

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

*На правах рукописи*

*УДК 531.384*

Сахаров Александр Вадимович

**Движение мобильного устройства без внешних  
двигателей по шероховатой плоскости**

Специальность 01.02.01 — Теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Иванов Александр Павлович

Долгопрудный — 2015

# Содержание

Введение . . . . .	5
1. Движение мобильного устройства с произвольным набором подвижных масс . . . . .	20
1.1. Описание системы . . . . .	20
1.2. Силы, приложенные к корпусу . . . . .	24
1.2.1. Главные векторы и моменты . . . . .	24
1.2.2. Касательные напряжения . . . . .	25
1.2.3. Нормальные напряжения . . . . .	27
1.3. Коэффициенты модели распределения нормальных напряжений . . . . .	29
1.4. Уравнения движения корпуса . . . . .	33
1.5. Достаточные условия равновесия корпуса . . . . .	35
1.6. Заключение к главе 1 . . . . .	36
2. Поступательное движение мобильного устройства . . . . .	38
2.1. Уравнение движения . . . . .	38
2.2. Случай точечной массы, двигающейся вдоль продольной оси симметрии корпуса . . . . .	40
2.2.1. Описание системы . . . . .	40
2.2.2. Гармонический закон управления движением точечной массы . . . . .	42
2.2.3. Кусочно-квадратичный закон управления смещением точечной массы . . . . .	48
2.3. Случай двух точечных масс, двигающихся в вертикальной плоскости симметрии ползуна . . . . .	51
2.3.1. Описание системы . . . . .	51
2.3.2. Случай маятника . . . . .	52
2.3.3. Экспериментальный робот . . . . .	55

2.4.	Заключение к главе 2 . . . . .	59
3.	Поворот мобильного устройства вокруг центра масс . . . . .	61
3.1.	Уравнения движения . . . . .	61
3.2.	Случай диска с вертикальной осью вращения . . . . .	64
3.2.1.	Описание системы . . . . .	64
3.2.2.	Гармонический закон управления поворотом диска . . . . .	66
3.2.3.	Кусочно-линейный закон управления угловой скоростью диска . . . . .	66
3.3.	Случай двух точечных масс . . . . .	68
3.3.1.	Описание системы . . . . .	68
3.3.2.	Кусочно-линейный закон управления смещением масс . . . . .	70
3.3.3.	Характер поворота корпуса . . . . .	72
3.3.4.	Влияние параметров закона управления на среднюю ско- рость поворота корпуса . . . . .	75
3.4.	Заключение к главе 3 . . . . .	78
4.	Трехмерное движение мобильного устройства по плоскости . . . . .	80
4.1.	Описание системы . . . . .	80
4.2.	Случай горизонтально-осевого расположения диска . . . . .	83
4.2.1.	Уравнения движения и коэффициенты модели распреде- ления нормальных напряжений . . . . .	83
4.2.2.	Анализ движения корпуса . . . . .	87
4.3.	Случай вертикально-осевого расположения диска . . . . .	94
4.3.1.	Уравнения движения и коэффициенты модели распреде- ления нормальных напряжений . . . . .	94
4.3.2.	Анализ движения корпуса . . . . .	97
4.4.	Сравнение величин углов поворота корпуса при различных ори- ентациях диска . . . . .	103
4.5.	Заключение к главе 4 . . . . .	105

Заключение . . . . .	107
Литература . . . . .	110
А. Осевой момент инерции корпуса . . . . .	118

# Введение

## Обзор законов сухого трения

Родоначальником изучения законов трения принято считать Леонардо да Винчи. В 1508 году он впервые ввел в рассмотрение понятие коэффициента трения, указал на пропорциональность силы трения, возникающей при контакте тел друг с другом, нормальной нагрузке и независимости ее от номинальной площади контакта тел, а также скорости их относительного движения [1]. Спустя почти двести лет французский ученый, предвестник трибологии, Г. Амонтон подтвердил результаты Леонардо. Он сформулировал эмпирический закон, утверждающий пропорциональность между нормальной нагрузкой и силой сухого трения, действующей между движущимися телами [2]. В 1781 году Ш.О. Кулон, используя большое количество эмпирических данных, установил законы сопротивления скольжению и качению двух тел [3]. Закон сухого трения получил название закона Амонтона–Кулона.

В XIX веке было установлено, что сила статического трения, то есть трения, действующего на тело находящееся в покое, превосходит силу трения в движении. Уже в начале XX века немецким механиком Р. Штрибеком был открыт эффект, состоящий в том, что при малых относительных скоростях трущихся поверхностей наблюдается постепенное уменьшение сопротивления с величины трения покоя до значения динамического трения. Позже этот эффект получил имя своего первооткрывателя.

Эти и многие другие эффекты не учитываются в законе Амонтона–Кулона. Не смотря на это, он нашел широкое применение в огромном количестве исследований благодаря своей простоте и качественно верному поведению. Приведем здесь слова Д.Х. Джеллетта [4]: «Хотя закон пропорциональности силы трения давлению не является математически верным, он позволяет представить факты с достаточной точностью, поэтому его можно взять за основу теории, результаты которой весьма близки к истине».

Позднее, уже в рамках теоретической механики и трибологии было разработано большое количество моделей сухого и вязкого трений, а также их комбинаций. Стало понятно, что сила трения во многом определяется распределением нормальных напряжений в области контакта тел.

В статье [5] авторы разработали модель, опирающуюся на представление о трении как об упруговязком сопротивлении инденторов контактирующих тел. Достоинством модели является то, что она включает в себя многие экспериментально наблюдаемые особенности сухого трения, такие как эффект Штрибека и неравенство величин статического и динамического трений. В работе [6] предложен обобщенный закон Амонтона–Кулона для лагранжевых систем с наложенными связями. Преимуществом предложенной формулировки закона является ковариантность преобразования сил сухого трения при замене координат.

Исследованию взаимосвязи трений скольжения и верчения посвящена работа [7], выполнявшаяся в предположении, что пятно контакта двух тел круговое, а нормальные напряжения распределены по закону Герца. Получена зависимость величины силы трения от отношения относительных скоростей скольжения и вращения тел. То же предположение о распределении нормальных напряжений используется в работах [8, 9], где получены аналитические выражения для силы и момента трения в случае круглых площадок контакта. Кроме того, в указанных работах построены аппроксимации Паде (до этого аналитические выражения для сил и моментов трения выражались через эллиптические интегралы [10,11]) полученных функций, что упрощает их использование в дифференциальных уравнениях. Суть метода аппроксимаций Паде состоит в идее, что исходную силу трения можно заменить рациональной дробью, удовлетворяющей граничным условиям, наложенным на исходную функцию. Благодаря этому методу удалось создать качественно новые модели сухого трения, коэффициенты которых можно определить экспериментально. Эти законы, в свою очередь, позволили обнаружить новые эффекты [12–14].

## **Обзор исследований о движении твердого тела по шероховатой плоскости**

Первые работы по динамике твердого выпуклого тела, двигающегося в вертикальной плоскости по горизонтальной прямой, принадлежат Л. Эйлеру [15]. Позднее работу Эйлера продолжили Г. Кориолис [16], П. Пенлеве [17], П. Аппель [18] и другие. Большой вклад в постановку и решение задачи о движении твердого тела, опирающегося на шероховатую плоскость одной точкой внес С. Пуассон. В начале XX века задача о движении твердого тела по поверхности активно разрабатывалась в трудах Д.К. Бобылева, Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина.

Систематическое изложение динамики твердого тела на плоскости, как гладкой, так и шероховатой, приведено в монографии [19]. В частности, помимо произвольных выпуклых тел, а также тел вращений, автор рассматривает движение специфических объектов: шар Чаплыгина, кельтский камень и другие. Безотрывному движению выпуклых тел в вертикальной плоскости также посвящены работы [20, 21]. Анализируются случаи качения и скольжения тела, а также переход между этими режимами движения.

Исследованию динамики тяжелого тела, обладающего круговой симметрией, на шероховатой плоскости посвящено большое количество работ [10, 11, 22–25]. В первых исследованиях [10, 11, 22] рассматривается плоский диск, причем распределение нормальных напряжений между диском и плоскостью принимается равномерным. В работах [10, 11] главный вектор и момент сил трения выражаются аналитически через полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Движение диска находится аналитически и экспериментально, показывается, что вращение и скольжение диска прекращаются одновременно. Исследование динамики диска на шероховатой плоскости при более реалистичных моделях распределения нормальных напряжений было затруднено в связи с громоздкостью получаемых выражений. Работы [8, 9] позволили преодолеть эту трудность. В результате, исходя из предположений, что давление распределено

по закону Галина, построены функции главного вектора и момента сил трения, действующих на диск, что позволило получить некоторую новую информацию о его движении [26].

Определению качественной картины остановки осесимметричного тела посвящена работа [23], при этом предлагаются различные законы распределения нормальных напряжений: однородное, по кольцу (распределение по окружности диска), Галина, Герца. Находятся время и пройденный до остановки тела путь. В работах [24, 25] рассматривается тело с осесимметричным основанием, при этом предполагается, что нормальные реакции распределены по линейному закону. Известно [27, 28], что такая модель является динамически согласованной. Используя метод дескриптивной функции проводится качественный анализ движения тела.

Интересная задачей представляется объяснение поведения камня на льду при игре в керлинг. Дело в том, что если скользящий по шероховатой поверхности цилиндр закрутить против часовой стрелки, то его траектория будет уходить вправо [10, 11]. В случае керлинга эффект прямо противоположный: смещение происходит влево относительно траектории движения снаряда. Обзор полученных по объяснению этого эффекта результатов приводится в [28]. В работе [29] показано, что качественное объяснение эффекта керлинга возможно лишь при учете зависимости коэффициента трения от распределения давления в области контакта, а также учета скорости камня. Количественное объяснение может быть достигнуто при рассмотрении модели анизотропного трения, объясняемого подтаиванием льда и, как следствие, образования неравномерной смазочной пленки в области контакта, зависящей от направления вращения снаряда.

### **Актуальность темы**

Мобильные робототехнические системы находят широкое применение в различных областях человеческой деятельности: исследовательской, медицинской, космической и других. Среди большого разнообразия робототехнических



средств двигающихся по плоскости, можно выделить устройства без видимых внешних движителей, таких как реактивный двигатель, колеса, гусеницы или ноги. Такие системы имеют ряд преимуществ связанных с их герметичностью и изолированностью от окружающей среды. Движение робота без внешних движителей может достигаться благодаря перемещению внутренних масс и взаимодействию корпуса робота с опорной плоскостью посредством сил трения. Таким образом, движение происходит не вопреки силам трения, действующим на корпус устройства, а за счет них. Заметим, что такая ситуация не является чем-то странным. К примеру, автомобиль также движется за счет наличия трения между дорогой и колесами.

В книгах [30,31] рассматриваются механические системы, двигающиеся под воздействием внутренней осциллирующей массы. Фактически, излагается новый раздел механики: вибрационная механика. Автор [31] подчеркивает, что в системах с вибрирующими элементами можно наблюдать качественно новые эффекты, например такие как изменение сухого трения в сторону вязкого, уменьшение коэффициента трения. Еще один широко известный эффект, появляющийся в результате высокочастотной вибрации, состоит в том, что верхнее положение равновесия математического маятника становится устойчивым (маятник Капицы).

Одномерное поступательное движение мобильных устройств без внешних движителей с плоским основанием изучено достаточно хорошо [32–45]. В работах [32, 33, 36, 40, 42, 44, 45] рассматривается поступательное движение мобильного устройства, опирающегося на шероховатую плоскость и состоящего из твердого полого корпуса и внутреннего тела, способного двигаться вдоль продольной оси симметрии корпуса. Движение устройства достигается за счет определенных перемещений внутреннего тела и взаимодействия с опорной плоскостью посредством сил трения. Находятся оптимальные параметры законов управления смещением внутреннего тела, доставляющие средней скорости корпуса максимум с учетом наложенных на систему ограничений [32, 33, 42]. При

этом предполагается, что со стороны плоскости на корпус действует кулоново трение. В работах [36, 40, 44, 45] также находятся оптимальные параметры закона управления движением внутреннего тела, однако рассмотрены различные законы сопротивления среды: изотропное и анизотропное, кусочно-линейное и квадратичное относительно скорости корпуса мобильного устройства законы трения.

Работы [41, 43] посвящены изучению поступательного движения систем, состоящих из двух внешних тел,двигающихся по шероховатой плоскости и взаимодействующих друг с другом. Движения анализируются, находятся оптимальные параметры законов управления, доставляющие средней скорости всей системы максимум [41]. В работе [43] предполагается, что тела связаны пружиной. Используя метод осреднений производится оценка средней скорости системы, находятся оптимальные параметры закона управления движением внутренних масс. Полученные результаты проверяются посредством численного моделирования.

Исследованию систем,двигающихся поступательно и состоящих из твердого корпуса, опирающегося на шероховатую плоскость, с двумя внутренними телами, одно из которых движется вдоль продольной оси симметрии корпуса, а второе — вдоль вертикали, посвящены работы [34, 35, 37–40]. Принципиальное отличие такой системы от рассмотренных выше состоит в том, чтодвигающееся вдоль вертикали тело позволяет управлять нормальным давлением, действующим со стороны плоскости на корпус, что в свою очередь изменяет силу сухого трения. В статьях [38, 40] находятся оптимальные параметры периодического закона управления внутренними телами, доставляющими максимум средней скорости системы. При этом подразумевается, что корпус движется по горизонтальной прямой. В работе [39] исследуется движение той же системы на наклонной плоскости. Показано, что возможно осуществить продвижение устройства вверх, используя указанный принцип движения. В работах [34, 35] на колебания внутренних тел накладываются ограничения: предполагается, что

они движутся по гармоническим законам с одинаковой частотой и со сдвигом фаз. Показано, что управлением разностью фаз и частотой колебаний масс можно достигать изменения как величины средней скорости корпуса, так и направления его движения. Экспериментальное исследование движения рассматриваемой системы приведено в [37]. В рамках статьи сконструировано вибрационное мобильное средство, состоящее из платформы и эксцентриков. Численное решение полученных уравнений движения с хорошей точностью совпадает с экспериментальными результатами.

Изучению трехмерного движения мобильного робота посвящены работы [46, 47]. Устройство состоит из твердого корпуса, двух подвижных масс, способных двигаться по направляющим, параллельным продольной оси симметрии корпуса и расположенным в горизонтальной плоскости на одинаковом расстоянии от его центра масс, а также четырех поплавков, погруженных в жидкость, на которые опирается корпус. Таким образом, перемещение робота происходит в вязкой среде. Находится система уравнений движения, динамика корпуса анализируется в зависимости от наклона поплавков, параметров гармонического закона управления относительным движением масс, а также коэффициента вязкости. Предлагается программное управление углом наклона поплавков и параметрами относительного движения внутренних масс, позволяющее провести корпус по заданной криволинейной траектории.

Движению твердого тела с подвижными внутренними массами в вязкой жидкой среде посвящены работы [48–50]. Их особенностью является совместное использование уравнений Навье–Стокса и движения тела в условиях трехмерной нестационарной постановки задачи с учетом силы тяжести. В частности, показано, что существенное влияние на траекторию движения тела оказывает вязкое сопротивление среды, а при увеличении частоты колебаний внутренней массы увеличивается средняя скорость движения тела.

Большое внимание уделяется роботам-шарам, представляющим из себя сферическую оболочку с внутренним подвижным телом [51–57]. В результате

управления движениями внутреннего тела можно реализовать проход сферической оболочки по заданной траектории. В работе [52] рассматриваются два робота-шара. В первом случае управляемое твердое тело прикреплено к сферической оболочке посредством сферического шарнира, во втором — тело размещено внутри с помощью неголономного шарнира. Авторы получают уравнения движения и находят новые интегрируемые случаи. В работах [53, 54] предполагается, что робот-шар управляется посредством омниколесной платформы. Разработан алгоритм управления платформой, позволяющий провести робот-шар по заданной траектории. С целью верификации полученных результатов проводятся экспериментальные исследования, включающие в себя использование лабораторного образца робота-шара. Частные решения, а также их исследования на устойчивость приведены в [55, 56]. Также решается задача управления омниколесной платформой с целью проведения робота по наперед заданной траектории. В работе [57] робот-шар управляется посредством внутренней сферической оболочки, относительное движение которой достигается за счет вращений двух симметричных омниколес. Показано, что устройство можно провести через любые две точки лежащие на опорной плоскости, либо по прямой линии, либо по набору ломаных линий. Во всех упомянутых работах предполагается, что движение шара происходит без проскальзывания.

На конференции International Conference on Intelligent Robots and Systems (Токио, Япония, 3–8.11.2013) было представлено [58] устройство, называемое M-block, состоящее из твердой кубической оболочки с размещенным внутри тяжелым ротором. Движение куба реализуется за счет быстрой остановки раскрученного ротора. В вершинах кубической оболочки находятся точечные постоянные магниты, позволяющие устройствам фиксироваться друг относительно друга. Таким образом, предполагается, что кубы сообща могут создавать обширные модульные конструкции. В работе [59] изучаются импульсные движения куба, с расположенным внутри ротором, исследуются некоторые частные случаи его перемещений.

## **Цель работы**

Цель диссертационной работы заключается в исследовании динамики мобильных устройств с плоским основанием, опирающихся на шероховатую плоскость и скользящих в результате движения материальных точек, расположенных внутри устройства.

## **Научная новизна**

Научная новизна состоит в следующем. Разработан метод получения уравнений движения мобильного устройства с плоским основанием, опирающегося на шероховатую плоскость и способного двигаться по ней в результате перемещения внутренних тел. Проведены численные и аналитические исследования поступательного движения корпуса устройства с одной и двумя точечными массами, двигающимися в вертикальной плоскости симметрии корпуса в зависимости от параметров закона управления. Исследованы вращательные движения корпуса вокруг центра масс в результате поворота горизонтального диска внутри устройства, или движения двух точечных масс в противофазе. Во втором случае численно определены оптимальные параметры закона управления массами, доставляющие средней угловой скорости корпуса максимум в установившемся режиме поворота. Получены и численно проанализированы системы уравнений движения мобильного устройства, содержащего в себе подвижную материальную точку и диск, ось вращения которого ориентировалась двумя способами: вдоль продольной оси симметрии корпуса и по вертикали. Для обеих ориентаций предложено программное управление диском, позволяющее провести корпус по S-образной траектории. Произведено сравнение целесообразности выбора ориентации диска с точки зрения максимизации угла поворота корпуса.

## **Теоретическая и практическая ценность**

Предложенные в рамках диссертационной работы методы исследования динамики мобильных устройств могут быть использованы в изучении широкого класса подвижных объектов двигающихся по шероховатой плоскости без внешних движителей. При этом конфигурация использующихся подвижных внут-

ренных массивных тел неважна ввиду общности изучаемой задачи. Практическая ценность состоит в обосновании возможности движения мобильных роботов по шероховатой плоскости посредством смещения внутри них массивных тел, а также анализе получаемых движений робота. Полученные результаты могут быть использованы специалистами по теоретической механике и робототехнике в научно-исследовательских и учебных институтах, включая ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского, ИПУ РАН, ИМАШ РАН им. А.А. Благодного, МФТИ, МГУ им. М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э. Баумана, МАИ, УдГУ.

### **Методы исследования**

Для достижения поставленной цели используются методы теоретической механики. В частности, применение основных теорем динамики требует принятия моделей распределения тангенциальных и нормальных напряжений в области контакта. В качестве модели распределения тангенциальных напряжений используется локальный закон сухого трения Амонтона–Кулона, а в качестве модели распределения нормальных напряжений — динамически согласованная линейная модель. Также используются методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, выполняемые в программе математического моделирования MATLAB. Для определения зависимости крутящего момента от угловой скорости применялось натурное моделирование.

### **Положения, выносимые на защиту**

На защиту выносятся следующие результаты диссертации:

- Уравнения движения системы, состоящей из твердого тела с плоским прямоугольным основанием, опирающегося на горизонтальную шероховатую поверхность с произвольной конфигурацией внутренних подвижных материальных точек.
- Траектории движения корпуса мобильного устройства, перемещающегося под действием гармонически колеблющейся вдоль продольной оси симмет-

рии корпуса точечной массы, полученные в зависимости от частоты колебаний.

- Оптимальные параметры закона управления точечными массами, двигающимися в противофазе вдоль направляющих, параллельных продольной оси симметрии корпуса, доставляющие средней угловой скорости поворота устройства максимум в установившемся режиме движения.
- Численный анализ движения системы, состоящей из корпуса, точечной массы, двигающейся вдоль продольной оси его симметрии и диска, ориентированного двумя способами, а также программное управление относительным движением диска, позволяющее провести корпус по S-образной траектории.
- Сравнение величин углов поворота корпуса в зависимости от выбора расположения диска при различных значениях коэффициента сухого трения.

### **Апробация результатов**

Основные результаты диссертации изложены в статьях [60–65], из которых изданы в журналах, входящих в перечень ВАК [60, 62–65]. Кроме того, автор делал доклады по материалам диссертации на российских и международных конференциях:

- IUTAM Symposium «From mechanical to biological systems — an integrated approach». 5–10 июня 2012, Ижевск, Россия.
- MCS–2012 «Моделирование, управление и устойчивость». 10–14 сентября 2012, Севастополь, Украина.
- 55-я научная конференция МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе». 19–25 ноября 2012, Долгопрудный, Россия.

- Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería — CMN 2013. 25–28 июня 2013, Бильбао, Испания.
- «Нелинейная динамика и ее приложения». 15–18 октября 2013, Ярославль, Россия.
- 56-я научная конференции МФТИ «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе». 25–30 ноября 2013, Долгопрудный, Россия.
- 8<sup>th</sup> European Nonlinear Dynamics Conference — ENOC 2014. 6–11 июля 2014, Вена, Австрия.
- 57-я научная конференция МФТИ с международным участием, посвященная 120-летию со дня рождения П.Л. Капицы: «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в области физики». 24–29 ноября 2014, Долгопрудный, Россия.
- VI International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering — COUPLED PROBLEMS 2015. 18–20 мая 2015, Сан Серволо, Венеция, Италия.
- Семинар в МАИ под руководством д.ф.-м.н. Б.С. Бардина. 05 ноября 2015, Москва, Россия.
- Семинар в МФТИ под руководством д.ф.-м.н. А.П. Иванова. 27 ноября 2015, Долгопрудный, Россия.

Работа над диссертацией велась в рамках грантов РФФИ № 11-01-00354, 14-01-00432; гос. контракта ФЦП «Кадры» № 14.A18.21.0374; гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (ФГБОУ ВПО «УдГУ», дог. № 11.G34.31.0039); гос. задания в сфере



научной деятельности № 2014/120 «Исследование закономерностей динамики систем с трением и разработка мобильных роботов без внешних движителей» НИР № 2583.

### **Объем и структура работы**

Диссертация изложена на 118 страницах и состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложения.

### **Краткое содержание диссертации**

Во введении обосновывается актуальность темы, новизна и ценность полученных результатов, приводится краткое содержание диссертации.

В первой главе рассматривается мобильное устройство с прямоугольным основанием, опирающееся на шероховатую плоскость и состоящее из корпуса и материальных точек, способных перемещаться внутри устройства. Приводится описание модели, записываются основные теоремы динамики и кинематические соотношения, связывающие скорости и ускорения точек устройства. Далее записываются формулы, выражающие силы действующие на корпус, а также определяются модели распределения касательных и нормальных напряжений в области контакта устройства и опорной плоскости. Приводится методика определения коэффициентов модели распределения нормальных напряжений и находится система уравнений движения корпуса для произвольного распределения внутренних материальных точек. В конце главы формулируются достаточные условия равновесия корпуса на плоскости.

Вторая глава посвящена исследованию поступательного движения мобильного устройства. Определяются условия, накладываемые на перемещения внутренних точек, достаточные для того, чтобы корпус двигался поступательно и находится соответствующее уравнение движения устройства. Далее рассматривается случай материальной точки, способной двигаться вдоль продольной оси симметрии корпуса, определяются ограничения на параметры системы, при которых происходит частичный отрыв корпуса от опорной плоскости. В качестве примера используется гармонический закон управления относительным

движением точечной массы, находятся траектории движения корпуса в аналитическом виде в зависимости от частоты ее колебаний. Также предлагается кусочно-квадратичный закон управления смещением внутренней точки, использующейся затем в четвертой главе, определяется ограничение на период движения точки, при котором не происходит попятного смещения корпуса. Далее рассматривается случай двух точечных масс, двигающихся в вертикальной плоскости симметрии корпуса. Основное внимание уделяется режиму движения по гармоническим законам. Показывается, что такая система, при определенных ограничениях наложенных на законы управления, эквивалентна маятнику, двигающемуся в вертикальной плоскости. Находятся уравнения движения корпуса и маятника, при этом в качестве управляющего воздействия к маятнику прикладывается момент силы, линейно зависящий от его угловой скорости. На основании проведенного эксперимента находятся неизвестные параметры закона управления, а полученные в результате численного интегрирования уравнений движения траектории сравниваются с экспериментальными данными.

В третьей главе изучается поворот корпуса вокруг центра масс. Находятся условия налагаемые на координаты внутренних материальных точек, достаточные для того, чтобы гарантировать поворот корпуса вокруг центра масс, при условии, что главный момент сил трения покоя, действующий на корпус, будет преодолен. Записывается уравнение движения, определяющее угол поворота корпуса. Далее рассматривается случай диска, расположенного в горизонтальной плоскости, для которого применяются два закона управления. Показывается, что использование гармонической функции управления поворотом диска приводит к уравнению движения, идентичному уравнению полученному во второй главе. Кроме того, рассматривается кусочно-линейный закон управления относительной угловой скоростью диска, для которого найдены величины параметров закона управления, при выборе которых главный момент сил трения покоя, действующий на корпус со стороны плоскости, гарантированно преодолевается. Качественно описывается траектория движения корпуса. В виде

второго примера конфигурации внутренних тел рассматривается случай двух материальных точек,двигающихся внутри корпуса в противофазе, параллельно его продольной оси симметрии. При этом используется кусочно-линейный закон управления их смещением. Приводится численный анализ, позволяющий выделить качественные особенности поворота корпуса в зависимости от параметров закона управления. В конце главы численно определяются параметры закона управления, доставляющие средней угловой скорости корпуса максимум в установившемся режиме поворота.

Четвертая глава посвящена трехмерному движению мобильного устройства. Описывается система, состоящая из корпуса, точечной массы, способной двигаться вдоль продольной оси симметрии корпуса и диска, центр которого совпадает с центром устройства, а ось вращения может быть ориентирована двумя способами. Сначала рассматривается случай горизонтально-осевого расположения диска. Для него находятся коэффициенты модели распределения нормальных напряжений и уравнения движения. Далее проводится численный анализ, включающий в себя интегрирование уравнений движения, а также выявление зависимости величины угла поворота корпуса от параметров системы и закона управления. Приводится программное управление внутренними массами, позволяющее провести корпус по S-образной траектории. Далее рассматривается случай вертикально-осевого расположения диска, для которого также проводится численный анализ движения и предлагается аналогичное программное управление. В конце главы сравнивается целесообразность выбора горизонтально- и вертикально-осевого расположений диска, с точки зрения максимизации угла поворота корпуса за один период движения внутренних тел.

В заключении приводятся основные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационной работы.

В приложении вычисляется осевой момент инерции корпуса.

# 1. Движение мобильного устройства с произвольным набором подвижных масс

Рассматривается мобильное устройство, представляющее собой твердое полое тело с плоским прямоугольным основанием, опирающееся на шероховатую плоскость и способное свободно скользить по ней. Внутри тела располагаются материальные точки, перемещающиеся относительно тела по определенным законам. Целью настоящей главы является разработка метода определения уравнений движения тела с расположенными внутри подвижными материальными точками по шероховатой плоскости для произвольного набора этих точек и законов их относительного движения.

## 1.1. Описание системы

Рассмотрим твердое тело массы  $m_0$ , представляющее собой полый прямоугольный параллелепипед с однородными тонкими гранями, опирающееся на горизонтальную шероховатую плоскость. Тело, называемое далее корпусом, имеет длину  $a$ , ширину  $b$  и высоту  $2h$ . Введем в рассмотрение неподвижную систему координат  $O'xyz$  с началом на плоскости и связанную с корпусом систему  $O\xi\eta\zeta$  с началом в его центре масс (рисунок 1.1). Оси  $O'z$  и  $O\zeta$  направим вертикально вверх, ось  $O\xi$  — параллельно большому ребру основания корпуса, ось  $O\eta$  — так, чтобы система образовывала правую тройку. Считаем, что в начальный момент времени соответствующие оси систем координат сонаправлены. Главные оси центрального эллипсоида инерции корпуса совпадают с осями системы  $O\xi\eta\zeta$ . Момент инерции относительно оси  $O\zeta$  равен  $C$  (вычисляется в приложении А). Внутри корпуса могут быть расположены подвижные материальные точки (или твердые тела), которые будем далее называть внутренними (или подвижными) массами. Систему, состоящую из корпуса и некоторой конфигурации подвижных масс, будем называть ползуном.

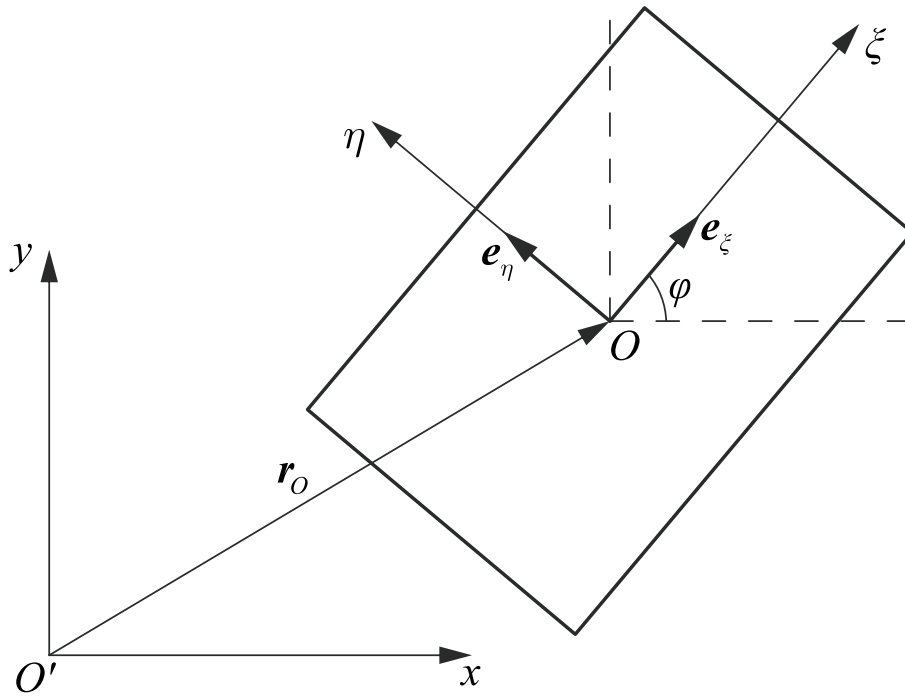


Рисунок 1.1. Неподвижная и связанная с корпусом системы координат

В работе предполагается, что отрыва корпуса от плоскости не происходит. Тогда его произвольное движение складывается из поступательного скольжения по плоскости и вращения относительно вертикальной оси. Положение корпуса определяется тремя координатами: координаты  $x_O$  и  $y_O$  задают точку  $O$  в неподвижной системе координат (аппликата этой точки постоянна и равна  $h$ ), угол  $\varphi$  между осями  $O'x$  и  $O\xi$  задает поворот корпуса относительно его начального положения. Для нахождения координат могут быть использованы теоремы о движении центра масс и изменении кинетического момента ползуна, записанные относительно неподвижной системы координат:

$$m\mathbf{w}_G = \mathbf{W} + \mathbf{N} + \mathbf{F}, \quad m = m_0 + \sum_{i=1}^s m_i, \quad (1.1)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O^W + \mathbf{M}_O^N + \mathbf{M}_O^F + m\mathbf{v}_G \times \mathbf{v}_O, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{w}_G$  — ускорение центра масс  $G$  ползуна,  $\mathbf{W}$  — действующая на него сила тяжести,  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{F}$  — главные векторы нормальной реакции и сил трения, действующие со стороны плоскости,  $m_i$  — масса  $i$ -й подвижной материальной точки, располагающейся внутри корпуса,  $s$  — количество подвижных точек. В

случае сплошного твердого тела сумма по  $m_i$  заменяется соответствующим интегралом.  $\mathbf{K}_O$  — кинетический момент ползуна относительно полюса  $O$ ,  $\mathbf{M}_O^W$  — момент силы тяжести относительно полюса  $O$ ,  $\mathbf{M}_O^N$  и  $\mathbf{M}_O^F$  — главные моменты нормальной реакции и сил трения относительно полюса  $O$ ,  $\mathbf{v}_G$  и  $\mathbf{v}_O$  — скорости точек  $G$  и  $O$ .

Пусть  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{r}_{Oi}$  — радиус-векторы проведенные из точки  $O'$  и  $O$  к  $i$ -й внутренней массе соответственно, а  $\mathbf{r}_O$  — радиус-вектор проведенный из точки  $O'$  к точке  $O$ . Тогда справедливо тождество:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_O + \mathbf{r}_{Oi}. \quad (1.3)$$

Продифференцировав это уравнение по времени один и два раза, получим

$$\dot{\mathbf{r}}_{Oi} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O, \quad \ddot{\mathbf{r}}_{Oi} = \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_O, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{v}_i$  и  $\mathbf{w}_i$  — абсолютные скорость и ускорение  $i$ -й подвижной массы,  $\mathbf{w}_O$  — ускорение точки  $O$ .

В общем случае центр масс корпуса  $O$  и центр масс ползуна  $G$  не совпадают. Используя формулу (1.3), выразим радиус-вектор  $\mathbf{r}_G$ , проведенный из точки  $O'$  к центру масс  $G$  ползуна, через вектора  $\mathbf{r}_O$  и  $\mathbf{r}_{Oi}$ :

$$\mathbf{r}_G = \frac{m_0 \mathbf{r}_O + \sum_{i=1}^s m_i \mathbf{r}_i}{m} = \frac{m_0}{m} \mathbf{r}_O + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{r}_O + \mathbf{r}_{Oi}) = \mathbf{r}_O + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^s m_i \mathbf{r}_{Oi}. \quad (1.5)$$

Продифференцируем по времени формулу (1.5) один и два раза, используя при этом равенства (1.4):

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_O + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O), \quad \mathbf{w}_G = \mathbf{w}_O + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_O).$$

Первая из полученных формул позволяет преобразовать последнее слагаемое в (1.2), а вторая — левую часть уравнения (1.1):

$$m \mathbf{v}_G \times \mathbf{v}_O = \sum_{i=1}^s m_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_O, \quad m \mathbf{w}_G = m \mathbf{w}_O + \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_O). \quad (1.6)$$

Кинетический момент ползуна представляется в виде суммы составляющих:

$$\mathbf{K}_O = C\dot{\varphi}\mathbf{k} + \sum_{i=1}^s \mathbf{K}_{O_i},$$

где  $\mathbf{k}$  — орт, направленный вертикально вверх,  $C\dot{\varphi}\mathbf{k}$  — кинетический момент корпуса ( $\dot{\varphi}\mathbf{k}$  — его угловая скорость),  $\mathbf{K}_{O_i}$  — кинетический момент  $i$ -й подвижной массы. Производная кинетического момента ползуна по времени:

$$\dot{\mathbf{K}}_O = C\ddot{\varphi}\mathbf{k} + \sum_{i=1}^s \dot{\mathbf{K}}_{O_i}. \quad (1.7)$$

Используя первую формулу (1.4), вычислим  $\dot{\mathbf{K}}_{O_i}$ :

$$\dot{\mathbf{K}}_{O_i} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{O_i} \times m_i \mathbf{v}_i) = m_i(\mathbf{r}_{O_i} \times \mathbf{w}_i - \mathbf{v}_O \times \mathbf{v}_i). \quad (1.8)$$

Учитывая равенства (1.6), (1.7) и (1.8), уравнения (1.1) и (1.2) преобразуются к виду:

$$m\mathbf{w}_O = \mathbf{W} + \mathbf{N} + \mathbf{F} - \sum_{i=1}^s m_i(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_O), \quad (1.9)$$

$$C\ddot{\varphi}\mathbf{k} = \mathbf{M}_O^W + \mathbf{M}_O^N + \mathbf{M}_O^F - \sum_{i=1}^s m_i \mathbf{r}_{O_i} \times \mathbf{w}_i. \quad (1.10)$$

Будем далее исходить из уравнений движения (1.9) и (1.10).

Векторы  $\mathbf{r}_O$ ,  $\mathbf{v}_O$ , а также направляющие орты  $\mathbf{e}_\xi$ ,  $\mathbf{e}_\eta$  и  $\mathbf{k}$  осей  $O\xi$ ,  $O\eta$  и  $O\zeta$ , связанной с телом системы координат, таковы:

$$\mathbf{r}_O = \begin{bmatrix} x_O \\ y_O \\ h \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_O = \begin{bmatrix} \dot{x}_O \\ \dot{y}_O \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\xi = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\eta = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Радиус-вектор  $\mathbf{r}_{O_i}$  выразим через орты связанной с корпусом системы координат  $O\xi\eta\zeta$ :

$$\mathbf{r}_{O_i} = \xi_i(t) \mathbf{e}_\xi + \eta_i(t) \mathbf{e}_\eta + \zeta_i(t) \mathbf{k}, \quad (1.11)$$

где координаты  $\xi_i(t)$ ,  $\eta_i(t)$  и  $\zeta_i(t)$   $i$ -й подвижной массы, вообще говоря, зависят от времени.

Для вычисления абсолютной скорости  $i$ -й внутренней массы воспользуемся формулой Эйлера, выражающей распределение скоростей точек внутри твердого тела, и теоремой о сложении скоростей точки в сложном движении [66]:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^e + \mathbf{v}_i^r = \mathbf{v}_O + \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{Oi} + \mathbf{v}_i^r,$$

где верхние индексы  $e$  и  $r$  обозначают соответственно переносную и относительную скорости точки. Относительная скорость определяется выражением:

$$\mathbf{v}_i^r = \dot{\xi}_i \mathbf{e}_\xi + \dot{\eta}_i \mathbf{e}_\eta + \dot{\zeta}_i \mathbf{k}.$$

Абсолютное ускорение  $i$ -й внутренней массы найдем используя теорему о сложении ускорений точки в сложном движении [66]:

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i^e + \mathbf{w}_i^r + \mathbf{w}_i^c, \quad (1.12)$$

где верхние индексы  $e$ ,  $r$  и  $c$  обозначают соответственно переносное, относительное и кориолисово ускорения  $i$ -й точки и определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i^e &= \mathbf{w}_O + \ddot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{Oi} + \dot{\varphi}^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{Oi}), & \mathbf{w}_i^r &= \ddot{\xi}_i \mathbf{e}_\xi + \ddot{\eta}_i \mathbf{e}_\eta + \ddot{\zeta}_i \mathbf{k}, \\ \mathbf{w}_i^c &= 2\dot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{v}_i^r. \end{aligned}$$

Полученное выражение для абсолютных ускорений точек необходимо подставить в уравнения движения (1.9) и (1.10). При этом слагаемое  $\mathbf{w}_O$ , стоящее в правой части уравнения (1.9), сократится. Далее необходимо определить главные векторы и моменты системы, стоящие в правых частях этих уравнений.

## 1.2. Силы, приложенные к корпусу

### 1.2.1. Главные векторы и моменты

Сила тяжести, главные векторы нормальной реакции опоры и силы трения, а также соответствующие им моменты определяются выражениями:



$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{k}, \quad \mathbf{M}_O^W = -\sum_{i=1}^s \mathbf{r}_{Oi} \times m_i g \mathbf{k}, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{N} = \iint n_A \mathbf{k} ds, \quad \mathbf{M}_O^N = \iint \mathbf{r}_{OA} \times n_A \mathbf{k} ds, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{F} = \iint \mathbf{t}_A ds, \quad \mathbf{M}_O^F = \iint \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{t}_A ds. \quad (1.15)$$

Интегрирование всюду ведется по области  $S(\xi, \eta)$ , состоящей из точек корпуса соприкасающихся с опорой,  $n_A$  и  $\mathbf{t}_A$  — нормальное и касательное напряжения в точке  $A \in S$ ,  $\mathbf{r}_{OA}$  — радиус-вектор проведенный из точки  $O$  к точке  $A$ :

$$\mathbf{r}_{OA} = \xi_A \mathbf{e}_\xi + \eta_A \mathbf{e}_\eta - h \mathbf{k}. \quad (1.16)$$

Индекс  $A$  у координат  $\xi_A$  и  $\eta_A$  в дальнейшем опустим:  $\xi_A \equiv \xi$ ,  $\eta_A \equiv \eta$ .

### 1.2.2. Касательные напряжения

Касательные напряжения в области контакта корпуса и плоскости локально описываются законом Амонтона–Кулона:

$$\mathbf{t}_A = -\mu n_A \mathbf{f}_A, \quad \mathbf{f}_A = f_\xi \mathbf{e}_\xi + f_\eta \mathbf{e}_\eta = \begin{cases} \mathbf{v}_A / v_A, & v_A \neq 0, \\ \boldsymbol{\alpha}_A, & v_A = 0, \end{cases} \quad (1.17)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения,  $f_\xi$  и  $f_\eta$  — компоненты вектора  $\mathbf{f}_A$  в базисе  $\mathbf{e}_\xi$ ,  $\mathbf{e}_\eta$ ,  $\mathbf{v}_A$  — скорость точки  $A$ ,  $v_A$  — модуль вектора  $\mathbf{v}_A$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_A$  — вектор, определяющий направление касательного напряжения в точке  $A$  в случае покоя корпуса.

Условие покоя корпуса на плоскости может быть выражено в трех независимых скалярных уравнениях [67], которые накладывают ограничения на вектор  $\boldsymbol{\alpha}_A$ , модуль которого, в силу неравенства  $|\mathbf{t}_A| \leq \mu n_A$ , не превосходит единицы. Такой подход, для случая предельного равновесия тела на плоскости, ранее использовался Джеллеттом [4, 28].

Известно, что при плоском движении тела всегда существует точка  $M$ , называемая мгновенным центром скоростей, скорость которой  $\mathbf{v}_M$  в данный момент

времени равна нулю (в случае поступательного движения тела точка  $M$  лежит на бесконечности). Используя формулу Эйлера, связывающую скорости точек твердого тела, найдем координаты точки  $M$  в зависимости от скорости точки  $O$ :

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_O + \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{OM} = \mathbf{v}_O + \dot{\varphi} (\xi_M \mathbf{e}_\eta - \eta_M \mathbf{e}_\xi) = 0,$$

где  $\mathbf{r}_{OM} = \xi_M \mathbf{e}_\xi + \eta_M \mathbf{e}_\eta - h \mathbf{k}$  — радиус-вектор проведенный из точки  $O$  к точке  $M$ . Это уравнение разбивается на линейную систему из двух скалярных уравнений относительно  $\xi_M$  и  $\eta_M$ :

$$\eta_M \cos \varphi + \xi_M \sin \varphi = \frac{\dot{x}_O}{\dot{\varphi}}, \quad \eta_M \sin \varphi - \xi_M \cos \varphi = \frac{\dot{y}_O}{\dot{\varphi}},$$

которая имеет решение

$$\xi_M = \frac{\dot{x}_O \sin \varphi - \dot{y}_O \cos \varphi}{\dot{\varphi}}, \quad \eta_M = \frac{\dot{x}_O \cos \varphi + \dot{y}_O \sin \varphi}{\dot{\varphi}}.$$

Если  $\dot{\varphi} = 0$  и  $v_O \neq 0$ , то точка  $M$  лежит на бесконечности, а корпус движется поступательно. Если  $\dot{\varphi} = 0$  и  $v_O = 0$  — корпус покоится.

Найдем теперь скорость точки  $A$ :

$$\mathbf{v}_A = \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{MA} = \dot{\varphi} ((\xi - \xi_M) \mathbf{e}_\eta - (\eta - \eta_M) \mathbf{e}_\xi).$$

Тогда компоненты  $v_\xi/v_A$  и  $v_\eta/v_A$  единичного вектора  $\mathbf{v}_A/v_A$  в базисе  $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta$  имеют вид:

$$\frac{v_\xi}{v_A} = -\frac{\dot{\varphi} \eta - \dot{x}_O \cos \varphi - \dot{y}_O \sin \varphi}{v_A}, \quad \frac{v_\eta}{v_A} = \frac{\dot{\varphi} \xi - \dot{x}_O \cos \varphi + \dot{y}_O \sin \varphi}{v_A}, \quad (1.18)$$

где

$$v_A = \sqrt{(\dot{\varphi} \eta - \dot{x}_O \cos \varphi - \dot{y}_O \sin \varphi)^2 + (\dot{\varphi} \xi - \dot{x}_O \cos \varphi + \dot{y}_O \sin \varphi)^2}.$$

Для получения уравнений движения корпуса необходимо наложить ряд ограничений на распределение векторов  $\boldsymbol{\alpha}_A$ . Во-первых, предположим, что для векторов  $\boldsymbol{\alpha}_A$  также существует некоторая точка  $M$ , являющаяся аналогом мгновенного центра скоростей. Тогда вектор  $\boldsymbol{\alpha}_A$  направлен перпендикулярно

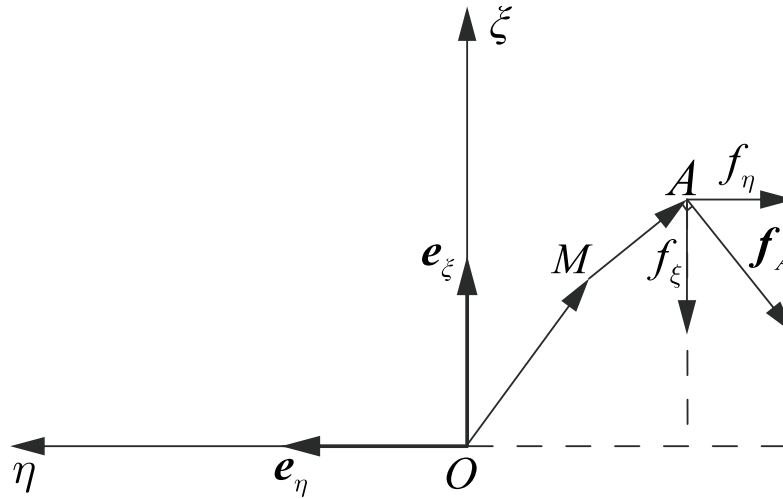


Рисунок 1.2. Разложение вектора  $\mathbf{f}_A$  в базисе  $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta$

радиус-вектору проведенному из точки  $M$  к точке  $A$ . Во-вторых, будем также считать, что модуль  $\alpha_A$  не зависит от выбора точки  $A$ , то есть  $\alpha_A \equiv \alpha$  и, соответственно,  $f_A \equiv f$ . Таким образом, в случае покоя корпуса, неизвестными величинами будут координаты  $\xi_M$  и  $\eta_M$  точки  $M$  и величина  $f$ . Проекции  $f_\xi$  и  $f_\eta$  выражаются уравнениями (рисунок 1.2):

$$f_\xi = -f \frac{\eta - \eta_M}{\sqrt{(\xi - \xi_M)^2 + (\eta - \eta_M)^2}}, \quad f_\eta = f \frac{\xi - \xi_M}{\sqrt{(\xi - \xi_M)^2 + (\eta - \eta_M)^2}},$$

которые в случае  $v_A \neq 0$  совпадают с уравнениями (1.18).

### 1.2.3. Нормальные напряжения

В формулах (1.14) и (1.15) неизвестным остается закон распределения нормальных напряжений в области контакта корпуса и плоскости  $n_A$ . Этот закон зависит от давления со стороны ползуна на плоскость, распределения подвижных масс внутри корпуса, свойств опорной плоскости. Определение закона распределения нормальных напряжений представляет собой трудную задачу, решение которой оказывает существенное влияние на динамику системы [13, 23]. Известно [27], что в случае тела, имеющего три точки контакта с опорной плоскостью (тренога), количество накладываемых кинематических ограничений совпадает с количеством неизвестных параметров — нормальных реакций в точках

контакта, что полностью определяет модель. В случае, если тело имеет большее количество точек контакта, например стул на четырех ножках, возникает неопределенность, устранение которой требует принятие некоторых дополнительных гипотез.

Покажем, что в случае однородного твердого тела с плоским основанием,двигающегося поступательно вдоль оси  $O\xi$  (в рамках введенных ранее обозначений), распределение нормальных напряжений в области контакта не может быть постоянным. Для простоты будем считать тело плоским. Вычислим момент, действующий на него относительно центра масс  $O$ , считая что закон распределения нормальных напряжений является линейной функцией от  $\xi$ :

$$n_A = \lambda_0 + \lambda_\xi \xi,$$

где  $\lambda_0$  и  $\lambda_\xi$  — постоянные коэффициенты. Тогда, учитывая, что в данном случае

$$\mathbf{r}_{OA} = \xi \mathbf{e}_\xi - h \mathbf{k}, \quad \mathbf{f}_A = \mathbf{e}_\xi,$$

получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \mathbf{M}_O^N + \mathbf{M}_O^F = \int_{-a/2}^{a/2} \mathbf{r}_{OA} \times (n_A \mathbf{k} + \mathbf{t}_A) d\xi = \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} (\lambda_0 + \lambda_\xi \xi) \mathbf{r}_{OA} \times (\mathbf{k} - \mu \mathbf{f}_A) d\xi = \left( \lambda_0 \mu h a - \lambda_\xi \frac{a^3}{12} \right) \mathbf{e}_\eta. \end{aligned}$$

Если предположить, что  $\lambda_\xi \equiv 0$  (равномерное распределение напряжений), то  $M_O \neq 0$ , что свидетельствует об опрокидывании тела относительно оси, перпендикулярной плоскости движения, что и требовалось показать.

Напротив, если положить  $\lambda_\xi = 12\lambda_0\mu h/a^2$ , то  $M_O = 0$ . Таким образом, линейная модель распределения нормальных напряжений согласуется с динамикой системы и не приводит к противоречиям.

В общем случае условие неразрывности контакта ползуна и плоскости накладывает три независимых ограничения на кинематические характеристики

корпуса. Поэтому модель нормальных напряжений  $n_A$  должна включать три независимых параметра  $\lambda_0$ ,  $\lambda_\xi$  и  $\lambda_\eta$ , определяемых в каждый момент времени из этих ограничений. Такая модель контактных напряжений динамически совместна [27, 28]. Итак, далее будем полагать, что

$$n_A = \lambda_0 + \lambda_\xi \xi + \lambda_\eta \eta, \quad (\xi, \eta) \in S. \quad (1.19)$$

Физической интерпретацией этой формулы может служить представление о наличии малых деформаций плоскости в области контакта, приводящих к нормальным напряжениям по закону Гука.

Заметим, что между корпусом ползуна и плоскостью имеет место односторонний контакт, следовательно коэффициенты  $\lambda_0$ ,  $\lambda_\xi$  и  $\lambda_\eta$  ограничены условием

$$n_A \geq 0, \quad \forall A \in S. \quad (1.20)$$

Если в некоторых точках контакта это неравенство не выполняется, то для них следует принять  $n_A = 0$  [28], что соответствует случаю неполного контакта. Следовательно, неравенство (1.20) необходимо проверять с учетом выбора конфигураций подвижных масс и законов их относительного движения.

Подставляя законы (1.17) и (1.19) в формулы (1.13)–(1.15), затем подставляя полученные выражения для сил и моментов в систему из шести скалярных уравнений (1.9) и (1.10), получим уравнения движения корпуса ползуна в замкнутой форме, при условии, что определены законы движения внутренних масс. При этом, в каждый момент времени неизвестными являются обобщенные координаты  $x_O$ ,  $y_O$  и  $\varphi$ , а также коэффициенты  $\lambda_0$ ,  $\lambda_\xi$  и  $\lambda_\eta$  линейной модели (1.19).

### 1.3. Коэффициенты модели распределения нормальных напряжений

Чтобы определить коэффициент  $\lambda_0$  в разложении (1.19) упростим выражение для главного вектора нормальной реакции, вычислив интеграл в первой

формуле (1.14). Для этого необходимо учесть симметрию области контакта корпуса и плоскости, состоящей из множества точек  $S(\xi, \eta)$ :

$$-\frac{a}{2} \leq \xi \leq \frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} \leq \eta \leq \frac{b}{2}.$$

Тогда получим:

$$\mathbf{N} = \mathbf{k} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} (\lambda_0 + \lambda_\xi \xi + \lambda_\eta \eta) d\xi d\eta = \lambda_0 ab \mathbf{k}. \quad (1.21)$$

Условием неразрывности контакта ползуна с плоскостью является равенство нулю проекций скоростей (и ускорений) точек корпуса на вертикаль. Это условие можно выразить тремя независимыми уравнениями. Первое уравнение получается из необходимого равенства нулю суммы проекций главных векторов на вертикаль, то есть проекции уравнения (1.9) на орт  $\mathbf{k}$ :

$$\left( \mathbf{W} + \mathbf{N} - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_O) \right) \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (1.22)$$

Подставляя выражение (1.12), первую формулу (1.13) и (1.21) в равенство (1.22), найдем:

$$\lambda_0 = \frac{mg + \sum_{i=1}^s m_i \ddot{\zeta}_i}{ab}. \quad (1.23)$$

Физический смысл  $\lambda_0$  — среднее давление тела весом  $mg + \sum_{i=1}^s m_i \ddot{\zeta}_i$  на поверхность площади  $ab$ . Главный вектор сил нормальных реакций не может быть отрицательным, следовательно  $\lambda_0 \geq 0$ , что накладывает ограничение на движения внутренних масс:

$$\sum_{i=1}^s m_i \ddot{\zeta}_i \geq -mg.$$

Чтобы получить выражения для коэффициентов  $\lambda_\xi$  и  $\lambda_\eta$ , спроектируем уравнение (1.10) на орты  $\mathbf{e}_\xi$  и  $\mathbf{e}_\eta$ . Для этого запишем проекции главного момен-

та силы тяжести и последнего слагаемого в формуле (1.10) ( $j = \xi, \eta$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O^W \cdot \mathbf{e}_j &= - \sum_{i=1}^s (\mathbf{r}_{Oi} \times m_i g \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_j = - \sum_{i=1}^s m_i g \mathbf{k} \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r}_{Oi}), \\ &- \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{e}_j = - \sum_{i=1}^s m_i \mathbf{w}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r}_{Oi}), \end{aligned}$$

а также проекции главных моментов нормальной реакции и силы трения:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O^N \cdot \mathbf{e}_j &= \iint (\mathbf{r}_{OA} \times n_A \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_j ds = \iint n_A \mathbf{k} \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r}_{OA}) ds, \\ \mathbf{M}_O^F \cdot \mathbf{e}_j &= - \iint (\mathbf{r}_{OA} \times \mu n_A \mathbf{f}_A) \cdot \mathbf{e}_j ds = - \iint \mu n_A \mathbf{f}_A \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r}_{OA}) ds. \end{aligned}$$

Получим систему из двух уравнений:

$$\sum_{i=1}^s m_i \chi_{ji} = \iint n_A \psi_j ds, \quad (1.24)$$

где введены обозначения:

$$\chi_{ji} = (\mathbf{w}_i + g \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r}_{Oi}), \quad \psi_j = (\mathbf{k} - \mu \mathbf{f}_A) \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r}_{OA}).$$

Для того, чтобы упростить выражения функций  $\chi_{ij}$  и  $\psi_j$ , выполним ряд вспомогательных вычислений, используя разложения (1.11) и (1.16):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{r}_{Oi} &= \eta_i \mathbf{k} - \zeta_i \mathbf{e}_\eta, & \mathbf{e}_\eta \times \mathbf{r}_{Oi} &= -\xi_i \mathbf{k} + \zeta_i \mathbf{e}_\xi, \\ \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{r}_{OA} &= \eta \mathbf{k} + h \mathbf{e}_\eta, & \mathbf{e}_\eta \times \mathbf{r}_{OA} &= -\xi \mathbf{k} - h \mathbf{e}_\xi. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \chi_{\xi i} &= g \eta_i + \mathbf{w}_i \cdot (\eta_i \mathbf{k} - \zeta_i \mathbf{e}_\eta), & \chi_{\eta i} &= -g \xi_i + \mathbf{w}_i \cdot (-\xi_i \mathbf{k} + \zeta_i \mathbf{e}_\xi), \\ \psi_\xi &= \eta - \mu h f_\eta, & \psi_\eta &= -\xi + \mu h f_\xi. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Учитывая принятую модель распределения нормальных напряжений (1.19), перепишем выражения (1.24) в виде системы двух линейных уравнений относительно  $\lambda_\xi$  и  $\lambda_\eta$ :

$$\begin{aligned} a_{\xi\xi} \lambda_\xi + a_{\xi\eta} \lambda_\eta &= a_{\xi 0} \lambda_0 + \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\xi i}, \\ a_{\eta\xi} \lambda_\xi + a_{\eta\eta} \lambda_\eta &= a_{\eta 0} \lambda_0 + \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\eta i}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

где коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_{\xi\xi} &= \iint \psi_\xi \xi ds, & a_{\xi\eta} &= \iint \psi_\xi \eta ds, & a_{\xi 0} &= - \iint \psi_\xi ds, \\ a_{\eta\xi} &= \iint \psi_\eta \xi ds, & a_{\eta\eta} &= \iint \psi_\eta \eta ds, & a_{\eta 0} &= - \iint \psi_\eta ds. \end{aligned}$$

Решая полученную систему, найдем:

$$\begin{aligned} \lambda_\xi &= \frac{a_{\eta\eta} \left( a_{\xi 0} \lambda_0 + \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\xi i} \right) - a_{\xi\eta} \left( a_{\eta 0} \lambda_0 + \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\eta i} \right)}{a_{\xi\xi} a_{\eta\eta} - a_{\xi\eta} a_{\eta\xi}}, \\ \lambda_\eta &= \frac{a_{\xi\xi} \left( a_{\eta 0} \lambda_0 + \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\eta i} \right) - a_{\eta\xi} \left( a_{\xi 0} \lambda_0 + \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\xi i} \right)}{a_{\xi\xi} a_{\eta\eta} - a_{\xi\eta} a_{\eta\xi}}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Формулы (1.23) и (1.27) определяют коэффициенты линейной модели распределения контактных напряжений (1.19) в каждый момент времени в зависимости от координат и ускорений внутренних масс, а также движения самого корпуса.

Необходимо показать, что знаменатель в выражениях (1.27) не равен нулю. В общем случае сделать это затруднительно в силу громоздкости получаемых выражений. Вместо этого покажем, что для используемых в работе параметрах знаменатель всегда больше нуля. Подставляя функции  $\psi_\xi$  и  $\psi_\eta$ , получим:

$$\begin{aligned} a_{\xi\xi} &= -\mu h \iint f_\eta \xi ds, & a_{\eta\eta} &= \mu h \iint f_\xi \eta ds, \\ a_{\xi\eta} &= \frac{b^3 a}{12} - \mu h \iint f_\eta \eta ds, & a_{\eta\xi} &= -\frac{a^3 b}{12} + \mu h \iint f_\xi \xi ds. \end{aligned}$$

Знаменатель в формулах (1.27) положителен, если

$$\begin{aligned} \frac{a^4 b^4}{144} &> \mu^2 h^2 \left( \iint f_\eta \xi ds \iint f_\xi \eta ds - \iint f_\eta \eta ds \iint f_\xi \xi ds \right) + \\ &+ \mu h \frac{ab}{12} \left( a^2 \iint f_\eta \eta ds + b^2 \iint f_\xi \xi ds \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Это неравенство очевидно выполняется для случая гладкой плоскости или для случая тела, высота которого равна нулю, то есть когда выполняется



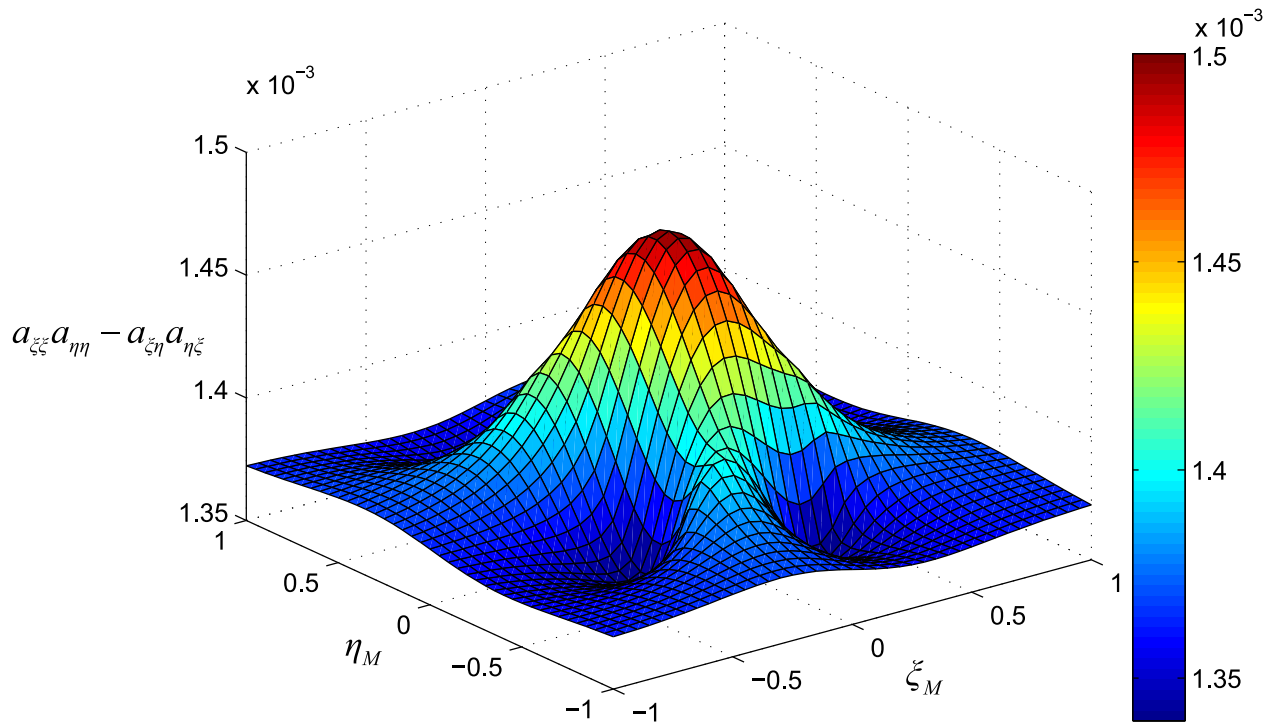


Рисунок 1.3. График зависимости знаменателя в формулах (1.27) от  $\xi_M$  и  $\eta_M$  при  $\mu h = 0$ . Подставляя сюда  $f_\xi$  и  $f_\eta$  можно вычислить интегралы в правых частях в зависимости от значений  $\xi_M$  и  $\eta_M$ . На рисунке 1.3 представлен график зависимости знаменателя в формулах (1.27) от параметров  $\xi_M$  и  $\eta_M$ , при этом принимается  $f = 1$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2a/3$ ,  $h = b/2$ .

Строгие доказательства для случаев  $\xi_M \rightarrow \infty$  или  $\eta_M \rightarrow \infty$  (поступательное движение корпуса);  $\xi_M = 0$  и  $\eta_M = 0$  (вращение вокруг вертикальной оси проходящей через точку  $O$ ) будут даны в соответствующих разделах.

## 1.4. Уравнения движения корпуса

Для получения первого уравнения движения корпуса спроектируем равенство (1.10) на орт  $\mathbf{k}$ :

$$C\ddot{\varphi} = \mathbf{M}_O^F \cdot \mathbf{k} - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{k}. \quad (1.29)$$

Учитывая формулу (1.16) и свойство перестановки смешанного произведения, проекцию главного момента сил трения на орт  $\mathbf{k}$  можно представить в

виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O^F \cdot \mathbf{k} &= -\mu \iint n_A (\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{f}_A) \cdot \mathbf{k} ds = \\ &= -\mu \iint n_A (\xi \mathbf{e}_\eta - \eta \mathbf{e}_\xi) \cdot \mathbf{f}_A ds = -f F_\varphi, \end{aligned}$$

где функция  $F_\varphi$ , с учетом разложения вектора  $\mathbf{f}_A$  по базису  $\mathbf{e}_\xi$ ,  $\mathbf{e}_\eta$ , равна

$$F_\varphi = \mu f^{-1} \iint n_A (\xi f_\eta - \eta f_\xi) ds. \quad (1.30)$$

Используя разложение абсолютного ускорения  $i$ -й подвижной массы (1.12), выразим компоненту содержащую  $\ddot{\varphi}$  из последнего слагаемого уравнения (1.29):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{k} &= \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{r}_{Oi} \times (\ddot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{Oi})) \cdot \mathbf{k} - M_\varphi = \\ &= \sum_{i=1}^s m_i (r_{Oi}^2 - (\mathbf{r}_{Oi} \cdot \mathbf{k})^2) \ddot{\varphi} - M_\varphi = \sum_{i=1}^s m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2) \ddot{\varphi} - M_\varphi. \end{aligned}$$

Сумма перед  $\ddot{\varphi}$  представляет из себя момент инерции внутренних масс относительно оси  $O\zeta$ . Функция  $M_\varphi$  обозначает все слагаемые, не включающие в себя  $\ddot{\varphi}$ , взятые с обратным знаком:

$$M_\varphi = - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{r}_{Oi} \times (\mathbf{w}_O + \dot{\varphi}^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{Oi}) + \mathbf{w}_i^r + \mathbf{w}_i^c)) \cdot \mathbf{k}.$$

Заметим, что

$$(\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{Oi})) \cdot \mathbf{k} = 0$$

по свойству смешанного произведения. Окончательно получим:

$$M_\varphi = - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{r}_{Oi} \times (\mathbf{w}_O + \mathbf{w}_i^r + \mathbf{w}_i^c)) \cdot \mathbf{k}. \quad (1.31)$$

Учитывая вышесказанное, уравнение (1.29) запишется в виде:

$$J \ddot{\varphi} = M_\varphi - f F_\varphi, \quad (1.32)$$

где

$$J = C + \sum_{i=1}^s m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2). \quad (1.33)$$

Для того, чтобы получить еще два уравнения движения, из которых находятся  $\ddot{x}_O$  и  $\ddot{y}_O$ , спроектируем равенство (1.9) на орты  $\mathbf{e}_\xi$  и  $\mathbf{e}_\eta$ :

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_O \cos \varphi + \ddot{y}_O \sin \varphi) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\xi - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_O) \cdot \mathbf{e}_\xi = R_\xi - fF_\xi, \\ m(-\ddot{x}_O \sin \varphi + \ddot{y}_O \cos \varphi) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\eta - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_O) \cdot \mathbf{e}_\eta = R_\eta - fF_\eta, \end{aligned}$$

где, с учетом первой формулы (1.15), введены обозначения:

$$\begin{aligned} R_\xi &= - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_O) \cdot \mathbf{e}_\xi, & R_\eta &= - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_O) \cdot \mathbf{e}_\eta, \\ F_\xi &= \mu f^{-1} \iint n_A f_\xi ds, & F_\eta &= \mu f^{-1} \iint n_A f_\eta ds. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Разрешая систему относительно  $\ddot{x}_O$  и  $\ddot{y}_O$  получим уравнения движения корпуса ползуна:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_O &= (R_\xi - fF_\xi) \cos \varphi - (R_\eta - fF_\eta) \sin \varphi, \\ m\ddot{y}_O &= (R_\xi - fF_\xi) \sin \varphi + (R_\eta - fF_\eta) \cos \varphi, \\ J\ddot{\varphi} &= M_\varphi - fF_\varphi. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Полученная система замкнута, при условии, что в каждый момент времени известны коэффициенты  $\lambda_0$ ,  $\lambda_\xi$  и  $\lambda_\eta$ , получаемые из выражений (1.23) и (1.27). Также подразумевается, что известно относительное движение внутренних масс. Отметим, что в общем случае коэффициенты  $\lambda_\xi$  и  $\lambda_\eta$ , а также функции  $M_\varphi$ ,  $R_\xi$  и  $R_\eta$  зависят от  $\ddot{\varphi}$ ,  $\ddot{x}_O$  и  $\ddot{y}_O$ .

## 1.5. Достаточные условия равновесия корпуса

Необходимыми и достаточными условиями равновесия корпуса является равенство нулю проекции главного вектора всех сил на горизонталь и проекции главного момента на вертикаль [67]. Применительно к уравнениям (1.9) и (1.10) достаточные условия запишутся в виде ( $j = \xi, \eta$ ):

$$\sum_{i=1}^s m_i \mathbf{w}_i^r \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_j, \quad \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{w}_i^r) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{M}_O^F \cdot \mathbf{k}.$$

Здесь учтено, что в покое  $w_i^e = w_i^c = 0$ . Перепишем эти уравнения согласно введенным ранее обозначениям:

$$R_\xi = fF_\xi, \quad R_\eta = fF_\eta, \quad M_\varphi = fF_\varphi, \quad (1.36)$$

причем здесь

$$R_\xi = \sum_{i=1}^s m_i \ddot{\xi}_i, \quad R_\eta = \sum_{i=1}^s m_i \ddot{\eta}_i,$$

$$M_\varphi = - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{w}_i^r) \cdot \mathbf{k} = - \sum_{i=1}^s m_i (\xi_i \ddot{\eta}_i - \eta_i \ddot{\xi}_i).$$

Если система уравнений (1.36) разрешима, то есть существует такая величина  $f$ , и координаты  $\xi_M$  и  $\eta_M$ , что все три равенства выполняются, то корпус будет оставаться в покое. Например, если левые части этих уравнений равны нулю, то  $f = 0$ , а точка  $M$  имеет произвольные координаты. Значения  $f = \pm 1$  свидетельствуют о достижении корпусом предельного равновесия, представляющего собой границу между областью застоя и началом движения [28]. Таким образом, в силу характера функции  $f$ , условия (1.36) могут быть выражены в виде трех неравенств:

$$|R_\xi| \leq F_\xi, \quad |R_\eta| \leq F_\eta, \quad |M_\varphi| \leq F_\varphi.$$

## 1.6. Заключение к главе 1

Определение уравнений движения твердого тела на плоскости неизбежно приводит к необходимости принятия дополнительных гипотез о распределении напряжений в области контакта: как тангенциальных, направленных по касательной к основанию корпуса, так и нормальных, направленных перпендикулярно основанию. В качестве модели тангенциальных напряжений в точках контакта использовался локальный закон Амонтона–Кулона, зарекомендовавший себя как наиболее простой и проверенный в огромном количестве экспериментов. Показано, что динамически согласованная модель распределения нормальных напряжений должна включать в себя три независимых параметра,

определяемых в каждый момент времени из условий неразрывности контакта корпуса и плоскости.

Получены уравнения движения твердого полого тела с плоским основанием на шероховатой плоскости в случае его произвольного (трехмерного) движения, а также формулы определяющие коэффициенты модели нормальных напряжений. При этом конфигурация внутренних масс, а также закон их относительного движения, предполагались произвольными. Определены достаточные условия равновесия корпуса на плоскости.

Уравнения движения, полученные здесь в общем случае, будут далее использоваться в частных примерах: в главе 2 они будут применены в случае поступательного движения корпуса, в главе 3 — в случае вращения корпуса вокруг своего центра масс. В главе 4 вновь будет рассмотрен случай трехмерного движения корпуса для заданных конфигураций подвижных масс и законов их относительного движения.

## 2. Поступательное движение мобильного устройства

В настоящей главе исследуется поступательное движение мобильного устройства, состоящего из корпуса, расположенного на шероховатой плоскости, в результате движения внутренних масс. Для определенности предполагается, что движение корпуса осуществляется вдоль продольной оси его симметрии. При этом используются уравнения, полученные в главе 1.

### 2.1. Уравнение движения

Покажем, что для реализации поступательного движения корпуса ползуна достаточно, чтобы координаты внутренних масс, а также их вторые производные удовлетворяли трем условиям:

$$\sum_{i=1}^s m_i \eta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^s m_i (\eta_i \zeta_i - \zeta_i \ddot{\eta}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^s m_i (\xi_i \ddot{\eta}_i - \eta_i \ddot{\xi}_i) = 0, \quad (2.1)$$

если только корпус преодолел силу трения покоя. При этом считаем, что в начальный момент времени корпус покоился, а оси  $O'x$  и  $O\xi$  совпадали:

$$\dot{x}_O = \dot{y}_O = 0, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0.$$

Согласно разделу 1.5, в начальный момент времени из первого условия (2.1) немедленно следует  $R_\eta = 0$ , а из третьего —  $M_\varphi = 0$ . Тогда уравнения движения (1.35) примут вид

$$m\ddot{x}_O = R_\xi - fF_\xi, \quad m\ddot{y}_O = -fF_\eta, \quad J\ddot{\varphi} = -fF_\varphi. \quad (2.2)$$

Предполагая, что  $R_\xi \neq 0$ , получаем, что  $\mathbf{f}_A = f_\xi \mathbf{e}_\xi$  (в противном случае  $f \equiv 0$ ). Следовательно, согласно (1.30) и двум последним формулам (1.34):

$$F_\xi = \mu\lambda_0 ab, \quad F_\eta = 0, \quad F_\varphi = -\mu \frac{ab^3}{12} \lambda_\eta.$$

Вычислим коэффициент  $\lambda_\eta$  из второго равенства (1.27), учитывая что здесь  $\psi_\xi = \eta$  и  $\psi_\eta = -\xi + \mu h f$ . Непосредственным вычислением показывается, что в рассматриваемом случае детерминант в формулах (1.26) больше нуля:

$$a_{\xi\xi}a_{\eta\eta} - a_{\xi\eta}a_{\eta\xi} = \frac{a^4b^4}{144}.$$

Тогда получим:

$$\lambda_\eta = -\frac{12}{ab^3} \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\xi i}.$$

Учитывая, что если корпус находится в покое, то  $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i^r$ , покажем, что выписанная выше сумма равна нулю при первых двух условиях (2.1):

$$\sum_{i=1}^s m_i \chi_{\xi i} = g \sum_{i=1}^s m_i \eta_i + \sum_{i=1}^s \mathbf{w}_i^r \cdot (\eta_i \mathbf{k} - \zeta_i \mathbf{e}_\eta) = \sum_{i=1}^s m_i (\eta_i \ddot{\zeta}_i - \zeta_i \ddot{\eta}_i) = 0.$$

Следовательно, правые части второго и третьего уравнений системы (2.2) равны нулю, а значит равенства  $\dot{y}_O = 0$  и  $\dot{\varphi} = 0$  сохранятся в следующий момент времени.

Если неравенство  $|R_\xi| \leq F_\xi$  выполняется во все промежутки времени, то корпус будет оставаться в покое сколь угодно долго. В противном случае равновесие нарушится. Тогда первые два уравнения системы (2.2) не изменятся, а третье уравнение примет вид

$$J\ddot{\varphi} = M_\varphi - fF_\varphi.$$

Учитывая, что  $\mathbf{w}_O = \dot{x}_O \mathbf{e}_\xi$  и  $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_O + \mathbf{w}_i^r$ , проекции  $M_\varphi$  и  $\sum_{i=1}^s m_i \chi_{\xi i}$  снова будут равны нулю:

$$M_\varphi = - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{r}_{Oi} \times (\mathbf{w}_O + \mathbf{w}_i^r)) \cdot \mathbf{k} = - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{w}_O) \cdot \mathbf{k} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^s m_i \chi_{\xi i} = g \sum_{i=1}^s m_i \eta_i + \sum_{i=1}^s (\mathbf{w}_O + \mathbf{w}_i^r) \cdot (\eta_i \mathbf{k} - \zeta_i \mathbf{e}_\eta) = 0.$$

Таким образом, координата  $\varphi$  останется неизменной во все время движения ползуна, а условия (2.1) являются достаточными для того, чтобы утверждать об отсутствии вращательного движения корпуса.

Первая формула системы (2.2) представляет собой уравнение движения корпуса в случае его поступательного движения вдоль оси  $O\xi$ , причем функции  $f$ ,  $R_\xi$  и  $F_\xi$  имеют вид:

$$m\ddot{x}_O = R_\xi - fF_\xi, \quad f = \begin{cases} \dot{x}_O/|\dot{x}_O|, & \dot{x}_O \neq 0, \\ R_\xi/F_\xi, & \dot{x}_O = 0, |R_\xi| \leq F_\xi, \\ R_\xi/|R_\xi|, & \dot{x}_O = 0, |R_\xi| > F_\xi, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$R_\xi = - \sum_{i=1}^s m_i \ddot{\xi}_i, \quad F_\xi = \mu \lambda_0 ab.$$

Рассмотрим далее два примера конфигураций внутренних масс, позволяющих реализовать поступательное движение корпуса вдоль его продольной оси симметрии.

## 2.2. Случай точечной массы, двигающейся вдоль продольной оси симметрии корпуса

### 2.2.1. Описание системы

Разместим внутри корпуса материальную точку массы  $m_1$ , способную перемещаться вдоль оси  $O\xi$  (рисунок 2.1):

$$\xi_1 = \xi_1(t), \quad \eta_1 = 0, \quad \zeta_1 = \text{const.}$$

Заметим, что условие  $\eta_1 = 0$  существенно. Действительно, если предположить, что  $\eta_1 \neq 0$ , то получим  $F_\varphi \neq 0$ , в силу  $\lambda_\eta \neq 0$ .

Формула (1.11) принимает вид:

$$\mathbf{r}_{O1} = \xi_1(t)\mathbf{e}_\xi + \zeta_1\mathbf{k}.$$

Учитывая, что

$$\lambda_0 = \frac{mg}{ab}, \quad m = m_0 + m_1,$$



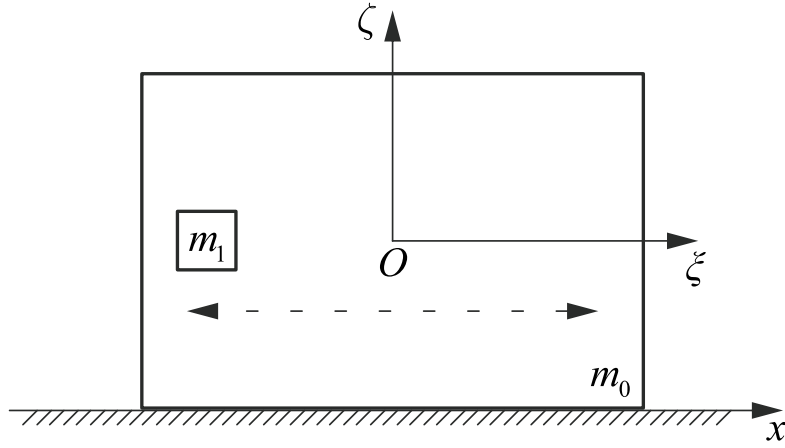


Рисунок 2.1. Ползун с точечной массой, двигающейся вдоль оси  $O\xi$

функции  $R_\xi$  и  $F_\xi$ :

$$R_\xi = -m_1\ddot{\xi}_1, \quad F_\xi = \mu mg.$$

Можно сделать вывод, что значение координаты  $\zeta_1$  не влияет на движение корпуса.

Отметим, что уравнение (2.3), при указанных функциях  $R_\xi$  и  $F_\xi$ , было ранее получено в [32].

Проверим, выполняется ли неравенство  $n_A \geq 0 \forall A \in S$ . Вычислим коэффициент  $\lambda_\xi$ , используя первую формулу (1.27).

$$\begin{aligned} a_{\eta\eta} &= 0, & a_{\xi\eta} &= -\frac{b^3 a}{12}, & a_{\eta 0} \lambda_0 &= -\mu h f m g, \\ \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\eta i} &= m_1 \zeta_1 (\ddot{x}_O + \ddot{\xi}_1) - m_1 g \xi_1, \\ \lambda_\xi &= -\frac{12}{a^3 b} \left( -\mu h m g f + m_1 \zeta_1 (\ddot{x}_O + \ddot{\xi}_1) - m_1 g \xi_1 \right). \end{aligned}$$

Следовательно, координата  $\zeta_1$ , вообще говоря, влияет на распределение нормальных напряжений в области контакта. Для удобства, примем  $\zeta_1 = 0$ . Тогда

$$\lambda_\xi = \frac{12g}{a^3 b} (\mu h m f + m_1 \xi_1).$$

Условие  $n_A \geq 0$  представляется в виде:

$$m + \frac{12}{a^2} (\mu h m f + m_1 \xi_1) \xi \geq 0.$$

Покажем, что полученное неравенство может не выполняться внутри области контакта  $-a/2 \leq \xi \leq a/2$ . Действительно,

$$\begin{cases} \xi \geq -\frac{ma^2}{12(\mu hmf + m_1\xi_1)}, & \mu hmf + m_1\xi_1 > 0, \\ \xi \leq -\frac{ma^2}{12(\mu hmf + m_1\xi_1)}, & \mu hmf + m_1\xi_1 < 0. \end{cases}$$

Следовательно, если

$$\begin{cases} 6(\mu hmf + m_1\xi_1) > ma, & \mu hmf + m_1\xi_1 > 0, \\ 6(\mu hmf + m_1\xi_1) < -ma, & \mu hmf + m_1\xi_1 < 0, \end{cases}$$

то существует область значений  $\xi$ :

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} \leq \xi \leq -\frac{ma^2}{12(\mu hmf + m_1\xi_1)}, & \mu hmf + m_1\xi_1 > 0, \\ -\frac{ma^2}{12(\mu hmf + m_1\xi_1)} \leq \xi \leq \frac{a}{2}, & \mu hmf + m_1\xi_1 < 0, \end{cases}$$

в которой происходит отрыв. Для этих значений  $\xi$  следует принять  $n_A = 0$ . Заметим, что в силу вида уравнения движения (2.3), указанное обстоятельство не влияет на движение ползуна. Более того, параметры ползуна всегда можно подобрать таким образом, чтобы областей отрыва не было.

### 2.2.2. Гармонический закон управления движением точечной массы

Закон управления  $\xi_1(t)$  внутренней массой  $m_1$  должен удовлетворять, во-первых, ограничениям, связанным с длиной корпуса, а, во-вторых, условиям периодичности:

$$\xi_1(0) = \xi_1(T) = a_1, \quad \xi_1(\tau) = -a_1, \quad 0 < \tau < T, \quad 0 < a_1 \leq a, \quad (2.4)$$

где  $T$  — период относительного движения массы  $m_1$  внутри корпуса, а  $a_1$  — ее амплитуд, то есть  $-a_1 \leq \xi_1(t) \leq a_1$ .

Рассмотрим гармонический закон управления движением массы  $m_1$ , отвечающий выписанным условиям:

$$\xi_1(t) = a_1 \cos \omega t,$$

где  $\omega = 2\pi/T$  — частота колебаний массы  $m_1$ . Заметим, что параметр  $\tau$  в данном случае фиксирован и равен  $T/2$ . После переобозначения  $\dot{x}_O = v_O$ , уравнение движения (2.3) примет вид:

$$m\dot{v}_O = m_1 a_1 \omega^2 \cos \omega t - f F_\xi. \quad (2.5)$$

Второе слагаемое в правой части этого уравнения может принимать минимальное и максимальное значения  $\pm F_\xi$ , поэтому для преодоления силы трения покоя, действующей на корпус со стороны опорной плоскости, и начала его движения необходимо выполнение неравенства:

$$\omega > \omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{F_\xi}{m_1 a_1}}. \quad (2.6)$$

Далее будем предполагать, что это неравенство выполняется.

Рассмотрим движение корпуса на интервале времени  $0 < t < T$ , то есть на первом периоде движения подвижной массы. В начальный момент времени  $\dot{v}_O(0) > 0$ , следовательно в следующий момент времени корпус приобретет скорость  $v_O > 0$ , при этом  $f = 1$ .

Пусть  $t_{1+}$  и  $t_{1-}$  — моменты времени на интервале  $0 < t < T/2$ , при которых выполняется  $R_\xi = F_\xi$  и  $R_\xi = -F_\xi$  соответственно (рисунок 2.2). Тогда найдем:

$$t_{1+} = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad t_{1-} = \frac{1}{\omega} \left( \pi - \arccos \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right).$$

Заметим, что моменту времени  $t_{1+}$  соответствует локальный максимум скорости корпуса.

Далее, пусть  $t_1$  — момент времени, соответствующий остановке корпуса на первом полупериоде движения внутренней массы. Интегрируя выражение (2.5) при условии  $v_O(0) = v_O(t_1) = 0$ , получим неявную функцию  $t_1(\omega)$ :

$$\sin \omega t_1 = \frac{\omega_0^2}{\omega} t_1.$$

С учетом ограничения (2.6), ненулевое решение уравнения существует и единственно. Графики функций  $t_{1+}(\omega)$ ,  $t_{1-}(\omega)$  и  $t_1(\omega)$  представлены на рисунке 2.3.

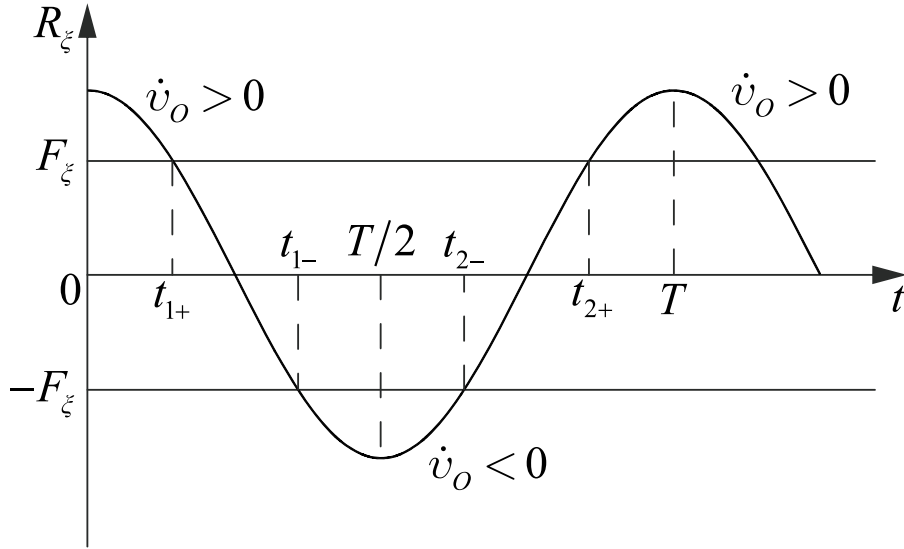


Рисунок 2.2. Моменты времени  $t_{1+}$ ,  $t_{1-}$ ,  $t_{2-}$  и  $t_{2+}$ , при которых выполняется  $R_\xi = \pm F_\xi$

Рассмотрим предельные значения. При  $\omega \rightarrow \omega_0 + 0$ :  $t_{1-} \rightarrow \pi/\omega$  и  $t_{1+} \rightarrow 0$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$ :  $t_{1-} \rightarrow \pi/(2\omega)$  и  $t_{1+} \rightarrow \pi/\omega$ . Следовательно, существует такое  $\omega_1$ , что внутри интервала  $\omega_0 < \omega < \omega_1$ :  $t_{1+}(\omega) < t_{1-}(\omega)$ .

Рассмотрим далее движение корпуса при условии, что  $\omega_0 < \omega < \omega_1$ , то есть  $t_{1+} < t_{1-}$ . Тогда в интервале времени  $t_{1+} < t < t_{1-}$  корпус находится в покое. По аналогии, пусть  $t_{2-}$  и  $t_{2+}$  — моменты времени при которых на втором полу-периоде движения подвижной массы, соответственно, выполняются равенства  $R_\xi = -F_\xi$  и  $R_\xi = F_\xi$  (рисунок 2.2):

$$t_{2-} = \frac{1}{\omega} \left( \pi + \arccos \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right), \quad t_{2+} = \frac{1}{\omega} \left( 2\pi - \arccos \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right),$$

а  $t_2$  — момент времени, соответствующий остановке корпуса на втором полупериоде движения массы. Тогда, интегрируя уравнение (2.5) в пределах  $t_{1-} \leq t \leq t_2$ , а также учитывая, что  $v_O(t_{1-}) = v_O(t_2) = 0$  и  $f = -1$ , получим выражение

$$\sin \omega t_2 + \frac{\omega_0^2}{\omega} t_2 = \sin \omega t_{1-} + \frac{\omega_0^2}{\omega} t_{1-}.$$

На рисунке 2.4 представлены графики функций  $t_{2+}(\omega)$ ,  $t_{2-}(\omega)$  и  $t_2(\omega)$ . Аналогично, существует частота  $\omega_2$ , такая что  $t_2(\omega) < t_{2+}(\omega)$ , если  $\omega_0 < \omega < \omega_2$ ,

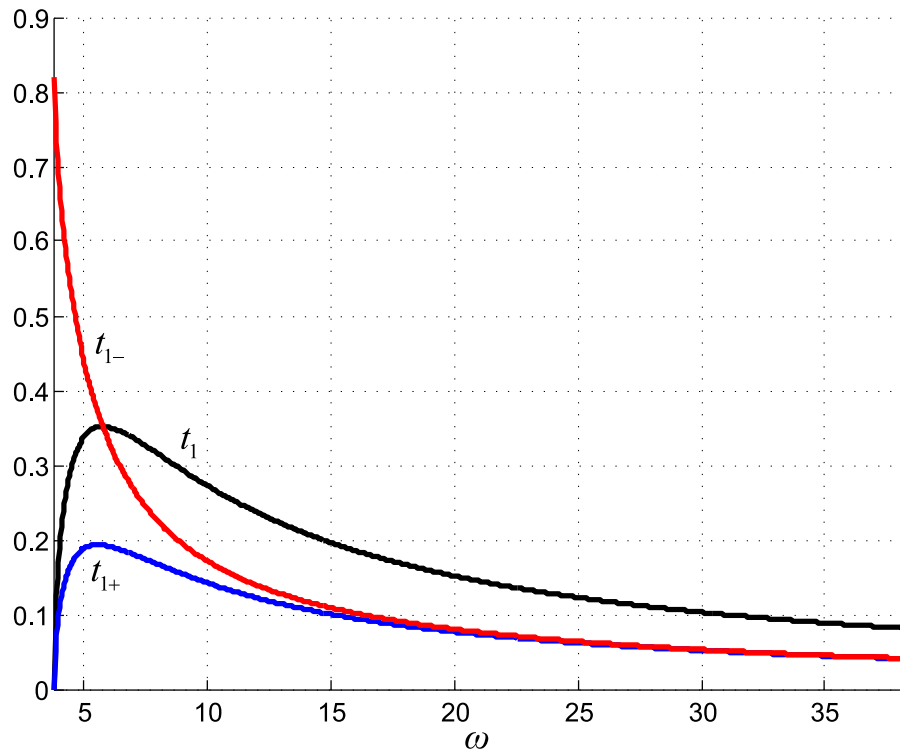


Рисунок 2.3. Графики функций: черный —  $t_1(\omega)$ , синий —  $t_{1+}(\omega)$ , красный —  $t_{1-}(\omega)$

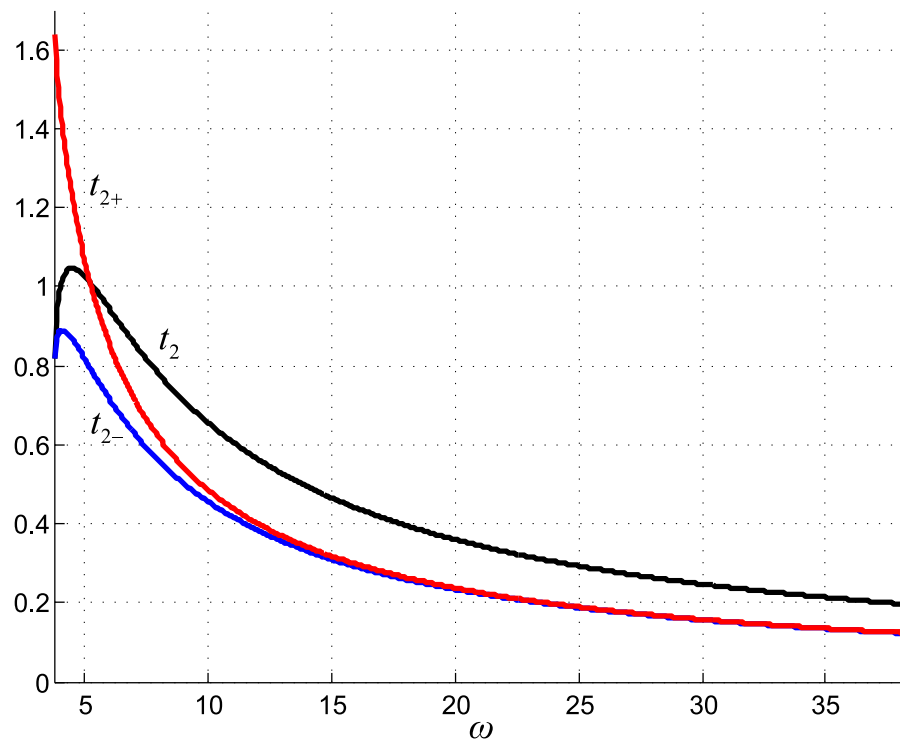


Рисунок 2.4. Графики функций: черный —  $t_2(\omega)$ , красный —  $t_{2+}(\omega)$ , синий —  $t_{2-}(\omega)$

причем  $\omega_2 < \omega_1$ . Другими словами, при указанных значениях  $\omega$  корпус будет покоиться на отрезке времени  $t_2 \leq t \leq t_{2+}$  и вновь начнет движение непосредственно после момента  $t_{2+}$  с нулевой начальной скоростью. Продолжая рассуждения, получим, что в моменты времени  $t_{2j-1-}$  и  $t_{2j+}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) скорость корпуса равна нулю. При этом правая часть уравнения (2.5) равна по модулю и чередуется по знаку на интервалах времени  $t_{2j-1-} < t < t_{2j-}$  и  $t_{2j+} < t < t_{2j+1+}$ , то есть корпус совершает периодические колебания.

Итак, подытоживая вышесказанное, возможны следующие картины движения корпуса в зависимости от частоты колебаний внутренней массы.

1) Если  $\omega \leq \omega_0$ , то корпус неподвижен.

2) Если  $\omega_0 < \omega < \omega_2$ , то на каждом периоде движения внутренней массы имеются два отрезка времени на которых корпус неподвижен. На отрезке времени  $0 \leq t \leq t_1$  координата корпуса достигает максимального значения

$$x_{O \max} = \frac{1}{2m} (2m_1 a_1 (1 - \cos \omega t_1) - F_\xi t_1^2).$$

На отрезке времени  $t_1 \leq t \leq t_{1-}$  корпус покоится. На отрезке  $t_{1-} \leq t \leq t_2$  координата корпуса достигает минимального значения

$$x_{O \min} = \frac{1}{2m} (2m_1 a_1 (1 + \cos \omega t_{1-} - \cos \omega t_1 - \cos \omega t_2) + F_\xi (t_2^2 - t_{1-}^2 + t_1^2) - 2(t_2 - t_{1-})(m_1 a_1 \omega \sin \omega t_{1-} + F_\xi t_{1-})).$$

Следовательно, корпус совершает колебания (рисунок 2.5) вокруг среднего положения  $\bar{x}_O = (x_{O \max} + x_{O \min})/2$ , а его координата  $x_O$  изменяется в диапазоне от  $x_{O \min}$  до  $x_{O \max}$ .

3) Если  $\omega_2 \leq \omega < \omega_1$ , то на первом периоде движения внутренней массы имеется единственный отрезок времени на котором корпус неподвижен. По прошествии этого периода движение происходит аналогично пункту 4).

4) Если  $\omega \geq \omega_1$ , то корпус движется на любом отрезке времени (рисунок 2.6). Пусть  $t_0 = 0$ , а  $t_j$  — моменты времени, в которые скорость корпуса равна нулю ( $j = 1, 2, \dots$ ). Тогда интегрируя уравнение (2.5) на отрезках  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ ,

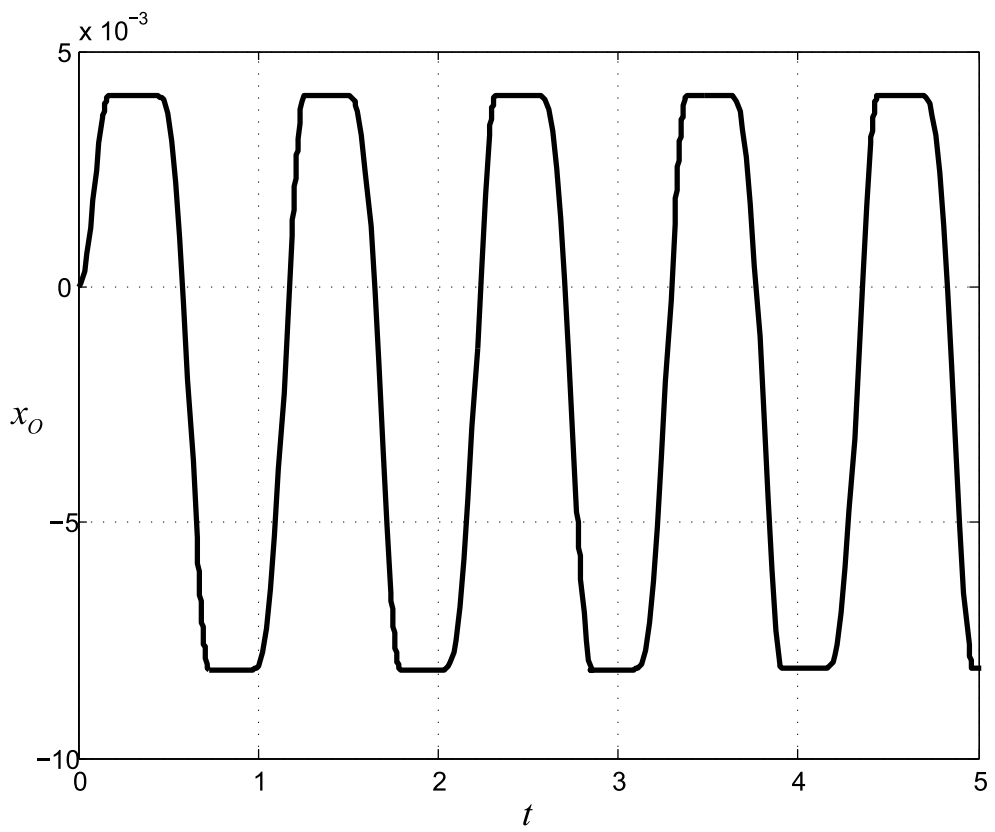


Рисунок 2.5. График  $x_O(t)$  при  $\omega_0 < \omega < \omega_2$

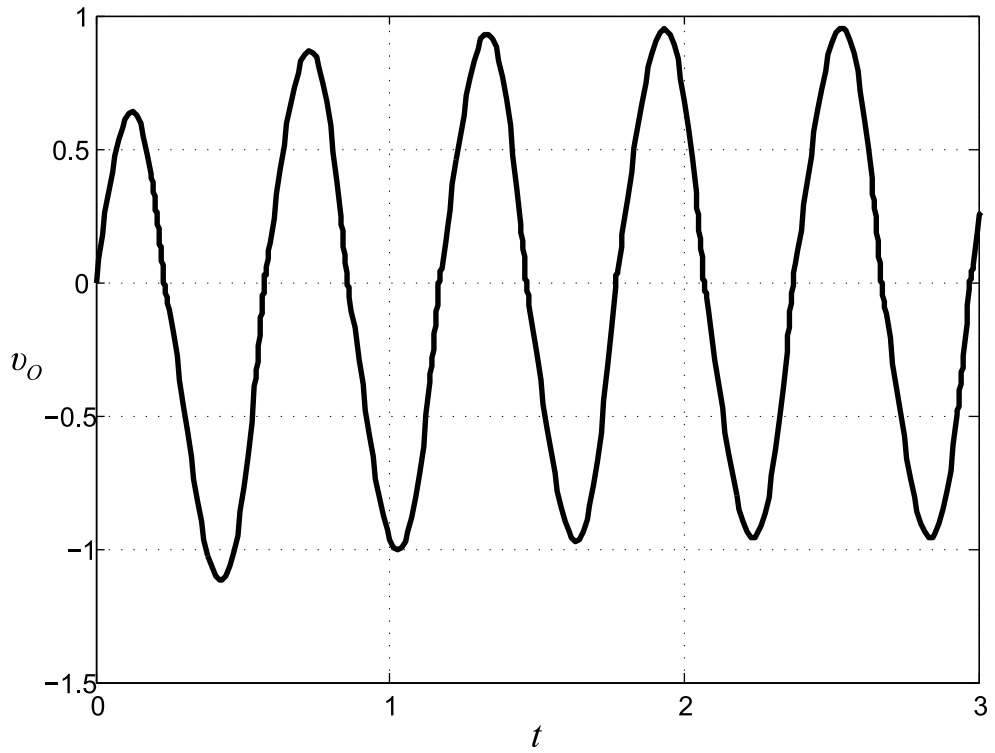


Рисунок 2.6. График  $v_O(t)$  при  $\omega \geq \omega_1$

получим скорость:

$$v_O = \frac{m_1 a_1 \omega (\sin \omega t - \sin \omega t_j) - (-1)^j F_\xi (t - t_j)}{m}, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}$$

и координату корпуса в произвольный момент времени:

$$x_O = \frac{x_{Oj} - m_1 a_1 \cos \omega t - m_1 a_1 \omega t \sin \omega t_j - (-1)^j \frac{F_\xi t}{2} (t - 2t_j)}{m}, \quad t_j < t \leq t_{j+1},$$

где константа  $x_{Oj}$  вычисляется из условия непрерывности координаты  $x_O$ , выражаемого формулой

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (x_O(t_j - \Delta t) - x_O(t_j + \Delta t)) = 0.$$

Отсюда получим рекуррентное соотношение:

$$x_{Oj} = x_{Oj-1} + m_1 a_1 \omega t_j (\sin \omega t_j - \sin \omega t_{j-1}) + (-1)^{j-1} F_\xi t_j t_{j-1}.$$

Причем из начального условия  $x_O(0) = 0$  следует  $x_{O0} = m_1 a_1$ .

### 2.2.3. Кусочно-квадратичный закон управления смещением точечной массы

Найдем такую функцию смещения  $\xi_1(t)$  внутренней массы, чтобы в моменты времени  $kT$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) происходило скачкообразное изменение ее относительной скорости  $\dot{\xi}_1(t)$ . При таком выборе функции  $\xi_1(t)$  в системе будет происходить удар, в результате которого скорость корпуса будет изменяться скачкообразно. Такой закон управления окажется удобным для использования в главе 4.

Будем искать относительную скорость подвижной массы как линейную функцию времени на полуинтервале  $0 < t \leq T$ . Тогда функция  $\xi_1(t)$  на этом полуинтервале имеет квадратичный вид:

$$\xi_1(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma, \quad \dot{\xi}_1(t) = 2\alpha t + \beta, \quad (2.7)$$



где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — коэффициенты, определяемые из граничных условий:

$$\xi_1(0) = \xi_1(T) = a_1, \quad \xi_1\left(\frac{T}{2}\right) = b_1,$$

где  $a_1$  и  $b_1$  — границы, в которых перемещается внутренняя масса, причем  $a_1 > b_1$ . Подставляя эти граничные условия в первое выражение (2.7), получим систему

$$\gamma = a_1, \quad \alpha T^2 + \beta T + a_1 = a_1, \quad \alpha \frac{T^2}{4} + \beta \frac{T}{2} + a_1 = b_1,$$

из которой находятся коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Таким образом, исходная функция  $\xi_1(t)$  (рисунок 2.7):

$$\xi_1(t) = \frac{4(a_1 - b_1)}{T^2} t^2 - \frac{4(a_1 - b_1)}{T} t + a_1. \quad (2.8)$$

Тогда относительная скорость подвижной массы:

$$\dot{\xi}_1(t) = \frac{8(a_1 - b_1)}{T^2} t - \frac{4(a_1 - b_1)}{T},$$

а ее относительное ускорение выражается через дельта-функцию Дирака:

$$\ddot{\xi}_1(t) = \frac{8(a_1 - b_1)}{T^2} - \frac{8(a_1 - b_1)}{T} \left( \frac{\delta(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - kT) \right).$$

Условие начала движения корпуса

$$\left| m_1 \ddot{\xi}_1 \right| > F_\xi \quad (2.9)$$

выполняется в моменты времени  $kT$  при любых значениях параметров ползуна и закона управления подвижной массой. Используя уравнение движения (2.3), вычислим приращение скорости  $\Delta v_O$ , получаемые корпусом в эти моменты времени:

$$\Delta v_O = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (v_O(kT + \Delta t) - v_O(kT - \Delta t)) = -\frac{m_1}{m} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{kT - \Delta t}^{kT + \Delta t} \ddot{\xi}_1(t) dt,$$

$$\Delta v_O = \frac{4(a_1 - b_1) m_1}{mT}, \quad k = 0; \quad \Delta v_O = \frac{8(a_1 - b_1) m_1}{mT}, \quad k = 1, 2, \dots$$

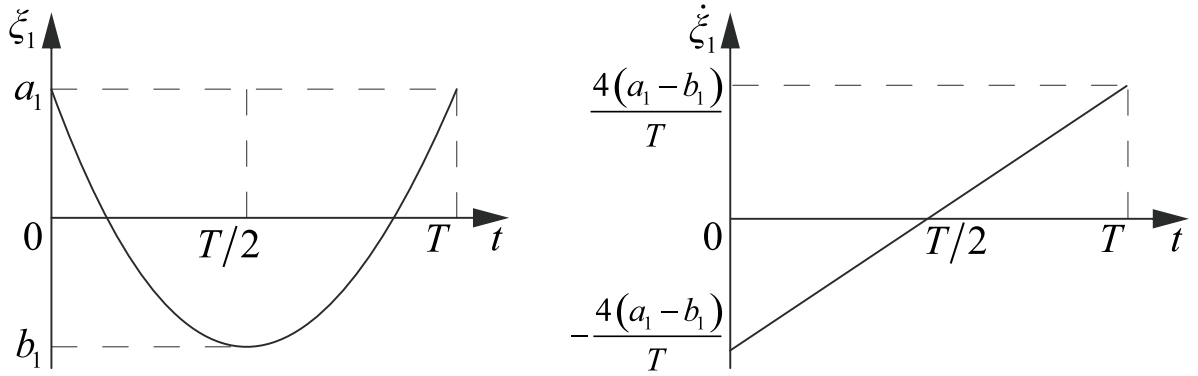


Рисунок 2.7. Кусочно-квадратичная функция  $\xi_1(t)$  и кусочно-линейная функция  $\dot{\xi}_1(t)$

Пусть  $t_1$  — время, за которое происходит остановка корпуса (в результате действия сил трения со стороны опорной плоскости) после приобретенного в момент  $kT$  импульса. Величина  $t_1$  найдется путем интегрирования уравнения (2.3) в пределах скорости от  $\Delta v_O$  до 0. При этом возьмем значение  $\Delta v_O$  соответствующее  $k = 1, 2, \dots$ , а также предполагаем, что непосредственно до получения приращения скорости  $\Delta v_O$  корпус покоился:

$$m \left( 0 - \frac{8(a_1 - b_1) m_1}{mT} \right) = \left( -\frac{8(a_1 - b_1) m_1}{T^2} - \mu m g \right) t_1.$$

Это уравнение имеет решение:

$$t_1 = \frac{8(a_1 - b_1) m_1}{8(a_1 - b_1) m_1 + \mu m g T^2} T.$$

Отсюда немедленно следует, что  $t_1 < T$ , так как числитель этой формулы всегда меньше знаменателя, что подтверждает верность сделанного предположения. Исключением является случай гладкой плоскости, когда  $\mu = 0$  и  $t_1 = T$ . Заметим, что неравенство  $t_1 < T$  будет тем более выполняться для момента времени 0, так как приобретаемая в этот момент скорость вдвое меньше, чем в последующие моменты  $kT$ .

Подставим функцию  $\ddot{\xi}_1(t)$  в формулу (2.9). Если неравенство

$$T \geq 2 \sqrt{\frac{2(a_1 - b_1) m_1}{\mu m g}}$$

выполняется, то условие (2.9) будет выполняться только в моменты времени  $kT$ . Отсюда следует, что при выполнении указанного неравенства, подвижная масса вернется в исходную позицию внутри полости, однако обратного передвижения корпуса не произойдет. Если же это неравенство не выполняется, то на каждом периоде движения подвижной массы будут существовать отрезки времени, на которых корпус будет совершать попятное движение.

## 2.3. Случай двух точечных масс, двигающихся в вертикальной плоскости симметрии ползуна

### 2.3.1. Описание системы

Разместим внутри корпуса две материальные точки массами  $m_1$  и  $m_2$  предполагая, что точка массы  $m_1$  может перемещаться внутри корпуса по горизонтали, как в разделе 2.2, а точка массы  $m_2$  — по вертикали (рисунок 2.8). Тогда их радиус-векторы:

$$\mathbf{r}_{O1} = \xi_1(t)\mathbf{e}_\xi, \quad \mathbf{r}_{O2} = \zeta_2(t)\mathbf{k}.$$

Аналогично случаю, описанному в разделе 2.2, условие  $\eta_2 \equiv 0$  существенно, так как в противном случае возможен поворот корпуса, а  $\xi_2 \equiv 0$  принимается из соображений удобства вычислений.

Принципиальное отличие такой системы от рассмотренной в предыдущем разделе состоит в том, что, согласно формуле (1.23), величина  $\lambda_0$  изменяется в зависимости от движения массы  $m_2$ :

$$\lambda_0 = \frac{mg + m_2\ddot{\zeta}_2}{ab}, \quad m = m_0 + m_1 + m_2.$$

Выражение для функции  $R_\xi$  останется прежним, а функция  $F_\xi$  примет вид:

$$F_\xi = \mu \left( mg + m_2\ddot{\zeta}_2 \right).$$

Следовательно, максимально возможная величина силы трения, действующая со стороны плоскости на корпус, также зависит от относительного движения

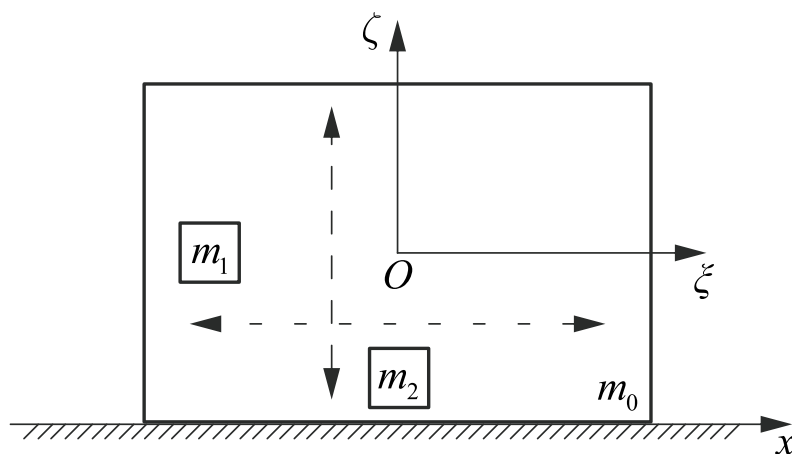


Рисунок 2.8. Ползун с точечными массами  $m_1$  и  $m_2$ , двигающимися вдоль осей  $O\xi$  и  $O\zeta$  соответственно

массы  $m_2$ . Условие неразрывности контакта корпуса и плоскости выражается неравенством:

$$m_2 \ddot{\zeta}_2 \geq -mg.$$

Из этого неравенства следует, что относительная скорость массы  $m_2$  не может уменьшаться скачкообразно, так как в этом случае будет существовать момент времени, в который величина относительного ускорения  $\ddot{\zeta}_2$  равна минус бесконечности.

### 2.3.2. Случай маятника

Рассмотрим далее важный подслучай, когда массы точек равны, а сами они движутся по гармоническому закону со сдвигом фазы на  $\pi/2$ :

$$m_1 = m_2, \quad \xi_1 = a_1 \sin \alpha, \quad \zeta_2 = -a_1 \cos \alpha,$$

где  $a_1$  — амплитуда колебаний,  $\alpha = \alpha(t)$  — некоторая скалярная функция времени. Две материальные точки одинаковой массы, двигающиеся описанным выше образом, эквивалентны расположенному в центре масс корпуса эксцентрику. В случае плоскопараллельного движения корпуса эксцентрик можно заменить маятником, состоящим из невесомого стержня вращающегося в вертикальной плоскости и точечной массы на незакрепленном конце.

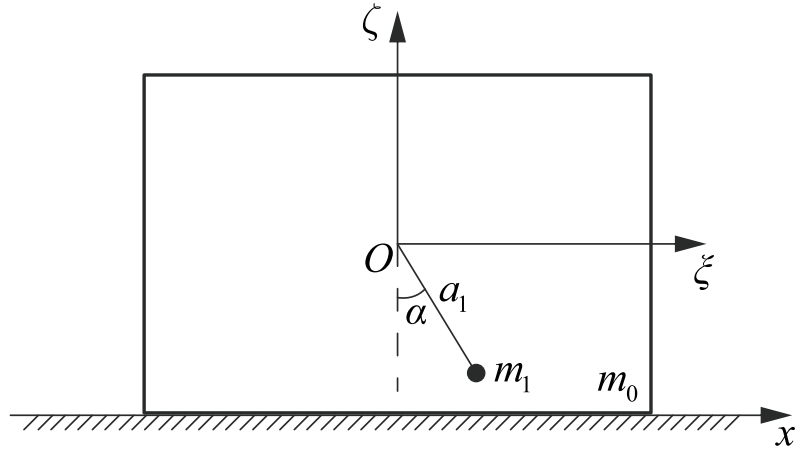


Рисунок 2.9. Ползун с маятником, движущимся в вертикальной плоскости симметрии корпуса

Действительно, вычислим длину и массу этого маятника. Центр масс указанных двух точек в системе  $O\xi\eta\zeta$ :

$$\mathbf{r}_{O12} = \frac{m_1\xi_1\mathbf{e}_\xi + m_1\zeta_2\mathbf{k}}{2m_1} = \frac{a_1}{2} (\sin\alpha\mathbf{e}_\xi - \cos\alpha\mathbf{k}).$$

Отсюда следует, что

$$r_{O12} = \frac{a_1}{2} = \text{const.}$$

Таким образом, движение двух точек внутри корпуса эквивалентно математическому маятнику длины  $a_1/2$  и массы  $2m_1$ . Механическая система, состоящая из корпуса,двигающегося поступательно по шероховатой плоскости под воздействием маятника, расположенного внутри, рассматривалась ранее в статьях [34,35,39]. В указанных источниках изучалась динамика корпуса, в предположении, что маятник движется с постоянной угловой скоростью. Попробуем здесь отойти от этого ограничения, считая, что маятник управляется некоторым моментом сил  $M_1$ .

Запишем уравнения движения корпуса и маятника, полагая при этом, что маятник имеет длину  $a_1$  и массу  $m_1$ , а  $\alpha = \alpha(t)$  — угол, который он составляет с вертикалью (рисунок 2.9). Функции, входящие в правые части уравнения (2.3)

выражаются через  $\alpha$ ,  $\dot{\alpha}$  и  $\ddot{\alpha}$ :

$$R_\xi = -m_1\ddot{\xi}_1 = m_1a_1 (\dot{\alpha}^2 \sin \alpha - \ddot{\alpha} \cos \alpha),$$

$$F_\xi = \mu (mg + m_1\ddot{\zeta}_2) = \mu (mg + m_1a_1 (\dot{\alpha}^2 \cos \alpha + \ddot{\alpha} \sin \alpha)).$$

Подставляя эти выражения в формулу (2.3), запишем уравнения движения корпуса:

$$m\ddot{x}_O = m_1a_1 (\dot{\alpha}^2 \sin \alpha - \ddot{\alpha} \cos \alpha) - f\mu (mg + m_1a_1 (\dot{\alpha}^2 \cos \alpha + \ddot{\alpha} \sin \alpha)),$$

и маятника:

$$m_1a_1^2\ddot{\alpha} = M_1 - m_1a_1g \sin \alpha - m_1a_1\ddot{x}_O \cos \alpha,$$

где  $m_1a_1^2$  — момент инерции маятника относительно оси, перпендикулярной плоскости его движения и проходящей через точку  $O$ ,  $-m_1a_1g \sin \alpha$  и  $-m_1a_1\ddot{x}_O \cos \alpha$  — моменты силы тяжести и переносной силы инерции, действующие на маятник, соответственно. Переобозначая  $\dot{x}_O = v_O$ ,  $\dot{\alpha} = \omega$  и перенося все слагаемые содержащие  $\dot{v}_O$  и  $\dot{\omega}$  в левую часть, получим систему, состоящую из двух алгебраических линейных уравнений относительно  $\dot{v}_O$  и  $\dot{\omega}$ :

$$m\dot{v}_O + m_1a_1 (\cos \alpha + f\mu \sin \alpha) \dot{\omega} = m_1a_1\omega^2 (\sin \alpha - f\mu \cos \alpha) - f\mu mg,$$

$$m_1a_1 \cos \alpha \dot{v}_O + m_1a_1^2 \dot{\omega} = M_1 - m_1a_1g \sin \alpha.$$

Решение этой системы можно представить в виде

$$\dot{v}_O = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \dot{\omega} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (2.10)$$

где

$$\Delta = mm_1a_1^2 - m_1^2a_1^2 \cos \alpha (\cos \alpha + f\mu \sin \alpha),$$

$$\Delta_1 = m_1a_1^2 (m_1a_1\omega^2 (\sin \alpha - f\mu \cos \alpha) - f\mu mg) -$$

$$-m_1a_1 (\cos \alpha + f\mu \sin \alpha) (M_1 - m_1a_1g \sin \alpha).$$

$$\Delta_2 = m (M_1 - m_1a_1g \sin \alpha) - m_1a_1 \cos \alpha (m_1a_1\omega^2 (\sin \alpha - f\mu \cos \alpha) - f\mu mg).$$

Для получения функций  $v_O$  и  $\omega$  выражения (2.10) численно интегрировались. Изначально интегрирование проводилось исходя из того, что момент  $M_1$  постоянен. Такое предположение при малых величинах  $M_1$  приводило к тому, что корпус и маятник оставались неподвижными с течением времени, а при больших — к уходу скорости корпуса и угловой скорости маятника на бесконечность в результате неограниченного увеличения энергии системы. Для определения зависимости управляющего момента от угловой скорости маятника был сконструирован экспериментальный робот с эксцентриком, вращаемым благодаря двигателю постоянного тока. Было учтено, что с хорошей точностью электродвигатели постоянного тока имеют линейную зависимость момента от угловой скорости [68]:

$$M_1 = A|\omega| - B, \quad A, B = \text{const} > 0. \quad (2.11)$$

Параметры  $A$  и  $B$  определялись таким образом, чтобы минимизировать расхождение траектории движения корпуса и маятника полученного путем интегрирования системы (2.10) с экспериментальными данными.

### 2.3.3. Экспериментальный робот

С целью экспериментального исследования динамики системы, состоящей из корпуса и маятника, доцентом кафедры теоретической механики Московского физико-технического института С.В. Семендяевым был сконструирован экспериментальный робот. Устройство представляет из себя прямоугольную платформу, опирающуюся на плоскость в четырех точках, составляющих вершины прямоугольника, и два тяжелых диска, способные вращаться вокруг осей, проходящих перпендикулярно их плоскостям, благодаря установленным двигателям постоянного тока (рисунок 2.10). Оси вращения дисков не проходят через их центр масс, благодаря чему их можно рассматривать как эксцентрики. Диск, плоскость которого компланарна большему ребру основания в результате своего вращения приводит корпус в поступательное движение. Диск, плоскость кото-

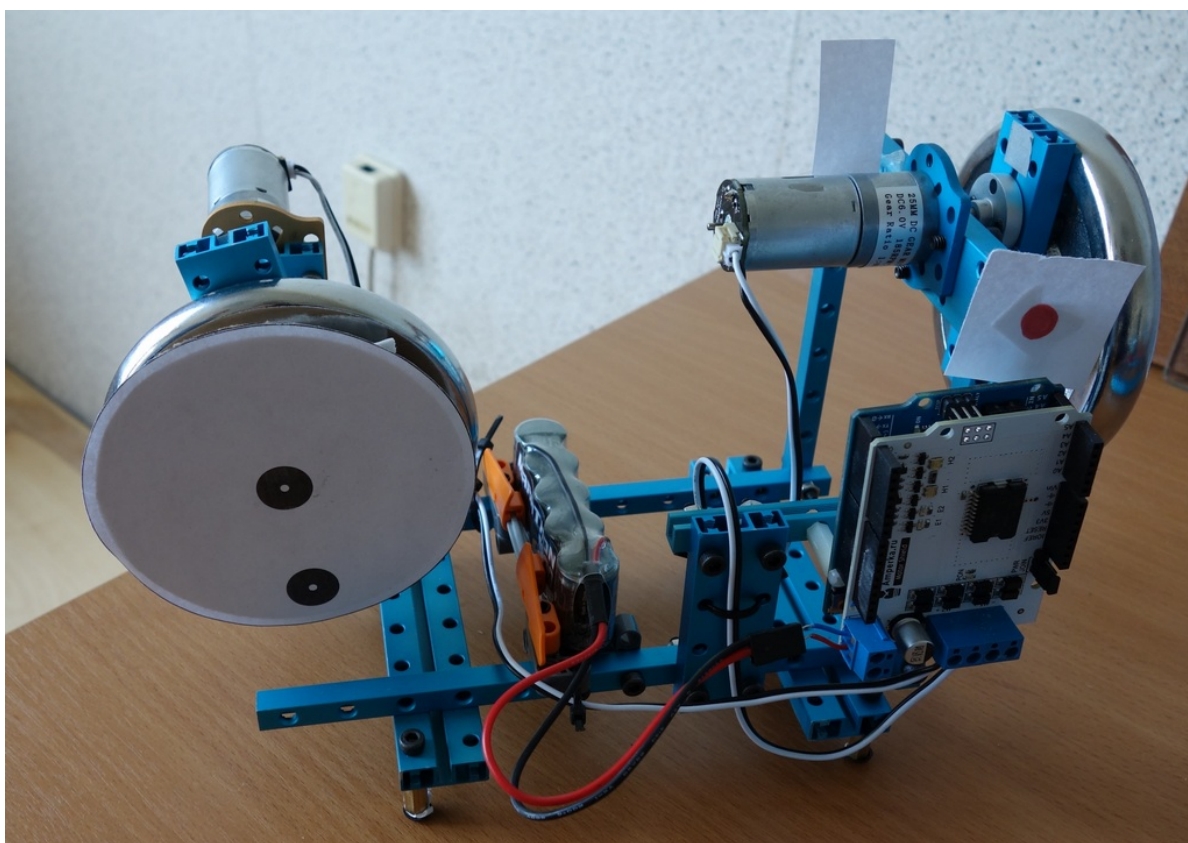


Рисунок 2.10. Экспериментальный робот, состоящий из платформы и двух эксцентров

рого перпендикулярна большему ребру основания способен приводить корпус во вращательное движение (в описываемом эксперименте этот диск не использовался). Робот имеет следующие характеристики: общая масса — 1825 г, масса диска — 500 г, эксцентриситет продольного диска — 3.5 см, продольное и поперечное расстояния между точками контакта с поверхностью — 13 см и 11 см соответственно.

Для снятия зависимости продольного смещения корпуса и угла поворота эксцентрика от времени С.В. Семеняевым и студентом факультета аэрофизики и космических исследований МФТИ А.А. Цыгановым был проведен эксперимент. Робот был установлен на горизонтальной поверхности из ламинированного ДСтП (коэффициент трения 0.3). За ним располагался лист в черно-белую вертикальную полоску, позволяющий считывать смещение робота, а также секундомер (рисунок 2.11). Движение робота, реализующееся под действием вра-



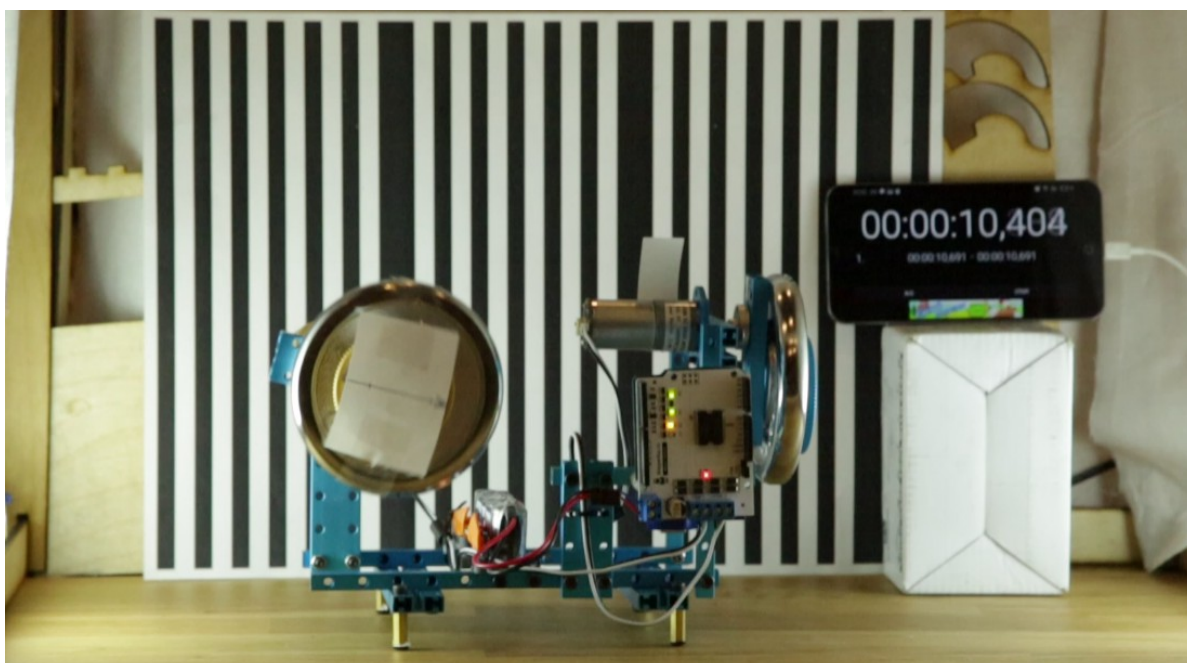


Рисунок 2.11. Проведение эксперимента

щающегося эксцентрика, снималось на видеокамеру. После этого в программе покадровой обработке видео Adobe Premiere производилось отслеживание трех меток, одна из которых располагалась на корпусе, а две других — на эксцентрике, что позволяло определять смещение корпуса и угол поворота эксцентрика.

На рисунке 2.12 представлен график (черная линия) зависимости координаты корпуса от времени, полученный в результате проведения эксперимента. На основании графика можно выделить качественный характер движения корпуса: движение быстро выходит на периодический режим, в котором за один период происходит прямое и попятное перемещения, а также остановка на некотором интервале времени. На рисунке 2.13 изображен график (черная линия) зависимости количества оборотов эксцентрика от времени, полученный в результате проведения эксперимента. Можно сделать вывод, что зависимость угла поворота эксцентрика от времени можно аппроксимировать прямой линией лишь в некотором приближении.

Параметры системы, использующиеся в уравнениях (2.10) брались в соответствии с измеренными у робота. Параметры  $A$  и  $B$  формулы (2.11) выбирались таким образом, чтобы минимизировать разницу между модельными и

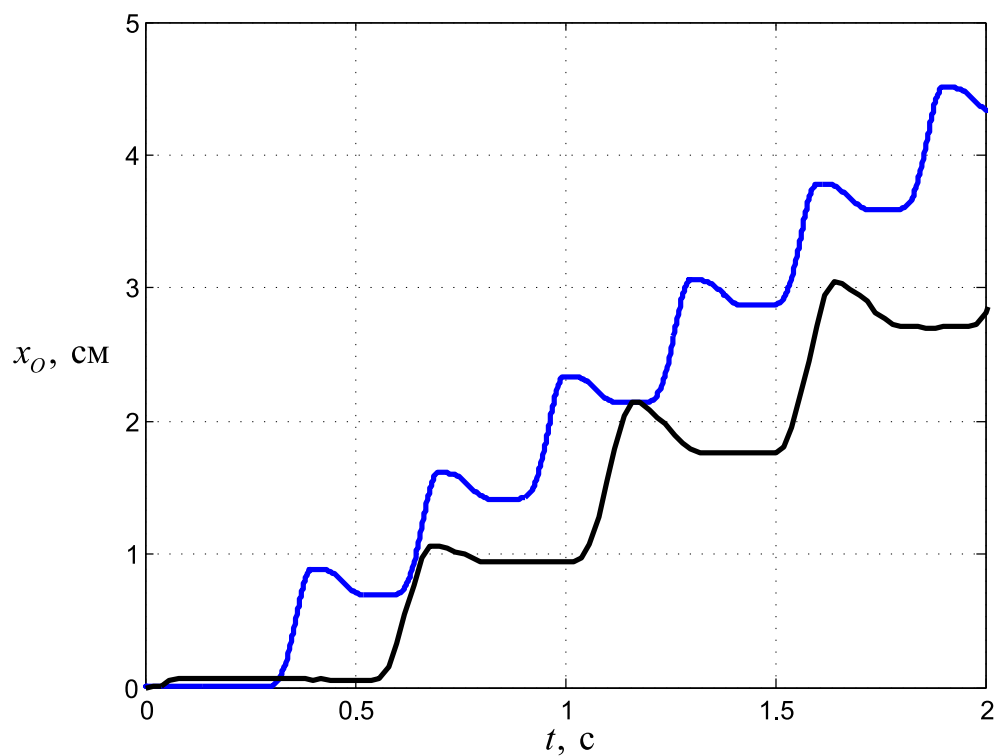


Рисунок 2.12. Зависимость координаты корпуса ползуна от времени: черная линия — эксперимент, синяя линия — модель

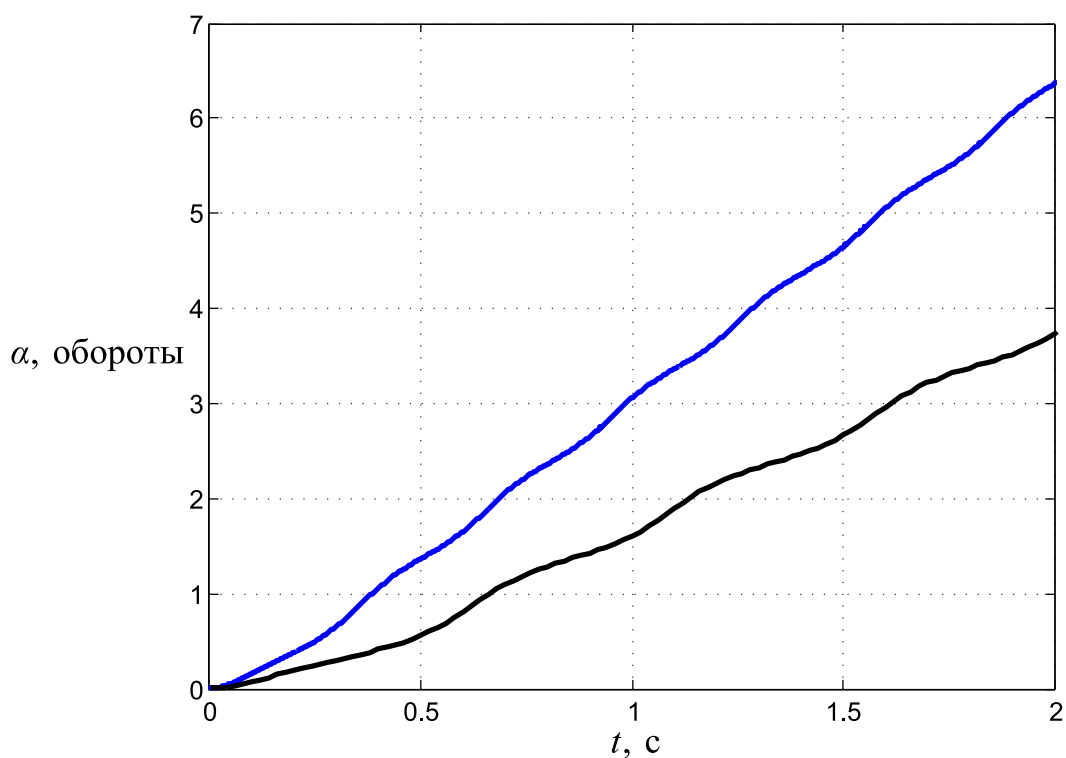


Рисунок 2.13. Зависимость количества оборотов эксцентрика от времени: черная линия — эксперимент, синяя линия — модель

экспериментальными данными. Результаты представлены на рисунках 2.12 и 2.13 (синие линии). Можно сделать вывод о качественном согласии модели и эксперимента. Количественное расхождение может быть объяснено несоответствием модели экспериментальному роботу: модель подразумевает прямоугольную область контакта корпуса и плоскости, в то время как робот опирается на плоскость четырьмя ножками; масса реального робота не распределена равномерно по корпусу, как это предполагается в модели и так далее.

## 2.4. Заключение к главе 2

В главе 2 рассмотрено поступательное движение полого твердого тела в результате перемещений внутренних масс, найдено соответствующее уравнение движения. Определены достаточные условия, налагаемые на конфигурацию и перемещения внутренних масс, при которых корпус движется поступательно вдоль продольной оси симметрии, если только сила трения покоя корпуса будет преодолена.

В качестве простейшего примера конфигурации подвижных масс рассмотрена материальная точка,двигающаяся вдоль продольной оси симметрии корпуса по двум законам: гармоническому и кусочно-квадратичному. Для случая гармонического закона, движение корпуса проанализировано в зависимости от частоты колебаний точки. При этом траектория корпуса получена в аналитическом виде через рекуррентное соотношение. Для кусочно-квадратичного закона управления смещением точки установлено, что определяющее влияние на динамику корпуса оказывает удар, происходящий в тот момент времени, когда относительная скорость точечной массы изменяется скачкообразно. Наличие удара обеспечивает корпусу мгновенное приращение скорости при любых параметрах системы и закона управления точечной массой. Определено ограничение на период движения точки, при котором попятное движение корпуса отсутствует. Кусочно-квадратичный закон управления будет далее использован в главе 4.

Второй пример конфигурации подвижных масс — две материальные точки,двигающиеся в вертикальной плоскости симметрии корпуса так, что одна из них движется вдоль горизонтали, а вторая — вдоль вертикали. Основное внимание уделено важному случаю, в котором точки движутся по гармоническому закону со сдвигом фаз на  $\pi/2$ . Две точки,двигающиеся таким образом, эквивалентны маятнику, расположенному внутри корпуса и вращающемуся в вертикальной плоскости его симметрии. Предполагалось, что движение маятника не задано кинематически. Вместо этого к нему приложен управляющий момент сил, представляющий собой линейную функцию от угловой скорости маятника. Получены уравнения движения системы. Сконструированный экспериментальный робот позволил провести натурные испытания и определить параметры управляющего момента. Численное интегрирование уравнений движения корпуса и маятника показали качественное согласие с экспериментальными данными.

### 3. Поворот мобильного устройства вокруг центра масс

В главе исследуется поворот мобильного устройства вокруг своего неподвижного центра масс на шероховатой плоскости, в результате перемещения внутренних масс. Как и в предыдущей главе, используются уравнения, полученные в главе 1.

#### 3.1. Уравнения движения

Покажем, что для реализации вращательного движения корпуса вокруг своего центра масс достаточно, чтобы распределение внутренних масс удовлетворяло условиям:

$$\sum_{i=1}^s m_i \xi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^s m_i \eta_i = 0, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \dots = \zeta_s, \quad (3.1)$$

если только корпус преодолевает силу трения покоя. При этом считаем, что в начальный момент времени корпус покоился. Из первых двух условий следует  $R_\xi = R_\eta = 0$ . Тогда уравнения движения (1.35) примут вид

$$m\ddot{x}_O = -fF_\xi, \quad m\ddot{y}_O = -fF_\eta, \quad J\ddot{\varphi} = M_\varphi - fF_\varphi.$$

Предположим, что  $M_\varphi \neq 0$  (в противном случае корпус будет оставаться в покое сколь угодно долго). Если корпус находится в покое, то в соответствии с условиями (1.36) должно выполняться:

$$fF_\xi = fF_\eta = 0, \quad fF_\varphi = M_\varphi.$$

Эти равенства имеют место, если

$$f_\xi = -f \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad f_\eta = f \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}. \quad (3.2)$$

Действительно ( $j = \xi, \eta$ ):

$$F_j = \mu f^{-1} \iint n_A f_j ds = \mu f^{-1} \iint (\lambda_0 f_j + \lambda_\xi \xi f_j + \lambda_\eta \eta f_j) ds = 0.$$

Первое слагаемое в скобках равно нулю в силу нечетности подынтегральной функции  $f_j$ . Остается показать, что  $\lambda_\xi = \lambda_\eta = 0$ .

Согласно (3.2) функции  $\psi_j$  будут нечетными, следовательно  $a_{\xi 0} = a_{\eta 0} = 0$ .

Из условий (3.1) находим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\xi i} &= g \sum_{i=1}^s m_i \eta_i + \ddot{\zeta}_i \sum_{i=1}^s m_i \eta_i - \zeta_i \sum_{i=1}^s m_i \ddot{\eta}_i = 0, \\ \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\eta i} &= -g \sum_{i=1}^s m_i \xi_i + \zeta_i \sum_{i=1}^s m_i \ddot{\xi}_i - \ddot{\zeta}_i \sum_{i=1}^s m_i \xi_i = 0. \end{aligned}$$

Знаменатель в формулах (1.27) не равен нулю:

$$\begin{aligned} a_{\xi\xi} a_{\eta\eta} &= -(\mu h)^2 \iint f_\eta \xi ds \iint f_\xi \eta ds = \\ &= (\mu h f)^2 \iint \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} ds \iint \frac{\eta^2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} ds > 0, \\ a_{\xi\eta} a_{\eta\xi} &= \left( \frac{ab^3}{12} - \mu h \iint f_\eta \eta ds \right) \left( -\frac{a^3 b}{12} + \mu h \iint f_\xi \xi ds \right) = -\frac{a^4 b^4}{144} < 0, \end{aligned}$$

откуда получаем неравенство

$$a_{\xi\xi} a_{\eta\eta} - a_{\xi\eta} a_{\eta\xi} > 0.$$

Следовательно  $\lambda_\xi = \lambda_\eta = 0$ , а значит условия равновесия корпуса выполняются до тех пор, пока  $|f| < 1$ . В момент достижения значения  $|f| = 1$  корпус находится в состоянии предельного равновесия, после чего начинается движение и тогда  $\dot{\varphi} \neq 0$ . Используя (1.12), (1.34) и первые два условия (3.1), найдем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s m_i \mathbf{w}_i^e \cdot \mathbf{e}_\xi &= -\ddot{\varphi} \sum_{i=1}^s m_i \eta_i - \dot{\varphi}^2 \sum_{i=1}^s m_i \xi_i = 0, \\ \sum_{i=1}^s m_i \mathbf{w}_i^c \cdot \mathbf{e}_\xi &= -2\dot{\varphi} \sum_{i=1}^s m_i \dot{\eta}_i = 0, \\ \sum_{i=1}^s m_i \mathbf{w}_i^e \cdot \mathbf{e}_\eta &= \ddot{\varphi} \sum_{i=1}^s m_i \xi_i - \dot{\varphi}^2 \sum_{i=1}^s m_i \eta_i = 0, \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^s m_i \mathbf{w}_i^c \cdot \mathbf{e}_\eta = 2\dot{\varphi} \sum_{i=1}^s m_i \dot{\xi}_i = 0.$$

Значит вновь  $R_\xi = R_\eta = 0$ . Из этих же равенств немедленно следует

$$\sum_{i=1}^s m_i \chi_{\xi i} = \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\eta i} = 0,$$

а значит  $F_j = 0$  при  $\dot{\varphi} \neq 0$ . Все остальные рассуждения остаются прежними для случая  $\dot{\varphi} \neq 0$ , следовательно точка  $O$  останется неподвижной сколь угодно долго, а значит при выбранных начальных условиях движение корпуса одномерно и описывается третьим уравнением системы (1.35).

В рамках выбранной модели (1.19) и при условиях (3.1) получаем равномерное распределение нормальных напряжений в области контакта:

$$n_A = \lambda_0,$$

в следствие чего выражение для функции  $F_\varphi$  можно упростить:

$$F_\varphi = \mu \lambda_0 \iint \frac{\xi^2 + \eta^2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} ds = \mu \lambda_0 \iint \sqrt{\xi^2 + \eta^2} ds.$$

Интеграл в правой части этой формулы вычисляется:

$$\iint \sqrt{\xi^2 + \eta^2} ds = \frac{1}{24} \left( 4ab\sqrt{a^2 + b^2} + a^3 \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{\sqrt{a^2 + b^2} - b} + b^3 \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \right),$$

однако ввиду массивности выражения не будем подставлять его в исходное уравнение.

В силу того, что  $v_O = 0$ , модуль скорости произвольной точки  $A$  основания корпуса определяется по формуле:

$$v_A = |\dot{\varphi}| \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Следовательно, условие  $v_A \neq 0$ , эквивалентно условию  $\dot{\varphi} \neq 0$  (не считая неподвижной точки  $O$ ). Тогда, по аналогии с прямолинейным движением, имеем

$$J\ddot{\varphi} = M_\varphi - fF_\varphi, \quad f = \begin{cases} \dot{\varphi}/|\dot{\varphi}|, & \dot{\varphi} \neq 0, \\ M_\varphi/F_\varphi, & \dot{\varphi} = 0, |M_\varphi| \leq F_\varphi, \\ M_\varphi/|M_\varphi|, & \dot{\varphi} = 0, |M_\varphi| > F_\varphi, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$M_\varphi = - \sum_{i=1}^s m_i (\mathbf{r}_{Oi} \times (\mathbf{w}_i^r + \mathbf{w}_i^c)) \cdot \mathbf{k}, \quad F_\varphi = \mu\lambda_0 \iint \sqrt{\xi^2 + \eta^2} ds.$$

Остается определить функцию  $M_\varphi$ , то есть задать некоторую конфигурацию внутренних масс, подчиняющуюся условиям (3.1) и закон их относительного движения.

## 3.2. Случай диска с вертикальной осью вращения

### 3.2.1. Описание системы

Разместим внутри корпуса однородный диск массы  $m_d$  и радиусом  $d$  таким образом, чтобы центр диска совпадал с центром корпуса, а его ось была вертикальна (рисунок 3.1). Пусть диск может вращаться вокруг своей оси благодаря наличию некоторого двигателя. Найдем момент  $M_\varphi$ , который получается в результате его ускоренного вращения. Для этого вычислим все слагаемые входящие в формулу (1.31), учитывая при этом, что радиус-векторы точек диска:

$$\mathbf{r}_{Oi} = \xi_i \mathbf{e}_\xi + \eta_i \mathbf{e}_\eta, \quad i = 1, \dots, s.$$

Пусть  $\boldsymbol{\omega}_d = \omega_d \mathbf{k}$  — угловая скорость диска относительно корпуса. Момент осестремительных и кориолисовых сил инерции каждой точки в случае плоского движения равны нулю:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{w}_i^e &= \dot{\varphi}^2 \mathbf{r}_{Oi} \times (\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{Oi})) = -\dot{\varphi}^2 \mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{r}_{Oi} = 0, \\ \mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{w}_i^c &= 2\dot{\varphi} \mathbf{r}_{Oi} \times (\mathbf{k} \times (\boldsymbol{\omega}_d \times \mathbf{r}_{Oi})) = -2\dot{\varphi} \omega_d \mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{r}_{Oi} = 0. \end{aligned}$$



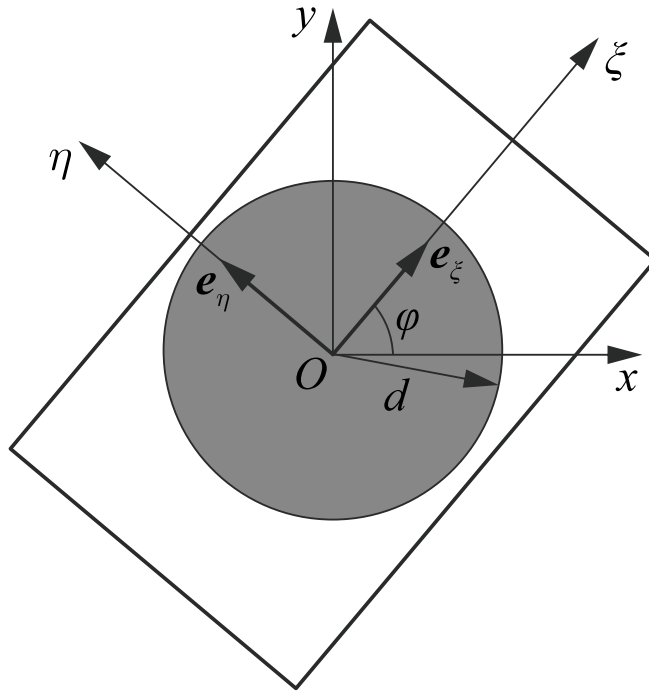


Рисунок 3.1. Ползун с диском

Пусть  $\boldsymbol{\varepsilon}_d = \varepsilon_d \mathbf{k}$  — угловое ускорение диска относительно корпуса. Вычислим проекцию момента относительного ускорения  $i$ -й точки на вертикаль:

$$(\mathbf{r}_{O_i} \times \mathbf{w}_i^r) \cdot \mathbf{k} = (\mathbf{r}_{O_i} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_d \times \mathbf{r}_{O_i} + \boldsymbol{\omega}_d \times (\boldsymbol{\omega}_d \times \mathbf{r}_{O_i}))) \cdot \mathbf{k} = r_{O_i}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_d \cdot \mathbf{k} = \varepsilon_d r_{O_i}^2.$$

Заменяя знак суммы в формуле (1.31) на интеграл по диску, окончательно получим:

$$M_\varphi = -\varepsilon_d \int r_{O_i}^2 dm_i = -J_d \varepsilon_d, \quad (3.4)$$

где  $J_d = m_d d^2 / 2$  — осевой момент инерции диска.

Таким образом, все функции в уравнении движения (3.3) известны. Момент инерции ползуна  $J$  складывается из момента инерции корпуса и момента инерции диска:  $J = C + J_d$ . Из формул (3.3) и (3.4) следует, что для преодоления главного момента силы трения, действующего на корпус со стороны плоскости, необходимо выполнение неравенства

$$|\varepsilon_d| > \frac{F_\varphi}{J_d}. \quad (3.5)$$

### 3.2.2. Гармонический закон управления поворотом диска

В качестве первого примера рассмотрим, аналогично закону из раздела 2.2, гармонический закон управления углом поворота диска  $\alpha_d$ :

$$\alpha_d = \alpha_1 \cos \omega t,$$

где  $\alpha_1$  и  $\omega$  — амплитуда и частота колебаний. Тогда уравнение движения корпуса примет вид

$$J\ddot{\varphi} = J_d \alpha_1 \omega^2 \cos \omega t - f F_\varphi.$$

Полученное уравнение в точности повторяет формулу (2.5), описывающую поступательное движение корпуса с горизонтально движущейся массой в случае гармонического закона управления ее смещением. Следовательно, все выводы сделанные применительно для этого закона управления в разделе 2.2, включая полученные траектории движения, справедливы и здесь. Для получения аналогичных формул необходимо только произвести формальную замену  $m \rightarrow J$ ,  $m_1 \rightarrow J_d$ ,  $a_1 \rightarrow \alpha_1$ ,  $F_\xi \rightarrow F_\varphi$ , а также иметь ввиду выражение для функции  $f$ .

### 3.2.3. Кусочно-линейный закон управления угловой скоростью диска

Рассмотрим еще один относительно простой закон управления диском. Заметим, что в случае материальной точки, движущейся периодически внутри корпуса, ее координата с необходимостью должна изменяться в области, ограниченной длиной корпуса. В данном случае такое условие отсутствует, так как угол поворота диска может быть сколь угодно большим. Необходимым требованием является лишь нулевая относительная угловая скорость в начале и в конце периода  $T$  движения:

$$\omega_d(0) = \omega_d(T) = 0,$$

Возьмем двухфазную кусочно-линейную периодическую функцию управления относительной угловой скоростью диска. Указанным условиям удовлетворяет

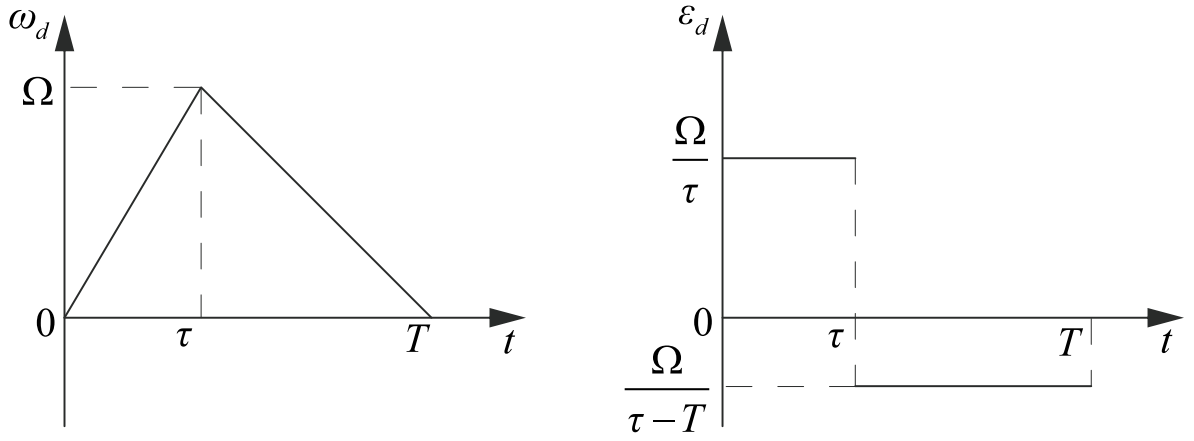


Рисунок 3.2. Графики зависимости относительных угловых скорости и ускорения диска от времени

следующие относительные угловые скорость и ускорение (рисунок 3.2):

$$\omega_d = \Omega \cdot \begin{cases} t/\tau, & 0 \leq t < \tau, \\ (t - T)/(\tau - T), & \tau \leq t < T; \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_d = \Omega \cdot \begin{cases} 1/\tau, & 0 < t < \tau, \\ 1/(\tau - T), & \tau < t < T; \end{cases}$$

где  $0 < \tau < T$ ,  $\Omega$  — максимальная величина угловой скорости  $\omega_d$ . Относительное ускорение можно доопределить:

$$\varepsilon_d(0) = \varepsilon_d(\tau) = \varepsilon_d(T) = 0.$$

В соответствии с условием (3.5), корпус начнет поворачиваться, если выполняется одно из следующих условий:

$$\begin{cases} \tau < |\Omega| J_d / F_\varphi, \\ \tau > T - |\Omega| J_d / F_\varphi. \end{cases}$$

На рисунке 3.3 закрашены области на плоскости параметров  $(\tau, T)$  и  $(\tau, |\Omega|)$ , соответствующие записанным неравенствам. При выборе значений параметров из этих областей, момент  $M_\varphi$  будет достаточным для преодоления главного момента сил трения покоя и начала поворота корпуса.

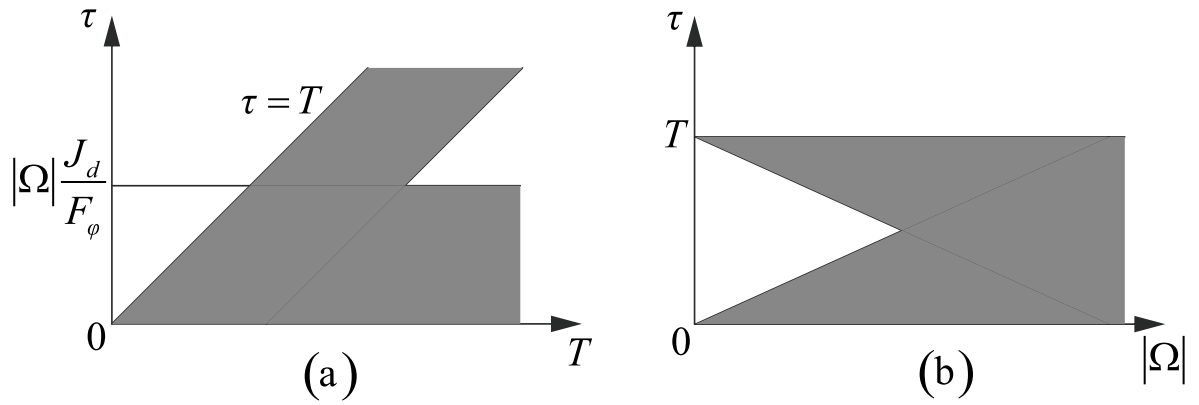


Рисунок 3.3. Плоскость параметров: (a) —  $(\tau, T)$ , (b) —  $(\tau, |\Omega|)$ ; закрашенные области соответствуют значениям параметров, при которых главный момент сил трения покоя преодолевается

Для указанного закона управления правая часть уравнения движения (3.3) кусочно-постоянная. В зависимости от функции  $f$ , уравнение принимает следующие три вида:

$$\ddot{\varphi} = 0, \quad J\ddot{\varphi} = -J_d\varepsilon_d \pm F_\varphi.$$

Следовательно, график изменения угла поворота корпуса для кусочно-линейного закона управления относительным угловым ускорением диска состоит из набора прямых линий и кусков парабол.

### 3.3. Случай двух точечных масс

#### 3.3.1. Описание системы

Расположим в полости корпуса две подвижные материальные точки одинаковой массы  $m_1 = m_2$ . Считаем, что точки могут перемещаться относительно корпуса по двум направляющим, параллельным его продольной оси симметрии и лежащим в горизонтальной плоскости, проходящей через центр масс корпуса  $O$  (рисунок 3.4). Направляющие расположены на равных расстояниях  $\eta_1 = -\eta_2 > 0$  от точки  $O$ . Радиус-векторы точек:

$$\mathbf{r}_{Oi} = \xi_i(t) \mathbf{e}_\xi + \eta_i \mathbf{e}_\eta, \quad i = 1, 2.$$

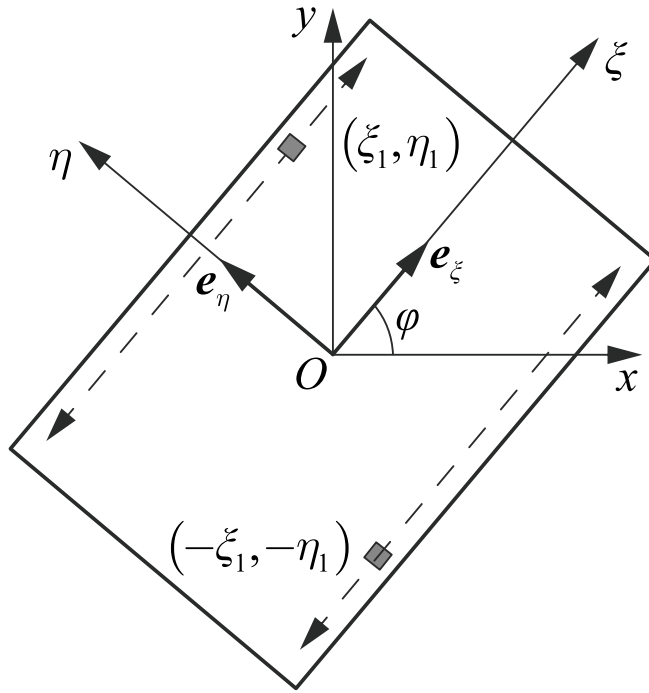


Рисунок 3.4. Ползун с двумя точечными массами

Управление внутренними массами заключается в перемещении их периодически и в противофазе:  $\xi_1(t) = -\xi_2(t)$ . Другими словами, подвижные массы в каждый момент времени располагаются симметрично относительно точки  $O$ . Аналогично расположенному внутри корпуса горизонтальному диску, момент переносных сил инерции  $i$ -й массы равен нулю. Учитывая что их относительные скорость и ускорение равны

$$\mathbf{v}_i^r = \dot{\xi}_i \mathbf{e}_\xi, \quad \mathbf{w}_i^r = \ddot{\xi}_i \mathbf{e}_\xi,$$

вычислим момент кориолисового и относительного ускорений точки:

$$\mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{w}_i^c = 2\dot{\varphi} \mathbf{r}_{Oi} \times (\mathbf{k} \times \dot{\xi}_i \mathbf{e}_\xi) = 2\dot{\varphi} \dot{\xi}_i \xi_i \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{w}_i^r = -\ddot{\xi}_i \eta_i \mathbf{k}.$$

Найдем теперь функцию  $M_\varphi$  используя равенство (1.31):

$$M_\varphi = - \sum_{i=1}^2 m_i \left( 2\dot{\varphi} \dot{\xi}_i \xi_i \mathbf{k} - \ddot{\xi}_i \eta_i \mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{k} = 2m_1 \left( \ddot{\xi}_1 \eta_1 - 2\dot{\varphi} \dot{\xi}_1 \xi_1 \right).$$

Уравнение движения корпуса:

$$J\ddot{\varphi} = M_\varphi - fF_\varphi.$$

где  $J = C + 2m_1 (\xi_1^2 + \eta_1^2)$ . Так как в начальный момент  $\dot{\varphi} = 0$ , очевидно, что необходимым условием начала движения корпуса является наличие ненулевого относительного ускорения  $\ddot{\xi}_1$ . В соответствии с выражением (3.3) требуется выполнение неравенства

$$|\ddot{\xi}_1(t)| > \frac{F_\varphi}{2m_1\eta_1} \quad (3.7)$$

хотя бы для одного момента времени  $t$ .

### 3.3.2. Кусочно-линейный закон управления смещением масс

В качестве закона управления массой  $m_1$  выберем периодическую двухфазную кусочно-линейную функцию  $\xi_1(t)$  (тогда закон управления массой  $m_2$ :  $\xi_2(t) = -\xi_1(t)$ ), в общем виде записав ее следующим образом:

$$\xi_1(t) = \begin{cases} \alpha t + \beta, & 0 \leq t < \tau, \\ \gamma t + \chi, & \tau \leq t < T, \end{cases}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \chi$  — неопределенные коэффициенты, которые находятся из граничных условий:

$$\xi_1(0) = \beta = -a_1, \quad \xi_1(\tau) = \alpha\tau + \beta = \gamma\tau + \chi = a_1, \quad \xi_1(T) = \gamma T + \chi = -a_1,$$

где  $a_1$  — амплитуда колебаний. Отсюда получаем искомую функцию  $\xi_1(t)$  и относительную скорость подвижной массы (рисунок 3.5):

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= a_1 + \begin{cases} 2a_1(t - \tau)/\tau, & 0 \leq t < \tau, \\ -2a_1(t - \tau)/(T - \tau), & \tau \leq t < T, \end{cases} \\ \dot{\xi}_1(t) &= \begin{cases} 2a_1/\tau, & 0 < t < \tau, \\ -2a_1/(T - \tau), & \tau < t < T. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Функция  $\xi_1(t)$  принимает минимальное значение в моменты времени 0 и  $T$ , а максимальное — в момент  $\tau$ . В связи с этим доопределим относительную скорость:

$$\dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_1(\tau) = \dot{\xi}_1(T) = 0.$$

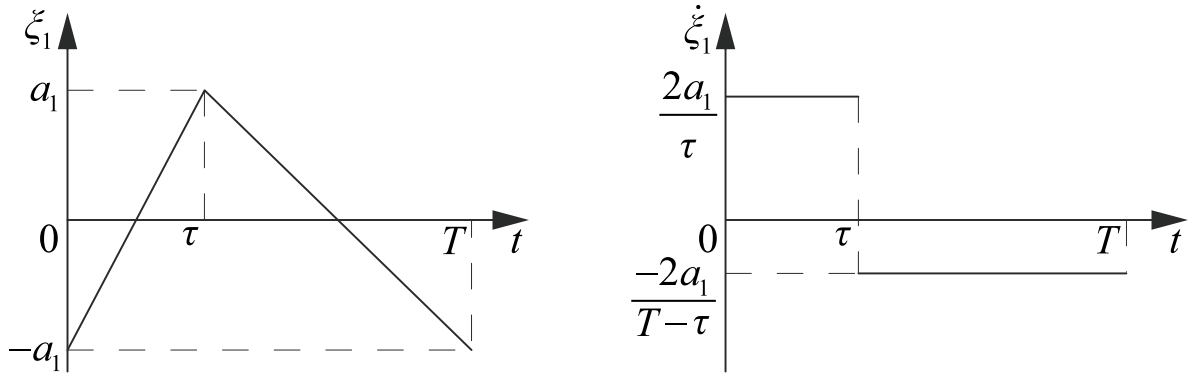


Рисунок 3.5. Графики зависимости координаты  $\xi_1$  и относительной скорости  $\dot{\xi}_1$  подвижной массы от времени

Относительное ускорение внутренней массы равно нулю всегда, за исключением моментов времени  $kT$  и  $kT + \tau$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), в которые относительная скорость изменяется скачкообразно:

$$\ddot{\xi}_1(t) = \frac{2a_1}{\tau}\delta(t) - \left(\frac{2a_1}{\tau} + \frac{2a_1}{T-\tau}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (\delta(t - kT - \tau) - \delta(t - kT - T)),$$

где  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака. Таким образом, за один период движения относительная скорость внутренних масс совершает два одинаковых по модулю скачка: в моменты времени  $kT$  и  $kT + \tau$ . Очевидно, что в эти моменты времени (и только в них) условие (3.5) выполняется для любых параметров  $\tau$ ,  $T$  и  $a_1$  закона управления. Скачкообразное изменение относительной скорости подвижных масс означает наличие удара в системе, который оказывает существенное влияние на динамику корпуса. Величина скачкообразного изменения угловой скорости корпуса находится при помощи интегрирования уравнения движения (3.3) на бесконечно малом промежутке времени включающем в себя удар. В моменты времени  $kT$  и  $kT + \tau$  корпус получает приращение угловой скорости  $\Delta\dot{\varphi}$ :

$$\Delta\dot{\varphi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\dot{\varphi}(t + \Delta t) - \dot{\varphi}(t - \Delta t)) = \frac{2m_1\eta_1}{J} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \ddot{\xi}_1(t) dt, \quad t = kT, kT + \tau.$$

В остальные моменты времени относительное ускорение подвижных масс равно нулю и функция  $M_\varphi$  имеет вид:

$$M_\varphi = -4m_1\dot{\varphi}\dot{\xi}_1\xi_1, \quad t \neq kT, kT + \tau.$$

### 3.3.3. Характер поворота корпуса

Проведено численное моделирование движения корпуса, предполагавшее интегрирование уравнения (3.3). Моделирование проводилось при следующих значениях параметров:

$$m_0 = 0.9, \quad m_1 = 0.05; \quad a = 1, \quad b = 2/3, \quad 2h = b, \quad \eta_1 = 0.4b; \quad \mu = 0.3.$$

Рассмотрим несколько графиков зависимости угла поворота корпуса от времени, соответствующих кусочно-линейной функции  $\xi_1(t)$ , для разных значений параметров  $T$  и  $\tau$  закона управления (3.8), причем если не оговорено иное, считаем  $a_1/a = 0.4$ . При  $T = 0.1$ ,  $\tau/T = 0.3$  (рисунок 3.6) можно заметить, что начиная с некоторого момента времени график приобретает ступенчатый вид, причем точкам излома отвечают моменты времени  $kT$  и  $kT + \tau$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), которые соответствуют скачкам относительной скорости подвижных масс.

График зависимости угла поворота корпуса ползуна от времени при  $T = 0.4$ ,  $\tau/T = 0.4$ , представленный на рисунке 3.7, имеет пилообразный вид, точкам излома соответствуют те же моменты времени, что и в предыдущем случае. Изменение вида кривой со ступенчатой на пилообразную объясняется увеличением периода  $T$ : на каждом интервале времени  $kT < t < kT + \tau$  и  $kT + \tau < t < (k + 1)T$  корпус теряет угловую скорость, в силу наличия трения между опорной плоскостью и основанием корпуса, что приводит к частичному попятному повороту на интервале  $kT + \tau < t < (k + 1)T$ .

Аналогичная картина наблюдается на рисунке 3.8, которой соответствуют значения  $T = 0.5$ ,  $\tau/T = 0.6$ . Однако здесь, в силу того, что  $\tau/T > 0.5$ , направление результирующего поворота противоположно направлению в предыдущих



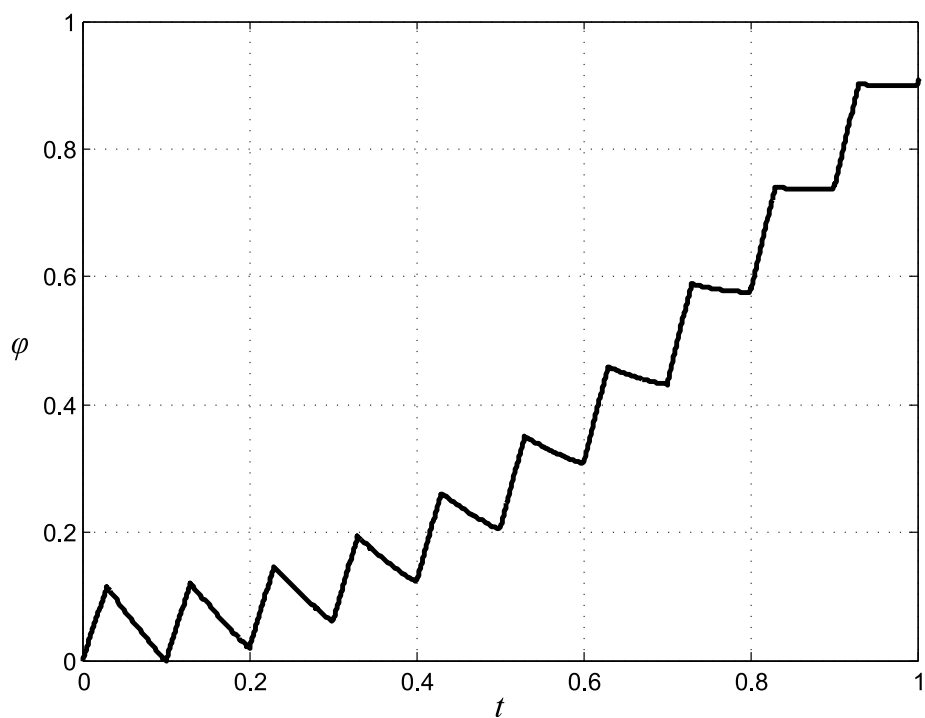


Рисунок 3.6. График зависимости угла поворота корпуса ползуна от времени при  $T = 0.1$ ,  $\tau/T = 0.3$

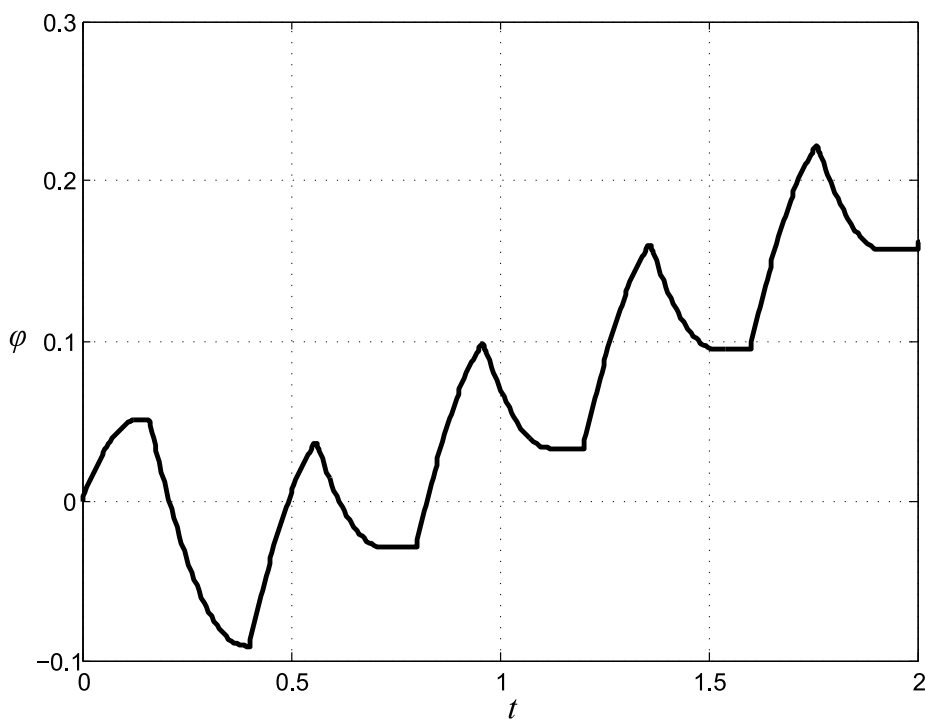


Рисунок 3.7. График зависимости угла поворота корпуса ползуна от времени при  $T = 0.4$ ,  $\tau/T = 0.4$

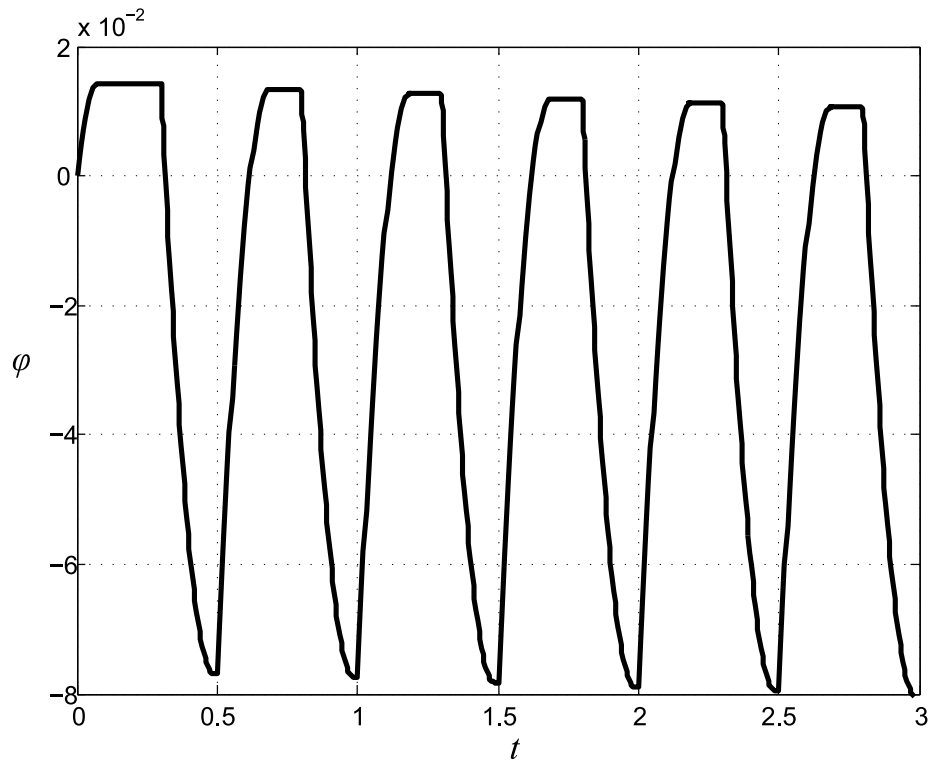


Рисунок 3.8. График зависимости угла поворота корпуса ползуна от времени при  $T = 0.5$ ,  $\tau/T = 0.6$

случаях. При увеличении периода  $T$  на каждом интервале  $kT < t < kT + \tau$  и  $kT + \tau < t < (k + 1)T$  оказывается достаточно времени для остановки корпуса. В результате его средняя угловая скорость становится равной нулю, что показано на рисунке 3.9, где  $T = 0.7$ ,  $\tau/T = 0.5$ .

Обратим внимание, что графики зависимостей угла поворота тела от времени можно разделить на два вида: переходный и установившийся режим (рисунок 3.6). В переходном режиме величина угла поворота приобретаемая корпусом за период движения подвижных масс меняется от одного периода к другому, а в установившемся режиме угол поворота изменяется на одинаковую величину за каждый период. Таким образом, при двухфазном кусочно-линейном законе управления массами процесс поворота ползуна выходит на установившийся периодический режим. Это обстоятельство позволяет поставить вопрос о нахождении оптимальных значений параметров  $T$ ,  $\tau$  и  $a_1$  закона управления (3.8),

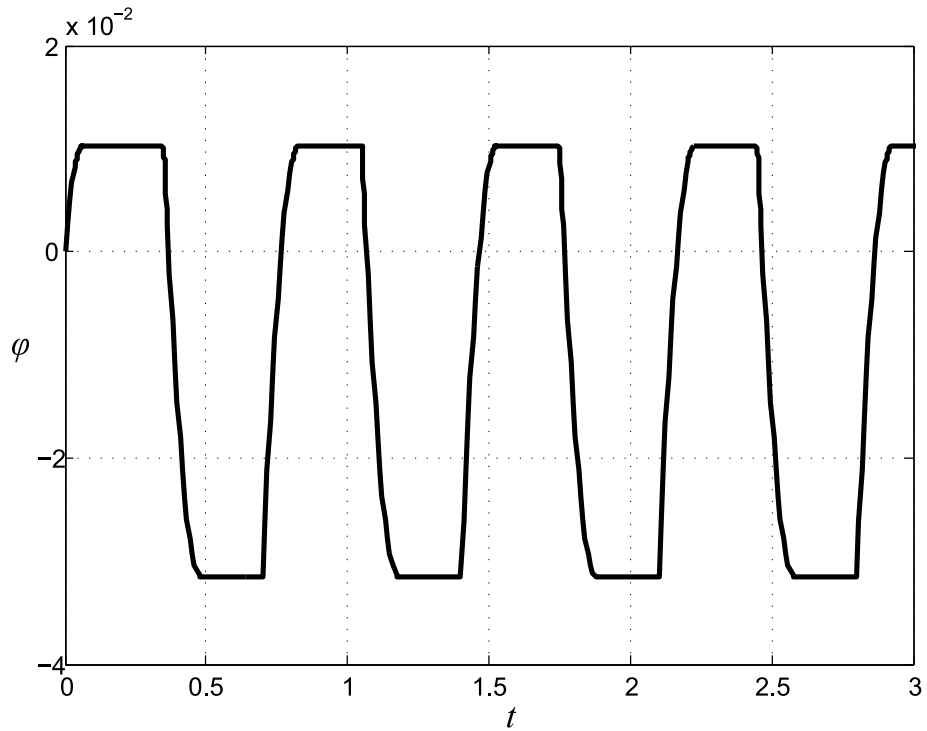


Рисунок 3.9. График зависимости угла поворота корпуса ползуна от времени при  $T = 0.7$ ,  $\tau/T = 0.5$

доставляющих максимум средней угловой скорости корпуса в установившемся режиме движения.

В таблице 3.1 приведена оценка количества периодов движения подвижных масс, необходимого для перехода в установившийся режим поворота корпуса, для значений параметров из следующих наборов:

$$T = \{0.1, 0.2, 0.3\}, \quad \tau/T = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}, \quad a_1/a = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}.$$

Установлено, что количество колебаний внутренних масс, необходимое для перехода в установившийся режим поворота, возрастает с уменьшением  $T$ , приближением  $\tau/T$  к 0.5 и  $a_1/a$  к 0.5.

### 3.3.4. Влияние параметров закона управления на среднюю скорость поворота корпуса

Численно найдем оптимальные значения параметров  $T$ ,  $\tau$  и  $a_1$  кусочно-линейного закона управления, доставляющие максимум средней угловой ско-

$N$	1, 2, 3				
$T$	0.1		0.2	0.3	
$\tau/T$	0.1, 0.9	0.3, 0.7	0.1, 0.3, 0.7, 0.9	0.1, 0.3, 0.7, 0.9	0.5
$a_1/a$	0.1–0.4	0.1	0.1–0.5	0.1–0.5	0.1, 0.2
$N$	4–10		> 1000		
$T$	0.1		0.1	0.2	0.3
$\tau/T$	0.1, 0.9	0.3, 0.7	0.5		
$a_1/a$	0.5	0.2–0.5	0.1–0.5		0.3–0.5

Таблица 3.1. Количество периодов движения подвижных масс, необходимое для перехода в установившийся режим поворота

рости корпуса, определяемой выражением

$$\dot{\varphi}_T = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\varphi} dt,$$

в установившемся режиме движения.

Выберем следующие области определения параметров:

$$0.05 \leq T \leq 0.70, \quad 0.1 \leq \tau/T \leq 0.9, \quad 0.05 \leq a_1/a \leq 0.5. \quad (3.9)$$

Выбор верхней границы параметра  $a_1$  обусловлен длиной корпуса ползуна.

На рисунке 3.10 изображена зависимость средней угловой скорости корпуса, а на рисунке 3.11 — зависимость модуля этой величины от параметров  $T$  и  $\tau/T$ . Здесь и далее справа от графиков изображена цветовая шкала величины угловой скорости или ее модуля. При  $0.1 \leq \tau/T \leq 0.4$  средняя угловая скорость корпуса положительна, а при  $0.6 \leq \tau/T \leq 0.9$  — отрицательна. В окрестности значения  $\tau/T = 0.5$  ее знак может меняться в зависимости от выбора периода.

Установлено, что модуль средней угловой скорости монотонно возрастает с увеличением амплитуды колебаний внутренних масс  $a_1$ . На рисунке 3.12 представлен соответствующий график при  $T = 0.5$  для значений  $\tau/T$  и  $a_1/a$  (3.9).

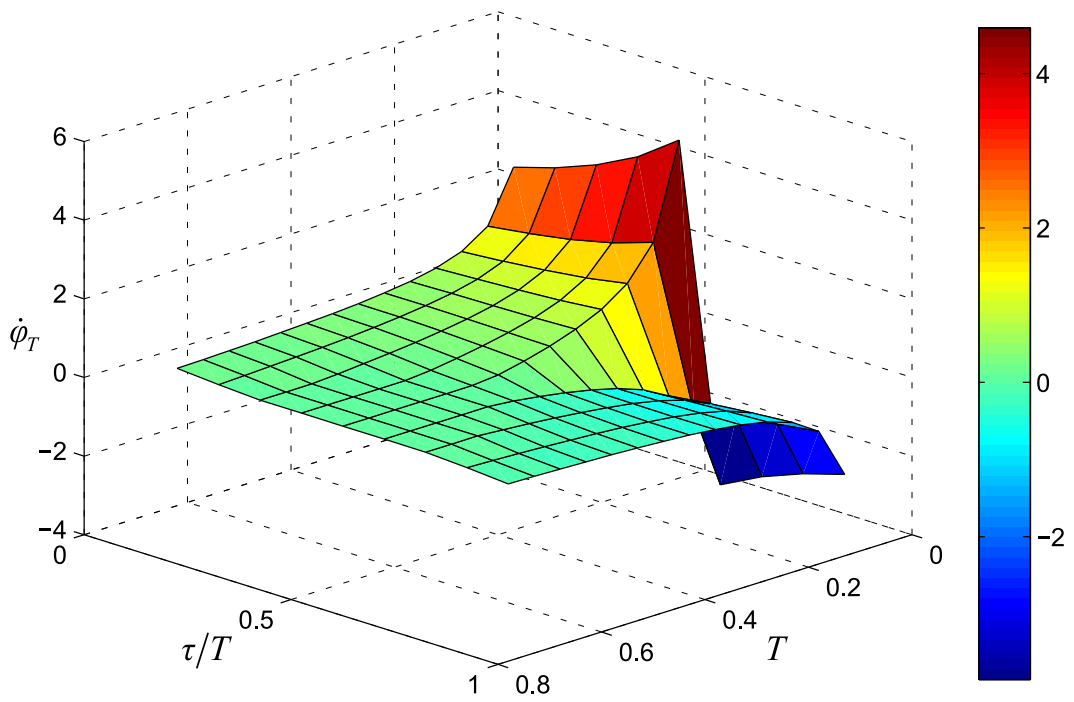


Рисунок 3.10. График средней угловой скорости корпуса ползуна в установившемся режиме поворота в зависимости от параметров  $T$  и  $\tau/T$

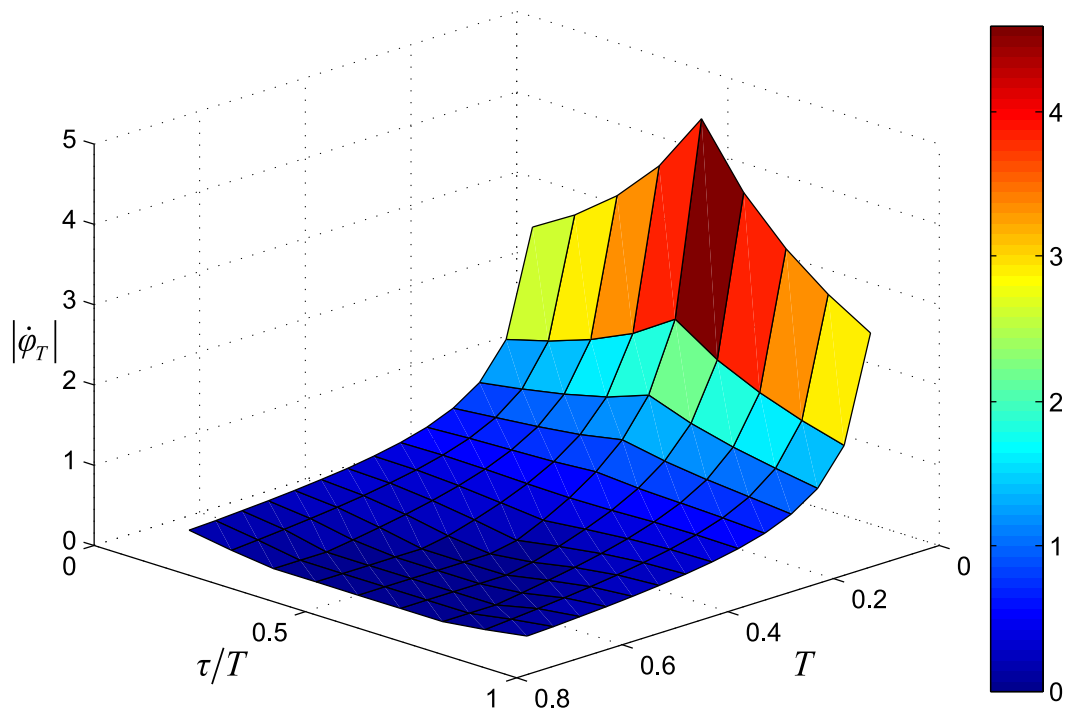


Рисунок 3.11. График модуля средней угловой скорости корпуса ползуна в установившемся режиме поворота в зависимости от параметров  $T$  и  $\tau/T$

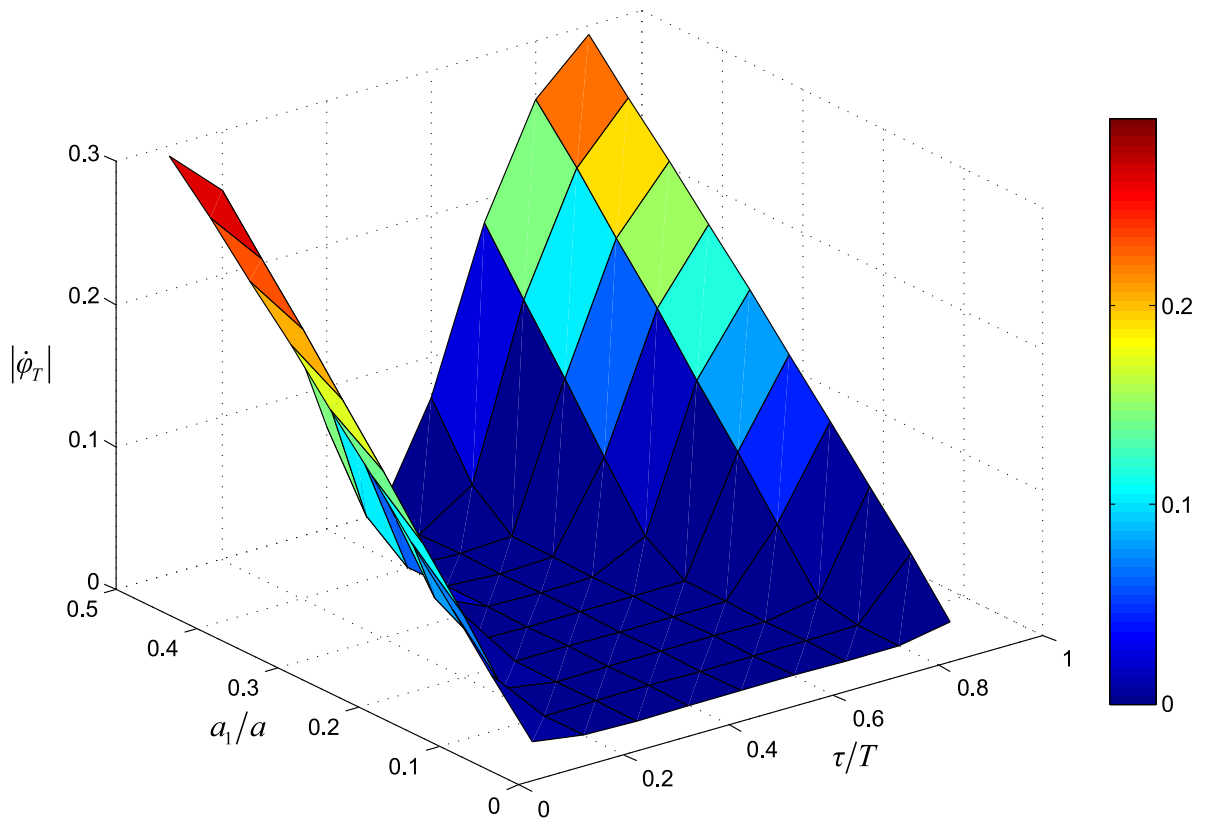


Рисунок 3.12. График модуля средней угловой скорости корпуса ползуна в установившемся режиме поворота в зависимости от параметров  $\tau/T$  и  $a_1/a$

Максимальная средняя угловая скорость поворота корпуса ползуна достигается при величинах

$$T^* = 0.05 \pm 0.01, \quad \tau^*/T^* = 0.51 \pm 0.01, \quad a_1^*/a = 0.50 \pm 0.01.$$

### 3.4. Заключение к главе 3

Рассмотрен случай поворота корпуса, опирающегося на шероховатую плоскость, вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр масс. Внутренние массы движутся таким образом, что центр масс ползуна остается неподвижным и совпадает с центром масс корпуса. Показано, что в рамках линейной модели и указанных ограничений, распределение нормальных напряжений в области контакта постоянно. Получено соответствующее уравнение движения корпуса.

В качестве примера конфигураций внутренних масс предложены горизонтально расположенный диск, способный вращаться вокруг своей оси, и две материальные точки, движущиеся в противофазе.

Предложены два закона управления относительной угловой скоростью диска: гармонический и двухфазный кусочно-постоянный. Показано, что использование гармонического закона управления приводит к уравнению движения, точно повторяющему уравнение поступательно перемещающегося корпуса с гармонически двигающейся внутри точечной массой из раздела 2.2. Следовательно, решение и выводы полученные в разделе 2.2 справедливы и здесь. Для двухфазной кусочно-постоянной функции относительной угловой скорости диска найдена область значений параметров закона управления, подстановка которых в уравнение движения корпуса гарантирует преодоление главного момента сил трения покоя и приведение корпуса во вращательное движение, которое в свою очередь качественно описано.

Для случая двух материальных точек предложен двухфазный кусочно-линейный закон управления их смещением. Динамика поворота корпуса существенно определяется наличием удара, реализующимся вследствие скачкообразного изменения относительной скорости точек. Проанализированы особенности поворота корпуса. В частности, определено, что поворот выходит на установившийся режим. Приведена оценка количества периодов движения внутренних масс, необходимых для перехода корпуса на установившийся режим поворота в зависимости от параметров закона управления. Численно найдены параметры закона управления, доставляющие максимум средней угловой скорости корпуса в установившемся режиме движения.

## 4. Трехмерное движение мобильного устройства ПО ПЛОСКОСТИ

В настоящей главе рассматриваются два примера конфигураций масс, расположенных внутри корпуса мобильного устройства, которые, при определенных законах их относительных движений, позволяют привести корпус как к поступательному движению вдоль его продольной оси симметрии, так и к повороту вокруг некоторой точки. Комбинация этих движений позволяет рассмотреть случай трехмерного движения мобильного устройства на плоскости. При этом, как и в предыдущих главах, используются уравнения, полученные в главе 1.

### 4.1. Описание системы

Продольное передвижение корпуса предлагается осуществлять с помощью периодического перемещения материальной точки массы  $m_1$  вдоль оси  $O\xi$ , подобно тому, как это делалось в главе 2. Для осуществления поворота корпуса на плоскости предлагается расположить внутри него однородный диск массы  $m_d$  и радиуса  $d$ , центр которого совпадает с точкой  $O$ , ориентируя его при этом двумя способами.

В первом случае расположим диск таким образом, чтобы ось его вращения была параллельна продольной оси симметрии корпуса  $O\xi$ . Такое расположение диска будем называть горизонтально-осевым. Вращение диска с ускорением (благодаря некоторому двигателю установленному внутри ползуна) приводит к появлению момента силы направленного вдоль оси  $O\xi$ . Наличие такого момента означает, что распределение нормальных напряжений в области контакта корпуса и плоскости окажется несимметричным относительно оси  $O\xi$ . Несимметричность нормальных напряжений в области контакта в свою очередь приведет к асимметрии в распределении сил трения, действующих на корпус со



стороны плоскости. Следовательно, в случае если корпус движется вдоль оси  $O\xi$  (например, благодаря перемещению массы  $m_1$  вдоль этой оси), асимметрия в распределении сил трения приведет к появлению момента силы, направленного вдоль вертикальной оси  $O\zeta$ , что обеспечит поворот корпуса вокруг этой оси. Таким образом, устанавливая диск описанным выше способом и раскручивая его с ускорением, можно осуществить поворот корпуса, при этом наличие сил трения является необходимым условием поворота. Стоит отметить, что управление угловой скоростью вращения диска должно быть согласовано с движением корпуса вдоль оси  $O\xi$ . Это связано с тем, что асимметрия распределения нормальных напряжений в области контакта корпуса и плоскости относительно продольной оси симметрии сама по себе не может вызвать его поворота. Поворот произойдет только в том случае, если корпус устройства будет двигаться вдоль оси  $O\xi$ . Для осуществления поворота на заданный угол необходимо синхронизировать движение массы  $m_1$  и работу двигателя, вращающего диск.

Во втором случае расположим диск так, чтобы ось его вращения приняла вертикальное положение. Будем называть такое расположение диска вертикально-осевым. Ускоренное вращение диска приведет к появлению момента силы, направленного вдоль вертикальной оси  $O\zeta$ . Как показано в разделе 3.2, если этот момент достаточен для преодоления сил трения, корпус ползуна совершит поворот в противоположную, относительно вращения диска, сторону. Заметим, что в данном случае поворот совершается не за счет асимметрии распределения сил трения действующих со стороны плоскости на корпус, а за счет непосредственного действия момента силы вдоль оси  $O\zeta$ . В этом состоит принципиальное отличие между указанными двумя способами поворота корпуса при помощи ускоренно вращающегося диска, расположенного внутри. Заметим также, что в отличие от предыдущего случая при вертикально-осевом расположении диска нет необходимости в передвижении корпуса вдоль оси  $O\xi$ : поворот произойдет и в том случае, если центр масс ползуна покоится.

Для определения и анализа движения корпуса в обоих описанных случаях расположения диска воспользуемся уравнениями полученными в главе 1. Для этого необходимо определить функции  $M_\varphi$  и  $R_j$  ( $j = \xi, \eta$ ), входящие в правые части уравнений (1.35), а также коэффициенты  $\lambda_0$  и  $\lambda_j$ . Условимся далее обозначать индексом 1 функции, относящиеся к точечной массе  $m_1$ , а индексом  $d$  функции, относящиеся к диску. Тогда

$$M_\varphi = M_{\varphi 1} + M_{\varphi d}, \quad R_j = R_{j1} + R_{jd}.$$

Координаты точки массы  $m_1$  в связанной с корпусом системе координат  $O\xi\eta\zeta$ :  $\xi_1 = \xi_1(t)$ ,  $\eta_1 = \zeta_1 = 0$ , а радиус-вектор:

$$\mathbf{r}_{O1} = \xi_1(t)\mathbf{e}_\xi.$$

В качестве закона относительного движения точки  $\xi_1(t)$  возьмем функцию (2.8). Как было показано в разделе 2.2.3, в моменты времени  $kT$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) корпус получает приращение скорости  $\Delta v_O$ :

$$\Delta v_O = \frac{4(a_1 - b_1)m_1}{mT}, \quad k = 0; \quad \Delta v_O = \frac{8(a_1 - b_1)m_1}{mT}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $m = m_0 + m_1 + m_d$ .

Ускорение точки  $O$ , относительное и кориолисово ускорения массы  $m_1$  определяются соотношениями

$$\mathbf{w}_O = \begin{bmatrix} \ddot{x}_O \\ \ddot{y}_O \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_1^r = \ddot{\xi}_1\mathbf{e}_\xi, \quad \mathbf{w}_1^c = 2\dot{\varphi}\mathbf{k} \times \dot{\xi}_1\mathbf{e}_\xi = 2\dot{\varphi}\dot{\xi}_1\mathbf{e}_\eta,$$

откуда, используя формулу (1.31), получим функцию  $M_{\varphi 1}$ :

$$\begin{aligned} M_{\varphi 1} &= -m_1\xi_1 \left( \mathbf{e}_\xi \times \left( \mathbf{w}_O + \ddot{\xi}_1\mathbf{e}_\xi + 2\dot{\varphi}\dot{\xi}_1\mathbf{e}_\eta \right) \right) \cdot \mathbf{k} = \\ &= -m_1\xi_1 \left( \ddot{y}_O \cos \varphi - \ddot{x}_O \sin \varphi + 2\dot{\varphi}\dot{\xi}_1 \right). \end{aligned}$$

Для того чтобы найти функции  $R_{j1}$ , вычислим переносное ускорение точечной массы  $m_1$ :

$$\mathbf{w}_1^e = \mathbf{w}_O + \ddot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{O1} + \dot{\varphi}^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{O1}) = \mathbf{w}_O + \ddot{\varphi} \xi_1 \mathbf{e}_\eta - \dot{\varphi}^2 \xi_1 \mathbf{e}_\xi.$$

Используя первые две формулы (1.34), имеем:

$$R_{\xi_1} = -m_1 \left( -\dot{\varphi}^2 \xi_1 + \ddot{\xi}_1 \right), \quad R_{\eta_1} = -m_1 \left( \ddot{\varphi} \xi_1 + 2\dot{\varphi} \dot{\xi}_1 \right).$$

Вычислим теперь коэффициент  $\lambda_0$ . Сумма  $\sum_{i=1}^s m_i \ddot{\zeta}_i$ , стоящая в правой части формулы (1.23), равна нулю в силу того, что  $\zeta_1 \equiv 0$ , диск однороден, а его центр масс совпадает с точкой  $O$ . Поэтому

$$\lambda_0 = \frac{mg}{ab}. \quad (4.1)$$

Остается вычислить функции  $m_1 \chi_{j1}$ , входящие в правые части формул (1.27). Для этого подставим выражения для переносного, относительного и кориолисового ускорений точечной массы в первые два уравнения (1.25):

$$m_1 \chi_{\xi_1} = 0, \quad m_1 \chi_{\eta_1} = m_1 (-g \xi_1 + \mathbf{w}_1 \cdot \xi_1 \mathbf{k}) = -m_1 g \xi_1. \quad (4.2)$$

Последнее равенство справедливо вследствие того, что абсолютное ускорение точечной массы  $m_1$  ортогонально орту  $\mathbf{k}$ .

Далее рассмотрим по отдельности случаи горизонтально- и вертикально-осевого расположений диска.

## 4.2. Случай горизонтально-осевого расположения диска

### 4.2.1. Уравнения движения и коэффициенты модели распределения нормальных напряжений

Расположим диск внутри полости так, чтобы ось его вращения совпадала с продольной осью симметрии корпуса  $O\xi$  (рисунок 4.1). В таком случае диск

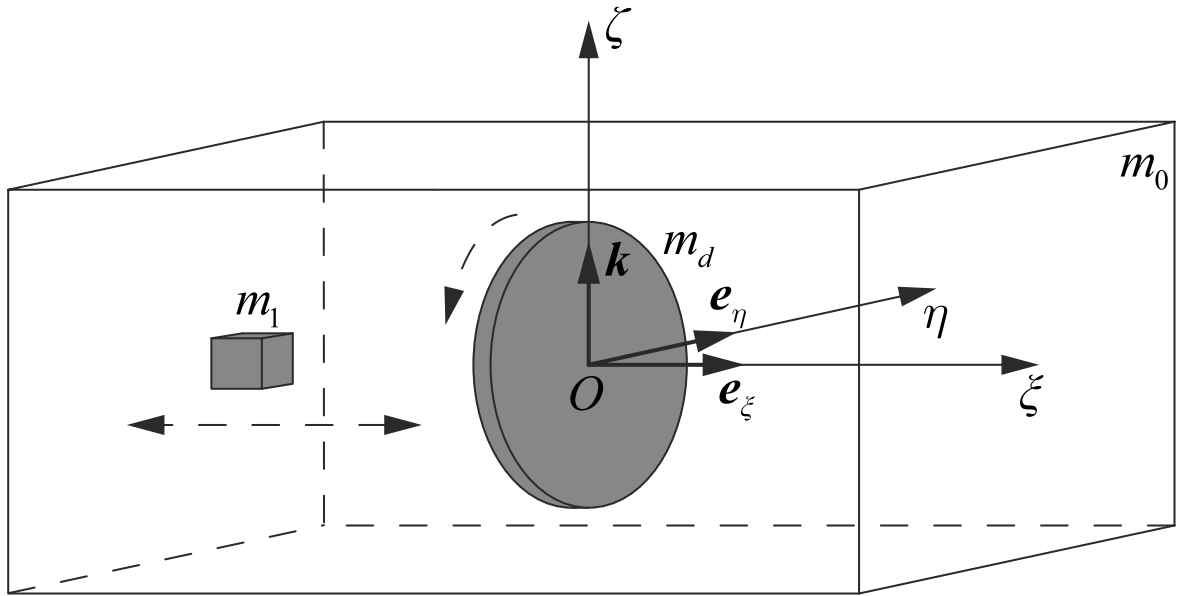


Рисунок 4.1. Ползун с точечной массой и диском, ось которого направлена по оси  $O\xi$

лежит в плоскости  $O\eta\zeta$  и радиус-вектор произвольной его точки:

$$\mathbf{r}_{Oi} = \eta_i \mathbf{e}_\eta + \zeta_i \mathbf{k}, \quad i = 2, \dots, s.$$

Нумерация начинается с двойки, так как индекс  $i = 1$  соответствует точечной массе  $m_1$ , двигающейся вдоль оси  $O\xi$ .

В соответствии с формулой (1.33), момент инерции ползуна:

$$J = C + m_1 \xi_1^2 + \frac{J_d}{2},$$

где  $m_1 \xi_1^2$  — момент инерции массы  $m_1$  относительно оси  $O\xi$ ,  $J_d = m_d d^2 / 2$  — осевой момент инерции диска.

Пусть  $\boldsymbol{\omega}_d = \omega_d \mathbf{e}_\xi$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}_d = \varepsilon_d \mathbf{e}_\xi$  — относительные угловые скорость и ускорение диска. Вычислим функцию  $M_{\varphi d}$ . Для этого запишем относительные и кориолисовы ускорения точек диска:

$$\mathbf{w}_i^r = \varepsilon_d \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{r}_{Oi} + \omega_d^2 \mathbf{e}_\xi \times (\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{r}_{Oi}) = \varepsilon_d \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{r}_{Oi} - \omega_d^2 \mathbf{r}_{Oi},$$

$$\mathbf{w}_i^c = 2\dot{\varphi} \mathbf{k} \times (\omega_d \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{r}_{Oi}) = 2\dot{\varphi} \omega_d \zeta_i \mathbf{e}_\xi,$$

и совершим вспомогательные вычисления:

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}_{O_i} \times \mathbf{w}_i^r) \cdot \mathbf{k} &= \varepsilon_d r_{O_i}^2 \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{k} = 0, \\(\mathbf{r}_{O_i} \times \mathbf{w}_i^e) \cdot \mathbf{k} &= 2\dot{\varphi} \omega_d \zeta_i (-\eta_i \mathbf{k} + \zeta_i \mathbf{e}_\eta) \cdot \mathbf{k} = -2\dot{\varphi} \omega_d \eta_i \zeta_i.\end{aligned}$$

Подставляя результаты в формулу (1.31) и заменяя при этом знак суммы на интеграл по всему диску, получим:

$$M_{\varphi d} = - \int ((\mathbf{r}_{O_i} \times \mathbf{w}_O) \cdot \mathbf{k} - 2\dot{\varphi} \omega_d \eta_i \zeta_i) dm_i = 0.$$

Интеграл от обоих слагаемых равен нулю в силу симметричности диска и нечетности подынтегральных функций. Следовательно, для горизонтально-осевого расположения диска  $M_\varphi = M_{\varphi 1}$ :

$$M_\varphi = -m_1 \xi_1 \left( \ddot{y}_O \cos \varphi - \ddot{x}_O \sin \varphi + 2\dot{\varphi} \dot{\xi}_1 \right). \quad (4.3)$$

Для вычисления функций  $R_{jd}$  запишем переносное ускорение  $i$ -й точки диска:

$$\mathbf{w}_i^e = \mathbf{w}_O + \ddot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{O_i} + \dot{\varphi}^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{O_i}) = \mathbf{w}_O - \ddot{\varphi} \eta_i \mathbf{e}_\xi - \dot{\varphi}^2 \eta_i \mathbf{e}_\eta.$$

Подставляя переносное, относительное и кориолисово ускорения точки диска в формулы (1.34), и вновь заменяя знак суммы на интеграл, найдем:

$$\begin{aligned}R_{\xi d} &= - \int (-\ddot{\varphi} \eta_i + 2\dot{\varphi} \omega_d \zeta_i - \omega_d^2 \xi_i) dm_i = 0, \\R_{\eta d} &= - \int (-\dot{\varphi}^2 \eta_i - \varepsilon_d \zeta_i - \omega_d^2 \eta_i) dm_i = 0,\end{aligned}$$

откуда следует, что  $R_j = R_{j1}$ :

$$R_\xi = -m_1 \left( -\dot{\varphi}^2 \xi_1 + \ddot{\xi}_1 \right), \quad R_\eta = -m_1 \left( \ddot{\varphi} \xi_1 + 2\dot{\varphi} \dot{\xi}_1 \right). \quad (4.4)$$

Обратим внимание, что полученная функция  $M_\varphi$  зависит от  $\ddot{x}_O$  и  $\ddot{y}_O$ , а  $R_\eta$  от  $\ddot{\varphi}$ . Для того чтобы разрешить систему уравнений движения корпуса (1.35) относительно старших производных, подставим в формулу (4.3) первое и второе уравнения (1.35):

$$M_\varphi = -\frac{m_1}{m} \xi_1 \left( R_\eta - f F_\eta + 2m \dot{\varphi} \dot{\xi}_1 \right).$$

Подставляя сюда второе равенство (4.4) и используя полученное соотношение в третьей формуле (1.35), выразим  $\ddot{\varphi}$ :

$$J'\ddot{\varphi} = -2m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m}\right) \dot{\varphi}\dot{\xi}_1\xi_1 - f \left(F_\varphi - \frac{m_1}{m}\xi_1 F_\eta\right),$$

где

$$J' = C + m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m}\right) \xi_1^2 + \frac{J_d}{2}.$$

Далее, подставляя  $\ddot{\varphi}$  из предпоследнего уравнения в функцию  $R_\eta$ , получим систему уравнений движения (1.35) разрешенную относительно  $\ddot{x}_O$ ,  $\ddot{y}_O$  и  $\ddot{\varphi}$ .

Для определения коэффициентов  $\lambda_j$ , вычислим суммы стоящие в числителях системы (1.27). Подставляя в первые две формулы (1.25) разложение ускорения произвольной точки диска на переносное, относительное и кориолисово, и заменяя знак суммы на интеграл по всему диску, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^s m_i \chi_{\xi i} &= \int (\mathbf{w}_i \cdot (\eta_i \mathbf{k} - \zeta_i \mathbf{e}_\eta)) dm_i = \varepsilon_d \int (\zeta_i^2 + \eta_i^2) dm_i = \frac{m_d d^2}{2} \varepsilon_d = J_d \varepsilon_d, \\ \sum_{i=2}^s m_i \chi_{\eta i} &= \int \zeta_i \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{e}_\xi dm_i = 2\dot{\varphi} \omega_d \int \zeta_i^2 dm_i = \frac{m_d d^2}{2} \dot{\varphi} \omega_d = J_d \dot{\varphi} \omega_d. \end{aligned}$$

Прибавляя сюда ранее полученные формулы (4.2), запишем выражения для сумм  $\sum_{i=1}^s m_i \chi_{ji}$ :

$$\sum_{i=1}^s m_i \chi_{\xi i} = J_d \varepsilon_d, \quad \sum_{i=1}^s m_i \chi_{\eta i} = -m_1 g \xi_1 + J_d \dot{\varphi} \omega_d.$$

Система (1.27), определяющая коэффициенты  $\lambda_j$ , примет окончательный вид:

$$\begin{aligned} \lambda_\xi &= \frac{a_{\eta\eta} (a_{\xi 0} \lambda_0 + J_d \varepsilon_d) - a_{\xi\eta} (a_{\eta 0} \lambda_0 - m_1 g \xi_1 + J_d \dot{\varphi} \omega_d)}{a_{\xi\xi} a_{\eta\eta} - a_{\xi\eta} a_{\eta\xi}}, \\ \lambda_\eta &= \frac{a_{\xi\xi} (a_{\eta 0} \lambda_0 - m_1 g \xi_1 + J_d \dot{\varphi} \omega_d) - a_{\eta\xi} (a_{\xi 0} \lambda_0 + J_d \varepsilon_d)}{a_{\xi\xi} a_{\eta\eta} - a_{\xi\eta} a_{\eta\xi}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Для наглядности еще раз запишем систему уравнений движения корпуса с подвижной точечной массой и горизонтально-осевым расположенным диском:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_O &= (R_\xi - fF_\xi) \cos \varphi - (R_\eta - fF_\eta) \sin \varphi, \\ m\ddot{y}_O &= (R_\xi - fF_\xi) \sin \varphi + (R_\eta - fF_\eta) \cos \varphi, \\ J'\ddot{\varphi} &= -2m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m}\right) \dot{\varphi}\dot{\xi}_1\xi_1 - f \left(F_\varphi - \frac{m_1}{m}\xi_1F_\eta\right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где функции  $\xi_1$ ,  $R_\xi$  и  $R_\eta$  определяются выражениями (2.8) и (4.4), а коэффициенты линейной модели распределения нормальных напряжений в области контакта корпуса и плоскости — выражениями (4.1) и (4.5). В качестве закона управления относительной угловой скоростью диска  $\omega_d$  будем использовать кусочно-линейную функцию (3.6), рассмотренную в разделе 3.2, причем всюду полагается  $\tau = T/2$ .

#### 4.2.2. Анализ движения корпуса

Как упоминалось ранее, вращение корпуса ползуна достигается за счет несимметричного распределения нормальных напряжений в области контакта относительно продольной оси симметрии корпуса. На рисунке 4.2 представлен график распределения нормальных напряжений в области контакта. При построении графика брались следующие условия: корпус движется вдоль продольной оси симметрии  $O\xi$  со скоростью  $\dot{x}_O = 0.1$ , точечная масса  $m_1$  имеет координату  $\xi_1 = a_1$  и находится в покое относительно корпуса, диск начинает вращение с угловым ускорением  $\varepsilon_d = 30$ . Заметим, что нормальное напряжение возрастает по мере увеличения координаты  $\xi$ , в следствие движения корпуса вперед, и по мере увеличения координаты  $\eta$ , в следствие ускоренного вращения диска вокруг оси  $O\xi$  против часовой стрелки.

При достаточно больших величинах  $\varepsilon_d$  в области контакта  $S$  корпуса и плоскости появляется подобласть  $S_0$ , в которой происходит отрыв. На рисунке 4.3 приведен пример графика распределения нормальных напряжений с частичным отрывом корпуса от плоскости, при этом  $\varepsilon_d = 250$ , а остальные параметры

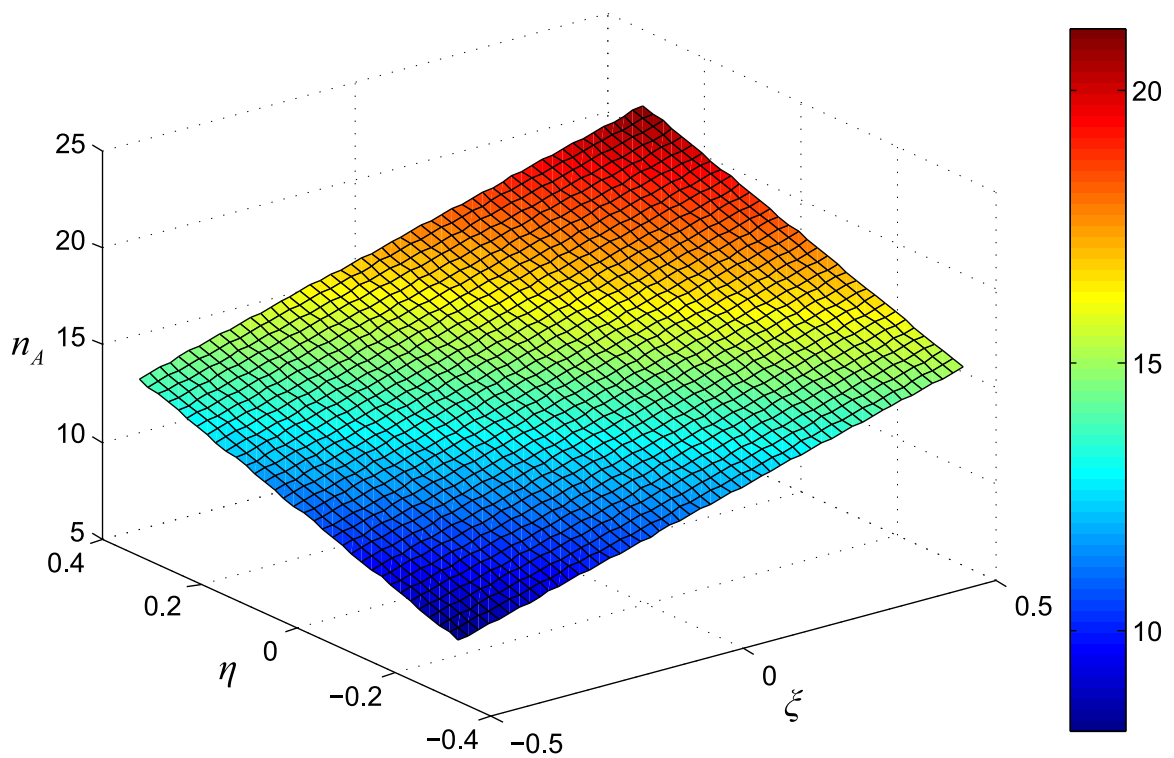


Рисунок 4.2. График распределения нормальных напряжений в области контакта корпуса и плоскости при  $\varepsilon_d = 30$

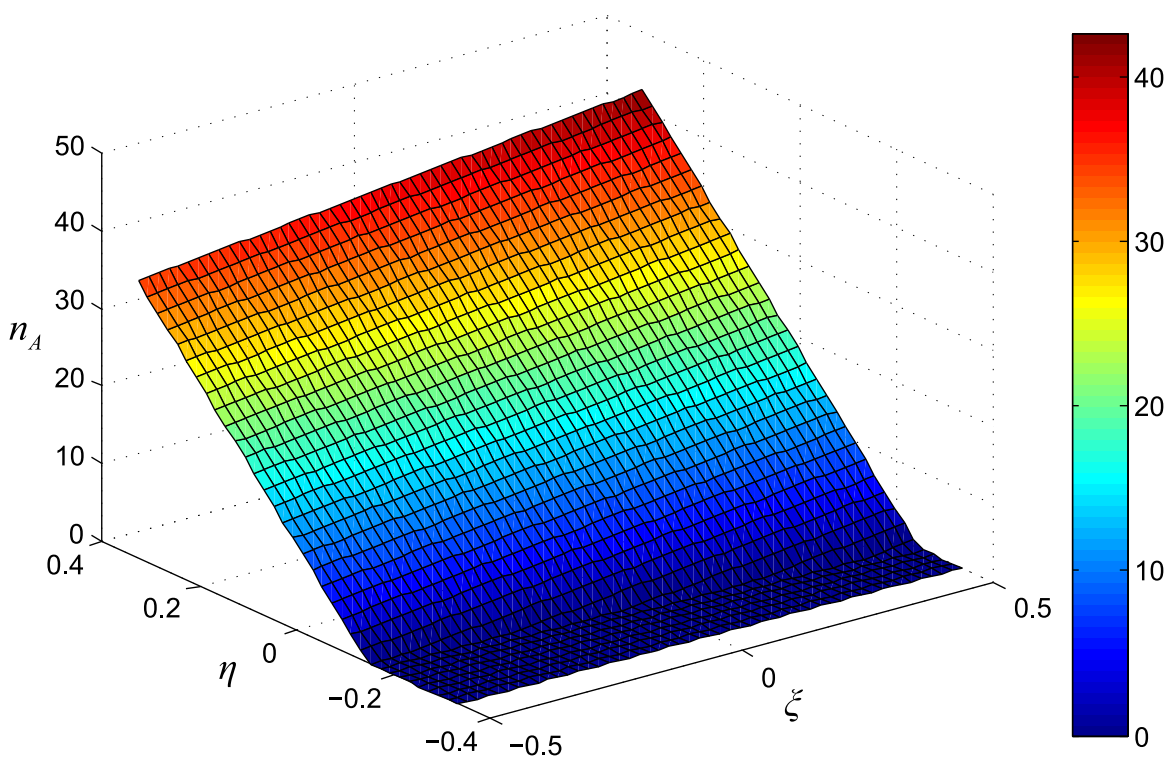


Рисунок 4.3. График распределения нормальных напряжений в области контакта корпуса и плоскости при  $\varepsilon_d = 250$



прежние. В этом случае нормальные напряжения в формуле (1.19) принимают отрицательные значения в подобласти  $S_0 \in S$ , что должно быть учтено в силу односторонности контакта корпуса и плоскости. Поэтому здесь и далее в подобласти  $S_0$  принимается  $n_A = 0$ .

С целью анализа движения ползуна система уравнений (4.6) была численно проинтегрирована при следующих значениях (если не оговорено иное) параметров системы и законов управления (2.8) и (3.6):

$$m_0 = 0.5, m_1 = 0.2, m_d = 0.3; \quad a_1 = -0.3, b_1 = -0.4, d = b/3,$$

$$\tau = T/2, \Omega = 10; \quad \mu = 0.3.$$

При этом параметр  $T$  законов управления  $\xi_1(t)$  и  $\omega_d(t)$  варьировался.

Рассмотрим сначала случай  $T \geq T_0$ , где

$$T_0 = 2\sqrt{\frac{2(a_1 - b_1)m_1}{\mu mg}}.$$

Величина  $T_0$  определяется в подразделе 2.2.3. Как было установлено, при таком ограничении на  $T$  корпус не совершает попятное движение вдоль оси  $O\xi$ . При указанных выше значениях параметров  $T \approx 0.23$ .

На рисунке 4.4 представлены графики зависимости координат корпуса от времени при  $T = 0.3$ . Отметим, что движение корпуса периодическое с периодом  $T$ , так как, ввиду наложенного на  $T$  ограничения, корпус успевает остановиться до получения следующего импульса. При этом смещение центра корпуса, как и его поворот, за первый период движения меньше чем за последующие. Это объясняется тем, что приращение скорости  $\Delta v_O$  в момент времени 0 вдвое меньше, чем в моменты времени  $kT$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Заметим также, что попятный поворот корпуса отсутствует, так как к моменту начала ускоренного вращения диска в обратную сторону корпус успевает остановиться.

Рассмотрим теперь случай  $T < T_0$ . На рисунке 4.5 изображены графики зависимости координат корпуса от времени при  $T = 0.2$ . Важное качественное отличие движения корпуса при  $T < T_0$  состоит в отсутствии промежутков

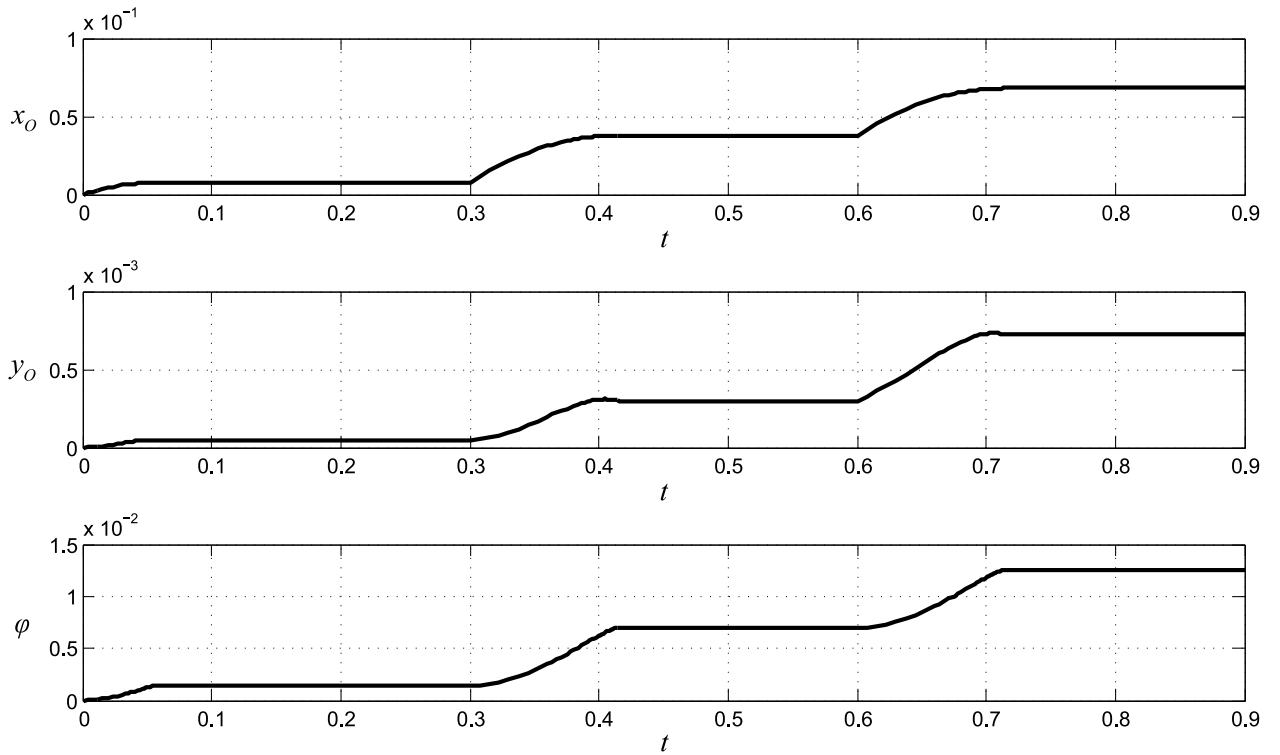


Рисунок 4.4. Графики координат  $x_O(t)$ ,  $y_O(t)$  и  $\varphi(t)$  при  $T = 0.3$  за три периода движения внутренних масс

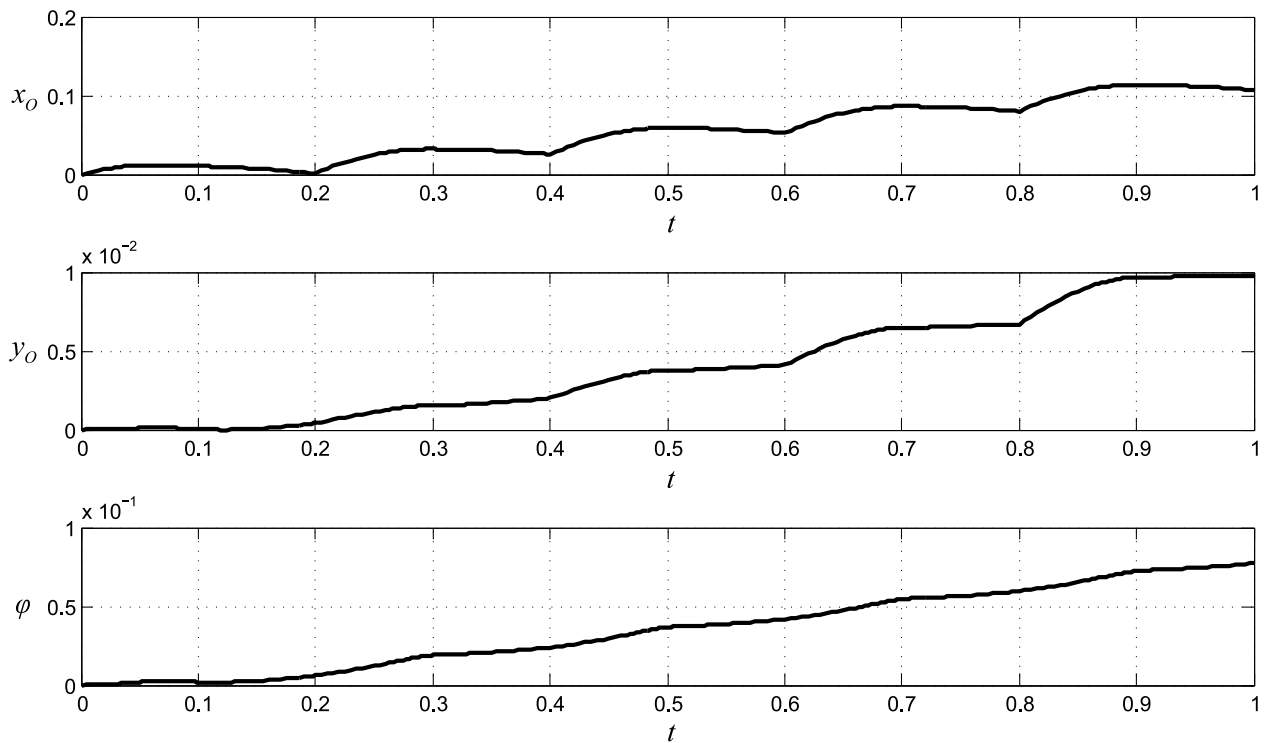


Рисунок 4.5. Графики координат  $x_O(t)$ ,  $y_O(t)$  и  $\varphi(t)$  при  $T = 0.2$  за пять периодов движения внутренних масс

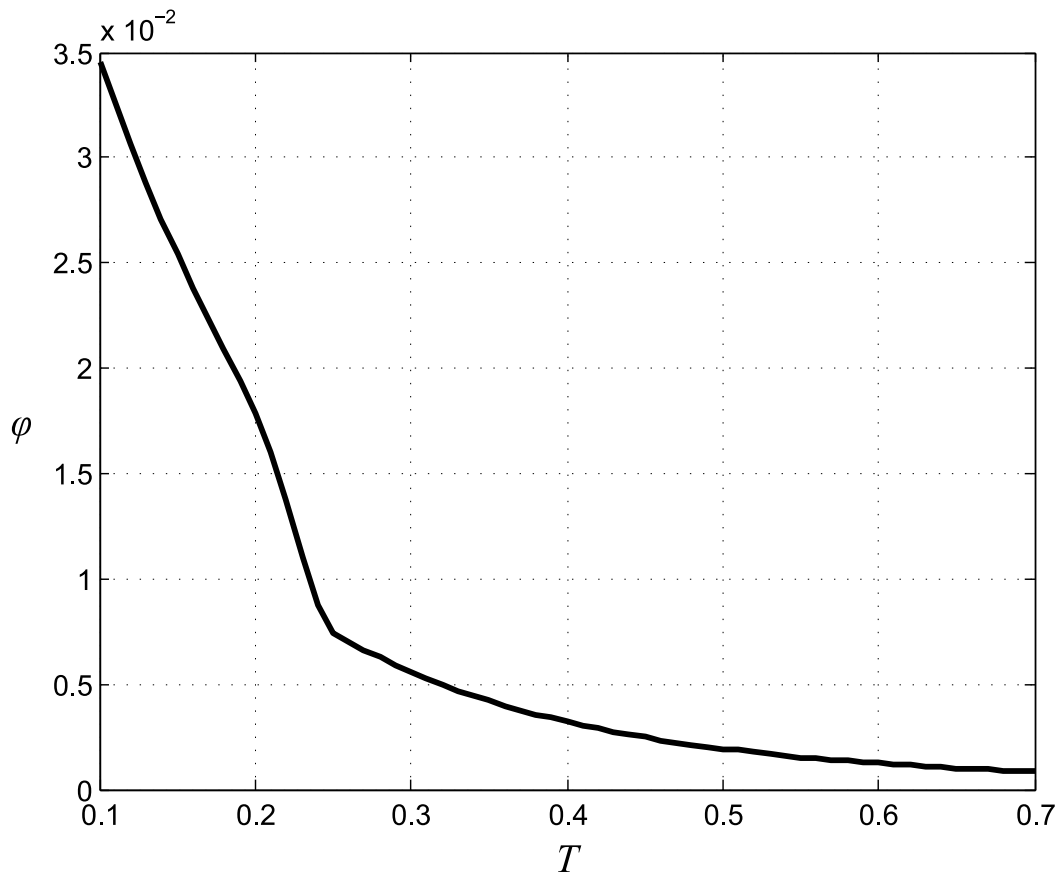


Рисунок 4.6. Зависимость угла поворота корпуса от периода движения внутренних масс

времени на которых корпус покоится. Такое поведение объясняется двумя факторами. С одной стороны уменьшается период  $T$  до следующего приращения скорости  $\Delta v_O$  точки  $O$  корпуса, с другой стороны в указанном случае величина  $\left| m_1 \ddot{\xi}_1 \right|$  превосходит величину силы трения покоя в любой момент времени, а не только в моменты  $kT$ , что приводит к возникновению попятного движения корпуса. Отметим также, что, как и в предыдущем случае, движение корпуса выходит на периодический режим.

График изменения угла поворота корпуса за один период  $T$  в установившемся режиме движения для значений  $0.1 \leq T \leq 0.7$  представлен на рисунке 4.6. Функция  $\varphi(T)$  монотонно увеличивается при уменьшении  $T$ . При этом можно заметить излом в окрестности значения  $T = T_0$ . Наличие этого излома объясняется тем, что при  $T < T_0$  отсутствуют промежутки времени, на которых

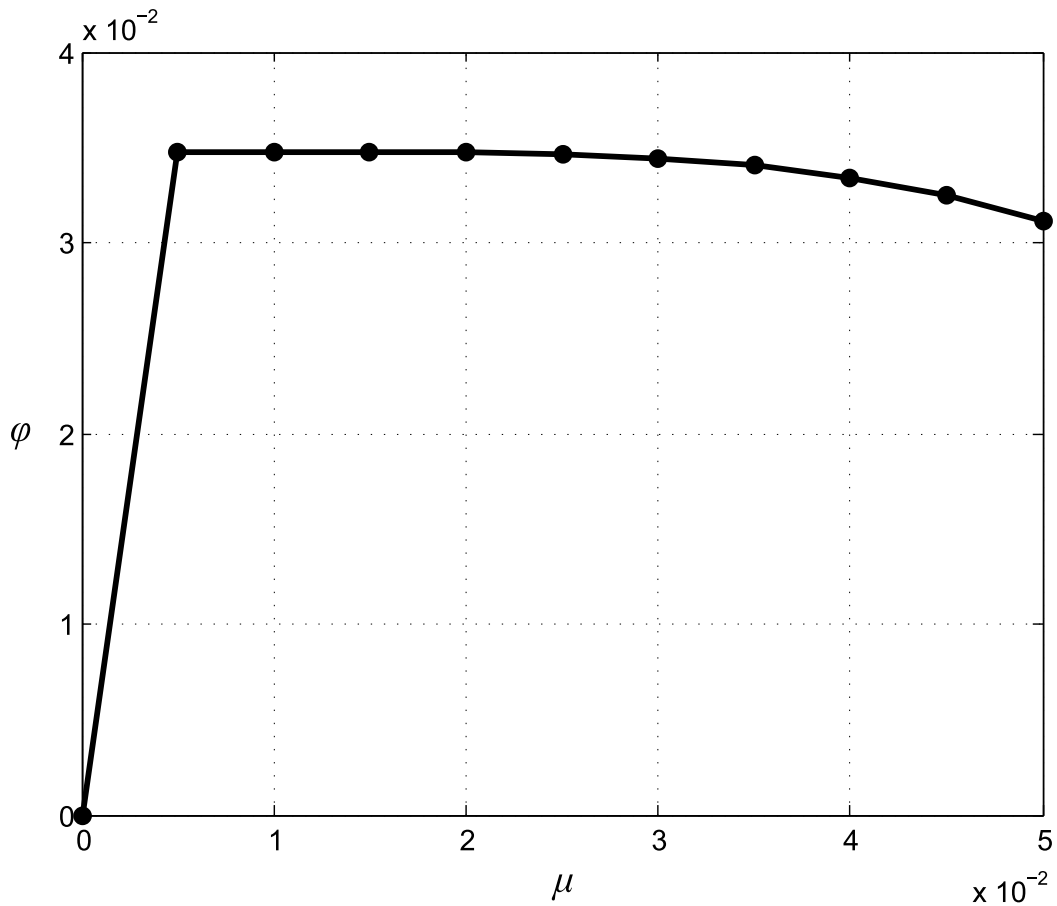


Рисунок 4.7. График зависимости угла поворота корпуса за один период движения от коэффициента трения при  $T = 0.5$

корпус покоится, в следствие чего он успевает повернуться на больший угол за каждый период  $T$ . Более того, на интервалах времени  $kT + \tau < t < (k + 1)T$  диск равноускоренно замедляет свое вращение, что опять же приводит к неравномерности распределения нормальных напряжений в области контакта, а значит и распределения сил трения, с той лишь разницей, что теперь максимум распределения приходится на противоположную, относительно оси  $O\xi$ , сторону контакта. Учитывая, что в это же время центр корпуса начинает двигаться в противоположную сторону (рисунок 4.5), это еще больше увеличивает угол поворота.

Установлено, что угол поворота корпуса за период  $T$  положителен, если  $\Omega > 0$  и монотонно увеличивается с увеличением  $\Omega$ .

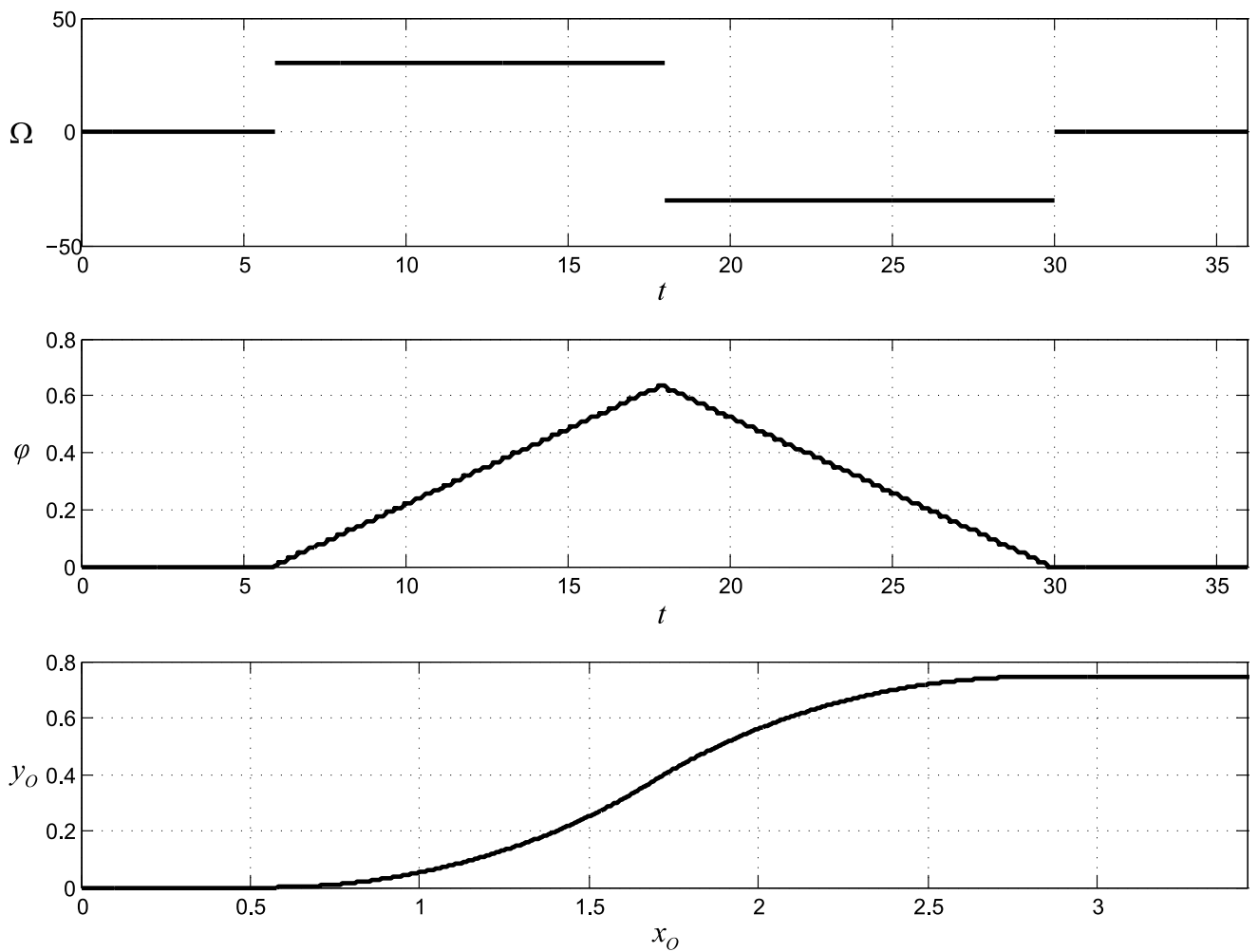


Рисунок 4.8. Программное управление параметром  $\Omega$ , позволяющее провести корпус по S-образной траектории

С ростом коэффициента трения величина угла поворота монотонно падает, однако при  $\mu = 0$  (случай гладкой плоскости) корпус не поворачивается вовсе. Следовательно, угол поворота максимален при малых значениях коэффициента трения. На рисунке 4.7 представлен график зависимости угла поворота корпуса от коэффициента трения при малых значениях последнего за один период движения при  $T = 0.5$ . При стремлении коэффициента трения к нулю величина угла поворота асимптотически стремится к некоторому максимальному значению.

Проведенный качественный анализ позволяет предложить программу прохода корпуса по произвольной траектории движения на плоскости, управляя при этом только параметром  $\Omega$  и считая, что  $T > T_0$ . Если  $\Omega = 0$ , корпус дви-

жется поступательно вдоль продольной оси симметрии  $O\xi$ . Если  $\Omega > 0$ , корпус совершает поворот против часовой стрелки, при этом чем больше  $\Omega$ , тем больше величина угла поворота корпуса за каждый период движения. Если же  $\Omega < 0$ , корпус совершает поворот по часовой стрелке. На рисунке 4.8 представлен пример программы управления параметром  $\Omega$  и соответствующие ей графики зависимости угла поворота корпуса от времени и траектории движения точки  $O$  на плоскости, при этом везде  $T = 0.3$ . Программа, представленная на графиках и соответствующая движению точки  $O$  по S-образной траектории, имеет вид:  $\Omega = 0$  (20 периодов),  $\Omega = 30$  (40 периодов),  $\Omega = -30$  (40 периодов),  $\Omega = 0$  (20 периодов движения).

### 4.3. Случай вертикально-осевого расположения диска

#### 4.3.1. Уравнения движения и коэффициенты модели распределения нормальных напряжений

Рассмотрим теперь случай вертикально-осевой ориентации диска, то есть расположим диск внутри корпуса таким образом, чтобы ось его вращения была направлена вертикально (рисунок 4.9). Тогда точки диска принадлежат плоскости  $O\xi\eta$  и их радиус-векторы:

$$\mathbf{r}_{O_i} = \xi_i \mathbf{e}_\xi + \eta_i \mathbf{e}_\eta, \quad i = 2, \dots, n,$$

а формула (1.33) принимает вид

$$J = C + m_1 \xi_1^2 + J_d.$$

Функции, необходимые для определения уравнений движения корпуса, находятся аналогично случаю горизонтально-осевого расположения диска. Учитывая, что в данном случае относительные угловые скорость и ускорение диска определяются выражениями:

$$\boldsymbol{\omega}_d = \omega_d \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_d = \varepsilon_d \mathbf{k},$$

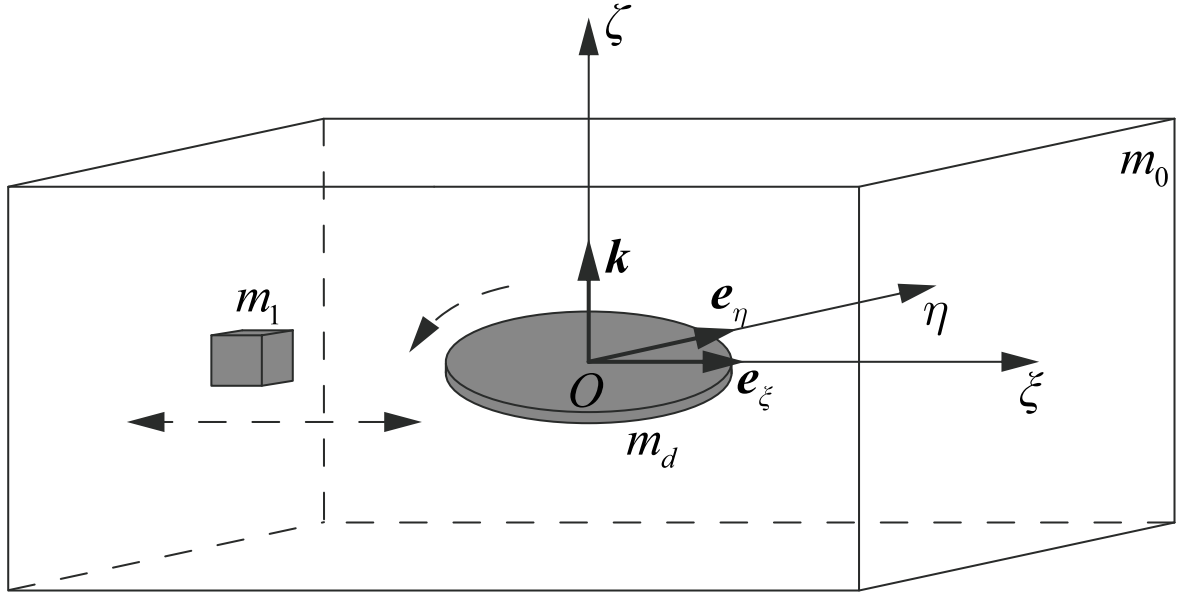


Рисунок 4.9. Ползун с точечной массой и диском, ось которого направлена по оси  $O\zeta$

сначала упростим выражения для переносного, относительного и кориолисова ускорений  $i$ -й точки диска:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_i^e &= \mathbf{w}_O + \ddot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{Oi} + \dot{\varphi}^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{Oi}) = \mathbf{w}_O + \ddot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{Oi} - \dot{\varphi}^2 \mathbf{r}_{Oi}, \\ \mathbf{w}_i^r &= \varepsilon_d \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{Oi} + \omega_d^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{Oi}) = \varepsilon_d \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{Oi} - \omega_d^2 \mathbf{r}_{Oi}, \\ \mathbf{w}_i^c &= 2\dot{\varphi} \mathbf{k} \times (\omega_d \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{Oi}) = -\dot{\varphi} \omega_d \mathbf{r}_{Oi}.\end{aligned}$$

Подставляя два последних уравнения в формулу (1.31), найдем функцию  $M_{\varphi d}$ :

$$M_{\varphi d} = - \int (\mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{w}_i^r) \cdot \mathbf{k} dm_i = -\varepsilon_d \int r_{Oi}^2 dm_i = -J_d \varepsilon_d,$$

где учтено, что интеграл от  $\mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{w}_O$  по всему диску равен нулю в силу нечетности этой функции и симметричности диска, а также то, что  $\mathbf{r}_{Oi} \times \mathbf{w}_i^c = 0$  в силу коллинеарности векторов.

Функции  $R_{jd}$ , как и в случае горизонтально-осевого расположения диска, равны нулю:

$$\begin{aligned}R_{\xi d} &= - \int (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_O) \cdot \mathbf{e}_\xi dm_i = - \int \left( -\eta_i (\ddot{\varphi} + \varepsilon_d) - \xi_i (\dot{\varphi} + \omega_d)^2 \right) dm_i = 0, \\ R_{\eta d} &= - \int (\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_O) \cdot \mathbf{e}_\eta dm_i = - \int \left( \xi_i (\ddot{\varphi} + \varepsilon_d) - \eta_i (\dot{\varphi} + \omega_d)^2 \right) dm_i = 0.\end{aligned}$$

Складывая функцию  $M_{\varphi d}$  с  $M_{\varphi 1}$ , а также учитывая выражения для  $R_{j1}$ , получим:

$$\begin{aligned} M_{\varphi} &= -J_d \varepsilon_d - m_1 \xi_1 \left( \ddot{y}_O \cos \varphi - \ddot{x}_O \sin \varphi + 2\dot{\varphi} \dot{\xi}_1 \right), \\ R_{\xi} &= -m_1 \left( -\dot{\varphi}^2 \xi_1 + \ddot{\xi}_1 \right), \quad R_{\eta} = -m_1 \left( \ddot{\varphi} \xi_1 + 2\dot{\varphi} \dot{\xi}_1 \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Как и в предыдущем случае, полученные функции зависят от  $\ddot{x}_O$ ,  $\ddot{y}_O$  и  $\ddot{\varphi}$ . Дословно повторяя те же самые действия, что и в разделе 4.2, получим уравнения относительно  $\ddot{\varphi}$ :

$$J' \ddot{\varphi} = -J_d \varepsilon_d - 2m_1 \left( 1 - \frac{m_1}{m} \right) \dot{\varphi} \dot{\xi}_1 \xi_1 - f \left( F_{\varphi} - \frac{m_1}{m} \xi_1 F_{\eta} \right),$$

где

$$J' = C + m_1 \left( 1 - \frac{m_1}{m} \right) \xi_1^2 + J_d.$$

Для определения коэффициентов модели распределения нормальных напряжений (1.19), вычислим суммы:

$$\sum_{i=2}^s m_i \chi_{\xi i} = \int \eta_i (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{k}) dm_i = 0, \quad \sum_{i=2}^s m_i \chi_{\eta i} = - \int \xi_i (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{k}) dm_i = 0.$$

Отсюда, с учетом формул (4.2), найдем коэффициенты  $\lambda_j$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{\xi} &= \frac{a_{\eta\eta} a_{\xi 0} \lambda_0 - a_{\xi\eta} (a_{\eta 0} \lambda_0 - m_1 g \xi_1)}{a_{\xi\xi} a_{\eta\eta} - a_{\xi\eta} a_{\eta\xi}}, \\ \lambda_{\eta} &= \frac{a_{\xi\xi} (a_{\eta 0} \lambda_0 - m_1 g \xi_1) - a_{\eta\xi} a_{\xi 0} \lambda_0}{a_{\xi\xi} a_{\eta\eta} - a_{\xi\eta} a_{\eta\xi}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Окончательно запишем систему уравнений движения корпуса с расположенными внутри точечной массой, двигающейся вдоль продольной оси симметрии корпуса  $O\xi$  и диском, ось которого направлена по оси  $O\zeta$ :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_O &= (R_{\xi} - fF_{\xi}) \cos \varphi - (R_{\eta} - fF_{\eta}) \sin \varphi, \\ m\ddot{y}_O &= (R_{\xi} - fF_{\xi}) \sin \varphi + (R_{\eta} - fF_{\eta}) \cos \varphi, \\ J' \ddot{\varphi} &= -J_d \varepsilon_d - 2m_1 \left( 1 - \frac{m_1}{m} \right) \dot{\varphi} \dot{\xi}_1 \xi_1 - f \left( F_{\varphi} - \frac{m_1}{m} \xi_1 F_{\eta} \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где функции  $R_{\xi}$  и  $R_{\eta}$  определяются второй и третьей формулами (4.7), а коэффициенты модели распределения нормальных напряжений (1.19) формулами



(4.1) и (4.8). В качестве законов управления перемещением точечной массы и относительной угловой скоростью диска, как и в предыдущем случае, возьмем функции (2.8) и (3.6), вновь полагая  $\tau = T/2$ .

### 4.3.2. Анализ движения корпуса

Вращение корпуса в случае вертикально-осевого расположения диска достигается не за счет изменения распределения нормальных напряжений, как это было в случае горизонтально-осевого расположения диска, а за счет его ускоренного вращения вокруг вертикальной оси, что приводит к повороту корпуса. При этом угловое ускорение корпуса направлено в противоположную, относительно углового ускорения диска, сторону.

На рисунке 4.10 изображен график распределения нормальных напряжений в области контакта корпуса и плоскости при следующих условиях: корпус движется вдоль оси  $O\xi$  со скоростью  $\dot{x}_O = 0.1$ , точечная масса  $m_1$  расположена так, что  $\xi_1 = a_1$ , диск начинает вращение с угловым ускорением  $\varepsilon_d = 100$ . Отметим симметричность распределения напряжений относительно оси симметрии корпуса  $O\xi$ . В отличие от случая горизонтально-осевого расположения диска, здесь распределение нормальных напряжений не зависит от его относительного вращения.

На рисунке 4.11 представлен график распределения нормальных напряжений при  $\dot{\varphi} = 0.3$ , при этом остальные параметры остаются прежними. Можно заметить, что среднее давление корпуса на плоскость слева от оси  $O\xi$  выше, чем справа. Однако такой эффект происходит не из-за ускоренного вращения диска, а из-за поворота самого корпуса вокруг вертикали против часовой стрелки. Таким образом можно заключить, что нормальные напряжения возрастают по направлению движения корпуса.

Качественно исследуем движение корпуса. С этой целью численно проинтегрируем систему (4.9) при различных значениях параметров  $T$  и  $\Omega$  законов

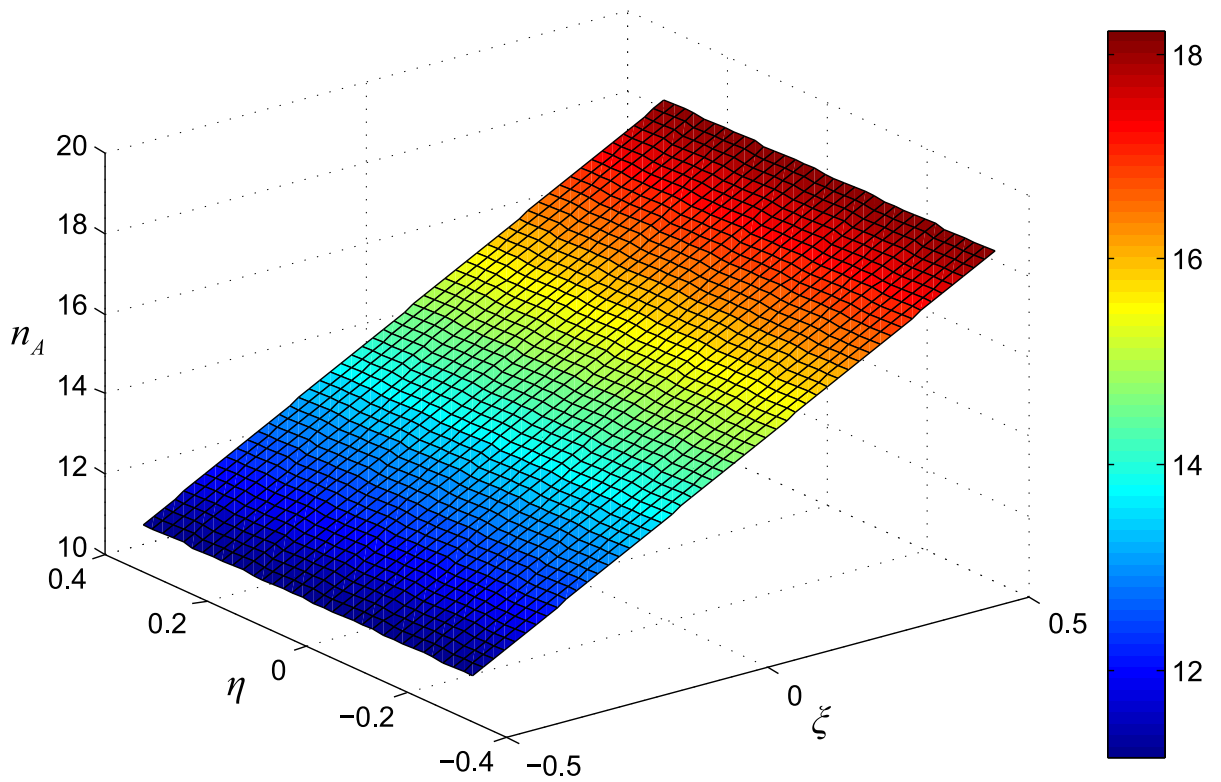


Рисунок 4.10. График распределения нормальных напряжений в области контакта корпуса и плоскости при  $\varepsilon_d = 100$

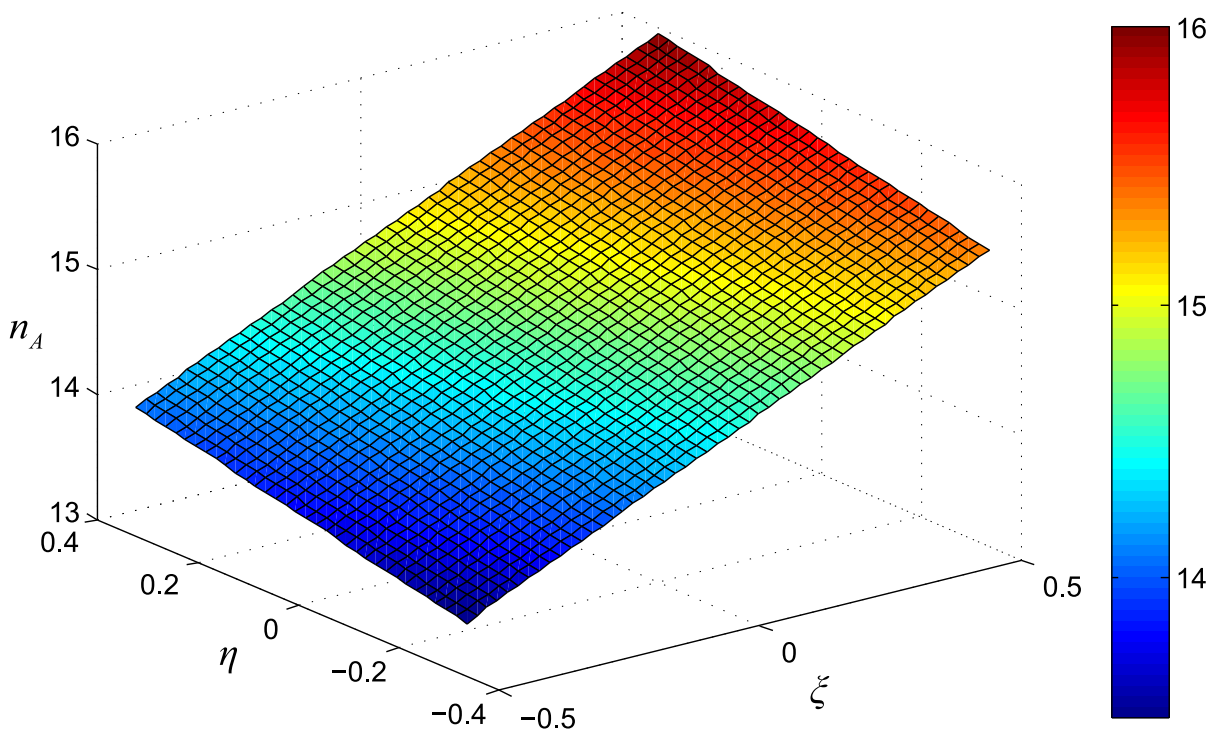


Рисунок 4.11. График распределения нормальных напряжений в области контакта корпуса и плоскости при  $\dot{\varphi} = 0.3$

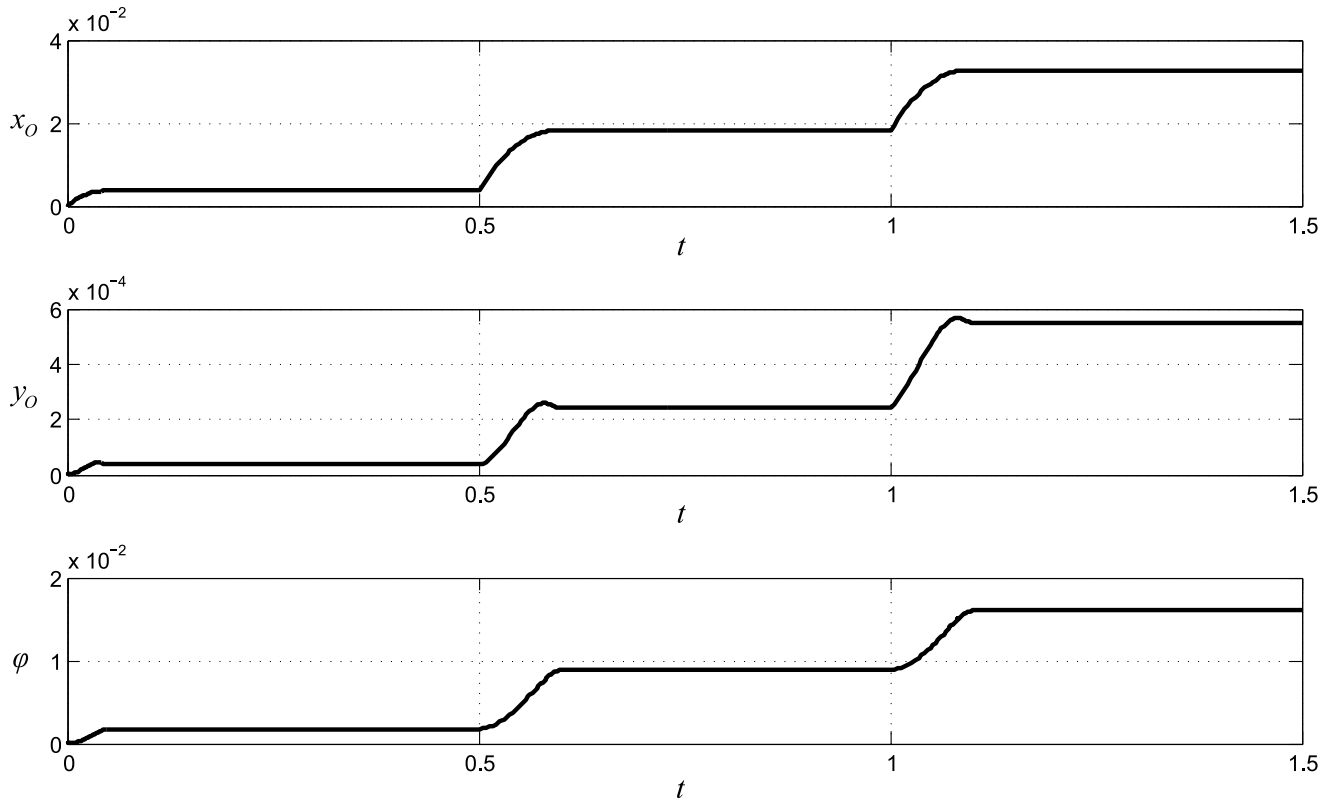


Рисунок 4.12. Графики координат  $x_O(t)$ ,  $y_O(t)$  и  $\varphi(t)$  при  $T = 0.5$  и  $\Omega = -10$  за три периода движения внутренних масс

управления точечной массой  $m_1$  и диска. Прочие параметры возьмем те же, что и в подразделе 4.2.2.

Рассмотрим сначала случай  $T > T_0$ . На рисунке 4.12 представлены графики зависимости координат корпуса от времени за три периода относительного движения внутренних масс при  $T = 0.5$  и  $\Omega = -10$ . Качественно графики совпадают с аналогичными графиками представленными на рисунке 4.4. Это связано с тем, что при  $\Omega = -10$  момент, создаваемый диском, не достаточно велик для того, чтобы повернуть корпус из состояния покоя, преодолев силу трения. Поэтому поворот корпуса происходит только тогда, когда его центр движется вдоль продольной оси симметрии  $O\xi$  в результате полученного от передвижения точечной массы импульса.

На рисунке 4.13 изображены графики зависимости координат корпуса от времени при  $\Omega = -40$ , причем параметр  $T$  прежний. При такой величине  $\Omega$

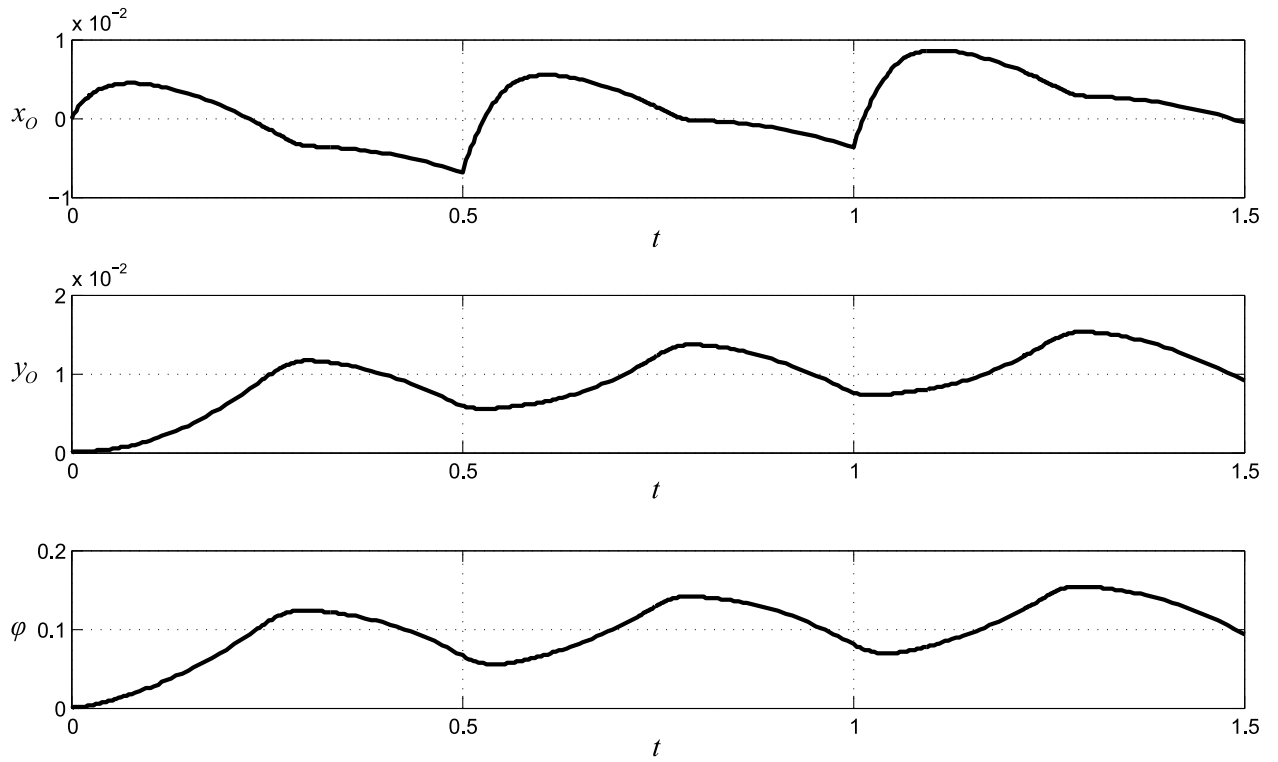


Рисунок 4.13. Графики координат  $x_O(t)$ ,  $y_O(t)$  и  $\varphi(t)$  при  $T = 0.5$  и  $\Omega = -40$  за три периода движения внутренних масс

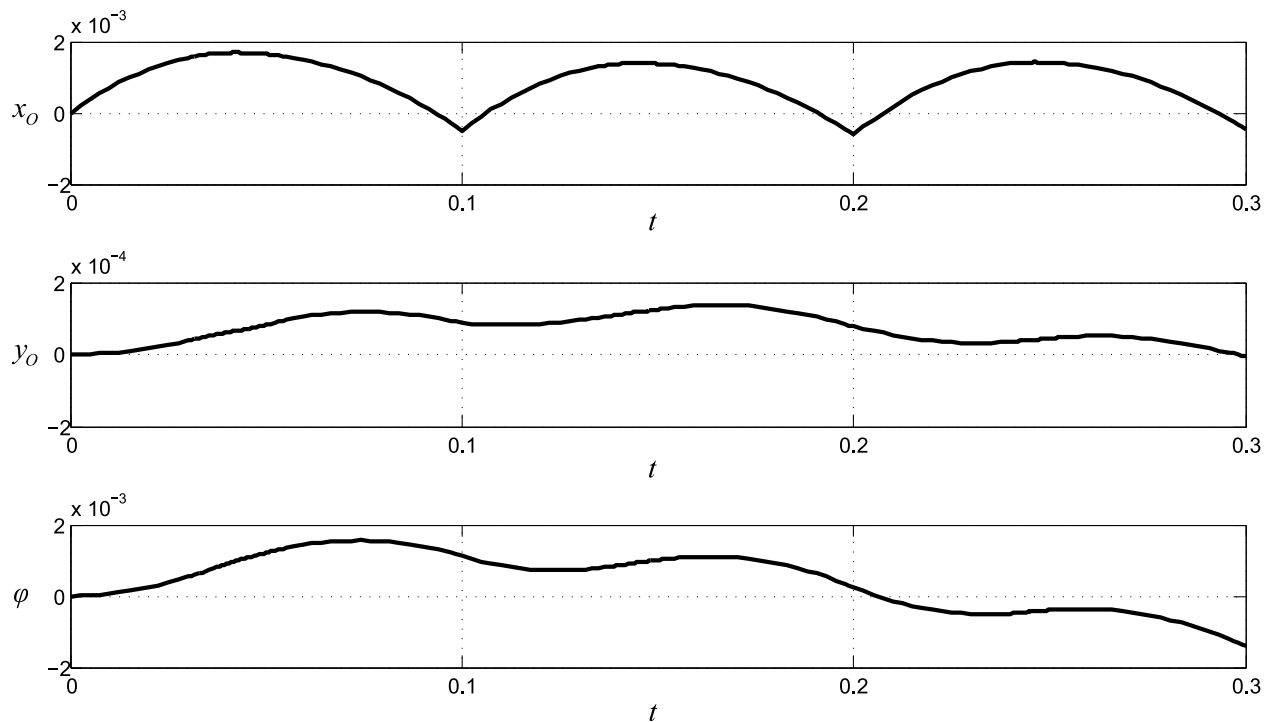


Рисунок 4.14. Графики координат  $x_O(t)$ ,  $y_O(t)$  и  $\varphi(t)$  при  $T = 0.1$  и  $\Omega = -1$  за три периода движения внутренних масс

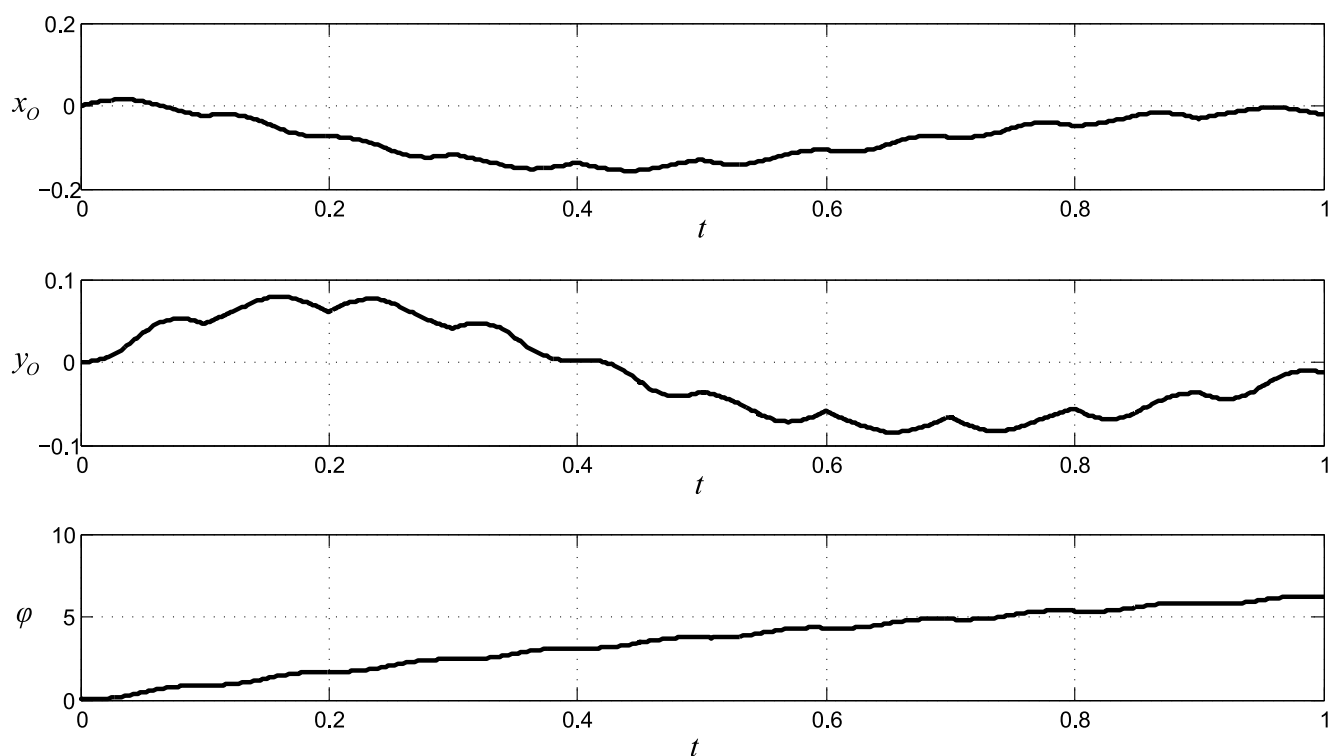


Рисунок 4.15. Графики координат  $x_O(t)$ ,  $y_O(t)$  и  $\varphi(t)$  при  $T = 0.1$  и  $\Omega = -300$  за три периода движения внутренних масс

момент силы, создаваемый диском, становится достаточным, чтобы повернуть корпус из состояния покоя. Как видно из представленных графиков это, во-первых, приводит к попятному повороту на каждом периоде движения подвижных масс, а, во-вторых, к попятному движению корпуса вдоль продольной оси симметрии, не смотря на то, что  $T > T_0$ . Это попятное смещение происходит именно благодаря обратному повороту корпуса. Заметим, что при горизонтально-осевом расположении диска подобный эффект невозможен.

Положим теперь  $T < T_0$ . Как было определено ранее, при таком выборе параметра  $T$  корпус находится в движении на любом интервале времени. В данном случае это приводит к тому, что попятный поворот имеет место при любых значениях параметра  $\Omega$ . В качестве примера приведем рисунок 4.14, на котором изображены графики зависимости координат корпуса от времени при  $T = 0.1$  и  $\Omega = -1$ . При увеличении параметра  $\Omega$  попятное движение уменьшается, однако необходимо помнить, что большие значения  $\Omega$ , во-первых, технически

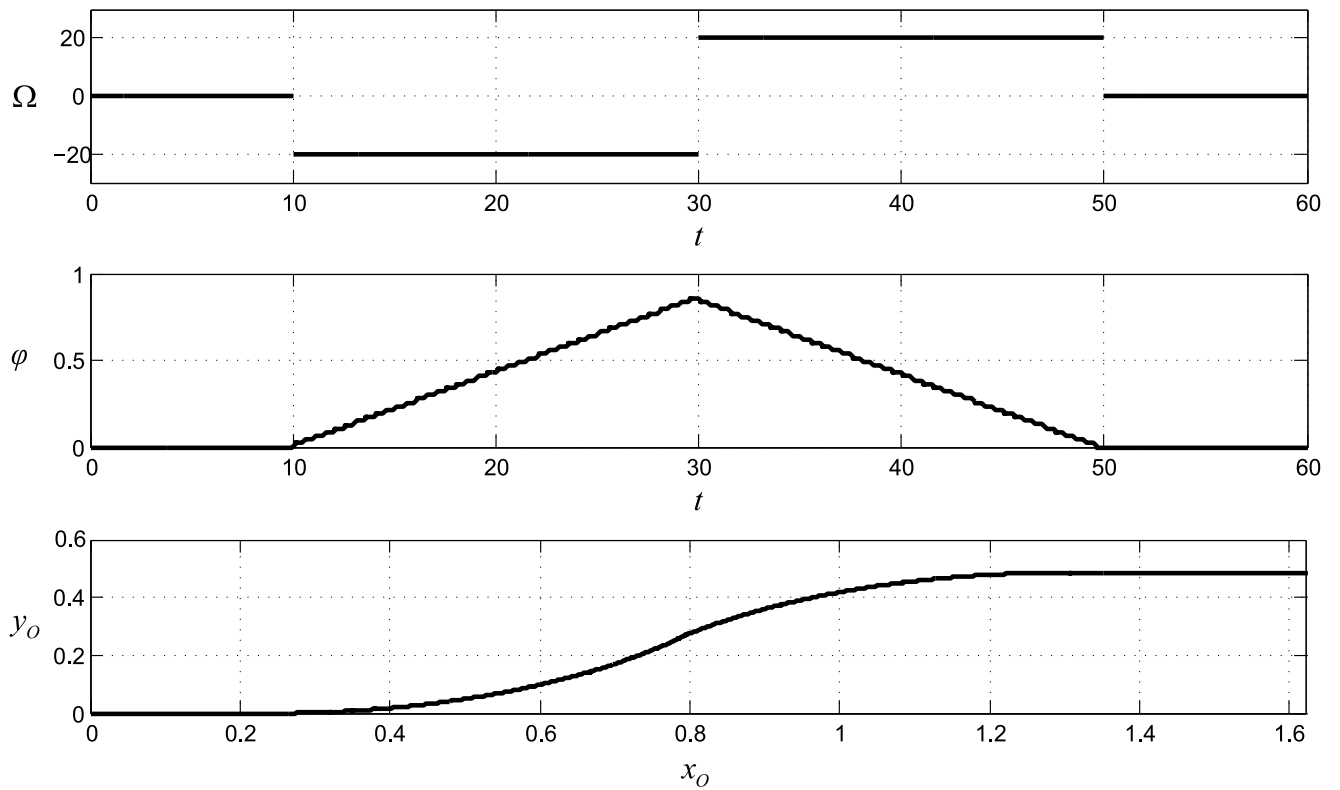


Рисунок 4.16. Программное управление параметром  $\Omega$ , позволяющее провести корпус по S-образной траектории

нереализуемы, так как раскрутка диска до высоких скоростей требует больших энергетических затрат, а, во-вторых, приводят к слишком быстрому повороту корпуса, что затрудняет управление ориентацией ползуна. Соответствующий график приведен на рисунке 4.15, где  $\Omega = -300$ , а параметр  $T$  прежний. Таким образом, технически реализуемый режим движения, при котором корпус ползуна с вертикально-осевым расположением диска не совершает попятного поворота, осуществляется при  $T > T_0$  и малых величинах  $\Omega$ .

На рисунке 4.16 приведен пример такого управления параметром  $\Omega$ , что движение корпуса осуществляется по S-образной траектории, причем  $T = 0.5 > T_0$ . При  $\Omega = 0$  корпус движется прямолинейно вдоль продольной оси симметрии  $O\xi$  на протяжении 20 периодов движения. Далее, при  $\Omega = -20$ , в течение 40 периодов относительного движения, корпус поворачивается против часовой стрелки. При  $\Omega = 20$ , в течение тех же 40 периодов движения, корпус поворачивается по часовой стрелке на тот же суммарный угол. После этого, вновь положив  $\Omega = 0$

на протяжении 20 периодов движения, корпус движется поступательно вдоль оси  $O\xi$ .

#### 4.4. Сравнение величин углов поворота корпуса при различных ориентациях диска

Сравним величины углов поворота корпуса ползуна для горизонтально- и вертикально-осевого расположений диска при указанных выше законах управления точечной массой и диском. При этом для корректности сравнения параметры системы и законов управления выбирались одинаковыми. Единственным исключением является параметр  $\Omega$ , выражающий максимальную относительную угловую скорость диска, который для обоих случаев расположения диска брался одинаковым по величине, но с противоположным знаком. Такой выбор сделан из соображений наглядности и обусловлен тем, что при одинаковом знаке  $\Omega$ , корпус будет поворачиваться в разные стороны при смене расположения диска.

На рисунке 4.17 приведены результаты численного моделирования. Графики показывают угол поворота корпуса за один период движения для различных значений коэффициента трения, при этом  $|\Omega| = 10$ . Можно сделать вывод, что величина коэффициента трения играет существенную роль с точки зрения выбора ориентации диска и, соответственно, максимизации угла поворота. При значениях коэффициента трения  $0.3 \leq \mu \leq 1.5$  большая величина угла поворота достигается при вертикально-осевой ориентации диска. При значениях коэффициента трения  $\mu \geq 1.5$  больший угол достигается при горизонтально-осевом расположении диска. При малых значениях коэффициента трения ( $\mu < 0.3$ ), в случае вертикально-осевого расположения диска отсутствуют промежутки времени, на которых корпус покоится, то есть происходит его попятный поворот. В связи с этим поворот менее предсказуем по сравнению со случаем горизонтально-осевого расположения диска. В частности, возможна ситуация,

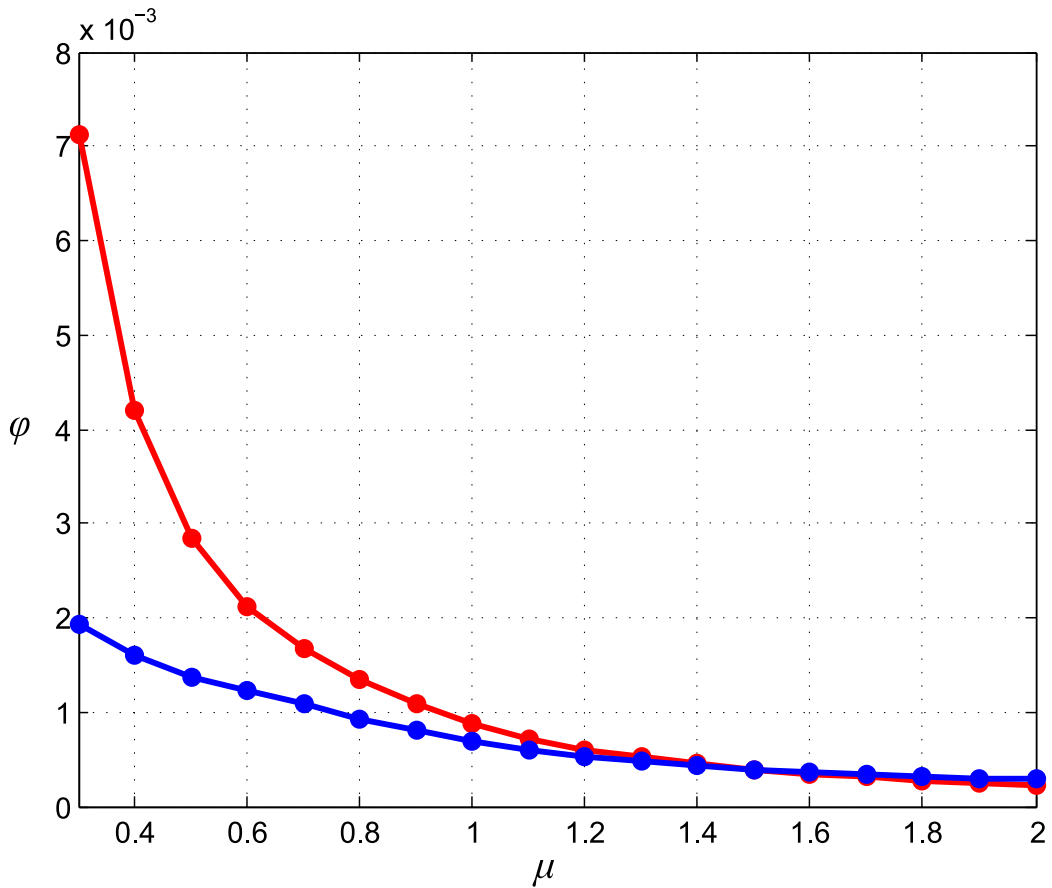


Рисунок 4.17. Зависимость угла поворота корпуса за один период движения внутренних масс от коэффициента трения; синий и красный графики — горизонтально- и вертикально-осевое расположение диска соответственно

когда корпус будет в среднем поворачивать вокруг вертикали по часовой стрелке, а не против нее. Поэтому горизонтально-осевое расположение диска при малых значениях коэффициента трения представляется более целесообразным.

Учитывая, что коэффициент трения скольжения между различными фрикционными парами обычно лежит в пределах  $0.2 \leq \mu \leq 0.6$ , вертикально-осевое расположение диска представляется более эффективным с точки зрения максимизации угла поворота. Однако необходимо учитывать, что при таком выборе ориентации возможен обратный поворот корпуса вследствие торможения диска. Этот нежелательный эффект полностью отсутствует при горизонтально-осевом расположении из-за специфики эффекта, в результате которого происходит по-



ворот корпуса. При этом энергетические затраты, уходящие на раскрутку и торможение диска, в обоих случаях одинаковы.

#### 4.5. Заключение к главе 4

Изучалось трехмерное движение корпуса на шероховатой плоскости в результате перемещений точечной массы вдоль продольной оси симметрии корпуса и вращения диска, центр которого совпадает с центром корпуса. В качестве закона перемещения точечной массы использовался кусочно-квадратичный закон, предложенный в главе 2, а в качестве закона изменения угловой скорости диска — кусочно-линейная функция представленная в главе 3. Выбор этих законов управления обусловлен, с одной стороны, их относительной простотой, а с другой — возможностью демонстрации результирующего трехмерного движения корпуса.

Предложено два способа ориентирования диска: горизонтально- и вертикально-осевое. Получены системы уравнений движения и выражения для определения коэффициентов линейной модели распределения нормальных напряжений в области контакта корпуса и плоскости. В обоих случаях именно ускоренное вращение диска приводит к повороту ползуна. Однако, в первом случае поворот достигается за счет сил трения между опорной плоскостью и основанием корпуса, при этом корпус обязательно должен двигаться вдоль продольной оси симметрии, а во втором — вопреки силам трения, за счет непосредственного создания вертикального момента силы, при этом корпус изначально может и покоиться. Обнаружено, что в случае горизонтально-осевого расположения диска возможны ситуации, когда в некоторой подобласти контакта корпуса и плоскости происходит отрыв, что необходимо учитывать при использовании модели распределения нормальных напряжений. Проведен численный анализ полученных уравнений, рассмотрены типичные траектории движения

корпуса в зависимости от периода колебаний точечной массы и диска, определены их характерные особенности.

Для горизонтально-осевого расположения диска получена зависимость величины угла поворота корпуса от периода колебаний внутренних масс. Можно сделать вывод, что величина угла поворота растет при уменьшении периода. Также численно получена зависимость угла поворота за каждый период движения масс от коэффициента трения. Отличительной особенностью является асимптотическое стремление величины угла поворота корпуса к некоторому максимальному значению при стремлении коэффициента трения к нулю, при том, что в случае, если коэффициент трения равен нулю (случай гладкой плоскости), поворот отсутствует вовсе.

Для обоих способов расположения диска, проведенный анализ позволил предложить программу управления движением внутренних масс, в результате которой корпус проходит по S-образной траектории.

В конце главы приводится сравнение эффективности поворотов корпуса для горизонтально- и вертикально-осевого расположений диска. Основным параметром определяющим эффективность использования того или иного расположения является коэффициент трения. При средних значениях коэффициента трения ( $0.3 \leq \mu \leq 1.5$ ) вертикально-осевое расположение диска выглядит предпочтительным, а при малых ( $\mu < 0.3$ ) и больших ( $\mu > 1.5$ ) — горизонтально-осевое. Эффективность горизонтально-осевого расположения диска при малых значениях коэффициента трения объясняется наличием попятного поворота корпуса при использовании вертикально-осевого расположения, а при больших — большой величиной сил трения, затрудняющих поворот корпуса по инерции.

## Заключение

В рамках диссертационной работы изучалось движение мобильного устройства без внешних движителей с плоским прямоугольным основанием, опирающегося на шероховатую плоскость. Движение устройства достигается благодаря перемещению материальных точек, расположенных внутри, и взаимодействию корпуса с опорной плоскостью посредством сил трения. В отличие от работ [32–45] рассмотрена трехмерная (движение тела по плоскости) задача определения движения мобильного устройства для произвольной конфигурации внутренних материальных точек.

Получена система уравнений движения корпуса устройства, а также определены коэффициенты модели нормальных напряжений. Сформулированы достаточные условия равновесия корпуса на плоскости.

Далее разобран частный случай — поступательное движение мобильного устройства вдоль продольной оси его симметрии. Рассмотрен случай материальной точки, двигающейся вдоль продольной оси симметрии корпуса [32, 33, 36, 40, 42, 44, 45] по гармоническому закону. Движение системы определено в зависимости от частоты колебаний точки.

Рассмотрена еще одна распространенная конфигурация материальных точек [34, 35, 37–40]: две точечные массы, одна из которых движется вдоль продольной оси симметрии корпуса, а вторая — вдоль вертикали. Показано, что в случае использования гармонического закона движений для обеих масс такая система эквивалентна математическому маятнику, расположенному внутри корпуса, при условии, что массы движутся в противофазе. Найдены уравнения движения корпуса и маятника. При этом предполагалось, что в качестве управляющего воздействия выступает момент силы, приложенный к маятнику. Коэффициенты закона управления были найдены из экспериментальных данных. Проведенное путем численного интегрирования уравнений моделирование движения системы показало качественное согласие с экспериментом.

Разобран еще один частный случай движения мобильного устройства — поворот вокруг центра масс. Рассмотрен случай однородного диска, расположенного в горизонтальной плоскости [64]. Для кусочно-линейного закона управления относительной угловой скоростью диска найдена область параметров закона управления, при выборе значений из которой главный момент сил трения покоя, действующая на корпус со стороны плоскости, гарантированно преодолевается.

Также исследован случай двух точечных масс [46, 47, 63–65], двигающихся в горизонтальной плоскости параллельно продольной оси симметрии корпуса в противофазе. Проведен анализ движения устройства при использовании кусочно-линейного закона управления смещением масс. Численно найдены параметры закона управления, доставляющие угловой скорости корпуса максимум в установившемся режиме поворота.

В последней главе вновь рассмотрен случай трехмерного движения корпуса. В качестве конфигурации внутренних тел выбрана точечная масса, двигающаяся вдоль продольной оси симметрии корпуса и однородный диск, центр которого совпадает с центром корпуса [60–62]. При этом диск ориентировался двумя способами, для каждого из которых получены уравнения движения системы и коэффициенты модели распределения нормальных напряжений.

Для случая горизонтально-осевого расположения диска показано, что поворот корпуса происходит именно благодаря неравномерному распределению нормальной нагрузки, вызванному ускоренным вращением диска. Движение системы проанализировано, выявлены зависимости величины поворота корпуса за один такт движения внутренних масс от параметров закона управления и коэффициента трения. Далее рассмотрен случай вертикально-осевого расположения диска, для которого также проведен численный анализ. Для обоих расположений диска приведена программа управления внутренними массами, позволяющая провести корпус по S-образной траектории. Произведено сравнение целесообразности выбора горизонтально- и вертикально-осевого располо-

жений диска, с точки зрения максимизации угла поворота корпуса мобильного устройства. Показано, что использование горизонтально-осевого расположения диска эффективнее при малых и больших значениях коэффициента трения, а вертикально-осевого — при средних.

Таким образом, в настоящей работе приведено комплексное исследование динамики мобильного устройства,двигающегося благодаря перемещениям внутренних тел. Приведены различные типовые примеры их конфигураций, позволяющие осуществить то или иное движение мобильного устройства.

## Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю проф. А.П. Иванову за помощь в создании настоящей работы и проф. Н.Н. Болотнику за критические замечания. Автор также выражает благодарность коллективу кафедры теоретической механики МФТИ за поддержку и помощь в изучении одноименного предмета.

## Литература

1. *Анцелович Е. С.* Леонардо да Винчи: Элементы физики. — М.: Учпедгиз, 1955.
2. *Amontons G.* De résistance caus ee dans les machines // *Mémoires de l'Academie Royale.* — 1699. — Pp. 203–222.
3. *Coulomb C. A.* Théorie des machines simples // *Mémoires de mathématique et de physique de l'Academie des sciences.* — 1785. — Vol. 10. — Pp. 161–331.
4. *Джеллетт Д. Х.* Трактат по теории трения. — М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.
5. *Canudas de Wit C., Olson H., Astrom K. J., Lishinsky P.* A new model for control of systems with friction // *IEEE Trans. AC.* — 1995. — Vol. 40, no. 3. — Pp. 419–425.
6. *Козлов В. В.* Лагранжева механика и сухое трение // *Нелинейная динамика.* — 2010. — Т. 6, № 4. — С. 855–868.
7. *Contensou P.* Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la théorie de la toupie // *Kreiselprobleme Gyrodynamics: IUTAM Symp. Celerina, 1962.* — Berlin etc., Springer, 1963. — Pp. 201–216.
8. *Журавлев В. Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // *ПММ.* — 1998. — Т. 62, № 5. — С. 762–767.
9. *Zhuravlev V. G.* The model of dry friction in the problem of the rolling of rigid bodies // *J. Appl. Math. Mech.* — 1998. — Vol. 62, no. 5. — Pp. 705–710.
10. *Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D. E.* Frictional coupling between sliding and spinning motion // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 90, no. 24. — P. 248302.

11. Фаркаш З., Бартельс Г., Унгер Т., Вольф Д. Э. О силе трения при поступательном и вращательном движении плоского тела // *Нелинейная динамика*. — 2011. — Т. 7, № 1. — С. 139–146.
12. Иванов А. П. О движении плоских тел при наличии трения покоя // *Изв. РАН. МТТ*. — 2003. — № 4. — С. 89–94.
13. Киреенков А. А., Семендяев С. В. Связанные модели трения скольжения и верчения: от теории к эксперименту // *Труды МФТИ*. — 2010. — Т. 2, № 3. — С. 174–181.
14. Kireenkov A.A. Further development of the theory of multicomponent dry friction // *Proceedings of the VI International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering*. — CIMNE, 2015. — Pp. 203–209.
15. Euler L. De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium. methodus nova et facilis // *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. — 1735. — Vol. 7. — Pp. 99–122.
16. Кориолис Г. Математическая теория явлений бильярдной игры. — М.: Гостехиздат, 1956.
17. Painlevé P. Leçons sur le frottement. — Paris: Hermann, 1895.
18. Appell P. Sur le mouvement d'une bille de billard avec frottement de roulement // *J. des mathématiques pures et appliquées 6e série*. — 1911. — Vol. 7. — Pp. 85–96.
19. Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992.
20. Розенблат Г. М. О безотрывных движениях твердого тела по плоскости // *Доклады РАН*. — 2007. — Т. 415, № 5. — С. 622–624.

21. Розенблат Г. М. О движении плоского твердого тела по шероховатой прямой // *Нелинейная динамика*. — 2006. — Т. 2, № 3. — С. 293–306.
22. Ишлинский А. Ю., Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения // *Изв. РАН. МТТ*. — 1981. — № 4. — С. 17–28.
23. Федичев О. Б., Федичев П. О. Торможение и остановка плоских тел, скользящих по шероховатой горизонтальной поверхности // *Нелинейная динамика*. — 2011. — Т. 7, № 3. — С. 549–558.
24. Ердикова Н. Н., Мамаев И. С. Динамика тела с осесимметричным основанием, скользящего по шероховатой плоскости // *Нелинейная динамика*. — 2013. — Т. 9, № 3. — С. 521–545.
25. Borisov A. V., Erdakova N. N., Ivanova T. B., Mamaev I. S. The dynamics of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2014. — Vol. 19, no. 6. — Pp. 607–634.
26. Киреенков А. А. О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения // *Изв. РАН. МТТ*. — 2002. — № 1. — С. 60–67.
27. Иванов А. П. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела // *ПММ*. — 2009. — Т. 73, № 2. — С. 189–203.
28. Иванов А. П. Основы теории систем с трением. — М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.
29. Иванов А. П., Шувалов Н. Д. О движении тяжелого тела с кольцевым основанием по горизонтальной плоскости и загадках керлинга // *Нелинейная динамика*. — 2011. — Т. 7, № 3. — С. 521–530.



30. *Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю.* Вибрационное перемещение. — М.: Наука, 1964.
31. *Блехман И. И.* Вибрационная механика. — М.: Наука, 1994.
32. *Черноуцько Ф. Л.* Анализ и оптимизация движения тела управляемого посредством подвижной внутренней массы // *ПММ.* — 2006. — Т. 70, № 6. — С. 915–941.
33. *Chernousko F. L.* Analysis and optimization of the motion of a body controlled by means of a movable internal mass // *J. Appl. Math. Mech.* — 2006. — Vol. 70, no. 6. — Pp. 819–842.
34. *Bolotnik N. N., Zeidis I. M., Zimmermann K., Yatsun S. F.* Dynamics of controlled motion of vibration-driven systems // *Journal of Computer and Systems Sciences International.* — 2006. — Vol. 45, no. 5. — Pp. 831–840.
35. *Болотник Н. Н., Зейдис И. М., Циммерманн К., Яцун С. Ф.* Динамика управляемых движений вибрационных систем // *Известия РАН.* — 2006. — № 5. — С. 157–167.
36. *Chernousko F. L.* The optimal periodic motions of a two-mass system in a resistant medium // *J. Appl. Math. Mech.* — 2008. — Vol. 72, no. 2. — Pp. 116–125.
37. *Соболев Н. А., Сорокин К. С.* Экспериментальное исследование модели виброробота с вращающимися массами // *Известия РАН. Теория и системы управления.* — 2007. — № 5. — С. 161–170.
38. *Болотник Н. Н., Фигурин Т. Ю.* Оптимальное управление прямолинейным движением твердого тела по шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс // *ПММ.* — 2008. — Т. 72, № 2. — С. 216–229.

39. Сорокин К. С. Перемещение механизма по наклонной шероховатой плоскости за счёт движения внутренних осциллирующих масс // *Известия РАН. Теория и системы управления*. — 2009. — № 6. — С. 150–158.
40. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н. Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел // *Тр. ИММ УрО РАН*. — 2010. — Т. 16, № 5. — С. 213–222.
41. Черноусько Ф. Л. Анализ и оптимизация прямолинейного движения двухмассовой системы // *ПММ*. — 2011. — Т. 75, № 5. — С. 707–717.
42. Fang H. B., Xu J. Dynamic analysis and optimization of a three-phase control mode of a mobile system with an internal mass // *Journal of Vibration and Control*. — 2011. — Vol. 17, no. 1. — Pp. 19–26.
43. Fang H. B., Xu J. Controlled motion of a two-module vibration-driven system induced by internal acceleration-controlled masses // *Archive of Applied Mechanics*. — 2012. — Vol. 82, no. 4. — Pp. 461–477.
44. Bolotnik N. N., Figurina T. Yu., Chernousko F. L. Optimal control of the rectilinear motion of a two-body system in a resistive medium // *J. Appl. Math. Mech.* — 2012. — Vol. 76, no. 1. — Pp. 1–14.
45. Chernousko F. L., Bolotnik N. N., Figurina T. Yu. Optimal control of vibrationally excited locomotion systems // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2013. — Vol. 18, no. 1-2. — Pp. 85–99.
46. Яцун С. Ф., Волкова Л. Ю. Моделирование динамических режимов вибрационного робота, перемещающегося по поверхности с вязким сопротивлением // *Спецтехника и связь*. — 2012. — № 3. — С. 25–29.

47. Волкова Л. Ю., Яцун С. Ф. Управление движением трехмассового робота, перемещающегося в жидкой среде // *Нелинейная динамика*. — 2011. — Т. 7, № 4. — С. 845–857.
48. Рамоданов С. М., Тененев В. А. Движение тела с переменной геометрией масс в безграничной вязкой жидкости // *Нелинейная динамика*. — 2011. — Т. 7, № 3. — С. 635–647.
49. Ветчанин Е. В., Мамаев И. С., Тененев В. А. Движение тела с переменной геометрией масс в вязкой жидкости // *Нелинейная динамика*. — 2012. — Т. 8, № 4. — С. 815–836.
50. Vetchanin E. V., Mamaev I. S., Tenenev V. A. The self-propulsion of a body with moving internal masses in a viscous fluid // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2013. — Vol. 18, no. 1-2. — Pp. 100–117.
51. Zheng M., Zhan Q., Liu J., Cai Y. Control of a spherical robot: Path following based on nonholonomic kinematics and dynamics // *Chinese Journal of Aeronautics*. — 2011. — Vol. 24, no. 3. — Pp. 337–345.
52. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Mamaev I.S. The dynamics of nonholonomic systems consisting of a spherical shell with a moving rigid body inside // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2014. — Vol. 19, no. 2. — Pp. 198–213.
53. Килин А. А., Караваев Ю. Л., Клековкин А. В. Кинематическая модель управления высокоманевренным мобильным сферороботом с внутренней омниколесной платформой // *Нелинейная динамика*. — 2014. — Т. 10, № 1. — С. 113–126.
54. Килин А. А., Караваев Ю. Л. Кинематическая модель управления сферороботом с неуравновешенной омниколесной платформой // *Нелинейная динамика*. — 2014. — Т. 10, № 4. — С. 497–511.

55. *Karavaev Yu. L., Kilin A. A.* The dynamics and control of a spherical robot with an internal omniwheel platform // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2015. — Vol. 20, no. 2. — Pp. 134–152.
56. *Караваяев Ю. Л., Килин А. А.* Динамика сфероробота с внутренней омниколесной платформой // *Нелинейная динамика.* — 2015. — Т. 11, № 1. — С. 187–204.
57. *Ivanov A. P.* On the control of a robot ball using two omniwheels // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2015. — Vol. 20, no. 4. — Pp. 441–448.
58. *Romanishin J.W., Gilpin K., Rus D.* M-blocks: Momentum-driven, magnetic modular robots // *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2013 IEEE/RSJ International Conference on.* — 2013.
59. *Ivanov A. P.* On the impulsive dynamics of m-blocks // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2014. — Vol. 19, no. 2. — Pp. 214–225.
60. *Иванов А. П., Сахаров А. В.* Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости // *Нелинейная динамика.* — 2012. — Т. 8, № 4. — С. 763–772.
61. *Ivanov A. P., Sakharov A. V.* On the dynamics of a rigid body with moving masses and a rotor on a rough plane // *Nonlinear Dynamics & Mobile Robotics.* — 2013. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 23–32.
62. *Сахаров А. В.* Поворот тела без внешних движителей при помощи ротора // *Труды МФТИ.* — 2014. — Т. 6, № 2. — С. 80–91.
63. *Сахаров А. В.* Поворот тела с двумя подвижными внутренними массами на шероховатой плоскости // *ПММ.* — 2015. — Т. 79, № 2. — С. 196–209.

64. *Sakharov A. V.* Rotation of the body with movable internal masses around the center of mass on a rough plane // *Regul. Chaotic Dyn.* — 2015. — Vol. 20, no. 4. — Pp. 428–440.
65. *Sakharov A. V.* Rotation of a body with two movable internal masses on a rough plane // *J. Appl. Math. Mech.* — 2015. — Vol. 79, no. 2. — Pp. 132–141.
66. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика. — 2-е изд., испр. и дополн. изд. — М.: ЧеРо, 1999.
67. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике: Учебное пособие для вузов / Под ред. Е. С. Пятницкий. — 3-е изд. изд. — М.: Физматлит, 2005.
68. Url: <http://www.me.umn.edu/courses/me2011/arduino/technotes/dcmotors/motor-tutorial/> (дата обращения 25.07.2015).

## А. Осевой момент инерции корпуса

Осевой момент инерции  $C$  корпуса вычислим как сумму моментов инерции относительно оси  $O\zeta$  шести образующих корпус прямоугольных однородных пластин одинаковой поверхностной плотности  $\rho$ . Пластины, образующие нижнюю и верхнюю грани прямоугольного параллелепипеда, обладают моментом инерции

$$C_{ab} = \frac{m_{ab}}{12}(a^2 + b^2),$$

где  $m_{ab}$  — масса пластины площадью  $ab$ . По теореме Гюйгенса–Штейнера моменты инерции оставшихся четырех пластин, образующих боковые грани, равны соответственно

$$C_{ah} = m_{ah} \left( \frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{4} \right), \quad C_{bh} = m_{bh} \left( \frac{b^2}{12} + \frac{a^2}{4} \right),$$

где  $m_{ah}$  и  $m_{bh}$  — массы пластин площадью  $2ah$  и  $2bh$ . Тогда момент инерции корпуса равен

$$C = 2(C_{ab} + C_{ah} + C_{bh}).$$

Масса корпуса складывается из масс образующих его граней:

$$m_0 = 2(m_{ab} + m_{ah} + m_{bh}), \quad m_{ab} = \rho ab, \quad m_{ah} = 2\rho ah, \quad m_{bh} = 2\rho bh.$$

Используя все выше приведенные соотношения, окончательно получим:

$$C = m_0 \frac{ab(a^2 + b^2) + 2h(a + b)^3}{12(ab + 2ah + 2bh)}.$$