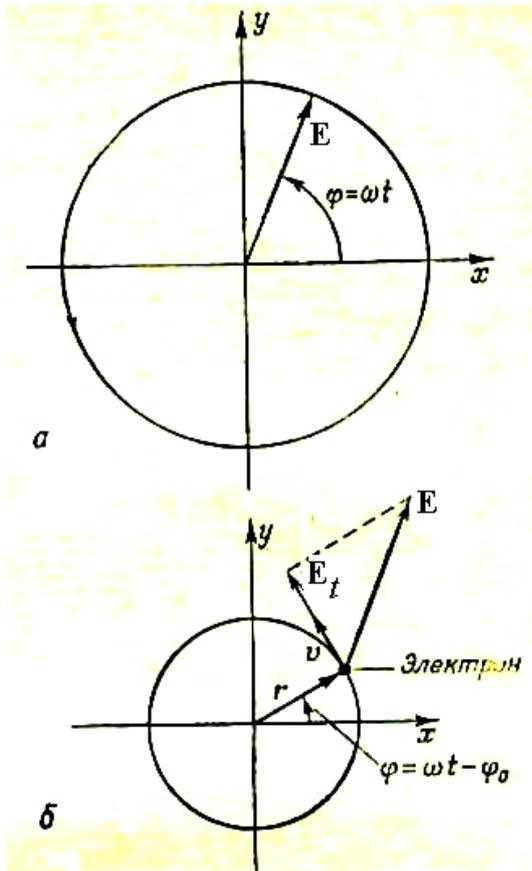
$$\tau/V = \mathbf{P} \times \mathbf{E}. \quad (3.1)$$

где \mathbf{P} есть вектор поляризации материала.

Возникновение этого момента силы убедительно объясняет Р. Фейнман [11]:

«... Вектор \mathbf{E} электрического поля света круговой поляризации бежит по кругу (фиг. 15.5,а) (см. наш Рис. 4). Теперь положим, что мы осветили таким светом стенку, способную поглотить его, и рассмотрим один из атомов стенки, опираясь на классические представления... В итоге электрон этого атома будет двигаться по кругу (фиг. 15.5,б). Он сместится из положения равновесия в начале координат на величину \mathbf{r} и начнет ходить по кругу, как-то отставая по фазе от вектора \mathbf{E} . Электрическое поле с течением времени

поворачивается, но с такой же частотой поворачивается и смещение, так что относительная ориентация остается той же. Посмотрим теперь, какая работа производится над электроном. Скорость, с которой электрону подается энергия, равна его скорости v , умноженной на компоненту E , параллельную этой скорости: $W = eE_t v$



Ф и г. 15.5. Электрическое поле E в поляризованной по кругу световой волне (а) и вращение электрона, приводимого в движение поляризованным по кругу светом (б).

Рис. 4.

Но теперь плотность вращающего момента, постоянная в точках поглощающей поверхности в пределах освещенной зоны и не выражается в терминах максвелловского тензора, хотя, несомненно, вызывает механические напряжения, которые описываются определенным тензором напряжений. В разделе 8 приведена простая одномерная аналогия этого явления. Мы определим эти напряжения, используя условие равновесия. Уместно, однако, отметить, что авторы работ [9-11] отождествляют рассмотренный здесь вращающий момент с потоком спина в луче.

Рассмотрим круг радиусом $\rho < R$ с центром на оси луча, выделенный из поглощающей поверхности. Согласно (1.3) и (1.5), он принимает мощность

Но вы не можете не заметить, что у электрона в это время непрерывно увеличивается и момент количества движения, потому что он все время испытывает действие момента, вращающего его вокруг начала координат. Вращательный момент равен $\tau = eE_t r$, и он обязан равняться скорости изменения момента количества движения dJ_z / dt :

$$dJ_z / dt = \tau = eE_t r.$$

Вспоминая, что $v = \omega r$, имеем

$$\tau = W / \omega \gg.$$

К сожалению, авторы работы [7] игнорировали проблемы, возникающие при учете этого вращающего момента.

Таким образом, плотность потока энергии на поглощающую поверхность сопровождается в действительности плотностью вращающего механического момента в таком же соотношении, как полный поток энергии относится к полному вращающему моменту, приложенному к границе освещенной зоны, согласно теории Максвелла (2.7).

$W(\rho) = \pi\rho^2 u_0^2 = \rho^2 / R^2$ и, стало быть, испытывает вращающий момент $\tau_3(\rho) = \rho^2 / R^2$ (индекс 3 указывает на принадлежность величины к разделу 3 статьи). Условие равновесия $\tau = 2\pi\rho^2 T_m^{\phi\rho}$, аналогичное (2.5), выглядит теперь $\rho^2 / R^2 = 2\pi\rho^2 T_{m3}^{\phi\rho}$ для $\rho < R$ и $1 = 2\pi\rho^2 T_{m3}^{\phi\rho}$ для $\rho > R$. Это означает

$$T_{m3}^{\phi\rho} = 1/2\pi R^2 = \text{Const} \text{ для } \rho < R, \quad T_{m3}^{\phi\rho} = 1/2\pi\rho^2 \text{ для } \rho > R. \quad (3.2)$$

Таким образом, учет напряжений, рассчитанных в разделах 2 и 3, дает двойной результирующий вращающий момент на периферии, т.е. при $\rho > R$,

$$\tau_{\text{tot}} = \left[T_{m2}^{\phi\rho} + T_{m3}^{\phi\rho} \right]_{\rho>R} 2\pi\rho^2 = \tau_2 + \tau_3(R) = 2. \quad (3.3)$$

Результат (3.3) более строго получен в работах [12,13]. Он свидетельствует, что момент импульса, приносимый лучом (1.1), согласно стандартной электродинамике, (2.3), вдвое меньше момента импульса, получаемого поглощающей поверхностью, согласно той же электродинамике. Это означает, что стандартная электродинамика не замкнута.

4. Существует ли тензор спина электродинамики?

Мы воспользуемся упомянутой идеей работ [9-11] о спиновой природе механического момента, действующего в центральной части поглощающей поверхности, и покажем, что он действительно появляется вследствие поглощения потока спина.

Хорошо известно, что фотоны, то есть электромагнитные волны, несут спин, энергию, импульс и момент этого импульса относительно некоторой оси или точки. Энергия и импульс электромагнитных волн описывается тензором энергии-импульса Максвелла (вернее, тензорной плотностью):

$$T^{\lambda\mu} = -g^{\lambda\alpha} F_{\alpha\nu} F^{\mu\nu} + g^{\lambda\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} / 4, \quad (4.1)$$

где $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, $F_{\mu\nu} = F^{\alpha\beta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}$ есть тензор электромагнитного поля. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом описывается дивергенцией этого тензора, $\partial_\mu T^{\lambda\mu}$, то есть плотностью силы Лоренца:

$$f^\lambda = -\partial_\mu T^{\lambda\mu} = F^{\lambda\beta} \partial^\mu F_{\mu\beta} = j_\beta F^{\lambda\beta} \quad (4.2)$$

(при записи этого равенства используются уравнения Максвелла $\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0$, $\partial^\mu F_{\mu\beta} = j_\beta$).

Момент импульса в объеме V определяется как [14]

$$L^{ij} = \int_V 2x^{[i} T^{j]0} dV = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV, \quad (4.3)$$

и эту величину следует назвать орбитальным моментом импульса. Однако в современной электродинамике отсутствует формулировка спина, хотя концепция классического спина,

который отличается от момента импульса (4.3), заложена в теории поля. К сожалению, концепция классического спина оказалась задушенной в стандартной электродинамике процедурой Белинфанте-Розенфельда, как это будет сейчас показано.

Действительно, электродинамика начинается с канонического лагранжиана [15 (4-111)], $L_c = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$. Затем, с помощью лагранжевого формализма получаются канонический тензор энергии-импульса [15 (4-113)]

$$T_c^{\lambda\mu} = \partial^\lambda A_\alpha \frac{\partial L_c}{\partial(\partial_\mu A_\alpha)} - g^{\lambda\mu} L_c = -\partial^\lambda A_\alpha F^{\mu\alpha} + g^{\lambda\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} / 4 \quad (4.4)$$

и канонический тензор момента импульса [15 (4-147)]

$$J_c^{\lambda\mu\nu} = 2x^{[\lambda} T_c^{\mu]\nu} + Y_c^{\lambda\mu\nu}, \quad (4.5)$$

где

$$Y_c^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda} \delta_\alpha^{\mu]} \frac{\partial L_c}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} = -2A^{[\lambda} F^{\mu]\nu} \quad (4.6)$$

есть канонический тензор спина [15 (4-150)]. Его пространственной компонентой является $\mathbf{E} \times \mathbf{A}$:

$$Y_c^{ij0} = \mathbf{E} \times \mathbf{A}, \quad (4.7)$$

Смысл тензора спина $Y^{\lambda\mu\nu}$ заключается в следующем. Компонента Y^{ij0} представляет объемную плотность спина. Это значит, что $dS^{ij} = Y^{ij0} dV$ есть спин электромагнитного поля внутри пространственного элемента dV . Компонента Y^{ijk} является плотностью потока спина в направлении оси x^k . Например, $dS_z / dt = dS^{xy} / dt = d\tau^{xy} = Y^{xyz} da_z$ есть z -компонента потока спина сквозь элемент поверхности da_z за единицу времени, т.е. вращающий момент, действующий на этот элемент.

Смысл тензора полного момента импульса, $J^{\lambda\mu\nu}$ дается выражением для полного момента импульса в элементе dV_ν : $dJ^{\lambda\mu} = J^{\lambda\mu\nu} dV_\nu = 2x^{[\lambda} T^{\mu]\nu} dV_\nu + Y^{\lambda\mu\nu} dV_\nu$. Соответствующий интеграл выглядит

$$J^{\lambda\mu} = L^{\lambda\mu} + S^{\lambda\mu} = \int_V 2x^{[\lambda} T^{\mu]\nu} dV_\nu + \int_V Y^{\lambda\mu\nu} dV_\nu. \quad (4.8)$$

Он состоит из двух частей: первый член представляет орбитальный момент импульса; второй член представляет спин. Следует подчеркнуть, что момент импульса не может представлять спин. Эта идея обсуждалась в статье [16], написанной в связи с [17].

Однако, канонические тензоры (4.4), (4.5), (4.6) не являются тензорами электродинамики. Они, очевидно, противоречат эксперименту. Например, рассмотрите однородное электрическое поле:

$$A_0 = -Ex, \quad A_x = 0, \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0, \quad F_{x0} = -F^{x0} = \partial_x A_0 = -E. \quad (4.9)$$

Каноническая плотность энергии такого отрицательна!

$$T_c^{00} = g^{00} F_{x0} F^{x0} / 2 = -E^2 / 2. \quad (4.10)$$

Другой пример: рассмотрите плоскую волну круговой поляризации (или центральную часть луча (1.1)),

$$\begin{aligned} E^x &= \cos(z-t), \quad E^y = -\sin(z-t), \quad B^x = \sin(z-t), \quad B^y = \cos(z-t), \\ A^x &= \sin(z-t), \quad A^y = \cos(z-t). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Подсчет канонического тензора спина (4.6) дает

$$Y_c^{xy0} = 1, \quad Y_c^{xyz} = 1, \quad Y_c^{zyx} = A^x B_x = \sin^2(z-t), \quad Y_c^{yxz} = A^y B_y = \cos^2(z-t). \quad (4.12)$$

Этот результат абсурден. Хотя Y_c^{xy0} и Y_c^{xyz} адекватны, результат означает, что существует поток спина в направлении y & x -осей, т.е. в направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны.

Существует, однако, мнение, что изменение лагранжиана может помочь получить тензор Максвелла (4.1). А. Барут [18] представил серию лагранжианов и уравнений поля в Таблице 1

Field	Lagrangian	Field Equations
Free Electromagnetic Field	$\begin{aligned} L_I &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2) \\ L_{II} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (A^{\mu, \mu})^2 \\ L_{III} &= -\frac{1}{2} A^{\mu, \nu} A_{\mu, \nu} \\ L_{IV} &= \frac{1}{2} [A_\nu F^{\mu\nu, \mu} - A_{\nu, \mu} F^{\mu\nu}] + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned}$	$\begin{aligned} F^{\mu\nu, \nu} &= 0 \\ \square^2 A_\mu &= 0 \\ \square^2 A_\mu &= 0 \\ \square^2 A_\mu &= 0 \end{aligned}$
Electromagnetic Field with an External Current	$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} A_\mu j^\mu$	$F^{\mu\nu, \nu} = -\frac{1}{c} j^\mu$

К сожалению, А. Барут не показал соответствующие тензоры энергии-импульса и спина. Поэтому мы добавляем Таблицу 2.

Таблица 2

Лагранжианы электродинамики, тензоры энергии-импульса и тензоры спина

Лагранжиан	Тензор энергии-импульса	Тензор спина
$L_I = L = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 4$	$T_I^{\lambda\mu} = T_c^{\lambda\mu} = -A_{\nu}^{\cdot\lambda} F^{\mu\nu} + g^{\lambda\mu} F_{\sigma\nu} F^{\sigma\nu} / 4$	$Y_I^{\lambda\mu\nu} = Y_c^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda} F^{\mu]\nu}$
$L_{II} = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 4 - (A^{\mu}{}_{,\mu})^2 / 2$	$T_{II}^{\lambda\mu} = T_I^{\lambda\mu} - A^{\mu,\lambda} A^{\sigma}{}_{,\sigma} + g^{\lambda\mu} (A^{\sigma}{}_{,\sigma})^2 / 2$	$Y_{II}^{\lambda\mu\nu} = Y_I^{\lambda\mu\nu} + 2A^{[\lambda} g^{\mu]\nu} A^{\sigma}{}_{,\sigma}$
$L_{III} = -A^{\mu}{}_{,\nu} A_{\mu}{}^{,\nu} / 2$	$T_{III}^{\lambda\mu} = -A_{\sigma}^{\cdot\lambda} A^{\sigma,\mu} + g^{\lambda\mu} A_{\sigma,\rho} A^{\sigma,\rho} / 2$	$Y_{III}^{\lambda\mu\nu} = 2A^{[\lambda} A^{\mu],\nu}$
$L_V = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 4 - A_{\sigma} j^{\sigma}$	$T_V^{\lambda\mu} = T_I^{\lambda\mu} + g^{\lambda\mu} A_{\sigma} j^{\sigma}$	$Y_V^{\lambda\mu\nu} = Y_I^{\lambda\mu\nu}$

Ясно, что ни один из этих тензоров энергии-импульса не является тензором Максвелла. Больше того, ни один из них не отличается от тензора Максвелла на дивергенцию от антисимметричного тензора, то есть, ни один из них не имеет правильную дивергенцию (1.2). Таким образом, видимо, не известен метод получения тензора Максвелла в рамках стандартного лагранжевого формализма.

Страстное желание получить такой тензор привело профессора Сопера к ошибке [19]. Он использовал лагранжиан L_V , но, вместо тензора $T_V^{\lambda\mu}$, он ошибочно получил другой (false) тензор [19, (8.3.5) – (8.3.9)]

$$T_f^{\lambda\mu} = T_I^{\lambda\mu} + A^{\lambda} j^{\mu}, \quad (4.13)$$

который отличается от максвелловского на дивергенцию от антисимметричного выражения

$$T_f^{\lambda\mu} - T_I^{\lambda\mu} = \partial_{\alpha} A^{\lambda} F^{\mu\alpha} - A^{\lambda} j^{\mu} = \partial_{\alpha} (A^{\lambda} F^{\mu\alpha}). \quad (4.14)$$

В рамках стандартной электродинамики канонические тензоры энергии-импульса (4.4) и полного момента импульса (4.5) используются в процедуре Белинфанте-Розенфельда [20,21]. Именно, к ним прибавляются специфические члены

$$t_{st}^{\lambda\mu} = -\partial_{\nu} \tilde{Y}^{\lambda\mu\nu} / 2 \quad (4.15)$$

$$m_{st}^{\lambda\mu\nu} = -\partial_{\kappa} (x^{[\lambda} \tilde{Y}^{\mu]\nu\kappa}), \quad (4.16)$$

где $\tilde{Y}^{\lambda\mu\nu} \stackrel{def}{=} Y_c^{\lambda\mu\nu} - Y_c^{\mu\nu\lambda} + Y_c^{\nu\lambda\mu} = -2A^{\lambda} F^{\mu\nu}$. Эта процедура дает тензор энергии-импульса $T_{st}^{\lambda\mu}$ и

тензор момента импульса $J_{st}^{\lambda\mu\nu}$, которые мы называем *стандартными*:

$$T_{st}^{\lambda\mu} = T_c^{\lambda\mu} + t_{st}^{\lambda\mu} = -\partial^{\lambda} A_{\nu} F^{\mu\nu} + g^{\lambda\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} / 4 + \partial_{\nu} (A^{\lambda} F^{\mu\nu}), \quad (4.17)$$

$$J_{st}^{\lambda\mu\nu} = J_c^{\lambda\mu\nu} + m_{st}^{\lambda\mu\nu} = J_c^{\lambda\mu\nu} + \partial_\kappa (x^{[\lambda} A^{\mu]} F^{\nu\kappa}). \quad (4.18)$$

К сожалению, тензор $T_{st}^{\lambda\mu}$ (4.17) очевидно неудачен, как и канонический тензор (4.4).

Поэтому процедура Белинфане-Розенфельда выглядит бесполезной, и тензоры (4.17), (4.18) никогда не используются. Однако катастрофическое свойство этой процедуры выясняется при подсчете стандартного тензора спина, $Y_{st}^{\lambda\mu\nu} = Y_c^{\lambda\mu\nu} + S_{st}^{\lambda\mu\nu}$, где $S_{st}^{\lambda\mu\nu}$ есть спиновый добавочный член, который здесь подсчитывается:

$$\begin{aligned} S_{st}^{\lambda\mu\nu} &= m_{st}^{\lambda\mu\nu} - 2x^{[\lambda} t^{\mu]\nu} = -\partial_\kappa (x^{[\lambda} \tilde{Y}^{\mu]\nu\kappa}) + x^{[\lambda} \partial_\kappa \tilde{Y}^{\mu]\nu\kappa} = -\delta_\kappa^{[\lambda} \tilde{Y}^{\mu]\nu\kappa} = \\ &= 2\delta_\kappa^{[\lambda} A^{\mu]} F^{\nu\kappa} = -2\delta_\kappa^{[\lambda} A^{\mu]} F^{\kappa\nu} = -2A^{[\mu} F^{\lambda]\nu} = 2A^{[\lambda} F^{\mu]\nu} = -Y_c^{\lambda\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.19)$$

В результате, мы видим, что процедура Белинфане-Розенфельда элиминирует тензор спина вообще!

$$Y_{st}^{\lambda\mu\nu} = Y_c^{\lambda\mu\nu} + S_{st}^{\lambda\mu\nu} = 0. \quad (4.20)$$

Вот почему спиновый член отсутствует ниже в равенстве (4.22).

Заметьте, что добавочные члены $t_{st}^{\lambda\mu}$ & $S_{st}^{\lambda\mu\nu}$, хотя они не являются удачными, удовлетворяют важному необходимому равенству

$$\partial_\nu S_{st}^{\lambda\mu\nu} = 2t_{st}^{[\lambda\mu]}. \quad (4.21)$$

Несмотря на равенство нулю стандартного тензора спина электродинамики, физики понимают, что нельзя закрывать глаза на классический спин в электродинамике. И они заявляют, что спин находится **внутри** момента импульса (4.3). Т.е., момент импульса представляет полный угловой импульс: орбитальный момент импульса плюс спин. Т.е. выражение (4.3) содержит и орбитальный момент импульса и спин [10,14,15,17,22-24]:

$$J^{ij} = L^{ij} + S^{ij} = \int_V 2x^{[i} T^{j]0} dV = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV. \quad (4.22)$$

В конце этого раздела важно обратить внимание, что добавление любого члена к тензору энергии-импульса, в том числе даже добавление бездивергентного члена типа $\partial_\nu \Psi^{\lambda\mu\nu}$, каковым является, в частности, $-\partial_\nu \tilde{Y}^{\lambda\mu\nu}/2$ (см., напр. [24 (3.36)]), представляет собой весьма серьезную процедуру. Всякое добавление изменяет распределение энергии-импульса и изменяет полный 4-импульс системы при неизменном поле. Действительно, легко выразить тензор энергии-импульса однородного материального шара радиуса R в виде $\partial_\nu \Psi^{\lambda\mu\nu}$, где $\Psi^{\lambda\mu\nu} = -\Psi^{\lambda\nu\mu}$:

$$\Psi^{00i} = -\Psi^{0i0} = \epsilon x^i / 3 \quad (r < R), \quad \Psi^{00i} = -\Psi^{0i0} = \epsilon R^3 x^i / 3r^3 \quad (r > R) \quad (4.23)$$

дает

$$\partial_i \Psi^{00i} = T^{00} = \varepsilon \quad (r < R), \quad T^{00} = \partial_i \Psi^{00i} = 0 \quad (r > R). \quad (4.24)$$

5. Тензор спина электродинамики существует

Вопреки процедуре Белинфанте-Розенфельда, которая уничтожает спин, мы модифицируем неудачные канонические тензоры (4.4) – (4.6) иным способом [12,13,16,25-34]. В отличие от процедуры [20,21], мы используем другие добавочные члены к каноническим тензорам энергии-импульса и спина, именно,

$$t^{\lambda\mu} = \partial_\nu A^\lambda F^{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

$$s^{\lambda\mu\nu} = 2A^{[\lambda} \partial^{\mu]} A^\nu, \quad (5.2)$$

вместо (4.15), (4.19). Член $t^{\lambda\mu}$ подобран так, что он дает тензор Максвелла (4.1)

$$T^{\lambda\mu} = T_c^{\lambda\mu} + \partial_\nu A^\lambda F^{\mu\nu}. \quad (5.3)$$

Член $s^{\lambda\mu\nu}$ определяется из уравнения

$$\partial_\nu s^{\lambda\mu\nu} = 2t^{[\lambda\mu]}, \quad (5.4)$$

аналогичного уравнению (4.21). В результате, мы получаем величину

$$2A^{[\lambda} \partial^{|\nu]} A^{\mu]} = Y_c^{\lambda\mu\nu} + 2A^{[\lambda} \partial^{\mu]} A^\nu \quad (5.5)$$

вместо нуля в уравнении (4.20), и, в конце концов, добиваясь электро-магнитной симметрии, находим тензор спина электродинамики:

$$Y^{\lambda\mu\nu} = A^{[\lambda} \partial^{|\nu]} A^{\mu]} + \Pi^{[\lambda} \partial^{|\nu]} \Pi^{\mu]}. \quad (5.6)$$

Здесь A^λ и Π^λ суть магнитный и электрический векторные потенциалы, которые удовлетворяют

$$\partial_\lambda A^\lambda = \partial_\lambda \Pi^\lambda = 0, \quad 2\partial_{[\mu} A_{\nu]} = F_{\mu\nu}, \quad 2\partial_{[\mu} \Pi_{\nu]} = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (5.7)$$

где $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$, $F_{\mu\nu} = F^{\alpha\beta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}$ есть тензор свободного электромагнитного поля, $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ - антисимметричная плотность Леви-Чивита. Очевидно, что закон сохранения, $\partial_\nu Y^{\lambda\mu\nu} = 0$, выполняется для свободного поля.

Другими словами, мы вводим тензор спина $Y^{\lambda\mu\nu}$ в современную электродинамику, т.е. мы дополняем электродинамику введением тензора спина, т.е. мы заявляем, что полный угловой импульс состоит из орбитального момента импульса (4.3) и спина, что выражение (4.22) некорректно, что момент импульса (4.3) не содержит спина, и что, в действительности, полный угловой импульс в объеме V равен

$$J^{ij} = L^{ij} + S^{ij} = \int_V (2x^{[i} T^{j]0} + Y^{ij0}) dV = \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV + \int_V Y^{ij0} dV, \quad (5.8)$$

а поток углового импульса на поверхность a равен

$$\tau_{\text{tot}}^{ij} = \tau_{\text{orb}}^{ij} + \tau_{\text{spin}}^{ij} = \int_a (2x^{[i} T^{j]k} + Y^{ijk}) da_k = \int_a \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d\mathbf{a} + \int_a Y^{ijk} da_k, \quad (5.9)$$

Разница между нашим утверждением (5.8), (5.9) и обычным равенством (4.22) проверяется на опыте. Кардинальный вопрос касается величины потока углового импульса, то есть вращающего момента $\tau = dJ/dt$, который несет луч круговой поляризации (1.1). Обычный ответ, согласно (4.22), есть

$$\tau = dJ/dt = W/\omega; \quad (5.10)$$

где W - мощность луча. Наш ответ, согласно (5.9), есть

$$\tau_{\text{tot}} = dJ/dt = 2W/\omega, \quad (5.11)$$

что соответствует полученному результату (3.3).

6. Тензор спина луча круговой поляризации

Действительно, используем формулу (5.9) для луча (1.1). Первое слагаемое в правой части нами уже подсчитано, $\tau_{\text{orb}} = \tau_2 = 1$ (2.3). Это слагаемое не зависит от существования тензора спина. Применим теперь выражение (5.6) ко второму слагаемому формулы (5.9) и, в первую очередь, подсчитаем векторные потенциалы A^λ и Π^λ и их производные вдоль оси z . Полагая скалярные потенциалы $A^0 = \Pi^0 = 0$, пренебрегая поверхностным слоем луча и учитывая, что $\partial^z = -\partial_z$ из-за сигнатуры (+---) используемой метрики, имеем

$$\check{A} = -\int \check{E} dt = \exp[i(z-t)](-ix + y)u_0, \quad \check{\Pi} = \int \check{B} dt = -\int i\check{E} dt = i\check{A}, \quad (6.1)$$

$$\partial^z \check{A} = \exp[i(z-t)](-x - iy)u_0, \quad \partial^z \check{\Pi} = i\partial^z \check{A}, \quad (6.2)$$

$$\langle Y^{xyz} \rangle = \Re(\check{A}^x \partial^z \check{A}^y - \check{A}^y \partial^z \check{A}^x + \check{\Pi}^x \partial^z \check{\Pi}^y - \check{\Pi}^y \partial^z \check{\Pi}^x) / 4 = \Re(\check{A}^x \partial^z \check{A}^y - \check{A}^y \partial^z \check{A}^x) / 2 = u_0^2. \quad (6.3)$$

В силу (1.2), второе слагаемое правой части формулы (5.9) дает

$$\tau_{\text{spin}} = \tau_3 = 1. \quad (6.4)$$

Таким образом, на освещенную зону поглощающей поверхности падает поток спина, который и вызывает постоянную в пределах зоны плотность вращающего момента и соответствующее механическое напряжение (3.2). Результирующий поток момента импульса, поставляемый лучом, в соответствии с (5.9), равен

$$\tau_{\text{tot}}^{xy} = \tau_{\text{orb}}^{xy} + \tau_{\text{spin}}^{xy} = \int (x \langle T_e^{yz} \rangle - y \langle T_e^{xz} \rangle) dx dy + \int \langle Y^{xyz} \rangle dx dy = 2, \quad (6.5)$$

как и было найдено в (3.3)

7. Преобразование Гамблета

Подынтегральное выражение в интеграле (2.3) отлично от нуля только в поверхностном слое луча, потому что только там компоненты тензора Максвелла $\langle T_e^{yz} \rangle$, $\langle T_e^{xz} \rangle$ отличны от нуля. Это связано с тем, что орбитальный момент импульса луча локализован в поверхностном слое, там, где циркулирует поток энергии. Однако, при вычислении интеграла (2.3) применяется интегрирование по частям, в результате чего значение интеграла получается, в конечном счете, интегрированием по внутренней, освещенной зоне. Из этого математического факта физики удивительным образом делают вывод, что вклад в поток момента импульса (2.3) вносит внутренняя область, а не поверхностный слой, и, значит, можно назвать интеграл (2.3) спином луча, который очевидным образом присутствует внутри луча, но не видим в рамках стандартной электродинамики. Имея в виду момент импульса (4.22), (7.1), Оганян [4] пишет: «Вклад в спин вносит внутренняя область, и поверхностным слоем можно пренебречь».

На самом деле, это фальшивое перемещение орбитального момента импульса из поверхностного слоя во внутренность луча производится с помощью усложненной процедуры [4,35,36]. Орбитальный момент импульса, локализованный в поверхностном слое луча, $\int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV$, выражается через интеграл по всей внутренней области луча, именно,

$$\int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = \int \mathbf{E} \times \mathbf{A} dV, \quad (7.1)$$

с помощью следующего вычисления. Сначала подынтегральное выражение записывается в виде

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{r} \times [\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A})] = \mathbf{r} \times (E^i \nabla A_i) - \mathbf{r} \times [(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A}] = -\mathbf{r} \times [(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A}], \quad (7.2)$$

потому что $\mathbf{r} \times (E^i \nabla A_i) = 0$ для луча (1.1). Далее,

$$-\mathbf{r} \times [(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A}] = -\mathbf{r} \times [(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A}] - \mathbf{E} \times \mathbf{A} + \mathbf{E} \times \mathbf{A} = -\nabla [\mathbf{E} (\mathbf{r} \times \mathbf{A})] + \mathbf{E} \times \mathbf{A}. \quad (7.3)$$

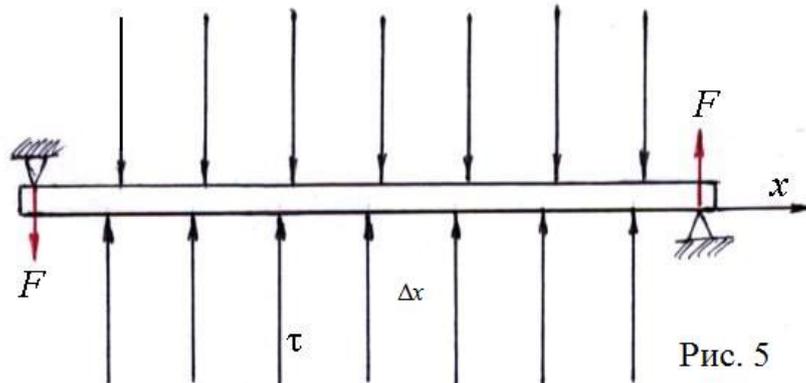
После этого производится интегрирование, приводящее к (7.1). Это преобразование подробно рассмотрено в [12]. Там же указано, что на самом деле изменение области интегрирования при вычислениях не влечет физических следствий. Например, рассмотрите соленоид, по обмотке которого, то есть по поверхностному слою, течет ток плотностью \mathbf{j} . Момент этого тока, $\int \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV$, может быть легко выражен через интеграл по внутренности соленоида [12]:

$$\int \mathbf{r} \times \mathbf{j} dV = \int 2\mathbf{B} dV. \quad (7.4)$$

Это, однако, не означает, что внутренность соленоида вносит вклад в момент тока.

8. Приложение

Здесь представлена простая одномерная аналогия постоянной плотности момента силы из раздела 3. На Рис. 5 изображен стержень, к которому приложен распределенный момент силы $F = \tau / \Delta x = Const$ ($\tau \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$). В этом случае в стержне возникает постоянное напряжение сдвига так же, как постоянное напряжение сдвига $T_{m3}^{\text{фр}}$ (3.2) возникает в центральной освещенной зоне поглощающей поверхности.



Стержень испытывает распределенный момент силы, созданный множеством пар сил τ . Очевидно, что концы каждого отрезка испытывают одинаковые силы $F = \tau / \Delta x$. Таким образом, в стержне присутствует напряжение сдвига.

Механическое напряжение (3.2) не может быть объяснено максвелловской электродинамикой. Видимо, эта электродинамика не полна.

9. Выводы, благодарности и замечания

Эта работа представляет новую физику. Мы обсудили некоторые статьи, касающиеся классического спина электродинамики, и показали, что современная теория поля не решает проблему спина, потому что тензор спина стандартной электродинамики равен нулю. Затем было показано, как разрешить проблему спина с помощью введения истинного тензора спина электромагнитных волн. Предложенный тензор спина удваивает предсказанный угловой импульс электромагнитного луча круговой поляризации без азимутальной фазовой структуры. Этот тензор необходим, в частности, для объяснения существенных особенностей излучения вращающегося диполя [30].

Я глубоко благодарен профессору Роберту Ромеру за отважную публикацию моего вопроса [8] в последнем номере журнала, который он редактировал перед уходом в отставку (вопрос был направлен в редакцию 7 октября 1999 года). Я также благодарен профессору Тимо Ниемину за содержательные дискуссии на сайте sci.physics.electromag.

Выражение (5.6) для тензора спина было направлено в редакции следующих научных журналов (в скобках указана дата подачи статьи): AJP (10 Sep 2001), AO (April 20, 2006), AP (May 5, 2006), APP (28 Jan 2002), CJP (19 Nov 2003), CLEO/QELS Conference (22/11/2006), CMP (May 9, 2006), EJP (June 30, 2005), EPL (15 Oct 2002), FP (May 3, 2002), IJTP (Jan 25, 2006), ЖЭТФ (27 янв. 1999), Письма ЖЭТФ (14 мая 1998), JMO (Sept 29, 2004), JMP (28 Nov 2002), JOP A (Nov 30, 2003), JOSA A (Apr 7, 2006), JOSA B (Dec 27, 2005), JPA (23 Jun 2002), JPB (Dec 12, 2003), MPEJ (Dec 24, 2004), Nature (Sept 21, 2006), NJP (27 Jun 2003), OC (22 Sept 2002), OL (29 Jul 2003), PLA (22 Jul 2002), PRA (19 Nov 2003), PRD (25 Sep 2001), PRL (Jul 4, 2005), Известия вузов (18 мая 1999), ТМФ (29 апр. 1999), УФН (25 февр. 1999).

Библиографический список

1. Beth R.A. Direct Detection of the Angular Momentum of Light. //Phys. Rev. – 1935, 48.- p.471
2. Parkin S., Knoner G., Nieminen T. A., Measurement of the total optical angular momentum transfer in optical tweezers // Optics Express. – 2006, 14.- p.6963
3. Jackson J. D. Classical Electrodynamics. - Wiley, 1999.- 808p.
4. Ohanian H.C. What is spin? //Amer. J. Phys. – 1986, 54.- p.500-505
5. Оганян Х. Что такое спин? // Физика за рубежом, Серия Б, вып. 88, (М.: Мир, 1988) с. 68-79
6. Simmonds J.W. and Gutman M.J. States, Waves and Photons. – Mass.: Addison, 1970.- 456 p.
7. Allen L., Padgett M. J. Response to Question #79. Does a plane wave carry spin angular momentum? // Am. J. Phys. – 2002,.70.- p. 567.
8. Khrapko R.I. Does plane wave not carry a spin? //Amer. J. of Physics. – 2001, 69.- p.405.
9. Beth R.A. Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light. //Phys. Rev. – 1936, 50.- p.115-125.
10. Loudon R. Theory of the forces by Laguerre-Gaussian light beams on dielectrics.//Phys. Rev. – 2003, A68 013806
11. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М, Фейнмановские лекции по физике 8, 9 (М.: Мир, 1978) 526с.
12. Khrapko R.I., Mechanical stresses produced by a light beam, //J. Modern Optics – 2008, 55, 1487-1500
13. Khrapko R.I., Calculation of absorbed spin contradicts electrodynamics and an experiment <http://www.sciprint.org> (2005)

14. Heitler W., The Quantum Theory of Radiation, (Clarendon, Oxford, 1954), 420 p.
15. Rohrlich F. Classical Charged Particles. – Mass.: Addison-Wesley, 1965. –756 p.
16. Khrapko R.I., Moment of the Poynting vector is not spin. V. 2, www.sciprint.org (2006)
17. Zambrini R, Barnett S.M, Local transfer of optical angular momentum to matter // J. Mod. Optics – 2005, 52 –p.1045 - 1053
18. Barut A.O, Electrodynamics and Classical Theory of Particles and Fields (New York: Macmillan, 1964) – 561p.
19. Soper D. E. Classical Field Theory. – N.Y.: John Wiley, 1976.- 678p.
20. Belinfante F. J., //Physica –1939, 6, p.887.
21. Rosenfeld L., Sur le Tenseur D'Impulsion-Energie. //Memoires de l'Academie Royale des Sciences de Belgiques – 1940, 8 No 6.
22. Jackson J. D. Classical Electrodynamics. - Wiley, 1999.- 808p.
23. Bishop A. I., Nieminen T. A., Heckenberg N. R., and Rubinsztein-Dunlop H. Optical Microrheology Using Rotating Laser-Trapped Particles. //Phys. Rev. Lett. –2004, 92, 198104.
24. Ryder L.H., Quantum Field Theory (Cambridge, 1985) – 568 p.
25. Khrapko R.I. True energy-momentum tensors are unique. Electrodynamics spin tensor is not zero, - <http://arXiv.org/abs/physics/0102084> (10.08.2001)
26. Khrapko R.I, Experimental verification of Maxwellian electrodynamics, // Measurement Techniques – 2003, 46, No. 4, 317-321
27. Khrapko R.I., Classical spin in space with and without torsion // Gravitation & Cosmology – 2004, 10, No. 1-2, -c.91-98
28. Khrapko R.I., Absorption of a circularly polarized beam in a dielectric, etc. www.sciprint.org (2006)
29. Khrapko R.I., Inevitability of the electrodynamics' spin tensor, www.sciprint.org (2007)
30. Khrapko R.I., Radiation of spin by a rotator. - mp_arc@mail.ma.utexas.edu REQUEST: send papers NUMBER: 03-315 (2003)
31. Храпко Р. И. Истинные тензоры энергии-импульса и спина среды однозначны. //Теоретические и экспериментальные проблемы общей теории относительности и гравитации. X Российская гравитационная конф., Владимир. 1999: Тез. докл. - Москва, 1999. - с.47.
32. Храпко Р. И. Локализация энергии-импульса и спин. //Вестник Российского университета дружбы народов, Серия Физика. – 2002, № 10(1).- с.35-39.

33. Храпко Р. И. Спин классической электродинамики. //Вестник Российского университета дружбы народов, Серия Физика. – 2002, № 10(1).- с.40-48.
34. Храпко Р. И. Экспериментальная проверка электродинамики Максвелла. //Измерительная техника. – 2003, № 4. с.3-6.
35. Humblet J. // Physica - 1943, 10, p.585 591
36. Crichton J. et al. // Gen. Relat. Gravitation - 1990, 22, p.61-65

Сведения об авторе

Храпко Радий Игоревич, доцент кафедры физики Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н.

125993 Москва, Волоколамское шоссе 4, Российская Федерация.

+7 499 144-63-12, khrapko_ri@hotmail.com