

УДК 533.95

**О построении полностью кинетической модели, описывающей  
поведение струи разреженной плазмы, возникающей при работе  
стационарного плазменного двигателя**

**Бишаев А. М., Ким В.**

**Аннотация**

В последние 15-20 лет резко возрос интерес к изучению движения разреженной неравновесной плазмы. Одной из причин этого является то, что на данном этапе развития космической техники большую роль в функционировании космических аппаратов стали играть электроракетные или электрореактивные двигатели. Анализ струи, возникающей при работе такого двигателя как стационарный плазменный двигатель, показывает, что его струя состоит как минимум из ионов, электронов и нейтралов, причем является плазмой. Числа Кнудсена основных взаимодействий или порядка или много больше единицы, поэтому адекватное поведение такой среды возможно только на основе кинетической теории.

Трудности подхода к описанию движения плазмы заключаются в том, что здесь в отличие от разреженного газа отсутствует уравнение типа Больцмана. Пути преодоления указанной трудности такие же, как и в динамике разреженного газа – создание модельных кинетических уравнений, которые достаточно хорошо описывают изучаемое движение, и использование методов статистического моделирования (типа Берда).

В отличие от динамики разреженного газа в плазме возникает задача определения электрического поля, так как происходит вырождение соответствующего уравнения Максвелла. До настоящего времени использовался метод определения так называемого самосогласованного электрического поля. Он связан с тем или иным способом замыкания уравнений сохранения при условии равенства плотностей электронов и ионов.

В статье приведена полностью кинетическая постановка задачи и обсуждается метод, который будет использован при ее решении.

**Ключевые слова:** струя стационарного плазменного двигателя (СПД), система кинетических уравнений, кинетическое уравнение электронов, функции распределения электронов, ионов и нейтралов, граничные условия для функций распределения электронов, ионов и нейтралов, уравнение Максвелла (Пуассона), электрическое поле, ларморовский радиус, дебаевский радиус, квазинейтральность, малый параметр, асимптотические методы, уравнения сохранения, электронный ток, ионный ток, ток заряженных частиц, ньютоновский потенциал

## Введение

Электрореактивные или электроракетные двигатели (ЭРД) начали создаваться в шестидесятые годы прошлого столетия. Все они при сравнительно малой тяге имели по сравнению с ЖРД большой удельный импульс, из-за чего эти двигатели стали практически сразу применяться в космических аппаратах как в Советском Союзе (в России), так и за рубежом.

В последние двадцать лет в применении ЭРД возник настоящий бум. Как правило, струя, выбрасываемая в окружающее пространство таким двигателем, состоит из заряженных частиц (ионов, электронов), обладающих большой энергией, поэтому стала актуальной задача определения параметров таких струй для того, чтобы избежать нежелательных эффектов при взаимодействии этих струй с конструкциями КА и со средствами связи.

Если рассматривать струю, которая выходит из стационарного плазменного двигателя (СПД), одного из самых распространенных ЭРД, то можно в хорошем приближении считать, что она состоит из ионной электронной и нейтральной компонент. Проведенные оценки (см. [1-3]) показали, что числа Кнудсена основных взаимодействий либо порядка единицы, либо много больше ее, а отношение дебаевского радиуса к характерному размеру тела много меньше единицы, поэтому струйное образование, о котором идет речь выше, является существенно неравновесной разреженной плазмой, адекватное описание которой возможно только на основе кинетической теории.

По мнению авторов, понимание этого началось с появлением работ [6-7], в которых при рассмотрении задач об одномерном источнике плазмы и движении рабочего вещества в канале ускорителя СПД для описания движения ионов и нейтралов использовались мо-

дельные кинетические уравнения. Поведение электронов описывалось уравнениями сплошной среды. При этом использовались замкнутые при помощи введения некоторых предположений уравнения движения и уравнение сохранения энергии электронов. Полагая при этом, что плотность электронов равна плотности ионов (квазинейтральность), можно было получить выражение для потенциала электрического поля, которое потом подставлялось в кинетическое уравнение для ионов, замыкая тем самым систему кинетических уравнений. Все эти предположения, с помощью которых определялось электрическое поле в плазме, авторы упомянутых выше работ, назвали гипотезой “термолизованного потенциала”.

В работах [1-2] в стационарной и осесимметричной постановке рассматривалась задача о струе, выходящей из СПД. Для описания поведения ионов и нейтралов авторами статьи была создана кинетическая модель, учитывающая эффект резонансной перезарядки. Замыкалась система кинетических уравнений при помощи гипотезы “термолизованного потенциала”. Для численного решения этой системы был создан численный метод. Проведенные сравнения результатов численных решений с экспериментальными данными показали их хорошие совпадения по крайней мере на качественном уровне. Поэтому в работе [3], чтобы провести более детальное сравнение, была представлена технология сопоставления результатов численного моделирования с экспериментальными данными (проблема заключалась в том, что в эксперименте измерялись макроскопические величины, тогда как численное моделирование проводилось на микро уровне). Из [3] следовало, что, если соответствующим образом подобрать некоторые величины (температуру ионов на выходе из отверстия), информация о которых была только на уровне их порядковых значений, то можно было добиться не только качественных, но и количественных совпадений результатов численного моделирования и экспериментальных данных. В [4], используя возможности новой вычислительной техники, задача о струе была решена в стационарной трехмерной постановке. Ее постановка существенно отличалась от постановки этой задачи в осесимметричном случае. Это позволило проводить расчеты не только вниз по потоку, а также вверх по струе, что позволило определить влияние обратных ионных токов на сам аппарат и исследовать некоторые другие эффекты, связанные с отсутствием симметрии в движении. В [5] исследовалась влияние на макропараметры струи работа катода. В последние годы велась работа по развитию методов решения данной задачи в нестационарной постановке. Дело здесь даже не том, что на работу ЭРД оказывают заметное влияние нестационарные процессы (всевозможные колебания), поэтому создание численного метода решения нестационарных кинетических уравнений является важным шагом в развитии методов кинетической теории для обозначенно-

го выше направления. Основное – это тот неоспоримый факт, что нестационарные методы получения численных решений уравнений математической физики оказались очень эффективными, ибо позволили достаточно просто решить многие проблемы, которые с использованием только стационарных методов решить очень тяжело или невозможно. В настоящее время в печать сдана статья, в которой для данной задачи построен оригинальный численный метод, который дает решение упомянутой выше задачи в нестационарной трехмерной постановке. Этот метод основан на модификации метода расщепления по физическим процессам, который широко применяется при решении кинетических уравнений в динамике разреженных газов (см. [8-9]). Модификация заключалась в том, что влияние силового члена учитывалось на этапе релаксации, а на этапе свободномолекулярного разлета выписывалось аналитическое решение задачи, учитывающее специфику (геометрию) данной задачи. Это позволило просто решить проблемы, решение которых в стационарной постановке (см. [1-5]) было сопряжено со значительными трудностями. Из изложенного выше ясно, что проблема построения численных методов для решения кинетических уравнений, описывающих движение разреженной плазмы, в главном решена.

Ниже будет рассмотрена задача о струе, выходящей из СПД, но для ее описания будет построена полностью кинетическая модель и электрическое поле будет находится из уравнений Максвелла (Пуассона).

### Постановка задачи о струе

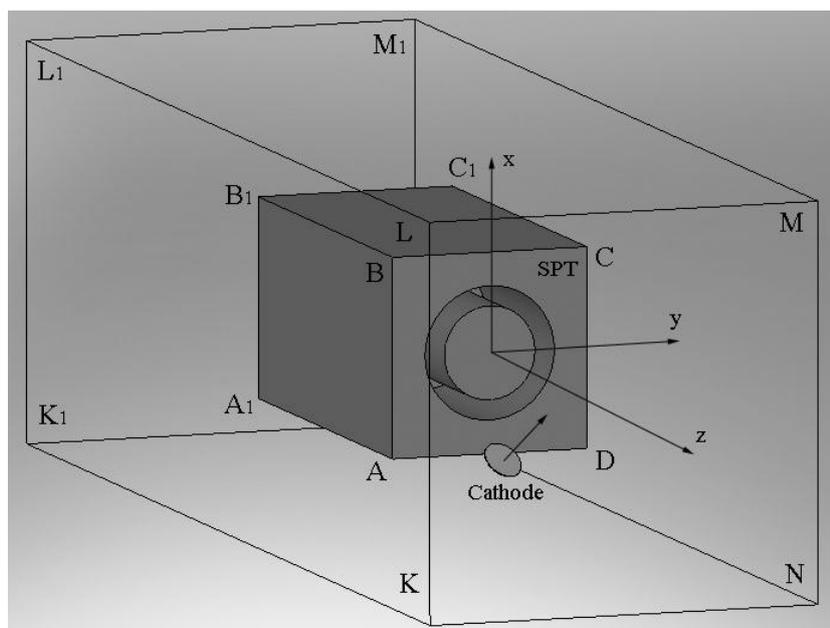


Рис.1

На Рис1 представлена координатное пространство, в котором будет происходить движение. Параллелепипед  $KLMNK_1L_1M_1N_1$  ограничивает счетную область. Показанный темным цветом параллелепипед  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  моделирует корпус двигателя, внутри которого находится ускорительный канал. В нем происходит ионизация рабочего вещества (ксенон). На рисунке не показана электромагнитная система, которая создает электрическое и магнитное поле. Магнитное поле задерживает в канале электроны, а электрическое поле ускоряет ионы, которые выбрасываются в окружающее пространство (область между указанными выше параллелепипедами) через расположенное на грани  $ABCD$  кольцевое выходное отверстие. Помимо ионов из упомянутого выше кольца в окружающее пространство выходят нейтралы. Система координат  $XYZ(x_1, x_2, x_3)$  помещена в центр кольцевого отверстия, как это показано на Рис.1. Вблизи корпуса двигателя, как это показано на рисунке, в форме диска имеется катод.

Для описания возникающего движения вводятся функции распределения электронов  $F = F(t, \vec{x}, \vec{s})$ , ионов  $f = f(i, \vec{x}, \vec{\xi})$  и нейтралов  $g = g(t, \vec{x}, \vec{w})$  соответственно. В введенных выше функциях  $t$  - время,  $\vec{x} = \{x_i\}, i = 1, 2, 3$  - координаты точки в физическом пространстве,

$\vec{s} = \{s_l\}, l = 1, 2, 3; \vec{\xi} = \{\xi_j\}, j = 1, 2, 3; \vec{w} = \{w_k\}, k = 1, 2, 3$  суть координаты скорости электронов, ионов и нейтралов соответственно (естественно, что каждая компонента имеет свое скоростное пространство). Будем считать, что введенные выше функции распределения удовлетворяют следующей системе кинетических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + s_l \frac{\partial F}{\partial x_l} - \frac{e}{m} E_k \frac{\partial F}{\partial s_k} - \frac{e}{m_1 c} \varepsilon_{ijk} H_k s_j \frac{\partial F}{\partial s_i} &= 0 \\ \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \xi_l \frac{\partial f}{\partial x_l} + \frac{e}{m} E_k \frac{\partial f}{\partial \xi_k} &= \Theta(g/n^n - f/n^i), i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (1.1) \\ \frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + w_j \frac{\partial g}{\partial x_j} &= \Theta(f/n^i - g/n^n) + J_m, \Theta = n^i n^n \theta \end{aligned}$$

В системе (1.1) приняты следующие обозначения  $e$  - модуль заряда электрона,  $m$  - масса иона, а  $m_1$  масса электрона соответственно,  $c$  есть скорость света,  $\varepsilon_{ijk}$  - тензор Леви-Чивита.  $E_k, H_k$  суть компоненты электрического и магнитного полей соответственно. Магнитное поле предполагается заданным. Его создает упомянутая выше магнитная система, и  $H_k$  известны. Электрическое поле определяется из следующего уравнения

$$E_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \Delta \varphi = 4\pi e(n^i - n^l), \quad (1.2)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа. Уравнение (1.2) есть следствие уравнений Максвелла в предположении, что электрическое поле потенциально. Экспериментальные данные показывают, что это предположение является разумным. В правые части уравнений (1.1) и (1.2) входят величины, которые являются моментами от соответствующих функций распределения. Эти величины называются макропараметрами. Они определяются следующими формулами

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} n \\ n\vec{u} \\ n(3/2kT + \vec{u}^2) \end{array} \right)^l &= \int \left( \begin{array}{c} 1 \\ \vec{s} \\ m_1 \vec{s}^2 / 2 \end{array} \right) F d\vec{s}, \left( \begin{array}{c} n \\ n\vec{u} \\ n(3/2kT + \vec{u}^2) \end{array} \right)^i = \\ &= \int \left( \begin{array}{c} 1 \\ \vec{\xi} \\ m \vec{\xi}^2 / 2 \end{array} \right) f d\vec{\xi}, \left( \begin{array}{c} n \\ nu \\ n(3/2kT + \vec{u}^2) \end{array} \right)^n = \int \left( \begin{array}{c} 1 \\ \vec{w} \\ m \vec{w}^2 / 2 \end{array} \right) g d\vec{w} \end{aligned} \quad (1.3)$$

В (1.3)  $k$  есть постоянная Больцмана. Верхние индексы  $l, i$  или  $n$  указывают электронной, ионной или нейтральной компоненты является тот или иной макропараметр. Макропараметры, определенные в (1.3), непосредственно будут вычисляться при численном решении задачи, как это делается в [1-5]. Этими макропараметрами являются, собственно, плотность  $n$ , макроскопическая скорость  $\vec{u} = \{u_m\}, m = 1, 2, 3$  и температура  $T$  той или иной компоненты. Оставшиеся неопределенными в (1.1) выражения являются следующими

$\theta = \sigma \left( \frac{1}{2\alpha U} + U \right) \text{Erf}(\sqrt{\alpha} U) + \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \exp\{-\alpha U^2\}$ ,  $\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\{-t^2\} dt$ ,  $\alpha = \frac{m}{2k(T^i + T^n)}$   
 $\vec{U} = \vec{u}^i - \vec{u}^n$ ; предполагается, что ионы и нейтралы взаимодействуют как твердые сферы с диаметром  $d$ . Тогда  $\sigma = \pi d^2$ .  $J_m$  есть интеграл столкновений нейтралов между собой. Как и ранее он моделируется также, как в модели Крука, т. е.  $J_m = (nkT)^n / \mu (g_M - g)$  ( ), где  $\mu$  является коэффициентом вязкости (см. [10]), а  $g_M = n^n (m / (2\pi kT^n))^{3/2} \exp\{-m / (2kT^n (\vec{w} - \vec{u}^n)^2)\}$ .

Поставим граничные условия для введенных выше функций распределения. Источником электронов, поступающих в расчетную область, является катод (см. Рис.1). Будем

считать, что для  $s_n = (\vec{s} \cdot \vec{n}) > 0$ , где  $\vec{n}$  - нормаль (единичная) к поверхности, направленная в сторону счетной области

$$F(t, \vec{x}_w, \vec{s}) = n_w^l \left( \frac{m_1}{2\pi k T_0^l} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_1}{2k T_0^l} (\vec{s} - \vec{u}_0^l)^2 \right\}. \quad (1.4)$$

В (1.4)  $\vec{x}_w$  координаты точек катода,  $n_w^l$  плотность испускаемых катодом электронов,  $T_0^l$  - характерное значение температуры электронов,  $\vec{u}_0^l$  макроскопическая скорость испускаемых электронов. Все величины, входящие в максвелловскую функцию (1.4) должны быть заданы. Будем предполагать, что от твердых поверхностей корпуса двигателя электроны отражаются зеркально. Тогда

$$F(t, \vec{x}_w, \vec{s}) = F(t, \vec{x}_w, \vec{s} - 2\vec{n}s_n), s_n > 0 \quad (1.5)$$

Следует отметить, что задача о взаимодействии электронов с поверхностью с целью получения граничного условия для кинетического уравнения электронов не решена. Ситуация здесь хуже, чем в кинетической теории разреженного газа, где эта задача тоже не решена, но там есть некоторые модельные представления, которые обычно используются. Поэтому надо иметь ввиду, что всегда при кинетическом описании движения электронов на уровне функции распределения будем сталкиваться с проблемой постановки граничных условий.

Обоснованием граничного условия (1.5) является тот факт, что в струе на твердых поверхностях образуется тонкий дебаевский слой, где перепад потенциала по порядку величины составляет  $5T_0$  (температура выражена в электронвольтах). Плазма заряжена отрицательно относительно слоя, поэтому электроны будут отражаться от слоя и не достигать границы. Только электроны, имеющие большую энергию смогут преодолеть скачок потенциала. Но таких электронов в струе очень мало. А если учесть, что в численном счете обычный размер скоростного пространства редко бывает больше чем 3-4 тепловые скорости, то (1.5) будет выполняться всегда. При этом надо понимать, что фактически твердую поверхность мы заменяем границей дебаевского слоя и пренебрегаем электронами, которые может испускать сама поверхность.

Граничные условия для функций распределения ионов и нейтралов выставлены также, как в [4-5]. Струя плазмы выходит в окружающее пространство через кольцевое отверстие в грани  $ABCD$ , поэтому при  $z = 0, -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a$ ) и для  $\xi_z \geq 0, w_z \geq 0$  имеем:

$$f = \begin{cases} \bar{n} \left( \frac{m}{2kT_0^i} \right)^{3/2} \exp \left\{ -m / (2\pi k T_0^i) (\vec{\xi} - \vec{u})^2 \right\}, & R_2 \leq r \leq R_1, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0, & (r < R_1) \cup (r > R_2) \end{cases}, \quad (1.6)$$

$$g = \begin{cases} \tilde{n} \left( \frac{m}{2\pi k T_0^n} \right)^{3/2} \exp\{-m/(2kT_0^n)(\bar{w} - \bar{u})^2\}, & R_2 \leq r \leq R_1, \\ n_w \left( \frac{m}{2\pi k T_w} \right)^{3/2} \exp\{-m/(2kT_w)\bar{w}^2\}, & (r < R_2) \cup (r > R_1) \end{cases}. \quad (1.7)$$

В (1.6), (1.7)  $a$  длина и ширина грани  $ABCD$  (она предполагается квадратной)  $R_1$  и  $R_2$  суть радиусы внешнего и внутреннего выходного отверстия.  $\bar{n}, \tilde{n}, \bar{u}, \tilde{u}$  являются заданными функциями  $x$  и  $y$  (отметим, что, когда удобно, то  $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ ). Конкретные значения этих функций дано в [3].  $T_0^i, T_0^n$  суть характерные значения температур выходящих из отверстия ионов и нейтралов соответственно. Фигурирующая во второй формуле (1.7)  $n_w$  находится из баланса потоков падающих и отраженных от поверхности нейтралов и ионов (см. [1]-[4]) и определяется следующей формулой

$$n_w = -2\sqrt{\pi} \left( \frac{m}{2kT_w} \right)^2 \left( \int_{-\infty}^0 w_z (\iint g(r, 0, \bar{w}) dw_r dw_\varphi) dw_z + \int_{-\infty}^0 \xi_z (\iint f(r, 0, \bar{\xi}) d\xi_r d\xi_\varphi) d\xi_z \right), \quad (1.8)$$

где  $T_w$  есть температура поверхности корпуса двигателя ( $\sim 300^0$  C).

На остальных гранях  $ABCD, A_1B_1C_1D_1$  граничные условия задаются вторыми формулами (1.6) и (1.7) для  $\xi_n = (\bar{\xi} \bar{n}) \geq 0, w_n = (\bar{w} \bar{n}) \geq 0$ , где  $\bar{n}$  внешняя нормаль к соответствующей грани.

Помимо граничных условий на твердых поверхностях необходимо выставить условия на бесконечности. В расчетах эти условия выставляются на границе счетной области и имеют место для скоростей, направленных во внутрь счетной области. Они следующие

$$F(t, \bar{x}, \bar{s}) = 0, f(t, \bar{x}, \bar{\xi}) = 0, g(t, \bar{x}, \bar{w}) = n_\infty \left( \frac{m}{2\pi k T_\infty} \right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m}{2kT_\infty} (\bar{w} - \bar{u}_\infty)^2\right\} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

В (1.9)  $n_\infty$  -плотность,  $T_\infty$  - температура нейтралов соответственно.  $\bar{u}_\infty = \{u_{x\infty}, u_{y\infty}, u_{z\infty}\}$  есть скорость нейтрального газа на бесконечности. (1.9) отражает тот факт, что вдали от двигателя нейтралы находятся в равновесии, а ионы отсутствуют. Все параметры в (1.9) должны быть заданы.

Выше обсуждалось, с какими проблемами придется столкнуться при кинетическом описании движения электронов. Другая принципиальная проблема также до сих пор не решенная связана с определением электрического поля в плазме, т. е. с решением уравнения (1.2). Причины этого становятся понятны, если воспользоваться безразмерной формой написанных выше уравнений и граничных условий.

### Безразмерный вид уравнений и граничных условий

Обезразмеривание всех величин, которые были определены ранее, осуществлялось по следующим формулам

$$\begin{aligned}
c_0 &= \sqrt{2kT_0^i/m}, \bar{u}^i = \xi_0 \bar{u}'^i, I_0 = en_0^i \xi_0, \xi_0 = \sqrt{2eU_0/m}, T^i = T_0^i T'^i, \bar{w} = w_0 \bar{w}', \\
g &= n_0^n / w_0^3 g', \bar{u}^n = w_0 \bar{u}'^n, w_0 = \sqrt{2kT_0^n/m}, T^n = T_0^n T'^n, \varphi = \frac{kT_0^e}{e} \varphi', \bar{E} = E_0 \bar{E}', \\
E_0 &= \frac{kT_0^e}{ea}, n^i = n_0^i n'^i, n^n = n_0^n n'^n, F = n_0^i / s_0^3 F', \bar{s} = s_0 \bar{s}', s_0 = \sqrt{\frac{2kT_0^l}{m_1}}, \bar{u}^l = s_0 \bar{u}'^l, \\
H &= H_0 H', n^l = n_0^l n'^l, T^l = T_0^l T'^l, t = t_0 t', t_0 = a / \xi_0, x_i = ax'_i, i = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Фигурирующая в (2.1) величина  $U_0$  есть разрядное напряжение ( $\approx 300$  вольт). Характерные значения плотности ионов -  $n_0^i$  и нейтралов -  $n_0^n$  определены в [1-3]. За масштаб длины в (2.1) принимается длина стороны квадрата ABCD, равная  $a$ . В безразмерном виде система (1.1) будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned}
\alpha \frac{\partial F}{\partial t} + s_l \frac{\partial F}{\partial x_l} - E_k / 2 \frac{\partial F}{\partial s_k} - \omega \varepsilon_{ijk} H_k s_j \frac{\partial F}{\partial s_i} &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_l \frac{\partial f}{\partial x_l} + F / 2 E_k \frac{\partial f}{\partial \xi_k} = v_{in} / Kn_{in} \left( \frac{n^i}{n^n} (B_2 / B_1)^{3/2} g(t, \bar{x}, \sqrt{B_2} \bar{\xi}) - f \right), v_{in} = n^n \theta & \tag{2.2} \\
\sqrt{B_2} \frac{\partial g}{\partial t} + w_j \frac{\partial g}{\partial x_j} = v_{ni} / Kn_{ni} \left( \frac{n^n}{n^i} (B_1 / B_2)^{3/2} f(t, \bar{x}, \bar{w} / \sqrt{B_2}) - g \right) + J_{mn}, v_{ni} = n^i \theta &
\end{aligned}$$

В (2.2)  $F = \frac{ekT_0^e}{2U_0}, E_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, B_2 = eU_0 / (kT_0^n), B_1 = eU_0 / (kT_0^i)$ . Безразмерная величина

$$\theta = (\alpha / 2U + U) \operatorname{Erf}(\sqrt{\alpha} U) + e^{-\alpha U^2} / \sqrt{\alpha \pi}, \text{ где } \alpha = (T^i / B_1 + T^n / B_2)^{-1}, U = \left| \bar{u}^i - \frac{\bar{u}_n}{\sqrt{B_2}} \right|. \text{ В (2.2)}$$

$Kn_{in} = (n_0^n \sigma a)^{-1}, Kn_{ni} = Kn_{in} / (\theta_1 \sqrt{B_2}), \theta_1 = n_0^i / n_0^n$  суть числа Кнудсена ион-нейтрального и нейтрал-ионного взаимодействия (резонансная перезарядка) соответственно. Безразмерный

вид  $J_{mn}$  следующий  $J_{mn} = \frac{v_{mn}}{Kn_{mn}} (g_M - g),$

$$v_{mn} = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} \frac{p}{(T^n)^s}, g_M = n^n (\pi T^n)^{-3/2} \exp\{- (\bar{w} - \bar{u})^2 / T^n \}, \text{ где } Kn_{mn} = l / a, \mu_0 = 5 / 16 \sqrt{\pi} l n_0^n w_0.$$

В последней формуле длина пробега взаимодействия нейтралов между собой определена по вязкости (см. [10]). Если воспользоваться формулами (2.2), то  $s_0 \approx 10^8$  см/сек. Тогда

$\alpha = \xi_0 / s_0 \approx 2.5 \cdot 10^{-2}$  Величина  $\omega$ , фигурирующая в уравнении для электронов определена

на следующем образом  $\omega = L/r_0$ ,  $r_0 = \frac{m_1 s_0 c}{e H_0}$  -ларморовский радиус электрона. Для вы-  
бранных масштабов  $\omega \approx 30$ . Так как ларморовский радиус ионов в более, чем в тысячу  
раз больше, то влиянием магнитного поля на движение ионов в струе пренебрегается. Без-  
размерный вид уравнения (1.2) следующий

$$E_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \lambda \Delta \varphi = (n^l - n^i), k, i, j = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) является точным уравнением Максвелла для определения электрического  
поля при условии его потенциальности, что предполагается. В уравнении (2.3) величина  
 $\lambda = (d_0 / L)^2$ ,  $d_0 = \sqrt{\frac{k T_0^i}{4 \pi n_0^i e^2}}$  - дебаевский радиус. Граничные условия приводятся к безраз-  
мерному виду по формулам (2.1). Для функций распределения ионов и нейтралов они  
приведены в [4-5]. Приведение к безразмерному виду (1.4) сводится к определению пара-  
метров в максвелловской функции. Это осуществляется следующим образом: полагаем,  
что  $\vec{u}_0^l = \vec{0}$ , известным считается полный ток электронов, создаваемый катодом. Для него  
имеем  $I_0^l = 1.5 I_0^i$ , где  $I_0^i$  есть ионный ток, выходящих из отверстия ионов, (см.[1-5]). То-  
гда (1.4) в безразмерном виде будет следующим

$$F(t, \vec{x}_w, \vec{s}) = \theta_3 / \pi^{3/2} \exp\{-\vec{s}^2\}, s_n > 0, \theta_3 = 1.5 \alpha \quad (2.4)$$

### Общие положения метода решения задачи

Величина дебаевского радиуса в нашей задачи есть  $r_0 \approx 3 \Pi 10^{-3}$ . Соответ-  
ственно  $\lambda \approx 10^{-7}$ . При работе СПД больших порядка  $1/\lambda$  электрических полей в плазме  
обычно не наблюдается, поэтому из уравнения (2.3) следует, что  $n^i - n^l = O(\lambda)$  - условие  
квазинейтральности, которое имеет место во всех точках физического пространства, кро-  
ме дебаевских слоев. Это обстоятельство обуславливает основную трудность при опреде-  
лении электрического поля в плазме, так как исчезает само уравнение для него. Обще  
принятый способ действия описан в [11]. Этот метод основан на том, полагают, что  
 $n^i = n^l$ , и при этом допущении каким-либо способом находят электрическое поле из  
уравнений сохранения и оставшихся уравнений Максвелла. Гипотеза “термолизованного  
потенциала“ есть один из таких методов. Ясно, что не является достаточно обоснованным.  
Это понято было уже около 15-20 лет назад, когда интенсивно началось развиваться моде-

лирование течения плазмы в каналах ускорителей (в том числе и СПД), ибо использование гипотезы “термолизованного потенциала“ приводило к некоторым не имеющимся в действительности эффектам. Поэтому уже в это время появляются работы. Где электрическое поле в плазме определяется из уравнений Максвелла, и используется кинетическое описание поведения электронов. За рубежом можно указать работы [12-14]. В нашей стране наиболее полно этот подход используется в кандидатской диссертации С. В. Иришкова (см. [15]).

Во всех указанных выше работах применялся метод статистического моделирования. Применение метода модельных кинетических уравнений к данной проблеме приводит к поставленной выше задаче.

Рассмотрим трудности, которые возникают на пути решения поставленной выше задачи: о проблеме постановке граничных условий для функции распределения электронов говорилось выше. Здесь же рассмотрим трудности, связанные с определением электрического поля из уравнения (2.3). Они для всех методов одинаковые.

Обычная схема решения (2.2)-(2.3) состоит в том, что по известному в момент времени  $t_0$  электрическому полю решаются все кинетические уравнения и находятся все макропараметры в момент времени  $t_0 + \Delta t$ . Так правая часть уравнения (2.3) стала известной, то решается уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = (n^l - n^i) / \lambda \quad (3.1)$$

Для корректности численной схемы при этом требуется, чтобы шаг интегрирования (3.1) был много меньше  $\lambda$ . Это приводит к резкому увеличению требуемой памяти ЭВМ и увеличению времени счета. Учитывая высокую скорость прогресса в возможностях вычислительной техники, эта трудность вполне преодолима. Чтобы решить (3.1) нужно для нее поставить краевую задачу (Дирихле, Неймана или смешанную краевую задачу). Сделать это без наличия дополнительной информации о рассматриваемой проблеме нельзя (та информация, которая использовалась в данном отчете при постановке задачи о струе, недостаточно). Поэтому во всех работах [12-15] либо сильно упрощается геометрия рассматриваемого течения, либо проводятся специальные эксперименты, чтобы поставить упомянутую выше краевую задачу. После решения кинетических уравнений условие квазинейтральности не выполняется. Поэтому найденное в момент времени  $t_0 + \Delta t$  электрическое поле будет порядка  $1/\lambda \ll 1$ . Это поле разделит ионы и электроны, и к последующему моменту времени  $n^l - n^i \approx 0$  в области течения. Далее процесс повторится, т. е.

возникнут колебания, у которых кроме чисто схемных эффектов нет причин для затухания

Это обстоятельство, конечно, известно авторам указанных выше работ, поэтому они всячески стараются увеличить число  $\lambda$ , причем иногда совершая насилие над физикой (например, изменяя величину  $\varepsilon_0$  или массу иона). Другой „способ” избежать возникшей проблемы ввести обезразмеривание по дебаевскому радиусу (см. [16]). Доказывать абсурдность такого „способа” нет необходимости.

Путь к решению обозначенной выше проблемы, по мнению автора, состоит в том, чтобы непосредственно в численную схему ввести эффекты, которые приводят к квазинейтральности.

В [11] был изучен процесс установления квазинейтральности в системе состоящей из электронов и ионов, движущихся в нейтральной среде, причем описание системы замыкалось при помощи диффузионного приближения. Суть этого анализа состояла в том, что для величины  $N = n^i - n^l$  путем комбинаций уравнений неразрывности и уравнений движения с уравнением Максвелла было получено, что  $\lambda \frac{\partial N}{\partial t} + a(t, \vec{x})N = 0$ .  $\lambda \gg 1$ , поэтому

возможно последовательное применение асимптотического анализа. Хотя в [11] результат получается для замороженных во времени коэффициентов, он в главном совпадает результатом асимптотического анализа. Суть его в том, что  $N(t) = N(t_0)e^{-\nu t}$ ,  $\nu$  есть частота столкновений заряженных частиц с атомами окружающей среды.

Для проведения подобного анализа в нашем случае воспользуемся макроскопическими уравнениями, которые получаются из (2.2). Проинтегрировав первое и второе уравнение (2.2) по соответствующим скоростным пространствам (второе уравнение при этом надо умножить на  $B_1^{3/2}$  см. [1-5]), получим

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial n^l}{\partial t} + \frac{\partial I_k^l}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{\partial n^i}{\partial t} + \frac{\partial I_k^i}{\partial x_k} &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

В (3.2)  $\vec{I}^i$ ,  $\vec{I}^l$  суть плотности ионного и электронного токов. Уравнения сохранения импульса для электронной и ионной компонент плазмы получаются умножением соответствующих компонент плазмы на  $s_j$  и  $\xi_j$  соответственно и интегрированием каждой уравнения по своему скоростному пространству. Будем иметь следующие уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_j^i}{\partial t} + R_j^i + F/2n^i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} &= \Theta u_j^n - \bar{v} I_j^i, \quad \Theta = \frac{\alpha v_{in}}{Kn_{in} \sqrt{B_2}}, \quad \bar{v} = \frac{v_{in}}{Kn_{in} \sqrt{B_2}} \\ \alpha \frac{\partial I_j^i}{\partial t} + R_j^i - 1/2n^i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \omega \varepsilon_{jmm} I_n^i H_m &= 0, \quad j=1,2,3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

В (3.3)  $R_j^i = \frac{\partial}{\partial x_k} \int \xi_j \xi_k f d\vec{\xi}$ ,  $R_j^l = \frac{\partial}{\partial x_k} \int s_j s_k F d\vec{\xi}$ , ( по повторяющемуся индексу происходит

суммирование). Обозначим через  $\bar{n} = F/2\alpha n^i + 1/(2\alpha)n^l$ . Разделим второе уравнение на  $\alpha$ , а первого уравнение соответственно умножим на  $\alpha$  и вычтем из второго уравнения первое, совершив с его членами тождественные преобразования так, чтобы полученное уравнение

приняло следующий вид  $\frac{\partial I_j}{\partial t} + \bar{v} I_j + \bar{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = A_j$ , где  $\vec{I} = \alpha \vec{I}^i - \vec{I}^l$  есть плотность тока за-

ряженных частиц в плазме, а  $A_j$  - результат тождественных преобразований, проделанных с целью вывести вид правой части написанного выше выражения. Умножив второе

уравнение (3.2) на  $\alpha$  и, вычитая из него первое уравнение, получим  $\alpha \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial I_k}{\partial x_k} = 0$ , где

$N = n^i - n^l$ . Объединим полученные таким способом уравнения с уравнением (2.3), получим

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial I_k}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{\partial I_j}{\partial t} + \bar{v} I_j + \bar{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} &= A_j \\ \Delta \varphi &= -(n^i - n^l) / \lambda \end{aligned} \quad (3.4)$$

Система (3.4) есть точное следствие уравнений сохранения и уравнения МАксвелла. Взяв дивергенцию от обеих частей второго уравнения и ,учитывая первое и третье уравнение, а также перестановочностью операторов дифференцирования по времени и пространству, получим

$$\alpha \lambda \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} + \alpha \lambda \bar{v} \frac{\partial N}{\partial t} + \bar{n} N = \lambda ((\vec{I} \square \text{grad} \bar{v}) + (\text{grad} \varphi \square \text{grad} \bar{n} / \alpha - \text{div} \vec{A})) = O(\lambda) \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) содержит малый параметр при старшей производной. Согласно формализму асимптотических методов (см. [18], решение этого уравнения зависит от ”быстрого” времени  $\bar{t} = t_0 + t / \sqrt{\lambda \alpha}$   $\alpha \lambda \approx 10^{-5}$  и медленного времени  $t$ . Коэффициенты в (3.5) и правая часть зависят от медленного времени, поэтому их можно считать замороженными во времени (это приближенный анализ. Точный асимптотический анализ можно провести, если воспользоваться процедурой метода разных масштабов, описанной в [18]). В этом

случае (3.5) есть линейное дифференциальное уравнение. Его решение есть  $N = \bar{N}_o + N^s$ , где  $\bar{N}_o = N(t_0) \text{Exp}(-\bar{v}/2 - \bar{v}(t-t_0)) \cos(\omega(t-t_0) + \varphi_0)$ ,  $\omega^2 = \bar{n}/(\lambda\alpha) -$

$-\bar{v}^2/4$  есть общее решение однородного уравнения в случае комплексных корней характеристического уравнения (если корни действительные, то решением будут две экспоненты с отрицательными показателями степени и результат будет совпадать с тем, что получено в [11]).  $N^s$  есть решение неоднородного уравнения, оно является  $O(\lambda)$ . Отсюда следует, что квазинейтральность в системе будет иметь место, как только затухнут собственные колебания. Это происходит, если есть взаимодействие заряженных частиц с нейтральными атомами. Возможно другим механизмом установления квазинейтральности в системе в случае переменных полей является затухание Ландау.

Теперь можно предложить схему решения описанной выше задачи. Макропараметры  $n^i, n^l, \bar{I}^i, \bar{I}^l$  находятся из соответствующих уравнений сохранения, замкнутых при помощи имеющейся системы кинетических уравнений. Такая схема с успехом использовалась в разреженном газе (см. [19]).

Из (3.5) для момента времени  $t_0 + \Delta t$  находится  $N$ . Шаг интегрирования по времени  $\Delta t$  выбирается возможно наибольшим, чтобы сделать как можно меньше влияние собственных колебаний (верхнюю границу  $\Delta t$  даст условие Куранта). Решение третьего уравнения (3.4) записывается в виде

$$\varphi = \varphi_{out} - \int \frac{(n^i - n^l) d\bar{x}_v}{v \lambda (\sqrt{(x-x_v)^2 + (y-y_v)^2 + (z-z_v)^2})} \quad (3.6)$$

В (3.6)  $\varphi_{out}$  - потенциал электрического поля, создаваемого плюсами системы, а второй член есть ньютоновский потенциал (частное решение уравнения Пуассона). Ясно, что такой метод не требует постановки граничных условий для решения уравнения Пуассона. После нахождения электрического поля решаются все кинетические уравнения и находятся необходимые макропараметры.

### Заключение

Данная статья является определенным шагом в развитии направления, о котором говорилось во введении – применение методов кинетической теории для решения задач, связанных с движением неравновесной плазмы. Предложенный в статье метод определения электрического поля основывается на введении в численную схему решения непосредственно механизмов, приводящих к установлению квазинейтральности. Отметим

также, что сама эта задача о струе выбрана в качестве теста, ибо, как оказалось, гипотеза “термолизованного потенциала” неплохо работает в задаче о струе СПД. Если методика, изложенная выше окажется эффективной, то следующей задачей будет задача о движении плазмы в ускорительном канале, так как там гипотеза “термолизованного потенциала” не работает.

### **Библиографический список**

1. Бишаев А. М. Численное моделирование струи разрешенного слабо ионизованного газа, выходящего из кольцевого отверстия. ЖВМ и МФ, 1993, т. 33, №7, с.1109-1118.
2. Бишаев А. М., Калашников В. К., Ким В.. Численное исследование струи разреженной плазмы стационарного ускорителя с замкнутым дрейфом электронов (УЗДП). Физ. плазмы. 1992, т. 18. Вып. 6, с. 698-708.
3. Бишаев А. М., Калашников В. К., Ким В., Шавыкина А. В. Численное моделирование плазменной струи стационарного плазменного двигателя, распространяющейся в среде низкого давления. Физ. плазмы, 1998, т. 24, №11, стр. 989-995.
4. Архипов А. С., Бишаев А. М. Численное моделирование в трехмерной постановке струи плазмы, выходящей в окружающее пространство из стационарного плазменного двигателя. ЖВМ и МФ. Т. 47, №3, стр. 491-506, 2007
5. Архипов А. С., Бишаев А. М. Ким В. Влияние различных факторов на распределение параметров в струе стационарного плазменного двигателя. Журнал Математическое моделирование. 2010, т. 22, №2, стр. 124-138.
6. Волков Б. И., Морозов А. И., Свешников А. Г., Якунин С. А. Численное моделирование ионов в системе с замкнутым дрейфом. Ж. Физ. плазмы, 1981. Т. 7. Вып. 2. С.245-253.
7. Жевандров П. И., Морозов А. И., Якунин С. А. Динамика плазмы, образующейся при ионизации разреженного газа. Физика плазмы, 1984, т. 10, вып. 2, с. 353.
- 8.Ларина И. Н., Рыков В. А. Численное решение уравнения Больцмана методом симметричного расщепления. ЖВМ и МФ. 2003. т. 43. №4. стр. 601-6013
- 9 Черемисин Ф. Г. Решение уравнение уравнения Больцмана при переходе к гидродинамическому режиму течения. ДАН. 2000. Т. 373, №4, стр. 479-483.
10. Шахов Е. М.. Метод исследования движений разреженного газа. Вц.. АН СССР, Москва, изд. «Наука», 1974.
11. Лифшиц Е. М. Питаевский Л. П. Физическая кинетика Москва, изд. «Наука», 1979.

12. Manzella D. H., Sancovic J. M. Thruster Ion Beam Characterization. AIAA-95-2927. San-Diego (USA), 1995.
13. Van Gilder D. V., Boyd I. D., Keydar M. Particle Simulation of a Hall Thruster Plume-Journal of Spacecrafts and Rockets, vol. 37, №1, 1996,p. 129-136.
14. Mikellides G., Jongeward G. A., Gardner B. M. et. al. A Hall-Effect thruster
15. Иришков С. В. Кинетическое моделирование динамики плазмы в холловском двигателе. Научно-технический сборник "Ракетно-космическая техника", серия 12. "Расчет, проектирование, конструирование космических систем", 2006 г.
16. Котельников М. В., Морозов А. В. Исследование параметров плазмы в струе плазменного двигателя методами численного моделирования. Секционный доклад на XVII международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСПИС). Сб. тезисов стр. 562. 2011 г.
17. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной механике. Москва, изд. «Мир», 1972
18. Бишаев А. М. Рыков В. А. Решение стационарных задач кинетической теории газов при умеренных и малых числах Кнудсена методом итераций. ЖВМ иМФ, Изд-во АН СССР, 1975, № 1.

### **Сведения об авторах**

Александр Михайлович Бишаев, ведущий научный сотрудник Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д.ф.-м.н тел.: 8-965-224-53-63,;8-965-224-53-63, e-mail [bishaev@bk.ru](mailto:bishaev@bk.ru) , старший научный сотрудник.

Владимир Ким, главный научный .сотрудник Московского авиационного института (национального исследовательского университета, д.т.н.,тел.: 8-499-158-29-85 (57-23), старший научный .сотрудник

# **On the possibility to create fully kinetic model for description of the rarefied plasma jet behaviour exhausting Stationary plasma thruster**

Bishaev A. M. Kim V.

## Abstract

The jet exhausting stationary plasma thruster (SPT) is the accelerated plasma flow consisting of at least ions, electrons and atoms. Knudsen numbers for all mentioned particle interactions are close or exceeds 1. Therefore an adequate description of such flow behaviour is possible only on base of the kinetic theory. For this purpose the different model equations are created at macroscopic level which are solved jointly with Maxwell equations or some statistical methods of simulation are used (like Bird's method). And the principal difficulty is appeared in the determination of an electric field in plasma due to the corresponding Maxwell's equations degeneracy. Till now this difficulty was overcome by usage of the selfconsistent electric field method associated with one or another way of the conservation equations satisfaction by the condition of the electrons and ions densities equality.

The problem statement for the fully kinetic description of all particles dynamics simulation in plasma and for determination of the electric field are presented in paper and possible method of this problem solution is discussed.

Keywords: stationary plasma thruster, rarefied plasma jet, dynamic of particles, system of kinetic equations, distribution function of electrons, ions and neutrals, the Maxwell equation (Poisson), electric field, Larmor radius, Debye length, quasineutrality, a small parameter, asymptotic methods, the conservation equations, Newton's potential

## Information on the authors

Bishaev Alexandr ., leading researcher, of Moscow Aviation Institute (National Research University), Doctor of Physics and Mathematics Science, phone: 8-965-224-53-63, e-mail [bishaev@bk.ru](mailto:bishaev@bk.ru)

Vladimir Kim, chief researcher of Moscow Aviation Institute (National Research University), Doctor of Engineering Science, phone: 8-499-158-29-85 (57-23)