

УДК 532.507

О нахождении критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в задаче Хагена-Пуазейля

Хатунцева О.Н.

Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва,

ул. Ленина, 4а, Королёв, 141070, Россия

e-mail: Olga.Khatuntseva@rsce.ru

Аннотация

Ранее в работе [1], на основе уравнений Навье-Стокса, в которых учтено производство энтропии за счет стохастических возмущений, для задачи Хагена-Пуазейля были аналитически получены два решения: одно из которых, соответствует ламинарному режиму течения, второе – турбулентному. Они имеют небольшое отличие непосредственно у стенки трубы. Это обстоятельство позволило в данной работе аналитически, с помощью метода описания «разрывных» функций [2], найти минимальное значение числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения. Оно равно, примерно, 1970.

Ключевые слова: турбулентность, задача Хагена-Пуазеля, ламинарно-турбулентный переход, критическое число Рейнольдса, метод «разрывных» функций.

1. Введение

Несмотря на то, что во многих практических задачах давно и успешно используются методы описания турбулентных режимов течения [3-12], проблема описания турбулентности и процесса ламинарно-турбулентного перехода до сих пор остается одной из важнейших нерешенных фундаментальных задач, которая активно привлекает внимание исследователей [13-15]. В частности, это связано с тем, что задачи, допускающие аналитическое решение (например, задачи Хагена-Пуазеля или Куэтта), не имеют решений, соответствующих турбулентному режиму течения. При этом ламинарные режимы течения являются линейно устойчивыми для бесконечно больших значений числа Рейнольдса [16-18].

В работе [1] было показано, что для корректного описания турбулентного режима течения с помощью уравнения Навье-Стокса (УНС), необходимо учитывать производство энтропии, возникающее за счет стохастических возмущений скорости. В результате в задаче течения несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения (течение Хагена-Пуазеля) вместо одного линейно устойчивого аналитического решения задачи, соответствующего ламинарному режиму течения, были найдены два аналитических решения. Одно из них, соответствует ламинарному режиму течения и может реализовываться при любых значениях числа Рейнольдса. Второе - соответствует турбулентному режиму течения и может реализовываться только при достаточно больших значениях числа Рейнольдса. «Турбулентное» решение описывается логарифмическим профилем скорости в центре трубы с множителем, обратно пропорциональным постоянной Кармана, значение которой также было определено в работе [1] аналитически.

Вблизи стенки трубы было также найдено небольшое отличие ламинарного и турбулентного течения. В турбулентном случае безразмерная скорость вблизи стенки трубы определяется выражением:

$$\frac{V(y, \tilde{s})}{V_*} = \frac{5}{4} \frac{yV_*}{\nu} - \frac{1}{4} \left(\frac{yV_*}{\nu} \right)^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \right), \quad (1.1)$$

где $y = R - r$ - расстояние до стенки, y_* и V_* - динамические расстояния и скорость, соответственно, ν - вязкость жидкости, $\text{Re} = RU_0/\nu$ - число Рейнольдса, рассчитанное по радиусу трубы R и скорости течения жидкости на оси трубы при ламинарном режиме течения U_0 .

Нетрудно видеть, что для ламинарного режима течения жидкости, характеризуемого параболическим профилем скорости, скорость жидкости у стенки трубы можно представить в виде: $V = U_0(1 - (r/R)^2) = 2yU_0/R - y^2U_0/R^2$. Или, учитывая, что $2U_0 = V_*^2 R/\nu$, записать: $V/V_* = yV_*/\nu - y^2V_*/(2R\nu)$.

Таким образом, ламинарный и турбулентный режимы течения можно характеризовать различными функциями скорости или градиентами скорости непосредственно у стенки трубы:

$$V(y) = \begin{cases} \frac{yV_*^2}{\nu} - \frac{y^2V_*^2}{2R\nu}, & \text{ламинарный} \\ \frac{5}{4} \frac{yV_*^2}{\nu} - \frac{1}{4} \frac{y^2V_*^3}{\nu^2}, & \text{турбулентный} \end{cases}, \quad (1.2)$$

По-видимому, определение критических значений чисел Рейнольдса, при которых происходит смена режимов течения, непосредственно из предложенного в работе [1] метода расширения фазового пространства с помощью «стохастической»

переменной, вряд ли возможно. Поэтому используя отличие функций скорости вблизи поверхности стенки, попытаемся решить эту задачу с помощью метода описания «разрывных» функций.

2. Метод теоретического определения минимального значения числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения.

В этой главе приводится метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы [2], и на основе этого метода в задаче о течении жидкости в трубе кругового сечения делается попытка определения критических значений чисел Рейнольдса, при которых становится возможна смена режимов течения.

Метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы (см. рис.1), применим к таким физическим процессам, которые можно однозначно описать функциями $\tilde{m}(\alpha)$ на всей области определения α , кроме малых подобластей, в которых эти функции изменяют свои значения и/или значения своих производных. В таких подобластях функции $\tilde{m}(\alpha) = \tilde{m}(\alpha(t))$ могут вести себя случайным образом (если следить за процессом изменения аргумента много раз). Задача метода состоит в поиске соотношений, связывающих значения функций и их производных на границах подобластей с размерами и положением этих подобластей относительно рассматриваемых областей определения значений α . Остановимся на этом подробнее.

2.1. Операторный метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы.

Предположим, существует физический процесс, описываемый функцией $\tilde{m}(\alpha(t))$, такой, что до точки α_0 функция $\tilde{m}(\alpha(t))$, определена однозначно, как функция аргумента α : $\tilde{m}(\alpha(t)) = \tilde{m}_1(\alpha)$. В области $\alpha \geq \alpha_0$ может реализовываться один из двух возможных квазистационарных режимов рассматриваемого физического процесса. Эти два режима могут быть описаны двумя ветвями функции $\tilde{m}(\alpha(t))$: либо $\tilde{m}(\alpha(t)) = \tilde{m}_1(\alpha)$ (состояние «1»), либо $\tilde{m}(\alpha(t)) = \tilde{m}_2(\alpha)$ (состояние «2»). Причем, с увеличением аргумента α устойчивость состояния «2» возрастает, а состояния «1» - падает.

В качестве модели поведения системы в области $\alpha \geq \alpha_0$, при $\dot{\alpha} > 0$, примем следующее правило: если система находится в состоянии «1», то при увеличении значения аргумента $\alpha(t)$ она может либо продолжать в нем оставаться, либо в точке $\alpha_1 > \alpha_0$ выйти из него и оказаться в точке $\alpha_2 > \alpha_0$ в состоянии «2». Если система в какой-либо точке α_2 окажется в состоянии «2», то при дальнейшем увеличении аргумента α в области $\alpha > \alpha_2$ она, в силу большей устойчивости состояния «2», будет продолжать оставаться в этом состоянии. Причем значение α_2 может быть как больше, так и меньше значения α_1 . Переходы между двумя состояниями в области $[\alpha_1, \alpha_2]$, если следить за процессом изменения функции \tilde{m} от аргумента $\alpha(t)$ (при $\dot{\alpha} > 0$) много раз, носят случайный характер. Точки перехода из состояния «1» в состояние «2» - α_1 и α_2 - однозначно не определены.

Рассмотрим однократное изменение функции $\tilde{m}(\alpha)$ при изменении аргумента $\alpha(t)$ в одном направлении по времени: $\dot{\alpha} > 0$. Для этого процесса определим точки α_1

и α_2 . Будем считать, что для функции $\tilde{m}(\alpha)$ характерна лишь слабая нелинейность ее ветвей: $\tilde{m}_1(\alpha)$ и $\tilde{m}_2(\alpha)$ в окрестностях точек α_1 и α_2 , соответственно. Экстраполируем ветвь функции $\tilde{m}_1(\alpha)$, расположенную на плоскости (α, \tilde{m}) до точки α_1 : $\alpha \leq \alpha_1$, линейной функцией в область $[\alpha_1, \alpha_2]$. Полученную таким образом функцию обозначим, как $m_1(\alpha)$. Ветвь функции $\tilde{m}_2(\alpha)$ за точкой α_2 : $\alpha \geq \alpha_2$, интерполируем в область $[\alpha_1, \alpha_2]$ и обозначим, как $m_2(\alpha)$. В результате в области $[\alpha_1, \alpha_2]$ определим две ветви функции $m(\alpha)$: $m(\alpha) = \begin{cases} m_1(\alpha) \\ m_2(\alpha) \end{cases}$. Область, лежащую между точками α_1 и α_2 и ограниченную функциями $m_1(\alpha)$ и $m_2(\alpha)$, можно характеризовать, как область неопределенности рассматриваемого процесса. Внутри этой области лежат возможные траектории перехода из состояния «1» в состояние «2». Среднее значение функции $m^2(\alpha)$ в области $[\alpha_1, \alpha_2]$ будет определяться выражением:

$$\langle m^2 \rangle = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m^2(\alpha) d\alpha. \quad (2.1)$$

Учитывая, что среднее значение от функции $m^2(\alpha)$ в области $[\alpha_1, \alpha_2]$ является числом, выражение (2.1) может быть записано в виде:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2(\varphi) d\varphi = 1, \quad \text{где } M^2 = m^2(\varphi) / \langle m^2 \rangle, \quad \varphi = \alpha / \Delta\alpha, \quad \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Свойство переходной области с учетом направленности процесса относительно течения времени и с учетом возможности затягивания процесса перехода за счет инертности системы (когда траектория, лежащая на отрезке

$\left[m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1}; m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2} \right]$), заменяется траекторией, состоящей из двух отрезков:

$$\left[m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1}; m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1} + \partial m_1(\alpha) / \partial \alpha \Big|_{\alpha=\alpha_1} (\alpha' - \alpha_1) \right] \text{ и } \left[m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1} + \partial m_1(\alpha) / \partial \alpha \Big|_{\alpha=\alpha_1} (\alpha' - \alpha_1); m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2} \right],$$

где $\alpha_1 < \alpha' < \alpha_2$), определяются следующим образом:

- если состояние системы «1» происходит по времени раньше состояния «2», то траектории перехода из точки α_1 в точку α_2 ограничены областью треугольника с вершинами в точках $m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1}$, $m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2} = m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1} + \partial m_1(\alpha) / \partial \alpha \Big|_{\alpha=\alpha_1} \Delta \alpha$ и $m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2}$, где $\Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1$;

- если процесс идет в противоположном по времени направлении, то есть состояние системы «2» происходит по времени раньше состояния «1», то траектории перехода из точки α_2 в точку α_1 ограничены областью треугольника с вершинами в точках $m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2}$, $m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1} = m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2} - \partial m_2(\alpha) / \partial \alpha \Big|_{\alpha=\alpha_2} \Delta \alpha$ и $m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1}$.

Расширим пространство (α, m) дополнительным параметром $\eta: (\alpha, m) \rightarrow (\alpha, m; \eta)$, $0 \leq \eta \leq 1$ (см. рис.1), и определим в этом пространстве функцию $m(\alpha; \eta)$ так, чтобы проекция функции $m(\alpha; \eta)$ на плоскость (α, m) совпадала с функциями $m_1(\alpha)$ и $m_2(\alpha)$ в областях: $\alpha < \alpha_2$ и $\alpha \geq \alpha_2$, соответственно. Удовлетворяя этим требованиям, в качестве функции $m(\alpha; \eta)$ можно выбрать соотношение:

$$m(\alpha; \eta) = m_2(\alpha) + \eta(m_1(\alpha) - m_2(\alpha)), \quad \text{где } \eta = \begin{cases} 1, & \text{при } x < \alpha_2 \\ 0, & \text{при } x \geq \alpha_2 \end{cases}.$$

Аналогичное соотношение должно выполняться для заданных в каждой точке производных, характеризующих ветви функции:

$$\partial m(\alpha; \eta) / \partial \alpha = \partial m_2(\alpha) / \partial \alpha + \eta(\partial m_1(\alpha) / \partial \alpha - \partial m_2(\alpha) / \partial \alpha).$$

Такое представление функции $m(\alpha; \eta)$ позволит (как будет показано ниже) специальным образом определить свойство переходной области. А именно, отметить, что для заданных точек перехода из состояния «1» в состояние «2»: α_1 и α_2 , в силу принципа «причинности», статистические свойства системы в точке α_1 описывается только функцией m_1 , а в точке α_2 состояние системы не является точно определенным, поскольку в эту точку могут приводить различные траектории из точки α_1 .

Параметр η будет характеризовать состояние системы (описываемой функцией m и ее производной), принимая значение равное единице везде до точки $\alpha = \alpha_2$ и, равное нулю в этой точке и за ней:

$$\eta = \frac{m(\alpha) - m_2(\alpha)}{m_1(\alpha) - m_2(\alpha)} \equiv \frac{M - M_2}{M_1 - M_2} = \frac{\partial m(\alpha)/\partial \alpha - \partial m_2(\alpha)/\partial \alpha}{\partial m_1(\alpha)/\partial \alpha - \partial m_2(\alpha)/\partial \alpha} \equiv \frac{\partial M/\partial \varphi - \partial M_2/\partial \varphi}{\partial M_1/\partial \varphi - \partial M_2/\partial \varphi}.$$

Производные величины η по α , а также η по φ будут равны:

$$\partial \eta / \partial \alpha = -\partial \eta / \partial (-(\alpha - \alpha_2)) = -\delta(-(\alpha - \alpha_2)) = -\delta(\alpha - \alpha_2),$$

$$\partial \eta / \partial \varphi = -\partial \eta / \partial (-(\varphi - \varphi_2)) = -\delta(-(\varphi - \varphi_2)) = -\delta(\varphi - \varphi_2)$$

где $\delta(\alpha - \alpha_2)$ и $\delta(\varphi - \varphi_2)$ - дельта-функции.

Найдем среднее значение квадрата функции $m(\alpha)$ (см. (2.1)) в области перехода $[\alpha_1, \alpha_2]$ в расширенном пространстве $(\alpha, m; \eta)$.

Проинтегрировав по частям выражение для среднего значения квадрата функции $m(\alpha)$:

$$\frac{1}{\Delta \alpha} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m^2(\alpha) d\alpha = \frac{\alpha}{\Delta \alpha} m^2(\alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \frac{2}{\Delta \alpha} \int_{m(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}}^{m(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2}} \alpha m dm,$$

и, учитывая непрерывность функции m только в пространстве, расширенном с помощью дополнительной переменной η : $dm = \frac{\partial m}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} d\alpha = -(m_1(\alpha) - m_2(\alpha))\delta(\alpha - \alpha_2)d\alpha$,

получим соотношение:

$$\langle m^2 \rangle = \frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} m_2 \left(m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \Delta\alpha \right) - \frac{\alpha_1}{\Delta\alpha} m_1^2. \quad (2.2)$$

Для краткости в этом выражении опущены обозначения показывающие, что значение функции m_2 берется в точке $\alpha = \alpha_2$: $m_2 = m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2}$, а значение функции m_1 - в точке $\alpha = \alpha_1$: $m_1 = m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}$.

При выводе соотношения (2.2) значение функции $m_1(\alpha)$ - в точке $\alpha = \alpha_2$, в силу условия линейной экстраполяции, определялось как

$$m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} + \frac{\partial m_1(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} \Delta\alpha = m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \Delta\alpha, \quad \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Из выражения (2.2) видно, что среднее значение квадрата функции $m(\alpha)$ на интервале $[\alpha_1, \alpha_2]$ определяется ее значениями в двух крайних точках: α_1 и α_2 , а также значением производной функции в точке α_1 . Причем, член выражения $\frac{\alpha_1}{\Delta\alpha} m_1^2$ определен значениями безразмерной координаты и квадрата функции в точке α_1 только на ветви m_1 . А произведение $\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} m_2 \left(m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \Delta\alpha \right)$ описывает «смешанное» состояние системы в точке α_2 сразу для двух ветвей функции. Этот член пропорционален среднегеометрическому между значением функции на ветви m_2 и интерполированным значением функции на ветви m_1 . Несимметричность выражения в отношении двух ветвей среднего квадрата функции $m(\alpha)$ в переходной области

характеризует поведение этой функции в окрестностях точек α_1 и α_2 в соответствии с принципом «причинности»: для рассматриваемого процесса (с заданными точками «ухода» из состояния «1» - α_1 и «прихода» в состояние «2» - α_2): до достижения точки α_1 единственно возможным состоянием системы является состояние «1», а область: $[\alpha_1, \alpha_2]$ является переходной («смешанной»).

Вернемся к вероятностному представлению функции $m(\alpha)$ в области перехода: $[\alpha_1, \alpha_2]$ на плоскости (α, m) . Квадрат функции $M(\varphi)$:

$$M^2 = m^2 / \langle m^2 \rangle, \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2(\varphi) d\varphi = 1,$$

играет роль плотности вероятности перехода с одной ветви функции на другую в точке $\varphi = \alpha / \Delta\alpha$, принадлежащей области $\varphi \times M(\varphi)$, где $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, $M(\varphi) \in [M_1(\varphi); M_2(\varphi)]$.

Самопроизвольный переход неравновесного физического процесса с одного режима на другой возможен в том случае, если в переходной области $\varphi \times M(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, $M(\varphi) \in [M_1(\varphi); M_2(\varphi)]$, ветви функции $M_1(\varphi)$ и $M_2(\varphi)$ - такие, что область неопределенности, возникающая при переходе от пространства $(\varphi, M; \eta)$ к пространству (φ, M) , не меньше, чем переходная область. То есть когда выполняется дисперсионное соотношение для области перехода.

Чтобы найти такое дисперсионное соотношение, рассмотрим операторы: $\hat{k} = i\partial/\partial\varphi$ и $\hat{\eta} = i\eta$, действующие в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega \subset R^1)$, в котором в качестве скалярного произведения базисных функций определено соотношение:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2(\varphi) d\varphi = 1.$$

Коммутационное соотношение этих операторов задается выражением:

$$\left[\hat{k}; \hat{\eta} \right] M = M \delta(\varphi - \varphi_2).$$

Используя соотношение Робертсона — Шрёдингера и непосредственно следующее из него соотношение неопределенности Гайзенберга:

$$\Delta_M^{\hat{k}} = \left[\left(\hat{k} M, M \right) - \left(\hat{k} M, M \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \Delta_M^{\hat{\eta}} = \left[\left(\hat{\eta} M, M \right) - \left(\hat{\eta} M, M \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \Delta_M^{\hat{k}} \Delta_M^{\hat{\eta}} \geq \frac{1}{2} \left| \left(\left[\hat{k}; \hat{\eta} \right] M, M \right) \right|,$$

где выражения в круглых скобках - скалярные произведения в гильбертовом пространстве $H^1(\Omega \subset R^1)$, а также учитывая непрерывность функции M только в пространстве, расширенном с помощью дополнительной переменной η , получим следующие выражения в пространстве $(\varphi, M; \eta)$:

$$\left(\hat{k} M, M \right) = i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial M}{\partial \varphi} d\varphi = -i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial M}{\partial \eta} \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = -\frac{i}{2} M_2 \left(M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial \varphi} - M_2 \right),$$

$$\left(\hat{k}^2 M, M \right) = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial^2 M}{\partial \eta \partial \varphi} \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = \frac{1}{2} M_2 \left(\frac{\partial M_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} \right),$$

$$\left(\hat{\eta} M, M \right) = i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \eta d\varphi = i \varphi \eta M^2 \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} + i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi M^2 \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi +$$

$$+ 2i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \eta M (M_1 - M_2) \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = -i M_1^2 \varphi_1 + \frac{i}{2} M_2^2 \varphi_2,$$

$$\left(\hat{\eta}^2 M, M \right) = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \eta^2 d\varphi = -\varphi \eta^2 M^2 \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} - 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \eta M^2 \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi -$$

$$- 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \eta^2 M (M_1 - M_2) \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = M_1^2 \varphi_1,$$

$$\left| \left(\left[\hat{k}; \hat{\eta} \right] M, M \right) \right| = \left| \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi \right| = \frac{1}{2} M^2(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_2} = \frac{1}{2} M_2^2.$$

При выводе этих соотношений, в области перехода $[\varphi_1, \varphi_2]$ принималась линейная интерполяция функции $M_1(\varphi)$ из области $\varphi \leq \varphi_1$. Поэтому, значение разности $M_1(\varphi) - M_2(\varphi)$ и производной этой разности в точке $\varphi = \varphi_2$ равны, соответственно

$$M_1(\varphi_1) + \frac{\partial M_1(\varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1} - M_2(\varphi_2) \quad \text{и} \quad \frac{\partial M_1(\varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1} - \frac{\partial M_2(\varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_2}.$$

Значение функции $M(\varphi)$ в точке $\varphi = \varphi_2$ равно значению функции на второй ветви в этой точке, то есть $M(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_2} = M_2(\varphi_2)$.

Из приведенных выражений, следует,

$$\Delta_M^{\hat{k}} = \left(\frac{1}{2} M_2 \left(\frac{\partial M_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{4} M_2^2 \left(M_1 - M_2 + \frac{\partial M_1}{\partial \varphi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Delta_M^{\hat{\eta}} = \left(M_1^2 \varphi_1 + \left(\frac{1}{2} M_2^2 \varphi_2 - M_1^2 \varphi_1 \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Параметр $\Delta_M^{\hat{\eta}}$ определяет среднеквадратичное отклонение величины η в переходной области $[\varphi_1, \varphi_2]$ в пространстве $(\varphi, M; \eta)$. Поскольку в рассматриваемой области осуществляется переход с ветви $M_1(\varphi)$ (то есть при $\eta = 1$) на ветвь $M_2(\varphi)$ функции $M(\varphi)$ (то есть при $\eta = 0$), необходимо, чтобы среднеквадратичное отклонение величины η было равно половине интервала между ее значениями в начальном и конечном состояниях. То есть $\Delta_M^{\hat{\eta}} = 1/2$.

Накладывая это условие, получим соотношение, связывающее безразмерные величины $\varphi_1, \varphi_2, M_1, M_2$: $4M_1^2 \varphi_1 + (M_2^2 \varphi_2 - 2M_1^2 \varphi_1)^2 = 1$.

Используя зависимость (2.2) для определения среднего значения $\langle m^2 \rangle$ перейдем к соответствующей зависимости с размерными величинами: $\alpha_1 = \alpha_2 - \Delta\alpha$, α_2 , m_1 , m_2 :

$$\left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\right)^2 m_2^4 - 4\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\left(1 - \frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\right)m_1^2 m_2 \left(m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \Delta\alpha - m_2\right) = \left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\left(m_1 m_2 - m_1^2 + m_2 \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \Delta\alpha\right) + m_1^2\right)^2. \quad (2.3)$$

Дисперсионное соотношение для безразмерных значений функций и их производных имеет вид:

$$\left(\frac{\partial M_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_2}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{2} M_2 \left(M_1^2 - 2M_1 M_2 + 2\frac{\partial M_1}{\partial \varphi}(M_1 - M_2) + \left(\frac{\partial M_1}{\partial \varphi}\right)^2\right) \geq 0.$$

А для соответствующих им размерных величин его можно записать в виде:

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha)^2 \left(\frac{\partial m_1}{\partial \alpha}\right)^2 + 2\Delta\alpha \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \left(m_1 - m_2 + \left(\frac{m_1^2}{m_2} \frac{1}{\partial m_1 / \partial \alpha} + \alpha_2\right) \left(\frac{\partial m_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial m_2}{\partial \alpha}\right)\right) + \\ + 2\alpha_2 m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \left(\frac{\partial m_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial m_2}{\partial \alpha}\right) + m_1(m_1 - 2m_2) \geq 0. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Выражения (2.3)-(2.4) являются алгебраическими. Они связывают значения функций $m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} = m_1$, $m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_2$ и значения их производных $\partial m_1(\alpha)/\partial \alpha|_{\alpha=\alpha_1} = \partial m_1/\partial \alpha$, $\partial m_2(\alpha)/\partial \alpha|_{\alpha=\alpha_2} = \partial m_2/\partial \alpha$ в точках $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, соответственно, с протяженностью области перехода $\Delta\alpha$, которая отделяет точку α_2 от точки α_1 .

Выражение (2.2) накладывает естественные ограничения на его применение для исследования процессов, описываемых преобразованными функциями и координатами: они должны быть такими, чтобы значение $\langle m^2 \rangle$ не равнялось нулю. В противном случае не возможно отнормировать на единицу базис скалярного

произведения, то есть задать алгебру, в которой есть и ноль, и единица. В частности, с помощью предлагаемого метода не могут быть описаны процессы, в которых значения m_1 и $\partial m_1/\partial \alpha$ одновременно равны нулю.

Необходимо напомнить, что соотношения (2.3)-(2.4) находились в предположении, что переход с ветви функции “1” на ветвь функции “2” происходит из точки α_1 в точку α_2 при однократном изменении по времени функции $\alpha(t)$. Если в другом процессе реализуются другие координаты точек α_1 и α_2 , то это не приведет к изменениям вида соотношений (2.3)-(2.4). Это связано с тем, что система уравнений определяет лишь возможные комбинации значений координат и соответствующих им значений функций и их производных: $m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} = m_1$, $m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_2$, $\partial m_1(\alpha)/\partial \alpha|_{\alpha=\alpha_1} = \partial m_1/\partial \alpha$, $\partial m_2(\alpha)/\partial \alpha|_{\alpha=\alpha_2} = \partial m_2/\partial \alpha$, $\alpha_2 \Delta \alpha$ (или α_1) для физического процесса с двумя (или несколькими) состояниями, описываемыми ветвями функции $m(\alpha(t))$, со скачкообразными изменениями ее значений в какой либо области аргумента. В общем случае, полученная система (2.3)-(2.4) является недоопределенной. В результате, комбинация точек перехода, как правило, является неединственной. И поэтому, при изменении функции $m(\alpha)$ (где $\alpha = \alpha(t)$) с течением времени сначала в одном, а затем в другом направлении по α , переход может происходить (и обычно происходит) в разных точках.

Из-за инертности физических систем, в нестационарных процессах происходит “затягивание” существования текущего процесса. Другими словами, если вероятность нахождения системы в двух состояниях, описываемых двумя ветвями функции, одна и та же, то система продолжает оставаться в том состоянии,

в котором уже пребывает, до тех пор, пока в результате случайной флуктуации или возмущающего воздействия (для возникновения, которых требуется некоторое время) не перейдет в другое состояние. В этом случае на плоскости с координатами (α, m) будет изображена не однопараметрическая, а разрывная гистерезисная кривая.

Необходимо также отметить, что соотношения (2.3)-(2.4) не являются инвариантным по отношению к выбору начала отсчета оси α . В предложенном методе это происходит из-за несимметричности относительно параметра η состояний, характеризуемых функциями $m_1(\alpha)$ и $m_2(\alpha)$, а также из-за “привязки” процесса перехода из одного состояния системы в другое к масштабу этого перехода: $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. В описываемых этим методом физических процессах это свойство “переходных” состояний определяется конкретными диапазонами параметров, а также наличием собственных масштабов таких процессов. Например, при описании зависимости силы сопротивления шара в потоке жидкости от числа Рейнольдса, возникает скачкообразный переход с одной ветви функции на другую при изменении режима течения жидкости от ламинарного к турбулентному. Этот переход не может происходить при малых значениях числа Рейнольдса. Минимальное - критическое значение этого числа, а также диапазон значений чисел Рейнольдса при которых возможен такой переход, можно считать масштабами переходного процесса.

Практически все процессы в природе, совершающие скачкообразные переходы между различными состояниями, могут быть описаны непрерывными функциями, имеющими в области перехода разрыв производных в одной или

нескольких точках. Однако эти функции имеют, как правило, вероятностную – стохастическую природу либо во всей переходной области, либо в какой-то ее части. Принятое математическое приближение описания зависимости $m(\alpha)$ в виде функции с разрывом первого рода, позволяет в некоторых задачах определить размер и/или положение этой области, используя информацию о значениях функции и ее производных только на ее границах. Рассмотрим применение этого метода на примере ламинарно-турбулентного перехода в задаче Хагена-Пуазейля.

3. Описание переходных режимов течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения.

Как было отмечено в главе 1, ламинарный и турбулентный режимы течения в задаче Пуазейля можно характеризовать различными функциями скорости (см. (1.2)) и, соответственно, градиентами скорости непосредственно у стенки трубы:

$$\left. \frac{dV(y)}{dy} \right|_{y=0} = \begin{cases} \frac{V_*^2}{\nu}, & \text{ламинарный} \\ \frac{5 V_*^2}{4 \nu}, & \text{турбулентный} \end{cases} .$$

Используя соотношение $V_*^2 = 2\nu U_0/R = 2\text{Re}\nu^2/R^2$, последнее выражение можно переписать в виде:

$$\left. \frac{1}{2} \frac{d(VR/\nu)}{d(y/R)} \right|_{y=0} = \begin{cases} \text{Re}, & \text{ламинарный} \\ \frac{5}{4} \text{Re}, & \text{турбулентный} \end{cases} .$$

Предположим, что «уход» с ламинарного режима течения становится возможен при критическом значении числа Рейнольдса: Re_{cl} . Вычтем из левой и правой частей полученного соотношения это число:

$$\frac{1}{2} \frac{d(VR/\nu)}{d(y/R)} \Big|_{y=0} - \text{Re}_{c1} = \begin{cases} \text{Re} - \text{Re}_{c1}, & \text{ламинарный} \\ \frac{5}{4}(\text{Re} - \text{Re}_{c1}) + \frac{1}{4}\text{Re}_{c1}, & \text{турбулентный} \end{cases}.$$

Обозначив: $m = \frac{1}{2} \frac{d(VR/\nu)}{d(y/R)} \Big|_{y=0} - \text{Re}_{c1}$ и $\alpha = \text{Re} - \text{Re}_{c1}$, перейдем к функции и

переменной, используемых в соотношениях (2.3)-(2.4):

$$m(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{ламинарный} \\ \frac{5}{4}\alpha + \frac{1}{4}\text{Re}_{c1}, & \text{турбулентный} \end{cases}.$$

Из экспериментов известно, что при малых числах Рейнольдса может быть только ламинарный режим течения, а при больших – как ламинарный, так и турбулентный, поэтому ветвью решения: $m_1(\alpha) = \alpha$, следует обозначить решение, соответствующее ламинарному режиму, а ветвью решения: $m_2(\alpha) = \alpha \cdot 5/4 + \text{Re}_{c1}/4$, следует обозначить решение, соответствующее турбулентному (стохастическому) режиму течения жидкости.

Поскольку Re_{c1} - значение числа Рейнольдса, при котором становится возможен «уход» с ветви «1», то $\alpha_1 = \text{Re}_1 - \text{Re}_{c1} = 0$ и $m_1 = m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1} = \alpha_1 = 0$. Значение производной при этом на ветви «1» равно: $\partial m_1 / \partial \alpha = \overset{\text{def}}{\partial m_1(\alpha) / \partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} = 1$.

«Переход» на ветвь «2» будет происходить в точке $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha = \Delta\alpha$. И, поэтому, $m_2 = m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2} = \alpha_2 \cdot 5/4 + \text{Re}_{c1}/4 = \Delta\alpha \cdot 5/4 + \text{Re}_{c1}/4$. Значение производной при этом на ветви «2» равно: $\partial m_2 / \partial \alpha = \overset{\text{def}}{\partial m_2(\alpha) / \partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2} = 5/4$.

Подставляя значения функций и их производных в соответствующих точках в уравнение (2.3), найдем его решения: $\Delta\alpha = -\text{Re}_{c1}/9$, $\Delta\alpha = -\text{Re}_{c1}/5$ и $\Delta\alpha = -\text{Re}$.

Соотношению (2.4) удовлетворяют только первые два решения: $\Delta\alpha = -\text{Re}_{c1}/9$ и $\Delta\alpha = -\text{Re}_{c1}/5$. Причем минимальному (из двух возможных) по абсолютной величине значению дисперсии соответствует решение: $\Delta\alpha = -\text{Re}_{c1}/5$, максимальному – решение: $\Delta\alpha = -\text{Re}_{c1}/9$. Вопрос вероятности реализации этих решений, описывающих ламинарно-турбулентный переход, требует отдельного исследования. Однако можно предположить, что наиболее «успешно» реализуемым решением является то, которому соответствует наименьшая дисперсия. Поэтому остановимся вначале на первом решении.

Переходя обратно к физическим параметрам, характеризующим течение жидкости: $\alpha = \text{Re} - \text{Re}_{c1}$, запишем, $\Delta\alpha = \text{Re}_{c2} - \text{Re}_{c1} = -\text{Re}_{c1}/5$, то есть

$$\text{Re}_{c2} = 4/5 \cdot \text{Re}_{c1}, \quad \text{или} \quad \Delta U_0 = U_{0c2} - U_{0c1} = -1/5 \cdot U_{0c1}, \quad \text{или} \quad U_{0c2} = 4/5 \cdot U_{0c1}, \quad (3.1)$$

где Re_{c2} - значение числа Рейнольдса (определяемого по значению скорости на оси трубы) после перехода режима течения жидкости к турбулентному, при условии, что переход от ламинарного режима течения произошел при значении числа Рейнольдса, равного Re_{c1} ; U_{0c2} и U_{0c1} - значения скорости течения жидкости на оси трубы в турбулентном и ламинарном режимах, соответственно.

Таким образом, можно констатировать: в теоретической модели (также как и в экспериментах) получено, что переход от ламинарного режима к турбулентному должен сопровождаться эффективным уменьшением числа Рейнольдса, рассчитанного по скорости течения жидкости на оси трубы ($\text{Re} = U_0 R / \nu$). Это

объясняется тем, что при заданном перепаде давления при переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения часть энергии жидкости переходит в энергию вихреобразования, в том числе, с составляющей скорости, направленной в сторону, противоположную основному потоку. В связи с этим, профиль скорости при турбулентном режиме течения имеет более «наполненный» вид в пристеночных областях, а на оси трубы и в центральной части скорость уменьшается.

Соотношения (3.1) можно использовать и для определения минимально возможного значения критического числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения. Остановимся на этом подробнее.

Модуль разности максимальных значений скоростей течения жидкости в трубе при двух режимах течения: ламинарном и турбулентном, должен быть такой, который допускал бы процесс вихреобразования. Можно предположить, что характерный размер такого процесса: l_v , должен быть не больше половины длины пути смешения l .

Понятие - “путь смешения” - ввел Прандтль. По его определению, это величина, которая характеризует расстояние, проходимое частицей («молем») жидкости поперек течения, прежде чем произойдет ее смешение с окружающей жидкостью. Выражение для пути смешения имеет вид:

$$l = \kappa \left| \frac{dV/dy}{d^2V/dy^2} \right|, \quad (3.2)$$

где $\kappa \approx 0,4$ - постоянная Кармана. Это выражение найдено полуэмпирическим путем, поскольку позволяет получать логарифмический профиль с коэффициентом – постоянной Кармана – найденными экспериментально.

Поскольку в работе [1] логарифмический профиль в центральной части трубы и значение постоянной Кармана найдены аналитически, то использование выражения (3.2) можно считать теоретически обоснованным.

Для того чтобы имел место процесс вихреобразования, при прохождении расстояния, равного длине пути смещения один вихрь максимально возможного размера l_v должен разделиться хотя бы на два вихря. То есть,

$$l_v \leq l/2 = \frac{\kappa}{2} \left| \frac{dV/dy}{d^2V/dy^2} \right|. \quad (3.3)$$

Производную dV/dy можно оценить, предполагая, что изменение скорости в центре трубы при переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения при критическом числе Рейнольдса порождает вихри самого большого размера – порядка радиуса трубы. То есть

$$\frac{dV}{dy} \approx \frac{\Delta U_0}{R} = -\frac{1}{5} \frac{U_{0cl}}{R}. \quad (3.4)$$

Вторую производную скорости d^2V/dy^2 можно оценить с помощью отношения разности производных для двух масштабов вихрей: максимально и минимально возможных:

$$\frac{d^2V}{dy^2} \approx \frac{\Delta U_0/R - V_*/y_*}{R - y_*} \approx -\frac{1}{5} \frac{U_{0cl}}{R^2} - 2 \frac{U_{0cl}}{R^2} = -\frac{11}{5} \frac{U_{0cl}}{R^2}. \quad (3.5)$$

Подставляя выражения (3.4) и (3.5) в (3.3), получим соотношение: $l_v \leq R \cdot \kappa/22$.

Остановимся на случае, когда на длине пути смещения вихрь успевает разделиться ровно на два вихря. Тогда найденный характерный размер l_v должен быть порядка динамической длины: $y_* \sim \nu/V_*$, на которой происходит диссипация кинетической энергии вихревого движения частиц жидкости в тепло: $l_v \sim y_* = R/\sqrt{2\text{Re}_{c1}}$. Следовательно, $R \cdot \kappa/22 \sim R/\sqrt{2\text{Re}_{c1}}$. То есть значение минимально возможного - критического числа Рейнольдса, при котором становится возможен процесс вихреобразования (а, следовательно, и переход от ламинарного к турбулентному режиму течения):

$$\text{Re}_{c1} = \frac{V_{0c1}R}{\nu} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{22}{0,4} \right)^2 \approx 1513.$$

А минимальное критическое число Рейнольдса турбулентного течения (соответствующее этому ламинарному течению), будет равно:

$$\text{Re}_{c2} = \frac{4}{5} \text{Re}_{c1} \approx \frac{4}{5} 1513 \approx 1210. \quad (3.6)$$

По имеющимся экспериментальными данными [19] критическое число Рейнольдса турбулентного режима течения, определяемое через среднее по сечению трубы значению скорости: $\text{Re}_{cm\text{exp}} = 2V_{cm}R/\nu \approx 2200$, где V_{cm} - критическая средняя по сечению трубы скорость турбулентного течения.

Учитывая, что $V_{cm} \approx 0,816V_{0c2}$ (вычисленной по формуле Блаузиуса), для приведения к параметру, используемому в эксперименте, выражение (3.6) надо домножить на коэффициент $\sim 2 \cdot 0,816 \approx 1,63$. В результате получим:

$$\text{Re}_{cm\text{theor}} \approx 1210 \cdot 1,63 \approx 1970. \quad (3.7)$$

То есть теоретически найденные значения критического числа Рейнольдса (3.7), при котором становится возможен переход от ламинарного режима течения к турбулентному, лишь незначительно (с точностью порядка десяти процентов) меньше аналогичного параметра, найденного экспериментальными методами. При этом стоит отметить, что в современных экспериментальных работах (см., например, [20]) нижнее критическое число Рейнольдса, определяемое как значение, при котором изначально возмущенный на входе поток жидкости не ламинируется составляет примерно 1950.

При увеличении числа Рейнольдса и, соответственно, разности максимальных значений скоростей течения жидкости в трубе при двух режимах течения, увеличивается вероятность потери устойчивости ламинарного режима течения и, следовательно, увеличивается вероятность перехода к турбулентному течению.

Проделав математические процедуры для второго решения соотношения (2.4): $\Delta\alpha = -Re_{c1}/9$, аналогичные тем, которые описаны для первого решения, получим критическое число Рейнольдса (рассчитанное по средней по сечению трубы скорости турбулентного течения), равное $Re_{cmtheor} \approx 6500$.

Первый и второй турбулентные режимы течения будут иметь функционально подобные профили течения, по крайней мере, в пристеночной области. Однако спектры генерируемых вихрей в этих двух случаях будут отличаться. Следовательно, при значениях числа Рейнольдса, превышающих величину $Re \approx 6500$, в трубе кругового сечения с разной вероятностью могут существовать различные режимы течения: ламинарный, первый или второй турбулентный, а также их

комбинации и динамические переходы из одного в другой. Вероятно, этим можно объяснить некоторые аспекты процесса перемежаемости турбулентного течения и существования когерентных структур при больших числах Рейнольдса. Однако этот вопрос чрезвычайно сложный и требует дальнейшего исследования.

Заключение.

Полностью детерминированный подход к описанию жидкости с помощью уравнений Навье-Стокса, не учитывающий возбуждения внутренних (стохастических) степеней свободы и соответствующего изменения энтропии жидкости, приводит к результату абсолютной устойчивости параболического профиля скорости течения в трубе кругового сечения (течение Хагена-Пуазейля) при любых числах Рейнольдса для бесконечно малых возмущений. В отличие от него, разработанный метод описания стохастических систем с использованием модифицированных уравнений Навье-Стокса, записанных в пространстве, расширенном с помощью дополнительной переменной, описывающей производство энтропии стохастической системы [1], позволяет при больших числах Рейнольдса найти два решения задачи Хагена-Пуазейля: одно из которых, соответствует ламинарному режиму течения, второе – турбулентному. Первое решение во всей области течения жидкости характеризуется параболическим профилем скорости, второе - в центральной области характеризуется логарифмическим профилем скорости с множителем, обратно пропорциональным постоянной Кармана, который также был определен в работе [1] аналитически.

Найденное небольшое отличие первого и второго решений непосредственно у стенки трубы, позволило в настоящей работе аналитически, с помощью метода описания «разрывных» функций, найти минимально возможное значения числа Рейнольдса: $Re_{c\text{theor}} \approx 1970$, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения в задаче Хагена-Пуазейля.

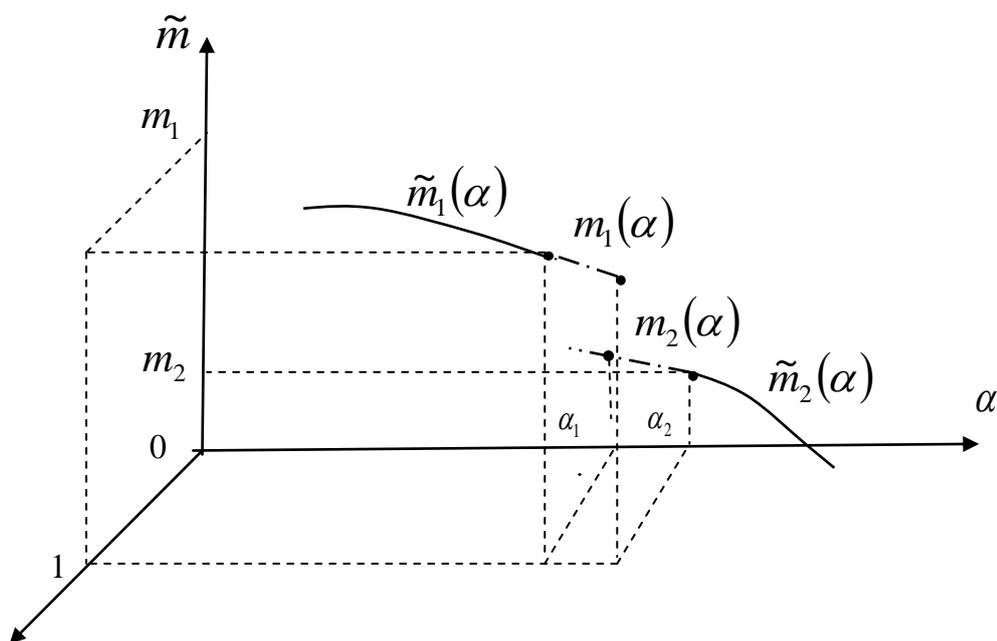


Рис. 1

Схематичное изображение функции с разрывом первого рода в расширенном пространстве переменных.

Библиографический список

1. Хатунцева О.Н. Об учете влияния стохастических возмущений на решения уравнений Навье-Стокса в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 100.

URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93311>

2. Хатунцева О.Н. Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задачах образования вязких “пальцев” и росте дендритов // Сибирский журнал вычислительной математики. 2009. Т. 12. № 2. С. 231 - 241.
3. Ларина Е.В., Крюков И.А., Иванов И.Э. Моделирование осесимметричных струйных течений с использованием дифференциальных моделей турбулентной вязкости // Труды МАИ. 2016. № 91. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=75565>
4. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Численное моделирование взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Труды МАИ. 2013. № 70. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=44440>
5. Кравчук М.О., Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В. Вопросы моделирования турбулентности для расчета сверхзвуковых высокотемпературных струй // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58536>
6. Ву М.Х., Попов С.А., Рыжов Ю.А. Проблемы моделирования течения в осевых вентиляторах аэродинамических труб // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29361>
7. До С.З. Численное моделирование вихрей в течении Куэтта-Тейлора сжимаемого газа // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49670>
8. Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Верификация численной модели взаимодействия прямоугольной пластины с поверхностью воды // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49676>

9. Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Численное моделирование поведения трехслойной прямоугольной пластины при вертикальном ударе о жидкость // Труды МАИ. 2013. № 69. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=43066>
10. Махров В.П., Глущенко А.А., Юрьев А.И. Влияние гидродинамических особенностей на поведение свободной поверхности жидкости в высокоскоростном потоке // Труды МАИ. 2013. № 64. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=36423>
11. Горбатенко С.А., Махров В.П., Юрьев А.И. Об особенностях кавитационного обтекания тел большого удлинения в вертикальном потоке // Труды МАИ. 2013. № 64. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=36459>
12. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. Simulation of flow around aerofoil with DES model of turbulence // Труды МАИ. 2012. № 59. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=34840>
13. Priymak V.G., Miyazaki T. Direct numerical simulation of equilibrium spatially localized structures in pipe flow // Physics of Fluids, 2004, vol. 16, no. 12, pp. 4221 - 4234.
14. Willis A.P., Kerswell R.R. Critical behavior in the relaminarization of localized turbulence in pipe flow // Physical Review Letters, 2007, vol. 98, pp. 014501(4).
15. Avila M., Mellibovsky F., Roland N., Hof B. Streamwise Localized Solutions at the Onset of Turbulence in Pipe Flow // Physical Review Letters, 2013, vol. 110, P. 224502.
16. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. - М.: Физмалит, 2005. - 288 с.
17. Монин А.С., Яглом А.М. Статическая гидромеханика. - М.: Наука, Ч. 1. 1965. - 640 с.; Ч. 2. 1967. - 720 с.

18. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. - 712 с.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 731 с.
20. Павельев А.А., Решмин А.И., Тепловодский С.Х., Федосеев С.Г. О нижнем критическом числе Рейнольдса для течения в круглой трубе // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 4. С. 35 - 43.