

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

На правах рукописи



Ли Шугуан

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЙ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ВЯЗКИХ
ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ НА ОСНОВЕ МЕТОДА
АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ГОМОГЕНИЗАЦИИ**

Специальность 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор,
Димитриенко Юрий Иванович

Москва, 2020 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
ВВОДИМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ	5
ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА 1. МНОГОМАСШТАБНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМЫХ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ	21
1.1. Математическая постановка задачи о движении несжимаемых неньютоновских вязких жидкостей в пористых средах.....	21
1.1.1. Геометрическая модель расчетной области и общие допущения.....	21
1.1.2. Система фундаментальных законов механики сплошной среды.....	25
1.1.3. Определяющие соотношения неньютоновских вязких жидкостей	26
1.1.3.1. Ньютоновская вязкость сплошной среды	26
1.1.3.2. Неньютоновская вязкость несжимаемой среды	27
1.1.3.3. Модель неньютоновской вязкости.....	28
1.1.4. Граничные и начальные условия.....	29
1.2. Система уравнений движения неньютоновских вязких жидкостей в безразмерной форме.....	30
1.3. Применение метода асимптотической гомогенизации для моделирования течения несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в периодической пористой структуре	32
1.3.1. Общие положения метода асимптотической гомогенизации	32
1.3.2. Математическая постановка локальных задач на ячейке периодичности в случае модели несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости.....	34
1.3.2.1. Асимптотические разложения	34
1.3.2.2. Локальные уравнения неразрывности и движения.....	35
1.3.2.3. Локальные определяющие соотношения неньютоновских вязкостей.....	35
1.3.2.4. Локальные уравнения движения.....	37

1.3.2.5. Локальные граничные условия	38
1.3.2.6. Осредненные физические параметры	39
1.3.2.7. Общая постановка локальных задач на ячейке периодичности.....	39
1.3.3. Постановка локальной задачи на ячейке периодичности с учетом трехмерной структуры пор.....	41
1.3.4. Физическая интерпретация локальной задачи.....	42
1.3.5. Сведение локальной задачи к задаче на 1/8 ячейки периодичности	43
1.3.6. Нелинейный закон фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в пористых средах	49
1.3.6.1. Классической закон фильтрации Дарси	49
1.3.6.2. Нелинейный закон фильтрации неньютоновско-вязкой жидкости....	51
1.3.7. Эффективная неньютоновская вязкость	55
1.4. Выводы по первой главе	56
ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ И НЕЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА ФИЛЬТРАЦИИ.....	57
2.1. Численный метод решения локальной задачи.....	57
2.1.1. Тензор неньютоновских вязких напряжений	57
2.1.2. Вариационная формулировка локальной задачи	59
2.1.3. Условие Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB)	62
2.1.4. Метод конечных элементов для решения вариационной задачи	64
2.2. Метод вычисления неньютоновской вязкости	67
2.2.1. Метод расчета неньютоновской вязкости.....	67
2.2.2. Итерационный алгоритм расчета нелинейной вязкости.....	69
2.3. Численный метод определения характеристик реологии жидкости и пористости пористой среды	71
2.4 Выводы по второй главе	72
ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДВИЖЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ	73
3.1. Разработка программного комплекса для моделирования процессов	

фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в пористых средах	73
3.1.1. Блок-схема программного комплекса и принципы работы с ним.....	73
3.1.2. Проверка адекватности математической модели на моделирование ньютоновской жидкости	75
3.1.2.1. Проверка закона Дарси в 3D ортогональной микроструктуре	75
3.1.2.2. Проверка закона Дарси в 3D тканевой микроструктуре	78
3.2. Численное моделирование локальных процессов фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в трехмерной пористой структуре.....	81
3.2.1. Численное моделирование локальных процессов фильтрации в 3D ортогональной структуре.....	81
3.2.2. Численное моделирование локальных процессов фильтрации в 3D тканевой структуре.....	87
3.2.2.1. Численное решение локальной задачи $L^{(1)}$	87
3.2.2.2. Численное решение локальной задачи $L^{(2)}$	91
3.3. Численные расета нелинейного закона фильтрации и эффективной вязкости неньютоновских вязких жидкостей в трехмерной пористой структуре.....	97
3.3.1. Численные расчета нелинейного закона фильтрации и эффективной вязкости в 3D ортогональной структуре	97
3.3.2. Численные расчета нелинейного закона фильтрации и эффективной вязкости в 3D тканевой структуре	102
3.4 Выводы по третьей главе	109
ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОД	111
ЛИТЕРАТУРЫ	113

ВВОДИМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

КЭ – конечный элемент

ПКС – пористая композитная структура

ПК – программный комплекс

МАГ – метод асимптотической гомогенизации

МКЭ – метод конечных элементов

МСС – механика сплошной среды

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений

ЯП – ячейка периодичности

ВВЕДЕНИЕ

Теория фильтрации неньютоновских жидкостей является частью механики сплошной среды (МСС) и посвящена изучению движения неньютоновских жидкостей через пористые среды. Движение неньютоновских жидкостей является довольно важной и сложной темой исследований в области гидромеханики, так как при течении которых её вязкость нелинейно зависит от тензора скорости деформации. Пористая среда относится к твердой структуре, состоящей из твердого каркаса и большого количества плотно интегрированных и взаимосвязанных крошечных пустот (пор), разделенных твердым каркасом. Жидкость в пористой среде проявляет движение в режиме фильтрации, поэтому теория изучения физико-механических свойств пористой среды и ее внутренней жидкости является основной частью теории фильтрации. Следовательно, процесс фильтрации неньютоновских вязких жидкостей должен учитывать не только роль сложной внутренней структуры пористых сред, но также влияние неньютоновской вязкости. Таким образом, исследование процесса фильтрации является очень сложной проблемой в области МСС.

Во многих отраслях современной промышленности, таких как полимерная, нефтяная, фармацевтическая, бумажная и многих других, течение неньютоновской жидкости в пористых структурах имеет большое значение [3, 54, 106]. Например:

- в нефтяной промышленности, растворы часто, изготовленные из полимеров и пен, применяемые в операциях по усиленной добыче нефти, демонстрируют неньютоновское поведение [107];
- в бумажной промышленности, для повышения прочности бумаги, на подложку обычно наносят тонкую полимерную жидкую пленку. Качество изделия тесно связано с хорошей пропиткой неньютоновской раствора полимеров в пористые волокнистые субстраты [50, 94];
- в последнее время одним из наиболее распространенных методов производства композиционных материалов является метод пропитки жидким связующим в оснастке. Существуют многие технология, основанные на данном подходе, но большинство из них являются вариантами метода LCM (Liquid

Composite Molding), также известного как метод RTM (Resin Transfer Moulding) [102]. Способ изготовления требует инъекции жидких связующих в заготовку армирующих материалов под необходимым давлением [15 – 17]. Армирующий материал обычно представляет собой стеклоткань, стекломат, керамику или другой тип материала, а в качестве жидких связующих могут использоваться различные типы термореактивных и термопластичных смол (thermosetting and thermoplastic resin): полиэфирные, винилэфирные, карбаминоформальдегидные, фенолформальдегидные, эпоксидные и др. [59, 60, 81]. В процессе пропитки армирующих материалов показаны нелинейные зависимости, связанные со сложной микроструктурой пористых сред и неньютоновскими свойствами жидкого связующего [84]. Для оптимизации заполнения формы необходимо учитывать такое неньютоновское поведение жидких связующих.

Следовательно, чтобы улучшить и оптимизировать вышеупомянутые технические процессы, необходимо разработать соответствующие модели для описания течения неньютоновских жидкостей в пористых композитных средах. Когда жидкость рассматривается как ньютоновская жидкость, процесс течения в пористой среде можно хорошо предсказать, непосредственно применяя знаменитый закон Дарси [2, 39], и в настоящее время этот метод моделирования широко используется для оптимизации процессов разработки и производства композитов, таких как RTM-метод. Коэффициент вязкости жидкости и компоненты тензора проницаемости пористой среды считаются необходимыми параметрами в рамках закона Дарси. Принимая во внимание дорогостоящие затраты на оборудование и эксперименты, связанные с данным методом, адекватное моделирование течения жидкости в пористых композитных структурах (ПКС), состоящих из пор со сложной пространственной геометрией является чрезвычайно важной. В настоящее время в отечественной и зарубежной литературе существует большое количество публикаций, посвященных моделированию фильтрации, связанной с указанными технологиями Boutin C. [62], Francucci G. [79], Gantois R. [80], Li J. [89], Loudad R. [93] и других исследователей [95, 109]. Из этих исследований в настоящее время хорошо известно, что проницаемость пористой

среды зависит от геометрических характеристик пор, составляющего пористую среду, пористости пористой среды и вязкости жидкости.

Кроме закона Дарси, разработано несколько полуэмпирических моделей фильтрации, такие как закон Бринкмана (Brinkman's law) [9], уравнение Блейка-Козени-Кармана (Blake-Kozeny-Carman) [85], уравнение Эргуна (Ergun) [77] и некоторые другие. Эти широко используемые модели представляют собой упрощенные макроскопические подходы, при которых пористая среда считается сплошной средой. Все сложности и мелкие детали микроскопической структуры пор выражены в интегральном виде, таких как проницаемость, которая отражает среднее свойство среды. Хотя закон Дарси считается эмпирическим соотношением, но он получается из анализа локальных течений ньютоновской вязкой жидкости в отдельно взятой поре с использованием уравнений Навье-Стокса и вывода осредненных уравнений процессов фильтрации «из первых принципов» [18, 56, 58]. Закон Дарси также пренебрегает граничными эффектами и теплопередачей [97]. Фактически оригинальный закон Дарси игнорирует все эффекты, кроме ньютоновского вязкого эффекта. Следовательно, применимость закона Дарси ограничена ламинарным, изотермическим, линейно-вязким, несжимаемым течением. Закон Дарси изменяется по-разному, чтобы учесть более сложные явления, такие как неньютоновское [105] и многофазное течение [104].

В большинстве публикаций исследование течения жидкости в пористых средах проводится в рамках феноменологической теории фильтрации, в которых коэффициент проницаемости пористой среды определяется экспериментально или локальное течение жидкости описывается с помощью различных эмпирических и приближенных соотношениях [12]. В этом случае грубая оценка реального процесса, происходящего во внутренних порах сложной геометрической формы, составляющих пористую среду, приведет к большому отклонению в определении проницаемости. С учетом особенностей феноменологической теории, метод асимптотической гомогенизации (МАГ) является важным методом исследования фильтрации ньютоновской вязкой жидкости «из первых принципов» [12, 56, 58, 82, 113]. Такой метод использован для моделирования течения в пористой среде, и

получены математическая модель течения в отдельной поре, называемая локальной задачей (микроскопической), и математическая модель течения в целой пористой среде, называемая глобальной задачей (макроскопической). Кроме того, другие методы многомасштабного моделирования движения ньютоновской жидкости, применяемые к процессу фильтрации, также описаны в публикациях [65, 76, 86, 109].

Тем не менее, были предложены различные методы осреднения, такие как пространственное (Нигматулин Р.И. [41]), временное (Yi Y.M. [114]), пространственно-временное (Zhang H.W. [115]) и прочие, большинство из которых разработаны для пористых композитов. Отметим МАГ, предложенный Бахваловым Н.С. [7] и позже развитый Бардзокасом Д.И. [5], Беляевым А.Ю. [8], Победрей Б.Е. [42], Санчес-Паленсией Э. [44], Г.П. Панасенко [58], Димитриенко Ю.И. [18] и другими исследователями. Этот метод моделирования с использованием МАГ широко используется в различных сложных научных задачах, таких как механика композиционных материалов [26, 29, 35], теория многослойных пластин [52, 53, 73], механика многофазной среды с фазовым переходом [68-71], динамический процесс в деформируемых пористых системах [28, 37] и другие [61]. Преимущество метода асимптотического осреднения состоит в том, что с учетом точных исходных уравнений модели механики сплошной среды и на основе их асимптотического анализа получается математически обоснованные осредненные уравнения для гомогенизированных сред («из первых принципов»). В рамках общей концепции МАГ, во-первых, принимается предположение, что пористая система имеет свойство периодичности, то есть пористая система состоит из большого количества повторяющихся пространств, называемых ячейкой периодичности (ЯП). Решение исходной физико-математической модели выражается в виде рядов по степеням безразмерного малого параметра $\kappa = l_0/x_0 \ll 1$, который описывает соотношение линейного размера ЯП – l_0 и линейного размера всей пористой среды – x_0 . Локальные задачи в ЯП сформулированы, чтобы исследовать локальные микро процессы, которые происходят в отдельной поре. Решение локальных задач позволяет определять пористость и проницаемость пористой среды исключительно

на основании геометрии пор внутри пористой среды. Наконец, оператор осреднения применяется к полученной локальной задаче, чтобы получить глобальную задачу фильтрации или закон фильтрации. Решение полученной глобальной задачи фильтрации, определенной в «гомогенизированной» области, получается проще, чем исходной постановкой. На основе МАГ исследование фильтрации идеального газа в пористых системах рассмотрено в [10, 11, 25, 27, 30, 31, 36, 72], а задача фильтрации многофазных линейных сред газа и слабосжимаемой ньютоновской жидкости исследована в [12, 23, 24].

Однако в инженерной практике большинство промышленных жидкостей не соответствуют предположению о линейной вязкости. Например, в процессе технологии RTM, жидкие связующие сильно неоднородны и состоят из крупных молекул, образующих сложные пространственные структуры. При течении жидких связующих вязкость, как правило, оказывается неньютоновской [13, 40, 49, 51]. Из-за сложных определяющих соотношений неньютоновских жидкостей, связанные с ними исследования становятся очень трудными. Вязкость неньютоновской жидкости может изменяться под воздействием внешней силы, например, кетчуп становится более жидким при встряхивании. Чаще всего вязкость неньютоновской жидкости (постепенная деформация при сдвиговых или растягивающих напряжениях) зависит от скорости сдвига или истории скорости сдвига, хотя вязкость может зависеть от других физических параметров, таких как температура и давление, для данной жидкостной системы [35, 59, 60]. Реологические свойства лучше изучаются с помощью тензорных определяющих соотношений, которые распространены в МСС [81]. Одними из наиболее характерных особенностей неньютоновского поведения являются вязкость, зависящая от напряжения и времени, предел текучести и релаксация напряжений. Так, неньютоновские жидкости обычно делятся на три широкие группы: независящие от времени, вязкоупругие и зависящие от времени. Однако в действительности эти классификации часто не являются четко определенными [106]. Обычно жидкости с вышеупомянутыми множественными реологическими характеристиками называют сложными жидкостями [66], но в соответствии с профессиональной терминологией

они все вместе называются неньютоновскими жидкостями. Учитывая реологические характеристики большинства промышленных жидкостей, в диссертационной работе рассматриваются независимые жидкости от времени жидкости.

Не зависящими жидкими средами от времени являются те, для которых скорость деформации в данной точке зависит исключительно от мгновенного напряжения в этой точке. Зависимость скорости сдвига является одной из наиболее важных и определяющих характеристик неньютоновских жидкостей вообще, и в частности жидкостей, независимых от времени. Когда типичная неньютоновская жидкость испытывает сдвиговое течение, вязкость оказывается ньютоновской при более низкой скорости сдвига. После того, как скорость сдвига достигает или превышает определенную прочность, изменение вязкости увеличивается по мере увеличения скорости сдвига [106]. Жидкость описывается как разжижающая при сдвиге или псевдопластичная, если вязкость уменьшается при увеличении скорости сдвига, и так утолщенная при сдвиге или дилатантная, если вязкость увеличивается при увеличении скорости сдвига. После этого состояния, которое зависит от скорости сдвига, вязкость больше не зависит от скорости сдвига и достигает постоянного предела при высокой скорости сдвига. Если жидкость подвергается начальному напряжению без течения, которая называется текучей средой предела текучести. Почти все растворы полимеров, которые проявляют вязкость, зависящую от скорости сдвига, являются разжижающимися при сдвиге, при этом относительно немного растворов полимеров демонстрируют поведение дилатанта. Кроме того, в большинстве известных случаев утолщения при сдвиге существует область утончения при более низких скоростях сдвига [100]. Эти реологические классификации идеализированы [106], потому что реология многих жидкостей обычно более сложна и демонстрирует различное поведение при различных нагрузках. Типичными примерами не зависящих от времени жидкостных моделей являются степенная модель (power-law), модель Эллис (Ellis), модель Карро (Carreau) и модель Гершель-Балкли (Herschel-Bulkley). Эти модели широко используются для моделирования неньютоновских жидкостей, независимых от

времени. Большинство реологических моделей жидкостей, не зависящих от времени, приведены в виде показателей степени инвариантов тензора скорости деформации, а более репрезентативным является модель Карро (Carreau), которая может описывать поведение разжижающей при сдвиге и описывать поведение утолщенной при сдвиге.

К сожалению, в настоящее время моделирование течений неньютоновской жидкости в пористых средах не привлекает особого внимания: мало соответствующих экспериментальных аналитических или численных исследований встречаются в публикациях. В большинстве этих работ реология жидкости описывается в рамках модели Карро (Carreau fluid), потому что эта простая оценка реологии жидкости очень похожа на реологические явления, которые происходят во многих промышленных производственных процессах, таких как покрытие бумаги или текстиля, обработка термопластичных полимерных композитов [96]. Из-за взаимосвязи между сложной геометрией пор в ПКС и реологией жидкости, закон фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в пористой среде трудно вывести непосредственно из закона Дарси. Многие ученые предложили выражения закона фильтрации для неньютоновских жидкостей, которые обычно применимы только к пористым средам с простой структурой. Larson R.G. [88] получил тот же закон фильтрации, предполагая, что линии тока не зависят от объемной скорости течения. Такие модели фильтрации часто представляют собой одномерные модифицированные версии закона Дарси, построенные на феноменологических соображениях или прямом численном моделировании в масштабе пор [110], за исключением работы Spelt P.D.M. [108] и Woods J.K. [112]. Действительно, первое полное выражение закона фильтрации степенных жидкостей, текущих через параллельные прямоугольные массивы, было предложено Woods J.K. в тензорной форме [112]. Поэтому эту нетензорную форму закона фильтрации трудно распространить на другие типы волоконной среды. С другой стороны, фундаментальные свойства закона фильтрации степенных жидкостей, протекающих через волокнистые среды с общей структурой, были предложены в недавних теоретических исследованиях, основанных на методе

гомогенизации [65]. Pearson J.R.A. [93, 101] показывает, что взаимосвязь между макроскопическим градиентом давления и скоростью фильтрации аналогична определяющих соотношений между сдвиговым напряжением и скоростью деформации. В частности, J-L. Auriault [55] вывел наиболее общую тензорную форму закона течения, учитывающую различные типы анизотропии. Недавно, на основе теоретических результатов J-L. Auriault [55], Z. Idris [83] и L. Orgeas [98] провели численные исследования течения степенной жидкости в двумерной пористой структуре, состоящей из круглой формы, L. Orgeas [99] также численно моделировал течение жидкости в рамках модели Карро-Ясуда (Carreau-Yasuda) в трехмерной структуре, состоящей из однонаправленного цилиндра. К сожалению, на основе этих исследовательских работ не было проведено исследования течения неньютоновской жидкости в ПКС, состоящей из пор со сложной геометрией. И даже не были изучены компоненты тензора проницаемости неньютоновской жидкости в ПКС и макроскопическое реологическое свойство жидкости.

Актуальность темы. Течение неньютоновской вязкой жидкости в ПКС играет важную роль во многих технологических процессах современного промышленного производства. Таких как, технология RTM не только производит изделие с высоким качеством и хорошими характеристиками, но также снижает стоимость оборудования и зависимость от времени, поэтому он имеет высокую эффективность производства. В то же время, возникает необходимость в дорогостоящем инъекционном оборудовании и изготовлении жесткой оснастки. Кроме того, соответствующие параметры технологии изготовления в значительной степени определяют качество армированных композиционных материалов и конструкций, полученных по рассматриваемой технологии RTM [17, 49, 50, 65, 67, 112], таких как геометрические параметры конструкции, проницаемость и пористость сухого каркаса, давление пропитки, размеров изделия, а также реология жидкого связующего. В общем, жидкие связующие представляют собой раствор полимера, состоящий из макромолекул со сложной пространственной структурой и сильно неоднородны. При течении таких жидких связующих, вязкость, как правило, оказывается неньютоновской. Чтобы оптимизировать соответствующий

производственный процесс, снизить производственные затраты и улучшить качество изделия, жидкие связующие больше нельзя просто рассматривать как ньютоновские жидкости. В этой связи чрезвычайно полезной является задача адекватного и надежного математического моделирования течения неньютоновской вязкой жидкости в пористых средах, состоящих из большого количества пор с сложной пространственной геометрической формой.

В подавляющем большинстве существующих публикаций фильтрация неньютоновских вязких жидкостей в пористых композитных средах изучается с помощью теории классической феноменологической теории фильтрации, основанной на законе Дарси и его модификации. В феноменологической теории фильтрации экспериментальные или различные эмпирические и приближенные соотношения обычно используются для описания реальных локальных процессов фильтрации, которые происходят внутри пор со сложной пространственной геометрией, свойственной композиционным конструкциям. Такая грубая оценка локального процесса приводит к большим отклонениям в определении проницаемости. В связи с этим, анализ локальных микропроцессов течения жидкости в отдельной поре и вывод закона фильтрации или глобальных осредненных уравнения фильтрации, основанный на механике сплошной среды, стали еще одной важной идеей исследования фильтрации. Такой подход моделирования течения жидкости в пористых средах, основанный на методе асимптотической гомогенизации, называется многомасштабным моделированием (МАГ). До сих пор соответствующие исследования встречаются редко, даже для неньютоновских вязких жидкостей, таких как жидкости в рамках модели Карро (Carreau). В ПКС течение неньютоновской вязкой жидкости зависит от сложной связи между микроструктурой пористой среды и реологией жидкости. В таких ситуациях многомасштабное моделирование течения неньютоновской вязкой жидкости в ПКС является довольно сложной и чрезвычайно актуальной темой исследования.

Таким образом, в диссертационной работе метод асимптотической гомогенизации (МАГ) применяется к многомасштабному моделированию

процессов фильтрации ньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в периодической пористой структуре. Исследованы локальные процессы и глобальные законы фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в трехмерных ПКС, состоящих из пор со сложной пространственной геометрией. В частности, анализ локальных процессов течения применяется для определения параметров пористой системы (пористости пористой среда), характеристики течения жидкости (скоростей фильтрации или коэффициентов проницаемости) и реологического свойства жидкости (эффективной неньютоновской вязкости), используемых в макроскопической постановке задачи фильтрации несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в пористой среде.

Отметим, что задачи течения неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро (Carreau) в трехмерных ПКС, с использованием МАГ ранее не рассматривались.

Предметом настоящего исследования является течение несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро (Carreau) в ПКС. Рассматриваются микроскопические процессы, описывающие движение несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в отдельной поре, в том числе: компоненты вектора скорости, давления и неньютоновской вязкости. Проанализируется нелинейный закон фильтрации в макрополе, который описывает процесс фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в периодической пористой системе в целом, включая пористость среды, эффективную неньютоновскую вязкость жидкости и коэффициенты тензора проницаемости процесса фильтрации.

Целью диссертационной работы является разработка методики многомасштабной математической модели процессов фильтрации несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в периодических пористых структурах на основе асимптотического анализа фундаментальных законов МСС и определяющей соотношения неньютоновской вязкости.

Задачи исследования для достижения поставленной цели потребовалось решение следующих основных задач:

1. Разработка физико-математической модели течения несжимаемых неньютоновских вязких жидкостей в пористых средах.
2. Применение МАГ для моделирования течения несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в периодической пористой композитной среде.
3. Постановка локальных задач течения несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро на ЯП пористых сред.
4. Разработка численного итерационного алгоритма для решения нелинейных локальных задач в общей трехмерной постановке, вызванных неньютоновской вязкостью.
5. Разработка нелинейного закона фильтрации несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в пористой среде.
6. Разработка алгоритмов расчета эффективной неньютоновской вязкости, пористости пористых сред и компонентов тензора проницаемости.
7. Численное исследование локальных течений несжимаемой неньютоновско-вязкой жидкости в рамках модели Карро на ЯП пористой среды.
8. Численные исследования нелинейных законов фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро и эффективной неньютоновской вязкости в ПКС.

Методы исследований. Результаты диссертационной работы получены с помощью МАГ в периодической пористой структуре. Многомасштабная математическая модель течения фильтрации основана на асимптотическом анализе фундаментальных законов и определяющих соотношений МСС. Линеаризованный итерационный алгоритм и метод конечных элементов (МКЭ) используются для численного решения локальной задачи течения неньютоновской вязкой жидкости в отдельной ЯП.

Достоверность и обоснованность научных результатов гарантируются использованием теоретически стандартизированных и надежных математических инструментов, фундаментальных законов и определяющих соотношений МСС, а

также подтверждена сравнением полученных результатов численного моделирования с известными полученными результатами.

Научная новизна диссертационной работы включает в себя следующие основные научные результаты:

1. Разработана физико-математическая модель несжимаемых неньютоновских вязких жидкостей на основе фундаментальных законов и определяющих соотношений МСС и многомасштабной модели течения несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в пористой структуре с помощью МАГ.

2. Разработаны алгоритмы численного решения локальных задач течения неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро на ЯП пористой среды, алгоритмы расчета эффективной неньютоновской вязкости, пористости среды и компонентов тензора проницаемости.

3. Разработан нелинейный закон фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в пористых средах на основе анизотропной нелинейной тензорной функции.

4. Получены результаты численного моделирования локальных течений неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро на ЯП для двух типовых ПКС, показавшие эффективность предложенного алгоритма решения локальных задач.

5. Получены результаты численных расчетов пористости пористой среды, эффективной неньютоновской вязкости и компонентов тензора проницаемости фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в пористых средах, на основе которых установлены эффекты влияния свойства неньютоновской вязкости жидкости, градиента макродавления и анизотропии пористых сред на нелинейный закон фильтрации и эффективную вязкость неньютоновской вязкой жидкости.

Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы включает следующие положения:

1. Дальнейшее развитие теоретических положений МАГ применительно к задачам механики неньютоновских вязких жидкостей в периодических пористых структурах.

2. Разработан программный комплекс (ПК) для численного моделирования многомасштабных процессов фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в ПКС, реализующий разработанные физико-математические модели локальных процессов в пределе отдельных ЯП и алгоритмы численных расчетов нелинейного закона фильтрации и эффективной вязкости в периодической пористой системе в целом.

3. Получены численные результаты расчета компонентов тензора проницаемости для двух типовых ПКС, установлены эффекты влияния реологических свойств неньютоновской вязкости жидкостей, градиента макродавления и анизотропия пористых сред на нелинейный закон фильтрации и эффективную неньютоновскую вязкость.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации проведено исследование фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в периодических пористых структурах, разработаны вычислительные алгоритмы и программы моделирования локальных процессов и нелинейного закона фильтрации (области исследования 7, 18 специальности 01.02.05).

Апробация результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная конференция и выставка по композиционным материалам «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии». Москва, 05 – 08 декабря 2018 г.

2. IV Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ'19). Москва, 19 – 21 июня 2019 г.

3. Международная конференция «Математика в приложениях» в честь 90-летия С.К. Годунова. Новосибирск, Россия, 4 – 10 августа 2019 г.

4. Международный форум «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии». Москва, 20 – 21 ноября 2019 г.

5. Международная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики (Fundamental and applied problems of mechanics FAPM-2019)». Москва, 10 – 12 декабря 2019 г.

Публикации. Основные научные результаты диссертационной работы соискателем опубликованы в 8 научных работах [32 – 34, 74, 75, 90 – 92], включая 2 статьи [33, 34], включенных в перечень российских рецензируемых научных изданий, и 5 научных статей [74, 75, 90 – 92], включенных в международных базах данных Scopus или Web of Science.

Личный вклад соискателя состоит в следующем:

1. Все результаты исследований изложенные в диссертационной работе, выполняются соискателем самостоятельно в процессе научной деятельности под руководством научного руководителя. Из совместных публикаций в диссертацию включаются лишь тот материалы, непосредственно принадлежащие соискателю. Заимствованные материалы указываются ссылками в диссертации.

2. Соискателем лично была разработана компьютерная программа для многомасштабного моделирования процессов фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в пористых средах. Лично соискателем выполнен ряд вычислительных экспериментов, для моделирования локальных процессов течения, расчета нелинейного закона фильтрации и эффективной вязкости, а также проанализированы влияния неньютоновской вязкости, градиента макродавления и внизотропии пористой структуры на скорость фильтрации и эффективную неньютоновскую вязкость.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Физико-математическая модель несжимаемых неньютоновских вязких жидкостей и многомасштабная модель процессов фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в ПКС, полученная на основе фундаментальных законов МСС и определяющих соотношений неньютоновских вязкостей с помощью МАГ.

2. Линеаризованный итерационный алгоритм конечно-элементного решения локальных задач фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в рамках

модели Карро на ЯП пористых сред, алгоритмы расчета пористости пористых сред, эффективной неньютоновской вязкости и компонентов тензора проницаемости.

3. С использованием анизотропной нелинейной тензорной функции проанализирован нелинейный закон фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в пористых средах.

4. Результаты численного моделирования локальных задач течений неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро на ЯП двух типовых пористых структур.

5. Результаты моделирования проверены нелинейным законом фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в пористых средах, также подчеркивают влияние неньютоновской вязкости, градиента макродавления и анизотропии пористых структур на нелинейный закон фильтрации и эффективную вязкость.

Структура и объем диссертационной работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы. Диссертация изложена на 123 страница, содержит 34 иллюстрации и 17 таблиц. Использованная литература изя включает 117 наименований.

ГЛАВА 1. МНОГОМАСШТАБНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМЫХ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

1.1. Математическая постановка задачи о движении несжимаемых неньютоновских вязких жидкостей в пористых средах

1.1.1. Геометрическая модель расчетной области и общие допущения

В данной диссертации рассматривается геометрическая модель пористой композиционной конструкции с периодической структурой, состоящей из твердых сред и несжимаемых жидкостей. Чтобы прояснить пространственную геометрию композиционных материалов, введены следующие обозначения. Пусть:

V – объем области, который занимает пористым композитом, м^3 .

V_s – объем области, который занимает твердыми средами в пористых композитах, м^3 .

V_l – объем области, который занимает жидкостью в пористых композитах, м^3 .

V_ξ – объем ЯП, м^3 .

V_{ξ_s} – объем области, который занимает твердыми средами в ЯП, м^3 .

V_{ξ_l} – объем области, который занимает жидкостью в ЯП, м^3 .

Σ – поверхность раздела твердых сред и жидкости в пористой среде.

Σ_ξ – часть поверхности Σ в ЯП V_ξ .

V_{ξ_p} – область ЯП, который занимает одной порой, м^3 .

Σ_{ξ_p} – локальная граница поры с твердым скелетом.

Предполагается, что все поры полностью заполнены раствором полимера (неньютоновской вязкой жидкостью).

Примем следующие допущения, касающиеся свойств твердого тела и жидкости, составляющих пористую систему:

- жидкость считается изотропной неньютоновской вязкой несжимаемой средой;
- пористый скелет считается недеформируемым, т.е. движение твердого тела не рассматривается;

- температура жидкости не меняется при течении, т.е. ее движение считается изотермическим;

- плотность массовых сил считается нулевой.

Многие неизвестные функции, включая реологическую характеристику жидкости – эффективную неньютоновскую вязкость, характеристику пористой среды – пористости и характеристику течения жидкости в пористой среде – тензор проницаемости, составляют решение макроскопической задачи. В данной работе введена геометрическая модель микроструктуры пористой среды с целью анализа микропроцессов течения, происходящих в пределах отдельных пор. В данной работе рассматриваются две типовые геометрические структурные модели, изотропная модель и анизотропная модель, соответственно.

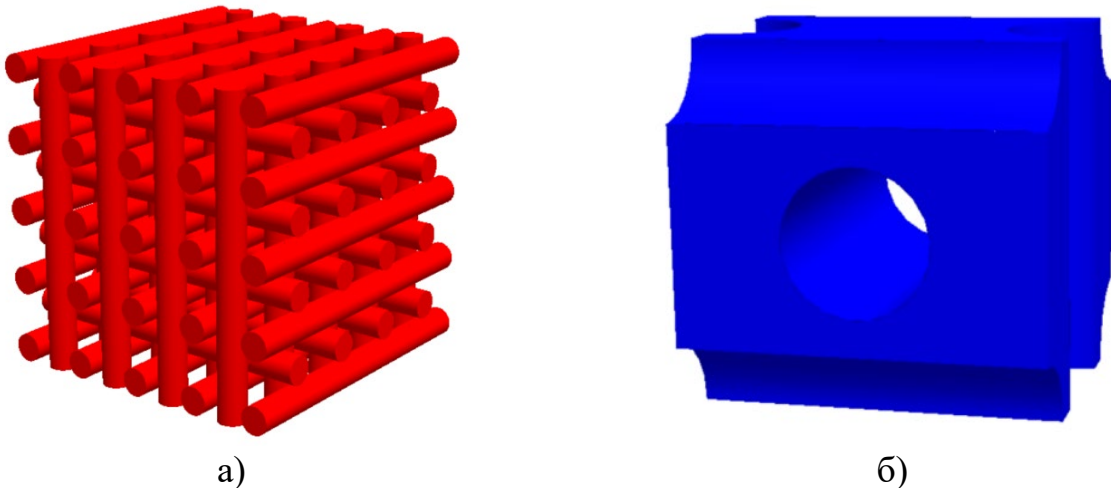


Рисунок. 1.1. – Геометрическая модель 3D ортогональной микроструктуры:

а) – периодическая структура (показана структура системы волокон, поры представляют собой пустоты между твердыми телами); б) – отдельная полная структура поры (показана система поры без твердого скелета)

На рисунке 1.1 (а) представлена геометрическая модель твердой структуры изотропных композиционных материалов, состоящая из взаимно ортогональных цилиндрических систем, ориентированных вдоль каждой из координатных осей местной системы координат. Данная модель далее называется «3D ортогональной» структурой. Пространство микроструктуры отдельной поры показано на рисунке 1.1 (б). Плоскость зрения отдельной поры в разных сторонах и локальная система координат в отдельной поре показаны на рисунке 1.2.

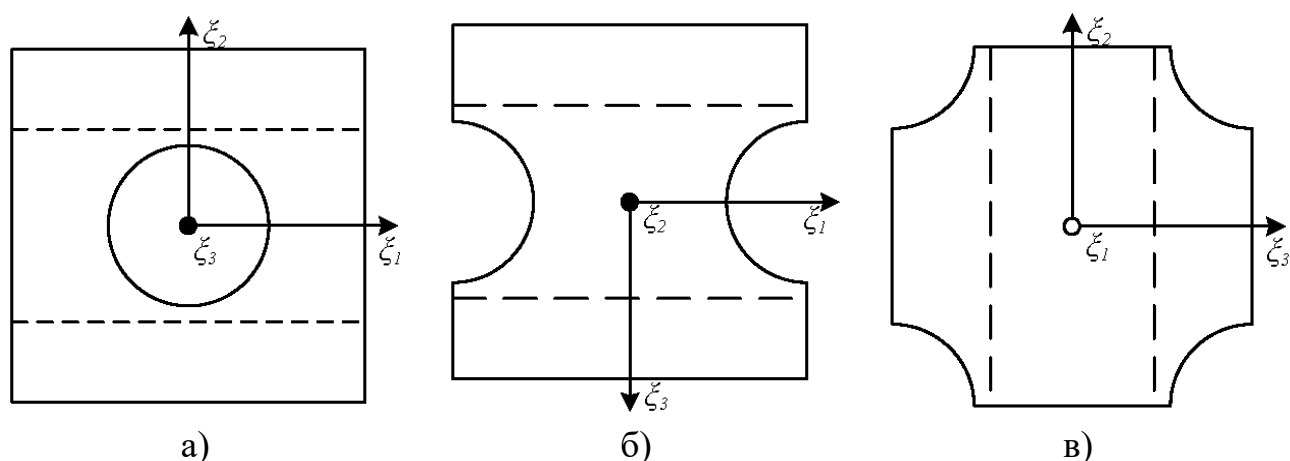
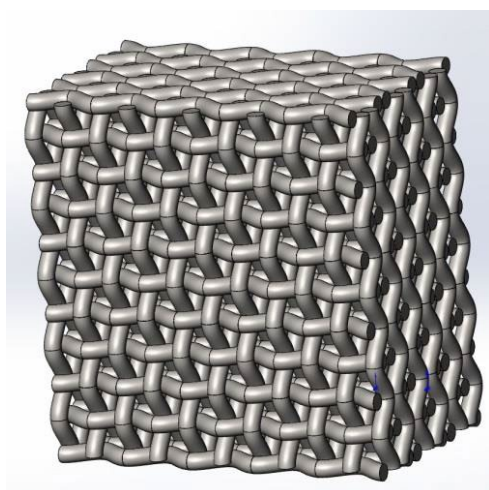


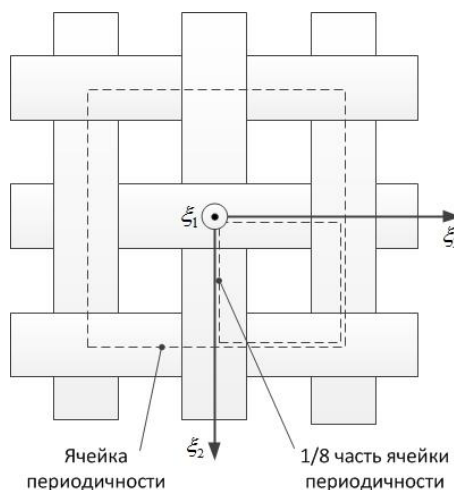
Рисунок. 1.2. – Построенный в локальной декартовой системе координат в ЯП:

а) – основной вид, б) – вид сверху, в) – вид слева

Из вышеприведенных рисунков видно, что 3D ортогональная структура является изотропной, а микроструктура имеет зеркальную симметрию относительно локальной координатной плоскости.



а)



б)

Рисунок. 1.3. – Геометрическая модель 3D тканевой микроструктуры:

а) – периодическая структура (показана структура системы волокон, поры представляют собой пустоты между твердыми телами); б) – отдельная полная структура поры (твёрдого скелета)

Затем была введена более сложная анизотропная композитная структура, которая переплетается с твердыми волокнами, на рисунке 1.3 (а). Данную модель далее будем называть «3D тканевой» структурой. Расположение твердых волокон в ЯП для тканевой структуры показано на рисунке 1.3 (б). Плоскость зрения отдельной поры в разных сторонах и локальная система координат в отдельной поре показаны на рисунке 1.4.

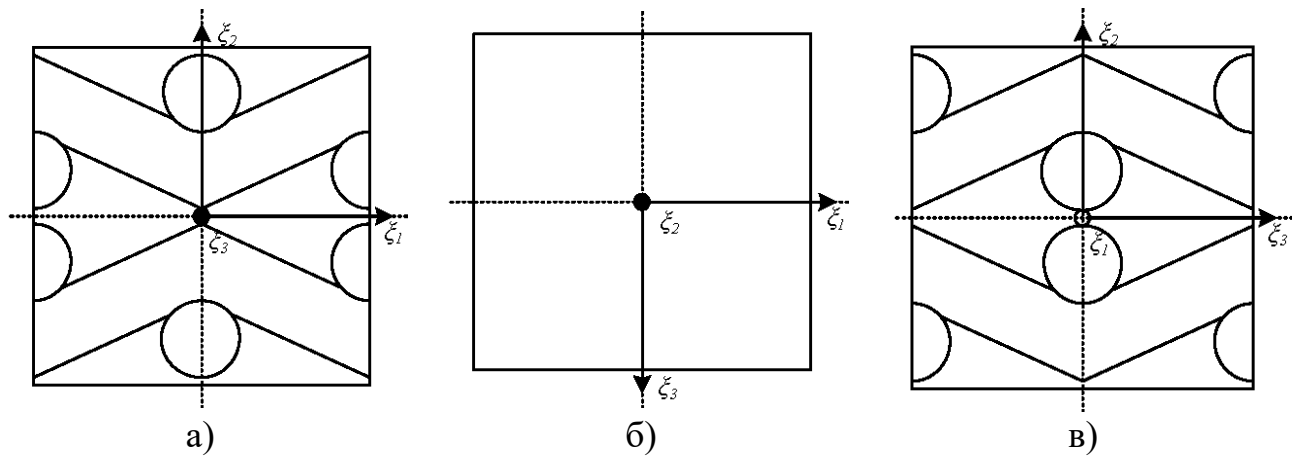


Рисунок. 1.4. – Построенный в локальной декартовой системе координат в ЯП:

а) – основной вид, б) – вид сверху, в) – вид слева

Согласно рисункам 1.3 и 1.4 видно, что 3D тканевая структура является анизотропной, а микроструктура имеет зеркальную симметрию относительно локальной координатной плоскости.

Допущения, которым удовлетворяют данные структуры, вводятся следующим образом:

- пористая структура является периодической;
- все поры связаны, т.е. тупиковые поры отсутствуют в пористой системе;
- ЯП обладают геометрической и физической симметрией относительно координатных плоскостей местной декартовой системы координат.

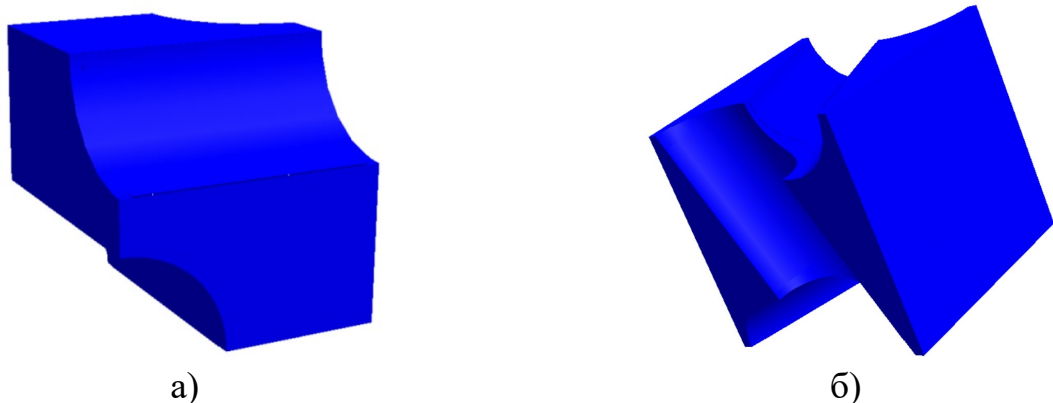


Рисунок. 1.5. – Геометрические модели области 1/8 часть ЯП, занимаемой одной порой: а) – для 3D ортогональной микроструктуры; б) – для 3D тканевой микроструктуры;

Согласно последнему дополнению, геометрическая модель 1/8 части ЯП представлена на рисунке 1.5, которое в дальнейшем будет использовано для постановки локальной задачи фильтрации на 1/8 части ЯП.

1.1.2. Система фундаментальных законов механики сплошной среды

Согласно предыдущим предположениям, полная система пространственного описания законов сохранения МСС неньютоновской жидкости в области V_i в дивергентном виде в эйлеровых координатах имеет вид [19, 21]:

$$\frac{\partial \rho A_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes A_i - B_i) = \rho C_i, \quad i = \overline{1,6}, \quad (1.1)$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \\ e + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \\ \eta \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{F}^T \end{pmatrix}; \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \\ -\frac{\mathbf{q}}{\theta} \\ 0 \\ \rho \mathbf{F} \otimes \mathbf{v} \end{pmatrix}; \quad C_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + q_m \\ \frac{q_m + q^*}{\theta} \\ \mathbf{v} \\ 0 \end{pmatrix}$$

и ρ – плотность; \mathbf{v} – вектор скорости; \mathbf{T} – тензор напряжений Коши; \mathbf{f} – плотность массовых сил; e – плотность внутренней энергии; \mathbf{q} – вектор притока тепла; q^* – плотность внутреннего производства энтропии; η – плотность энтропии; \mathbf{u} – вектор перемещений; \mathbf{F} – градиент деформации; θ – абсолютная температура; q_m – приток тепла за счет массовых источников.

В системе пространственного описания законов сохранения (1.1): при $i=1$ – уравнение неразрывности, полученное по закону сохранения массы; $i=2$ – уравнение движения, полученное по закону изменения количества движения; $i=3$ – закон сохранения энергии, полученное по первому закону термодинамики; $i=4$ – уравнение баланса энтропии, полученное по второму закону термодинамики; $i=5$ – кинематическое уравнение; $i=6$ – динамическое уравнение совместности деформаций.

Согласно допущениям о пористой среде и неньютоновской жидкости в п. 1.1.1, с учетом системы (1.1), физико-математическая модель движения неньютоновской жидкости в пористой структуре далее описывается следующей системой:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} \right) &= \nabla \cdot \mathbf{T}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где \mathbf{T} – тензор напряжений Коши для неньютоновских вязких несжимаемых сред.

1.1.3. Определяющие соотношения неньютоновских вязких жидкостей

1.1.3.1. Ньютоновская вязкость сплошной среды

Для решения системы уравнений (1.2) необходимы дополнительные соотношения – определяющие соотношения ньютоновских жидкостей. Введем определяющие соотношения изотермических изотропных ньютоновских вязких жидкостей, как показано в следующем уравнении:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + {}^4\mathbf{M} \cdot \mathbf{D}, \quad (1.3)$$

где \mathbf{E} – единичный (метрический) тензор, ${}^4\mathbf{M}$ – квазилинейный тензор вязкости жидкости, \mathbf{D} – тензор скорости деформации:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T). \quad (1.4)$$

Согласно определению квазилинейной тензорной функции, мы знаем, что ${}^4\mathbf{M} \cdot \mathbf{D}$ представляет собой квазилинейную тензорную функцию.

Используя свойства квазилинейной тензорной функции, введем две скалярные тензорные функции μ_1 и μ_2 , получаем следующее соотношение [20, 22, 35]:

$${}^4\mathbf{M} = \mu_1 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + 2\mu_2 \mathbf{\Delta}, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{\Delta} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^k + \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^i)$ – симметричный единичный тензор четвертого ранга.

Учитывая линейную зависимость ньютоновской вязкости, поэтому здесь μ_1 и μ_2 являются константами, называемыми параметрами вязкости.

Компоненты квазилинейного тензора вязкости записывается в следующей форме:

$$M_{ijkl} = \mu_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (1.6)$$

где δ_{ij} – компоненты символа Кронекера δ .

Подставляя выражения (1.4), (1.5) и (1.6) в выражение (1.3), выражение (1.3) переписывается как [19, 46]:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + \mu_1(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} + 2\mu_2\mathbf{D}. \quad (1.7)$$

Соотношение (1.7) называется определяющим соотношением сжимаемой ньютоновской вязкости изотропной изотермической жидкости.

1.1.3.2. Неньютоновская вязкость несжимаемой среды

Для решения системы уравнений (1.2) необходимы дополнительные соотношения – определяющие соотношения неньютоновских вязких жидкостей. Для этой цели могут быть рассмотрены различные реологические модели, в данной работе, используются модели A_I и A_V (а также B_I и B_V) фойгтовских изотропных вязких сред, предложенные в [19]. Модели A_I и A_V (а также B_I и B_V) изотермических несжимаемых фойгтовских жидких сред можно представить в единой форме [21]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_v, \\ \mathbf{T}_e &= -p\mathbf{E}, \quad \mathbf{T}_v = \mu_1 I_1(\mathbf{D})\mathbf{E} + 2\mu_2\mathbf{D}; \\ \mu_\gamma &= \mu_\gamma(I_\alpha(\mathbf{D})), \quad \gamma = 1, 2, \quad \alpha = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.8)$$

называемые соответственно функцией равновесных напряжений \mathbf{T}_e и функцией вязких напряжений \mathbf{T}_v . Здесь $I_\alpha(\mathbf{D})$ – три главных инвариантов тензора скорости деформации, μ_γ – функции вязкости жидкости, которые зависят от главных инвариантов тензора скорости деформации \mathbf{D} .

Вводятся главные инварианты тензора скорости деформации [20]:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{D}) &= \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}, \\ I_2(\mathbf{D}) &= \frac{1}{2}(I_1^2(\mathbf{D}) - I_1(\mathbf{D}^2)), \\ I_3(\mathbf{D}) &= \det(\mathbf{D}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

На самом деле, для несжимаемой жидкости:

$$I_1(\mathbf{D}) = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.10)$$

Для сдвигового течения $I_3(\mathbf{D})$ оказывается равным нулю; поскольку, как указано в [59], уравнение (1.8) следует использовать только для течения или, по крайней мере, для течения, которое почти срезается, исключение $I_3(\mathbf{D})$ из дальнейшего рассмотрения не является серьезным ограничением. Следовательно,

после упрощения выражений (1.9) и (1.10), μ считается зависимым только от $I_2(\mathbf{D})$.

Подставляя выражения (1.9) и (1.10) в (1.8), тензор вязких напряжений изотропной несжимаемой неньютоновско-вязкой среды фойгтовского типа выражен как квазилинейная функция от тензора скорости деформации в следующей форме:

$$\mathbf{T}_v = \boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} = \mu(\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T), \quad (1.11)$$

где μ – коэффициент неньютоновской вязкости несжимаемой среды, зависящей от $I_2(\mathbf{D})$ – второго инварианта тензора скорости деформации:

$$I_2(\mathbf{D}) = -\frac{1}{2}I_1(\mathbf{D}^2) = -\frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}.$$

Стоит отметить, что значение $I_2(\mathbf{D})$ отрицательно, поэтому в большинстве случаев для представления второго инварианта используется следующий вид:

$$II = \sqrt{2\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}. \quad (1.12)$$

Следовательно, согласно выражениям (1.11) и (1.12), неупругая неньютоновская вязкость μ зависит от инварианта II тензора скорости деформации:

$$\mu = \mu(II(\mathbf{D})). \quad (1.13)$$

1.1.3.3. Модель неньютоновской вязкости

Далее мы представляем определяющие соотношения жидкостей, описывающие псевдопластическое и дилатантное действие, где вязкие напряжения и инварианты тензора скорости деформации связаны нелинейными соотношениями [13, 19, 59, 60, 81].

В таблице 1.1 представлены типичные модели определяющих соотношений, зависящих от инварианта тензора скорости деформации.

Таблица 1.1. – Модели неньютоновских вязкостей

Модель	Определяющие соотношения
Степенная (<i>Power-law</i>) модель [13]	$\mu = \mu_0(II(\mathbf{D}))^{n-1}$

<i>Cross</i> модель [60]	$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \frac{1}{1 + (\lambda \cdot II(\mathbf{D}))^n}$
Карро (<i>Carreau</i>) модель [59]	$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left(1 + (\lambda \cdot II(\mathbf{D}))^2\right)^{\frac{n-1}{2}}$
<i>Powell-Eyring</i> модель [81]	$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \frac{\sinh^{-1}(\lambda \cdot II(\mathbf{D}))}{\lambda \cdot II(\mathbf{D})}$

В данной работе рассмотрим модель Карро. Жидкость Карро является типовой обобщенной ньютоновской жидкостью, в модели которой зависимость коэффициента вязкости μ зависит от инварианта тензора скорости деформации $II(\mathbf{D})$, и определяется следующим соотношением:

$$\frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} = \left(1 + \lambda^2 II(\mathbf{D})^2\right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad (1.14)$$

где μ_0 , μ_{∞} , λ и n – материальные коэффициенты. Здесь μ_0 называется вязкостью с нулевой скоростью сдвига, μ_{∞} называется вязкостью бесконечной скоростью сдвига, n называется степенным индексом, λ называется постоянной времени, введенной Карро (*Carreau*).

Таким образом, степень отклонения от ньютоновского поведения представлена отклонением между n и единицей. При $n < 1$ вязкость среды уменьшается с увеличением напряжения сдвига, поэтому определяющие соотношения представляют собой псевдопластические жидкости с поведением разжижения при сдвиге. При $n > 1$ вязкость среды увеличивается с увеличением скорости сдвига, поэтому определяющие соотношения представляют собой дилатантные жидкости с утолщаемым поведением при сдвиге. Очевидно, что при $\mu_0 = \mu_{\infty}$ или $\lambda = 0$ или $n = 1$ модель Карро описывает ньютоновскую жидкость.

1.1.4. Граничные и начальные условия

Следует отметить, что в систему (1.2) добавляются следующие начальные и граничные условия. На поверхностях раздела «твердого тела – жидкости» Σ установлены граничные условия прилипания:

$$\mathbf{v}|_{\Sigma} = 0. \quad (1.15)$$

На поверхности пористых композиционных материалов, где присутствует нагрузка, считаются заданными векторы напряжений:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{\Sigma} = -p\mathbf{n}, \quad (1.16)$$

где p – внешние заданные давления, Па.

Наконец, рассмотрится постановка начальных условий. В начальный момент времени $t = t_0$ считается заданным давление:

$$p|_{t=t_0} = p_0. \quad (1.17)$$

1.2. Система уравнений движения неньютоновских вязких жидкостей в безразмерной форме

Определяющее соотношение (1.14) подставляется в систему уравнений (1.11), согласно выражению (1.8) тензор напряжений Коши [21] получается:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + 2\mu(\Pi(\mathbf{D}))\mathbf{D}. \quad (1.18)$$

Выражение (1.18) тензора напряжений Коши подставляется в уравнения (1.2), в сочетании с моделью Карро (1.14) неньютоновской вязкости и выражениями (1.4) и (1.12), и получается система уравнений модели для описания движения несжимаемой неньютоновско-вязкой жидкости в рамках модели Карро в пористых средах:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu\mathbf{D}), \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T), \\ \frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_0 - \mu_{\infty}} &= \left(1 + \lambda^2 \Pi(\mathbf{D})^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad \Pi(\mathbf{D}) = \sqrt{2\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Запишем систему (1.19) в безразмерном виде. Будем использовать безразмерную форму, где:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \quad \hat{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \hat{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{x_0}, \quad (1.20a)$$

где v_0 является модулем вектора характерной скорости, м/с; p_0 является характерным давлением, Па; x_0 является характерным размером всей области среды, м; t_0 является характерным временем, с.

Согласно форме (1.20a), безразмерное время определяется следующим видом:

$$t_0 = \frac{x_0}{v_0}. \quad (1.20б)$$

Рассмотрим определяющее соотношение неньютоновской вязкости в рамках модели Карро, где характерная вязкость μ_0 – вязкость с нулевой скоростью сдвига:

$$\hat{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (1.20в)$$

Стоит отметить, что безразмерная функция $\hat{\mu}$ вязкости описывает соотношение неньютоновской вязкости μ к вязкости с нулевой скоростью сдвига μ_0 . Следовательно, безразмерная неньютоновская вязкость $\hat{\mu}$ жидкости для псевдопластических жидкостей составляет меньше единицы, для дилатантных жидкостей больше единицы, а для ньютоновской жидкости равна единице.

Подставляя (1.20а) – (1.20в) в систему (1.19), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{x_0} \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} &= 0, \\ \frac{\rho v_0^2}{x_0} \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial t} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \otimes \hat{\mathbf{v}} \right] &= -\frac{p_0}{x_0} \nabla \hat{p} + \frac{\mu_0 v_0}{x_0^2} \nabla \cdot (2\hat{\mu} \hat{\mathbf{D}}), \\ \hat{\mathbf{D}} &= \frac{1}{2} (\nabla \otimes \hat{\mathbf{v}} + \nabla \otimes \hat{\mathbf{v}}^T), \\ \hat{\mu} &= \frac{\mu_\infty}{\mu_0} + \left(1 - \frac{\mu_\infty}{\mu_0} \right) \left(1 + \frac{\lambda^2 v_0^2}{x_0^2} II(\hat{\mathbf{D}})^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad II(\hat{\mathbf{D}}) = \sqrt{2\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{D}}}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Безразмерная форма системы уравнений течения несжимаемых неньютоновских вязких жидкостей Карро записывается следующим образом (символ $\hat{\quad}$ далее опускаем):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{1}{Eu} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \frac{1}{Eu Re} \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}), \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T), \\ \mu &= s + (1-s) \left(1 + Cu^2 II(\mathbf{D})^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad II(\mathbf{D}) = \sqrt{2\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

где введены обозначения безразмерных параметров:

$$Eu = \frac{p_0}{\rho v_0^2} \text{ – число Эйлера,}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho v_0 x_0}{\mu_0} \text{ – число Рейнольдса,}$$

$$\text{Cu} = \frac{\lambda v_0}{x_0} \text{ – число Карро (Carreau),}$$

$$s = \frac{\mu_\infty}{\mu_0} \text{ – коэффициент изменения вязкости.}$$

1.3. Применение метода асимптотической гомогенизации для моделирования течения несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в периодической пористой структуре

1.3.1. Общие положения метода асимптотической гомогенизации

Обоснование и основные этапы МАГ заключаются в следующем [12, 18, 41, 42, 52, 53, 56, 58, 68 – 73]. В соответствии с обоснованием МАГ, решение исходной физико-математической модели выражается в виде рядов по степеням безразмерного малого параметра:

$$\kappa = \frac{l_0}{x_0} \ll 1, \quad (1.23)$$

где l_0 – характерный размер ЯП V_ξ , x_0 – характерный размер области V .

Введены безразмерные локальные (быстрые) координаты, то есть на рисунке 1.2 и рисунке 1.4 радиус-вектор ξ безразмерных координат, который изменяется в пределах ЯП V_ξ , следующим образом:

$$\xi = \frac{\hat{\mathbf{x}}}{\kappa}, \quad (1.24)$$

где $\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{x_0}$ – безразмерные глобальные (медленные) координаты, которые изменяются по всей области V .

Поскольку принято предположение, что внутренняя структура пористой среды имеет периодичность, то считается, что все функции (обозначим их f), описывающие течение неньютоновской вязкой жидкости в порах, являются квазипериодическими, и зависящие от глобальных координат $\hat{\mathbf{x}}$, локальных координат ξ и времени t :

$$f = f(\hat{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t). \quad (1.25)$$

Согласно условию квазипериодичности, функции f должны медленно изменяться по аргументу $\hat{\mathbf{x}}$ на расстояниях x_0 и быть периодическими относительно аргумента $\boldsymbol{\xi}$, т.е.

$$\begin{aligned} f\left(\xi_1 - \frac{1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) &= f\left(\xi_1 + \frac{1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \\ f\left(\xi_1, \xi_2 - \frac{1}{2}, \xi_3\right) &= f\left(\xi_1, \xi_2 + \frac{1}{2}, \xi_3\right). \\ f\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3 - \frac{1}{2}\right) &= f\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3 + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Следующий символ используется для обозначения вышеуказанных периодических граничных условий (1.26):

$$[[f]] = 0. \quad (1.27)$$

Тогда с помощью правила дифференцирования сложной функции, дифференцирование таких функций производится следующим образом [18, 42, 56]:

$$\nabla f \rightarrow \frac{1}{\kappa} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} f + \nabla_{\mathbf{x}} f, \quad (1.28)$$

где $\nabla_{\mathbf{x}}$ – операторы Гамильтона по координатам $\hat{\mathbf{x}}$ и $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}$ – операторы Гамильтона по координатам $\boldsymbol{\xi}$, соответственно.

В рамках МАГ операция осреднения функций по области V_{φ} определяется:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\varphi |V_{\varphi}|} \int_{V_{\varphi}} f dV, \quad (1.29)$$

где φ – пористость пористой среды.

Тогда, осредняя функции \mathbf{v} , p , μ , получают следующие отношения:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \bar{\mathbf{v}}, \quad \langle p \rangle = \bar{p}, \quad \langle \mu \rangle = \bar{\mu}, \quad (1.30)$$

где $\bar{\mathbf{v}}$, \bar{p} , $\bar{\mu}$ – средние значения функций. Соотношение (1.30) понимается как дополнительное условие, накладываемое на локальные параметры течения в области V_{φ} , или как обозначения для вычисленных осредненных функций по области V_{φ} .

1.3.2. Математическая постановка локальных процессов на ячейке периодичности в случае модели несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости

1.3.2.1. Асимптотические разложения

Чтобы описать взаимосвязь между малым безразмерным параметром κ , вводимым в выражении (1.23), и различными состояниями течения неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро, устанавливается следующее соотношение:

$$Eu\kappa^e = Eu^0 = O(1), \quad Re\kappa^r = Re^0 = O(1), \quad Cu = Cu^0\kappa^c = O(1), \quad Cu^0 = O(1), \quad (1.31)$$

где $e, r, c \in \mathbb{Z}$ – целые числа, связанные с различными состояниями течения жидкости Карро.

С учетом дифференцирования квазипериодической функции (1.28) и выражения (1.31), система уравнений (1.22) выражается как :

$$\kappa^{-1}\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v} + \nabla_x \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.32a)$$

$$\frac{1}{Eu^0}\kappa^e \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \kappa^{-1}(\mathbf{v} \cdot \nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla_x \otimes \mathbf{v} \right] = -\kappa^{-1}\nabla_{\xi} p - \nabla_x p + \frac{1}{Eu^0 Re^0} \kappa^{e+r} (\kappa^{-2}\nabla_{\xi} \cdot \sigma_{\xi} + \kappa^{-1}\nabla_{\xi} \cdot \sigma_x + \nabla_x \cdot \sigma_x), \quad (1.32б)$$

$$\sigma_{\xi} = 2\mu \mathbf{D}_{\xi}, \quad \sigma_x = 2\mu \mathbf{D}_x, \quad (1.32в)$$

$$\mathbf{D}_{\xi} = \frac{1}{2}(\nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v} + \nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^T), \quad \mathbf{D}_x = \frac{1}{2}(\nabla_x \otimes \mathbf{v} + \nabla_x \otimes \mathbf{v}^T), \quad (1.32г)$$

$$\mu = s + (1-s) \left(1 + Cu_0^2 \kappa^{2c} II(\mathbf{D})^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad (1.32д)$$

$$II^2 = \kappa^{-2} 2\mathbf{D}_{\xi} \cdot \cdot \mathbf{D}_{\xi} + \kappa^{-1} 4\mathbf{D}_{\xi} \cdot \cdot \mathbf{D}_x + 2\mathbf{D}_x \cdot \cdot \mathbf{D}_x. \quad (1.32е)$$

В соответствии с МАГ, неизвестные функции (вектор скорости \mathbf{v} , давление p , вязкость μ) системы, содержащаяся в уравнениях (1.32a) – (1.32е), выражается как асимптотические разложения по степеням малого безразмерного параметра κ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) + \kappa \mathbf{v}^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) + \kappa^2 \mathbf{v}^{(2)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) + \dots, \\ p &= p^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) + \kappa p^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) + \kappa^2 p^{(2)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) + \dots, \\ \mu &= \mu^{(0)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) + \kappa \mu^{(1)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) + \kappa^2 \mu^{(2)}(\tilde{\mathbf{x}}, \xi) + \dots. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Далее рассматривать их будем совместно.

1.3.2.2. Локальные несжимаемого уравнения неразрывности

В данной работе первые три члена асимптотических разложений (1.33) ограничены. Используя правило дифференцирования (1.28) квазипериодической функции по локальным ξ и глобальным x координатам асимптотическое разложение несжимаемого уравнения неразрывности (1.32а) получается.

Получается локальное уравнение неразрывности с помощью формулы (1.28):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \kappa^{-1} \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(0)} + \kappa^0 (\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(1)} + \nabla_x \cdot \mathbf{v}^{(0)}) + \kappa^1 (\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(2)} + \nabla_x \cdot \mathbf{v}^{(1)}) + O(\kappa^2). \quad (1.34)$$

Собираются слагаемые при одинаковых степенях малого безразмерного параметра κ , и получаются следующие уравнения:

- несжимаемое уравнение неразрывности нулевого уровня:

$$\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0; \quad (1.35a)$$

- несжимаемое уравнение неразрывности первого уровня:

$$\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(1)} + \nabla_x \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0; \quad (1.35b)$$

- несжимаемое уравнение неразрывности второго уровня:

$$\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(2)} + \nabla_x \cdot \mathbf{v}^{(1)} = 0. \quad (1.35b)$$

1.3.2.3. Локальные определяющие соотношения неньютоновских вязкостей

Отметим выражение (1.32д) неньютоновской вязкости, поэтому, чтобы получить асимптотическое разложение неньютоновской вязкости $\mu = \mu(\Pi(\mathbf{D}))$ модели Карро, необходимо ввести асимптотическое разложение тензора скорости деформации $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T)$ и инварианта $\Pi(\mathbf{D})$.

По правилу дифференцирования сложной функции по локальным ξ и глобальным x координатам (1.25), с помощью выражения (1.22в) получаем:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{D}_{\xi} + \mathbf{D}_x. \quad (1.36)$$

Подставляя полученные асимптотические разложения (1.33) в выражения (1.32г) и (1.36), получим асимптотическое разложение тензора скорости деформации \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \kappa^{-1} \mathbf{D}_{\xi}^{(0)} + \kappa^0 (\mathbf{D}_{\xi}^{(1)} + \mathbf{D}_x^{(0)}) + \kappa^1 (\mathbf{D}_{\xi}^{(2)} + \mathbf{D}_x^{(1)}) + O(\kappa^3), \quad (1.37)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\xi &= \mathbf{D}_\xi^{(0)} + \kappa \mathbf{D}_\xi^{(1)} + \kappa^2 \mathbf{D}_\xi^{(2)} + O(\kappa^3), \\ \mathbf{D}_x &= \mathbf{D}_x^{(0)} + \kappa \mathbf{D}_x^{(1)} + \kappa^2 \mathbf{D}_x^{(2)} + O(\kappa^3),\end{aligned}$$

и

$$\mathbf{D}_x^{(k)} = \frac{1}{2} \left(\nabla_x \otimes \mathbf{v}^{(k)} + \nabla_x \otimes \mathbf{v}^{(k)T} \right), \quad \mathbf{D}_\xi^{(k)} = \frac{1}{2} \left(\nabla_\xi \otimes \mathbf{v}^{(k)} + \nabla_\xi \otimes \mathbf{v}^{(k)T} \right)$$

представляют собой асимптотическое разложение k -го уровня тензора скорости деформации \mathbf{D} в глобальной \mathbf{x} и локальной ξ системах координат, соответственно.

Подставляя формулу (1.38) в (1.33е), получим асимптотическое разложение квадрата $Y(\mathbf{D})$ инварианта тензора скорости деформации:

$$Y(\mathbf{D}) = \kappa^{-2} Y^{(0)} + \kappa^{-1} Y^{(1)} + \kappa^0 Y^{(2)} + O(\kappa^1), \quad (1.38)$$

где введены обозначения функций $Y(\mathbf{D})$:

$$\begin{aligned}Y^{(0)} &= 2\mathbf{D}_\xi^{(0)} \cdot \cdot \mathbf{D}_\xi^{(0)}, \\ Y^{(1)} &= 4\mathbf{D}_\xi^{(0)} \cdot \cdot \mathbf{D}_x^{(0)} + 2\mathbf{D}_\xi^{(1)} \cdot \cdot \mathbf{D}_\xi^{(1)}, \\ Y^{(2)} &= 2\mathbf{D}_x^{(0)} \cdot \cdot \mathbf{D}_x^{(0)} + 4\mathbf{D}_\xi^{(1)} \cdot \cdot \mathbf{D}_x^{(1)} + 2\mathbf{D}_\xi^{(2)} \cdot \cdot \mathbf{D}_\xi^{(2)}.\end{aligned}$$

В соответствии с определяющим соотношением неньютоновской вязкости (1.32д), мы введем асимптотическое разложение (1.38) в формулу (1.32д) и получим локальные определяющие соотношения неньютоновской вязкости:

$$\begin{aligned}\mu^{(0)} &= s + (1-s) \left(1 + Cu_0^2 \kappa^{2c-2} Y^{(0)} \right)^{\frac{n-1}{2}}, \\ \mu^{(1)} &= s + (1-s) \left(1 + Cu_0^2 \kappa^{2c-1} Y^{(1)} \right)^{\frac{n-1}{2}}, \\ \mu^{(2)} &= s + (1-s) \left(1 + Cu_0^2 \kappa^{2c} Y^{(2)} \right)^{\frac{n-1}{2}}.\end{aligned} \quad (1.39)$$

Объединяя выражение асимптотического разложения (1.38) квадрата инварианта тензора скорости деформации и неньютоновской вязкости (1.39) Карро, в данном исследовании мы рассматриваем случай $c = 0$, поэтому $Cu = O(1)$, асимптотическое разложение определяющих соотношений неньютоновской вязкости имеет вид:

$$\mu = \mu^{(0)} + \kappa\mu^{(1)} + \kappa^2\mu^{(2)} + \dots, \quad (1.40)$$

где введены обозначения:

$$\mu^{(0)} = s + (1-s)\left(1 + Cu_0^2 Y^{(0)}\right)^{\frac{n-1}{2}},$$

$$\mu^{(1)} = s + (1-s)\left(1 + Cu_0^2 Y^{(1)}\right)^{\frac{n-1}{2}},$$

$$\mu^{(2)} = s + (1-s)\left(1 + Cu_0^2 Y^{(2)}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

1.3.2.4. Локальные уравнения движения

Объединяя локальные определяющие соотношения неньютоновской вязкости (1.40), поставим асимптотическое разложение (1.37) в выражения (1.32б), (1.32в) и (1.32д), получим локальные уравнения движения неньютоновско-вязкой жидкости:

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa^e}{Eu^0} \left[\kappa^{-1} (\mathbf{v}^{(0)} \cdot \nabla_\xi \otimes \mathbf{v}^{(0)}) + \kappa^0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{v}^{(0)} \cdot \nabla_x \otimes \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla_\xi \otimes \mathbf{v}^{(1)} \right) + O(\kappa^1) \right] \\ &= -\kappa^{-1} \nabla_\xi p^{(0)} - \kappa^0 (\nabla_x p^{(0)} + \nabla_\xi p^{(1)}) - \kappa^1 (\nabla_x p^{(1)} + \nabla_\xi p^{(2)}) + O(\kappa^2) \\ &+ \frac{\kappa^{e+r}}{Eu^0 \text{Re}^0} \left[\kappa^{-2} \nabla_\xi \cdot \sigma_\xi^{(0)} + \kappa^{-1} (\nabla_\xi \cdot \sigma_x^{(0)} + \nabla_\xi \cdot \sigma_\xi^{(1)}) \right] \\ &+ \frac{\kappa^{e+r}}{Eu^0 \text{Re}^0} \left[\kappa^0 (\nabla_x \cdot \sigma_x^{(0)} + \nabla_\xi \cdot \sigma_x^{(1)} + \nabla_\xi \cdot \sigma_\xi^{(2)}) + O(\kappa^1) \right], \end{aligned} \quad (1.41)$$

где тензоры неньютоновских вязких напряжений введены таким образом:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi^{(0)} &= 2\mu^{(0)} \mathbf{D}_\xi^{(0)}, \quad \sigma_\xi^{(1)} = 2\mu^{(1)} \mathbf{D}_\xi^{(0)} + 2\mu^{(0)} \mathbf{D}_\xi^{(1)}, \quad \sigma_\xi^{(2)} = 2\mu^{(2)} \mathbf{D}_\xi^{(0)} + 4\mu^{(1)} \mathbf{D}_\xi^{(1)} + 2\mu^{(0)} \mathbf{D}_\xi^{(2)}, \\ \sigma_x^{(0)} &= 2\mu^{(0)} \mathbf{D}_x^{(0)}, \quad \sigma_x^{(1)} = 2\mu^{(1)} \mathbf{D}_x^{(0)} + 2\mu^{(0)} \mathbf{D}_x^{(1)}. \end{aligned}$$

Следующие варианты являются возможными значениями положительных целочисленных параметров e и r :

$$e=0, r=1; \quad e=0, r=2; \quad e=0, r=3;$$

$$e=1, r=0; \quad e=1, r=1; \quad e=1, r=2;$$

$$e=2, r=0; \quad e=2, r=1.$$

Далее рассмотрим случай $e=2$ и $r=0$, т.е.

$$Eu \gg O(1), \quad \text{Re} = O(1), \quad Cu = O(1). \quad (1.42)$$

Допущением рассматриваемой задачи является наличие 2-го порядка малости в модули функции неньютоновской вязкости μ и физически обосновывается

малой вязкостью движущихся жидкостей. В данной работе малая вязкость в основном проявляется в вязкости μ_0 с нулевой скоростью сдвига. Указанный режим определяет, что движение неньютоновской жидкости в ПКС является медленным движением, и инерционные эффекты не рассматриваются (безынерционное движение).

Подставляя (1.42) в уравнение движения (1.41) и собирая слагаемые при одинаковых степенях параметра κ , получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Eu^0} \left[\kappa^1 (\mathbf{v}^{(0)} \cdot \nabla_\xi \otimes \mathbf{v}^{(0)}) + \kappa^2 \left(\frac{\partial \mathbf{v}^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{v}^{(0)} \cdot \nabla_x \otimes \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla_\xi \otimes \mathbf{v}^{(1)} \right) \right] + O(\kappa^3) \\ &= -\kappa^{-1} \nabla_\xi p^{(0)} - \kappa^0 (\nabla_x p^{(0)} + \nabla_\xi p^{(1)}) - \kappa^1 (\nabla_x p^{(1)} + \nabla_\xi p^{(2)}) + O(\kappa^2) \\ &+ \frac{1}{Eu^0 \text{Re}^0} \left[\kappa^0 \nabla_\xi \cdot \sigma_\xi^{(0)} + \kappa^1 (\nabla_\xi \cdot \sigma_x^{(0)} + \nabla_\xi \cdot \sigma_\xi^{(1)}) \right] \\ &+ \frac{1}{Eu^0 \text{Re}^0} \left[\kappa^2 (\nabla_x \cdot \sigma_x^{(0)} + \nabla_\xi \cdot \sigma_x^{(1)} + \nabla_\xi \cdot \sigma_\xi^{(2)}) \right] + O(\kappa^3); \end{aligned} \quad (1.43)$$

– уравнение движения нулевого уровня:

$$\nabla_\xi p^{(0)} = 0; \quad (1.44a)$$

– уравнение движения первого уровня:

$$-\nabla_x p^{(0)} - \nabla_\xi p^{(1)} + \frac{1}{Eu^0 \text{Re}^0} \nabla_\xi \cdot \sigma_\xi^{(0)} = 0; \quad (1.44б)$$

– уравнение движения второго уровня:

$$\frac{1}{Eu^0} \mathbf{v}^{(0)} \cdot \nabla_\xi \otimes \mathbf{v}^{(0)} = -\nabla_x p^{(1)} - \nabla_\xi p^{(2)} + \frac{1}{Eu^0 \text{Re}^0} (\nabla_\xi \cdot \sigma_x^{(0)} + \nabla_\xi \cdot \sigma_\xi^{(1)}). \quad (1.44в)$$

1.3.2.5. Локальные граничные условия

Подставляя асимптотические разложения (1.33) в граничное условие (1.15), и собирая слагаемые при одинаковых степенях параметра κ , получаются граничные условия разных уровней для неньютоновской вязкой жидкости:

– граничные условия нулевого уровня

$$\mathbf{v}^{(0)} \Big|_{\Sigma_{\xi p}} = 0; \quad (1.45a)$$

– граничные условия первого уровня

$$\mathbf{v}^{(1)} \Big|_{\Sigma_{\xi p}} = 0; \quad (1.45б)$$

– граничные условия второго уровня

$$\mathbf{v}^{(2)}|_{\Sigma_{\tilde{\varphi}}} = 0. \quad (1.45\text{в})$$

1.3.2.6. Осредненные физические параметры

Используем введенный оператор осреднения (1.29), которой действует на асимптотические разложения соответствующих функций $f = \{\mathbf{v}, p, \mu\}$. Учитывая (1.30), получаются дополнительные соотношения:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \\ \langle \mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) + \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = 0 \\ \langle p^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = \bar{p}(\mathbf{x}, t) \\ \langle p^{(1)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = 0 \\ \langle \mu^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = \bar{\mu}(\mathbf{x}, t) \end{cases}. \quad (1.46)$$

Следует отметить осредненную функцию неньютоновской вязкости:

$$\langle \mu^{(0)}(\mathbf{x}, \xi, t) \rangle = \bar{\mu}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varphi|V_{\tilde{\varphi}}|} \int_{V_{\tilde{\varphi}}} \mu dV. \quad (1.47)$$

1.3.2.7. Общая постановка локальных задач на ячейке периодичности

Объединяя соотношения (1.27), (1.29), (1.35а), (1.44а), (1.45а) и (1.46), получается локальная задача нулевого уровня для фильтрации несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро на ЯП V_{ξ} :

$$\begin{cases} \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0 \\ \nabla_{\xi} p^{(0)} = 0 \\ \langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = \bar{\mathbf{v}}, \langle p^{(0)} \rangle = \bar{p} \\ \llbracket \mathbf{v}^{(0)} \rrbracket = 0, \llbracket p^{(0)} \rrbracket = 0 \\ \mathbf{v}^{(0)} = 0, \xi \in \Sigma_{\xi} \end{cases}. \quad (1.48)$$

С учетом соотношений (1.27), (1.29), (1.35б), (1.37), (1.38), (1.40), (1.44б), (1.45б), (1.46) и (1.47) получается локальная задача первого уровня для фильтрации несжимаемой неньютоновской жидкости в рамках модели Карро на ЯП V_{ξ} :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(1)} + \nabla_x \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0 \\
-\nabla_x p^{(0)} - \nabla_{\xi} p^{(1)} + \frac{1}{Eu^0 \text{Re}^0} \nabla_{\xi} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\xi}^{(0)} = 0 \\
\boldsymbol{\sigma}_{\xi}^{(0)} = 2\mu^{(0)} \mathbf{D}_{\xi}^{(0)} \\
\mathbf{D}_{\xi}^{(0)} = \frac{1}{2} (\nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)} + \nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)T}) \\
\mu^{(0)} = s + (1-s) (1 + Cu_0^2 Y^{(0)})^{\frac{n-1}{2}}, Y^{(0)} = 2\mathbf{D}_{\xi}^{(0)} \cdot \mathbf{D}_{\xi}^{(0)} \\
\langle \mathbf{v}^{(1)} \rangle = \bar{\mathbf{v}}, \langle p^{(1)} \rangle = \bar{p}, \langle \mu^{(0)} \rangle = \bar{\mu} \\
[[\mathbf{v}^{(1)}]] = 0, [[p^{(1)}]] = 0 \\
\mathbf{v}^{(1)} = 0, \xi \in \Sigma_{\xi}
\end{array} \right. \quad (1.49)$$

Объединяя уравнение движения (1.44а) нулевого уровня и интегральное условие для давления $p^{(0)}$ в системе (1.48), получаем

$$\left\{ \begin{array}{l}
\nabla_{\xi} p^{(0)} = 0 \\
\langle p^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) \rangle = \bar{p}(\mathbf{x})
\end{array} \right. \quad (1.50)$$

Таким образом, с учетом интегрального условия формулы (1.50) для давления, давление $p^{(0)}$ есть функция только глобальных координат $\hat{\mathbf{x}}$, и не зависит от локальных координат ξ :

$$p^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) = \bar{p}(\mathbf{x}). \quad (1.51)$$

В системе уравнений (1.49) давление $p^{(0)}$ нулевого уровня может быть представлено выражением (1.51) и, поэтому, может рассматриваться как известное.

Заметим, что неньютоновская вязкость $\mu^{(0)}$ нулевого уровня зависит от скорости $\mathbf{v}^{(0)}$ нулевого уровня и не зависит от скорости $\mathbf{v}^{(1)}$ первого уровня. Так уравнение движения локальной задачи первого уровня не содержит неизвестную функцию $\mathbf{v}^{(1)}$.

Таким образом, локальная задача с учетом выражений (1.48), (1.49) и (1.51) сформулируется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0 \\
-\nabla_x p^{(0)} - \nabla_{\xi} p^{(1)} + \frac{1}{Eu^0 \text{Re}^0} \nabla_{\xi} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\xi}^{(0)} = 0 \\
\boldsymbol{\sigma}_{\xi}^{(0)} = 2\boldsymbol{\mu}^{(0)} \mathbf{D}_{\xi}^{(0)} \\
\mathbf{D}_{\xi}^{(0)} = \frac{1}{2} (\nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)} + \nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)T}) \\
\boldsymbol{\mu}^{(0)} = s + (1-s) (1 + Cu_0^2 Y^{(0)})^{\frac{n-1}{2}}, Y^{(0)} = 2\mathbf{D}_{\xi}^{(0)} \cdot \mathbf{D}_{\xi}^{(0)} \\
\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = \bar{\mathbf{v}}, \langle p^{(1)} \rangle = 0, \langle \boldsymbol{\mu}^{(0)} \rangle = \bar{\boldsymbol{\mu}} \\
[[\mathbf{v}^{(0)}]] = 0, [[p^{(1)}]] = 0 \\
\mathbf{v}^{(0)} = 0, \boldsymbol{\xi} \in \Sigma_{\xi}
\end{array} \right. \quad . \quad (1.52)$$

Отметим, что в системе (1.52) неизвестные функция $\mathbf{v}^{(0)}$, $p^{(1)}$ и $\boldsymbol{\mu}^{(0)}$ являются периодическими неизвестными, поскольку градиент макродавления $\nabla_x p^{(0)}$ в системе зависит только от глобальных координат $\hat{\mathbf{x}}$, поэтому рассматривается как «входные данные» системы (1.52) локальной задачи, и градиент макродавления $\nabla_x p^{(0)}$ является заданным. Символом $[[\cdot]]$ обозначены условия периодичности, причем $-\frac{1}{2} \leq \xi_i \leq \frac{1}{2}$ – область ЯП V_{ξ} .

1.3.3. Постановка локальной задачи на ячейке периодичности с учетом трехмерной структуры пор

Затем рассматривается пористая среда с трехмерной структурой, в которой неньютоновская вязкая жидкость движется вдоль одной ξ_{α} , $\alpha = \overline{1,3}$ из трёх осей $O\xi_i$ (как показано на рисунке 1.2 и рисунке 1.4). Рассматривая снова локальную задачу переноса (1.52), поскольку неньютоновская вязкость μ Карро нелинейно зависит от инварианта $II(\mathbf{D})$ тензора скорости деформации, следовательно, градиент макродавления $\nabla_x p^{(0)}$ невозможно устранить методом разделения переменных, как это выполнено в работах [12, 23, 72].

Для более подробного описания опишем задачу в виде тензорных компонент. Здесь

$$f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial \hat{x}_i}, \quad f_{/i} = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}. \quad (1.53)$$

В силу нелинейности локальной задачи (1.52), вызванной наличием неньютоновской вязкости, решение будет искажаться в виде нелинейных функций от входных данных, т.е. $\nabla_x p^{(0)}$ или $p_{,i}^{(0)}$:

$$p^{(1)}(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{\alpha=1}^3 q^{(\alpha)}(\xi, p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x})), \quad v_i^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{\alpha=1}^3 w_i^{(\alpha)}(\xi, p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x})), \quad (1.54)$$

где введены функции $q^{(\alpha)}(\xi, p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x}))$ и $w_i^{(\alpha)}(\xi, p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x}))$, зависящие нелинейным образом не только от локальных координат ξ , и но от градиента давления $p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x})$.

Используя далее соотношения (1.54) и вводя аналогичное соотношение для неньютоновской вязкости:

$$\mu^{(0)}(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{\alpha=1}^3 \phi^{(\alpha)}(\xi, p_{,\alpha}^{(0)}(\mathbf{x})). \quad (1.55)$$

Подставляя выражения (1.53), (1.54) и (1.55) в локальные задачи (1.52), получим набор локальных задач для определения нелинейных функций $q^{(\alpha)}$, $w_i^{(\alpha)}$ и $\phi^{(\alpha)}$, которые не только содержат константы, описывающих физические свойства неньютоновских вязких жидких сред, и но зависят от входных данных:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{i/i}^{(\alpha)} = 0 \\ -q_{/i}^{(\alpha)} + \frac{1}{Eu^0 Re^0} \tau_{ij/i}^{(\alpha)} = p_{,\alpha}^{(0)} \\ \tau_{ij}^{(\alpha)} = 2\phi^{(\alpha)} \varepsilon_{ij}^{(\alpha)} \\ \varepsilon_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (v_{i/j}^{(\alpha)} + v_{j/i}^{(\alpha)T}) \\ \phi^{(\alpha)} = s + (1-s) \left(1 + Cu_0^2 Z^{(\alpha)} \right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad Z^{(\alpha)} = 2\varepsilon_{ij}^{(\alpha)} \varepsilon_{ji}^{(\alpha)} \\ \langle q^{(\alpha)} \rangle = 0, \quad \llbracket w_i^{(\alpha)} \rrbracket = 0, \quad \llbracket q^{(\alpha)} \rrbracket = 0 \\ w_i^{(\alpha)} \Big|_{\Sigma_\xi} = 0 \\ i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}, \quad \alpha = \overline{1,3} \end{array} \right. \quad (1.56)$$

1.3.4. Физическая интерпретация локальной задачи

Следующие выводы можно сделать путем системного анализа локальной задачи (1.56). На локальном уровне для различных градиентов макродавления (разных модули и направления) локальная задача (1.56) является стационарной задачей течения некоторой фиктивной несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в

рамках модели Карро. Решение локальной задачи (1.56) определяется связью между внутренней геометрией пор, параметрам модели неньютоновской вязкости и входными данными $\nabla_x p^{(0)}$. Видно, что локальная задача (1.56) применима для расчетов фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в рамках сделанных ранее допущений.

В частности, полученные локальные задачи обладают многими особенностями. Во-первых, поскольку пульсация давления p относительно среднего значения \bar{p} представляется функцией $p^{(1)}$ в системе локальных задач (1.56), т.к.

$$\kappa p^{(1)} = p - p^{(0)} + O(\kappa^2), \quad \langle p^{(0)} \rangle = \bar{p}, \quad \langle p^{(1)} \rangle = 0. \quad (1.57)$$

то функция $p^{(1)}$ может быть как положительной, так и отрицательной. Во-вторых, задача (1.56) становится интегро-дифференциальной из-за наличия условия $\langle p^{(1)} \rangle = 0$, которое вместе с условиями периодичности отличает задачу (1.56) от обычного стационарного течения неньютоновских вязких жидкостей типа Стокса.

Во-третьих, осредненная функция $\langle \mu^{(0)} \rangle$ неньютоновской вязкости становится уникальной особенностью системы (1.57). Наличие неньютоновской вязкости локальных задач (1.56) существенно отличает задачу (1.56) от предыдущих локальных задач [24, 55, 98, 99, 111, 113].

1.3.5. Сведение локальной задачи к задаче на 1/8 ячейки периодичности

Согласно предположению о структуре ЯП в п 1.1.1, область расчета может быть дополнительно уменьшена, и следующая теорема о продолжении решения, аналогичная теореме из [24, 72], используется для упрощения решения задачи (1.56).

Теорема 1. Пусть ЯП $V_{\tilde{\varphi}}$ трехмерной структуры имеет зеркальную симметрию относительно координатных плоскостей $O_{\xi_1\xi_2}$, $O_{\xi_1\xi_3}$, $O_{\xi_2\xi_3}$. Тогда решение $w_i^{(\alpha)}$, $q^{(\alpha)}$, $\phi^{(\alpha)}$ задачи (1.56) получается с помощью симметричного или антисимметричного продолжения функций $\tilde{v}_i^{(\alpha)}$, $\tilde{p}^{(\alpha)}$, $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$ определенных в 1/8

области ЯП V_{ξ_p} (в первом квадранте $\left\{ \xi_i : 0 \leq \xi_i \leq \frac{1}{2} \right\}$, как показано на рисунке 1.5)

и являющихся решениями следующих локальных задач $L^{(\alpha)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_{i/i}^{(\alpha)} = 0 \\ -\tilde{p}_{/i}^{(\alpha)} + \frac{1}{Eu^0 \text{Re}^0} \tilde{\sigma}_{ij/j}^{(\alpha)} = p_{,\alpha}^{(0)} \\ \tilde{\sigma}_{ij}^{(\alpha)} = 2\tilde{\mu}^{(\alpha)} \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)} \\ \tilde{D}_{ij}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (\tilde{v}_{i/j}^{(\alpha)} + \tilde{v}_{j/i}^{(\alpha)T}) \\ \tilde{\mu}^{(\alpha)} = s + (1-s) \left(1 + Cu_0^2 \tilde{Y}^{(\alpha)} \right)^{\frac{n-1}{2}} \\ \tilde{Y}^{(\alpha)} = 2\tilde{D}_{ij}^{(\alpha)} \tilde{D}_{ji}^{(\alpha)} \\ \tilde{v}_i^{(\alpha)} \Big|_{\Sigma_{\xi_p}} = 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} = 0 \\ -\nabla_{\xi} \tilde{p}^{(\alpha)} + \frac{1}{Eu^0 \text{Re}^0} \nabla_{\xi} \cdot \tilde{\sigma}^{(\alpha)} = \nabla_x p^{(0)} \\ \tilde{\sigma}^{(\alpha)} = 2\tilde{\mu}^{(\alpha)} \tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)} \\ \tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (\nabla_{\xi} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} + \nabla_{\xi} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)T}) \\ \tilde{\mu}^{(\alpha)} = s + (1-s) \left(1 + Cu_0^2 \tilde{Y}^{(\alpha)} \right)^{\frac{n-1}{2}} \\ \tilde{Y}^{(\alpha)} = 2\tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)} \\ \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} = 0, \xi \in \Sigma_{\xi_p} \end{array} \right. \quad (1.58)$$

Принцип симметричного и антисимметричного продолжения решения системы (1.58) применяются, граничные условия локальной задачи $L^{(\alpha)}$ (1.58) удовлетворяют следующим формам:

$$\xi_j = 0 \text{ и } \xi_j = \frac{1}{2} : \left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_i^{(\alpha)} (\delta_{aj} + \delta_{ji} - 2\delta_{aj}\delta_{ji}) + \frac{\partial \tilde{v}_i^{(\alpha)}}{\partial \xi_j} [1 - (\delta_{aj} + \delta_{ji} - 2\delta_{aj}\delta_{ji})] = 0 \\ \tilde{p}^{(\alpha)} \delta_{aj} + \frac{\partial \tilde{p}^{(\alpha)}}{\partial \xi_j} (1 - \delta_{aj}) = 0 \end{array} \right. \quad , \alpha, i, j = \overline{1,3}. \quad (1.59)$$

– граничные условия для локальной задачи $L^{(1)}$.

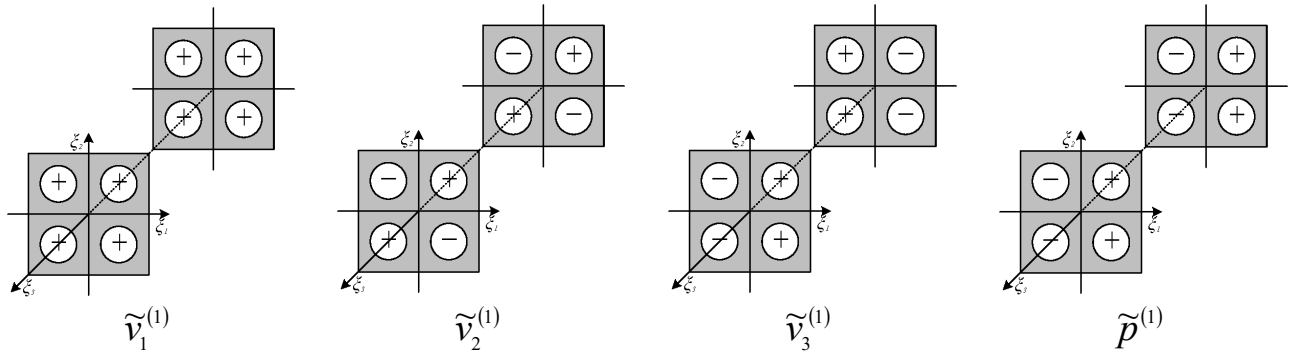


Рисунок 1.6. – Изменение знаков функций при симметричном или антисимметричном продолжении для локальной задачи $L^{(1)}$

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_1 = \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \tilde{v}_1^{(1)}}{\partial \xi_1} = 0, \quad \tilde{v}_2^{(1)} = 0, \quad \tilde{v}_3^{(1)} = 0, \quad \tilde{p}^{(1)} = 0, \quad (1.60a)$$

$$\xi_2 = 0, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \tilde{v}_1^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \tilde{v}_2^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}_3^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{p}^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad (1.60б)$$

$$\xi_3 = 0, \quad \xi_3 = \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \tilde{v}_1^{(1)}}{\partial \xi_3} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}_2^{(1)}}{\partial \xi_3} = 0, \quad \tilde{v}_3^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{p}^{(1)}}{\partial \xi_3} = 0, \quad (1.60в)$$

– граничные условия для локальной задачи $L^{(2)}$.

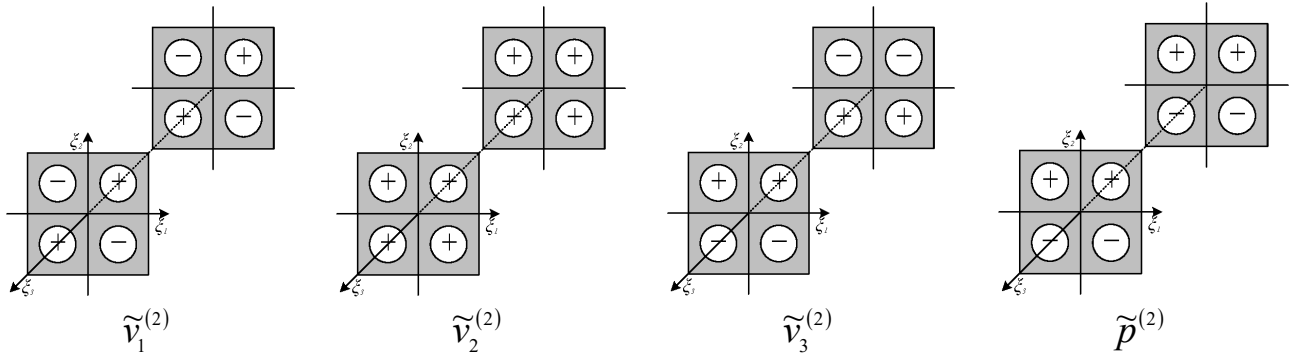


Рисунок. 1.7. – Изменение знаков функций при симметричном или антисимметричном продолжении для локальной задачи $L^{(2)}$

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_1 = \frac{1}{2}: \quad \tilde{v}_1^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}_2^{(2)}}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}_3^{(2)}}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{p}^{(2)}}{\partial \xi_1} = 0, \quad (1.61a)$$

$$\xi_2 = 0, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}: \quad \tilde{v}_1^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}_2^{(2)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \tilde{v}_3^{(2)} = 0, \quad \tilde{p}^{(2)} = 0, \quad (1.61б)$$

$$\xi_3 = 0, \quad \xi_3 = \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \tilde{v}_1^{(2)}}{\partial \xi_3} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}_2^{(2)}}{\partial \xi_3} = 0, \quad \tilde{v}_3^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{p}^{(2)}}{\partial \xi_3} = 0, \quad (1.61в)$$

– граничные условия для локальной задачи $L^{(3)}$.

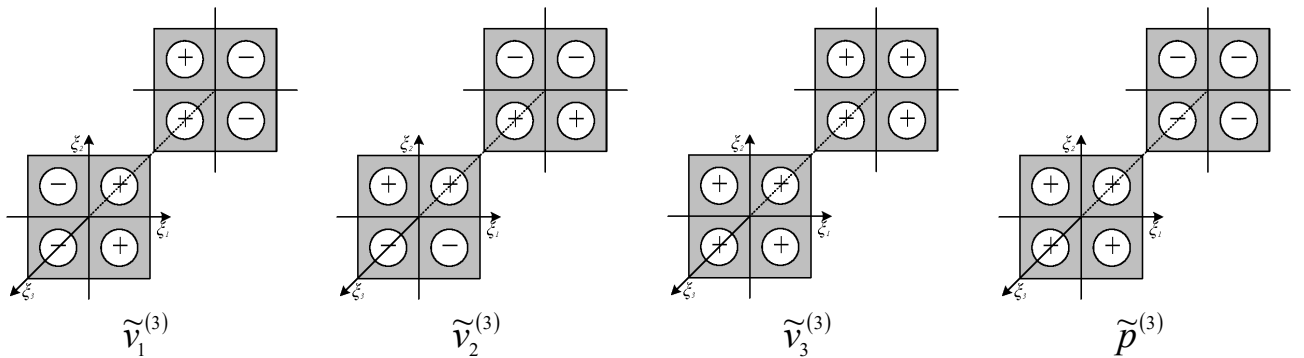


Рисунок. 1.8. – Изменение знаков функций при симметричном или антисимметричном продолжении для локальной задачи $L^{(3)}$

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_1 = \frac{1}{2}: \quad \tilde{v}_1^{(3)} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}_2^{(3)}}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}_3^{(3)}}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{p}^{(3)}}{\partial \xi_1} = 0, \quad (1.62a)$$

$$\xi_2 = 0, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \tilde{v}_1^{(3)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \tilde{v}_2^{(3)} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}_3^{(3)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{p}^{(3)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad (1.62б)$$

$$\xi_3 = 0, \quad \xi_3 = \frac{1}{2}: \quad \tilde{v}_1^{(3)} = 0, \quad \tilde{v}_2^{(3)} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}_3^{(3)}}{\partial \xi_3} = 0, \quad \tilde{p}^{(3)} = 0. \quad (1.62в)$$

Здесь изменение знаков функций $\tilde{v}^{(\alpha)}$, $\tilde{p}^{(\alpha)}$ для задачи $L^{(\alpha)}$ при их симметричном или антисимметричном продолжении во всю ЯП осуществляется так, как показано на рисунках 1.6 – 1.8. Знак «+» на рисунке 1.6, рисунке 1.7 и рисунке 1.8 означает, что при переходе из первого квадранта функция не изменяет знак (симметричное продолжение), а знак «−» – изменяет (антисимметричное продолжение). Тогда учитывая, что функции $\tilde{p}^{(\alpha)}$, антисимметричны хотя бы по одной из координат ξ_i , приходим к выполнению интегрального условия осреднения для функций $p^{(1)}$ в системе (1.56).

Действительно, функции $\tilde{v}^{(\alpha)}$ и $\tilde{p}^{(\alpha)}$ удовлетворяют полной системе (1.56) в любой подобласти ЯП, полученной симметричным отражением области V_ξ относительно координатных плоскостей $O\xi_i$, в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Доказательство теоремы. Рассмотрим случай, когда $\alpha = 1$. Введите новые координаты: $\eta_1 = -\xi_1$, $\eta_2 = \xi_2$ и $\eta_3 = \xi_3$ продлим решение задачи (1.56) от первого до второго квадранта согласно рисунку 1.6, т.е. предположим, что

$$w_1^{(1)}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \tilde{v}_1^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (1.63a)$$

$$w_2^{(1)}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = -\tilde{v}_2^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (1.63б)$$

$$w_3^{(1)}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = -\tilde{v}_3^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (1.63в)$$

$$q^{(1)}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = -\tilde{p}^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (1.63г)$$

Здесь ∇_η – набла-оператор относительно новой координаты η , и ∇_ξ – набла-оператор относительно локальной координаты ξ .

С помощью выражения (1.63) для этой замены дифференциальные операторы во втором квадранте связаны с соответствующими операторами первого квадранта следующим образом:

$$\begin{aligned}\nabla_{\eta} \cdot \mathbf{w}^{(1)} &= \frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial \eta_1} + \frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial \eta_2} + \frac{\partial w_3^{(1)}}{\partial \eta_3} = \frac{\partial w_1^{(1)}}{-\partial \xi_1} + \frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial w_3^{(1)}}{\partial \xi_3} \\ &= \frac{\partial \tilde{v}_1^{(1)}}{-\partial \xi_1} + \frac{-\partial \tilde{v}_2^{(1)}}{\partial \xi_2} + \frac{-\partial \tilde{v}_3^{(1)}}{\partial \xi_3} = -\left(\frac{\partial \tilde{v}_1^{(1)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \tilde{v}_2^{(1)}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \tilde{v}_3^{(1)}}{\partial \xi_3} \right) = -\nabla_{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{(1)}.\end{aligned}\quad (1.64)$$

Используя формулу (1.63г), частные производные давления имеют следующие зависимости:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q^{(1)}}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial q^{(2)}}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial q^{(3)}}{\partial \eta_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q^{(1)}}{-\partial \xi_1} \\ \frac{\partial q^{(2)}}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial q^{(3)}}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \tilde{p}^{(1)}}{\partial \xi_1} \\ -\frac{\partial \tilde{p}^{(1)}}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial \tilde{p}^{(1)}}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{p}^{(1)}}{\partial \xi_1} \\ -\frac{\partial \tilde{p}^{(1)}}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial \tilde{p}^{(1)}}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}.\quad (1.65)$$

Теперь мы определим тензор скорости деформации в трех измерениях с помощью шестикомпонентного вектора, как показано ниже:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\eta}^{11(1)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\eta}^{22(1)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\eta}^{33(1)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\eta}^{12(1)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\eta}^{23(1)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\eta}^{13(1)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \mathbf{I}_d \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_1} & \frac{\partial}{\partial \eta_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_2} & \frac{\partial}{\partial \eta_1} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \\ w_3^{(1)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{I}_d \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial}{\partial \xi_1} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \\ w_3^{(1)} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \mathbf{I}_d \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial}{\partial \xi_1} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{v}_1^{(1)} \\ -\tilde{v}_2^{(1)} \\ -\tilde{v}_3^{(1)} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{I}_d \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} & -\frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_1} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{v}_1^{(1)} \\ \tilde{v}_2^{(1)} \\ \tilde{v}_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{D}}_{\xi}^{11(1)} \\ -\tilde{\mathbf{D}}_{\xi}^{22(1)} \\ -\tilde{\mathbf{D}}_{\xi}^{33(1)} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{\xi}^{12(1)} \\ -\tilde{\mathbf{D}}_{\xi}^{23(1)} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{\xi}^{31(1)} \end{pmatrix}, \quad (1.66)
\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{I}_d = \text{diag}(2,2,2,1,1,1).$$

Согласно выражению (1.38) квадрата инварианта тензора скорости деформации, на основе выражения (1.67) получим:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\eta^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\eta^{(1)} = \tilde{\mathbf{D}}_\xi^{(1)} \cdot \tilde{\mathbf{D}}_\xi^{(1)}. \quad (1.67)$$

В сочетании с неньютоновской вязкостью Карро (1.40), получается

$$\phi_\eta^{(1)} = s + (1-s) \left[1 + Cu^0 (\boldsymbol{\varepsilon}_\eta^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\eta^{(1)}) \right]^{\frac{n-1}{2}}, \quad (1.68a)$$

$$\tilde{\mu}_\xi^{(1)} = s + (1-s) \left(1 + Cu^0 \tilde{Y}^{(1)} \right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (1.68b)$$

Согласно выражениям (1.67) и (1.68) получим

$$\phi_\eta^{(1)} = \tilde{\mu}_\xi^{(1)}. \quad (1.69)$$

Теперь рассмотрим дифференциальные операторы напряжения неньютоновской вязкости, используя формулу (1.66), имеем следующие соотношения:

$$\nabla_\eta \cdot (2\phi_\eta^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_\eta^{(1)})$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_1} & \frac{\partial}{\partial \eta_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_2} & \frac{\partial}{\partial \eta_1} \end{bmatrix} \phi_{\eta}^{(1)} \mathbf{I}_d \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_1} & \frac{\partial}{\partial \eta_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial \eta_2} & \frac{\partial}{\partial \eta_1} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \\ w_3^{(1)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \phi_{\eta}^{(1)} \mathbf{I}_d \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial}{\partial \xi_1} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \\ w_3^{(1)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} & -\frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \tilde{\mu}_{\xi}^{(1)} \mathbf{I}_d \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} & -\frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_1} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{v}_1^{(1)} \\ \tilde{v}_2^{(1)} \\ \tilde{v}_3^{(1)} \end{pmatrix} \\
&= \nabla_{\xi} \cdot 2\tilde{\mu}_{\xi}^{(1)} \tilde{\mathbf{D}}_{\xi}^{(1)}. \tag{1.70}
\end{aligned}$$

Граничные условия (1.60) поддерживают условия локальной задачи (1.56), удовлетворяемые при переходе во второй квадрант. Кроме того, из-за антисимметрии функции $\tilde{p}^{(1)}$ также выполняется интегральное условие (1.56).

Аналогичным образом мы можем доказать, что расширение решения на другие квадранты, реализованное в соответствии с рисунком 1.6, сохраняет все уравнения (1.56), удовлетворяемые в этих квадрантах.

Вышесказанное также справедливо при $\alpha = 2$ с учетом симметричного и антисимметричного расширений функций по данным рисунку 1.7, Для $\alpha = 3$ аналогичные результаты могут быть получены в соответствии с рисунком 1.8.

1.3.6. Нелинейный закон фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в пористых средах

1.3.6.1. Классической закон фильтрации Дарси

Когда определяющее соотношение неньютоновской вязкости упрощается до ньютоновской жидкости, локальная задача (1.52) сводится к следующей формуле:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0 \\ -\nabla_{\xi} p^{(1)} + \frac{1}{Eu^0 Re^0} \nabla_{\xi} \cdot (\nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)} + \nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)T}) = \nabla_x p^{(0)} \\ \langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = \bar{\mathbf{v}}, \langle p^{(0)} \rangle = \bar{p} \\ \langle p^{(1)} \rangle = 0 \\ [[\mathbf{v}^{(0)}]] = 0, [[p^{(1)}]] = 0 \\ \mathbf{v}^{(0)} = 0, \xi \in \Sigma_{\xi} \end{array} \right. . \quad (1.71)$$

Применяя оператор осреднения (1.46) к уравнению движения локальной задачи (1.71), получаем следующее соотношение:

$$-\langle \nabla_{\xi} p^{(1)} \rangle + \frac{1}{Eu^0 Re^0} \langle \nabla_{\xi} \cdot (\nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)} + \nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)T}) \rangle = \langle \nabla_x p^{(0)} \rangle. \quad (1.72)$$

Согласно наличию условия $\langle p^{(1)} \rangle = 0$, (1.51) и (1.72), мы получим, что скорость течения (фильтрации) $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$ являются неизвестными функциями, линейно зависящими от $\nabla_x p^{(0)}$:

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = -\frac{\mathbf{K}}{\eta_0} \langle \nabla_x p^{(0)} \rangle \quad \text{или} \quad \bar{\mathbf{v}} = -\frac{\mathbf{K}}{\eta_0} \nabla_x \bar{p}^{(0)}, \quad (1.73)$$

где $\eta_0 = \frac{1}{Eu^0 Re^0}$, $\mathbf{K} = K_i^j$ – тензор проницаемости пористой среды, и $K_i^j = const$ – компоненты тензора проницаемости пористой среды.

Учитывая выражение (1.54) и локальную задачу (1.56), получаем следующее соотношение:

$$v_i^{(0)} = w_j^{(\alpha)} \delta_{\alpha}^j. \quad (1.74)$$

Рассмотрим выражения (1.73) более подробно. Так как функции \tilde{v} имеют симметрию или асимметрию для локальных координат (см. рисунок 1.6), например, когда $k=1$, функция \tilde{v}_2 для координатной плоскости $O\xi_1\xi_3$ и $O\xi_2\xi_3$ является антисимметричной, поэтому $K_1^2 = 0$, и функция \tilde{v}_3 для координатной плоскости $O\xi_1\xi_2$ и $O\xi_2\xi_3$ является антисимметричной, поэтому $K_1^3 = 0$, то матрица \mathbf{K}

является диагональной. Поэтому $\mathbf{K} = \text{diag}(K_1, K_2, K_3)$. Стоит отметить, что 3D тканевая микроструктура является анизотропной, имеем $K_1 \neq K_2 \neq K_3$, и 3D ортогональная микроструктура является изотропной – $K_1 = K_2 = K_3$.

Затем рассмотрим уравнение неразрывности (1.35б) первого уровня. Здесь $\nabla_x \cdot \mathbf{v}^{(0)}$ появляется в качестве исходного члена. Кроме того, $\mathbf{v}^{(1)}$ являются V_ξ -периодическим функциями, и (1.42б) показывает, что $\mathbf{v}^{(1)}$ равна нулю на границе $\Sigma_{\xi\varphi}$. Применяя к (1.35б) оператор осреднения (1.29), получаем:

$$\langle \nabla_\xi \cdot \mathbf{v}^{(1)} + \nabla_x \cdot \mathbf{v}^{(0)} \rangle = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\varphi |V_{\xi\varphi}|} \int_{V_{\xi\varphi}} (\nabla_\xi \cdot \mathbf{v}^{(1)} + \nabla_x \cdot \mathbf{v}^{(0)}) dV = 0. \quad (1.75)$$

Для вычисления первого слагаемого в левой части выражения (1.75) применяется формула Остроградского-Гаусса [20], которая обычно имеет следующий вид:

$$\int_{V_{\xi\varphi}} \nabla_\xi \cdot {}^k \Omega dV = \int_{\Sigma_{\xi\varphi}} \mathbf{n} \cdot {}^k \Omega dS, \quad (1.76)$$

где ${}^k \Omega$ – некоторый тензор k -го ранга, \mathbf{n} – вектор нормали. В этом случае область $V_{\xi\varphi}$ не зависит от времени, поэтому выражение (1.75) сводится к следующей форме:

$$\frac{1}{\varphi |V_{\xi\varphi}|} \int_{V_{\xi\varphi}} \nabla_x \cdot \mathbf{v}^{(0)} dV = -\frac{1}{\varphi |V_{\xi\varphi}|} \int_{V_{\xi\varphi}} \nabla_\xi \cdot \mathbf{v}^{(1)} dV = -\frac{1}{\varphi |V_{\xi\varphi}|} \int_{\Sigma_{\xi\varphi}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^{(1)} dS = 0. \quad (1.77)$$

С учетом формул (1.73) и (1.75), наконец, мы имеем:

$$\nabla_x \cdot \langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = 0, \quad (1.78a)$$

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = -\frac{\mathbf{K}}{\eta_0} \nabla_x p^{(0)}, \quad (1.78b)$$

который представляет собой глобальную задачу фильтрации ньютоновской жидкости. Уравнение (1.78б) является законом Дарси ($\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$ – скорость фильтрации).

1.3.6.2. Нелинейный закон фильтрации неньютоновско-вязкой жидкости

Далее рассмотрим локальную задачу (1.52) неньютоновских жидкостей в рамках модели Карро. Применяя оператор осреднения (1.29) к уравнению движения локальной задачи (1.52), получим:

$$-\langle \nabla_{\xi} p^{(1)} \rangle + \frac{1}{Eu^0 Re^0} \langle \nabla_{\xi} \cdot \mu^{(0)} (\nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)} + \nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)T}) \rangle = \langle \nabla_x p^{(0)} \rangle. \quad (1.79)$$

Согласно условиям $\langle p^{(1)} \rangle = 0$ и $p^{(0)} = \langle p^{(0)} \rangle = \bar{p}(\mathbf{x})$, получаем следующее соотношение:

$$\frac{1}{Eu^0 Re^0} \langle \nabla_{\xi} \cdot \mu^{(0)} (\nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)} + \nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)T}) \rangle = \nabla_x p^{(0)}. \quad (1.80)$$

Кроме того, что из системы (1.52) видно, что решение ($\mathbf{v}^{(0)}$ и $p^{(1)}$) локальной задачи (1.52) зависит не только от входных данных $\nabla_x p^{(0)}$, но и от параметров модели неньютоновской вязкости. В [55, 56, 98, 99] закон фильтрации стационарного медленного течения несжимаемой степенной жидкости в пористых средах исследуется с помощью теории представления изотропной тензорной функции тензорных аргументов, и результат выражается следующим образом:

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = G(\nabla p^{(0)}) \quad \text{или} \quad \nabla p^{(0)} = g(\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle), \quad (1.81)$$

где g и G – функции, зависящие от реологических свойств и характеристик пористой системы. Здесь реологические свойства – соответствующие параметры реологической модели, т.е. модели неньютоновской вязкости, характеристики пористой системы – соответствующие параметры внутренней геометрии пор пористых сред.

Из системы (1.52) видно, что если заданы параметры неньютоновской годовой модели, решение локальной задачи (1.52) определяется связью между внутренней геометрией пор и входными данными $\nabla_x p^{(0)}$. Поэтому решение $\mathbf{v}^{(0)}$ задачи (1.52) выражается следующей функцией:

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{v}^{(0)}(\xi, \nabla_x p^{(0)}). \quad (1.82)$$

После применения численных методов для получения решений серии задач $L^{(\alpha)}$ (1.56) для всех α , оператор осреднения применяется к скорости $\mathbf{v}^{(0)}$ по областям, занятым неньютоновской вязкой жидкостью. Получается осредненная

скорость в локальной задаче фильтрации (1.56). Следовательно, нелинейный закон фильтрации, связанный со скоростью фильтрации $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$ и градиентом макродавления $\nabla_x p^{(0)}$, выражается в следующей форме:

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = F(\nabla_x p^{(0)}). \quad (1.83)$$

Следовательно, когда параметры неньютоновской вязкой модели фиксированы, алгоритм вычисления осредненных скоростей $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$ по заданным значениям градиента давления $\nabla_x p^{(0)}$, фактически являющийся алгоритмом нахождения значения тензорной функции (1.83). Тензорная функция (1.83) может быть определена, если имеется информация о типе геометрической симметрии ЯП композита и типе анизотропии волокон и матрицы. Поскольку основное допущение симметрии принято, решение всех задач $L^{(\alpha)}$ (1.56) будет иметь указанный тип симметрии. Это означает, что тензорная функция (1.83) должна иметь данную симметрию. Но перечисленные выше преобразования и тождественные преобразования образуют группу ортотропии следовательно согласно терминологии, введенной в [18], средняя скорость $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$ будет тензорной функцией, независимой от группы ортотропии. Но тогда для такой тензорной функции можно использовать представление ее в тензорном базисе группы ортотропии, которое имеет вид:

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = \sum_{\alpha=1}^3 \chi^{(\alpha)}(I_1^p, I_2^p, I_3^p) \mathbf{e}_\alpha \quad \text{или} \quad \langle v_i^{(0)} \rangle = \sum_{\alpha=1}^3 \chi^{(\alpha)}(I_1^p, I_2^p, I_3^p) \delta_{i\alpha}, \quad (1.84)$$

где I_i^p скалярные функции от инвариантов вектора градиента давления:

$$I_i^p = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i}. \quad (1.85)$$

Эти функции $\chi^{(\alpha)}$ фактически и представляют собой искомую эффективную проницаемость неньютоновско-вязкой жидкости в пористых средах. Зная значения $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$ и $\nabla_x p^{(0)}$, функции $\chi^{(\alpha)}$ могут быть вычислены следующим образом. Для ортогональных полей запишем формулы (1.84) в явном виде:

$$\chi^{(\alpha)}(I_1^p, I_2^p, I_3^p) = \tilde{\chi}^{(\alpha)}(|I_1^{p(\alpha)}|, |I_2^{p(\alpha)}|, |I_3^{p(\alpha)}|) I_\alpha^p = \tilde{\chi}^{(\alpha)} p_{,\alpha}^{(0)}. \quad (1.86)$$

Для пористых сред с различными структурами, очевидно, что $\chi^{(1)} = \chi^{(2)} = \chi^{(3)}$ описывает эффективную проницаемость изотропной пористой среды и эффективную проницаемость анизотропной пористой среды, когда $\chi^{(1)} \neq \chi^{(2)} \neq \chi^{(3)}$.

На основе выражения (1.84) получаем эффективную проницаемость неньютоновско-вязкой жидкости со следующей формой:

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = \left(\sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\chi}^{(\alpha)} \mathbf{e}_\alpha^2 \right) \nabla_x p^{(0)}, \quad (1.87)$$

где $\mathbf{e}_\alpha^2 = \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha$ – диадный базис (ДБ), $\mathbf{K} = \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\chi}^{(\alpha)} \mathbf{e}_\alpha^2$ – тензор эффективной проницаемости.

Из анализа локальных задач (1.56) видно, что направление средней скорости $\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$ противоположно направлению градиента давления $\nabla_x p^{(0)}$, поэтому

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = -\mathbf{K} \cdot \nabla_x p^{(0)}, \quad (1.88)$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{K}(|\nabla_x p^{(0)}|) = K_j^i$ – тензорная функция, зависящая от модуля $|\nabla_x p^{(0)}| = \sqrt{\nabla_x p^{(0)} \cdot \nabla_x p^{(0)}}$ вектора градиента давления $\nabla_x p^{(0)}$.

Фактически, выражение (1.88) является формулировкой нелинейного закона фильтрации неньютоновско-вязкой жидкости в пористых средах.

Рассмотрим нелинейный закон фильтрации (1.88) более подробно. Подобно закону Дарси фильтрации ньютоновской жидкости, функции $\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}$ имеют симметрию или асимметрию для локальных координат (см. рисунок 1.6), например, когда $\alpha = 1$, функция $\tilde{v}_2^{(1)}$ для координатной плоскости $O\xi_1\xi_3$ и $O\xi_2\xi_3$ является антисимметричными, поэтому $K_2^1 = 0$, и функция $\tilde{v}_3^{(\alpha)}$ для координатной плоскости $O\xi_1\xi_2$ и $O\xi_2\xi_3$ является антисимметричными, поэтому $K_3^1 = 0$. Отсюда матрица $\mathbf{K} = \text{diag}(K_1^1, K_2^2, K_3^3)$ является диагональной. Стоит отметить, что микроструктура является анизотропной, имеем $K_1^1 \neq K_2^2 \neq K_3^3$. Тогда согласно выражению (1.86) тензорной функции тензор проницаемости можно записать следующим образом:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \tilde{\chi}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\chi}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\chi}^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (1.89)$$

С учетом формул (1.75), (1.88) и (1.89), наконец, мы имеем:

$$\nabla_x \cdot \langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = 0, \quad (1.90a)$$

$$\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle = -\mathbf{K} \left(\left| \nabla_x p^{(0)} \right| \right) \nabla_x p^{(0)}. \quad (1.90b)$$

Что представляет собой глобальную задачу фильтрации неньютоновско-вязкой жидкости. Уравнение (1.90b) является нелинейным законом фильтрации ($\langle \mathbf{v}^{(0)} \rangle$ – скорость фильтрации). Самое главное различие между законом нелинейной фильтрации и законом Дарси состоит в том, что проницаемость зависит от модуля “входных данных”, т.е. градиента давления.

1.3.7. Эффективная неньютоновская вязкость

Точно так же, в сочетании с выражением (1.55), локальной задачей (1.56) и уравнениями (1.58), эффективная вязкость, связанная с средней вязкостью $\langle \mu \rangle$ и градиентом давления $\nabla_x p^{(0)}$ можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle &= \sum_{\alpha=1}^3 \langle \phi^{(\alpha)}(I_1^{p(\alpha)}, I_2^{p(\alpha)}, I_3^{p(\alpha)}) \rangle \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \langle \tilde{\mu}^{(\alpha)}(I_1^{p(\alpha)}, I_2^{p(\alpha)}, I_3^{p(\alpha)}) \rangle \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \langle \tilde{\mu}^{(\alpha)}(|I_1^{p(\alpha)}|, |I_2^{p(\alpha)}|, |I_3^{p(\alpha)}|) P_{,\alpha}^{(0)} \rangle \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \langle \tilde{\mu}^{(\alpha)}(|I_1^{p(\alpha)}|, |I_2^{p(\alpha)}|, |I_3^{p(\alpha)}|) \rangle P_{,\alpha}^{(0)} \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \langle \mu^{(\alpha)} \rangle. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Осредняя вязкость описывает характеристики вязкости в отдельной ЯП. Величина осредней неньютоновской вязкости, отходящая от единицы, может быть использована для описания прочности неньютоновских характеристик вязкости жидкости. Очевидно, что осредняя вязкость ньютоновской жидкости равна единице.

Очень интересно, что эффективная вязкость аналогична проницаемости, а также зависит от модуля “входных данных”, т.е. градиента давления.

Таким образом, на основе выражений (1.3), (1.5) и (1.7), для неньютоновских вязких жидкостей мы можем определить тензор эффективных модулей вязкости, аналогичный тензору эффективных модулей упругости [35]. Компоненты тензора эффективных модулей вязкости выражаются следующей формулой:

$$\bar{M}_{ijkl}^{(\alpha)} = \bar{\mu}^{(\alpha)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \langle \mu^{(\alpha)} \rangle (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (1.92)$$

1.4. Выводы по первой главе

В первой главе диссертации разработана физико-математическая модель течения несжимаемой неньютоновско-вязкой жидкости и многомасштабная модель процессов фильтрации несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро в пористых структурах.

На основе МАГ сформулированы локальные задачи пространственного течения несжимаемой неньютоновско-вязкой жидкости в ЯП пористых структур. Теоретические результаты показывают, что локальная задача несжимаемой неньютоновско-вязкой жидкости представляет собой стационарную задачу течения, а их решение зависит не только от внутренней геометрии пор, и от неньютоновской вязкости и макроскопического градиента давления.

На основе анизотропных тензорных функций был разработан нелинейный закон фильтрации неньютоновско-вязкой жидкости. Таким образом, постановка нелинейного закона фильтрации применима для исследования макроскопических свойств процесса фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в рамках сделанных в работе допущений. Также показано, что макроскопические свойства процесса фильтрации – скорость фильтрации и эффективная неньютоновская вязкость зависят не только от информации о геометрической форме пор и пористости пористой среды, но также зависят от параметров модели Карро и внешних нагрузок. – макроскопического градиента давления.

ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ И ГЛОБАЛЬНОЙ ЗАДАЧОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

2.1. Численный алгоритм решения локальной задачи

2.1.1. Тензор неньютоновских вязких напряжений

Подставляя определяющие соотношения (1.14) неньютоновской вязкости в выражение тензора вязких напряжений (1.11), с помощью выражения (1.7) получаются следующие соотношения:

$$\mathbf{T}_v = {}^4\mathbf{M} \cdot \mathbf{D}. \quad (2.1)$$

В диссертационной работе несжимаемая неньютоновская вязкая среда рассматривается. Подставляя выражение (1.10) в формулу (1.7), поэтому с помощью выражения (1.6) квазилинейный тензор ${}^4\mathbf{M}$ вязкости несжимаемой неньютоновской жидкости переписывается как:

$$M_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (2.2)$$

где μ – неньютоновская вязкость Карро.

Поэтому компонент T_{ij}^v тензора вязких напряжений переписывается в следующем виде:

$$T_{ij}^v = M_{ijkl} D_{kl}. \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) часто встречается в области механики твердого тела [22, 35]. Таким образом, вариационный принцип Хеллингера-Рейсснера [22] может быть использован для решения проблемы этого типа.

Рассматривается локальная задача движения неньютоновских вязких жидкостей нулевого уровня на ЯП V_{φ} для области V_l . Вариационный принцип Хеллингера-Рейсснера применяется для построения вариационной формы локальной задачи течения неньютоновских вязких жидкостей. Для этой цели рассматривается определение соотношений (1.8) модели A_I и A_V (а также B_I и B_V) фойгтовских изотропных вязких сред. С учетом выражений (1.18), (1.20), (1.31) и (1.42), выполняется обезразмеривание тензора вязких напряжений, и получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_v \\ &= -p\mathbf{E} + 2\mu'\mathbf{D} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -p\mathbf{E} + \kappa^2 \frac{\mu}{\text{Re}^0 Eu^0} (\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T) \\
&= -p\mathbf{E} + \frac{\mu}{\text{Re}^0 Eu^0} \left[\kappa^1 (\nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v} + \nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^T) + \kappa^2 (\nabla_x \otimes \mathbf{v} + \nabla_x \otimes \mathbf{v}^T) \right]. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Выражая функцию в формуле (2.4) в виде асимптотического разложения (1.33) и группируя эти слагаемые при одинаковых степенях параметра κ , получаем:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(0)} + \kappa \mathbf{T}^{(1)} + \kappa^2 \mathbf{T}^{(2)} + \dots \tag{2.5}$$

Здесь

– тензор напряжений Коши нулевого уровня;

$$\mathbf{T}^{(0)} = -p^{(0)} \mathbf{E}, \tag{2.5a}$$

– тензор напряжений Коши первого уровня.

$$\mathbf{T}^{(1)} = -p^{(1)} \mathbf{E} + \frac{\mu^{(0)}}{\text{Re}^0 Eu^0} (\nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)} + \nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)T}), \tag{2.5b}$$

или

$$\mathbf{T}^{(1)} = -p^{(1)} \mathbf{E} + {}^4\mathbf{M}^{(0)} \cdot (\nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)} + \nabla_{\xi} \otimes \mathbf{v}^{(0)T}), \tag{2.5b}$$

где $M_{ijkl}^{(0)} = \mu^{(0)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ и $\mu^{(0)} = s + (1-s)(1 + Cu_0^2 Y^{(0)})^{\frac{n-1}{2}}$.

Согласно уравнению движения (1.26) МСС получаем:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0. \tag{2.6}$$

На основании выражения (2.5), в сочетании с правилом (1.28) дифференцирования сложной функции, имеем

$$\nabla_{\xi} \cdot \mathbf{T}^{(0)} = 0, \tag{2.7a}$$

$$\nabla_x \cdot \mathbf{T}^{(0)} + \nabla_{\xi} \cdot \mathbf{T}^{(1)} = 0. \tag{2.7b}$$

Далее, учитывая (2.7a) и (2.7b), согласно соотношений (1.54) и (1.55) вводится аналогичное соотношение для компонент тензора напряжений (2.5b) первого уровня

$$\mathbf{T}^{(1)}(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\mathbf{T}}^{(\alpha)}(\nabla_x p^{(0)}, \xi), \tag{2.8}$$

а также записывая определяющее соотношение (2.5b) для 1/8 области ЯП, с помощью выражения (2.8) получаем:

$$\tilde{\mathbf{T}}^{(\alpha)} = -\tilde{p}^{(\alpha)} \mathbf{E} + \tilde{\sigma}^{(\alpha)}, \tag{2.9a}$$

$$\tilde{\sigma}^{(\alpha)} = 2\tilde{\mu}^{(\alpha)}\tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)}, \quad (2.96)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}(\nabla_{\xi} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} + \nabla_{\xi} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)T}), \quad (2.9B)$$

$$\tilde{\mu}^{(\alpha)} = s + (1-s)\left(1 + Cu_0^2\tilde{Y}^{(\alpha)}\right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad \tilde{Y}^{(\alpha)} = 2\tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)}. \quad (2.9Г)$$

В соответствии с выражением (2.7), выражение (2.9) дифференцируется и с учетом нулевой дивергенции тензора напряжения Коши, получается следующее соотношение:

$$\nabla_{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{T}}^{(\alpha)} = -\nabla_{\xi} \tilde{p}^{(\alpha)} + \nabla_{\xi} \cdot \tilde{\sigma}^{(\alpha)}. \quad (2.10)$$

Согласно выражений (2.8) и (2.9a) правая часть выражения (2.10) совпадает с левой частью уравнения равновесия из выражения (2.7б). Поэтому выражение (2.7) переписывается в следующем виде:

$$\nabla_{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{T}}^{(\alpha)} = \tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha)}, \quad (2.11)$$

где $\tilde{\mathbf{f}}^{(\varepsilon)} = p_{,\alpha}^{(0)}$.

2.1.2. Вариационная формулировка локальной задачи

Пусть Ω – вычислительная область пространства \mathbf{R}^d ($d = 2$ или 3), занятая неньютоновской вязкой жидкостью. Область Ω предполагается ограниченной и многогранной, и $\partial\Omega$ – граница вычислительной области. Система локальной задачи (1.58), сформулированная в терминах скорость – давление, для области Ω примет вид:

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} &= 0 \\ -\nabla_{\xi} \tilde{p}^{(\alpha)} + \frac{1}{\text{Re}^0 Eu^0} \nabla \cdot \tilde{\sigma}^{(\alpha)} &= \mathbf{f}^{(\alpha)}, \\ \tilde{\sigma}^{(\alpha)} &= \tilde{\mu}^{(\alpha)} \left(\nabla_{\xi} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} + \nabla_{\xi} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)T} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}$ – поле скоростей, $\tilde{p}^{(\alpha)}$ – поле давления, $\tilde{\sigma}^{(\alpha)}$ – тензор неньютоновского вязкого напряжения, $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$ – неньютоновская вязкость, $\mathbf{f}^{(\alpha)}$ – вектор внешней силы.

Для простоты изложения рассмотрим однородные граничные условия $\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} = 0$ на границе $\partial\Omega$.

В диссертационной работе мы рассматриваем случай:

$$\Omega = V_{\xi} \text{ и } \partial\Omega = \Sigma_{\xi}.$$

Чтобы написать слабую форму задачи (2.12), введем некоторые обозначения. Как обычно, пространство квадратично интегрируемых функций в области Ω обозначается через $L^2(\Omega)$, а пространство функций, первые производные которых квадратично интегрируемы, обозначается через $H^1(\Omega)$. Пространство $H_0^1(\Omega)$ состоит из функций из $H^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$.

Пространство функций определяется как [64]:

$$L^2(\Omega) = \left\{ f \mid \int_{\Omega} f^2 d\Omega < \infty \right\},$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \mid \int_{\Omega} f^2 d\Omega < \infty, \int_{\Omega} (\nabla f)^2 d\Omega < \infty \right\}.$$

Используя эти обозначения, пространства конечно-элементных функций, используемые в непрерывной задаче, составляют U^0 для поля скоростей, Q для давления, где $U^0 = H_0^1(\Omega)^d$ и $Q = L^2(\Omega)/\mathbf{R}$.

Для постоянной вязкости слабая форма задачи (2.12) состоит в том, чтобы найти $[\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}] \in U^0 \times Q$, такую что:

$$\begin{aligned} (\delta\tilde{p}, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) &= 0 \\ (\delta\tilde{\mathbf{v}}, -\nabla_{\xi} \tilde{p}^{(\alpha)}) + (\delta\tilde{\mathbf{v}}, \nabla_{\xi} \cdot \tilde{\sigma}^{(\alpha)}) &= (\delta\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{f}^{(\alpha)}), \\ \tilde{\sigma}^{(\alpha)} &= \tilde{\mu}^{(\alpha)} \left(\nabla_{\xi} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} + \nabla_{\xi} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)T} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

для всех функций $[\delta\tilde{\mathbf{v}}, \delta\tilde{p}] \in U^0 \times Q$. Символ операции (\cdot, \cdot) обозначает внутреннее произведение в пространстве функции $L^2(\Omega)$.

$$(f, g) = \int_{\Omega} (fg) d\Omega. \quad (2.14)$$

Для преобразования второго уравнения (2.13) воспользуемся следующей формулой [20]:

$$\nabla_{\xi} \tilde{p}^{(\alpha)} \cdot \delta\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} = \nabla_{\xi} \cdot (\tilde{p}^{(\alpha)} \delta\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) - \tilde{p}^{(\alpha)} \nabla_{\xi} \cdot \delta\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}, \quad (2.15a)$$

$$(\nabla_{\xi} \cdot \tilde{\sigma}^{(\alpha)}) \cdot \delta\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} = \nabla_{\xi} \cdot (\tilde{\sigma}^{(\alpha)} \cdot \delta\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) - \tilde{\sigma}^{(\alpha)} \cdot (\nabla_{\xi} \otimes \delta\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)})^T. \quad (2.15b)$$

Для преобразования второго слагаемого в правой части выражения (2.15b) применяем тензор вязких напряжений $\tilde{\sigma}^{(\alpha)}$ как симметричный второго ранга, поэтому:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^{(\alpha)} \cdot \nabla_{\xi} \otimes \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{\sigma}^{(\alpha)} \cdot \nabla_{\xi} \otimes \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} + \left(\tilde{\sigma}^{(\alpha)} \cdot \nabla_{\xi} \otimes \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} \right)^T \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\tilde{\sigma}^{(\alpha)} \cdot \nabla_{\xi} \otimes \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} + \tilde{\sigma}^{(\alpha)T} \cdot \left(\nabla_{\xi} \otimes \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} \right)^T \right) \\
&= \tilde{\sigma}^{(\alpha)} \cdot \frac{1}{2} \left(\nabla_{\xi} \otimes \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} + \left(\nabla_{\xi} \otimes \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} \right)^T \right). \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Несложно показать, что левая часть уравнения (2.13) переписывается следующим образом:

$$(\nabla_{\xi} \tilde{p}^{(\alpha)}, \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) = -(\tilde{p}^{(\alpha)}, \nabla_{\xi} \cdot \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) + \int_{\Omega_e} \nabla_{\xi} \cdot (\tilde{p}^{(\alpha)} \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) d\Omega, \tag{2.17a}$$

$$(\nabla_{\xi} \cdot \tilde{\sigma}^{(\alpha)}, \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) = -(\tilde{\sigma}^{(\alpha)}, \nabla_{\xi}^s \otimes \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) + \int_{\Omega_e} \nabla_{\xi} \cdot (\tilde{\sigma}^{(\alpha)} \cdot \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) d\Omega, \tag{2.17b}$$

где $\nabla^s \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}$ – симметричная часть тензора $\nabla \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}$, т.е.

$$\nabla_{\xi}^s \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\xi} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} + \nabla_{\xi} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)T} \right).$$

Для преобразования второго слагаемого в правой части выражений (2.15б) и (2.17а), применяется формула Остроградского-Гаусса [103, 117], обычно имеющая следующий вид:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot {}^k \mathbf{T} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot {}^k \mathbf{T} d\Omega, \tag{2.18}$$

где ${}^k \mathbf{T}$ – некоторый тензор k -го ранга, \mathbf{n} – вектор нормали.

Поэтому, с использованием формулы Остроградского-Гаусса (2.18) выражения (2.17) переписываются в следующей форме:

$$(\nabla_{\xi} \tilde{p}^{(\alpha)}, \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) = -(\tilde{p}^{(\alpha)}, \nabla_{\xi} \cdot \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\xi} \cdot (\tilde{p}^{(\alpha)} \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) d\Omega, \tag{2.19a}$$

$$(\nabla_{\xi} \cdot \tilde{\sigma}^{(\alpha)}, \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) = -(\tilde{\sigma}^{(\alpha)}, \nabla_{\xi}^s \otimes \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{n} \cdot (\tilde{\sigma}^{(\alpha)} \cdot \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) d\Omega. \tag{2.19b}$$

Согласно определяющим соотношениям (2.9а), получим:

$$\int_{\partial\Omega_e} \mathbf{n} \cdot (\tilde{\mathbf{T}}^{(\alpha)} \cdot \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) d\Sigma = - \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{n} \cdot (\tilde{p}^{(\alpha)} \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) d\Sigma + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{n} \cdot (\tilde{\sigma}^{(\alpha)} \cdot \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) d\Sigma. \tag{2.20}$$

Таким образом, подставляя формулы (2.19а), (2.19б) и (2.20) в вариационная постановка задачи (2.13) окончательно принимает вид:

$$\begin{aligned}
(\delta \tilde{p}^{(\alpha)}, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) &= 0 \\
(\tilde{p}^{(\alpha)}, \nabla_{\xi} \cdot \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) - (\tilde{\sigma}^{(\alpha)}, \nabla_{\xi}^s \otimes \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) &= (\mathbf{f}^{(\alpha)}, \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) - \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{T}}^{(\alpha)} \cdot \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} d\Sigma. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Следует отметить, что в соответствии с граничными условиями из локальной задачи (1.52) работа вектора поверхностных усилий обращается в ноль по всей границе $\partial\Omega$ области течения Ω , т.к. все внутренние стороны поверхностных усилий $\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{T}}^{(\alpha)}$ при суммировании интегрируются дважды, но знак у вектора поверхностных усилий $\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{T}}^{(\alpha)}$ при этом меняется из-за изменения знака вектора нормали на этих сторонах, т.е. :

$$\int_{\partial\Omega_e} \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{T}}^{(\alpha)} \cdot \delta\mathbf{v}^{(\alpha)} d\Sigma_\Omega = 0. \quad (2.22)$$

Далее, в соответствии с определением (2.14) операции внутреннего произведения и формулой (2.22), вариационная постановка задачи (2.21) записывается в следующем виде:

$$\int_{V^{(e)}} \delta\tilde{p}^{(\alpha)} (\nabla_\xi \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) dV = 0$$

$$\int_{V^{(e)}} (\nabla_\xi \cdot \delta\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) \tilde{p}^{(\alpha)} dV - \int_{V^{(e)}} (\nabla_\xi^s \otimes \delta\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) \tilde{\mu}^{(\alpha)} (\nabla_\xi \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} + \nabla_\xi \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)T}) dV = \int_{V^{(e)}} \delta\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{f}^{(\alpha)} dV, \quad (2.23)$$

где $\mathbf{f}^{(\alpha)} = p_{,\alpha}^{(0)}$.

2.1.3. Условие Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB)

Задача несжимаемого неньютоновского течения решается на основе смешанных переменных скорости и давления, для получения устойчивых вычислительных результатов пространство интерполяционных функций смешанных переменных должно удовлетворять условиям совместности [45, 47, 103, 117].

На основе смешанных переменных $v-p$, дискретные уравнения определяющих соотношений, полученные при решении задачи стационарного течения несжимаемой вязкой жидкости, имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

где $\bar{\mathbf{v}}$ и \bar{p} – значения узлов скорости \mathbf{v} и давления p соответственно, а G и K – связанные глобальные матрицы. Формула (2.24) ‘приводимая’.

Исследование [57, 63, 87] показывает, что для уравнения сводимого смешивания (2.24), чтобы обеспечить устойчивость и сходимость решения, полученного МКЭ, и

избегать ложных колебаний в поле давления, пространство функции интерполяции смешанной переменной $v-p$ должно удовлетворять условию *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi* (LBB). Это также называется условием верхней и нижней границы (условие *Inf-Sup*).

Пространство интерполяционных функций скорости \mathbf{v} и давления p представлено U_k и Q_k соответственно. Пространство Q_k должно быть пространством расходимости пространства U_k , то есть для $\forall q_h \in Q_k$, переменная \mathbf{v}_h может быть найдена в пространстве U_k , удовлетворяющей $q_h = \nabla \cdot \mathbf{v}_h$. Исходя из этого, условие *Inf-Sup* может быть выражено как [100]:

$$\inf_{q_h \in Q_k} \sup_{\mathbf{v}_h \in U_k} \frac{\int q_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h d\Omega}{\|\mathbf{v}_h\| \|q_h\|} \geq \zeta > 0, \quad (2.25)$$

где ζ – это количество, которое не зависит от размера элемента. Условие *Inf-Sup* показывает, что для получения стабильного решения сходимости необходимо выбрать интерполяционное пространство смешанной переменной $v-p$: для $\forall q_h \in Q_k$ существует хотя бы один $\mathbf{v}_h \in U_k$, который удовлетворяет уравнению (2.25).

В 1986 году Зенкевич О. и др. предложили метод «проверки среза» [116], который открыл простой и эффективный способ тестирования функции интерполяции смешанных переменных $v-p$ для соответствия условию LBB. Метод «проверки среза» может быть кратко сформулирован следующим образом. Если число степеней свободы \bar{v} в уравнении (2.24) равно m , а число степеней свободы \bar{p} равно n , то необходимым условием для гарантии того, что уравнение (2.24) является неособым, является неравенство:

$$m \geq n. \quad (2.26)$$

Чтобы гарантировать, что уравнение (2.24) не является сингулярным (достаточное условие) во всех случаях, также должны быть выполнены для \bar{p} :

$$G\bar{p} \neq 0, \quad \forall \bar{p} \neq 0. \quad (2.27)$$

Уравнение (2.27) указывает, что ранг матрицы G равен n . Зенкевич О. и др. показали, что (2.26) и (2.27) эквивалентны условиям LBB .

2.1.4. Метод конечных элементов для решения вариационной задачи

Для численного решения системы вариационных уравнений (2.21) или (2.23) используется МКЭ [6, 45, 103, 117]. Согласно характеристикам вариационных задач, используется пространство функции интерполяции смешанных переменных, которое удовлетворяет условию LBB . Чтобы триангулировать расчетную область, используется десяти узловой конечный элемент (КЭ) в форме тетраэдра (см. рисунок 2.1) с 34 степенями свободы: по 3 компоненты скорости $\tilde{v}_i^{(\alpha)}$ в каждом узле и по одному значению давления $\tilde{p}^{(\alpha)}$ в каждой вершине тетраэдра. В каждом КЭ используются аппроксимации квадратичных функций по скоростям и линейных по давлению.

В каждом КЭ выражения интерполяционных функций $\tilde{v}_i^{(\alpha)}$ и $\tilde{p}^{(\alpha)}$, соответственно, имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} N_v \end{bmatrix}_{3 \times 30} \begin{bmatrix} \tilde{V}^{(\alpha)} \end{bmatrix}_{30 \times 1}, \quad \tilde{p}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} N_p \end{bmatrix}_{1 \times 4} \begin{bmatrix} \tilde{P}^{(\alpha)} \end{bmatrix}_{4 \times 1}, \quad (2.28)$$

где $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} \end{bmatrix} = (\tilde{v}_1^{(\alpha)}, \tilde{v}_2^{(\alpha)}, \tilde{v}_3^{(\alpha)})^T$ – координатный столбец скоростей на данном КЭ; $\begin{bmatrix} \tilde{V}^{(\alpha)} \end{bmatrix}$ – координатный столбец скоростей в узлах КЭ; $\begin{bmatrix} \tilde{P}^{(\alpha)} \end{bmatrix}$ – координатный столбец давлений $\tilde{p}^{(\alpha)}$ в вершинах КЭ. Матрицы функций формы $\begin{bmatrix} N_v \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} N_p \end{bmatrix}$ имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} N_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_{10} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_{10} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_{10} \end{bmatrix}, \quad (2.29a)$$

$$\begin{bmatrix} N_p \end{bmatrix} = [L_1 \quad L_1 \quad L_1 \quad L_1], \quad (2.29b)$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1 - 1)L_1, & N_2 &= (2L_2 - 1)L_2, & N_3 &= (2L_3 - 1)L_3, & N_4 &= (2L_4 - 1)L_4, & N_5 &= 4L_1L_2, \\ N_6 &= 4L_1L_3, & N_7 &= 4L_1L_4, & N_8 &= 4L_2L_3, & N_9 &= 4L_2L_4, & N_{10} &= 4L_3L_4. \end{aligned}$$

В последней формуле L_i , $i = \overline{1,4}$ – L -координаты.

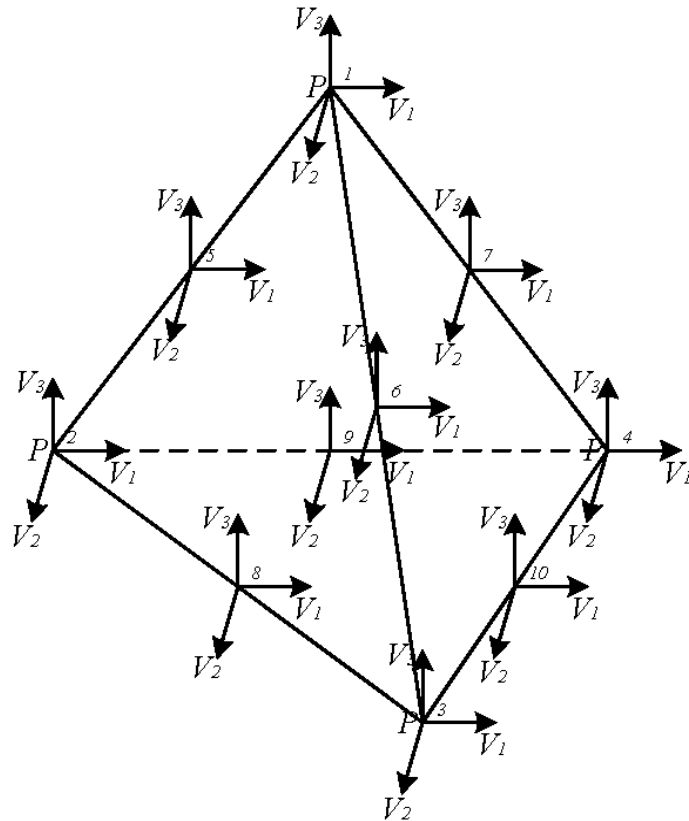


Рисунок 2.1. – Десяти узловой тетраэдральный КЭ с 34 степенями свободы

На основе выражения (1.65) введем координатный столбец тензора скоростей деформаций:

$$\left[\tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)} \right]_{1 \times 6}^T = \left[\tilde{D}_{11}^{(\alpha)} \quad \tilde{D}_{22}^{(\alpha)} \quad \tilde{D}_{33}^{(\alpha)} \quad \tilde{D}_{12}^{(\alpha)} \quad \tilde{D}_{23}^{(\alpha)} \quad \tilde{D}_{13}^{(\alpha)} \right]$$

Следовательно, с использованием выражений (2.28) и (2.29) матричная форма столбец тензора скоростей деформаций \mathbf{D} может быть выражена как:

$$\left[\tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)} \right]_{6 \times 1} = \frac{1}{2} \mathbf{I}_d \mathbf{S} \left[\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)} \right]_{3 \times 1} = \frac{1}{2} \mathbf{I}_d \mathbf{S} \left[\mathbf{N}_v \right]_{3 \times 30} \left[\tilde{\mathbf{V}}^{(\alpha)} \right]_{30 \times 1}, \quad (2.30)$$

где $\mathbf{I}_d = \text{diag}(2,2,2,1,1,1)$ и матричный оператор дифференцирования \mathbf{S} записывается в виде:

$$\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_1} & \frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial \xi_2} & \frac{\partial}{\partial \xi_1} \end{bmatrix}.$$

Вариации компонент вектора скоростей $[\delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}]_{3 \times 1}$ и тензора скоростей деформаций $\nabla_{\xi}^s \otimes \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}$, а также давления $\delta \tilde{p}^{(\alpha)}$ имеют вид:

$$[\delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}]_{3 \times 1} = [N_v]_{3 \times 30} [\delta \tilde{V}^{(\alpha)}]_{30 \times 1}, \quad (2.31a)$$

$$[\delta \tilde{p}^{(\alpha)}]_{1 \times 1} = [N_p]_{1 \times 4} [\delta \tilde{P}^{(\alpha)}]_{4 \times 1}, \quad (2.31b)$$

$$[\nabla_{\xi}^s \otimes \delta \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}]_{6 \times 1} = \frac{1}{2} [I_d]_{6 \times 6} [S]_{6 \times 3} [N_v]_{3 \times 30} [\delta \tilde{V}^{(\alpha)}]_{30 \times 1}. \quad (2.31b)$$

Введем координатный столбец неньютоновских вязкостей:

$$[\tilde{\mu}^{(\alpha)}]_{1 \times 10} = [N_{\mu}]_{1 \times 10} [\tilde{R}^{(\alpha)}]_{10 \times 1}, \quad (2.32)$$

где $[\tilde{R}^{(\alpha)}]$ – координатный столбец вязкостей в узлах КЭ; и матрицы функций формы $[N_{\mu}]_{1 \times 10}$:

$$[N_{\mu}]_{1 \times 10} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad \dots \quad N_{10}].$$

Введем координатный столбец напряжений неньютоновских вязкостей:

$$[\tilde{\sigma}^{(\alpha)}]_{1 \times 6}^T = [\tilde{\sigma}_{11}^{(\alpha)} \quad \tilde{\sigma}_{22}^{(\alpha)} \quad \tilde{\sigma}_{33}^{(\alpha)} \quad \tilde{\sigma}_{12}^{(\alpha)} \quad \tilde{\sigma}_{23}^{(\alpha)} \quad \tilde{\sigma}_{13}^{(\alpha)}]. \quad (2.33)$$

С учетом выражений (2.30), (2.32) и (2.33), получим

$$[\tilde{\sigma}^{(\alpha)}]_{1 \times 6}^T = 2 [N_{\mu}]_{1 \times 10} [\tilde{R}^{(\alpha)}]_{10 \times 1} [\tilde{D}^{(\alpha)}]_{1 \times 6}^T. \quad (2.34)$$

Согласно координатному столбцу (2.33) напряжений неньютоновских вязкостей, введем координатный столбец напряжений Коши:

$$[\tilde{T}^{(\alpha)}]_{1 \times 6}^T = [\tilde{T}_{11}^{(\alpha)} \quad \tilde{T}_{22}^{(\alpha)} \quad \tilde{T}_{33}^{(\alpha)} \quad \tilde{T}_{12}^{(\alpha)} \quad \tilde{T}_{23}^{(\alpha)} \quad \tilde{T}_{13}^{(\alpha)}]. \quad (2.35)$$

Тогда с учетом выражений (2.9а), (2.28), (2.34) и (2.35), координатный столбец напряжений Коши описывается

$$\begin{aligned} [\tilde{T}^{(\alpha)}]_{6 \times 1} &= -[I_0]_{6 \times 1} [N_p]_{1 \times 4} [\tilde{P}^{(\alpha)}]_{4 \times 1} + [\tilde{\sigma}^{(\alpha)}]_{6 \times 1} \\ &= -[I_0]_{6 \times 1} [N_p]_{1 \times 4} [\tilde{P}^{(\alpha)}]_{4 \times 1} + 2 \left([N_{\mu}]_{1 \times 10} [\tilde{R}^{(\alpha)}]_{10 \times 1} \right) [\tilde{D}^{(\alpha)}]_{6 \times 1}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где $[I_0]^T = (1,1,1,0,0,0)$.

Наконец, введем координатный столбец $\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha)} = (\tilde{f}_1^{(\alpha)}, \tilde{f}_2^{(\alpha)}, \tilde{f}_3^{(\alpha)})^T$ “входных данных” на поверхности тела. Поэтому,

$$\tilde{f}_i^{(\alpha)} = \tilde{p}_{,i}^{(\alpha)}.$$

Затем, выражения (2.29), (2.31) и (2.36) подставляются в систему (2.23) и производится группировка слагаемых с вариациями $[\delta\tilde{P}^{(\alpha)}]$ и $[\delta\tilde{V}^{(\alpha)}]$. Для каждого отдельного КЭ получается глобальная система алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$[G]_{30 \times 4} [\tilde{P}^{(\alpha)}]_{4 \times 1} - [K]_{30 \times 30} [\tilde{V}^{(\alpha)}]_{30 \times 1} = [\tilde{f}^{(\alpha)}]_{30 \times 1}, \quad (2.37a)$$

$$[G]^T_{4 \times 30} [\tilde{V}^{(\alpha)}]_{30 \times 1} = 0, \quad (2.37b)$$

где введены следующие локальные матрицы и векторы правой части:

$$[K]_{30 \times 30} = \int_{V^{(e)}} \left(\frac{1}{2} [I_d]_{6 \times 6} [S]_{6 \times 3} [N_v]_{3 \times 30} \right)^T \left(2 [N_\mu]_{1 \times 10} [\tilde{R}^{(\alpha)}]_{10 \times 1} \right) \left(\frac{1}{2} [I_d]_{6 \times 6} [S]_{6 \times 3} [N_v]_{3 \times 30} \right) dV,$$

$$[G]_{30 \times 4} = \int_{V^{(e)}} \left(\frac{1}{2} [I_d]_{6 \times 6} [S]_{6 \times 3} [N_v]_{3 \times 30} \right)^T \left([N_p]_{6 \times 4} \right) dV,$$

$$[\tilde{f}^{(\alpha)}]_{30 \times 1} = \int_{V^{(e)}} \left([N_v]_{3 \times 30} \right)^T \left([\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha)}]_{3 \times 1} \right) dV.$$

Стоит отметить, что матрица $[K]_{30 \times 30}$ содержит значения $[\tilde{R}^{(\alpha)}]_{10 \times 1}$ неньютоновских вязкостей, поэтому глобальная система алгебраических уравнений является нелинейной.

2.2. Метод вычисления неньютоновской вязкости

2.2.1. Метод расчета неньютоновской вязкости

Согласно неньютоновской вязкой модели Карро (1.14), неньютоновская вязкость зависит от инварианта $II(\mathbf{D})$ тензора скорости деформации (1.12), и матричная форма столбец тензора скоростей деформаций $[\tilde{D}^{(\alpha)}]_{6 \times 1}$ подставляется в выражение (1.12) для получения матричной формы столбец функции тензора скоростей деформаций $[\tilde{Y}^{(\alpha)}]_{10 \times 1}$ в каждом узле КЭ:

$$\tilde{Y}_i^{(\alpha)} = \left(\frac{1}{2} [I_d]_{6 \times 6} [S]_{6 \times 3} [N_v]_{3 \times 30} [\tilde{V}^{(\alpha)i}]_{30 \times 1} \right)^T \left(\frac{1}{2} [I_d]_{6 \times 6} [S]_{6 \times 3} [N_v]_{3 \times 30} [\tilde{V}^{(\alpha)i}]_{30 \times 1} \right), \quad (2.38)$$

где $[\tilde{Y}^{(\alpha)}]_{10 \times 1}$ – координатный столбец функции тензора скоростей деформаций в узлах КЭ; $\tilde{Y}_i^{(\alpha)}$ – i -ый компонент $[\tilde{Y}^{(\alpha)}]_{10 \times 1}$; $[\tilde{V}^{(\alpha)i}]_{30 \times 1}$ – координатный столбец скоростей в i -ом узле КЭ, т.е.

$$[\tilde{V}^{(\alpha)i}]_{1 \times 30}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \tilde{V}_1^{(\alpha)i} \quad \tilde{V}_2^{(\alpha)i} \quad \tilde{V}_3^{(\alpha)i} \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

Поставляя выражение (2.38) в модель (1.14) получаем:

$$[R^{(\alpha)}]_{10 \times 1}^T = s + (1-s) \left(1 + Cu_0^2 [\tilde{Y}^{(\alpha)}]_{10 \times 1}^T \right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (2.39)$$

Однако при расчете вязкости в узле часто случается, что один узел совместно используется множеством КЭ. Эта ситуация заставляет вычислять разные значения вязкости для разных КЭ в одном и том же узле. Чтобы описать процесс вычисления неньютоновской вязкости, рассмотрим двумерную конечно-элементную сетку. При этом, отметим, что подобный метод может быть обобщён на трехмерную конечно-элементную сетку. Двумерная частичная конечно-элементная сетка показана на рисунке 2.2.

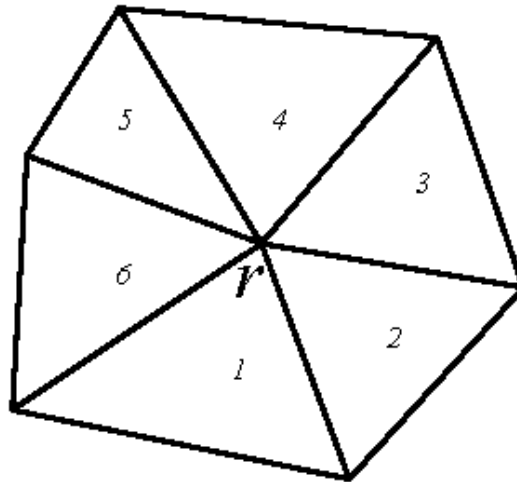


Рисунок 2.2. – Общий узел из нескольких элементов

Пусть количество КЭ, разделяющих общий узел, будет e (на рисунке 2.2 $e = 6$), какие КЭ пронумерованы $1, 2, \dots, e$, соответственно. На основе определяющего соотношения (1.14) неньютоновской вязкой модели Карро рассчитывается вязкость всех узлов в каждом КЭ. Затем вязкость общего узла усредняется:

$$r^{(\alpha)} = \frac{r_1^{(\alpha)} + r_2^{(\alpha)} + \dots + r_e^{(\alpha)}}{e}, \quad (2.40)$$

где $r_i^{(\alpha)}$ – вязкость общего узла в i -ом КЭ, $r^{(\alpha)}$ – средняя вязкость общего узла.

Либо используется взвешенное среднее:

$$r^{(\alpha)} = \frac{r_1^{(\alpha)}s_1 + r_2^{(\alpha)}s_2 + \dots + r_e^{(\alpha)}s_e}{s_1 + s_2 + \dots + s_e}, \quad (2.41)$$

где $r_i^{(\alpha)}$ – вязкость общего узла в i -ом КЭ, s_i – площадь i -го КЭ, $r^{(\alpha)}$ – взвешенная средняя вязкость общего узла.

Аналогичным образом можно рассчитать неньютоновскую вязкость в трехмерной конечно-элементной сетке. В диссертационной работе используется неньютоновская вязкость, полученная методом средневзвешенного значения. Формула для расчета неньютоновской вязкости в трехмерном пространстве с использованием метода взвешенного среднего такова:

$$r^{(\alpha)} = \frac{r_1^{(\alpha)}b_1 + r_2^{(\alpha)}b_2 + \dots + r_e^{(\alpha)}b_e}{b_1 + b_2 + \dots + b_e}, \quad (2.42)$$

где $r_i^{(\alpha)}$ – вязкость общего узла в i -ом трехмерном КЭ, b_i – объем i -го трехмерного КЭ, $r^{(\alpha)}$ – взвешенная средняя вязкость общего узла.

На основании таблицы $\left[R_{10 \times 1}^{(\alpha)} \right]$ вязкости выражения (2.39) в сочетании с методом средневзвешенного значения получаем таблицу $\left[\tilde{R}_{10 \times 1}^{(\alpha)} \right]$ вязкости, используемую в выражении (2.32).

2.2.2. Итерационный алгоритм расчета нелинейной вязкости

Поскольку неньютоновская вязкость Карро включена в систему локальной задачи (1.58), система алгебраических уравнений (2.37), которая дискретизируется с использованием МКЭ, все еще является нелинейной, поэтому многие эффективные и надежные методы расчета СЛАУ [1, 4, 14] не могут быть непосредственно использованы для решения системы нелинейных алгебраических уравнений (2.37). Хотя есть некоторые алгоритмы [1, 38], которые могут решать нелинейные системы алгебраических уравнений, вычислительная эффективность этих алгоритмов и их применимость к большим алгебраическим системам намного ниже, чем у систем

линейных алгебраических уравнений [4, 14] (СЛАУ). Поэтому, чтобы решить эту проблему, нам нужно применить линеаризованный итерационный метод, который был использован для решения упругопластической задачи в механике деформируемого твердого тела [26, 29]. Согласно этому методу определяющие соотношения в системе локальной задачи (1.59) для неньютоновских вязкостей (2.9б) линеаризуются следующим способом:

$$\tilde{\sigma}^{(\alpha)\{m\}} = 2\tilde{\mu}^{(\alpha)\{m-1\}}\tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)\{m\}} = 2\left[s + (1-s)\left(1 + Cu^{02}\tilde{Y}^{(\alpha)\{m-1\}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]\tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)\{m\}}, \quad (2.43)$$

где $\tilde{Y}^{(\alpha)\{m-1\}} = 2\tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)\{m-1\}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)\{m-1\}}$, $\tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)\{m\}} = \frac{1}{2}\left(\nabla_{\xi} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)\{m\}} + \nabla_{\xi} \otimes \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)\{m\}T}\right)$. $\tilde{\sigma}^{(\alpha)\{m\}}$ и $\tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)\{m\}}$ – значения тензора неньютоновско-вязких напряжений $\tilde{\sigma}^{(\alpha)}$ и тензора скорости деформации $\tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)}$ на m -м шаге итерационного цикла, соответственно. А $\tilde{\mu}^{(\alpha)\{m\}}$ – неньютоновская вязкость на m -м шаге итерации. Обозначим также $\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)\{m\}}$ и $\tilde{p}^{(\alpha)\{m\}}$ – значения вектора скорости $\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)}$ и давления $\tilde{p}^{(\alpha)}$ на m -м шаге итерационного цикла, соответственно. Тогда на m -м шаге итерации вместо локальной задачи (1.59) получаем следующую линеаризованную задачу:

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)\{m\}} &= 0 \\ -\nabla_{\xi} \tilde{p}^{(\alpha)\{m\}} + \frac{1}{Eu^0 Re^0} \nabla_{\xi} \cdot \tilde{\sigma}^{(\alpha)\{m\}} &= p_{,\alpha}^{(0)} \\ \tilde{\sigma}^{(\alpha)\{m\}} &= 2\tilde{\mu}^{(\alpha)\{m-1\}}\tilde{\mathbf{D}}^{(\alpha)\{m\}} \\ \tilde{\mu}^{(\alpha)\{m-1\}} &= s + (1-s)\left(1 + Cu^{02}\tilde{Y}^{(\alpha)\{m-1\}}\right)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Осуществляется проверка сходимости на m -м шаге итерации, если

$$\begin{cases} \left| \frac{\left(\tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)\{m+1\}} - \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)\{m\}}\right) / \tilde{\mathbf{v}}^{(\alpha)\{m\}}}{\infty} \right| \leq \varepsilon \\ \left| \frac{\left(\tilde{p}^{(\alpha)\{m+1\}} - \tilde{p}^{(\alpha)\{m\}}\right) / \tilde{p}^{(\alpha)\{m\}}}{\infty} \right| \leq \varepsilon \\ \left| \frac{\left(\tilde{\mu}^{(\alpha)\{m+1\}} - \tilde{\mu}^{(\alpha)\{m\}}\right) / \tilde{\mu}^{(\alpha)\{m\}}}{\infty} \right| \leq \varepsilon \end{cases}$$

где $\varepsilon \leq 10^{-5}$ является достаточно малым числом, затем итерационный процесс завершается.

В соответствии с линеаризованным итерационным алгоритмом (2.44), система алгебраических уравнений, полученная МКЭ, может быть переписана в следующую форму:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G \end{bmatrix}_{30 \times 4} \begin{bmatrix} \tilde{P}^{(\alpha)\{m\}} \end{bmatrix}_{4 \times 1} - \begin{bmatrix} K^{(\alpha)\{m-1\}} \end{bmatrix}_{30 \times 30} \begin{bmatrix} \tilde{V}^{(\alpha)\{m\}} \end{bmatrix}_{30 \times 1} &= \begin{bmatrix} \tilde{f}^{(\alpha)} \end{bmatrix}_{30 \times 1} \\ \begin{bmatrix} G \end{bmatrix}_{4 \times 30}^T \begin{bmatrix} \tilde{V}^{(\alpha)\{m\}} \end{bmatrix}_{30 \times 1} &= 0 \end{aligned}, \quad (2.45)$$

где матрица:

$$\begin{bmatrix} K^{(\alpha)\{m-1\}} \end{bmatrix}_{30 \times 30} = \int_{V^{(e)}} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_d \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} S \end{bmatrix}_{6 \times 3} \begin{bmatrix} N_v \end{bmatrix}_{3 \times 30} \right)^T \left(2 \begin{bmatrix} N_\mu \end{bmatrix}_{1 \times 10} \begin{bmatrix} \tilde{R}^{(\alpha)\{m-1\}} \end{bmatrix}_{10 \times 1} \right) \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_d \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} S \end{bmatrix}_{6 \times 3} \begin{bmatrix} N_v \end{bmatrix}_{3 \times 30} \right) dV.$$

2.3. Численный метод определения характеристик реологии жидкости и пористости пористой среды

Решение локальной задачи (1.58) фильтрации на 1/8 ЯП позволяет произвести расчет характеристик пористой системы и реологических свойств неньютоновской жидкости, основываясь на геометрической форме пор и модели неньютоновской вязкости. Действительно, мы применим МКЭ для вычисления коэффициентов эффективной проницаемости, входящих в нелинейный закон (1.87), а также пористости пористой среды и эффективной вязкости неньютоновской вязкой жидкости. Учитывая симметричность геометрии микроструктуры, рассматривается только 1/8 ЯП, а пористость пористой среды рассчитывается как:

$$\phi = \int_{V_\xi} dV = 8 \int_{\tilde{V}_\xi} dV = 8 \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} dV, \quad (2.46)$$

где E – количество КЭ.

Учитывая симметричность функций $\tilde{v}_\beta^{(\alpha)}$ в случае $\alpha = \beta$, коэффициенты тензора \mathbf{K} эффективной проницаемости имеют следующую форму:

$$K_i^j = \frac{1}{|V_\xi|} \int_{V_\xi} v_i^{(j)} dV = \frac{8}{|V_\xi|} \int_{\tilde{V}_\xi} \tilde{v}_i^{(j)} dV = 8 \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} \tilde{v}_i^{(j)} dV. \quad (2.47)$$

Введем матрицу функций формы:

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}_v \end{bmatrix}_{1 \times 10} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad \dots \quad N_{10}],$$

где N_i , $i = \overline{1,10}$ определены в выражении (2.29). Тогда

$$\tilde{v}_i^{(j)} = \left[\tilde{N}_v \right] \left[\tilde{V}_i^{(j)} \right]. \quad (2.48)$$

Таким образом, подставляя (2.48) в формулу (2.47), приходим к следующим формулам для расчета коэффициентов тензора \mathbf{K} эффективной проницаемости:

$$K_i^j = \frac{8}{\varphi} \sum_{e=1}^E \left(\int_{V^{(e)}} \left[\tilde{N}_v \right] \det[J] dL_1 dL_2 dL_3 \right) \left[\tilde{V}_i^{(j)} \right]^{(e)}, \quad (2.49)$$

где $|\det[J]|$ – модуль определителя матрицы Якоби (якобиан), L_i , $i = \overline{1,4}$ – L -координаты.

Чтобы изучить реологические свойства жидкостей, введем здесь понятие эффективной вязкости:

$$\langle \mu^{(\alpha)} \rangle = \frac{1}{\varphi} \int_{\Omega} \mu^{(\alpha)} dV = \frac{8}{\varphi} \int_{\Omega} \left(\sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\mu}^{(\alpha)} \right) dV \quad (2.50)$$

Таким образом, с помощью (2.50) приходим к следующим формулам для расчета эффективной вязкости:

$$\langle \mu^{(\alpha)} \rangle = \frac{8}{\varphi} \sum_{e=1}^E \left(\int_{V^{(e)}} \left[N_{\mu} \right] \det[J] dL_1 dL_2 dL_3 \right) \left[\tilde{R}^{(\alpha)} \right] \quad (2.51)$$

где $|\det[J]|$ – модуль якобиана, L_i , $i = \overline{1,4}$ – L -координаты.

2.4 Выводы по второй главе

Во второй главе диссертации предлагается вариационная постановка локальных задач процессов фильтрации неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро.

Линеаризованное итерационное конечно-элементное алгоритм разработан для решения нелинейных локальных вариационных задач в общей трехмерной постановке, вызванной моделью неньютоновской вязкости. Разработан алгоритм расчета неньютоновской вязкости в рамках модели Карро в узле конечно-элементной сетки. Также разработаны численные алгоритмы расчетов пористости пористых сред, эффективной неньютоновской вязкости и компонентов тензора проницаемости.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДВИЖЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

3.1. Разработка программного комплекса для моделирования процессов фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в пористых средах

3.1.1. Блок-схема программного комплекса и принципы работы с ним

Упрощенная блок-схема ПК, разработанного для многомасштабного моделирования процессов фильтрации неньютоновской жидкости в пористой периодической системе, показана на рисунке 3.1. Для разработки использовались среда MS Visual Studio 2017, Eigen 3.3.7, а также Matlab R2018a. Программирование велось на языке C++ [43] (на основе стандарта C++ 14), при помощи инструмента Eigen 3.3.7 [14], и Matlab R2018a. Смешанное программирование может использовать эффективность языка C++ и простую визуализацию Matlab, то есть построение и вычисление глобальной системы алгебраических уравнений МКЭ выполняется средствами языка C++, а затем результаты вычислений визуализируются с использованием Matlab.

Рассмотрим основные компоненты структуры программы.

1. Управляющий модуль – «Ввод исходных данных для моделирования» отвечает за подготовку входных данных задач, первоначальную инициализацию (выбор типа КЭ, конечно-элементной сетки, метода решения СЛАУ и параметров модели неньютоновской вязкости) [4], управление итерационным процессом, загрузку результатов расчетов.

2. Модуль КЭ – «Сетки и типы конечных элементов (КЭ)» отвечает за построение локальной матрицы и локального вектора функции интерполяции для данного типа КЭ, а также за численное интегрирование и векторизацию данных конечно-элементной сетки. В диссертационной работе используется численный метод интегрирования Гаусса [38, 48].

3. Модуль глобальной матрицы – «Конечно-элементная матричная система» отвечает за построение глобальной матрицы, включая загрузку граничных условий. В работе используется метод множителей Лагранжа [103, 117].

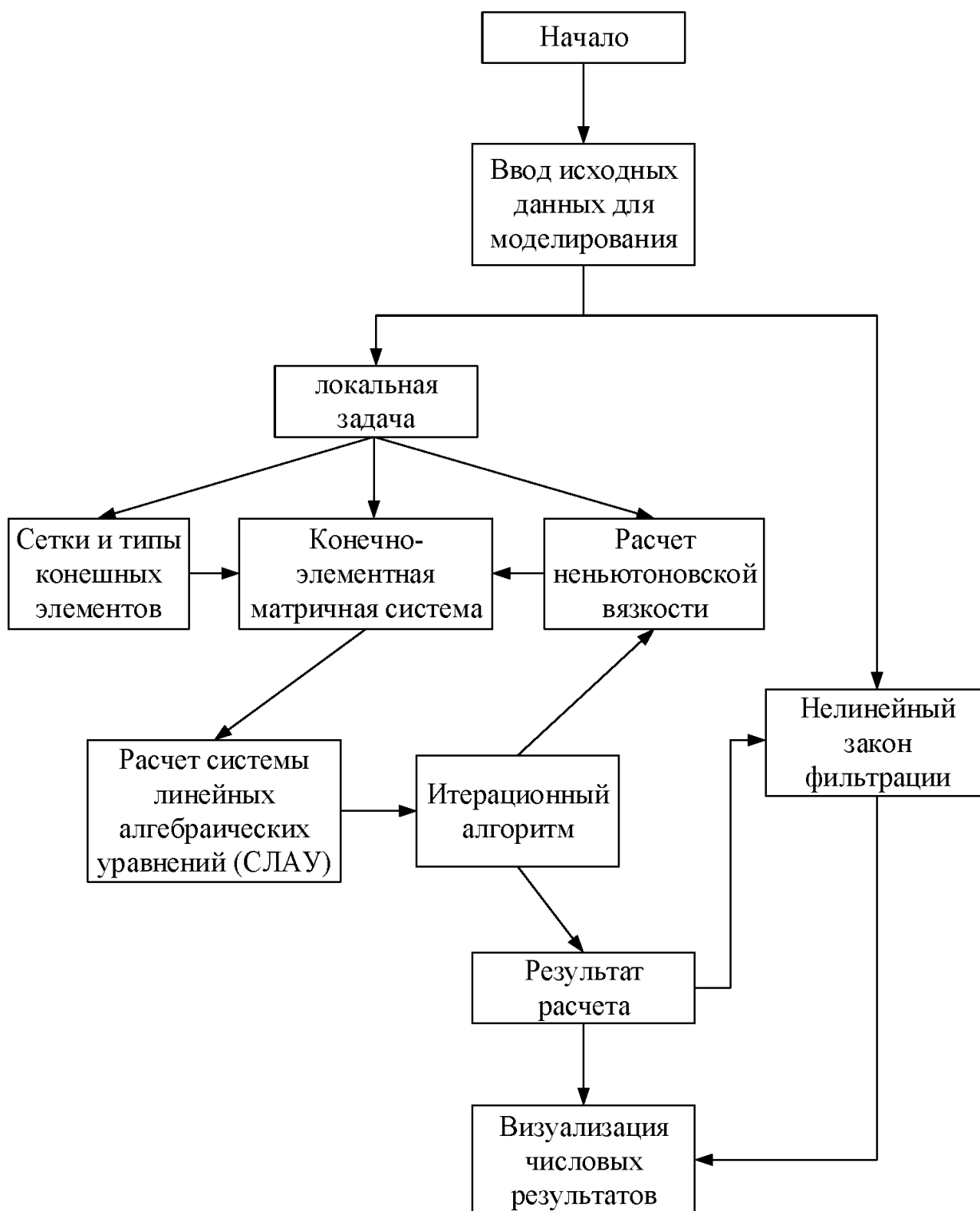


Рисунок 3.1. – Блок-схема ПК для моделирования локальных процессов и нелинейного закона фильтрации

4. Модуль неньютоновской вязкости – «Расчет неньютоновской вязкости» отвечает за расчет значения неньютоновской вязкости на узлах каждого КЭ.

5. Модуль решателей СЛАУ – «Расчет систем линейных алгебраических уравнений СЛАУ» отвечает за решение глобальной СЛАУ на основе метода

сопряженных градиентов или стабилизированного метода бисопряженных градиентов [4] с помощью инструмента Eigen 3.3.7.

6. Модуль итерационного алгоритма – «Итерационный алгоритм» отвечает за проверку сходимости m -го шага итерации итерационного алгоритма.

7. Модуль глобальной задачи – «Нелинейный закон фильтрации» отвечает за расчет глобальной задачи процесса фильтрации согласно выражениям (2.46), (2.49) и (2.51), включая пористость пористых сред, проницаемость и эффективную вязкость неньютоновской жидкости.

8. Модуль визуализации – «Визуализация числовых результатов» отвечает за визуализацию результатов, включая компоненты скорости, давление и неньютоновскую вязкость локальных задач, также компоненты тензора проницаемости фильтрации и эффективную вязкость.

3.1.2. Проверка адекватности математической модели на моделирование ньютоновской жидкости

В данной работе в качестве примера численного моделирования используется бензол (C_6H_6). Бензол является токсичным органическим соединением, широко применяется в промышленности, является исходным сырьем для производства лекарств, различных пластмасс, синтетической резины, красителей. Известно, что при комнатной температуре динамическая вязкость бензола составляет 0.0652 Па·с, а плотность составляет 0.8786 г/см³. В соответствии с физическими свойствами бензола, мы можем получить соответствующие параметры, необходимые для расчета, которые приведены в таблице 3.1:

Таблице 3.1. – Значения основных параметров расчета

Параметр	Значение	Параметр	Значение
μ_0 (Па·с)	6.52×10^{-4}	v_0 (м/с)	0.1
Cu^0	1	x_0 (м)	1
p_0 (Па)	10^5	l_0 (м)	10^{-4}
κ	10^{-4}	$1/(Eu^0 Re^0)$	0.0652

3.1.2.1. Проверка закона Дарси в 3D ортогональной микроструктуре

Далее рассмотрим процесс фильтрации ньютоновской жидкости в 3D ортогональной микроструктуре, приведенной на рисунке 1.1. Очевидно, что данная структура является изотропной структурой. Параметры конечно-элементной дискретной сетки ПКС представлены в таблице 3.2:

Таблица 3.2. – Параметры численного расчета 3D ортогональной структуры

Параметр	Значение
Геометрические: Радиус волокна	0.2
Параметры конечно-элементной сетки	
Количество вершинных узлов / общее количество	854 / 5614
Количество КЭ	3400
Количество поверхностных КЭ	1014

Исходя из предыдущих теоретических результатов, известно, что изменения значения «входных данных» влияют на течение неньютоновских жидкостей в отдельной поре и на глобальный процесс фильтрации. Для ньютоновской жидкости классический закон Дарси говорит нам, что скорость фильтрации линейно зависит от градиента давления. Очевидно, что закон Дарси является частным случаем нелинейного закона фильтрации неньютоновских жидкостей (1.88), поэтому закон Дарси может быть использован для проверки подлинности вышеизложенной теории и для верификации надежности программы. В данном разделе мы рассчитываем течение ньютоновской жидкости в отдельной поре при различных значениях «входных данных» и анализируем влияния пористой ортогональной структуры и градиента давления на процесс фильтрации.

Результаты показывают, что безразмерная вязкость жидкости составляет $\langle \mu \rangle = 1.0$ и пористость 3D ортогональной микроструктуры составляет $\varphi = 0.634032$.

Таблица 3.3. – Численные результаты локальной задачи $L^{(1)}$ при разных значений «входных данных» в 3D ортогональной микроструктуре

	Параметр	Минимальное значение	Максимальное значение
--	----------	----------------------	-----------------------

$ p_{,1}^{(0)} = 0.2$	$\tilde{v}_1^{(1)}$	0	0.02872
	$\tilde{v}_2^{(1)}$	-0.01548	0
	$\tilde{v}_3^{(1)}$	0	0.01551
	$\tilde{p}^{(1)}$	-0.07057	0.06885
$ p_{,1}^{(0)} = 0.6$	$\tilde{v}_1^{(1)}$	0	0.08616
	$\tilde{v}_2^{(1)}$	-0.04644	0
	$\tilde{v}_3^{(1)}$	0	0.04654
	$\tilde{p}^{(1)}$	-0.21172	0.20655
$ p_{,1}^{(0)} = 1.0$	$\tilde{v}_1^{(1)}$	0	0.14360
	$\tilde{v}_2^{(1)}$	-0.07740	0
	$\tilde{v}_3^{(1)}$	0	0.07757
	$\tilde{p}^{(1)}$	-0.35287	0.34424

Результаты решений локальной задачи $L^{(1)}$ при разных значениях «входных данных» в отдельной поре приведены в таблице 3.3. Из результатов мы заметили, что максимальное значение $\tilde{v}_1^{(1)}$ при $|p_{,1}^{(0)}| = 0.6$ в три раза больше максимального значения $\tilde{v}_1^{(1)}$ при $|p_{,1}^{(0)}| = 0.2$, а максимальное значение $\tilde{v}_1^{(1)}$ при $|p_{,1}^{(0)}| = 1.0$ в пять раз больше максимального значения $\tilde{v}_1^{(1)}$ при $|p_{,1}^{(0)}| = 0.2$. Показано, что максимальное значение $\tilde{v}_1^{(1)}$ линейно зависит от градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$. Точно так же видно, что другие данные результатов в таблице 3.3 имеют такую же связь.

Таблица 3.4. – Сравнение результатов эффективной проницаемости $\langle v_\alpha^{(\alpha)} \rangle$

локальной задачи $L^{(\alpha)}$ при разных градиентах давления

локальная задача	$L^{(1)}$	$L^{(2)}$	$L^{(3)}$
$ p_{,\alpha}^{(0)} = 0.2$	0.01378	0.01378	0.01378
$ p_{,\alpha}^{(0)} = 0.4$	0.02756	0.02756	0.02756
$ p_{,\alpha}^{(0)} = 0.6$	0.04134	0.04134	0.04134
$ p_{,\alpha}^{(0)} = 0.8$	0.05512	0.05512	0.05512
$ p_{,\alpha}^{(0)} = 1.0$	0.06890	0.06890	0.06890

Результаты расчетов безразмерных коэффициентов эффективной проницаемости локальных задач $L^{(\alpha)}$ при различных значениях «входных данных» приведены в таблице 3.4. Отметим, что средняя скорость линейно увеличивается с

увеличением значения градиента давления, и результат полностью соответствует закону Дарси. В то же время результаты средней скорости также отражают изотропию 3D ортогональной структуры.

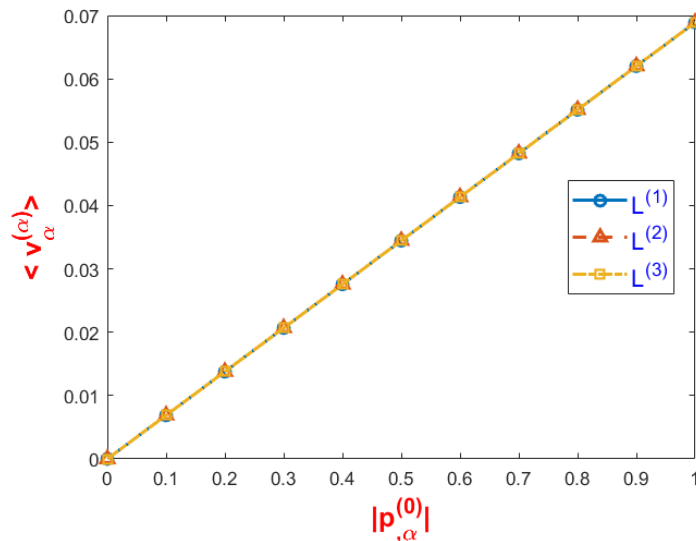


Рисунок 3.2. – Распределение средней скорости $\langle v_{,\alpha}^{(\alpha)} \rangle$ и значения градиента макро давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$ для локальной задачи $L^{(\alpha)}$

Эти результаты очень интуитивно показаны на рисунке 3.2 и линейная зависимость между переменными имеет место быть. Кривые законов фильтрации различных локальных задач совпадают, что также свидетельствует об изотропии 3D ортогональной структуры.

3.1.2.2. Проверка закона Дарси в 3D тканевой микроструктуре

В стадии рассмотрения также находится 3D тканевая микроструктура, как показано на рисунке 1.3. Очевидно, что 3D тканевая структура является анизотропной структурой. Параметры конечно-элементной дискретной сетки 3D тканевой микроструктуры приведены в таблице 3.5:

Таблица 3.5. – Параметры численного расчета 3D тканевой структуры

Параметр	Значение
Геометрические: Радиус волокна	0.12
Параметры конечно-элементной сетки	
Количество вершинных узлов / общее количество	961 / 5749

Количество КЭ	3023
Количество поверхностных КЭ	1610

Численные результаты показывают, что безразмерная вязкость – $\langle \mu \rangle = 1.0$, а пористость 3D тканевой микроструктуры – $\varphi = 0.634032$.

Результаты расчета локальных задач $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$ при разных значениях «входных данных» в отдельной поре приведены в таблицах 3.6 и 3.7, соответственно.

Таблица 3.6. – Численные результаты локальной задачи $L^{(1)}$ при разных значениях «входных данных» в 3D тканевой микроструктуре

	Параметр	Минимальное значение	Максимальное значение
$ p_{,1}^{(0)} = 0.5$	$\tilde{v}_1^{(1)}$	-0.00006	0.07619
	$\tilde{v}_2^{(1)}$	-0.01087	0.01122
	$\tilde{v}_3^{(1)}$	-0.00854	0.00854
	$\tilde{p}^{(1)}$	-0.12082	0.11319
$ p_{,1}^{(0)} = 1.0$	$\tilde{v}_1^{(1)}$	-0.00013	0.15239
	$\tilde{v}_2^{(1)}$	-0.02174	0.02244
	$\tilde{v}_3^{(1)}$	-0.01708	0.01707
	$\tilde{p}^{(1)}$	-0.24164	0.22637

Из результатов таблиц 3.6 и 3.7 следует, что максимальное значение $\tilde{v}_\alpha^{(\alpha)}$ при $|p_{,\alpha}^{(0)}| = 1.0$ в пять раз больше максимального значения $\tilde{v}_\alpha^{(\alpha)}$ при $|p_{,\alpha}^{(0)}| = 0.5$. Однако, при одинаковом значении «входных данных», максимальное значение скорости не совпадает, что указывает на то, что 3D тканевая структура является анизотропной.

Таблица 3.7. – Численные результаты локальной задачи $L^{(2)}$ при разных значениях «входных данных» в 3D тканевой микроструктуре

	Параметр	Минимальное значение	Максимальное значение
$ p_{,2}^{(0)} = 0.5$	$\tilde{v}_1^{(2)}$	-0.00970	0.00986
	$\tilde{v}_2^{(2)}$	-0.00009	0.07060
	$\tilde{v}_3^{(2)}$	-0.00991	0.00963
	$\tilde{p}^{(2)}$	-0.10820	0.11625
	$\tilde{v}_1^{(2)}$	-0.01940	0.01971

$ p_{,\alpha}^{(0)} = 1.0$	$\tilde{v}_2^{(2)}$	-0.00018	0.14121
	$\tilde{v}_3^{(2)}$	-0.01982	0.01927
	$\tilde{p}^{(2)}$	-0.21640	0.23251

Численные результаты средней скорости $\langle v_\alpha^{(\alpha)} \rangle$ локальных задач $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$ приведены в таблице 3.8, что соответствуют не только закону Дарси, но и анизотропии микроструктуры. Точнее говоря, структура является поперечно-изотропной, поскольку средняя скорость $\langle v_1^{(1)} \rangle$ локальной задачи $L^{(1)}$ равна средней скорости $\langle v_3^{(3)} \rangle$ локальной задачи $L^{(3)}$.

Таблица 3.8. – Сравнение результатов эффективной проницаемости $\langle v_\alpha^{(\alpha)} \rangle$ локальной задачи $L^{(\alpha)}$ при разных градиентах давления

локальная задача	$L^{(1)}$	$L^{(2)}$	$L^{(3)}$
$ p_{,\alpha}^{(0)} = 0.2$	0.00860	0.00659	0.00862
$ p_{,\alpha}^{(0)} = 0.4$	0.01721	0.01319	0.017243
$ p_{,\alpha}^{(0)} = 0.6$	0.02581	0.01978	0.02586
$ p_{,\alpha}^{(0)} = 0.8$	0.03441	0.02638	0.03449
$ p_{,\alpha}^{(0)} = 1.0$	0.04302	0.03297	0.04311

Эти результаты очень интуитивно показаны на рисунке 3.3 и согласуются с законом Дарси для анизотропных структур.

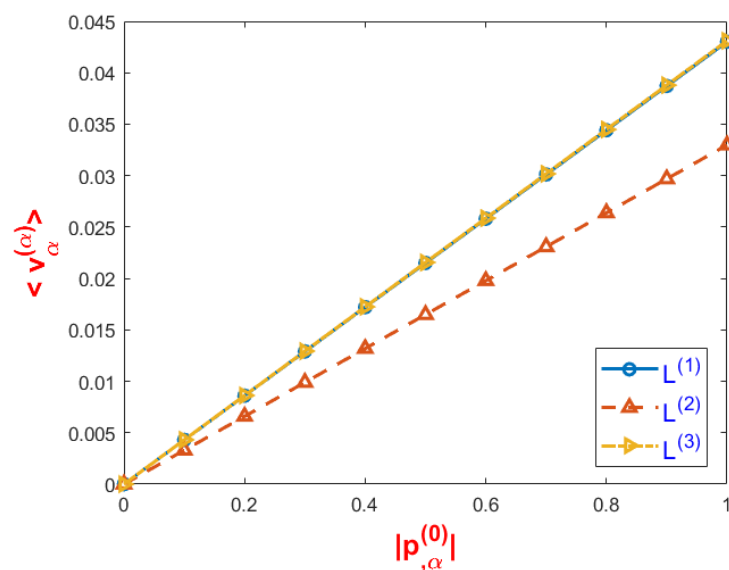


Рисунок 3.3. – Распределение средней скорости $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$ и значения градиента макро давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$ для локальной задачи $L^{(\alpha)}$

Эти численные результаты не только подтверждают обоснованность и надежность разработанного программного комплекса, но и показывают, что полученный нелинейный закон фильтрации может решить задачу фильтрации ньютоновской вязкой жидкости.

3.2. Численное моделирование локальных процессов фильтрации неньютоновских вязких жидкостей в трехмерной пористой структуре

3.2.1. Численное моделирование локальных процессов фильтрации в 3D ортогональной структуре

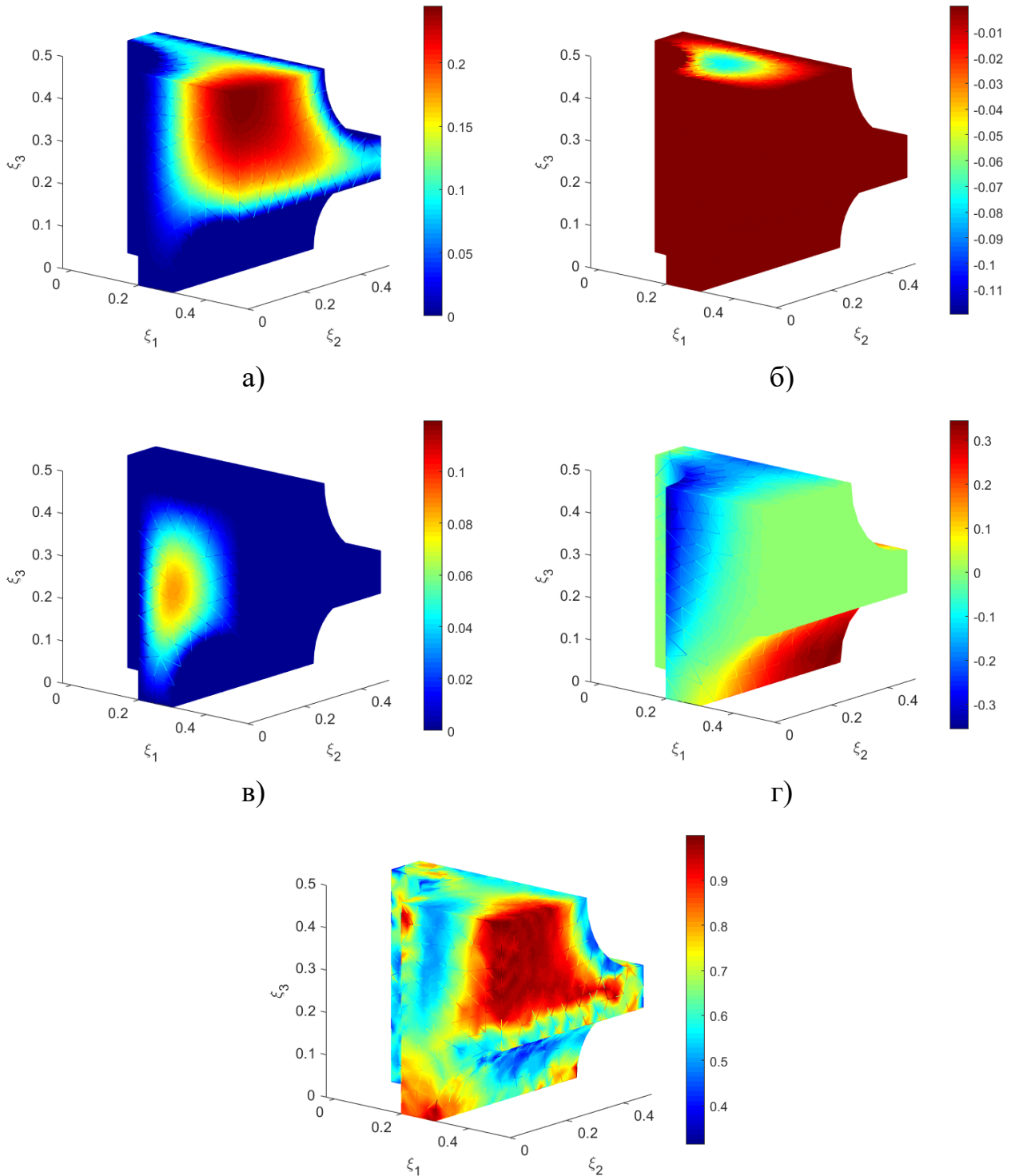
В данном разделе мы рассматриваем течение неньютоновских жидкостей в отдельной поре при $|p_{,1}^{(0)}|=1.0$. Поскольку 3D ортогональная структура является изотропной, рассматривается только локальная задача $L^{(1)}$. Мы рассматриваем две неньютоновских вязких жидкости, псевдопластичную, описываемую моделью Карро при $n = 0.25$, и дилатантную, описываемую моделью Карро при $n = 1.75$.

Таблица 3.9. – Численные результаты локальной задачи $L^{(1)}$ при $|p_{,1}^{(0)}|=1.0$ в 3D ортогональной структуре

	Параметр	Минимальное Значение	Максимальное Значение
$n = 0.25$	$\tilde{p}^{(1)}$	-0.35704	0.34498
	$\tilde{v}_1^{(1)}$	0	0.24512
	$\tilde{v}_2^{(1)}$	-0.11969	0
	$\tilde{v}_3^{(1)}$	0	0.11959
	$\tilde{\mu}^{(1)}$	0.31362	0.99986
$n = 1.75$	$\tilde{p}^{(1)}$	-0.34968	0.34716
	$\tilde{v}_1^{(1)}$	0	0.11568
	$\tilde{v}_2^{(1)}$	-0.06519	0
	$\tilde{v}_3^{(1)}$	0	0.06538
	$\tilde{\mu}^{(1)}$	1.00041	1.64460

Результаты расчета при $n = 0.25$ и $n = 1.75$ показаны в таблице 3.9. Как видно из результатов, значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ псевдопластичной

жидкости меньше единицы, а значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ дилатантной жидкости больше единицы. В то же время отметим, что абсолютные значения $|\tilde{v}_i^{(1)}|$, $i = \overline{1,3}$ скоростей псевдопластичной жидкости ($n = 0.25$) больше, чем у дилатантной жидкости ($n = 1.75$). Это показывает, что при тех же условиях псевдопластичная жидкость ($n = 0.25$) движется в отдельных порах более «интенсивно», чем дилатантная жидкость ($n = 1.75$).



д)

Рисунок 3.4. – Распределения решений локальной задачи $L^{(1)}$ при $n = 0.25$: а) компоненты скорости $\tilde{v}_1^{(1)}$; б) компоненты скорости $\tilde{v}_2^{(1)}$; в) компоненты скорости $\tilde{v}_3^{(1)}$ г) давления $\tilde{p}^{(1)}$; д) безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$;

Распределения компонентов скорости $\tilde{v}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,3}$, давления $\tilde{p}^{(1)}$ и безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ псевдопластичной жидкости ($n = 0.25$) в отдельных порах показаны на рисунке 3.4.

В соответствии с численными результатами, приведенными в таблице 3.9, четко прослеживается взаимосвязь между максимальными и минимальными значениями компонентов скорости $\tilde{v}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,3}$ в зависимости от значения градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n на рисунке 3.5 и рисунке 3.6, соответственно.

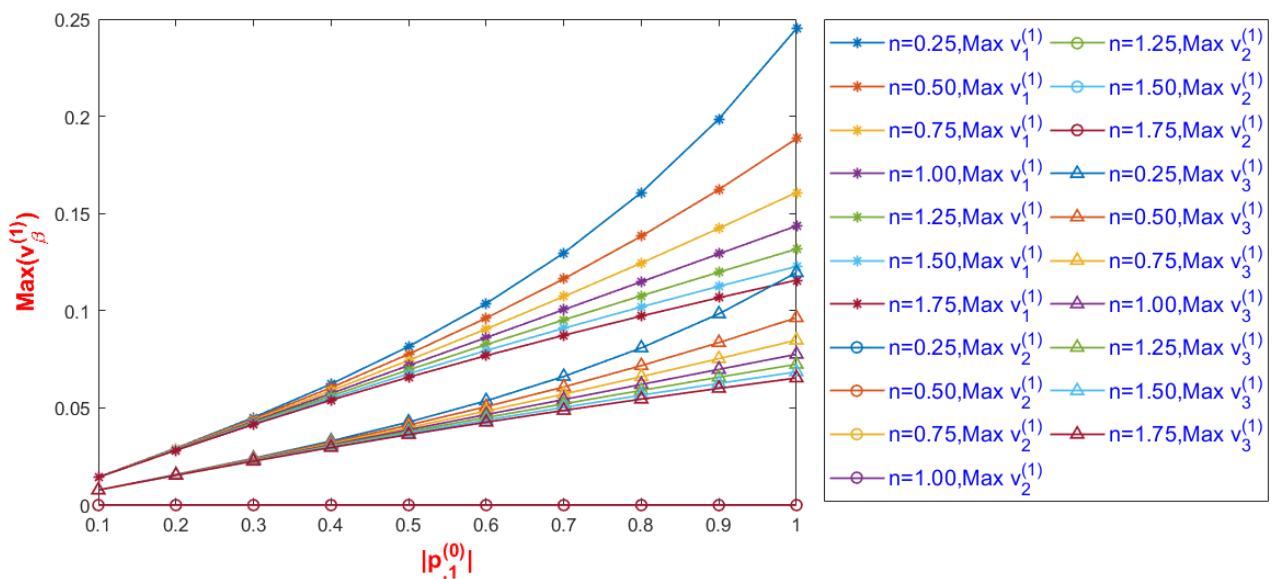


Рисунок 3.5. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(1)}$ между максимальными значениями скоростей $\tilde{v}_i^{(1)}$, $i = 2,3$ градиентами давления $|p_{,1}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n .

Из результатов, показанных на рисунке 3.5, для различных степенных индексов n при увеличении значения градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ максимальные значения $\tilde{v}_1^{(1)}$ и $\tilde{v}_3^{(1)}$ компонентов скорости также увеличиваются, но максимальное значение $\tilde{v}_2^{(1)}$ компонентов скорости всегда равно нулю. Для разных значений

градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$, когда степенные индексы n увеличиваются, максимальные значения $\tilde{v}_1^{(1)}$ и $\tilde{v}_3^{(1)}$ компонентов скорости течения уменьшаются. Из результатов, показанных на рисунке 3.6, для различных степенных индексов n при увеличении значения градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$, уменьшается минимальное значение $\tilde{v}_2^{(1)}$ компонентов скорости, но минимальные значения $\tilde{v}_1^{(1)}$ и $\tilde{v}_3^{(1)}$ компонентов скорости всегда равны нулю. Для разных значений градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$, когда степенные индексы n увеличиваются, минимальное значения $\tilde{v}_2^{(1)}$ компоненты скорости течения уменьшаются. И, как видно из результатов, показанных на рисунках 3.5 и 3.6, при увеличении значения градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$, влияние степенных индексов n на максимальные значения $\tilde{v}_1^{(1)}$ и $\tilde{v}_3^{(1)}$, и минимальное значение $\tilde{v}_2^{(1)}$ компонентов скорости в отдельной поре также постепенно увеличивается.

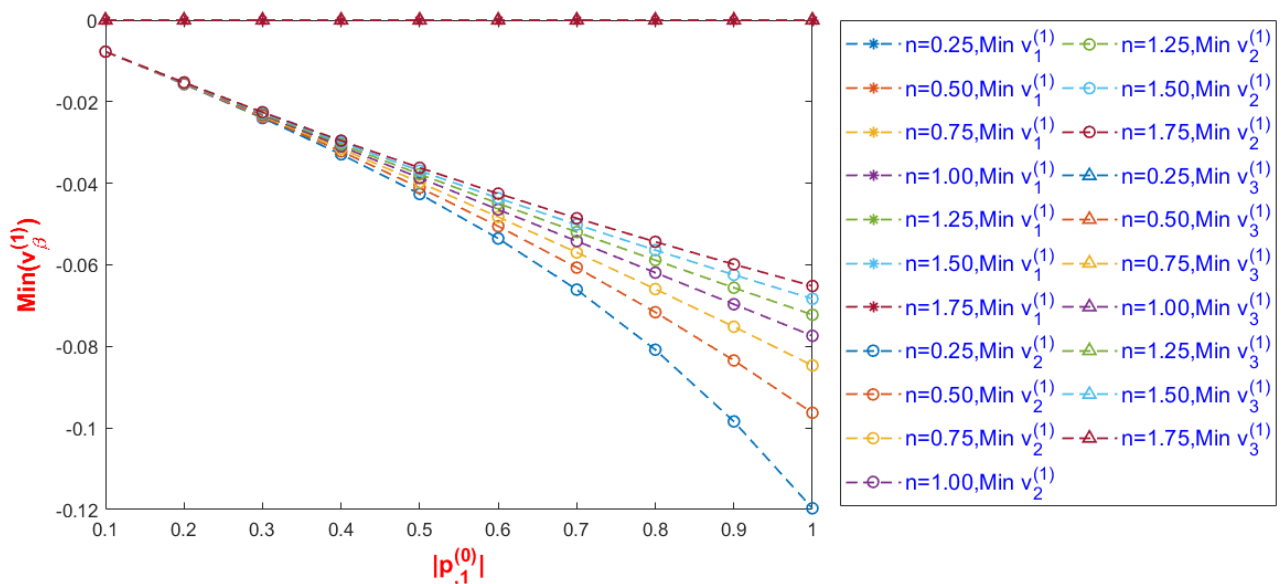


Рисунок 3.6. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(1)}$ между минимальными значениями скоростей $\tilde{v}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,3}$ градиентами давления $|p_{,1}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n .

Для различных степенных индексов n , зависимость между значениями градиентов давления $|p_{,1}^{(0)}|$, максимальными и минимальными значениями безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ локальной задачи $L^{(1)}$ показана на рисунке 3.7. Для

различных значений градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$, зависимость между максимальными и минимальными значениями безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ локальной задачи $L^{(1)}$, в зависимости от степенного индекса n показана на рисунке 3.8. Из результатов, представленных на рисунке 3.7 и рисунке 3.8, следует, что при увеличении значений градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$, максимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ дилатантной жидкости значительно увеличивается, а минимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ псевдопластичной жидкости значительно уменьшается. Вместе с этим, максимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ псевдопластичной жидкости и минимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ дилатантной жидкости очень близки к единице, и практически не зависят независимо от значения градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$.

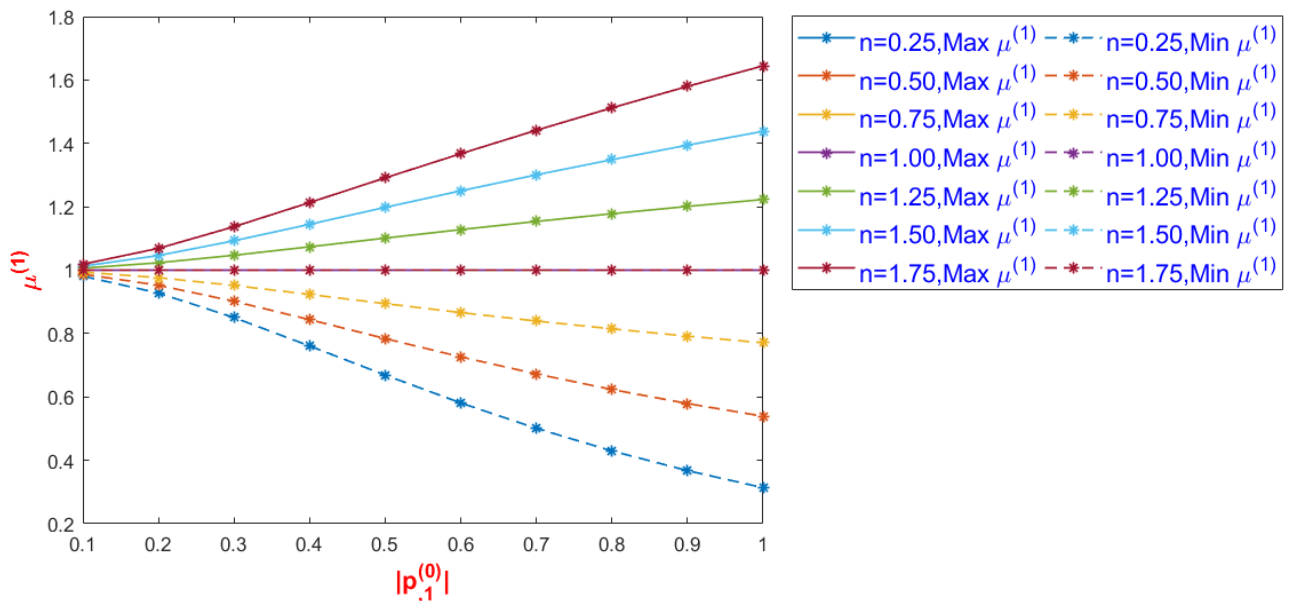


Рисунок 3.7. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(1)}$ между минимальными и максимальными значениями безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$, значениями градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n .

Влияние степенного индекса n на максимальное и минимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ весьма интересно: для псевдопластичной жидкости ($n < 1$) максимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ никогда не превышает единицы и очень близко к единице, почти не зависит от значения градиента

давления $|p_{,1}^{(0)}|$, для дилатантной жидкости ($n > 1$) минимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ всегда составляет не менее единицы и очень близко к единице, независимо от градиента давления. Однако минимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ псевдопластичной жидкости ($n < 1$) уменьшается с увеличением значений градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ и уменьшается с уменьшением степенного индекса n . Максимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ дилатантной жидкости ($n > 1$) увеличивается с увеличением значений градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ и увеличивается с увеличением степенного индекса n . Так же можно видеть, что при увеличении значений градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ влияние степенного индекса n на минимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ псевдопластичной жидкости ($n < 1$) и максимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ дилатантной жидкости ($n > 1$) увеличивается.

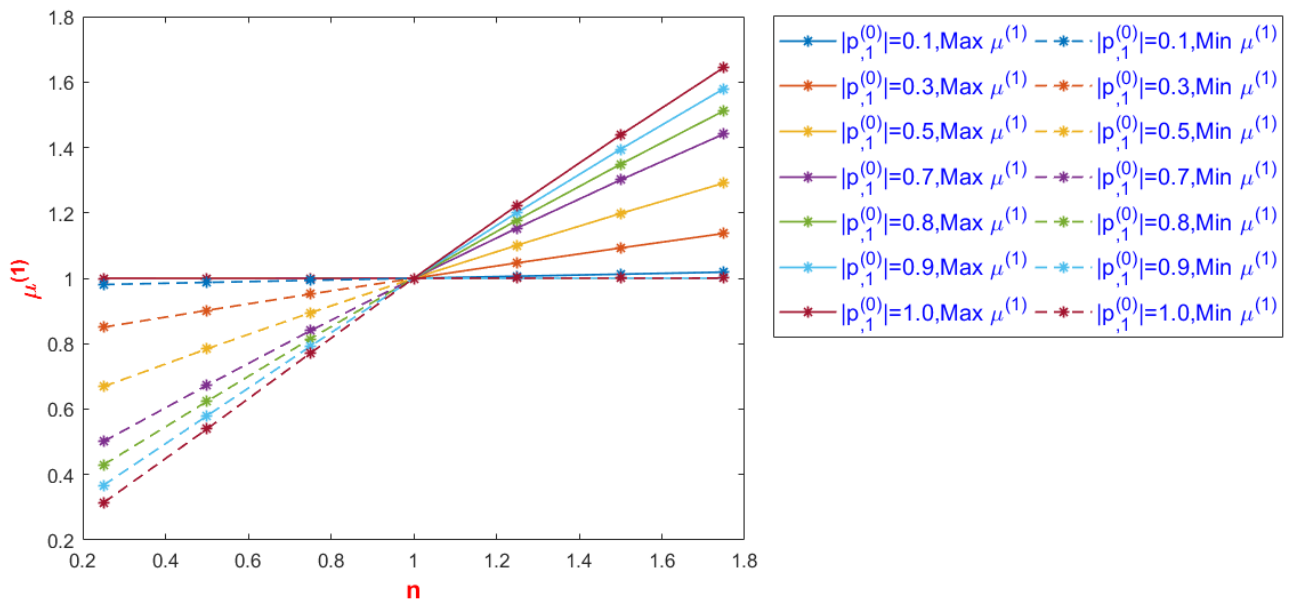


Рисунок 3.8. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(1)}$ между минимальными и максимальными значениями безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$, степенными индексами n для различных значений градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$.

Таким образом, можно сделать вывод, что с увеличением степенных индексов n течения в отдельной поре становится «медленнее», а при увеличении значения градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ течения в отдельной поре становится более

«интенсивным»; по мере увеличения значения градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ влияние степенных индексов n становится более «выраженным».

3.2.2. Численное моделирование локальных процессов фильтрации в 3D тканевой структуре

В данном разделе мы рассматриваем течение неньютоновских жидкостей в отдельной поре 3D тканевой структуры при $|p_{,\alpha}^{(0)}| = 1.0$. Отметим, что 3D тканевая структура является анизотропной, поэтому исследование процесса фильтрации неньютоновско-вязких жидкостей в 3D тканевой структуре требует рассмотрения локальных задач $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$.

3.2.2.1. Численное решение локальной задачи $L^{(1)}$

Рассмотрено распределение неньютоновских жидкостей в отдельных порах 3D тканевой структуры. Сначала рассматривается локальная задача $L^{(1)}$, и в этом случае направление градиента давления $p_{,1}^{(0)}$ находится вдоль координатной оси ξ_1 , то есть направление течения фильтрации также идёт вдоль координатной оси ξ_1 .

Таблица 3.10. – Результаты решений локальной задачи $L^{(1)}$ при $|p_{,1}^{(0)}| = 1.0$ в 3D тканевой структуре

	Параметр	Минимальное значение	Максимальное значение
$n = 0.25$	$\tilde{p}^{(1)}$	-0.24872	0.23298
	$\tilde{v}_1^{(1)}$	-0.00018	0.19531
	$\tilde{v}_2^{(1)}$	-0.02828	0.02947
	$\tilde{v}_3^{(1)}$	-0.02275	0.02267
	$\tilde{\mu}^{(1)}$	0.30337	1.0
$n = 1.75$	$\tilde{\mu}^{(1)}$	-0.23438	0.21912
	$\tilde{v}_1^{(1)}$	-0.00010	0.13235
	$\tilde{v}_2^{(1)}$	-0.01868	0.01929
	$\tilde{v}_3^{(1)}$	-0.01463	0.01465

	$\tilde{\mu}^{(1)}$	1.0	1.94095
--	---------------------	-----	---------

Рассмотрены псевдопластическая жидкость в рамках модели Карро при $n = 0.25$ и дилатантная жидкость в рамке модели Карро при $n = 1.75$. Результаты расчета при $n = 0.25$ и $n = 1.75$ показаны в таблице 3.10. Как видно из результатов, представленных в таблице 3.10, значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ псевдопластичной жидкости ($n = 0.25$) меньше единицы, а значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ дилатантной жидкости ($n = 1.75$) больше единицы. В то же время отметим, что абсолютные значения $|\tilde{v}_i^{(1)}|$, $i = \overline{1,3}$ скоростей псевдопластичной жидкости ($n = 0.25$) больше, чем у дилатантной жидкости ($n = 1.75$). Это показывает, что при тех же условиях псевдопластичная жидкость ($n = 0.25$) движется в отдельных порах более «интенсивно», чем дилатантная жидкость ($n = 1.75$).

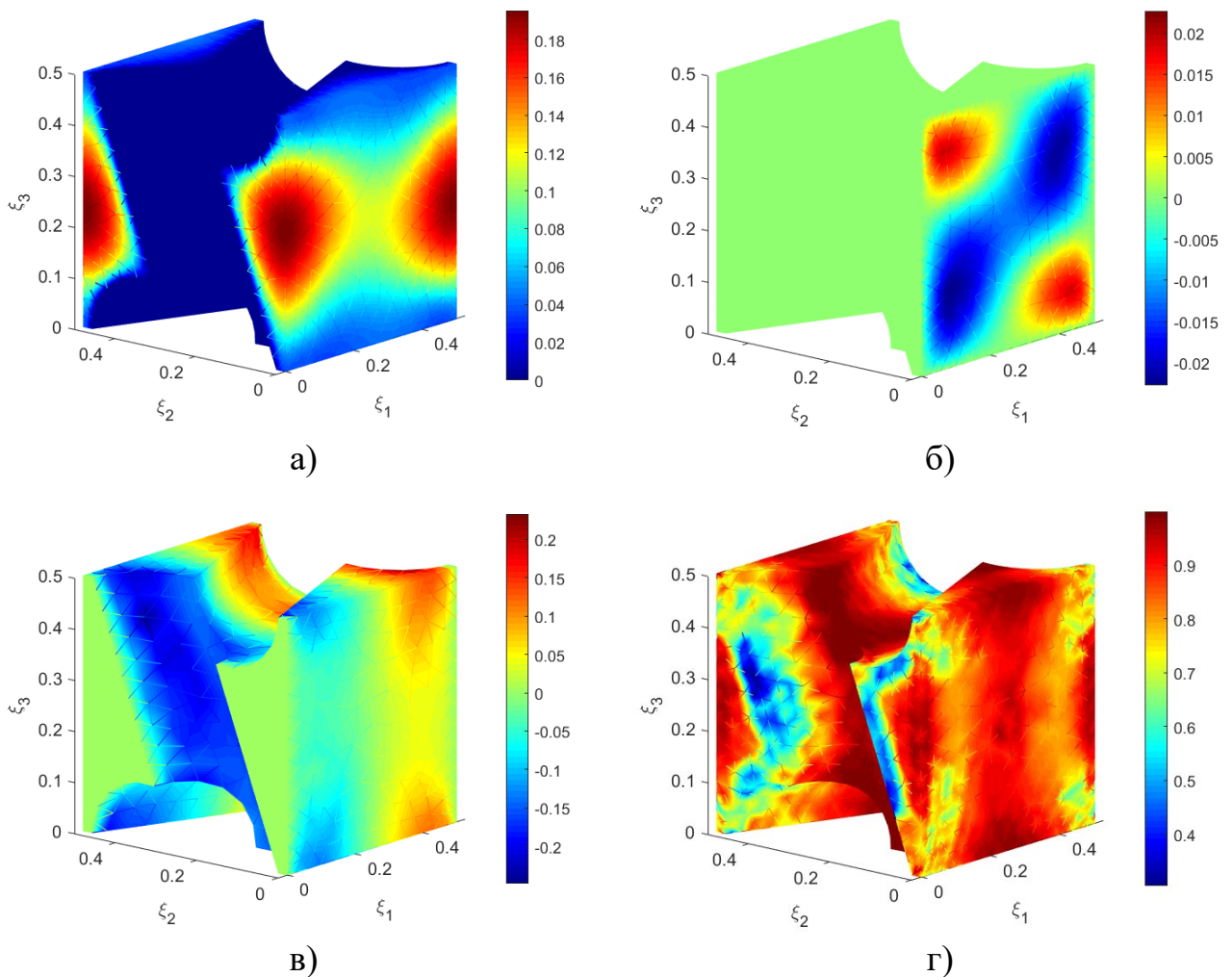


Рисунок 3.9. – Распределение решений локальной задачи $L^{(1)}$ при $n = 0.25$: а) компоненты скорости $\tilde{v}_1^{(1)}$; б) компоненты скорости $\tilde{v}_3^{(1)}$; в) давления $\tilde{p}^{(1)}$; г) безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$;

Приведём результаты расчета локальной задачи $L^{(1)}$ течения псевдопластичной жидкости при $n = 0.25$ на рисунке 3.9, показывающие распределения компоненты скорости $\tilde{v}_i^{(1)}$, $i = 1, 3$, давления $\tilde{p}^{(1)}$ и безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ в отдельной поре 3D тканевой структуры, соответственно.

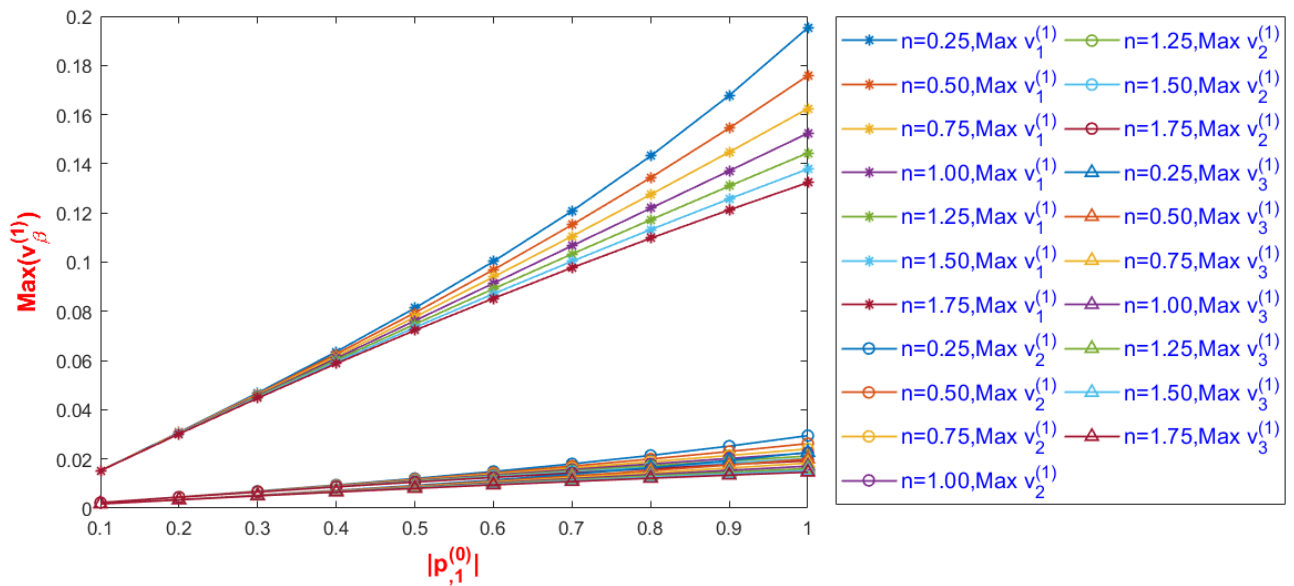


Рисунок 3.10. – Нелинейные зависимости локальной задачи $L^{(1)}$ между максимальными значениями скоростей $\tilde{v}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,3}$ и значениями градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n .

На рисунке 3.10 мы показываем взаимосвязь локальной задачи $L^{(1)}$ между максимальными значениями компонентов скорости $\tilde{v}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,3}$ и значения градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n . Для различных степенных индексов n при увеличении значения градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ максимальные значения компоненты скорости $\tilde{v}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,3}$ также увеличиваются. Увеличение максимального значения компоненты скорости $\tilde{v}_1^{(1)}$, является наиболее значительным, в то же время, при тех же условиях, максимальное значение компоненты скорости $\tilde{v}_1^{(1)}$ намного больше, чем максимальное значение

компоненты скорости $\tilde{v}_2^{(1)}$, а максимальное значение компоненты скорости $\tilde{v}_2^{(1)}$ лишь немного больше, чем максимальное значение компоненты скорости $\tilde{v}_3^{(1)}$. Для разных значений градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$, когда степенные индексы n увеличиваются, максимальные значения компонентов скорости $|\tilde{v}_i^{(1)}|$, $i = \overline{1,3}$ уменьшаются. При увеличении значения градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$, влияние степенных индексов n на максимальное значение компонентов скорости $\tilde{v}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,3}$ течения в отдельной поре также постепенно увеличивается.

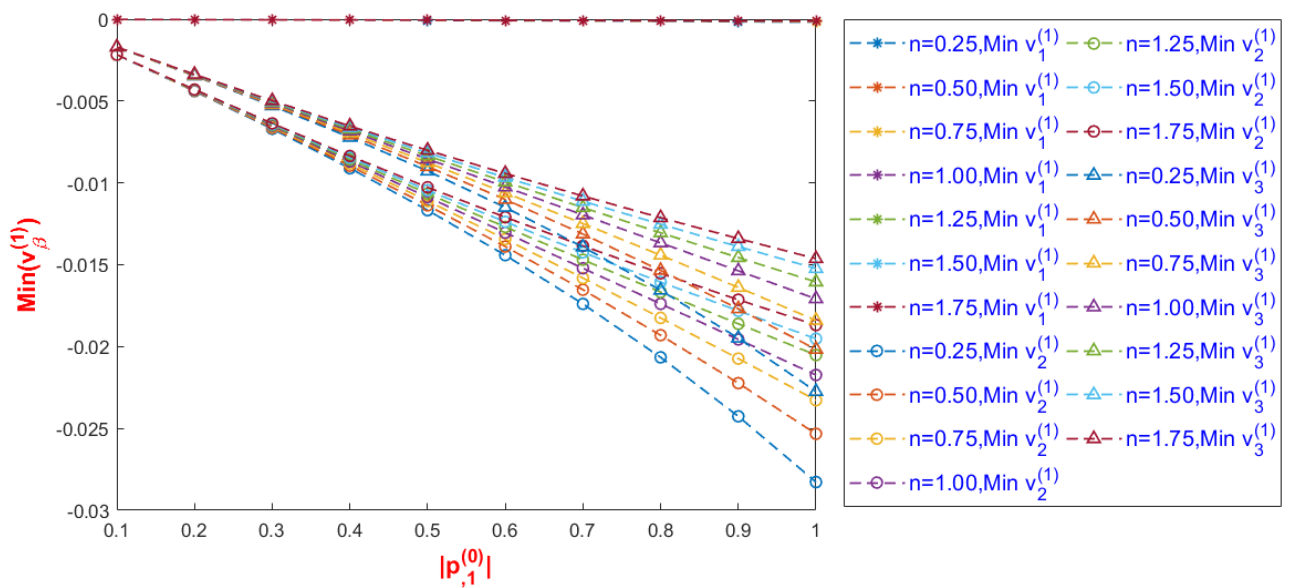


Рисунок 3.11. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(1)}$ между минимальными значениями компонентов скоростей $\tilde{v}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,3}$ и значениями градиентов давления $|p_{,1}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n .

Показана взаимосвязь локальной задачи $L^{(1)}$ между минимальными значениями компонентов скорости $\tilde{v}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,3}$ и значениями градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ при разных степенных индексах n на рисунке 3.11. Для различных степенных индексов n с увеличением значения градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ минимальные значения компонентов скорости $\tilde{v}_2^{(1)}$ и $\tilde{v}_3^{(1)}$ уменьшаются, а минимальные значения компонентов скорости $\tilde{v}_1^{(1)}$ равны нулю. Для разных значений градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$, когда степенные индексы n увеличиваются,

минимальные значения компонентов скорости $\tilde{v}_2^{(1)}$ и $\tilde{v}_3^{(1)}$ течения увеличиваются. Стоит отметить, что при тех же условиях, минимальное значение компоненты скорости $\tilde{v}_2^{(1)}$ меньше минимального значения компоненты скорости $\tilde{v}_3^{(1)}$.

3.2.2.2. Численное решение локальной задачи $L^{(2)}$

Рассмотрено распределение неньютоновских жидкостей в отдельных порах 3D тканевой структуры. Сначала рассматривается локальная задача $L^{(2)}$, и в этом случае направление градиента давления $p_{,2}^{(0)}$ находится вдоль координатной оси ξ_2 , то есть направление течения фильтрации также вдоль идёт координатной оси ξ_2 .

В данном разделе рассчитана локальная задача $L^{(2)}$ фильтрации неньютоновско-вязкой жидкости в 3D тканевой структуре. Сравнение численных результатов расчетов локальных задач для псевдопластичной ($n = 0.25$) и дилатантной жидкостей ($n = 1.75$) показано в таблице 3.11.

Таблица 3.11. – Результаты решения локальной задачи $L^{(2)}$ при $|p_{,2}^{(0)}| = 1.0$ в 3D тканевой структуре

	Параметр	Минимальное значение	Максимальное значение
$n = 0.25$	$\tilde{p}^{(2)}$	-0.22403	0.23199
	$\tilde{v}_1^{(2)}$	-0.02456	0.02495
	$\tilde{v}_2^{(2)}$	-0.00024	0.17558
	$\tilde{v}_3^{(2)}$	-0.02595	0.02497
	$\tilde{\mu}^{(2)}$	0.38012	1.0
$n = 1.75$	$\tilde{p}^{(2)}$	-0.21214	0.23318
	$\tilde{v}_1^{(2)}$	-0.01686	0.01710
	$\tilde{v}_2^{(2)}$	-0.00014	0.12434
	$\tilde{v}_3^{(2)}$	-0.01692	0.01675
	$\tilde{\mu}^{(2)}$	1.0	1.70854

Как видно из результатов расчетов, приведенных в таблице 3.11, значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(2)}$ псевдопластичной жидкости ($n = 0.25$) меньше единицы, а значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(2)}$ дилатантной жидкости ($n = 1.75$) больше единицы. В то же время отметим, что абсолютные значения компонентов скорости $\tilde{v}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,3}$ скоростей псевдопластичной жидкости ($n = 0.25$) больше, чем у дилатантной жидкости ($n = 1.75$). Это показывает, что при одних и тех же условиях псевдопластичная жидкость ($n = 0.25$) движется в отдельных порах более «интенсивно», чем дилатантная жидкость ($n = 1.75$).

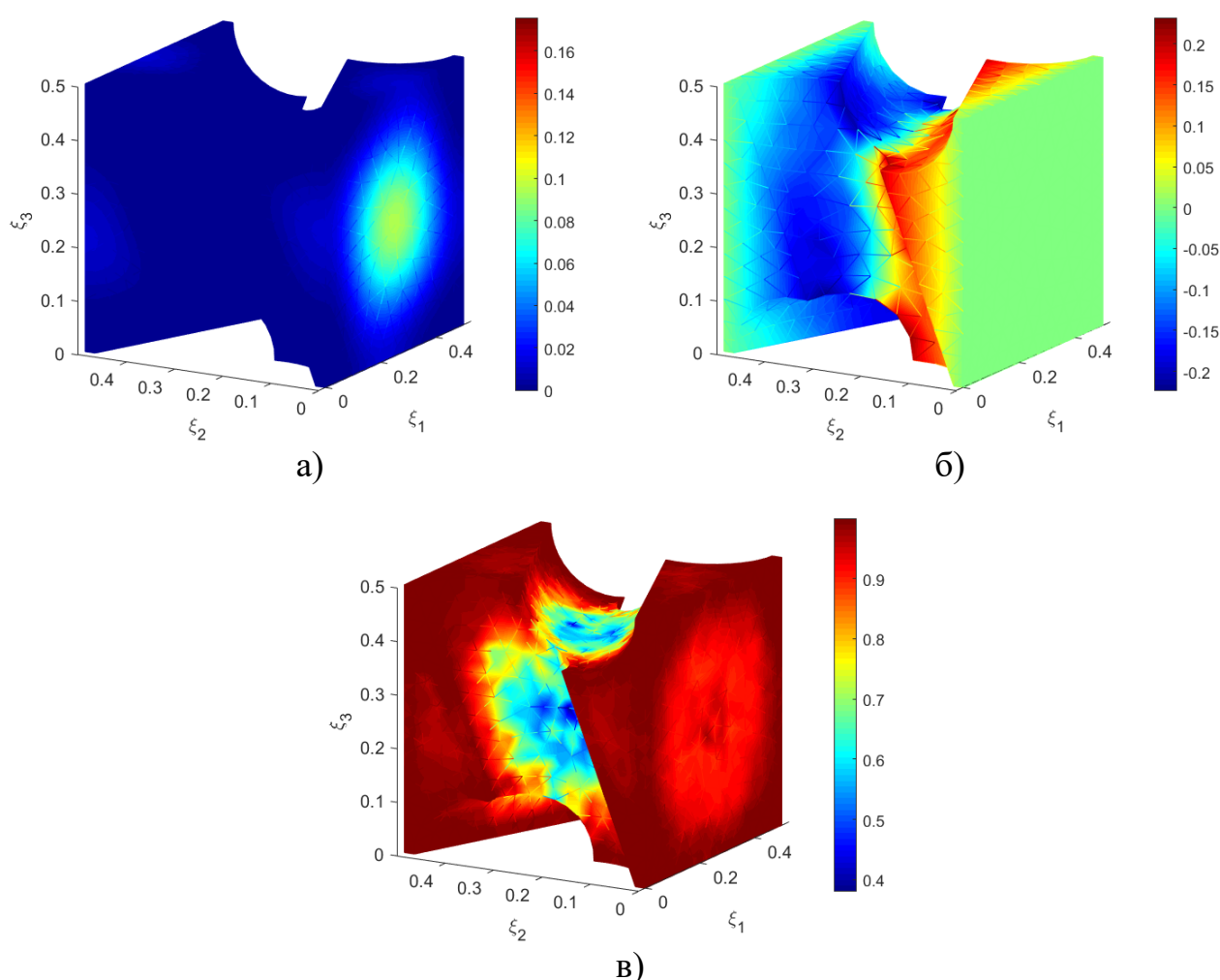


Рисунок 3.12. – Распределение решений локальной задачи $L^{(2)}$ при $n = 0.25$: а) компоненты скорости $\tilde{v}_2^{(2)}$; б) давления $\tilde{p}^{(2)}$; в) безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(2)}$;

Результаты моделирования для локальной задачи $L^{(2)}$ псевдопластичной жидкости $n = 0.25$ представлены на рисунке 3.12, показывая распределения

компоненты скорости $\tilde{v}_2^{(2)}$, давления $\tilde{p}^{(2)}$ и безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(2)}$ в отдельных порах 3D тканевой структуры, соответственно.

Сравнивая расчеты на рисунках 3.9 и 3.12, мы ясно видим влияние анизотропии пористых структур на течение неньютоновско-вязких жидкостей в отдельных порах.

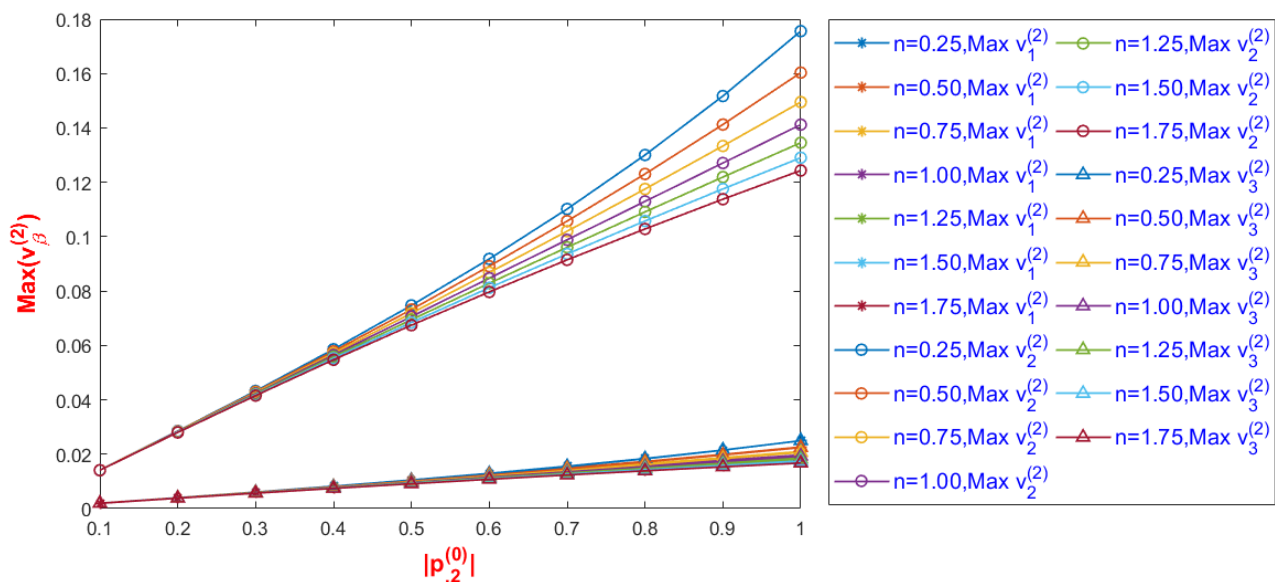


Рисунок 3.13. – Нелинейные зависимости локальной задачи $L^{(2)}$ между максимальными значениями скорости $\tilde{v}_i^{(2)}$, $i = \overline{1,3}$ и значениями градиента

давления $|p_{,2}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n .

На рисунке 3.13, показана взаимосвязь локальной задачи $L^{(2)}$ между максимальными значениями компонентов скорости $\tilde{v}_i^{(2)}$, $i = \overline{1,3}$ и значениями градиента давления $|p_{,2}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n . Также показана взаимосвязь между минимальными значениями компонентов скорости $\tilde{v}_i^{(2)}$, $i = \overline{1,3}$ и значениями градиента давления $|p_{,2}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n на рисунке 3.14. Для различных степенных индексов n с увеличением значения градиента давления $|p_{,2}^{(0)}|$ максимальные значения компонентов скорости $\tilde{v}_i^{(2)}$, $i = \overline{1,3}$ увеличиваются. Стоит отметить, что максимальные значения компонентов скорости $\tilde{v}_1^{(2)}$ и $\tilde{v}_3^{(2)}$ практически совпадают. Изменение максимального значения компоненты скорости $\tilde{v}_2^{(2)}$ является наиболее значительным. Для различных

степенных индексов n с увеличением значения градиента давления $|p_{,2}^{(0)}|$ минимальные значения компоненты скорости $\tilde{v}_1^{(1)}$ и $\tilde{v}_3^{(1)}$ уменьшаются, а минимальное значение компоненты скорости $\tilde{v}_2^{(1)}$ равно нулю. Минимальные значения компоненты скорости $\tilde{v}_1^{(1)}$ и $\tilde{v}_3^{(1)}$ изменяются практически в той же пропорции.

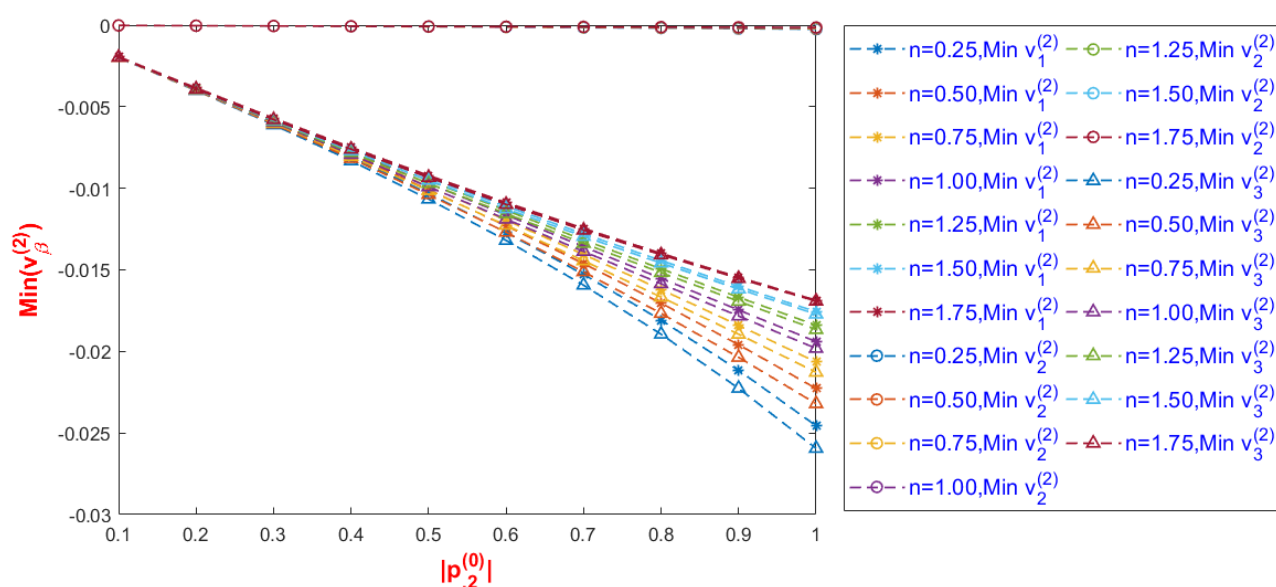


Рисунок 3.14. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(2)}$ между минимальными значениями компонентов скорости $\tilde{v}_i^{(2)}$, $i = \overline{1,3}$ и значениями градиента давления $|p_{,2}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n .

Таким образом, можно сделать вывод, что с увеличением степенного индекса n течение в отдельной поре «замедляется», а при увеличении значения градиента давления, течения в отдельной поре становится более «интенсивным»; по мере увеличения значения градиента давления, влияние индекса степенного закона становится более «выраженным».

На основании результатов, показанных на рисунках 3.13 и 3.14, в сочетании с результатами на рисунках 3.10 и 3.11, можно видеть, что численные результаты локальных задач 3D тканевой структуры демонстрируют влияние анизотропии микроструктуры на течение неньютоновской вязкой жидкости в отдельной поре.

На рисунке 3.15 показана взаимосвязь между минимальными и максимальными значениями безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$ решения локальных

задач $L^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ в 3D тканевой микроструктуре и значениями градиента давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n . Взаимосвязь между максимальным и минимальным значениями безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$ решения локальных задач $L^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ в тканевой микроструктуре и степенными индексами n показана на рисунке 3.16 для различных значений градиента давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$.

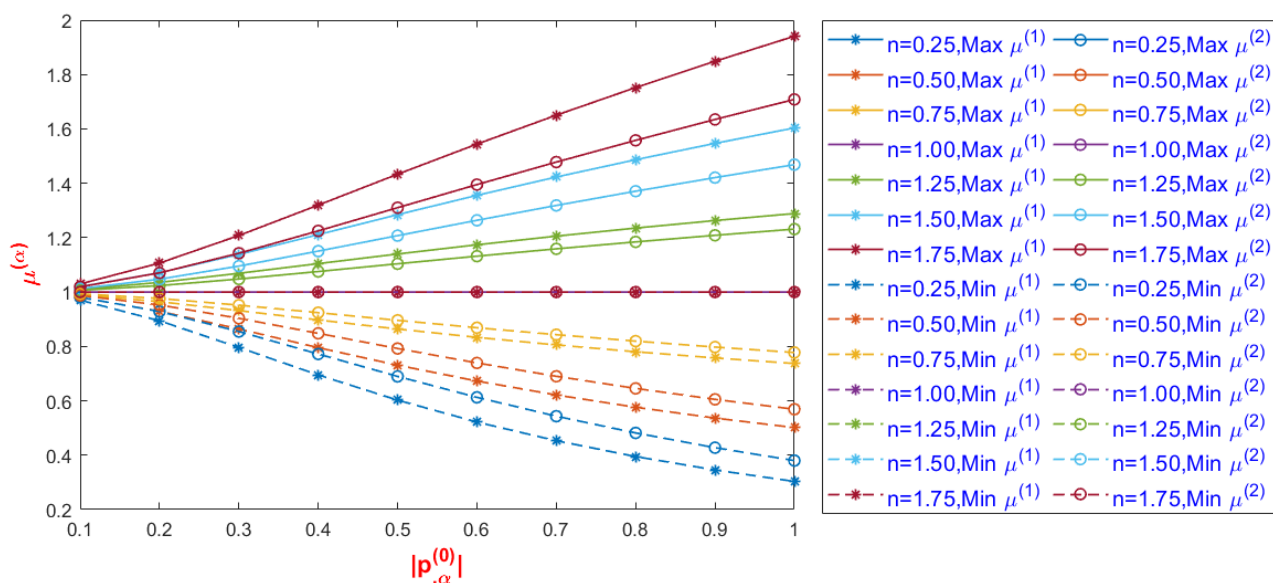


Рисунок 3.15. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ между минимальными и максимальными значениями безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$, при различных значениях градиента давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$ для степенных индексов n .

Из результатов, представленных на рисунке 3.15 и рисунке 3.16, при увеличении значений градиента давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$, максимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$ дилатантной жидкости значительно увеличивается, а минимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$ поседопластичной жидкости значительно уменьшается. Максимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$ поседопластичной жидкости и минимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$ дилатантной жидкости очень близки к единице, и практически зависят от значений градиента давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$. Кроме того, также продемонстрировано влияние анизотропии 3D тканевой микроструктуры на безразмерную вязкость $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$. При

одних и тех же условиях максимальное значение безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ больше, чем максимум безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(2)}$ для расширяющейся жидкости, для псевдопластичной жидкости минимум безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(1)}$ меньше, чем минимум безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(2)}$.

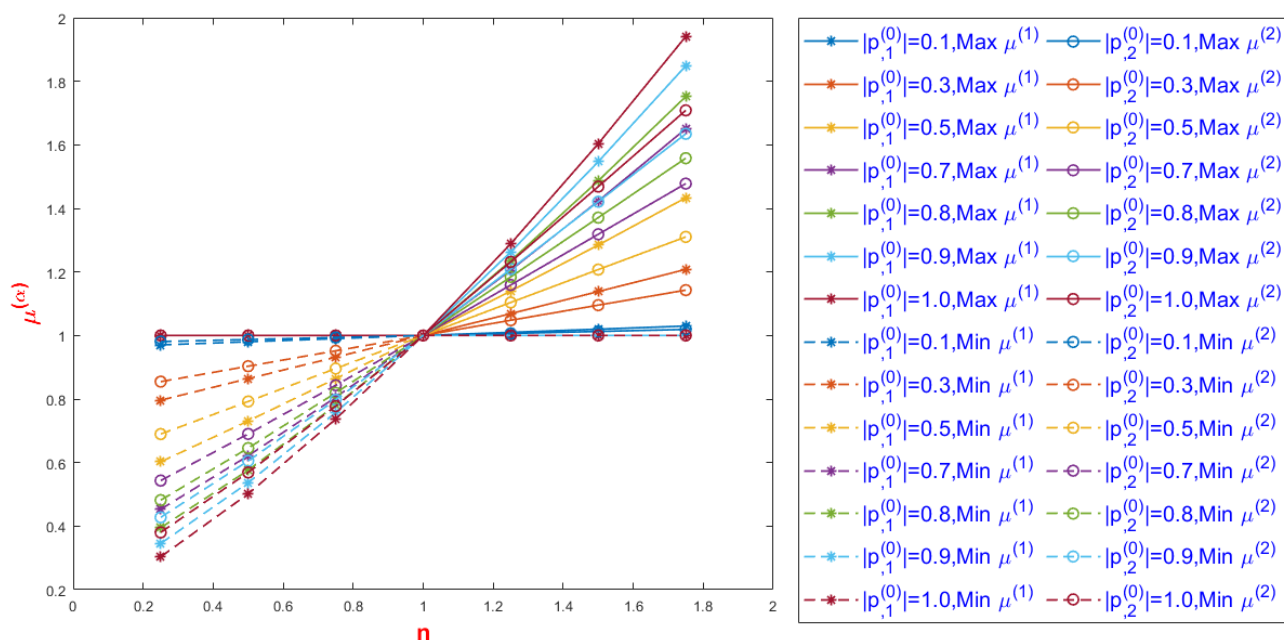


Рисунок 3.16. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ между минимальными и максимальными значениями безразмерной вязкости $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$, в зависимости от степенных индексов n для различных значений градиента давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$.

Таким образом, мы можем сделать вывод, что с увеличением степенного индекса, течение в отдельной поре становится «медленнее», а при увеличении значения градиента давления течения в отдельной поре становится более «интенсивным»; по мере увеличения значения градиента давления влияние индекса степенного закона становится более «выраженным».

Кроме того, для 3D тканевой микроструктуры при тех же условиях процесса, течение, описанное в локальной задаче $L^{(1)}$, является более «интенсивным», чем в локальной задаче $L^{(2)}$. Следовательно, влияние значения градиента давления и степенного индекса являются более значительным в локальной задаче $L^{(1)}$, чем в локальной задаче $L^{(2)}$.

3.3. Численные расета нелинейного закона фильтрации и эффективной вязкости неньютоновских вязких жидкостей в трехмерной пористой структуре

3.3.1. Численные расчета нелинейного закона фильтрации и эффективной вязкости в 3D ортогональной структуре

В данном разделе будем дополнительно исследовать нелинейный закон фильтрации неньютоновско-вязких жидкостей в 3D ортогональной структуре. Результаты скорости фильтрации $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$ и эффективной вязкости $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$ локальных задач $L^{(\alpha)}$ при $|p_{,\alpha}^{(0)}|=1.0$ процесса фильтрации псевдопластичной жидкости ($n = 0.25$) и дилатантной жидкости ($n = 1.75$) показаны в таблице 3.12. Известно, что 3D ортогональная микроструктура является изотропной, поэтому результаты, приведенные в таблице 3.12, показывают влияние неньютоновской вязкости жидкости и изотропии пористой структуры на нелинейный закон фильтрации, т.е. тензорные функции $\tilde{\chi}^{(\alpha)}$ являются изотропными, составляющие тензор нелинейной проницаемости \mathbf{K} , являются изотропными.

Таблица 3.12. – Результаты компонентов проницаемости и эффективной вязкости локальных задач $L^{(\alpha)}$ при $|p_{,\alpha}^{(0)}|=1.0$

Локальная задача	Параметр	$n = 0.25$	$n = 1.75$
$L^{(1)}$	Средняя скорость $\langle v_1^{(1)} \rangle$	0.11495	0.05571
	Средняя вязкость $\langle \mu^{(1)} \rangle$	0.71965	1.16077
$L^{(2)}$	Средняя скорость $\langle v_2^{(2)} \rangle$	0.11424	0.05576
	Средняя вязкость $\langle \mu^{(2)} \rangle$	0.72085	1.16070
$L^{(3)}$	Средняя скорость $\langle v_3^{(3)} \rangle$	0.11414	0.05576
	Средняя вязкость $\langle \mu^{(3)} \rangle$	0.72094	1.16067

Скорость фильтрации $\langle v_1^{(1)} \rangle$ и эффективная вязкость $\langle \mu^{(1)} \rangle$ локальной задачи $L^{(1)}$ также нелинейно зависят от степенного индекса n . Результаты отмечены в таблице 3.13 отмечены. Средняя скорость $\langle v_1^{(1)} \rangle$ при $n = 0.25$ на 0.03809 больше скорости при $n = 0.75$, а средняя скорость $\langle v_1^{(1)} \rangle$ при $n = 0.75$ на 0.01358 больше

скорости при $n = 1.25$, средняя скорость $\langle v_1^{(1)} \rangle$ при $n = 1.25$ на 0.00758 больше скорости при $n = 1.75$. Также было отмечено такое же изменение эффективной вязкости $\langle \mu^{(1)} \rangle$: разницы между эффективными вязкостями $\langle \mu^{(1)} \rangle$ при различных степенных индексах n составляют -0.20965 , -0.13087 и -0.10060 соответственно.

Таблица 3.13. – Результаты расчета компонентов проницаемости и эффективной вязкости локальной задачи $L^{(1)}$ при $|p_{,1}^{(0)}| = 1.0$

	Средняя скорость $\langle v_1^{(1)} \rangle$	Средняя вязкость $\langle \mu^{(1)} \rangle$
$n = 0.25$	0.11495	0.71965
$n = 0.75$	0.07687	0.92930
$n = 1.25$	0.06329	1.06017
$n = 1.75$	0.05571	1.16077

Результаты скорости фильтрации и эффективной вязкости локальных задач $L^{(1)}$ при разных $p_{,1}^{(0)}$ отмечены в таблице 3.14. В соответствии с законом фильтрации рассматривается влияние градиента давления на процесс фильтрации неньютоновской жидкости. Для псевдопластичных жидкостей $n = 0.25$ значение градиента давления $p_{,1}^{(0)}$ увеличивается с шагом 0.2, увеличение скорости фильтрации $\langle v_1^{(1)} \rangle$ составляют 0.01578, 0.01966, 0.02671 и 0.03874 соответственно, а величины уменьшения эффективной вязкости $\langle \mu^{(1)} \rangle$ составляют -0.03558 , -0.05819 , -0.07896 и -0.09563 соответственно. Следовательно, заключаем, что скорость фильтрации и эффективная вязкость псевдопластичных жидкостей нелинейно зависят от градиента давления. Для дилатантных жидкостей $n = 1.75$ по мере увеличения значения градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$, увеличения скорости фильтрации $\langle v_1^{(1)} \rangle$ составляют 0.01239, 0.01102, 0.00985 и 0.00893, соответственно, а величины уменьшения эффективной вязкости $\langle \mu^{(1)} \rangle$ составляют 0.02868, 0.03747, 0.04108 и 0.04215, соответственно.

Таблица 3.14. – Результаты расчета компонентов проницаемости и эффективной вязкости локальных задач $L^{(1)}$ при разных $p_{,1}^{(0)}$

	$n = 0.25$	$n = 1.75$
--	------------	------------

$ p_{,1}^{(0)} $	Средняя скорость	Средняя вязкость	Средняя скорость	Средняя вязкость
0.2	0.01406	0.98801	0.01353	1.01138
0.4	0.02984	0.95243	0.02592	1.04006
0.6	0.04950	0.89423	0.03693	1.07754
0.8	0.07621	0.81528	0.04679	1.11862
1.0	0.11495	0.71965	0.05571	1.16077

Этот результат указывает на то, что закон фильтрации дилатантной жидкости нелинейно зависит от значения градиента давления, и эффективная вязкость также нелинейно зависит от значения градиента давления. Сравнивая процесс фильтрации псевдопластичных жидкостей ($n = 0.25$) и дилатантных жидкостей ($n = 1.75$), можно сделать вывод о том, что их законы фильтрации нелинейно зависят от градиента давления в соответствии с различными функциональными соотношениями.

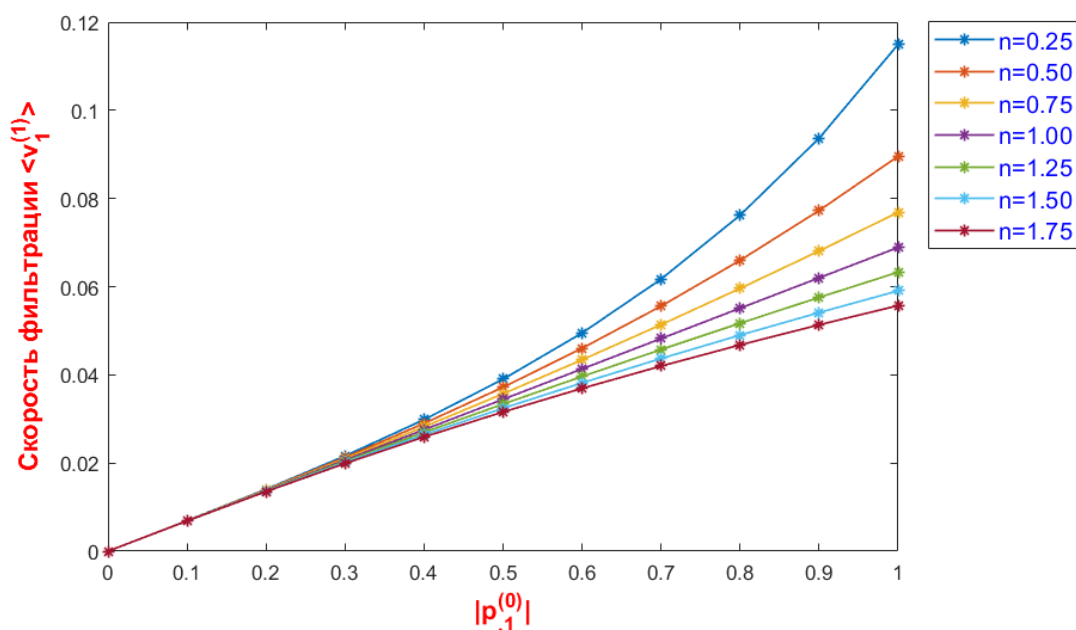


Рисунок 3.17. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(1)}$ между скоростью фильтрации $\langle v_1^{(1)} \rangle$ и градиентом давления $|p_{,1}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n .

На рисунке 3.17 показаны нелинейные зависимости между скоростью фильтрации $\langle v_1^{(1)} \rangle$ разных неньютоновско-вязких жидкостей и значениями градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$, для различных степенных индексов n . Показано, что для различных степенных индексов n , когда значение градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$

увеличивается, скорость фильтрации $\langle v_1^{(1)} \rangle$ также увеличивается, и влияние степенного индекса n на фильтрацию также усиливается. При фиксированном значении градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ с увеличением степенного индекса n скорость фильтрации $\langle v_1^{(1)} \rangle$ уменьшается. Стоит отметить, что при том же значении градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$, скорость фильтрации $\langle v_1^{(1)} \rangle$ псевдопластичной жидкости ($n < 1$) больше, чем у ньютоновской жидкости ($n = 1$), а скорость фильтрации $\langle v_1^{(1)} \rangle$ дилатантной жидкости ($n > 1$) меньше, чем у ньютоновской жидкости ($n = 1$). А с увеличением значения градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ разница в скорости фильтрации $\langle v_1^{(1)} \rangle$ различных степенных индексов n увеличивается.

Было обнаружено очень интересное явление: когда значение градиента давления зафиксировано, наклон кривой, показанной на рисунке 3.17, уменьшается с увеличением степенного индекса; когда значение степенного индекса зафиксировано, наклон кривой псевдопластичной жидкости ($n < 1$), показанной на рисунке 3.17, увеличивается с увеличением значения градиента давления, а наклон кривой дилатантной жидкости ($n > 1$), показанной на рисунке 3.17, уменьшается с увеличением значения градиента давления.

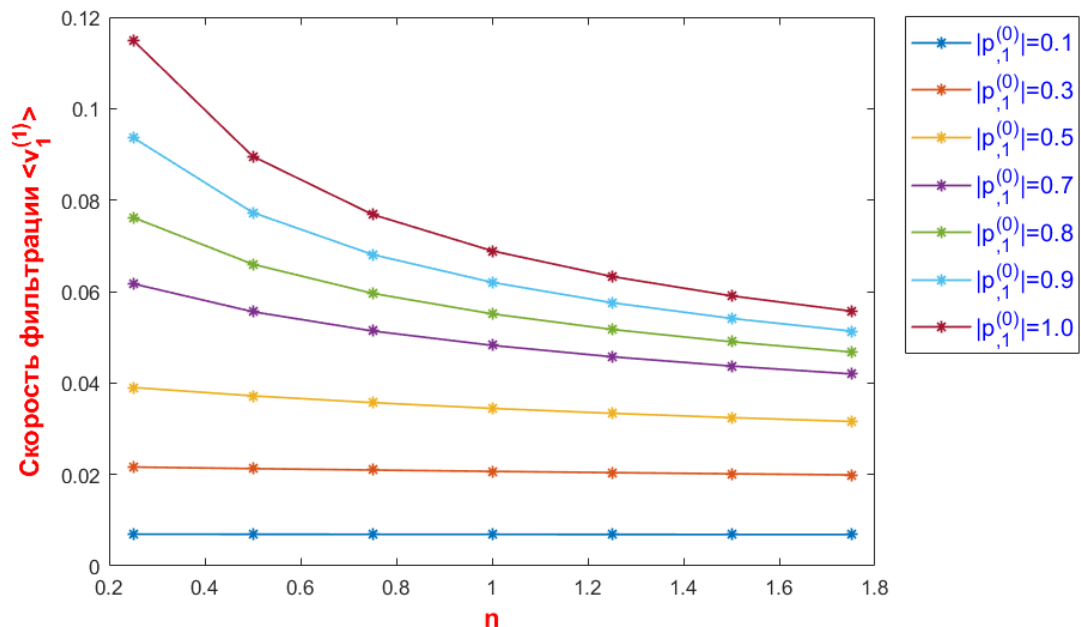


Рисунок 3.18. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(1)}$ между скоростью фильтрации $\langle v_1^{(1)} \rangle$ и степенными индексами n для различных градиентов давления $|p_{,1}^{(0)}|$.

На рисунке 3.18 показаны нелинейные зависимости между скоростью фильтрации $\langle v_1^{(1)} \rangle$ неньютоновско-вязких жидкостей и степенным индексом n под воздействием различных значений градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$.

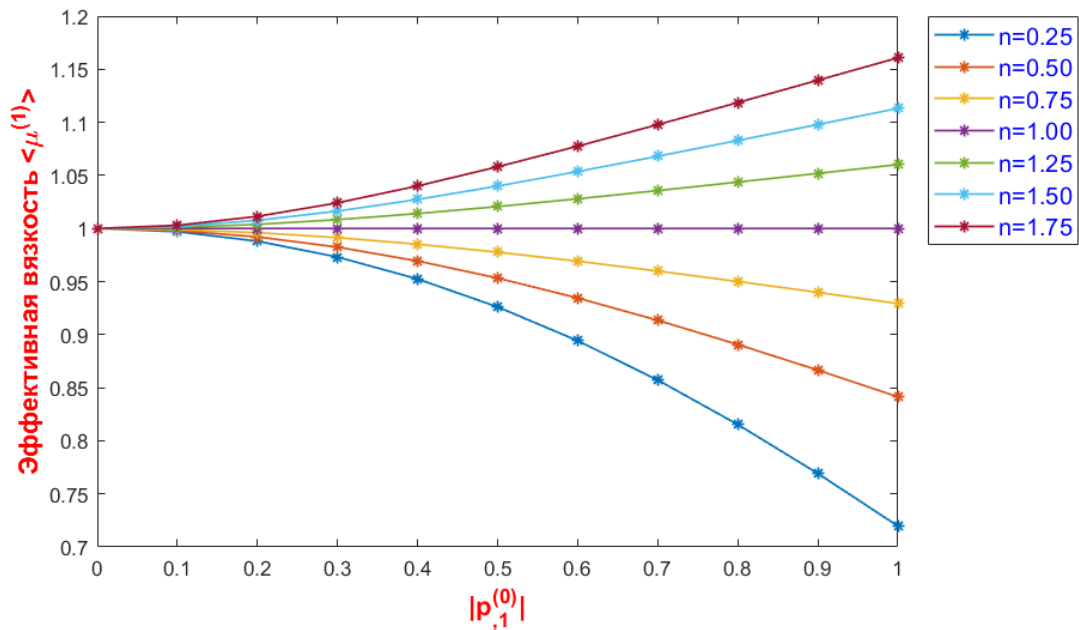


Рисунок 3.19. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(1)}$ между неньютоновской жидкостью $\langle \mu^{(1)} \rangle$ и градиентом давления $|p_{,1}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n .

На рисунке 3.19 показана нелинейная зависимость между эффективной вязкостью $\langle \mu^{(1)} \rangle$ и значением градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$, для различных степенных индексов n . На рисунке 3.20 показаны нелинейные зависимости между средней жидкостью $\langle \mu^{(1)} \rangle$ и степенным индексом n при различных значениях градиентов давления $|p_{,1}^{(0)}|$. Из результатов, представленных на рисунках 3.19 и 3.20, следует, что увеличении значений градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$, эффективная вязкость $\langle \mu^{(1)} \rangle$ дилатантной жидкости ($n > 1$) увеличивается, а эффективная вязкость $\langle \mu^{(1)} \rangle$ псевдопластичной жидкости ($n < 1$) уменьшается. Для различных значений

градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$, при увеличении степенного индекса n , эффективная вязкость $\langle \mu^{(1)} \rangle$ неньютоновской жидкости увеличивается. Стоит отметить, что при том же значении градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ эффективная вязкость $\langle \mu^{(1)} \rangle$ псевдопластичной жидкости ($n < 1$) больше, чем у ньютоновской жидкости ($n = 1$), а эффективная вязкость $\langle \mu^{(1)} \rangle$ дилатантной жидкости ($n > 1$) меньше, чем у ньютоновской жидкости ($n = 1$).

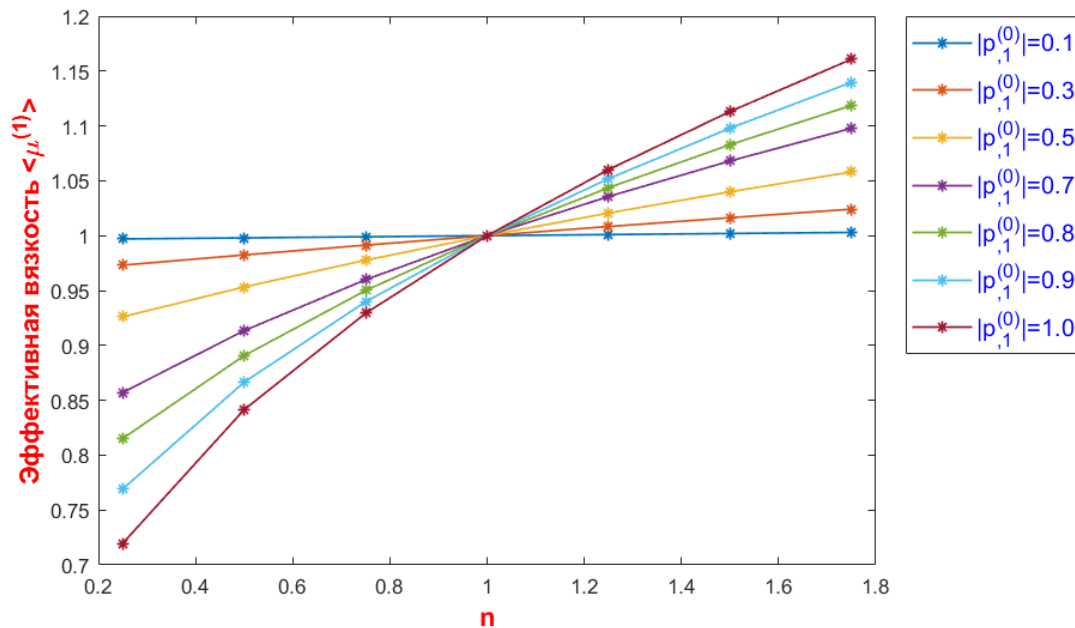


Рисунок 3.20. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(1)}$ между эффективной вязкостью $\langle \mu^{(1)} \rangle$ и степенными индексами n для различных градиентов давления $|p_{,1}^{(0)}|$.

3.3.2. Численные расчета нелинейного закона фильтрации и эффективной вязкости в 3D тканевой структуре

В данном разделе мы дополнительно исследуем нелинейный закон фильтрации неньютоновско-вязких жидкостей в 3D тканевой структуре. Результаты скорости фильтрации $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$ и эффективной вязкости $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$ разных локальных задач $L^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ при $|p_{,\alpha}^{(0)}| = 1.0$ процесса фильтрации псевдопластичной жидкости ($n = 0.25$) и дилатантной жидкости ($n = 1.75$) показаны в таблице 3.15. Известно, что 3D тканевая микроструктура является анизотропной, поэтому результаты, приведенные в таблице 3.15, показывают влияние неньютоновской

вязкости жидкости и анизотропии пористой структуры на нелинейный закон фильтрации, т.е. тензорные функции $\tilde{\chi}^{(\alpha)}$, $\alpha = \overline{1,3}$ являются анизотропными, составляют тензор нелинейной проницаемости \mathbf{K} .

Таблица 3.15. – Результаты компонентов проницаемости и эффективной вязкости локальных задач $L^{(\alpha)}$ при $|p_{,\alpha}^{(0)}| = 1.0$

Локальная задача	Параметр	$n = 0.25$	$n = 1.75$
$L^{(1)}$	Средняя скорость $\langle v_1^{(1)} \rangle$	0.05886	0.03602
	Средняя вязкость $\langle \mu^{(1)} \rangle$	0.85423	1.09088
$L^{(2)}$	Средняя скорость $\langle v_2^{(2)} \rangle$	0.04375	0.02796
	Средняя вязкость $\langle \mu^{(2)} \rangle$	0.88644	1.07268
$L^{(3)}$	Средняя скорость $\langle v_3^{(3)} \rangle$	0.05928	0.03607
	Средняя вязкость $\langle \mu^{(3)} \rangle$	0.85400	1.09047

Скорость фильтрации $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$ и эффективная вязкость $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$ локальных задач $L^{(\alpha)}$ также нелинейно зависят от степенного индекса n . Результаты показаны в таблице 3.16.

Таблица 3.16. – Результаты компонентов проницаемости и эффективной вязкости локальной задачи $L^{(\alpha)}$ при $|p_{,\alpha}^{(0)}| = 1.0$

	Средняя скорость $\langle v_1^{(1)} \rangle$	Средняя вязкость $\langle \mu^{(1)} \rangle$	Средняя скорость $\langle v_2^{(2)} \rangle$	Средняя вязкость $\langle \mu^{(2)} \rangle$
$n = 0.25$	0.05886	0.85423	0.04375	0.88644
$n = 0.75$	0.04665	0.96085	0.03552	0.96904
$n = 1.25$	0.04019	1.03384	0.03097	1.02696
$n = 1.75$	0.03602	1.09088	0.02796	1.07268

Для локальной задачи $L^{(1)}$, средняя скорость $\langle v_1^{(1)} \rangle$ при $n = 0.25$ на 0.01222 больше при $n = 0.75$, средняя скорость $\langle v_1^{(1)} \rangle$ при $n = 0.75$ на 0.00645 больше при $n = 1.25$, а средняя скорость $\langle v_1^{(1)} \rangle$ при $n = 1.25$ на 0.00417 больше при $n = 1.75$. Также было отмечено такое же изменение эффективной вязкости $\langle \mu^{(1)} \rangle$: разность между эффективными вязкостями различных степенных индексов n составляла -0.10663 , -0.07299 и -0.05704 , соответственно.

Для локальной задачи $L^{(2)}$, средняя скорость $\langle v_2^{(2)} \rangle$ при $n = 0.25$ на 0.00823 больше при $n = 0.75$, средняя скорость $\langle v_2^{(2)} \rangle$ при $n = 0.75$ на 0.00455 больше при $n = 1.25$, а средняя скорость $\langle v_2^{(2)} \rangle$ при $n = 1.25$ на 0.00301 больше при $n = 1.75$. Также отметим такое же изменение эффективной вязкости $\langle \mu^{(2)} \rangle$: разность между эффективными вязкостями различных степенных индексов n составляла -0.08260 , -0.05792 и -0.04572 , соответственно.

Таблица 3.17. – Результаты компонентов проницаемости и эффективной вязкости локальных задач $L^{(\alpha)}$ при разных $p_{,\alpha}^{(0)}$

	$n = 0.25$		$n = 1.75$	
$ p_{,1}^{(0)} $	Средняя скорость $\langle v_1^{(1)} \rangle$	Средняя вязкость $\langle \mu^{(1)} \rangle$	Средняя скорость $\langle v_1^{(1)} \rangle$	Средняя вязкость $\langle \mu^{(1)} \rangle$
0.2	0.00874	0.99391	0.00848	1.00586
0.4	0.01825	0.97600	0.01638	1.02111
0.6	0.02922	0.94674	0.02354	1.04193
0.8	0.04242	0.90620	0.03006	1.06570
1.0	0.05886	0.85423	0.03602	1.09088
$ p_{,2}^{(0)} $	Средняя скорость $\langle v_2^{(2)} \rangle$	Средняя вязкость $\langle \mu^{(2)} \rangle$	Средняя скорость $\langle v_2^{(2)} \rangle$	Средняя вязкость $\langle \mu^{(2)} \rangle$
0.2	0.00668	0.99531	0.00651	1.00453
0.4	0.01389	0.98141	0.01262	1.01651
0.6	0.02210	0.95861	0.01820	1.03311
0.8	0.03184	0.92698	0.02329	1.05225
1.0	0.04375	0.88644	0.02796	1.07268

Результаты скорости фильтрации $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$ и эффективной вязкости $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$ разных локальных задач $L^{(\alpha)}$ при разных значениях $p_{,\alpha}^{(0)}$ показаны в таблице 3.17. В соответствии с нелинейным законом фильтрации рассматриваются влияния градиента давления на процесс фильтрации неньютоновско-вязкой жидкости.

Рассмотрены численные результаты локальной задачи $L^{(1)}$. Для псевдопластичных жидкостей ($n = 0.25$) значение градиента давления $|p_{,1}^{(0)}|$ увеличивается с шагом 0.2, увеличение скорости фильтрации $\langle v_1^{(1)} \rangle$ составляет 0.00951, 0.01097, 0.01319 и 0.01645 соответственно, а величина уменьшения

эффективной вязкости $\langle \mu^{(1)} \rangle$ составляет -0.01791 , -0.02925 , -0.04055 и -0.05197 , соответственно. Следовательно, для дилатантных жидкостей $n = 1.75$ по мере увеличения значения градиента давления $p_{,i}^{(0)}$, увеличение скорости фильтрации $\langle v_1^{(1)} \rangle$ составляет 0.00790 , 0.00717 , 0.0065 и 0.00596 , соответственно, а величина уменьшения эффективной вязкости $\langle \mu^{(1)} \rangle$ составляет 0.01525 , 0.02082 , 0.02377 и 0.02519 , соответственно. Сравнивая процесс фильтрации псевдопластичных жидкостей ($n = 0.25$) и дилатантных жидкостей ($n = 1.75$), можно заметить, что их законы фильтрации нелинейно зависят от значения градиента давления $|p_{,i}^{(0)}|$ в соответствии с различными функциональными соотношениями.

Сравнивая результат решения локальной задачи $L^{(2)}$ с результатом решения локальной задачи $L^{(1)}$, оказывается, что свойство фильтрации локальной задачи $L^{(2)}$ также обладает свойством фильтрации локальной задачи $L^{(1)}$. Анизотропия процесса фильтрации также четко продемонстрирована численным моделированием.

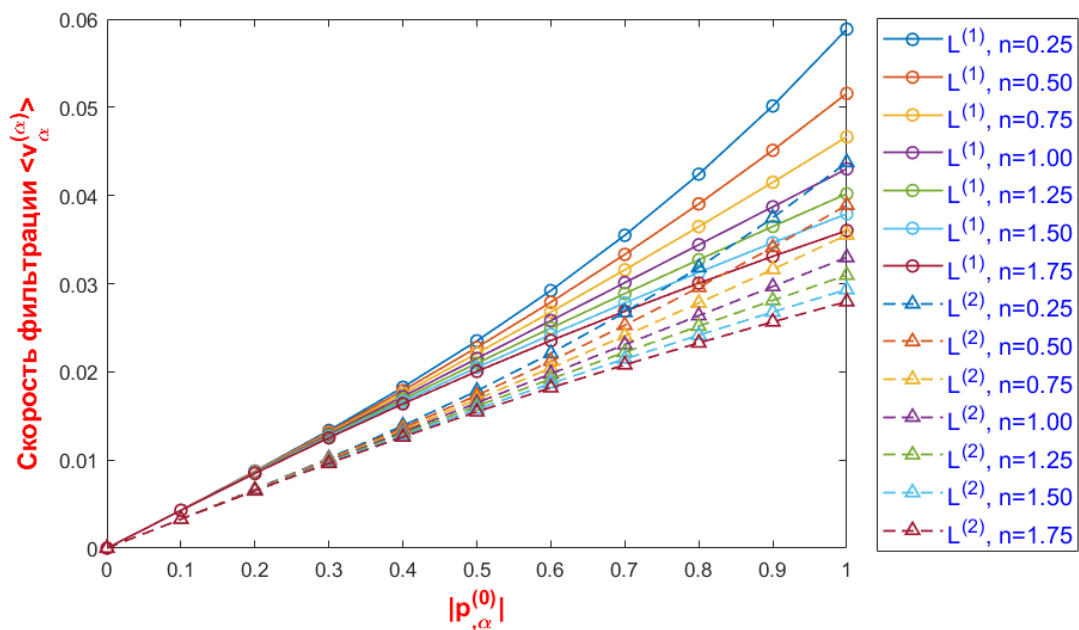


Рисунок 3.21. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(\alpha)}$ между скоростью фильтрации $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$ и градиентом давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n .

На рисунке 3.21 показаны нелинейные зависимости локальных задач $L^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ между скоростью фильтрации $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$, $\alpha = 1, 2$ и значениями градиента давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$, для различных степенных индексов n . Нелинейные зависимости между скоростью фильтрации $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$, $\alpha = 1, 2$ в 3D тканевой микроструктуре и степенными индексами n показаны на рисунке 3.22 показаны для различных значений градиента давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$.

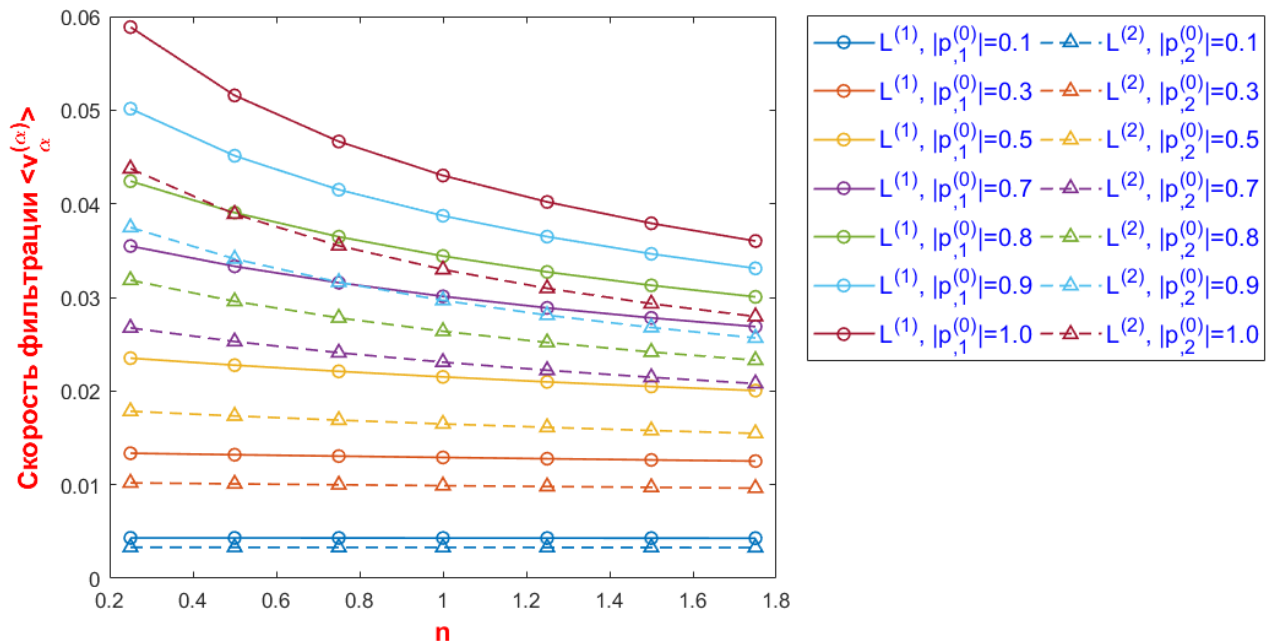


Рисунок 3.22. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(\alpha)}$ между скоростью фильтрации $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$ и степенными индексами n для различных градиентов давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$.

Из результатов расчетов, представленных на рисунке 3.21 и рисунке 3.22, следует, что при увеличении значений градиента давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$, скорость фильтрации $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$, $\alpha = 1, 2$ значительно увеличивается для разных степенных индексов n , и под воздействием различных градиентов давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$, вместе с этим, при увеличении степенных индексов n , скорость фильтрации $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$, $\alpha = 1, 2$ значительно уменьшается. Кроме того, также продемонстрировано влияние анизотропии 3D тканевой микроструктуры на скорость фильтрации $\langle v_{\alpha}^{(\alpha)} \rangle$, $\alpha = 1, 2$.

При одних тех же условиях скорость фильтрации $\langle v_1^{(1)} \rangle$ больше, чем скорость фильтрации $\langle v_2^{(2)} \rangle$.

Как и в разделе 3.3.1, можно определить характеристики тензорной функции $\tilde{\chi}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, которая составляет тензор проницаемости. На основании определения выпуклой и вогнутой функций можно определить, что для фиксированного степенного индекса n , тензорная функция $\tilde{\chi}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, которая составляет тензор проницаемости псевдопластичной жидкости ($n < 1$), является выпуклой функцией по отношению к независимой переменной, образованной значениями градиента давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$, $\alpha = 1, 2$, а тензорная функция $\tilde{\chi}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, которая составляет тензор проницаемости дилатантной жидкости ($n > 1$), является вогнутой функцией по отношению к независимой переменной, образованной значениями градиента давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$, $\alpha = 1, 2$.

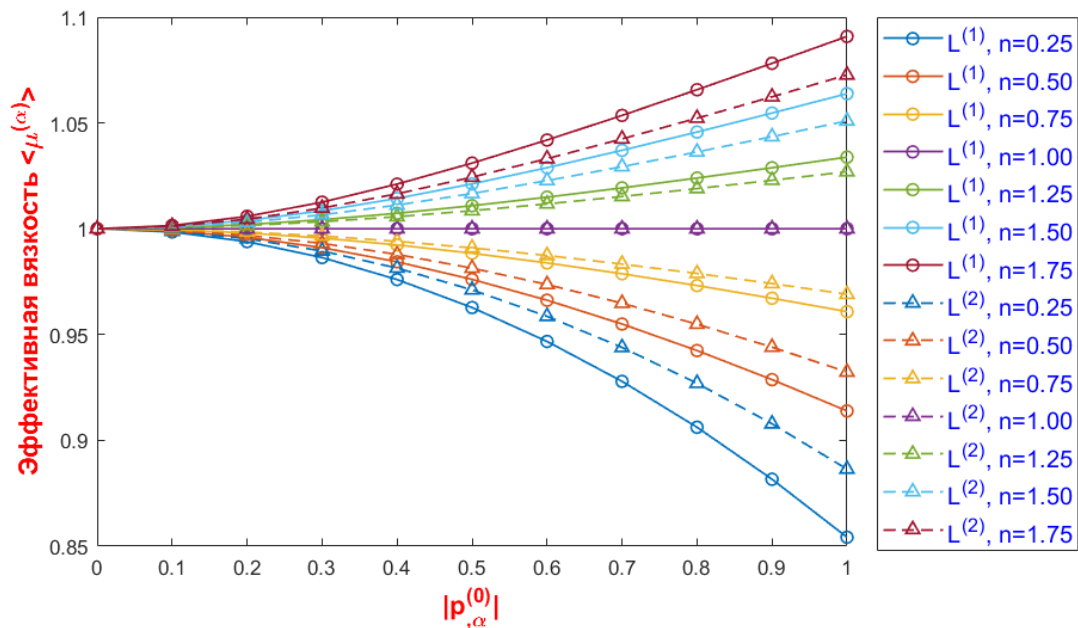


Рисунок 3.23. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(\alpha)}$ между неньютоновской жидкостью $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$ и градиентом давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n .

На рисунке 3.23, представлены нелинейные зависимости между эффективной вязкостью $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$, $\alpha = 1, 2$ в 3D тканевой микроструктуре и значениями градиента давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$ для различных степенных индексов n . На рисунке 3.24 показаны

нелинейные зависимости между эффективной вязкостью $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$, $\alpha = 1, 2$ и степенным индексом n при различных значениях градиентов давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$. Из результатов, представленных на рисунках 3.23 и 3.24, следует, что при увеличении значений градиента давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$, эффективная вязкость $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$, $\alpha = 1, 2$ дилатантной жидкости значительно увеличивается, а эффективная вязкость $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$, $\alpha = 1, 2$ псевдопластичной жидкости значительно уменьшается. Для различных значений градиента давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$, при увеличении степенного индекса n , эффективная вязкость $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$, $\alpha = 1, 2$ неньютоновской жидкости увеличивается.

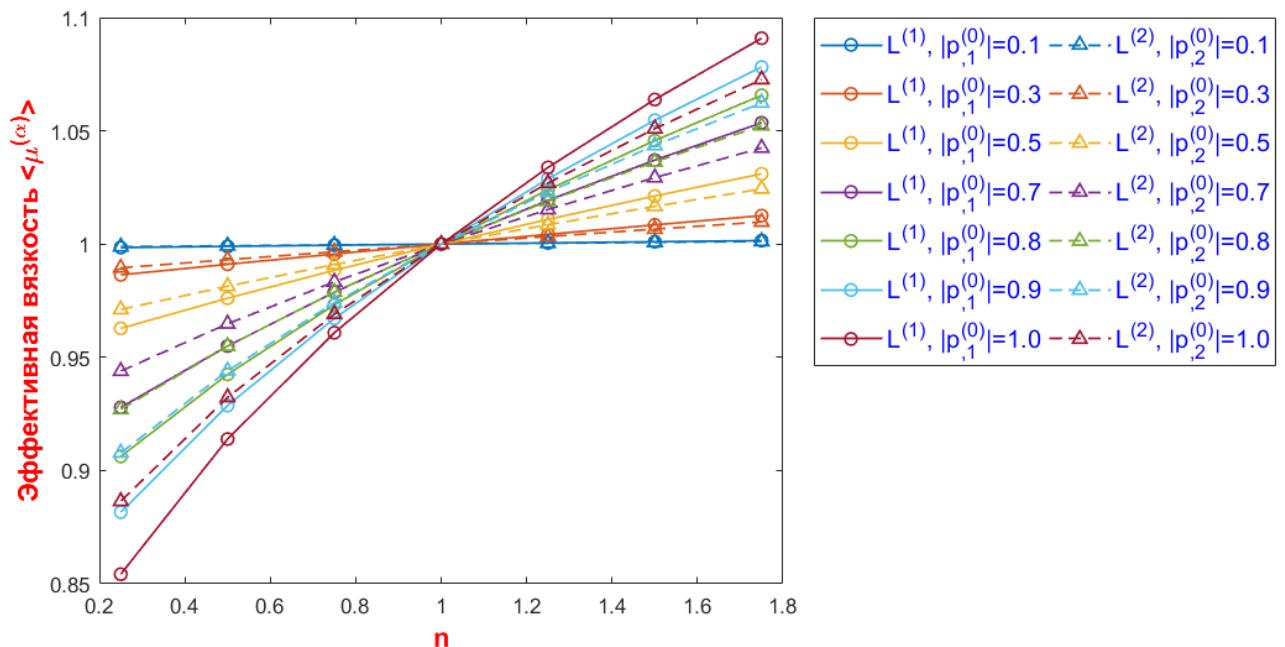


Рисунок 3.24. – Нелинейные зависимости локальных задач $L^{(\alpha)}$ между эффективной вязкостью $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$ и степенными индексами n для различных градиентов давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$.

Кроме того, также продемонстрировано влияние анизотропии 3D тканевой микроструктуры на эффективную вязкость $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$, $\alpha = 1, 2$. При одних и тех же условиях, эффективная вязкость $\langle \mu^{(1)} \rangle$ больше, чем эффективная вязкость $\langle \mu^{(2)} \rangle$ для дилатантной жидкости, а для псевдопластичной жидкости эффективная вязкость $\langle \mu^{(1)} \rangle$ меньше, чем эффективная вязкость $\langle \mu^{(2)} \rangle$. Аналогичным образом получается, что на основании определения выпуклой и вогнутой функций можно

установить, что когда градиент давления $|p_{,\alpha}^{(0)}|$ фиксирован, тензорная функция (1.92), описывающая нелинейную связь между эффективной вязкостью $\langle \mu^{(\alpha)} \rangle$, $\alpha = 1, 2$ и степенным индексом n , является вогнутой функцией по отношению к независимой переменной, образованной степенным индексом n .

Таким образом, нелинейный закон фильтрации неньютоновско-вязких жидкостей проверяются результатами численного моделирования.

3.4 Выводы по третьей главе

Разработан программный комплекс (ПК) для численного моделирования многомасштабных процессов фильтрации неньютоновско-вязкой жидкости в рамке модели Карро в пористых средах. Комплекс позволяет производить решение локальных задач фильтрации и выполнять определение основных характеристик пористой структуры – пористости пористых сред, коэффициентов тензора проницаемости и эффективной вязкости неньютоновско-вязких жидкостей.

Тестирование комплекса на задаче процесса фильтрации ньютоновской жидкости в 3D ортогональной структуре и 3D тканевой структуре показало хорошее согласование полученных численных решений и закона Дарси.

С использованием разработанной программы исследовано влияние параметров модели неньютоновской вязкости – степенного индекса и «входных данных» – градиента макродавления на течение неньютоновской жидкости в отдельной поре пористой среды. Результаты показывают, что в отдельной поре с увеличением значения градиента макродавления течение неньютоновской жидкости становится более «интенсивным», а поле неньютоновской вязкости усложняется. Также исследовано влияние анизотропии микроструктуры на течение неньютоновских жидкостей в отдельной поре.

Нелинейный закон фильтрации в пористых средах был проанализирован путем расчета коэффициентов тензора проницаемости и эффективной вязкости неньютоновских жидкостей. Результаты показывают, что коэффициенты тензора проницаемости и эффективная вязкость нелинейно зависят от степенного индекса модели Карро и «входных данных» – градиента макродавления. С увеличением

значения градиента макродавления скорость фильтрации неньютоновской жидкости увеличивается. Под действием фиксированного градиента макродавления с увеличением степенного индекса скорость фильтрации неньютоновской жидкости уменьшается. С увеличением значения градиента макродавления, эффективная вязкость псевдопластичной жидкости уменьшается, а эффективная вязкость дилатантной жидкости увеличивается. При увеличении степенного индекса вязкость неньютоновской жидкости увеличивается.

Данные результаты не только демонстрируют эффективность разработанного программного комплекса для моделирования фильтрации неньютоновско-вязких жидкостей, но также подтверждают точность математических теоретических моделей, полученных в главах 1 и 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОД

1. Разработана физико-математическая модель пространственного течения несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости и многомасштабная модель пространственного течения несжимаемой неньютоновской вязкой жидкости в рамке модели Карро в пористой структуре.

2. На основе метода асимптотической гомогенизации (МАГ) сформулированы локальные задачи пространственного течения несжимаемой неньютоновско-вязкой жидкости в рамке модели Карро в ЯП периодической пористой структуры. Показано, что локальная задача представляет собой стационарную задачу течения некоторой несжимаемой неньютоновско-вязкой жидкой среды, а их решение зависит не только от внутренней геометрии пор, и от определяющего соотношения неньютоновской вязкости и макроскопического градиента давления.

3. С использованием анизотропных нелинейных тензорных функций разработан нелинейный закон фильтрации неньютоновско-вязкой жидкости. Таким образом, их постановка применима для расчетов фильтрации неньютоновско-вязких жидкостей в рамках сделанных в работе допущений и позволяет определить основные характеристики фильтрации в пористых средах – пористость пористой среды, коэффициенты тензора проницаемости и эффективную вязкость неньютоновской жидкости.

4. Сформулированы вариационные постановки локальных задач течения неньютоновско-вязких жидкостей, с помощью которых разработаны численные итерационные алгоритмы решения локальных задач в общей трехмерной постановке на основе метода конечных элементов (МКЭ) и алгоритм расчета неньютоновской вязкости Карро. Также разработаны численные алгоритмы расчета пористости пористой среды, эффективной неньютоновской вязкости и коэффициентов тензора проницаемости.

5. Получены результаты численного моделирования локальных течений неньютоновской вязкой жидкости в рамках модели Карро на ЯП пористых структур и также проанализированы влияния макроскопического градиента давления,

неньютоновской вязкости и анизотропии пористых сред на поле течения в отдельной поре. Результаты показывают, что при увеличении значения градиента давления максимальное значение абсолютного значения компонента вектора скорости жидкости также увеличивается, максимальное значение вязкости дилатантной жидкости увеличивается, а минимальное значение вязкости псевдопластичной жидкости уменьшается. Под действием фиксированного градиента давления, когда степенный индекс модели вязкости увеличивается, максимальное значение абсолютного значения компонента вектора скорости жидкости уменьшается, минимальное значение вязкости псевдопластичной жидкости и максимальное значение вязкости дилатантной жидкости увеличиваются. Эти результаты показывают, что в отдельной поре с увеличением значения градиента макродавления, влияние степенного индекса в рамках модели Карро на течение увеличивается, а поле неньютоновской вязкости усложняется.

6. Получены результаты численного моделирования процесса макроскопической фильтрации неньютоновско-вязкой жидкости в рамке модели Карро в пористых структурах. Результаты показывают, что коэффициенты проницаемости и эффективная вязкость нелинейно зависят от степенного индекса модели неньютоновской вязкости и «входных данных» – градиента давления. С увеличением значения градиента давления, скорость фильтрации неньютоновской жидкости увеличивается. Под действием фиксированного градиента давления, с увеличением степенного индекса, скорость фильтрации неньютоновской жидкости уменьшается. С увеличением значения градиента давления, эффективная вязкость псевдопластичной жидкости уменьшается, а эффективная вязкость дилатантной жидкости увеличивается. При увеличении степенного индекса вязкость неньютоновской жидкости увеличивается. Численные результаты показывают, что с увеличением макроскопического градиента давления, влияние степенного индекса в рамках модели Карро на скорость фильтрации и эффективную вязкость увеличивается.

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров : Учеб. пособие. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.
2. Арсеньев-Образцов С.С. Определение тензора коэффициентов проницаемости численным моделированием течения флюида на цифровой модели пористой среды // Труды российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина. М.: Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) им. И.М. Губкина, 2015. № 4. С. 64 – 77.
3. Астарита Дж., Маруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 312 с.
4. Баландин М.Ю., Шурина Э.П. Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск: Издательство НГТУ, 2000. 70 с.
5. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. М.: Едиториал УРСС, 2003. 376 с.
6. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов: Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
7. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 352 с.
8. Беляев А.Ю. Усреднение в задачах теории фильтрации. М.: Наука, 2004. 200 с.
9. Бодунов Н.М., Бреховских П.В. Фильтрация вязкой жидкости через пористую среду с использованием закона Бринкмана: сб. докл. Всероссийской научно-практической конф. с междунар. уч.: в 2-х томах. Казань: Академия наук Республики Татарстан, 2016. С. 644 – 650.

10. Богданов И.О. Математическое моделирование локальных газодинамических процессов в пористых периодических средах // Молодежный научно-технический вестник. 2015. № 12. 22 с.
11. Богданов И.О. Математическое моделирование локальных процессов фильтрации в пористо-сетчатых материалах // Молодежный научно-технический вестник. 2015. № 11. 27 с.
12. Богданов И.О. Двухмасштабное моделирование пространственных течений жидкостей и газов в пористых композитных структурах : дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Москва. 2018. 133 с.
13. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. М.: Химия, 1977. 440 с.
14. Горбаченко В.И. Вычислительная линейная алгебра с примерами на MATLAB: Учеб. пособие. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 320 с.
15. Джоган О.М., Костенко О.П. Методы изготовления деталей из композиционных материалов пропиткой в оснастке. Ч. 1. Методы пропитки под давлением // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Харьков: ХАИ. 2011. № 4(68). С. 111 – 125.
16. Джоган О.М., Костенко О.П. Методы изготовления деталей из композиционных материалов пропиткой в оснастке. Ч. 2. Методы вакуумной пропитки // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Харьков: ХАИ. 2012. № 1(69). С. 80 – 92.
17. Джоган О.М., Костенко О.П. Практическая классификация методов изготовления деталей из полимерных композиционных материалов пропиткой в оснастке // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Харьков: ХАИ. 2013. № 1(73). С. 21 – 32.
18. Димитриенко Ю.И. Механика композиционных материалов при высоких температурах. М.: Машиностроение, 1997. 368 с.
19. Димитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.

20. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1: Тензорный анализ. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 559 с.
21. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 2: Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 559 с.
22. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 4: Основы механики твердого тела. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 624 с.
23. Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации в пористых средах // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. № 3(75). 19 с.
24. Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации жидкого связующего в композитных конструкциях, изготавливаемых методом RTM // Математическое моделирование и численные методы. 2017. № 2(14). С. 3 – 27.
25. Димитриенко Ю.И., Глазиков М.Л. Моделирование процессов фильтрации в периодических пористых средах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2003. № 1. С. 59 – 71.
26. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости // Математическое моделирование и численные методы. 2016. № 2(10). С. 3 – 23.
27. Димитриенко Ю.И., Захарова Ю.В., Богданов И.О. Математическое и численное моделирование процесса фильтрации связующего в тканевом композите при RTM методе изготовления // Университетский научный журнал. 2016. № 19. С. 33 – 43.
28. Димитриенко Ю.И., Иванов М.Ю. Моделирование нелинейных динамических процессов переноса в пористых средах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. № 1. С. 39 – 56.
29. Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе

- метода асимптотического осреднения// Вестник МГТУ им.Н.Э.Баумана. Сер. Естественные науки.2007, № 1. С. 26 – 46.
30. Димитриенко Ю.И., Левина А.И., Боженик П. Конечно-элементное моделирование локальных процессов переноса в пористых средах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2003. № 3. С. 90 – 104.
31. Димитриенко Ю.И., Левина А.И., Галицын А.А. Конечно-элементное моделирование локальных газодинамических процессов в трехмерных пористых структурах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. Спец. вып. «Математическое моделирование» С. 50 – 65.
32. Димитриенко Ю.И., Ли Шугуан, **Simulation of non-Newtonian uid ows in composite microstructures // Международная конференция «Математика в приложениях» в честь 90-летия Сергея Константиновича Годунова. Новосибирске, С. 4 – 10 августа 2019 г., 2019. С. 259.**
33. Димитриенко Ю.И., Ли Шугуан. **Конечно-элементное моделирование неизотермического стационарного течения неньютоновской жидкости в сложных областях // Математическое моделирование и численные методы. 2018. № 2(18). С. 70 – 95.**
34. Димитриенко Ю.И., Ли Шугуан. **Моделирование проницаемости неньютоновских жидкостей в трехмерных композитных структурах на основе метода асимптотической гомогенизации // Математическое моделирование и численные методы // 2019. № 3(23). С. 19 – 38.**
35. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Метод конечных элементов для решения локальных задач механики композиционных материалов : Учеб. пособие. М.: Изд.-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 66 с.
36. Димитриенко Ю.И., Шпакова Ю.В., Богданов И.О., Сборщиков С.В. Моделирование процесса многоуровневой фильтрации жидкого связующего в тканевом композите при RTM-методе изготовления // Инженерный журнал: Наука и инновации. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. № 12(48). 7 с.

37. Иванов М.Ю. Математическое моделирование динамических процессов в деформируемых пористых системах с фазовыми превращениями : дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Москва. 2014. 158 с.
38. Калиткин Н.Н. Численные методы / под ред. А.А. Самарского. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1978. 512 с.
39. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации: учеб. пособие. М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2009. 88 с.
40. Малкин А.Я., Исаев А.И. Реология. Концепции, методы, приложения. М.: Профессия, 2007. 560 с.
41. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. Ч. I, II. 2 кн.
42. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Издательство Моск. ун-та, 1984. 336 с.
43. Прата С. Язык программирования C++. Лекции и упражнения, 6-е изд.: Пер. с англ. М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2012. 1248 с.
44. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 472 с.
45. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1979. 392 с.
46. Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2 т. М.: Наука, 1970. Т. 1, 492 с.
47. Франк А.М. Дискретные модели несжимаемой жидкости. М.: Физматлит, 2001. 208 с.
48. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы: Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 448 с.
49. Шаповалов В.М., Лапшина С.В. Введение в механику течения волокнонаполненных композитов. М.: Физматлит, 2005. 176 с.
50. Шаповалов В.М. Валковые течения неньютоновских жидкостей. М.: Физматлит, 2011. 168 с.
51. Шульман З.П. Беседы о реофизике. Минск: Наука и техника, 1976. 96 с.

52. Юрин Ю.В. Моделирование деформаций ползучести многослойных тонких пластин методом асимптотического осреднения: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. М., 2017. 141 с.
53. Яковлев Д.О. Моделирование процессов деформирования многослойных тонких термоупругих пластин на основе метода асимптотической гомогенизации: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. М., 2016. 97 с.
54. Ярославов А,О. Математическое моделирование фильтрации неньютоновских жидкостей и разработка геолого-промысловой информации : дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Тюмень. 139 с.
55. Auriault J.L, Royer P., Geindreau C. Filtration law for power-law fluids in anisotropic porous media // International Journal of Engineering Science. 2002. Vol. 40(10) P. 1151 – 1163..
56. Auriault J.L., Boutin C., Geindreau C. Homogenization of coupled phenomena in heterogenous media. John Wiley. 2010. 478 p.
57. Babuška I., The finite element method with Lagrangian multipliers // Numerische Mathematik. 1973. Vol. 20(3) P. 179 – 192.
58. Bakhvalov N.S., Panasenko G., Homogenisation: averaging processes in periodic media: mathematical problems in the mechanics of composite materials. Springer. 2012. 364 p.
59. Bird R.B, Armstrong R.C., Hassager O., Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics. John Wiley. 1987. 649 p.
60. Bird R.B, Wiest J.M., Constitutive equations for polymeric liquids // Annual review of fluid mechanics. 1995. Vol. 27(1) P. 169 – 193.
61. Bouchelaghem F., Jozja N., Multi-scale study of permeability evolution of a bentonite clay owing to pollutant transport: Part I. Model derivation // Engineering Geology. 2009. Vol. 108(1-2) P. 119 – 132.
62. Boutin C., Study of permeability by periodic and self-consistent homogenisation // European Journal of Mechanics-A/Solids. 2000. Vol. 19(4) P. 603 – 632.

63. Brezzi F., On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers // Publications mathématiques et informatique de Rennes. 1974. Vol. (S4) P. 1 – 26.
64. Castillo E, Codina R., Stabilized stress-velocity-pressure finite element formulations of the Navier-Stokes problem for fluids with non-linear viscosity // Computer methods in applied mechanics and engineering, 2014. Vol. 279 P. 554 – 578.
65. Chen X., Zhang Y., Yan S., Two-dimensional simulations of resin flow in dual-scale fibrous porous medium under constant pressure // Journal of Reinforced Plastics and Composites. 2013. Vol. 32(22). P. 1757 – 1766.
66. Collyer A.A. Time dependent fluids. Phys Edu 1974;9:38-44.
67. Coutelieiris F.A., Delgado J.M.P.Q., Transport processes in porous media. Springer. 2012. 249 p.
68. Dimitrienko Yu.I., Dynamic Transport Phenomena in Porous Polymer Materials Under Impulse Thermal Effects // Transport in Porous Media. 1999. Vol. 35. P. 299 – 326.
69. Dimitrienko Yu.I., Mechanics of porous media with phase transformations and periodical structures 1. Method of asymptotic averaging // European Journal of Mechanics-A/Solids. 1998. Vol. 17(2). P. 305 – 319.
70. Dimitrienko Yu.I., Mechanics of porous media with phase transformations and periodical structures 2. Solutions of local and global problems // European Journal of Mechanics-A/Solids. 1998. Vol. 17(2). P. 321 – 337.
71. Dimitrienko Yu.I., Heat-mass-transport and thermal stresses in porous charring materials // Transport in porous media. 1997. Vol. 27(2). P. 143 – 170.
72. Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Simulation of local transfer in periodic porous media // European Journal of Mechanics-B/Fluids. 2013. Vol. 37. P. 174 – 179.
73. Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D., Modeling of Thin Composite Laminates with General Anisotropy under Harmonic Vibrations by the Asymptotic Homogenization Method // International Journal for Multiscale Computational Engineering, 2017, Vol. 15(3). P. 219 – 237.

74. **Dimitrienko Yu.I., Li S., Modeling of Non-Newtonian resin flows in Composite Microstructures//IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. IOP Publishing, 2019, Vol. 683(1): 012008.**
75. **Dimitrienko Yu.I., Li S., Mathematical Simulation of local transfer for non-Newtonian fluid in porous fabrics//Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2019, Vol. 1392(1): 012023.**
76. Dostert P., Efendiev Y., Hou T.Y., Multiscale finite element methods for stochastic porous media flow equations and application to uncertainty quantification // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2008. Vol. 197(43-44). P. 3445 – 3455.
77. Durst F., Haas R., Interthal W., The nature of flows through porous media // Nonnewton Fluid Mech 1987. Vol. 22(2) P. 169 – 189.
78. Fadili A., Tardy P.M.J., Pearson J.R.A., A 3D filtration law for power-law fluids in heterogeneous porous media // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2002. Vol. 106(2) P. 121 – 46.
79. Francucci G., Rodriguez E.S., Moran J., Novel approach for mold filling simulation of the processing of natural fiber reinforced composites by resin transfer molding // Journal of Composite Materials. 2014. Vol. 48(2). P. 191 – 200.
80. Gantois R., Cantarel A., Dusserre G., Felices J.N., Schmidt F., Mold filling simulation of resin transfer molding combining BEM and level set method // Applied Mechanics and Materials. 2011; Vol. 62. P. 57 – 65.
81. Han C.D., Rheology and processing of polymeric materials: Volume 1: Polymer Rheology. Oxford University Press on Demand, 2007. 728 p.
82. Hornung U., Homogenization and Porous Media. Springer. 1997. 279 p.
83. Idris Z., Orgéas L., Geindreau C., et al. Microstructural effects on the flow law of power-law fluids through fibrous media // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 2004, Vol. 12(5). P. 995.
84. Kehrwald D., Lattice Boltzmann simulation of shear-thinning fluids // Journal of statistical physics. 2005. Vol. 121(1-2) P. 223 – 237.

85. Kozicki W., Tiu C., A unified model for non-Newtonian flow in packed beds and porous media // *Rheol Acta*. 1988. Vol. 27(1) P 31 – 38.
86. Kuentzer N., Simacek P., Advani S.G., Walsh S., Permeability characterization of dual scale fibrous porous media // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2006. Vol. 37(11). P. 2057 – 2068.
87. Ladyzhenskaya O.A., *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. New York: Gordon and Breach, 1969. 234 p.
88. Larson R.G., *Constitutive equations for polymer melts and solutions*. Butterworth Publishers; 1988. 363 p.
89. Li J., Fu X., Zhang C., Wang R.L.B., Optimal injection design for resin transfer molding with in situ permeability measurement and process simulation // *Journal of Composite Materials*. 2009. Vol. 43(16). P. 1695 – 1712.
90. **Li S.G., Numerical analysis for fourth-order compact conservative difference scheme to solve the 3D Rosenau-RLW equation // *Computers & Mathematics with Applications*. 2016. Vol. 72(9). P. 2388 – 2407.**
91. **Li S.G., Wu X.G., L^∞ error bound of conservative compact difference scheme for the generalized symmetric regularized long-wave (GSRLW) equations // *Computational and Applied Mathematics*. 2018. Vol. 37(3). P. 2816 – 2836.**
92. **Li S.G., Numerical study of a conservative weighted compact difference scheme for the symmetric regularized long wave equations // *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2019 Vol. 35(1). P. 60 – 83.**
93. Loudad R., Saouab A., Beauchene P., Agogue R., Desjoyeaux B., Numerical modeling of vacuum-assisted resin transfer molding using multilayer approach // *Journal of Composite Materials*. 2017. Vol. 51(24). P. 3441 – 3452.
94. Mauret E., Renaud M., Transport phenomena in multi-particle systems-I. Limits of applicability of capillary model in high voidage beds-application to fixed beds of fibers and fluidized beds of spheres // *Chemical Engineering Science*. 1997. Vol. 52(11). P. 1807 – 1817.
95. Matsuzaki R., Kobayashi S., Todoroki A., Mizutani Y., Flow control by progressive forecasting using numerical simulation during vacuum-assisted resin transfer

- molding // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. 2013. Vol. 45. P. 79 – 87.
96. Michaud V., Tornqvist R., Manson J.A.E., Impregnation of compressible fiber mats with a thermoplastic resin. Part II: Experiments // Journal of Composite Materials. 2001. Vol. 35(13). P 1174 – 1200.
97. Nield D.A., Bejan A., Convection in porous media. New York: springer, 2006. 654 p.
98. Orgéas L., Idris Z., Geindreau C., et al. Modelling the flow of power-law fluids through anisotropic porous media at low-pore Reynolds number // Chemical Engineering Science, 2006. Vol. 61. P. 4490 – 4502..
99. Orgéas L., Geindreau C., Auriault J.L., et al. Upscaling the flow of generalised Newtonian fluids through anisotropic porous media // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2007, Vol. 145. P. 15 – 29..
100. Owens R.G., Phillips T.N., Computational rheology. Imperial College Press; 2002. 427 p.
101. Pearson J.R.A., Tardy P.M.J., Models for flow of non-Newtonian and complex fluids through porous media // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2002. Vol. 102(2). P. 447 – 473.
102. Potter K., Resin Transfer Moulding. Springer Netherlands, 1997. 264 p.
103. Reddy J.N., Gartling D.K., The finite element method in heat transfer and fluid dynamics. CRC press, 2010. 515 p.
104. Shenoy A.V., Darcy-Forchheimer natural, forced and mixed convection heat transfer in non-Newtonian power-law fluid-saturated porous media // Transport Porous Media 1993. Vol. 11(3). P 219 – 241.
105. Shenoy A.V., Non-Newtonian fluid heat transfer in porous media // Advances in Heat transfer. 1994. Vol. 24. P. 101 – 190.
106. Sochi T., Non-Newtonian flow in porous media // Polymer. 2010. Vol. 51(22). P. 5007 – 5023.
107. Sorbie K.S., Polymer-improved oil recovery. Springer, 2013. 359 p.

108. Spelt P.D.M., Selerland T., Lawrence C.J., Lee P.D.. Flows of inelastic non-Newtonian fluids through arrays of aligned cylinders. Part 1. Creeping flows // *Journal of engineering mathematics*. 2005. Vol. 51(1). P. 57 – 80.
109. Tan H., Pillai K.M., Multiscale modeling of unsaturated flow in dual-scale fiber preforms of liquid composite molding I: Isothermal flows // *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2012. Vol. 43(1). P. 1 – 13.
110. Vijaysri M., Chhabra R.P., Eswaran V., Power-law fluid flow across an array of infinite circular cylinders: a numerical study // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 1999. Vol. 87(2-3). P. 263 – 282.
111. Wang J.G., Leung C.F., Chow Y.K., Numerical solutions for flow in porous media // *International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics*. 2003, Vol. 27(7). P. 565 – 583.
112. Woods J.K., Spelt P.D.M., Lee P.D., Selerland T., Lawrence C.J., Creeping flows of power-law fluids through periodic arrays of elliptical cylinders // *Journal of non-newtonian fluid mechanics*. 2003. Vol. 111(2-3). P. 211 – 228.
113. Xu W., Fish J., A multiscale modeling of permeability in a multi-porosity porous medium using smoothed particle hydrodynamics // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2017. Vol. 111(8). P. 776 – 800.
114. Yi Y.M., Park S.H., Youn S.K., Asymptotic homogenization of viscoelastic composites with periodic microstructures // *International Journal of Solids and Structures*. 1998. Vol. 35(17). P. 2039 – 2055.
115. Zhang H.W., Zhang S., Bi J.Y., et al. Thermo-mechanical analysis of periodic multiphase materials by a multiscale asymptotic homogenization approach // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2007. Vol. 69(1). P. 87 – 113.
116. Zienkiewicz O.C., Qu S., Taylor R.L., et al. The patch test for mixed formulations // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1986. Vol. 23(10). P. 1873 – 1883.
117. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z., *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals: Seventh Edition*. Butterworth-Heinemann, 2013. 756 p.